Slučajni procesi

Zadatak 1

POSTAVKA: Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0,1)$ i neka je $X_t,\ t \in \mathbb{R}$ slučajni proces definisan sa $X_t = e^t U + t^2 V$. Naći sledeće karakteristike slučajnog procesa X_t:

(a) matematičko očekivanje,

(b) autokovarijansnu funkciju,

(c) disperziju.

REŠENJE:
Pošto slučajne promenljive U i V imaju $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu, sledi da je $\mathsf{E}(U) = \mathsf{E}(V) = 0$ i $\mathsf{D}(U) = \mathsf{D}(V) = 1$, a iz $\mathsf{D}(U) = \mathsf{E}(U^2) - (\mathsf{E}(U))^2$ dobijamo da je $\mathsf{E}(U^2) = \mathsf{D}(U) + (\mathsf{E}(U))^2 = 1 + 0 = 1$ i analogno $\mathsf{E}(V^2) = 1$.

(a) $m_X(t) = \mathsf{E}(e^t U + t^2 V) \overset{[1]}{=} e^t \mathsf{E}(U) + t^2 \mathsf{E}(V) = e^t \cdot 0 + t^2 \cdot 0 = 0.$

(b) Autokovarijansnu funkciju nalazimo na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\mathsf{K}_X(t,s) &= \mathsf{E}\left((X_t - m_X(t))(X_s - m_X(s))\right) = \mathsf{E}(X_t X_s) = \mathsf{E}\left(\left(e^t U + t^2 V\right)\left(e^s U + s^2 V\right)\right) \\
&= \mathsf{E}\left(e^{s+t} U^2 + \left(e^t s^2 + e^s t^2\right) UV + t^2 s^2 V^2\right) \overset{[1],[2]}{=} \\
&= e^{s+t} \mathsf{E}\left(U^2\right) + \left(e^t s^2 + e^s t^2\right) \mathsf{E}(U)\,\mathsf{E}(V) + t^2 s^2 \mathsf{E}\left(V^2\right) = \\
&= e^{s+t} \cdot 1 + 0 + (ts)^2 \cdot 1 = e^{s+t} + t^2 s^2
\end{aligned}$$

(c) $\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = e^{t+t} + (tt)^2 = e^{2t} + t^4.$

[1] - Matematičko očekivanje je linearna transformacija.
[2] - Slučajne promenljive U i V nezavisne, te je $\mathsf{E}(UV) = \mathsf{E}(U)\,\mathsf{E}(V)$.

Zadatak 2

Postavka: Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive, U sa binomnom $\mathcal{B}\left(5, \frac{1}{5}\right)$ raspodelom, a V sa uniformnom $\mathcal{U}(1,3)$ raspodelom. Naći srednju vrednost, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa

$$X_t = (U+t)\ V^t,\quad t \in [0,\infty).$$

Rešenje:
Iz zadanih raspodela vidimo da je

$$\mathsf{E}(U) = 5\cdot\tfrac{1}{5} = 1,\qquad \mathsf{D}(U) = 5\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{4}{5} = \tfrac{4}{5},\qquad \mathsf{E}(U^2) = \mathsf{D}(U) + \mathsf{E}^2(U) = \tfrac{9}{5}.$$

Matematičko očekivanje procesa za sve $t \in [0,\infty)$ je

$$m_X(t) = \mathsf{E}\left((U+t)\,V^t\right) \overset{[1]}{=} \mathsf{E}(U+t)\,\mathsf{E}\left(V^t\right) = \left(\mathsf{E}(U)+t\right)\int_{-\infty}^{\infty} v^t\,\varphi_V(v)\,dv =$$

$$= (1+t)\int_1^3 v^t\cdot\frac{1}{2}dv = \frac{1+t}{2}\frac{v^{t+1}}{t+1}\Big|_{v=1}^{v=3} = \frac{3^{t+1}-1}{2}$$

Autokorelaciona funkcija procesa: za sve $t, s \in [0,\infty)$ je

$$R_X(t,s) = \mathsf{E}\left((U+t)\,V^t\ (U+s)\,V^s\right) = \mathsf{E}\left(\left(U^2+(t+s)\,U+ts\right)V^{t+s}\right) \overset{[2]}{=}$$

$$= \mathsf{E}\left(U^2+(t+s)\,U+ts\right)\mathsf{E}\left(V^{t+s}\right) = \left(\mathsf{E}\left(U^2\right)+(t+s)\,\mathsf{E}(U)+ts\right)\int_{-\infty}^{\infty} v^{t+s}\varphi_V(v)\,dv =$$

$$= \left(\frac{9}{5}+(t+s)+ts\right)\int_1^3 v^{t+s}\cdot\frac{1}{2}dv = \left(\frac{4+5ts}{10\,(t+s+1)}+\frac{1}{2}\right)\left(3^{t+s+1}-1\right)$$

