Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 10. februar 2023.

PREZIME I IME: ____________________

BROJ INDEKSA: ____________

поправни

Predispitne obaveze 1 – 20 poena

1. [5 poena] Aksiomatska definicija verovatnoće.

Научити!

$P(\emptyset) =$ 0

$P(\overline{A}) =$ $1-P(A)$, gde je $\overline{A}$ супротан догађај

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$ $\sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \ldots A_n)$

Ako su događaji A, B i C disjunktni, tada je $P(A \cup B \cup C) =$ $P(A)+P(B)+P(C)$

$P(AB) =$ $P(A)P(B|A)$ pod uslovom $P(A) \neq 0$

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

$P(A_1A_2 \ldots A_n) =$ $P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$

2. [2 poena] Definisati funkciju raspodele jednodimenzionalne slučajne promenljive i napisati njene osobine.

Ф-ја расподеле сл. пром. X је $F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$ дато $F_X(x) = P(X<x)$.

1. $F_X(-\infty)=0$
2. $F_X(\infty)=1$
3. непр. са лева
4. монотоно неопад.
5. $P(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a)$

Ako je X slučajna promenljiva neprekidnog tipa, onda je $F_X(x) =$ $\int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt$

3. [3 poena] Verovatnoća da će Pera jesti sladoled od vanile je 0.6, a verovatnoća da će jesti sladoled od čokolade je 0.5. Verovatnoća da će Pera jesti bar jedan sladoled je 0.9.

V или Č

$P(V)=0.6$ $P(Č)=0.5$

$P(V \cup Č)=0.9$

Izračunati verovatnoću da će Pera jesti oba sladoleda.

Izračunati verovatnoću da će Pera jesti tačno jedan sladoled.

Ako je Pera jeo tačno jedan sladoled izračunati verovatnoću da je to sladoled od vanile.

4. [4 poen] Slučajna promenljiva X data je gustinom raspodele verovatnoća $\varphi_X(x) = \begin{cases} ax^2, & x \in (-2,2) \\ 0, & x \notin (-2,2) \end{cases}$.

Odrediti konstantu a. **(Izračunati integral!)**

$1 = \int_{-2}^{2} ax^2\,dx = \dots$

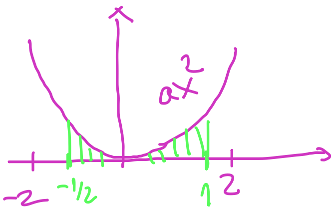
$E(X^2 - 3X) = E(X^2) - 3 \cdot E(X)$

$E(X^2) = \int_{-2}^{2} x^2 \cdot \underline{a}\, x^2\,dx$ $\qquad$ $E(X) = \int_{-2}^{2} x \cdot ax^2\,dx$

$P(X = 0) = 0$

Na grafiku funkcije gustine slučajne promenljive X predstaviti verovatnoću $P(-\frac{1}{2} < X \leq 1)$ i izračunati je.

$= \int_{-1/2}^{1} ax^2\,dx$



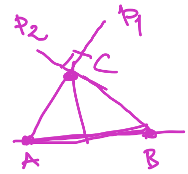
5. [1 poen] Definisati matematičko očekivanje slučajne promenljive i napisati dve osobine.

$p_1: y = kx + n$

$A(-1,0): \quad 0 = k(-1) + n \rightarrow k = 1$

$C(0,1): \quad 1 = k \cdot 0 + n \rightarrow n = 1$

$p_1: y = x + 1$



6. [5 poena] Slučajna promenljiva (X, Y) je data funkcijom gustine $\varphi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in \triangle ABC \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$, gde su temena $\triangle ABC$ tačke $A(-1.0)$, $B(1,0)$ i $C(0,1)$.

