**Informacioni inženjering** PREZIME I IME: ______________________________

predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**

datum: 12. jul 2021. BROJ INDEKSA: __________

**Predispitne obaveze 1**
**20 poena**

1. [4 poena] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće i $A, B \in \mathcal{F}$.

   Događaji $A$ i $B$ su nezavisni

   Ako su događaji $A$ i $B$ nezavisni i ako je $P(B)$....................onda je $P(A|B) =$

   Ako je $P(A) = 0$, događaj $A$ se naziva .....................................................................

   Ako je $P(A) = 0$ pokazati da su onda događaji $A$ i $B$ nezavisni za svako $B \in \mathcal{F}$.

2. [1 poen] Geomerijska definicija verovatnoće.

3. [2 poena] Slučajna promenljiva $X$ ima uniformnu $\mathcal{U}(-2, 2)$ raspodelu.Nacrtati grafik funkcije gustine i funkcije raspodele slučajne promenljive $X$ i na njima obeležiti $F_X(1)$. Napisati standardizovanu slučajnu promenljivu $X^*$ slučajne promenljive $X$.

4. [3 poena] Slučajna promenljiva $X$ data je zakonom raspodele verovatnoća $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.3 & p \end{pmatrix}$.

   Odrediti konstantu $p$, funkciju raspodele slučajne promenljive $X$ i grafički je predstaviti.

   Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive $Y = -X^2 + 2X$.

5. [2 poena] Neka su $X$ i $Y$ nezavisne slučajne promenljive. Slučajna promenljiva $X$ ima binomnu $\mathcal{B}(2, 0.3)$ raspodelu i slučajna promenljiva $Y$ ima geometrijsku $\mathcal{G}(0.6)$ raspodelu. Izračunati

   $P(X = 2, Y = 4) =$

   $P(X < 2, Y = 4) =$

6. [2 poena] Definisati funkciju raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive i napisati njene osobine.

7. [6 poena] Slučajna promenljiva $X$ ima uniformnu $\mathcal{U}(0, 2)$ raspodelu, a uslovna slučajna promenljiva $Y|X = x$, $x \in (0, 2)$, ima uniformnu $\mathcal{U}(0, x + 2)$ raspodelu.

   Odrediti gustinu raspodele slučajne promenljive $(X, Y)$.

   Odrediti gustinu raspodele slučajne promenljive $Y$.

   Odrediti funkciju raspodele $F_{Y|X=x}(y)$ slučajne promenljive $Y|X = x$.

   Odrediti matematičko očekivanje $E(Y|X = x)$ slučajne promenljive $Y|X = x$.

**Informacioni inženjering**
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
**12. jul 2021.**

PREZIME I IME: ______________________

BROJ INDEKSA: __________

**Predispitne obaveze 2**
**10 poena**

$\varphi_X(x) = \frac{1}{4\pi}, \quad x \in (-2\pi, 2\pi)$

ДЗш

1. [5 poena] Dat je slučajni proces $X_t = \sin(X - t)$, $t \in \mathbb{R}$, gde je $X$ slučajna promenljiva sa uniformnom $\mathcal{U}(-2\pi, 2\pi)$ raspodelom.

   Matematičko očekivanje slučajnog procesa $X_t$ je $m_X(t) = E(X_t) = E(\sin(X-t)) =$

   $$= \int_{-2\pi}^{2\pi} \underbrace{\sin(x-t)}_{\text{НЕП}} \cdot \frac{1}{4\pi}\, dx = 0$$

   Korelaciona funkcija slučajnog procesa $X_t$ je $R_X(t,s) = E(X_t \cdot X_s) = E(\sin(X-t)\cdot\sin(X-s))$

   $$= E\left[\frac{1}{2}\left(\cos(\cancel{X}-t-\cancel{X}+s) - \cos(X-t+X-s)\right)\right]$$

   $$= \frac{1}{2}\left[E(\cos(s-t)) - E(\cos(2X-t-s))\right]$$

   $$= \frac{1}{2}\left[\cos(s-t) - \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos(2x-t-s)\cdot\frac{1}{4\pi}\,dx\right]$$

   $$m = 2x - t - s$$

   $$I = 0$$

   $$R_X(t,s) = \frac{1}{2}\cos(s-t)$$

   Da li je $X_t$ slabo stacionaran slučajni proces? Objasniti odgovor!

   ДА,
   1) $m_X(t) = const$
   2) $R_X(t,s)$ је ф-ја од $t-s$ (ЗАВИСИ ОД РАЗЛИКЕ АРГУМЕНАТА)

   $(\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ i $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

2. [1 poen] Definisati slučajni proces sa nezavisnim priraštajima i slučajni proces sa stacionarnim nezavisnim priraštajima.

