Predikatska logika

★ Semantika predikatskog računa ★

1. **Odrediti jedan model i jedan kontra-model za formulu**

$$(\forall x)(\exists y)P(f(x,y),a).$$

Rešenje:

Odrediti model za formulu F znači odrediti $\mathcal{D} = \langle D, I \rangle$ tako da za svaku valuaciju v važi $(\mathcal{D}, v) \models F$

Odrediti kontra-model za F znači odrediti $\mathcal{D} = \langle D, I \rangle$ tako da postoji valuacija v za koju važi da $(\mathcal{D}, v) \not\models F$.

$\boxed{\text{Model}}$ $D = \mathbb{Z}$ $I = \begin{pmatrix} P & f & a \\ = & + & 0 \end{pmatrix}$

$(\forall x)(\exists y)\ x + y = 0$

Za svaki ceo broj x postoji ceo broj y tako da je $x + y = 0$. To znači da je $y = -x$ i u skupu $\mathbb{Z}$ važi ova f-la.

$D = \mathbb{N}$ $I = \begin{pmatrix} P & f & a \\ = & + & 2 \end{pmatrix}$

$(\forall x)(\exists y)\ x + y = 2$

kontramodel!

$\boxed{\text{Kontra-model}}$

$D = \mathbb{Z}$ $I = \overbrace{\begin{pmatrix} P & f & a \\ = & \cdot & 1 \end{pmatrix}}^{\text{model}} \to D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$(\forall x)(\exists y)\ x \cdot y = 1$

Za svaki ceo broj x postoji ceo broj y tako da važi $x \cdot y = 1$. Ova formula nije tačna u skupu $\mathbb{Z}$ jer ako $x \mapsto 0$, onda ne postoji y tako da je $0 \cdot y = 1$.

2. **Naći jedan model i jedan kontra-model za formulu**

$$(\forall x)\Big(P\big(x,f(x)\big) \wedge \underbrace{\neg P(x,x)}\Big) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)\Big(\big(P(x,y)\wedge P(y,z)\big) \Rightarrow P(x,z)\Big)$$

Rešenje:

$\boxed{\text{Model}}$ $\quad D = \mathbb{N} \qquad I = \begin{pmatrix} P & f(x) \\ < & x+1 \end{pmatrix}$

$$(\forall x)\big(\underbrace{x < x+1} \wedge \underbrace{\neg(x<x)}\big) \wedge \underbrace{(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z)}$$

za svaki prirodan broj x važi da je $x<x+1$ ✓

za svako $x\in\mathbb{N}$ nije $x<x$ ✓

tranzitivnost relacije $<$ na skupu $\mathbb{N}$ ✓

$\boxed{\text{Kontra-model}}$ $\quad D = \mathbb{N} \qquad I = \begin{pmatrix} P & f(x) \\ \le & x+1 \end{pmatrix}$

$$(\forall x)\big(x < x+1 \wedge \underline{\neg(x\le x)}\big) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\le y \wedge y\le z \Rightarrow x\le z) \quad ✓$$

ovo nije tačno jer je $\le$ refleksivna relacija

tranzitivnost relacije $\le$ na $\mathbb{N}$

npr. $x\mapsto 2$, onda $2\le 2$

tj. nije tačno $\neg(2\le 2)$

Dakle, $\neg(x\le x)$ nije tačno, pa onda i formula

$(\forall x)(x<x+1 \wedge \neg(x\le x))$ nije tačna, te i polazna formula

nije tačna pošto joj jedan konjunkt nije tačan.

3. **Ako je moguće odrediti jedan model i jedan kontra-model za formulu**

$$(\forall x)P(x,a) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P\big(f(x,y),b\big).$$

Rešenje:

$\boxed{\text{Model}}$ $D = \mathbb{N}$ $I = \begin{pmatrix} P & f & a & b \\ \geq & + & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\underbrace{(\forall x)\, x \geq 1}_{\top} \Rightarrow \underbrace{(\forall x)(\exists y)}\, x+y \geq 3$

T (svaki prirodan broj je ≥ 1)

Za svaki prirodan broj x postoji prirodan broj y tako da je $x+y \geq 3$ T

$D = \mathbb{N}$ $I = \begin{pmatrix} P & f & a & b \\ \geq & + & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\underbrace{(\forall x)\, x \geq 3}_{\perp} \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\, x+y \geq 2$

$\perp$ jer za $x \mapsto 1$ onda važi $1 \geq 3$

$\boxed{\perp \Rightarrow ? = \top}$

$\boxed{\text{Kontra-model}}$ $D = \{0,1\}$ $I = \begin{pmatrix} P & f & a & b \\ \rho & c_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $c_1(x) = 1,\ x \in D$