Disperzija procesa: za sve $t \in [0,\infty)$ je $\mathsf{D}_X(t) = R_X(t,t) - m_X(t)^2 = \left(\dfrac{4+5t^2}{10\,(2t+1)}+\dfrac{1}{2}\right)\left(3^{2t+1}-1\right) - \left(\dfrac{3^{t+1}-1}{2}\right)^2.$

[1] - Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih U i V sledi nezavisnost slučajnih promenljivih $U+t$ i V^t za svako $t \in [0,\infty)$.
[2] - Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih U i V sledi nezavisnost slučajnih promenljivih $U^2 + (t+s)\,U + ts$ i V^{t+s} za svako $t \in [0,\infty)$.

Zadatak 3

Postavka: Neprekidne i nezavisne slučajne promenljive X i Y su date svojim gustinama raspodele:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} x & , \ x \in [0,1) \\ 2-x & , \ x \in [1,2] \\ 0 & , \ x \notin [0,2] \end{cases},\qquad \varphi_Y(y) = \begin{cases} y-3 & , \ y \in [3,4) \\ 5-y & , \ y \in [4,5] \\ 0 & , \ y \notin [3,5] \end{cases},$$

i definisan je slučajni proces $U_t = atX + btY,\ t \in \mathbb{R}$, gde su a i b realni parametri.

(a) Odrediti srednju vrednost, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa U_t.

(b) Za koje vrednosti parametara a i b je proces stacionaran?

Rešenje:

$$\mathsf{E}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi_X(x)\,dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\left(2x-x^2\right)dx=1,$$

$$\mathsf{E}(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\varphi_X(x)\,dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2\left(2x^2-x^3\right)dx=\frac{7}{6},$$

$$\mathsf{D}(X)=\mathsf{E}(X^2)-\mathsf{E}^2(X)=\frac{7}{6}-1^2=\frac{1}{6},$$

$$\mathsf{E}(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y\,\varphi_Y(y)\,dy=\int_3^4\left(y^2-3y\right)dy+\int_4^5\left(5y-y^2\right)dy=4,$$

$$\mathsf{E}(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty} y^2\,\varphi_Y(y)\,dy=\int_3^4\left(y^3-3y^2\right)dy+\int_4^5\left(5y^2-y^3\right)dy=\frac{97}{6},$$

$$\mathsf{D}(Y)=\mathsf{E}(Y^2)-\mathsf{E}^2(Y)=\frac{97}{6}-4^2=\frac{1}{6}.$$

(a) Srednja vrednost procesa:
$m_U(t)=\mathsf{E}(atX+btY)=at\mathsf{E}(X)+bt\mathsf{E}(Y)=at+4bt=(a+4b)\,t.$

Autokorelaciona funkcija:

$$\begin{aligned}\mathsf{R}_U(t,s)&=\mathsf{E}(U_t\,U_s)=\mathsf{E}((atX+btY)(asX+bsY))=\mathsf{E}\left(a^2tsX^2+b^2tsY^2+2abtsXY\right)\overset{[1]}{=}\\&=a^2ts\mathsf{E}\left(X^2\right)+b^2ts\mathsf{E}\left(Y^2\right)+2abts\mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(Y)=\\&=\frac{7}{6}a^2ts+\frac{97}{6}b^2ts+8abts=\frac{1}{6}\left(7a^2+48ab+97b^2\right)ts\end{aligned}$$

Disperzija procesa:

$\mathsf{D}_U(t)=\mathsf{D}(atX+btY)=\mathsf{K}_U(t,t)=\mathsf{R}_U(t,t)-m_U^2(t)=\frac{1}{6}(a^2+b^2)\,t^2.$

[1]- Slučajne promenljive X i Y su nezavisne, te je $E(XY)=E(X)E(Y)$.

(b) Da bi slučajni proces U_t bio stacionaran, mora biti $m_U(t)\equiv const$ i $\mathsf{R}_U(t,s)$ mora da bude funkcija od $(t-s)$.

