Uopštena formula unije i preseka. Uslovna verovatnoća. Nezavisnost.

Zadatak 1

Postavka: U kutiji se nalazi 6 belih i 4 crne kuglice. Izvlači se tri puta po jedna kuglica:

(a) bez vraćanja,

(b) sa vraćanjem.

Izračunati verovatnoću da je izvučena bar jedna bela kuglica.

Rešenje:
Označimo sa A događaj "izvučena je bar jedna bela kuglica". Prvo ćemo izračunati verovatnoću suprotnog događaja, tj. događaja $\overline{A}$ - "nije izvučena nijedna bela kuglica". Označimo sa C_i događaj "u i-tom izvlačenju izvučena je crna kuglica", $i = 1, 2, 3$. Tada je $\overline{A} = C_1C_2C_3$ i $P(\overline{A}) = P(C_1C_2C_3)$.

(a) Kako se kuglice izvlače bez vraćanja prethodno izvučene kuglice u kutiju, izvlačenja nisu nezavisna, pa važi

$$P(\overline{A}) = P(C_1C_2C_3) = P(C_1)P(C_2 \,|\, C_1)P(C_3 \,|\, C_1C_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30},$$

odakle sledi da je $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$.

(b) Kuglice se izvlače tako da se svaki put pre izvlačenja prethodno izvučena kuglica vrati u kutiju, te su izvlačenja međusobno nezavisna tako da je $P(C_2 \,|\, C_1) = P(C_2) = P(C_1)$, i $P(C_3 \,|\, C_1C_2) = P(C_3) = P(C_1)$, pa je

$$P(\overline{A}) = P(C_1)^3 = \left(\frac{4}{10}\right)^3,$$

odakle je $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{4}{10}\right)^3 = \frac{117}{125}$.

Zadatak 2

Postavka: U kutiji se nalazi k belih i m crnih kuglica. Igrači A i B, jedan za drugim izvlače po jednu kuglicu:

(a) sa vraćanjem,

(b) bez vraćanja.

Pobednik je onaj igrač koji prvi izvuče belu kuglicu. Naći verovatnoću da će pobednik biti igrač A koji započinje igru.

Rešenje:

(a) Obeležimo sa A događaj "pobedio je igrač A", sa B događaj "izvučena je bela kuglica" i sa C događaj "izvučena je crna kuglica". Događaj A tada možemo predstaviti na sledeći način:

$$A = \{B, CCB, CCCCB, ...\} = \{C^{2i}B, i = 0, 1, 2, ...\}.$$

Kako se kuglice izvlače jedna po jedna sa vraćanjem, događaji B i C su nezavisni, pa važi:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} P(C^{2i}B) = \sum_{i=0}^{\infty} P(C)^{2i}P(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{m}{k+m}\right)^{2i} \frac{k}{k+m} = \frac{k}{k+m} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left(\frac{m}{k+m}\right)^2\right)^i \overset{*}{=}$$
$$\frac{k}{k+m} \cdot \frac{1}{1-(\frac{m}{k+m})^2} = \frac{k}{k+m} \cdot \frac{(k+m)^2}{k^2+2km+m^2-m^2} = \frac{k+m}{k+2m}.$$

$*$ Koristili smo $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1.$

(b) Kako se sada kuglice izvlače bez vraćanja, izvlačenja neće biti nezavisna, odnosno moramo razlikovati događaje C_i-"u i-tom izvlačenju je izvučena crna kuglica". Razlikovaćemo dva slučaja: kada je m paran broj, i kada je m neparan.

- m-paran broj
  Sada je $A = \{B, C_1C_2B, C_1C_2C_3C_4B, ..., C_1C_2...C_mB\}$-u $m+1$ izvlačenju se sigurno izvlači bela kuglica.