→ Izračunati $F_{X,Y}(x,y)$ u tački (x,y) iz oblasti $D = \{(x,y) : -1 < x < 0 \land 0 < \underline{y < x + 1}\}$. $\qquad y = x + 1$

Odrediti marginalnu funkciju gustine $\varphi_Y(y)$. ✓

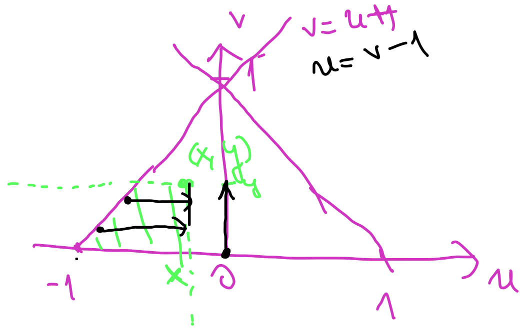
Odrediti uslovnu funkciju gustine $\varphi_{X|Y=y}(x)$. ←

Izračunati $E(X|Y = y)$.

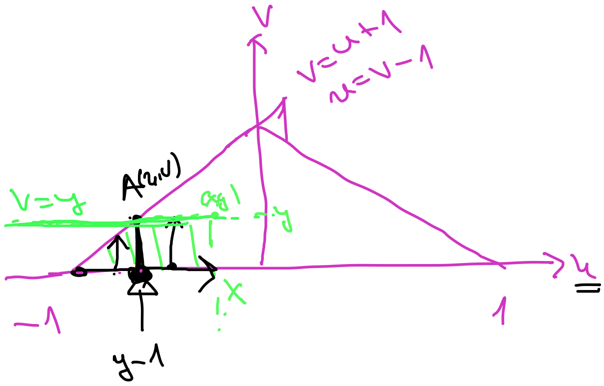
Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive $X|Y = y$.

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \varphi_{X,Y}(u,v)\,du\,dv \qquad (x,y)\in D$$

$$D = \{(x,y) : -1 < x < 0 \ \wedge\ 0 < y < x+1\}$$



$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^y dv \int_{v-1}^{x} 1\cdot du$$

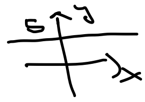


$\underline{A}$: $v = u+1$
$v = y$

$u+1 = y$

$u = y-1$

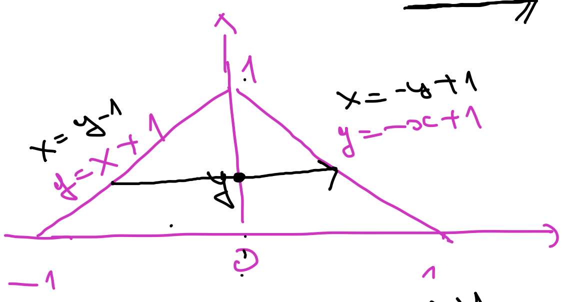
$u = ?$



$y=5$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-1}^{y-1} du \int_0^{u+1} 1\,dv + \int_{y-1}^{x} du \int_0^{y} 1\,dv$$

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dx, \quad y\in\mathbb{R}$$



p_2: $y = -x+1$

p_2: $y = kx+n$

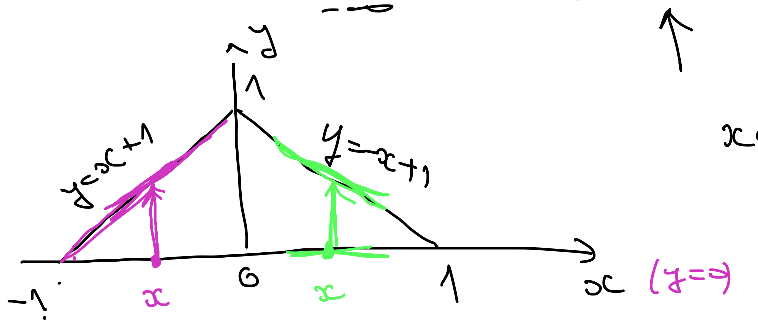
$B(1,0)$: $0 = 1\cdot k + n \Rightarrow k = -1$

$C(0,1)$: $1 = 0\cdot k + n \quad n = 1$

$y\in(0,1)$: $\varphi_Y(y) = \int_{y-1}^{-y+1} 1\,dx = x\Big|_{y-1}^{-y+1} = (-y+1)-(y-1) = 2-2y$