S jedne strane $m_U(t)=(a+4b)\,t=const$ samo ako je $a=-4b$, i tada je
$U_t=bt\,(-4X+Y)$ -u tom slučaju je $m_U(t)\equiv 0,\ t\in R$;
S druge strane, za $a=-4b$ je $\mathsf{R}_U(t,s)=\frac{17}{6}b^2ts$ funkcija od $(t-s)$ samo za $b=0$ -tada je $\mathsf{R}_U(t,s)=0\cdot(t-s)$.
Sledi da mora biti $a=b=0$. Ali tada je $U_t\equiv 0$ i u tom slučaju, trivijalno, proces U_t jeste stacionaran.

Zadatak 4

Postavka: (**Slučajne harmonijske oscilacije**) Harmonijski oscilator generiše signal dat funkcijom $X_t=A\cos(wt+B)$, $t\in[0,\infty)$ gde je w neslučajna ciklična frekvencija, A slučajna amplituda sa gustinom $\varphi_A(a), a>0$ a B slučajna oscilacija sa uniformnom $\mathcal{U}(-\pi,\pi)$ raspodelom. Amplituda i oscilacija su nezavisne slučajne promenljive.
Ispitati slabu stacionarnost slučajnog procesa X_t.

Rešenje:
Treba ispitati da li važi da je $m_X(t) = E(X_t) = const, \forall t$ i da li je $R_X(t,s) = f(t-s)$.

Ispitujemo prvo da li je srednja vrednost konstantna.
$m_X(t) = E(A\cos(wt+B)) \overset{[1]}{=} E(A)E(\cos(wt+B)) \overset{[2]}{=} E(A)\cdot 0 = 0 \to m_X(t) = 0, \forall t$

[1]− Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih A i B sledi nezavisnost slučajnih promenljivih A i $\cos(wt+B)$.

[2] − $E(\cos(wt+B)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(wt+x)\varphi_B(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(wt+x)\frac{1}{2\pi}\,dx = 0.$

Sada ispitujemo da li je autokorelaciona funkcija funkcija od $t-s$.

$$\begin{aligned}
R_X(t,s) &= E(X_tX_s) = E(A\cos(wt+B)A\cos(ws+B)) \overset{[3]}{=}\\
&= E(A^2)E(\cos(wt+B)\cos(ws+B)) \overset{[4]}{=}\\
&= E(A^2)E\Big(\frac{1}{2}[\cos(wt+B-ws-B)+\cos(wt+B+ws+B)]\Big) =\\
&= \frac{E(A^2)}{2}(E(\cos(w(t-s))) + E(\cos(wt+ws+2B))) =\\
&= \frac{E(A^2)}{2}\Big(\cos(w(t-s))+0\Big) = f(t-s)
\end{aligned}$$

Pa zaključujemo da je X_t slabo stacionaran.

[3] - Sledi iz nezavisnosti slučajnih promenljivih A i B.
[4] - Koristimo $\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$.

Zadatak 5

Postavka: Slučajne promenljive X i Y su nezavisne, pri čemu je gustina slučajne promenljive X

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} - x^2 & , \quad x\in[0,1] \\ 0 & , \quad x\notin[0,1] \end{cases},$$

a slučajna promenljiva Y ima uniformnu $\mathcal{U}(0,\pi)$ raspodelu. Odrediti matematičko očekivanje, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa $U_t = X\cos(t-Y)$, $t\in\mathbb{R}$.
Rešenje:

- Matematičko očekivanje:

$$m_U(t) = \mathsf{E}(X\cos(t-Y)) \overset{[1]}{=} \mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(\cos(t-Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t-y)\;\varphi_Y(y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{4}{3}-x^2\right)dx \cdot \int_0^{\pi} \cos(t-y)\;\frac{1}{\pi}dy = \left(\frac{4}{3}\int_0^1 xdx - \int_0^1 x^3dx\right)\cdot\frac{1}{\pi}\int_t^{t-\pi}(-\cos z)\,dz =$$

$$= \frac{5}{6\pi}\sin t$$

- Autokorelaciona funkcija:

$$\mathsf{R}_U(t,s) = \mathsf{E}(U_t U_s) = \mathsf{E}\left(X^2 \cos(t-Y)\cos(s-Y)\right) \overset{[1]}{=} \mathsf{E}\left(X^2\right)\mathsf{E}(\cos(t-Y)\cos(s-Y)) =$$

$$= \int_0^1 x^2\left(\frac{4}{3}-x^2\right)dx \;\cdot\; \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t-y)\cos(s-y)\,dy = \frac{11}{90}\cos(s-t)$$

- Disperzija:

$$\mathsf{D}_U(t) = \mathsf{K}_U(t,t) = \mathsf{R}_U(t,t) - m^2(t) = \frac{11}{90}\cos 0 - \frac{25}{36\pi^2}\sin^2 t = \frac{11}{90} - \frac{25}{36\pi^2}\sin^2 t.$$

[1] - Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih X i Y sledi nezavisnost slučajnih promenljivih X i $\cos(t-Y)$.

