

Вежбе 8

-Основни појмови теорије графова-

Граф G је уређени пар $(V(G), E(G))$

$V(G)$ - скуп чворова (vertices)

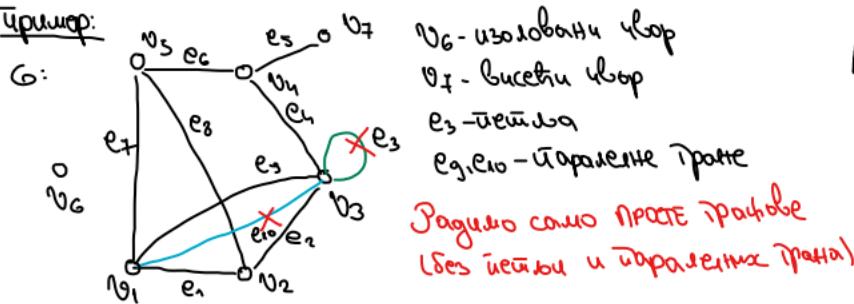
$E(G)$ - скуп дрота (edges)

$v_i \in$ континуални скупови

- чворови и v су крајеви дроте e
 - чворови и v су суседни
 - дрота је ИНЦИДЕНТНА са v и w
- v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7
- $e = uv$

Граф G можемо дефинисати и као уређену тријаду $(V(G), E(G), \Gamma_G)$, где је Γ_G структура инцидентног

пример:



$N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ (neighborhood)

Скуп суседа чвора v

$N(v_5) = \{v_1, v_2, v_6\}$

$d_G(v) = |N_G(v)|$ степен чвора v (degree)

$d_G(v_5) = 3$

Користи се и ознака $\deg(v)$

Степен изолованог чвора је 0, а степен висетног чвора је 1.

$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v)$ минималан степен

$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v)$ максималан степен

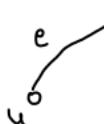
Регуларан граф = Граф код који сви чворови имају исти степен

G је k -регуларан $\Leftrightarrow d_G(v) = k, \forall v \in V(G)$

T: (ОСНОВНА ТЕОРЕМА ТЕОРИЈЕ ГРАФОВА)

Због сваке чворове сваког графа је парни број и једнак је двоструком броју грана графа, тј.

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$$


Сваку парну бројићи до 2 пукот, то једнако за сваки парни крај.

П1: Број чворова непарног степена сваког графа је паран.

Vo - чворови парног степена (остатак при делизби са 2 је 0)

V1 - чворови непарног степена

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_0} d(v) + \sum_{v \in V_1} d(v)$$

парно
пукот
парно

$\sum_{v \in V_1} d(v)$ је парно само ако је број садирала парни број.

П2: ако граф садржи непаран број чворова, тада је његов чвор парног степена.

ако су два чворова непарног степена, иначе граф са непарним бројем чворова непарног степена.

Да ли постоји 7-репичарачији граф са 77 чворова? $\rightarrow \text{НЕ}$

1. 7-репичарачији граф мора имати парни број чворова (П1)

2. Граф са 77 чворова мора имати ће једнак чвор парног степена (П2)

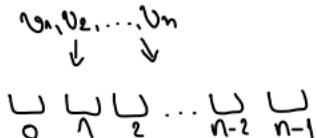
} Довољно је написати једно од овај две

1. У сваком графу постоје два чвора једнаких степена.

Посматрајмо граф $G = (V, E)$, где је $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Знатно да у графу са n чворова билоци $0 \leq d(v_i) \leq n-1, \forall v_i \in V$

Нелико да расподелимо n чворова у n купија
у зависности од степена чвора.



Разликујмо следеће случајеве:

1° Ако G садржи изоловани чвор, одга сигурно не садржи чвор степена $n-1$

n чворова
 $n-1$ купија $\{0, 1, \dots, n-2\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Да} \\ \text{Не} \end{array} \right\} \Rightarrow$ Јар 2 чвора су у истој купији, тј. чине ју степена $n-1$

2° Уколико икако чвор степена $n-1$, одга икако изоловати чвор

n чворова
 $n-1$ купија $\{1, 2, \dots, n-1\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Да} \\ \text{Не} \end{array} \right\} \Rightarrow$ Јар 2 чвора икако чине степен