  Verovatnoća događaja A je

$$P(A) = P(B) + P(C_1C_2B) + ... + P(C_1C_2...C_mB) =$$
$$= P(B)+P(C_1)P(C_2|C_1)P(B|C_1C_2)+...+P(C_1)\cdot...\cdot P(C_m|C_1...C_{m-1})P(B|C_1...C_m) =$$
$$= \frac{k}{k+m} + \frac{m}{k+m}\cdot\frac{m-1}{k+m-1}\cdot\frac{k}{k+m-2} + ... + \frac{m}{k+m}\cdot\frac{m-1}{k+m-1}\cdot\frac{m-2}{k+m-2}\cdot...\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k}{k}.$$

- m-neparan broj
  Sada je $A = \{B, C_1C_2B, C_1C_2C_3C_4B, ..., C_1C_2...C_{m-1}B\}$.
  Verovatnoća događaja A je

$$P(A) = P(B) + P(C_1C_2B) + ... + P(C_1C_2...C_{m-1}B) =$$
$$= P(B)+P(C_1)P(C_2|C_1)P(B|C_1C_2)+...+P(C_1)\cdot...\cdot P(C_{m-1}|C_1...C_{m-2})P(B|C_1...C_{m-1}) =$$
$$= \frac{k}{k+m} + \frac{m}{k+m}\cdot\frac{m-1}{k+m-1}\cdot\frac{k}{k+m-2} + ... + \frac{m}{k+m}\cdot\frac{m-1}{k+m-1}\cdot\frac{m-2}{k+m-2}\cdot...\cdot\frac{2}{k+2}\cdot\frac{k}{k+1}.$$

Zadatak 3

Postavka: Igrači A i B više puta igraju igru u kojoj A pobeđuje sa verovatnoćom p, a B pobeđuje sa verovatnoćom $1-p$. Pobeđuje onaj igrač koji pobedi:

(a) u dve igre,

(b) u dve uzastopne igre.

Ako su igre međusobno nezavisne, naći verovatnoću da ukupni pobednik bude igrač A.

Rešenje:
Označimo sa A događaj "u jednoj igri pobedio je igrač A", sa B događaj "u jednoj igri pobedio je igrač B", a sa A_u događaj "ukupno je pobedio igrač A". Tada je $P(A) = p$ i $P(B) = 1 - p = q$.

(a) Kako u prvom slučaju pobeđuje onaj igrač koji pobedi u dve igre, događaj A_u možemo predstaviti kao $A_u = \{AA, ABA, BAA\}$. Onda je:

$$\begin{aligned} P(A_u) &= P(AA) + P(ABA) + P(BAA) = \\ &\overset{\text{nez.igre}}{=} P(A)P(A) + P(A)P(B)P(A) + P(B)P(A)P(A) = \\ &= p^2 + p^2q + p^2q = p^2 + 2p^2q = p^2(1 + 2q). \end{aligned}$$

(b) U drugom slučaju igrač pobeđuje ako pobedi u dve uzastopne igre, te je $A_u = \{AA, ABAA, ABABAA, ..., BAA, BABAA, BABABAA, ...\}$, odnosno $A_u = \{(AB)^iAA, i = 0, 1, 2, 3, ...\} \cup \{(BA)^iA, i = 1, 2, 3, ...\}$. Onda je:

$$P(A_u) = \sum_{i=0}^{\infty} P((AB)^iAA) + \sum_{i=1}^{\infty} P((BA)^iA) =$$

$$\overset{\text{nez.igre}}{=} \sum_{i=0}^{\infty}(P(A)P(B))^iP(A)^2) + \sum_{i=1}^{\infty}(P(B)P(A))^iP(A)) = \sum_{i=0}^{\infty}(pq)^ip^2 + \sum_{i=1}^{\infty}(pq)^ip =$$

$$= p^2\sum_{i=0}^{\infty}(pq)^i + ppq\sum_{i=0}^{\infty}(pq)^i = p^2\frac{1}{1-pq} + p^2q\frac{1}{1-pq} = p^2\frac{1+q}{1-pq}.$$

Zadatak 4

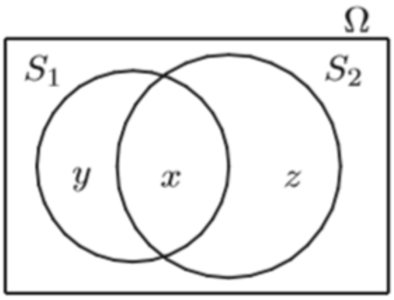
Postavka: Na putu do posla inženjer prolazi pored dva semafora. Verovatnoća da će morati da se zaustavi kod prvog je 0.4, a kod drugog je 0.5, a kod bar jednog je 0.6. Izračunati verovatnoću događaja
A — "moraće da se zaustavi kod oba semafora", B — "zaustaviće se samo kod prvog semafora", C — "zaustaviće se kod tačno jednog semafora", D — "uhvatiće zeleni talas".

