Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet Tehničkih Nauka
Verovatnoća i slučajni procesi, letnji semestar akademske 2022/2023. godine

Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih.

Zadatak 1

Postavka: Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele $X : \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$. Neka je $Y = 2X + 3, \quad Z = X^2 \quad \text{i} \quad T = X^3 - X^2$.

(a) Naći zakone raspodele slučajnih promenljivih $Y,\ Z$ i T.

(b) Izračunati matematičko očekivanje za slučajne promenljive $X,\ Y,\ Z$ i T.

(c) Izračunati disperziju za slučajne promenljive $X,\ Y,\ Z$ i T.

Rešenje:

(a) Pogledati rešenje 10. zadatka iz oblasti *Diskretna jednodimenzionalna slučajna promenljiva i njene transformacije*. Tada smo dobili sledeće zakone raspodele:

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$Z : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 16 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$T : \begin{pmatrix} -2 & 18 & 48 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sada ćemo izračunati matematičko očekivanje za sve date slučajne promenljive po definiciji

$\mathsf{E}(X) = -1 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.1 = 1.5,$
$\mathsf{E}(Y) = 1 \cdot 0.4 + 9 \cdot 0.5 + 11 \cdot 0.1 = 6,$
$\mathsf{E}(Z) = 1 \cdot 0.4 + 9 \cdot 0.5 + 16 \cdot 0.1 = 6.5,$
$\mathsf{E}(T) = -2 \cdot 0.4 + 18 \cdot 0.5 + 48 \cdot 0.1 = 13.$

Uz pomoć osobina matematičkog očekivanja, zadatak možemo uraditi i na drugi način:

$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(2X+3) = 2\ \mathsf{E}(X) + 3 = 2\cdot 1.5 + 3 = 6,$

$\mathsf{E}(Z) = \mathsf{E}(X^2) = (-1)^2\cdot 0.4 + 3^2\cdot 0.5 + 4^2\cdot 0.1 = 6.5,$

$\mathsf{E}(T) = \mathsf{E}(X^3 - X^2) = \mathsf{E}(X^3) - \mathsf{E}(X^2) = (-1)^3\cdot 0.4 + 3^3\cdot 0.5 + 4^3\cdot 0.1 - 6.5 = 13.$

(c) Sada cemo izračunati disperziju za sve date slučajne promenljive po definiciji

$\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2 = 6.5 - 1.5^2 = 4.25,$

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{E}(Y^2) - \mathsf{E}(Y)^2 = (1^2\cdot 0.4 + 9^2\cdot 0.5 + 11^2\cdot 0.1) - 6^2 = 17,$

$\mathsf{D}(Z) = \mathsf{E}(Z^2) - \mathsf{E}(Z)^2 = (1^2\cdot 0.4 + 9^2\cdot 0.5 + 16^2\cdot 0.1) - 6.5^2 = 24.25,$

$\mathsf{D}(T) = \mathsf{E}(T^2) - \mathsf{E}(T)^2 = ((-2)^2\cdot 0.4 + 18^2\cdot 0.5 + 48^2\cdot 0.1) - 13^2 = 225.$

Za slučajne promenljive Y i Z ćemo izračunati disperziju i na drugi način, koristeći osobine disperzije i osobinu matematičkog očekivanja

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(2X+3) = 2^2\ \mathsf{D}(X) = 4\cdot 4.25 = 17,$

$\mathsf{D}(Z) = \mathsf{D}(X^2) = \mathsf{E}\left((X^2)^2\right) - \mathsf{E}(X^2)^2 = \mathsf{E}(X^4) - \mathsf{E}(X^2)^2 =$

$= ((-1)^4\cdot 0.4 + 3^4\cdot 0.5 + 4^4\cdot 0.1) - 6.5^2 = 24.25.$

Zadatak 2

Postavka: Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} a(x-1), & x \in [1,4], \\ 0, & x \notin [1,4]. \end{cases}$$

(a) Odrediti konstantu a i naći raspodelu slučajne promenljive $Y = 3X - 1$.