$y\notin(0,1)$: $\varphi_Y(y) = 0$

Dodatek: $\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)\, \underline{\underline{dy}}, \quad x \in \mathbb{R}$



$x \in (-1,1)$ $\begin{cases} x \in (-1, 0] \\ x \in (0,1) \end{cases}$

$x \in (-1, 0]$: $\quad \varphi_X(x) = \int_0^{x+1} 1\, dy$

$x \in (0,1)$: $\quad \varphi_X(x) = \int_0^{-x+1} 1\, dy$

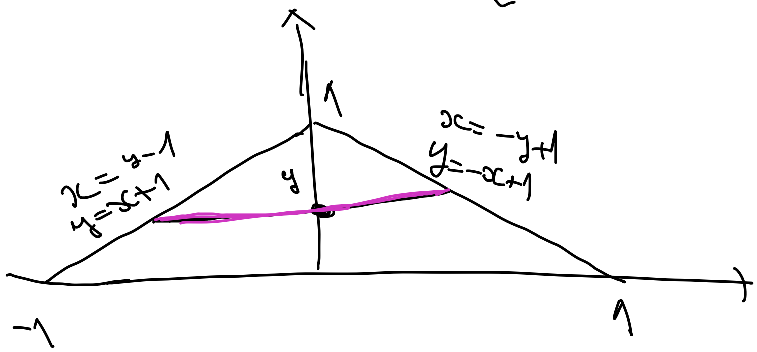
$x \notin (-1,1)$: $\quad \varphi_X(x) = 0$

$\{ E(\underline{\underline{X}}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi_{\underline{\underline{X}}}(x)\, dx$

$\cancel{E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi_{X|Y=y}(x)\, dx =}$

$$\varphi_{X|Y=y}(x) = \frac{\varphi_{X,Y}(x,y)}{\varphi_Y(y)}, \quad \varphi_Y(y) \neq 0$$

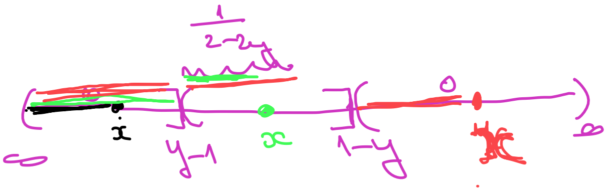
$$\boxed{\text{за } y \in (0,1)} \quad \varphi_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-2y}, & \boxed{x \in (y-1, -y+1)} \\ \frac{0}{2-2y} = 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi_{X|Y=y}(x)\,dx$$

$$= \int_{y-1}^{-y+1} x \cdot \underbrace{\frac{1}{2-2y}}_{\text{const}} dx = \frac{1}{2-2y} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{y-1}^{1-y} = \ldots$$

$F_{X|Y=y}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{X|Y=y}(t)\,dt$ $x \in$:



$$F_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} x \in (-\infty, y-1]: & \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 \\ x \in (y-1, 1-y]: & \int_{-\infty}^{y-1} 0\,dt + \int_{y-1}^{x} \frac{1}{2-2y}\,dt \\ x \in (1-y, \infty): & \int_{-\infty}^{y-1} 0\,dt + \int_{y-1}^{1-y} \frac{1}{2-2y}\,dt + \int_{1-y}^{x} 0\,dt = 1 \end{cases}$$

stefan.komjak@gmail.com

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 10. februar 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Predispitne obaveze 2 – 10 poena

1. [1 poen] Obeležje X ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, raspodelu. Posmatran je uzorak obima 99 za koji važi da je $\sum_{i=1}^{99} x_i = 99$. Metodom momenata oceniti nepoznat parametar λ.

2. [1 poen] Obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}(m, 1)$, $m \in \mathbb{R}$, raspodelu. Na osnovu uzorka -1, 1, 2, -3 napisati funkciju verodostojnosti za procenu nepoznatog parametra m.