   $X_t$, $t \in [0,\infty)$ је случајан процес. Ако за $\forall n \in \mathbb{N}$, и свако $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ су $X_0, X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независне сл. пром. онда је $X_t$ процес са независним прир.

   $X_0 \quad X_{t_1} \quad X_{t_2} \quad X_{t_{n-1}} \quad X_{t_n}$
   $0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{n-1} \quad t_n$

   Ако је $X_t$, $t \in [0,\infty)$ процес са незав. прир. и ако за не $X_t - X_s$ и $X_{t+a} - X_{s+a}$ имају исту расподелу онда је $X_t$ са стац. незав. прир.

   ПОЗНАВАЊЕ: РАСПОДЕЛЕ 2-ог РЕДА

3. [1 poen] Neka je $P(n)$ matrica prelaza homogenog lanca Markova za $n$, $n \in \mathbb{N}$, koraka. Tada je

$P(n+k) = \mathbb{P}(n) \cdot \mathbb{P}(k)$, $n, k \in \mathbb{N}$

$P(n) = \mathbb{P}(1)^n$ Dokazati!

Доз.: $\mathbb{P}(n) = \mathbb{P}(1 + (n-1)) = \mathbb{P}(1) \cdot \mathbb{P}(n-1)$

$= \mathbb{P}(1) \cdot \mathbb{P}(1 + (n-2)) = \mathbb{P}(1) \cdot \mathbb{P}(1) \cdot \mathbb{P}(n-2) = \ldots$

4. [3 poena] Neka je $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrica prelaza za jedan korak lanca Markova čiji je skup stanja $S = \{s_1, s_2, s_3\}$. $\not> 0$

Da li postoje finalne verovatnoće za dati lanac Markova? Objasniti odgovor! Ako postoje finalne verovatnoće naći ih.

$$\mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \not> 0$$

$\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^2 \cdot \mathbb{P} = E \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P} \not> 0$, $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}^3 \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P}^2 = E$, ...

$$\mathbb{P}^n = \begin{cases} \mathbb{P}, & \text{непарно} \\ E, & n\text{-парно} \end{cases} \xrightarrow{n \to \infty} \text{не конвергира}$$

(имамо 2 тачке нагомилавања)

финалне вер. не постоје
(јер немамо $\mathbb{P}^*$)

Odrediti, ako je to moguće, početni vektor $\mathbf{p}(0)$ tako da dati lanac Markova bude stacionaran. Objasniti odgovor!

$p(0) = p^*$

$p^*$ не постоји

$$E(h(X)) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)\cdot \varphi_X(x)\,dx, & X \text{ - неп} \\ \sum h(x_i)\, p(x_i), & X \text{ - дискр} \end{cases}$$

---

$$\underbrace{X_{t_i}}_{} - X_{t_{i-1}}$$

$$\underbrace{Y - X} \Longleftarrow$$

<u>Зад</u> $\left.\begin{matrix} X : U(0,1) \\ Y : \mathcal{E}(3) \end{matrix}\right\}$ незал

Визначити щільн розподілу з.в. $Z = Y - X$

<u>Ре:</u> $\varphi_{X,Y}(x,y)$

**Informacioni inženjering**
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 12. jul 2021.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

**Deo završnog ispita 1**
**40 poena**

**Zadaci – Raditi u svesci!**

1. [7 poena] Dva voza $V_1$ i $V_2$ pristižu na železničku stanicu u slučajnim trenucima između 8 i 10 časova, nezavisno jedan od drugog.
   a) Izračunati verovatnoću da će voz $V_1$ stići na stanicu bar 15 minuta nakon voza $V_2$.
   b) Ako se oba voza na stanici zadržavaju tačno pola sata, izračunati verovatnoću da će se vozovi sresti na stanici.

2. [8 poena] Mira na raspolaganju ima dve kutije. U prvoj kutiji se nalaze dve kuglice bele boje i tri kuglice crvene boje, a u drugoj kutiji su dve kuglice bele boje, dve kuglice crvene boje i jedna kuglica žute boje.

   Mira prvo izvlači, na slučajan način, jednu kuglicu iz prve kutije.

   Ako iz prve kutije Mira izvuče kuglicu bele boje, ona iz druge kutije izvlači jednu po jednu kuglicu, bez vraćanja, dok se među izvučenim kuglicama ne nađu dve kuglice iste boje.