3° На крају посматрајмо случај да G нема икако изоловати, икако чвор степена $n-1$

n чворова
 $n-2$ купије $\{1, 2, \dots, n-2\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Да} \\ \text{Не} \end{array} \right\} \Rightarrow$ Јар 2 чвора икако чине степен

На оставу доказивамо да у овим случајевима смо добили да $\exists v_i, v_j \in V$ такви да је $d(v_i) = d(v_j)$

2. Колико на скупу $V = \{1, 2, \dots, n\}$ има

a) различитих графова

b) различитих графова са тачно m грана?

a) Максималниот број грана у графу со n чврдота је $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Број различитих графова одговара броју подскупова скупот грана, а то је $2^{\binom{n}{2}}$.

b) Бирани m различитих грана из скупот со $\binom{n}{2}$ грана то $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ начини.

3. Нека је G граф са n чворова и $n - 1$ грана. Доказати да у G постоји изоловани или висећи чврор.

Према ставу који је доказано, да је $\underbrace{d(v) \geq 2, \forall v \in V}_{\Leftrightarrow \delta(G) \geq 2}$

Јако је $|V|=n$ и $|E|=n-1$, због остварене теореме Барбера

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

$$2 \cdot (n-1) = \sum_{v \in V} d(v) \geq n \cdot 2$$

$$n-1 \geq n$$

Заштетујући да $\exists u \in V$ такав да је $d(u)=0$ или $d(u)=1$

4. Нека је G граф са n чворова у ком су u и v несуседни чворови за које важи $d(u) + d(v) \geq n + r - 2$, за неко $r \in \mathbb{N}$. Доказати да u и v имају бар r заједничких суседа.

Према доказати $|N(u) \cap N(v)| \geq r$

На основу првичног укључетва и исključetva је $|N(u) \cup N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cap N(v)|$, али је $|N(u) \cap N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cup N(v)| = d(u) + d(v) - |N(u) \cup N(v)|$

Зато

$N(u) \subseteq V \setminus \{u, v\}$ (Граф је прост и не садржи петље, а чворови u и v су несуседни)
 $N(v) \subseteq V \setminus \{u, v\}$

Сада је $N(u) \cup N(v) \subseteq V \setminus \{u, v\}$, али је $|N(u) \cup N(v)| \leq n - 2$

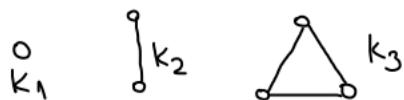
Добијамо

$$|N(u) \cap N(v)| = \underbrace{d(u) + d(v)}_{\geq n+r-2 \text{ услов}} - \underbrace{|N(u) \cup N(v)|}_{\leq n-2} \geq n+r-2-(n-2) = n+r-2-n+2=r$$

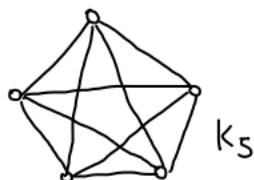
$$\geq -(n-2)$$

5. Одредити број чворова и грана за следеће графове

a) комплетан граф K_n



b) празан граф $\overline{K_n}$, број чворова n
без грата



$$|V(\overline{K_n})| = n$$

$$|E(\overline{K_n})| = 0$$

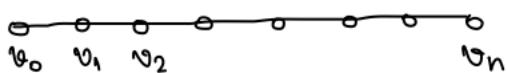
$\overline{K_n}$ је 0-репулсарни граф

$$|V(K_n)| = n$$

$$|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

K_n је $(n-1)$ -репулсарни граф

б) пут P_{n+1} (path)



$$|V(P_{n+1})| = n+1$$

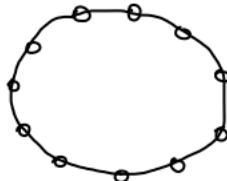
$$|E(P_{n+1})| = n \leftarrow \text{дужина пута}$$

Јута је полупрекувачи грађ

$$d(v_0) = d(v_n) = 1$$

$$d(v_i) = 2, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$$

в) контура C_n = циклус (cycle)



$$|V(C_n)| = n$$

$$|E(C_n)| = n$$

Дужина контуре C_n је n .

