

Matematička analiza 2
Računarstvo i automatika
13. 6. 2024.

1. (5 poena) Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$ konvergira uslovno, ali ne konvergira apsolutno. Naći sumu datog reda sa tačnošću $\epsilon = 0.2$.
2. (7 poena) Odrediti oblast konvergencije i naći sumu funkcionalnog reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n-2} (2x+1)^n$.
3. (7 poena) Izračunati zapreminu oblasti $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 2x\}$.
4. (10 poena) Izračunati vrednost krivolinijskog integrala $\int_L -y dx + x dy$ po krivoj
 $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2, 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1\}$, koja je orijentisana od tačke $A(0, 1)$ ka tački $B(0, \sqrt{2})$.
 - (a) direktno;
 - (b) primenom Grinove formule.
5. (8 poena) Preslikavanjem $w = \frac{1}{e^{\frac{-2\pi i}{z-2i+1}} - 1} + \frac{1}{2}$ preslikati oblast $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| > 1, \operatorname{Re}(z) > -1, \operatorname{Im}(z) > 2\}$.
6. (8 poena) Ispitati singularitete funkcije $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^5 - 4z^3}$ i izračunati $\int_L f(z) dz$, ako je kriva
 $L = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, r > 0, r \neq 2\}$ pozitivno orijentisana.
7. (5 poena) Razviti funkciju $f(x) = |x| + 1$ u Furijeov red na intervalu $[-1, 1]$, a zatim izračunati sumu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.
8. (5 poena) Koristeći Laplasovu transformaciju, rešiti integralnu jednačinu:

$$y(x) + e^{3x} - \int_0^x e^{3(x-u)} y(u) du = x e^{3x}.$$

Teorija:

1. (15 poena) Brojni redovi, kriterijumi konvergencije.
2. (15 poena) Tejlorov i Loranov razvoj kompleksne funkcije kompleksne promenljive.
3. (15 poena) (Teorijski zadatak) Koristeći Košijev kriterijum, ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.