(b) Naći matematičko očekivanje i disperziju za X i Y.

Rešenje:

(a) Pogledati rešenje 8. zadatka iz oblasti *Neprekidna jednodimenzionalna slučajna promenljiva i njene transformacije.*

Tada smo dobili da je $a = \dfrac{2}{9}$ što će nam trebati za drugi deo zadatka.

(b) Očekivanje i disperziju slučajne promenljive X računamo po definiciji.

$\mathsf{E}(X) = \int\limits_1^4 x\cdot \frac{2}{9}(x-1)\,dx = \frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4 = 3.$

$\mathsf{E}(X^2) = \int\limits_1^4 x^2\cdot \frac{2}{9}(x-1)\,dx = \frac{2}{9}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^4 = \frac{57}{6} = 9.5.$

$\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2 = 9.5 - 3^2 = 0.5$

Očekivanje i disperziju slučajne promenljive Y možemo izračunati na dva načina koristeći osobine očekivanja i disperzije:

- **I način**

  $\mathsf{E}(Y) = \int\limits_1^4 (3x-1)\cdot \frac{2}{9}(x-1)\,dx = ... = 8.$

$\mathsf{E}(Y^2) = \int\limits_1^4 (3x-1)^2 \cdot \frac{2}{9}(x-1)\,dx = ... = 68.5.$
$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{E}(Y^2) - \mathsf{E}(Y)^2 = 68.5 - 8^2 = 4.5$

- **II način**
  $\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(3X-1) = 3\,\mathsf{E}(X) - 1 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$, i
  $\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(3X-1) = 9\mathsf{D}(X) = 9 \cdot 0.5 = 4.5.$

Zadatak 3

POSTAVKA: Novčić se baca tri puta. Ukoliko sva tri puta padne ista strana izvodi se još jedno bacanje.

(a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive (slučajnog vektora) (X,Y) gde je X broj palih grbova, Y broj bacanja. Naći marginalne raspodele. Naći raspodele sledećih slučajnih promenljivih: $X|Y=3$ i $Z=XY$.

(b) Naći matematičko očekivanje slučajne promenljive $X|Y=3$.

(c) Izračunati koeficijent korelacije.

REŠENJE:

(a) Pogledati rešenje 1. zadatka iz oblasti *Višedimenzionalna diskretna slučajna promenljiva i njene transformacije.*

Tada smo dobili sledeći zakon raspodele :

$X \backslash Y$	3	4	$P(X=i)$
0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{6}{16}$
3	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$P(Y=j)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

i odgovarajuće marginalne raspodele:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$Y : \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Dobili smo i zakon raspodele slučajne promenljive $X|Y=3$:

$$X|Y=3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ odnosno } X|Y=3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Kao i zakon raspodele slučajne promenljive $Z : \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 6 & 12 & 16 \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

(b) Kako smo pod (a) našli zakon raspodele slučajne promenljive $X|Y = 3$, lako možemo izračunati njeno matematičko očekivanje:

$E(X|Y = 3) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

(c) Koeficijent korelacije ρ_{XY} je definisan kao:

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

$E(X) = \frac{7}{16} + \frac{12}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{13}{8}$.
$E(X^2) = \frac{7}{16} + \frac{24}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16} = \frac{7}{2}$.
$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{2} - \frac{169}{64} = \frac{55}{64}$.
$E(Y) = \frac{9}{4} + \frac{4}{4} = \frac{13}{4}$.
$E(Y^2) = \frac{27}{4} + \frac{16}{4} = \frac{43}{4}$.
$D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{43}{4} - \frac{169}{16} = \frac{3}{16}$.
$E(XY) = E(Z) = \frac{18}{16} + \frac{4}{16} + \frac{36}{16} + \frac{12}{16} + \frac{16}{16} = \frac{43}{8}$.

