Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala PREZIME I IME: ______________________
Instrumentacija i merenje–stari studenti
Merenje i regulacija–stari studenti BROJ INDEKSA: ______________
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi** datum: 4. avgust 2025.

Predispitne obaveze 1 — 20 poena

1. [2 poena] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće.

   Za $A, B \in \mathcal{F}$ je $P(AB) =$ pod uslovom

   Za $A, B \in \mathcal{F}$ je $P(A \cup B) =$

2. [3 poena] U kutiji se nalaze tri kuglice plave boje i dve kuglice zelene boje. Na slučajan način se biraju odjednom dve kuglce iz date kutije.

   Izračunati verovatnoću da će biti izvučene kuglice iste boje.

   Ako su izvučene kuglice iste boje izračunati verovatnoću da su zelene.

3. [4 poena] Data je funkcija $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \dfrac{x^2-1}{8}, & 1 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2}, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$. Da li je data funkcija funkcija raspodele neke slučajne promenljive? Objasniti odgovor!

   Ako jeste, izračunati verovatnoću $P\left(1.5 < X < 2.5\right)$.

   Ako jeste, da li je slučajna promenljiva X čija je funkcija raspodele data gornjim izrazom, slučajna promenljiva neprekidnog tipa? Objasniti odgovor!

4. [2 poena] Slučajna promenljive X data je zakonom raspodele verovatnoća $X : \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 2 \\ 0.1 & p & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$. Odrediiti konstantu p, funkciju raspodele i matematičko očekivanje slučajne promenljive $Y = X^2 - 1$.

5. [9 poena] Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodelu, a uslovna slučajna promenljiva $Y|X = x$, $x \in (0, 1)$, ima uniformnu $\mathcal{U}(-2x, 2x)$ raspodelu.

   Odrediti gustinu raspodele slučajne promenljive (X, Y).

   $F_{X,Y}(\frac{1}{2}, 1) =$

   Odrediti gustinu raspodele slučajne promenljive Y i njeno matematičko očekivanje.

   Odrediti $F_{Y|X=x}(y)$, funkciju raspodele slučajne promenljive $Y|X = x$.

   Izračunati $E(Y|X = x)$, matematičko očekivanje slučajne promenljive $Y|X = x$.

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala PREZIME I IME: ____________________

Instrumentacija i merenje–stari studenti

Merenje i regulacija–stari studenti BROJ INDEKSA: ____________

predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi** datum: 4. avgust 2025.

Predispitne obaveze 2 — 10 poena

1. [4 poena] Neka je $X_t = tU$, $t > 0$, gde je U slučajna promenljiva sa uniformnom $\mathcal{U}(0,2)$ raspodelom. Izračunati očekivanje i korelacionu funkciju slučajnog procesa X_t. Odrediti njegove raspodele prvog reda.

$U: \mathcal{U}(\overset{a}{0}, \overset{b}{2})$

$$m_X(t) = E(X_t) = E(tU) = t \cdot E(U) = t \cdot \frac{0+2}{2} = t$$

$$R_X(t,s) = E(X_t \cdot X_s) = E(t \cdot U \cdot sU) = st\, E(U^2) = \frac{4}{3} st$$

$$D(U) = E(U^2) - E(U)^2$$

$$E(U^2) = D(U) + E(U)^2 = \frac{(2-0)^2}{12} + \left(\frac{0+2}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} + 1 = 4/3$$

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u \le 0 \\ \frac{u}{2}, & 0 < u \le 2 \\ 1, & u > 2 \end{cases}$$

$$F_{X_t}(x) = P(X_t < x) = P(t \cdot U < x) \overset{t>0}{=} P\left(U < \frac{x}{t}\right) = F_U\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & \frac{x}{t} \le 0 \\ \frac{\frac{x}{t}}{2}, & 0 < \frac{x}{t} \le 2 \\ 1, & \frac{x}{t} > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{2t}, & 0 < x \le 2t \\ 1, & x > 2t \end{cases}$$

2. [6 poena] Lanac Markova dat je skupom stanja $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ i matricom prelaza za jedan korak $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \not> 0$

Da li postoje finalne verovatnoće za dati lanac Markova? Obrazložiti odgovor! Ako postoje izračunati ih.

$$\mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2/3)^2 & 0 & 1-(2/3)^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \not> 0$$

$$\mathbb{P}^n = \begin{bmatrix} (2/3)^n \to 0 & 0 & 1-(2/3)^n \to 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \not> 0 \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

конв. врсте нису исте не постоји p^*

Ako je na početku sistem u stanju s_1 onda je početni vektor verovatnoća $p(0) =$

$$\begin{array}{cccc} & s_1 & s_2 & s_3 \\ p(0) = & [\,\underbrace{1}_{p_1(0)} & 0 & 0\,] \end{array}$$

Izračunati verovatnoću da se sistem kroz ~~dva~~ 10 koraka nađe u stanju s_2 ako je na početku bio u stanju s_1.

$$p(10) = p(0)\cdot \mathbb{P}^{10} = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} & 0 & 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \quad \boxed{0} \quad 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right] \qquad p_2(10) = 0$$

$P(X_0 = s_1, X_1 = s_1, X_2 = s_3, X_4 = s_3) =$ $p_1(0)\cdot p_{11}(1)\cdot p_{13}(1)\cdot p_{33}(2)$

$$= 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1$$

$P(X_0 = s_1, X_3 = s_1, X_5 = s_1, X_7 = s_1, ...) =$

$$= p_1(0)\cdot p_{11}(3)\cdot p_{11}(2)\cdot p_{11}(2)\ldots$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \ldots$$

Kako se nazivaju stanja s_2 i s_3 datog lanca Markova? апсорбујућа стања

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala PREZIME I IME: ____________________
Instrumentacija i merenje–stari studenti
Merenje i regulacija–stari studenti BROJ INDEKSA: ____________
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi** datum: 8. avgust 2025.