Zadatak 6

Postavka: Neka je $U : \mathcal{E}(1)$ slučajna promenljiva i neka je $X_t, t \in \mathbb{R}$ slučajni proces definisan sa $X_t = e^t U$. Naći raspodele prvog i drugog reda slučajnog procesa X_t.

Rešenje:

$$U : \mathcal{E}(1) \rightarrow F_U(u) = \begin{cases} 1-e^{-u} & , \quad u > 0 \\ 0 & , \quad u \leq 0. \end{cases}$$

Raspodele prvog reda nalazimo na sledeći način:

$$F_{X_t}(x) = P(X_t < x) = P(e^t U < x) = P(U < xe^{-t}) = F_U(xe^{-t}) =$$

$$= \begin{cases} 1-e^{-xe^{-t}} & , \quad xe^{-t} > 0 \\ 0 & , \quad xe^{-t} \leq 0. \end{cases} = \begin{cases} 1-e^{-xe^{-t}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Raspodele drugog reda nalazimo na sledeći način:

$$F_{X_t,X_s}(x,y) = P(X_t < x, X_s < y) = P(e^t U < x, e^s U < y) =$$

$$= P(U < xe^{-t}, U < ye^{-s}) = P\Big(U < min\{xe^{-t}, ye^{-s}\}\Big) =$$

$$= F_U\Big(min\{xe^{-t}, ye^{-s}\}\Big) = \begin{cases} 1-e^{-min\{xe^{-t},ye^{-s}\}} & , \quad min\{xe^{-t}, ye^{-s}\} > 0 \\ 0 & , \quad min\{xe^{-t}, ye^{-s}\} \leq 0. \end{cases}$$

Ako dodatno primetimo da je $min\{xe^{-t}, ye^{-s}\} > 0 \Leftrightarrow xe^{-t} > 0 \wedge ye^{-s} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge y > 0$,

konačno dobijamo:

$$F_{X_t,X_s}(x,y) = \begin{cases} 1-e^{-min\{xe^{-t},ye^{-s}\}} & , \quad x > 0 \wedge y > 0 \\ 0 & , \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Zadatak 7

Postavka: Dat je slučajni proces $X_n = X + nY, n \in \mathbb{N}$, gde su X i Y nezavisne slučajne promenljive date raspodelama:

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(a) Napisati skup stanja slučajnog procesa X_n.

(b) Naći raspodelu prvog reda za zasek X_2.

(c) Naći raspodelu drugog reda za par zaseka X_0 i X_2.

(d) Naći matematičko očekivanje $m_X(n)$ i korelacionu funkciju $R_X(n,k)$ procesa X_n.

Rešenje:

(a) Skup vrednosti slučajnog procesa X_n je $S = \{-2, -1, \cdots\}$.

(b) Kako je $X_2 = X + 2Y$, raspodelu prvog reda za X_2 dobijamo na sledeći način:

$$F_{X_2}(s) = P(X_2 < s) = P(X + 2Y < s) = F_{X+2Y}(s) = \begin{cases} 0, & s \le -2 \\ \frac{3}{8}, & -2 < s \le 0 \\ \frac{7}{8}, & 0 < s \le 2 \\ 1, & s > 2 \end{cases},$$

jer slučajna promenljiva $X_2 = X + 2Y$ ima zakon raspodele $X + 2Y : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Napomena: Kako nalazimo odgovarajuće verovatnoće iz zakona raspodele za slučajnu promenljivu $X + 2Y$ možemo videti na sledećem primeru:
$P(X + 2Y = -2) = P(X = -2, Y = 0) = P(X = -2)P(Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

(c) Funkcija raspodele slučajne promenljive X data je sa $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \frac{1}{2}, & -2 < x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

a funkcija raspodele slučajne promenljive Y je data sa $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{3}{4}, & 0 < y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$

Kako je $X_0 = X$ i $X_2 = X + 2Y$, raspodelu drugog reda za X_0 i X_2 nalazimo na sledeći način:

$$\begin{aligned} F_{X_0,X_2}(s,t) &= P(X_0 < s, X_2 < t) = P(X < s, X + 2Y < t) = \\ &= P(X < s)P(X + 2Y < t | X < s) = F_X(s)P(X + 2Y < t | X < s) = (*) \end{aligned}$$

Na osnovu funkcije raspodele slučajne promenljive X, $F_X(x)$, zaključujemo da za početak treba da razlikujemo tri slučaja: $s \le -2$, $-2 < s \le 0$ i $s > 0$.