   Ako iz prve kutije Mira izvuče kuglicu crvene boje, iz druge kutije izvlači jednu po jednu kuglicu, bez vraćanja, dok ne izvuče kuglicu crvene boje.

   Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive $X$ koja predstavlja broj izvučenih kuglica iz druge kutije. Ako znamo da je Mira iz druge kutije izvukla dve kuglice, izračunati verovatnoću da je iz prve kutije izvukla kuglicu bele boje.

3. [7 poena] Slučajna promenljiva $X$ je data funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} a(1-x), & x \in (-1,0] \\ ax, & x \in (0,1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.
   a) Odrediti konstantu $a$.
   b) Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive $X$.
   c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = |X| + 1$.

4. [8 poena] Slučajna promenljiva $X$ je data funkcijom gustine $\varphi_X(x) = -\frac{2}{9}x,\ x \in (-3,0)$, a slučajna promenljiva $Y$ ima eksponencijalnu $\varepsilon(1)$ raspodelu. Ako su slučajne promenljive $X$ i $Y$ nezavisne, odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = X + 2Y$.

**Teorijska pitanja – Raditi na ovom papiru!**

1. [4 poena] Bajesova formula (formulisati teoremu i dokazati je).
2. [3 poena] Disperzija (definicija i dokaz jedne osobine po izboru).
3. [3 poena] Definicija i osobine funkcije raspodele jednodimenzionalne slučajne promenljive.

**Informacioni inženjering**
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 12. jul 2021.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

**Deo završnog ispita 2**
**30 poena**

**Zadaci – Raditi u svesci!**

1. [8 poena] Neka su $X$ i $Y$ nezavisne slučajne promenljive, pri čemu je $X$ data svojom funkcijom gustine

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x+1), & x \in (1,3) \\ 0, & x \in (1,3) \end{cases},$$

a $Y$ ima $\mathcal{U}(-1,1)$ raspodelu. Neka je $X_t$, $t > 0$ slučajni proces definisan sa $X_t = t^2X + e^tY$. Naći matematičko očekivanje, kovarijansnu funkciju i disperziju ovog slučajnog procesa.

2. [9 poena] Tri prijatelja iz Novog Sada i tri prijatelja iz Beograda odlaze zajedno na more 21.7.2021. godine. Na slučajan način se raspoređuju u dve sobe, tako da se u svakoj sobi nalaze 3 osobe. Broj osoba iz Novog Sada u prvoj sobi određuje stanje sistema. Kako nisu mogli na početku da se dogovore ko će u koju sobu, svaki dan se na slučajan način bira po jedna osoba iz svake sobe i one menjaju mesta. Na početku, na dan 21.7.2021. godine, su sve osobe iz Novog Sada u istoj sobi.

   a) Sastaviti matricu prelaza za jedan korak.
   b) Izračunati verovatnoću da će 23.7.2021. godine u prvoj sobi biti sve osobe iz Novog Sada.
   c) Još jedan prijatelj iz Novog Sada im se pridružuje 23.7.2021. godine i on se smešta u prvu sobu i zato se ubacuje jedan pomoćni ležaj u nju. Stanje i ovog sistema je definisano brojem osoba iz Novog Sada u prvoj sobi, a početni vektor je određen brojem osoba iz Novog Sada u prvoj sobi na dan 23.7.2021. I dalje se svaki dan na slučajan način bira po jedna osoba iz svake sobe i one menjaju sobe. Ukoliko se u prvoj sobi nalaze bar dve osobe iz Beograda, jedna od njih spava na pomoćnom ležaju. U suprotnom, na pomoćnom ležaju spava osoba iz Novog Sada. Izračunati verovatnoću da će 24.7.2021. na pomoćnom ležaju spavati osoba iz Beograda.

3. [8 poena] U studentskom kampusu je postavljen autobus za vakcinaciju u kome radi sestra Dušica. Na svakih 5 minuta dođe jedna osoba da se vakciniše, a davanje vakcine prosečno traje 2 minuta. Red za čekanje nema ograničenja.

   a) Odrediti parametre $\lambda$ i $\mu$, kao i matricu $\Lambda$ opisanog sistema masovnog usluživanja.
   b) Ispitati postojanje finalnih verovatnoća opisanog sistema i izračunati ih, ako postoje.
   c) Izračunati očekivani broj ljudi u sistemu.
   d) Kada nema pacijenata, sestra Dušica odmara ispijajući kafu. Ako autobus za vakcinaciju radi od 8h do 20h, koliko vremena će sestra Dušica imati za ispijanje kafe.

**Teorijska pitanja – Raditi na ovom papiru!**

1. [5 poena] Poasonov proces.