Redovi Tejlora i Lorana

(T) Neka je f analitička nad oblasti $|z-\alpha|<r$. Tada

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$$ Tejlorov red

Pr. $\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n},\ |z|<1.$
glavna grana

(T) Neka su K_1 i K_2 koncentrične kružnice sa centrom u α i f analitička nad prstenom P.

K_1 Tada

Loranov red u tački α: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n,\quad z\in P$ i

$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}dw$ gde je L proizvoljna putanja koja obuhvata K_2.

P je prsten između K_1 i K_2.

Napomena: Ako je f analitička nad K_1 tada na osnovu Košijevih integralnih formula

$a_n=f^{(n)}(\alpha),\ n=0,1,2,3\ldots$

Za negativno n $\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}$ je analitička funkcija nad K_1 pa je $a_n=0$ $n=-2,-3,-4\ldots$

Dakle, ako je f analitička nad K_1 Loranov red je jednak Tejlorovom.

Pr. Funkciju $f(z)=e^{\frac{1}{2z}}$ razviti u Loranov red u okolini tačke $\alpha=0$. $e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

$$e^{\frac{1}{2z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2z}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!\,z^n}=$$
$$=1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{8z^2}+\ldots$$

f nije definisana u $\alpha=0$!

Pr. Funkciju $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ razviti u okolini tačke $\alpha=0$ nad prstenom $1<|z|<2$.

$\alpha=1$, $\alpha=2$ su tačke u kojima f nije definisana.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}\ \Big/\cdot(z-1)(z-2)$$

$$1=A(z-2)+B(z-1)\qquad \begin{array}{l}A+B=0\Rightarrow A=-B\\ -2A-B=1\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}B=1\\A=-1\end{array}}\end{array}$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2},\qquad 1<|z|<2$$

$|z|>1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{|z|}<1}$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n},\ |z|<2$$

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n},\ |z|>1$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$f(z)=\underbrace{-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}}_{\text{Loranov deo}}\underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}}_{\text{Tejlorov deo}},\quad 1<|z|<2$$

• Napomena: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(z-\alpha)^n}}_{\text{Loranov deo}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n}_{\text{Tejlorov deo}}$

Pr. Funkciju $f(z)=\frac{\sin(z+i)}{(z+i)^3}$ razviti u Loranov red u okolini tačke $\underbrace{\alpha=-i}_{\notin D_f}$

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)^3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+i)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+i)^{2n-2}}{(2n+1)!}=$$
$$=\underbrace{\frac{1}{(z+i)^2}}_{\text{Loranov deo}}\underbrace{-\frac{1}{3!}+\frac{(z+i)^2}{5!}-\ldots}_{\text{Tejlorov deo}}$$

Klasifikacija izolovanih singulariteta

Def. SINGULARITETI f-je f su tačke u kojima f nije analitička.

Pr. $f(z)=\frac{1}{z}$, $z=0$ je singularitet
$f(z)=e^{\frac{1}{z+i}}$, $z=-i$ je singularitet

Def. Tačka $\alpha\in\mathbb{C}$ je izolovani singularitet od f ako postoji okolina od α takva da je α jedini singularitet u toj okolini.

• Klasifikacija:
1) OTKLONJIVI SINGULARITETI
2) POLOVI
3) ESENCIJALNI SINGULARITETI
4) TAČKE GRANANJA (višeznačne funkcije)

1) Otklonjivi singulariteti

$f(z)$, $\alpha\notin D_f$. Ako je $\lim_{z\to\alpha}f(z)$ konačan u $\mathbb{C}$ tada je α otklonjiv singularitet.

• $\lim_{z\to\alpha}f(z)=w_0\Rightarrow \tilde{f}(z)=\begin{cases}f(z), & z\neq\alpha\\ w_0, & z=\alpha\end{cases}$ je analitička u tački α.

Pr. $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, $z\neq0$

$\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=1\Rightarrow z_0=0$ je otklonjiv prekid

$\Rightarrow$ postoji $\tilde{f}(z)=\begin{cases}\frac{\sin z}{z}, & z\neq0\\ 1, & z=0\end{cases}$ analitička u 0

II način: Razvijemo u Loranov red u okolini $\alpha=0$:

$$f(z)=\frac{1}{z}\sin z=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$
$$=\underbrace{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots}_{\text{Tejlorov deo}}$$

nema Loranovog dela $\Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha=0$ je otklonjiv singularitet

2) Polovi

Def. Tačka $\alpha\in\mathbb{C}$ je pol reda $\boxed{k\in\mathbb{N}}$ za f-ju f ako važi:
1) $\lim_{z\to\alpha}f(z)=\infty$
2) $f(z)=\frac{1}{(z-\alpha)^k}\cdot h(z)$ gde je h analitička u α i $\boxed{h(\alpha)\neq0}$

Pr. $f(z)=\frac{e^z}{(z-3)^2}$, $z\neq3$

1) $\lim_{z\to3}\frac{e^z}{(z-3)^2}=\frac{e^3}{0}=e^3\cdot\frac{1}{0}=\infty$

2) $f(z)=\frac{1}{(z-3)^2}\cdot\underbrace{e^z}_{h(z)}$ $\quad h(3)=e^3\neq0$
$\Rightarrow\boxed{k=2}$

$\Rightarrow \alpha=3$ pol reda 2