Rešenje:
Označimo sa S_i, $i = 1, 2$, događaj "inženjer će morati da se zaustavi kod i-tog semafora". Na osnovu datih podataka $P(S_1) = 0.4$, $P(S_2) = 0.5$ i $P(S_1 \cup S_2) = 0.6$ računamo

- $P(A) = P(S_1S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cup S_2) = 0.4 + 0.5 - 0.6 = 0.3$,

- $P(B) = P(S_1\overline{S_2}) = P(S_1 \setminus S_1S_2) = P(S_1) - P(S_1S_2) = 0.4 - 0.3 = 0.1$,
- $P(C) = P(S_1\overline{S_2}+\overline{S_1}S_2) = P(S_1\overline{S_2})+P(\overline{S_1}S_2) = 0.1+P(S_2\setminus S_1S_2) = 0.1+P(S_2)-P(S_1S_2) = 0.1 + 0.5 - 0.3 = 0.3$,
- $P(D) = 1 - P(S_1 \cup S_2) = 1 - 0.6 = 0.4$.

Drugi način: Verovatnoću možemo često interpretirati grafički



$P(S_1S_2) = x$, $P(S_1\overline{S_2}) = y$, $P(\overline{S_1}S_2) = z$. Onda je $P(S_1) = x + y = 0.4$, $P(S_2) = x + z = 0.5$, $P(S_1 \cup S_2) = x + y + z = 0.6$. Rešavanjem sistema jednačina

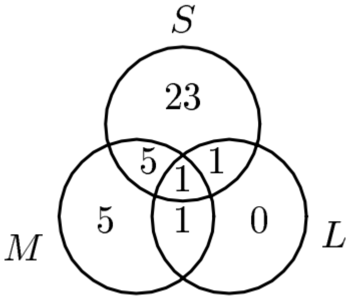
$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0.4 \\ x & & & + & z & = & 0.5 \\ x & + & y & + & z & = & 0.6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0.4 \\ & - & y & + & z & = & 0.1 \\ & & & & z & = & 0.2 \end{array}$$

dobijamo $z = 0.2$, $y = 0.1$, $x = 0.3$, odnosno
$P(A) = P(S_1S_2) = x = 0.3$,
$P(B) = P(S_1\overline{S_2}) = y = 0.1$,
$P(C) = P(S_1\overline{S_2} + \overline{S_1}S_2) = P(S_1\overline{S_2}) + P(\overline{S_1}S_2) = z + y = 0.3$,
$P(D) = 1 - P(S_1 \cup S_2) = 1 - (x + y + z) = 1 - 0.6 = 0.4$.

Zadatak 5

Postavka: Na simpozijumu od 40 učesnika njih 30 govori srpski, 12 mađarski, 3 slovački, 6 srpski i mađarski, 2 srpski i slovački, 2 mađarski i slovački i jedan učesnik govori sva tri jezika. Naći verovatnoće događaja:
A — "ne govori ni jedan od navedenih jezika", B — "govori tačno dva od navedenih jezika",
C — "govori tačno jedan od navedenih jezika", D — "govori samo slovački jezik".

Rešenje:
Obeležimo redom sa S, L i M skupove učesnika koji govore srpski, slovački i mađarski jezik.



Na dijagramu ovih skupova uočavamo koliko učesnika govori koje od ova tri jezika. Sledi da $23+5+5+1+1+1 = 36$ učesnika govori bar jedan od ova tri jezika, tj. $40-36 = 4$ učesnika ne govori ni jedan od navedena tri jezika. Tačno dva od navedenih jezika govori $5+1+1 = 7$ učesnika, a tačno jedan $23+5 = 28$. Samo slovački jezik ne govori ni jedan od učesnika. Verovatnoće traženih događaja onda iznose $P(A) = \frac{4}{40}$, $P(B) = \frac{7}{40}$, $P(C) = \frac{28}{40}$ i $P(D) = 0$.