C_n је парна контура ако је n парно,
а непарна ако је n непарно

Контура C_n је 2-рециклијацији грађ

д) комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$

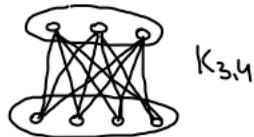
Граф G је бипартијитан ако поседује непразни дисјунктивни скупови X и Y за које важи $V = X \cup Y$ и $E \subseteq \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$

комплетан бипартијитан граф $K_{m,n}$

$\Rightarrow G(X,Y)$ где је $E = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}, |X| = m, |Y| = n$

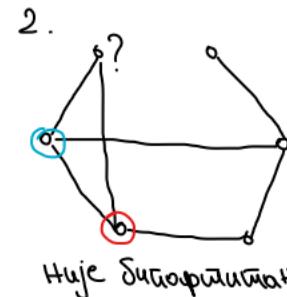
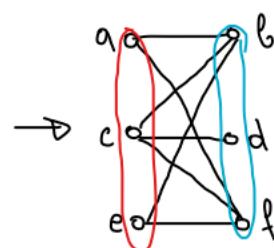
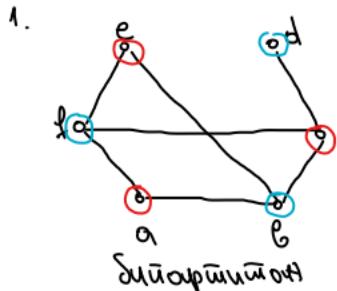
$$|V(K_{m,n})| = m + n$$

$$|E(K_{m,n})| = \underbrace{n+n+\dots+n}_{m-\text{чуба}} = m \cdot n$$



* гетероморфизација: k -партијитни графови $V = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k, E \subseteq \{x_i x_j \mid x_i \in X_i, x_j \in X_j, i \neq j\}$

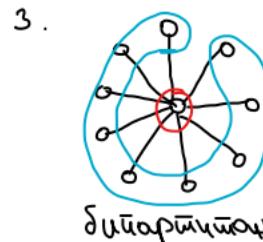
пример:



$$K_{m,n}, |X| = m, |Y| = n$$

$\left. \begin{array}{l} \forall u \in X \quad d(u) = n \\ \forall v \in Y \quad d(v) = m \end{array} \right\} \Rightarrow K_{m,n} \text{ је полупрекорапат}$

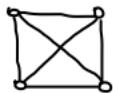
Т: Граф је бипартијитан ако не садржи непарне контуре



6. За сваки паран природан број $n \geq 4$ постоји кубни граф са n чворова.

Кубни = 3-регуларни граф

$$\bullet n=4$$



$$\bullet n=6$$

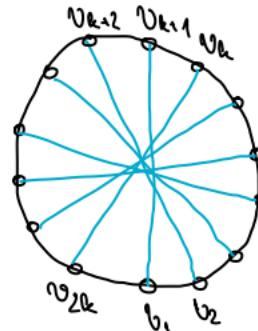


$$\bullet n=2k$$

Јасно је да имамо контуру C_{2k} .

Получимо "дужине" одједнако

$$v_i v_{k+i}, i=1,2,3,\dots,k$$

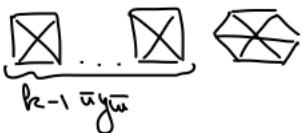


II начин: утицај 3-регуларних графова

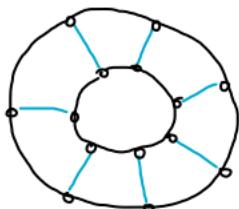
$$1^{\circ} n=4k$$



$$2^{\circ} n=4k+2$$



III начин:



$$n=2k$$

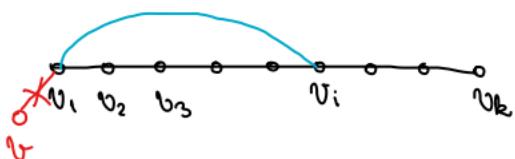
Јасно је да имамо 2 контуре са k чворовима: $v_1 v_2 \dots v_k v_1$ и $v_1 v_2 \dots v_k v_1$

Причински граф добијамо додавањем још k грана: $v_i v_i, i=1,2,\dots,k$

7. Ако је у графу G степен сваког чвора бар 2, онда G садржи контуру.

