# Kompleksna analiza

## Kompleksni integral

### Zadaci:

1. **Izračunati vrednost integrala po krivoj $C$ funkcije $f(z) = z^4$, ako je kriva $C$:**

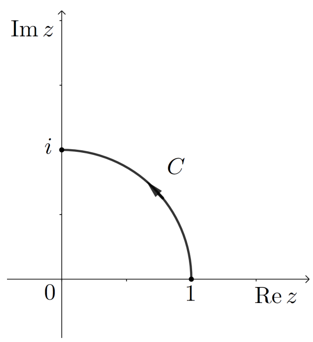
   a) deo jedinične kružnice u prvom kvadrantu orijentisana od tačke $z = 1$ do tačke $z = i$,

   b) duž koja spaja tačku $z = 1$ i tačku $z = i$, orijentisana od tačke $z = 1$ do tačke $z = i$,

   c) unija duži koja spaja tačku $z = 1$ i tačku $z = 1 + i$, i duži koja spaja tačku $z = 1 + i$ i tačku $z = i$, orijentisana od tačke $z = 1$ do tačke $z = i$.

**Rešenje:**

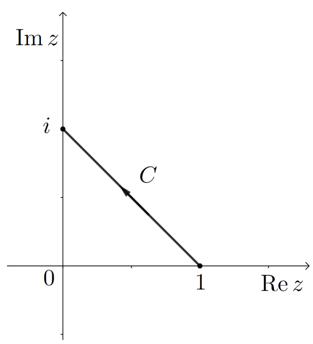
a)




Parametrizacijom $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, za $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ krive $C$ dobija se $z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$, pa je $dz = ie^{it}\,dt$.

$$\int_C z^4\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{4it} ie^{it}\,dt = i\frac{1}{5i}e^{5it}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}(e^{\frac{5\pi}{2}i} - 1) = \frac{1}{5}(i-1).$$

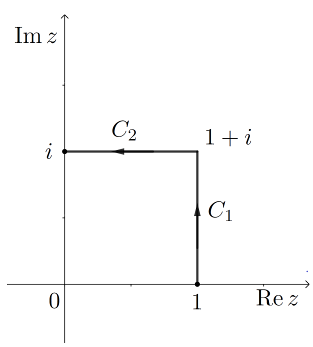
b)




Duž koja spaja tačku $z = 1$ i tačku $z = i$, leži na pravoj $y = 1 - x$, pa parametrizacijom $x(t) = t$, $y(t) = 1 - t$, za $t \in \overleftarrow{[0,1]}$ krive $C$ dobija se $z(t) = t + i(1-t)$, pa je $dz = (1-i)\,dt$.

$$\int_C z^4\,dz = -\int_0^1 (t + i(1-t))^4(1-i)\,dt = -(1-i)\int_0^1 (-4t^4 + 8t^3 - 8it^3 + 12it^2 - 4it - 4t + 1)\,dt = (i-1)(-\frac{4}{5}t^5 + 2t^4 - 2it^4 + 4it^3 - 2it^2 - 2t^2 + t)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}(i-1).$$

c)




Neka je $C = C_1 \cup C_2$.
Parametrizacijom krive $C_1 : x(t) = 1$, $y(t) = t$, za $t \in [0,1]$ dobija se $z(t) = 1 + it$, pa je $dz = i\,dt$. Parametrizacijom krive $C_2 : x(t) = t$, $y(t) = 1$, za $t \in \overleftarrow{[0,1]}$, dobija se $z(t) = t + i$, pa je $dz = dt$.

$$\int_C z^4\,dz = \int_{C_1} z^4\,dz + \int_{C_2} z^4\,dz = \int_0^1 (1+it)^4 i\,dt - \int_0^1 (t+i)^4\,dt = \int_0^1 ((1 + 4it - 6t^2 - 4it^3 + t^4)i - (1 - 4it - 6t^2 + 4it^3 + t^4))\,dt$$

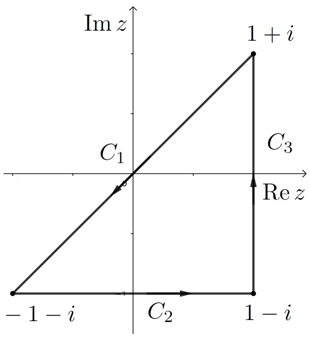
$$= \left(\frac{i-1}{5}t^5 + (1-i)t^4 + (2-2i)t^3 + (2i-2)t^2 + (i-1)t\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5}(i-1).$$