3. [3 poen] Pokazati da je kovarijansna funkcija Poasonovog procesa sa parametrom $\lambda > 0$ data sa $K_X(t, s) = \lambda \min\{t, s\}$.

4. [3 poena] Neka je lanac Markova zadat matricom prelaza $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & r \\ r & p \end{bmatrix}$

Ako je $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ skup stanja lanca X_n, odrediti m i uslove koje moraju da zadovoljavaju p i r.

Ako je sistem u početnom momentu bio u stanju s_1, odrediti $p_1(2)$.

Izračunati verovatnoću $P(X_2 = s_2, X_3 = s_2, X_5 = s_1)$.

5. [1 poen] Čime je određen homogeni lanac Markova? Objasniti odgovor!

6. [1 poen] Definisati proces sa nezavisnim priraštajima i proces sa stacionarnim nezavisnim priraštajima.

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 10. februar 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 1 – 35 poena

1. [7 poena] U dve mračne sobe na stolicama sede babe i žabe, na svakoj stolici jedna baba ili jedna žaba i nema praznih stolica. U prvoj sobi su 4 babe i 3 žabe, a u drugoj sobi 3 babe i 4 žabe. Deda Miloje na slučajan način bira sobu i iz nje jednu stolicu i sa sobom vodi onoga ko je sedeo na stolici.

   a) Izračunati verovatnoću da je deda Miloje odveo sa sobom babu.

   b) Ako je deda Miloje odveo sa sobom babu, izračunati verovatnoću da je baba sedela u prvoj sobi.

2. [12 poena] U kutiji se nalazi 6 kartica na kojima je napisan broj i to, jedna kartica sa brojem 0, dve kartice sa brojem 1, jedna kartica sa brojem 2 i dve kartice sa brojem 3. Veca na slučajan način uzima dve kartice iz kutije. Slučajna promenljiva X uzima vrednost 1 ako je zbir na izvučenim karticama 3, a vrednost 0 ako zbir na izvučenim karticama nije 3. Slučajna promenljiva Y predstavlja broj izvučenih kartica sa brojem 3.

   a) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive (X, Y) i marginalne raspodele.

   b) Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y, naći uslovnu raspodelu slučajne promenljive $Y|X = 0$ i izračunati koeficijent korelacije.

   c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = 3X - Y$.

3. [10 poena] Slučajna promenljiva X je data funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

   a) Izračunati konstantu a.

   b) Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X.

   c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = -2X + 2$ i izračunati njeno matematičko očekivanje i disperziju.

4. [10 poena] Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive, pri čemu X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu, a Y uniformnu $\mathcal{U}(1, 2)$ raspodelu. Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = X - Y$.

5. [6 poena] Student nije spremio ispit i izlazi na test na kome dobija 20 pitanja na koje je potrebno odgovoriti zaokruživanjem odgovora. Na svako pitanje je ponuđeno 3 odgovora, od kojih je jedan tačan. Student na slučajan način zaokružuje odgovor na bilo koje pitanje, nezavisno od odgovora koje zaokružuje na preostala pitanja. Slučajna promenljiva X predstavlja broj pitanja na koje je student odgovorio ispravno. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X i njenu karakterističnu funkciju.

   Ako na ispit izađe 50 studenata, odrediti ukupan broj pitanja na koja će svi studenti koji su izašli na ispit ispravno odgovoriti.

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 10. februar 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 2 – 25 poena

1. [6 poena] Obeležje X ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & 2p & 1-3p \end{pmatrix}$.

   a) Na osnovu uzorka 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 2, 2, 1, metodom momenta odrediti vrednost nepoznatog parametra p.

   b) Na osnovu uzorka obima n, metodom maksimalne verodostojnosti oceniti parametar p i ispitati centriranost dobijene ocene.

2. [6 poena] Harmonijski oscilator generiše signal dat funkcijom $X_t = A\cos(t+O)$, $t \in \mathbb{R}$ gde je A amplituda koja na slučajan način uzima vrednost iz intervala $(0,2)$ a O oscilacija koja na slučajan način uzima vrednost iz intervala $(0,2\pi)$. Amplituda i oscilacija su nezavisne slučajne promenljive. Izračunati očekivanje i korelacionu funkciju signala.