Усљед $\forall v \in V, \deg(v) \geq 2$ имамо заједнички и као $\delta(G) \geq 2$

Досматрајмо пут који максималне дужине у графу G , тј. пут $v_1v_2v_3\dots v_k$



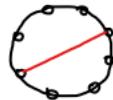
Због услова $\delta(G) \geq 2$ знајмо да постоји чвр $v \in V$ ш.г. $v_i, v \in E$

Ако је v чвр који није на путу, отада је пут $v_1v_2\dots v_k$ дужи од максималног.

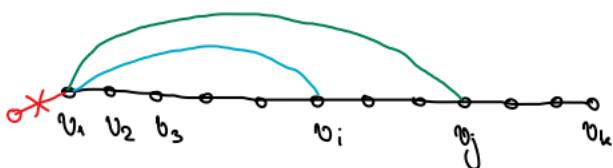
\Rightarrow Сусед чвора v_1 је теки од чворова v_3, v_4, \dots, v_k . Нека је то чвр v_i .

Обиди смо контуру $v_1v_2v_3\dots v_iv_1$

8. Ако је $\delta(G) \geq 3$, доказати да G садржи контуру са тетивом.



Нека је $v_1 v_2 v_3 \dots v_k$ пук максималне дужине у G .



Из условја $\delta(G) \geq 3$, на исти начин као у претходном задатку добијамо да су суседи чвора v_i на пуку.
 $\Rightarrow \exists v_i, v_j \in V, 3 \leq i < j \leq k$ такви да $v_i v_i, v_i v_j \in E$

Сада је шрапнена контура $v_1 v_2 v_3 \dots v_i \dots v_j v_i$,
а $v_i v_i$ је његова тетива.

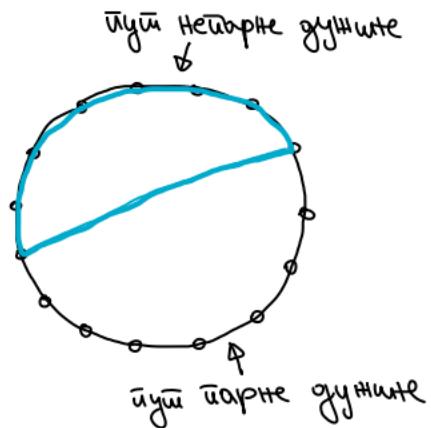
9. Ако је $\delta(G) \geq 3$, доказати да G садржи контуру парне дужине.

$\delta(G) \geq 3 \stackrel{8}{\Rightarrow}$ Садржи контуру C са чаком

1° Контура C је парне дужине \Rightarrow доказ је ћећи

2° Контура C је непарне дужине

Печиво дели непарну контуру на два пукта
различичне парносци. Ако непарном пукту уздамо
чаком, добијамо контуру парне дужине

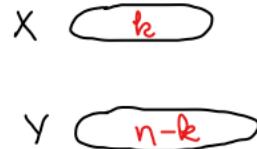


10. Ако је $\delta(G) \geq 2$, доказати да G садржи контуру дужине бар $\delta(G) + 1$.

11. Ако је G бипартитан граф са n чворова и e грана, доказати да је $e \leq \frac{n^2}{4}$.

Нека је $G(X, Y)$ дати бипартитни граф.

$$|V| = n = |X| + |Y|$$



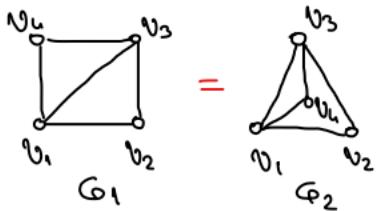
Нека је $|X|=k$. Тада је $|Y|=n-k$.

$$\begin{aligned} e &= |E(G(X, Y))| \leq |X| \cdot |Y| \\ &= k \cdot (n - k) \\ &= kn - k^2 \end{aligned}$$

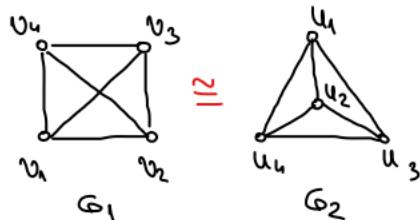
ПРЕДУСТАВЉАМО да класа X има мањи број чворова, тј. да валичи $k \leq \frac{n}{2}$