Napomena: Kako je funkcija $f(z) = z^4$ analitička funkcija na $\mathbb{C}$, postoji primitivna funkcija $F(z) = \dfrac{z^5}{5} + c$ na $\mathbb{C}$ pa je integral po bilo kojoj putanji orijentisanoj od tačke $z = 1$ do tačke $z = i$

$$\int\limits_C z^4\,dz = F(z)\Big|_1^i = F(i) - F(1) = \frac{i}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(i-1).$$

2. **Izračunati vrednost integrala po krivoj $C$ funkcije $f(z) = \operatorname{Im} z$, ako je kriva $C$ pozitivno orijentisan rub trougla čija su temena tačke $z = 1+i$, $z = -1-i$ i $z = 1-i$.**

**Rešenje:**




Neka je $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.
Parametrizacijom krive $C_1 : x(t) = t,\ y(t) = t$, za $t \in \overleftarrow{[-1,1]}$ dobija se $z(t) = t + it$, pa je $dz = (1+i)\,dt$. Parametrizacijom krive $C_2$ : $x(t) = t, y(t) = -1$, za $t \in [-1,1]$, dobija se $z(t) = t - i$, pa je $dz = dt$. Parametrizacijom krive $C_3 : x(t) = 1,\ y(t) = t$, za $t \in [-1,1]$, dobija se $z(t) = 1 + it$, pa je $dz = i\,dt$.

$$\int\limits_C \operatorname{Im} z\,dz = \int\limits_{C_1} \operatorname{Im} z\,dz + \int\limits_{C_2} \operatorname{Im} z\,dz + \int\limits_{C_3} \operatorname{Im} z\,dz = -\int\limits_{-1}^{1} t(1+i)\,dt + \int\limits_{-1}^{1} (-1)\,dt + \int\limits_{-1}^{1} ti\,dt = -t\Big|_{-1}^{1} = -2.$$

## Košijeve integralne formule

**Zadaci:**

1. **Izračunati vrednost integrala** $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{(z-2)(z+5i)}\,dz$, **ako je kriva** $C = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 2\}$ **pozitivno orijentisana.**

   **Rešenje:**

   Singulariteti podintegralne funkcije su $z_0 = 2$ i $z_1 = -5i$, ali samo $z_0 = 2 \in \operatorname{int} C$. Kako je funkcija $f(z) = \frac{e^{2z}}{z+5i}$ analitička u $\operatorname{int} C$, na osnovu Košijeve integralne formule sledi

   $$\int\limits_C \frac{e^{2z}}{(z-2)(z+5i)}\,dz = \int\limits_C \frac{\frac{e^{2z}}{z+5i}}{z-2}\,dz = 2\pi i \frac{e^{2z}}{z+5i}\bigg|_{z=2} = 2\pi i \frac{e^4}{2+5i}.$$

2. **Izračunati vrednost integrala** $\int\limits_C \frac{\sin z}{z^2(z-4)}\,dz$, **ako je kriva** $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 5\}$ **pozitivno orijentisana**

   **Rešenje:**

   Singulariteti podintegralne funkcije su $z_0 = 0$ i $z_1 = 4$ i oba singulariteta se nalaze u unutrašnjosti krive $C$. Neka su $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ i $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-4| = \frac{1}{2}\}$ pozitivno orijentisane krive. Za krive $C_1$ i $C_2$ važi da su obe zatvorene, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ i $C_1 \subset \operatorname{int} C$, $C_2 \subset \operatorname{int} C$ i

   $$\int\limits_C \frac{\sin z}{z^2(z-4)}\,dz = \int\limits_{C_1} \frac{\sin z}{z^2(z-4)}\,dz + \int\limits_{C_2} \frac{\sin z}{z^2(z-4)}\,dz.$$