   $(\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

3. [7 poena] Perica i Žikica imaju dva bela i dva plava klikera, i žutu i zelenu kutiju u koje stavljaju po tačno dva klikera. Perica je rasporedio klikere tako da su oba bela klikera u istoj kutiji. Žikica je odlučio da svaki dan na slučajan način izvuče po jedan kliker iz svake kutije i zameni im mesta. Stanja sistema su određena brojem belih klikera u žutoj kutiji.

   a) Odrediti matricu prelaza za jedan korak.

   b) Da li postoje finalne verovatnoće? Odgovor obrazložiti i ako postoje,izračunati ih.

   c) Izračunati verovatnoću da je posle dva dana Perica našao u žutoj kutiji klikere različitih boja.

4. [6 poena] U Keba Krabi rade dva kasira, Lignjoslav i Lignjorad. Na svakih 5 minuta dolazi jedna gladna mušterija, a primanje porudžbine u proseku traje 3 minuta. Red za čekanje nema ograničenje.

   a) Opisati dati sistem usluživanja i naći finalne verovatnoće.

   b) Izračunati očekivani broj gladnih mušterija u Keba Krabi.

Komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 27. januar 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita – 60 poena

Zadaci – raditi u svesci

1. [10 poena] U dve mračne sobe na stolicama sede babe i žabe, na svakoj stolici jedna baba ili jedna žaba i nema praznih stolica. U prvoj sobi su 4 babe i 3 žabe, a u drugoj sobi 3 babe i 4 žabe. Deda Miloje na slučajan način bira sobu i iz nje jednu stolicu i sa sobom vodi onoga ko je sedeo na stolici.
   a) Izračunati verovatnoću da je deda Miloje odveo sa sobom babu.
   b) Ako je deda Miloje odveo sa sobom babu, izračunati verovatnoću da je baba sedela u prvoj sobi.
2. [10 poena] Slučajna promenljiva X je data funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.
   a) Izračunati konstantu a.
   b) Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X.
   c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = -2X + 2$ i izračunati njeno matematičko očekivanje i disperziju.
3. [10 poena] Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive, pri čemu X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu, a Y uniformnu $\mathcal{U}(1,2)$ raspodelu. Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = X - Y$.
4. [10 poena] Harmonijski oscilator generiše signal dat funkcijom $X_t = A\cos(t + O)$, $t \in \mathbb{R}$ gde je A amplituda koja na slučajan način uzima vrednost iz intervala $(0,2)$ a O oscilacija koja na slučajan način uzima vrednost iz intervala $(0,2\pi)$. Amplituda i oscilacija su nezavisne slučajne promenljive. Izračunati očekivanje i korelacionu funkciju signala.
   $(\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)))$
5. [10 poena] Perica i Žikica imaju dva bela i dva plava klikera, i žutu i zelenu kutiju u koje stavljaju po tačno dva klikera. Perica je rasporedio klikere tako da su oba bela klikera u istoj kutiji. Žikica je odlučio da svaki dan na slučajan način izvuče po jedan kliker iz svake kutije i zameni im mesta. Stanja sistema su određena brojem belih klikera u žutoj kutiji.
   a) Odrediti matricu prelaza za jedan korak.
   b) Da li postoje finalne verovatnoće? Odgovor obrazložiti i ako postoje,izračunati ih.
   c) Izračunati verovatnoću da je posle dva dana Perica našao u žutoj kutiji klikere različitih boja.
6. [10 poena] U Keba Krabi rade dva kasira, Lignjoslav i Lignjorad. Na svakih 5 minuta dolazi jedna gladna mušterija, a primanje porudžbine u proseku traje 3 minuta. Red za čekanje nema ograničenje.
   a) Opisati dati sistem usluživanja i naći finalne verovatnoće.
   b) Izračunati očekivani broj gladnih mušterija u Keba Krabi.