Deo završnog ispita — Zadaci 1 — 35 poena

1. [6 poena] Dat je krug poluprečnika 1. Oko kruga je opisan jednakostranični trougao, a u krug je upisan kvadrat. Ako se tačka na slučajan način bira iz unutrašnjosti trougla, izračunati verovatnoću da tačka pripada unutrašnosti kruga, a da ne pripada unutrašnjosti kvadrata.

2. [6 poena] Na stolu se nalaze tri kutije, K_1, K_2 i K_3. U kutiji K_1 se nalaze tri kuglice označene brojem 1 i dve kuglice označene brojem 2; u kutiji K_2 se nalaze tri kuglice označene brojem 2 i u kutiji K_3 se nalazi jedna kuglica označena brojem 1, jedna kuglica označena brojem 2 i jedna kuglica označena brojem 3. Na slučajan način se iz kutija K_1 i K_2 uzima po jedna kuglica i prebacuje u kutiju K_3, a zatim se iz kutije K_3 na slučajan način izvlače odjednom dve kuglice. Izračunati verovatnoću da će zbir brojeva napisanih na izvučenim kuglicama (iz kutije K_3) biti neparan broj.

3. [10 poena] U kutiji se nalazi šest kuglica. Dve kuglice su obojene plavom bojom, tri su obojene roza bojom, a jedna je obojena belom bojom. Emica na slučajan način uzima dve kuglice odjednom iz kutije. Slučajna promenljiva X predstavlja broj izvučenih kuglica plave boje, a slučajna promenljiva Y predstavlja broj izvučenih kuglica bele boje.

   a) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive (X, Y).

   b) Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.

   c) Odrediti raspodelu i matematičko očekivanje slučajne promenljive $Z = \min\{X, Y\}$.

4. [9 poena] Slučajna promenljiva X je data funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \in (0,1), \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

   a) Izračunati konstantu a.

   b) Naći raspodelu i matematičko očekivanje slučajne promenljive $Y = 1 - X$.

5. [9 poena] Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnom $\mathcal{E}(1)$ raspodelom. Odrediti raspodelu (funkciju gustine ili funkciju raspodele) slučajne promenljive $Z = X + 2Y$.

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala PREZIME I IME: __________________
Instrumentacija i merenje–stari studenti
Merenje i regulacija–stari studenti BROJ INDEKSA: ____________
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi** datum: 8. avgust 2025.

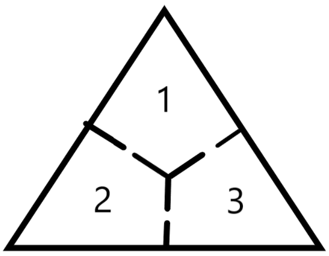
Deo završnog ispita — Zadaci 2 — 30 poena

1. [5 poena] Na takmičenju u pogađanju trojki, igrač šutira na koš 100 puta. Verovatnoća da pogodi trojku u svakom nezavisnom gađanju je 0.8. Igrač osvaja nagradu ukoliko pogodi bar 70 trojki. Izračunati verovatnoću da je igrač osvojio nagradu.

2. [8 poena] Obeležje X ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{\theta}{3} & \frac{\theta}{3} & 1-\frac{2\theta}{3} \end{pmatrix}$. Na osnovu uzorka obima n, metodom maksimalne verodostojnosti oceniti nepoznati parametar θ. Ispitati centriranost i postojanost dobijene ocene.

3. [8 poena] Dat je slučajni proces $X_t = X\cos(t+Y)$, $t \in \mathbb{R}$, gde su X i Y nezavisne slučajne promenljive. Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelu, a slučajna promenljiva Y ima uniformnu $\mathcal{U}(0,2\pi)$ raspodelu. Ispitati slabu stacionarnost datog slučajnog procesa X_t.

4. [9 poena] Miš se nalazi u kutiji prikazanoj na slici. U diskretnim trenucima miš se šeta po kutiji, menja prostoriju u kojoj se nalazi, tako što na slučajan način bira otvor kroz koji prolazi. Vreme prolaska kroz otvor je zanemarljivo malo.



   (a) Napraviti matricu prelaza za jedan korak, ako su stanja sistema određena brojem prostorije u kojoj se miš nalazi.
   (b) Da li dati lanac Markova ima finalne verovatnoće? Obrazložiti odgovor! Ako ima, izračunati ih.
   (c) Izračunati verovatnoću da će nakon tri koraka miš doći u prostoriju broj 2, ako je prostorija u koju je na početku stavljen izabrana na slučajan način.