$(\forall x)\ (x,1) \in \rho \Rightarrow (\forall x)(\exists y)\ (1,0) \in \rho$

$0, 1$ $(0,1) \in \rho$ $(1,1) \in \rho$

$\top \Rightarrow \perp = \perp$

4. **Ako je moguće odrediti jedan model i kontramodel za formulu**

$$(\forall x)\Big(P(x,a) \Rightarrow (\exists y)P\big(f(x,y),y\big)\Big).$$

Rešenje:

$\boxed{\text{Model}}$

$D = \mathbb{N}$ $\quad I = \begin{pmatrix} P & f & a \\ \geq & + & 2 \end{pmatrix}$

$\underbrace{(\forall x)(\underbrace{x \geq 2 \Rightarrow (\exists y)\ \underbrace{x+y \geq y}_{\text{uvek važi za sve prirodne brojeve } x \text{ i } y}}_{\text{tačno}})}_{\text{tačno}}$

$\boxed{\text{Kontra-model}}$

$D = \mathbb{N}$ $\quad I = \begin{pmatrix} P & f & a \\ \leq & + & 1 \end{pmatrix}$

$(\forall x)(x \leq 1 \Rightarrow (\exists y)\ x+y \leq y)$

$x \mapsto 1 \quad \underbrace{1 \leq 1}_{\top} \Rightarrow \underbrace{(\exists y)\ 1+y \leq y}_{\perp} = \perp$

5. **Dokazati da formula** $(\forall x)\big(A(x) \vee B(x)\big) \Rightarrow (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$ **nije valjana.**

Rešenje:

$A(x) = P(x)$ P - unarni relacijski simbol

$B(x) = Q(x)$ Q — 〃 — -

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

$\boxed{\text{Kontramodel}}$ $D = \mathbb{N}$ $I = \begin{pmatrix} P & Q \\ \text{broj je paran} & \text{broj je neparan} \end{pmatrix}$

$\underbrace{(\forall x)(x \text{ je paran ili } x \text{ je neparan})}_{\text{ovo je tačno jer je svaki prirodan broj ili paran ili neparan}} \Rightarrow \underbrace{(\forall x)(x \text{ je paran}) \vee (\forall x)(x \text{ je neparan})}_{\text{ovo nije tačno jer niti su svi prirodni brojevi parni niti su svi neparni}}$

$\top \Rightarrow \bot = \bot$

$(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x) \Rightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B(x))$ nije valjana

6. **Dokazati da je formula $\big((\forall x)A \wedge B\big) \Leftrightarrow (\forall x)(A \wedge B)$ valjana, pri čemu u formuli B nema slobodnih pojavljivanja promenljive x.**

Rešenje:

Da bismo pokazali da je formula valjana treba dokazati da je svaka $\mathcal{L}$-struktura $\langle D, I\rangle$ model te formule, odnosno da je formula tačna za proizvoljnu $\mathcal{L}$-strukturu $\langle D, I\rangle$ i proizvoljnu valuaciju v.

$$\big((\forall x)A \wedge B\big) \Leftrightarrow (\forall x)(A \wedge B)$$

Neka je $\langle D, I\rangle$ proizvoljna $\mathcal{L}$-struktura i v proizvoljna valuacija

$I_v\big(((\forall x)A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)(A \wedge B)\big) = 1$ akko $I_v((\forall x)A \wedge B) = I_v((\forall x)(A \wedge B))$

pretp. $I_v((\forall x)A \wedge B) = 0 \iff \boxed{I_v((\forall x)A) = 0}$ ili $I_v(B) = 0$

$I_v((\forall x)A) = 0$ akko postoji valuacija $w \sim_x v$ tako da $I_w(A) = 0$

Kako u f-li B nema slobodnih pojavljivanja prom. x i vrednost f-le u nekoj interpretaciji ne zavisi od vrednosti prom koje nisu slobodne onda je $I_v(B) = I_w(B)$

$I_v((\forall x)A \wedge B) = 0$ akko postoji valuacija $w \sim_x v$ tako da $I_w(A)$ 0 ili $I_w(B) = 0$

pretp. $I_v((\forall x)(A \wedge B)) = 0$ akko postoji valuacija $w \sim_x v$ takva da je $I_w(A \wedge B) = 0$

akko postoji valuacija $w \sim_x v$ takva da je $I_w(A) = 0 \vee I_w(B) = 0$

Dakle, formule $(\forall x)A \wedge B$ i $(\forall x)(A \wedge B)$ imaju iste vrednosti za svaku valuaciju nad proizvoljnom $\mathcal{L}$-strukturom, što znači da je polazna formula valjana.