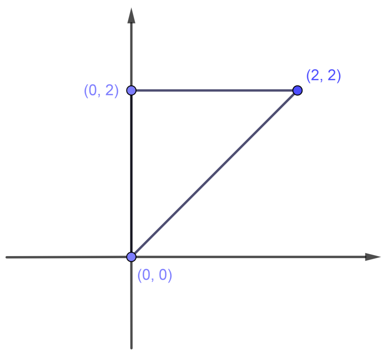
$$\rho_{XY} = \frac{\frac{43}{8} - \frac{13}{8} \cdot \frac{13}{4}}{\sqrt{\frac{55}{64} \cdot \frac{3}{16}}} \approx 0.233.$$

Zadatak 4

POSTAVKA: Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) data je gustinom:

$$\varphi_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} a(x + y), & (x, y) \in T \\ 0, & (x, y) \notin T \end{cases}$$

gde je T trougao sa temenima $(0, 0)$, $(2, 2)$ i $(0, 2)$.



(a) Odrediti konstantu a.

(b) Izračunati koeficijent korelacije ρ_{XY}.

(c) Izračunati $E(X|Y = y)$ i $E(Y|X = x)$.

Rešenje:

(a) Videti rešenje prvog zadatka iz oblasti *Neprekidna višedimenzionalna slučajna promenljiva i njene transformacije*. Tada smo dobili da je $a = \frac{1}{4}$.

(b) Koeificijent korelacije računamo po definiciji:

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

Trebaće nam funkcije gustine slučajnih promenljivih X i Y, koje smo takođe našli u prvom zadatku iz oblasti *Neprekidna dvodimenzionalna slučajna promenljiva i njene transformacije.*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(2 + 2x - \frac{3x^2}{2}\right) & , \quad x \in (0,2) \\ 0 & , \quad x \notin (0,2) \end{cases} \quad \text{i } \varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{3y^2}{8} & , \quad y \in (0,2) \\ 0 & , \quad y \notin (0,2) \end{cases}$$

Sada je

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi_X(x)\, dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{4}\left(2 + 2x - \frac{3}{2}x^2\right) dx = ... = \frac{5}{6}.$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi_X(x)\, dx = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{4}\left(2 + 2x - \frac{3}{2}x^2\right) dx = ... = \frac{14}{15}.$

$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{14}{15} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{43}{180}.$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \varphi_Y(y)\, dy = \int_0^2 y \cdot \frac{3}{8}y^2\, dy = ... = \frac{3}{2}.$

$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot \varphi_Y(y)\, dy = \int_0^2 y^2 \cdot \frac{3}{8}y^2\, dy = ... = \frac{12}{5}.$

$D(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{20}.$

$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot \varphi_{X,Y}(x,y) dxdy = \int_0^2 \int_x^2 xy \cdot \frac{1}{4}(x+y) dydx = ... = \frac{4}{3}.$

Konačno dobijamo $\rho_{XY} = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{43}{180}\cdot\frac{3}{20}}} \approx 0.44.$

(c) Trebaće nam prvo uslovne gustine koje nalazimo na sledeći način:

$\varphi_{X|Y=y}(x) = \dfrac{\varphi_{XY}(xy)}{\varphi_Y(y)},$

$\varphi_{Y|X=x}(y) = \dfrac{\varphi_{XY}(xy)}{\varphi_X(x)}.$

Za $y \in (0,2)$ dobijamo:

$$\varphi_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{4}(x+y)}{\frac{3y^2}{8}} & , \quad x \in (0,y) \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{3}\cdot\frac{x+y}{y^2} & , \quad x \in (0,y) \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}.$$

Za $x \in (0,2)$ dobijamo:

$$\varphi_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{4}(x+y)}{\frac{1}{4}(2+2x-\frac{3x^2}{2})} & , \ y \in (x,2) \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x+y}{2+2x-\frac{3x^2}{2}} & , \ y \in (x,2) \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}.$$

Sada je

$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi_{X|Y=y}(x)\ dx = \int_0^y x \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{x+y}{y^2}\, dx.$$

$$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \varphi_{Y|X=x}(y)\ dy = \int_x^2 y \cdot \frac{x+y}{2+2x-\frac{3x^2}{2}}\, dy.$$