(i) Za $s \le -2$ $F_X(s) = 0$ pa dobijamo $(*) = 0 \cdot P(X + 2Y < t | X < s) = 0, \forall t$

(ii) Za $-2 < s \le 0$ $F_X(s) = \frac{1}{2}$ pa dobijamo

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2} \cdot P(X + 2Y < t | X < s) = \frac{1}{2} \cdot P(X + 2Y < t | X = -2) = \frac{1}{2} \cdot P(-2 + 2Y < t) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot P(2Y < t + 2) = \frac{1}{2} \cdot P\Big(Y < \frac{t+2}{2}\Big) = \frac{1}{2} \cdot F_Y\Big(\frac{t+2}{2}\Big) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} 0, & \frac{t+2}{2} \le 0 \\ \frac{3}{4}, & 0 < \frac{t+2}{2} \le 1 \\ 1, & \frac{t+2}{2} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \le -2 \\ \frac{3}{8}, & -2 < t \le 0 \\ \frac{1}{2}, & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(iii) Za $s > 0$ $F_X(s) = 1$ pa dobijamo

$$(*) = 1 \cdot P(X + 2Y < t | X < s) = P(X + 2Y < t | X < s) = \frac{P(X + 2Y < t, X < s)}{P(X < s)} \overset{[1]}{=}$$
$$= P(X + 2Y < t, X < s) = P(X + 2Y < t, X \in \{-2, 0\}) \overset{[2]}{=}$$
$$= P(X = -2)P(X + 2Y < t | X = -2) + P(X = 0)P(X + 2Y < t | X = 0) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot P(-2 + 2Y < t) + \frac{1}{2} \cdot P(0 + 2Y < t) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot P\Big(Y < \frac{t+2}{2}\Big) + \frac{1}{2} \cdot P\Big(Y < \frac{t}{2}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot F_Y\Big(\frac{t+2}{2}\Big) + \frac{1}{2} \cdot F_Y\Big(\frac{t}{2}\Big) = (**)$$

Kako je

$$F_Y\Big(\tfrac{t+2}{2}\Big) = \begin{cases} 0, & t \leq -2 \\ \frac{3}{4}, & -2 < t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$F_Y\Big(\tfrac{t}{2}\Big) = \begin{cases} 0, & \frac{t}{2} \leq 0 \\ \frac{3}{4}, & 0 < \frac{t}{2} \leq 1 \\ 1, & \frac{t}{2} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{3}{4}, & 0 < t \leq 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

konačno dobijamo

$$(**) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0, & s > 0 \wedge t \in (-\infty, -2] \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0, & s > 0 \wedge t \in (-2, 0] \\ \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}, & s > 0 \wedge t \in (0, 2] \\ \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1, & s > 0 \wedge t \in (2, \infty) \end{cases} = \begin{cases} 0, & s > 0 \wedge t \in (-\infty, -2] \\ \frac{3}{8}, & s > 0 \wedge t \in (-2, 0] \\ \frac{7}{8}, & s > 0 \wedge t \in (0, 2] \\ 1, & s > 0 \wedge t \in (2, \infty) \end{cases}$$

[1]- Za $s > 0$ $P(X < s) = F_X(s) = 1$

[2]- Primenom formule totalne verovatnoće.

(d) Nađimo najpre $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$ i $E(Y^2)$.

$E(X) = -2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = -1$
$E(Y) = 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
$E(X^2) = (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} = 2$
$E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Sada je:

$$m_X(n) = E(X_n) = E(X + nY) = E(X) + nE(Y) = -1 + n \cdot \frac{1}{4} = \frac{n-4}{4}$$

$$R_X(n,k) = E(X_n X_k) = E((X + nY)(X + kY)) = E(X^2 + (n+k)XY + nkY^2) =$$
$$= E(X^2) + (n+k)E(X)E(Y) + nkE(Y^2) = 2 - (n+k)\frac{1}{4} + nk\frac{1}{4}$$