Сада је

$$e \leq kn - k^2 \leq \frac{n}{2} \cdot n - \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{2n^2 - n^2}{4} = \frac{n^2}{4}$$



$$G_1 = G_2 \Leftrightarrow V(G_1) = V(G_2), E(G_1) = E(G_2)$$



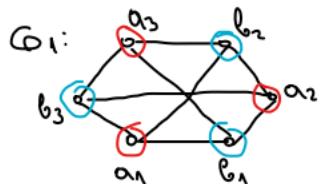
2 различичне
рећрезентације
графа K_4

изоморфизам $f: (v_1, v_2, v_3, v_4) \rightarrow (u_1, u_2, u_3, u_4)$ (један од могућих изоморфизама)

Е изоморфизам f за који вали
1° $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ бијекција
2° $uv \in E(G_1) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(G_2)$

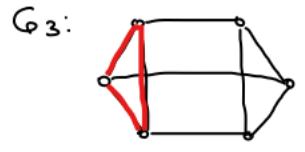
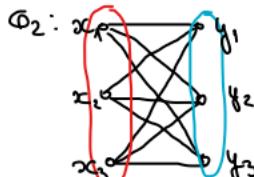
пример:

Изоморфни графови имају исти број чворова, исти број рута, истие стизаје симетрије чворова. Тако не морају да су два графа за које ово вали и да су изоморфни



$$G_1 \cong G_2$$

$$a_i \mapsto x_i, b_i \mapsto y_i \quad i=1,2,3$$



$$G_2 \not\cong G_3, G_1 \not\cong G_3$$

$$|V|=6, |E|=9, 3-\text{ретуарни}$$

G_2 је ретуарни, а G_3 није
(G_3 симетрији пруга)

G_1 је такође ретуарни

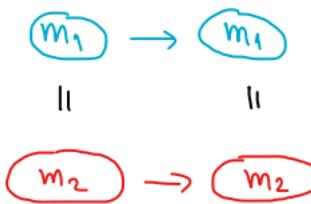
12. Колико има изоморфизама за два комплетна графа са по n чворова?

Потошто ако у тештоту комплетни графови, суседноста је очувана за свако бијекцијно пресликавање скупа од n чворова на скуп од n чворова.

Број бијекцијних пресликавања једнак је броју пермутација n -точкног скупа и износи $n!$

13. Доказати да су свака два комплетна бипартитна графа са класама по m_1 и m_2 чворова изоморфна. Колико има изоморфизама?

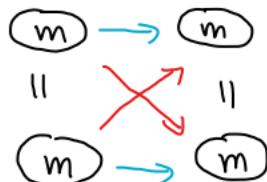
- $m_1 \neq m_2$



Почију је у јединству комплетни бипартитни графови,
погодно је међу класу пресликати тој међу класу,
а већу класу тој већу класу.

Број изоморфизама: $m_1! \cdot m_2!$

- $m_1 = m_2 = m$



$$2 \cdot (m! \cdot m!) = 2(m!)^2$$

14. Колико има неизоморфних 2-регуларних графова са 10 чворова?

2-репуларни графови = контуре или утије контуре

C_{10}

$C_5 \cup C_5$

$C_4 \cup C_6$ (Граф $C_6 \cup C_4$ је изоморфан овому графу)

$C_3 \cup C_7$

$\cancel{C_2 \cup C_8}$

$\cancel{C_1 \cup C_9}$

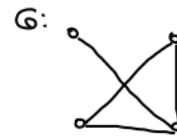
C_3 је најмања контура!



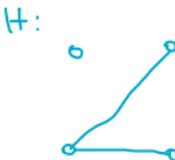
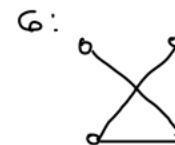
Матемо узимамо и утијују 3 контуре: $C_3 \cup C_3 \cup C_4$

\Rightarrow Постоји 5 неизоморфних 2-репуларних графова са 10 чворова

- Један хипотеза је да ће подграф H бити подграф G , ако и само ако $V(H) \subseteq V(G)$ и $E(H) \subseteq E(G)$



- Један хипотеза је да ће покривајући подграф H бити подграф G , ако и само ако $V(H) = V(G)$ и $E(H) \subseteq E(G)$



- Један хипотеза је да ће подграф G' бити скупом чворова V' , ако и само ако $G' = G[V']$, ако вади

$$1^{\circ} V(G') = V'$$

$$2^{\circ} E(G') = \{uv \mid u, v \in V' \wedge uv \in E(G)\}$$