   Tada, $z_0 = 0 \in \operatorname{int} C_1$ i funkcija $f(z) = \frac{\sin z}{z-4}$ je analitička u $\operatorname{int} C_1$, pa na osnovu Košijeve integralne formule sledi

   $$\int\limits_{C_1} \frac{\sin z}{z^2(z-4)}\,dz = \int\limits_{C_1} \frac{\frac{\sin z}{z-4}}{z^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{\sin z}{z-4}\right)' = \frac{2\pi i}{1!}\frac{(z-4)\cos z - \sin z}{(z-4)^2}\bigg|_{z=0} = \frac{-2\pi i}{4} = \frac{-\pi}{2}i.$$

   Analogno, $z_1 = 4 \in \operatorname{int} C_2$ i funkcija $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ je analitička u $\operatorname{int} C_2$, pa na osnovu Košijeve integralne formule sledi

   $$\int\limits_{C_2} \frac{\sin z}{z^2(z-4)}\,dz = \int\limits_{C_2} \frac{\frac{\sin z}{z^2}}{z-4}\,dz = 2\pi i \frac{\sin z}{z^2}\bigg|_{z=4} = 2\pi i \frac{\sin 4}{16} = \frac{\pi \sin 4}{8} i.$$

   Dakle, $\int\limits_C \frac{\sin z}{z^2(z-4)}\,dz = -\frac{\pi}{2}i + \frac{\pi \sin 4}{8} i = \frac{\pi(\sin 4 - 4)}{8} i.$

3. **Izračunati vrednost integrala** $\int\limits_C \frac{1}{z^2+4}\,dz$, **ako je** $C$ **proizvoljna zatvorena pozitivno orijentisana kriva.**

**Rešenje:**

Singulariteti podintegralne funkcije $g(z) = \frac{1}{z^2+4}$ su $z_0 = 2i$ i $z_1 = -2i$. Kako je $C$ proizvoljna zatvorena pozitivno orijentisana kriva, razlikujemo pet slučajeva:

1° $z_0 \notin \operatorname{int} C \cup C$ i $z_1 \notin \operatorname{int} C \cup C$. Tada je funkcija $g(z) = \frac{1}{z^2+4}$ analitička na $\operatorname{int} C$, pa je $\int\limits_C \frac{1}{z^2+4}\,dz = 0.$

2° $z_0 \in \operatorname{int} C$ i $z_1 \notin \operatorname{int} C \cup C$. Tada je funkcija $f(z) = \frac{1}{z+2i}$ analitička na $\operatorname{int} C$, pa je na osnovu Košijeve integralne formule $\int\limits_C \frac{1}{z^2+4}\,dz = \int\limits_C \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}\,dz = 2\pi i \frac{1}{z+2i}\Big|_{z=2i} = \frac{\pi}{2}.$

3° $z_0 \notin \operatorname{int} C \cup C$ i $z_1 \in \operatorname{int} C$. Tada je funkcija $f(z) = \frac{1}{z-2i}$ analitička na $\operatorname{int} C$, pa je na osnovu Košijeve integralne formule $\int\limits_C \frac{1}{z^2+4}\,dz = \int\limits_C \frac{\frac{1}{z-2i}}{z+2i}\,dz = 2\pi i \frac{1}{z-2i}\Big|_{z=-2i} = -\frac{\pi}{2}.$

4° $z_0 \in \operatorname{int} C$ i $z_1 \in \operatorname{int} C$. Neka su $C_1$ i $C_2$ pozitivno orijentisane krive za koje važi da su obe zatvorene, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ i $C_1 \subset \operatorname{int} C$, $C_2 \subset \operatorname{int} C$ i $z_0 \in \operatorname{int} C_1$, $z_1 \in \operatorname{int} C_2$. Tada je funkcija $f(z) = \frac{1}{z+2i}$ analitička na $\operatorname{int} C_1$, pa je na osnovu Košijeve integralne formule kao u slučaju 2° $\int\limits_{C_1} \frac{1}{z^2+4}\,dz = \frac{\pi}{2}$, dok je funkcija $f(z) = \frac{1}{z-2i}$ analitička na $\operatorname{int} C_2$, pa je na osnovu Košijeve integralne formule kao u slučaju 3° $\int\limits_{C_2} \frac{1}{z^2+4}\,dz = -\frac{\pi}{2}$. Sledi da je $\int\limits_C \frac{1}{z^2+4}\,dz = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$

5° $z_0 \in C$ ili $z_1 \in C$. Tada, podintegralna funkcija nije neprekidna nad krivom $C$, pa integral nije definisan.