Zadatak 6

POSTAVKA: Tri aviona nezavisno jedan od drugog bombarduju jedan most serijom bombi. Verovatnoća da bar jedna bomba iz serije pogodi most za prvi avion je 0.2, za drugi 0.3 i za treći 0.4. Naći verovatnoću da most bude pogođen.

REŠENJE:
Označimo sa A događaj "most je pogođen". Most je pogođen ako ga je pogodila bar jedna bomba iz bar jednog aviona, tako da je

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3),$$

gde je sa A_i označen događaj "most je pogođen bombom iz i-tog aviona", $i = 1, 2, 3$ i njihove verovatnoće iznose $P(A_1) = 0.2$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.4$.
Kako avioni gađaju most nezavisno jedan od drugog, važi

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$$

$$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08$$

$$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.024$$

Tako da je $P(A) = 0.2 + 0.3 + 0.4 - 0.06 - 0.08 - 0.12 + 0.024 = 0.664$.

Zadatak 7

POSTAVKA: U pozorište je došlo n ljudi, svi su ostavili kapute u garderobi i svi su ostali do kraja predstave. Na kraju predstave nestalo je struje, te su posetioci nasumice uzimali kapute iz garderobe. Izračunati verovatnoću da je bar jedan od posetioca uzeo svoj kaput iz garderobe.

REŠENJE:
Označimo događaje:
A_i - "i-ti posetilac je uzeo svoj kaput", $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
B_n - "bar jedan od n posetioca je uzeo svoj kaput".
Pošto je $B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, sledi:

$$P(B_n) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 ... A_n) =$$
$$\stackrel{[1]}{=} n\tfrac{(n-1)!}{n!} - \tbinom{n}{2}\tfrac{(n-2)!}{n!} + \tbinom{n}{3}\tfrac{(n-3)!}{n!} - \cdots + (-1)^{n-1}\tbinom{n}{n}\tfrac{0!}{n!} =$$
$$= \tfrac{1}{1!} - \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\tfrac{1}{n!}.$$

[1] - *Po opisu iz zadatka izračunavamo:*

$$P(A_i) = \tfrac{1}{n} = \tfrac{(n-1)!}{n!},$$

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j|A_i) = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n-1} = \tfrac{(n-2)!}{n!} \qquad (i < j),$$

$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j|A_i)P(A_k|A_iA_j) =$$
$$= \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n-1} \cdot \tfrac{1}{n-2} = \tfrac{(n-3)!}{n!} \qquad (i < j < k),$$
$$\vdots$$
$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1}) =$$
$$= \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n-1} \cdot \cdots \cdot \tfrac{1}{1} = \tfrac{0!}{n!}.$$

Napomena: *Ako posmatramo, na primer,* $\sum\limits_{i<j} P(A_iA_j)$*, parova* A_iA_j *takvih da je* $i < j$ *i* $A_iA_j = A_jA_i$*, ima* $\binom{n}{2}$*, dok je* $P(A_iA_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$*, pa je* $\sum\limits_{i<j} P(A_iA_j) = \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!}$.
(Primetimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\right) = 1 - e^{-1}$, jer je $e^x = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$).

Zadatak 8

POSTAVKA: U grupi se nalazi n ljudi sa međusobno različitim imenima i prezimenima. Svako od njih zapisuje svoje ime na cedulju i ubacije u prvu kutiju, a cedulju sa svojim prezimenom u drugu kutiju. Zatim svaka osoba izvlači po jednu cedulju iz kutije sa imenima i iz kutije sa prezimenima, bez vraćanja.

(a) Naći verovatnoću da će svaka osoba izvući svoje ime i prezime.

(b) Naći verovatnoću da će svaka osoba izvući ime i prezime koje odgovara nekoj osobi.

(c) Naći verovatnoću da će bar jedna osoba izvući ime i prezime koje odgovara nekoj osobi.

Rešenje:

(a) Označimo sa A_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$, događaj "i-ta osoba je izvukla svoje ime i prezime", a sa A događaj "svaka osoba je izvukla svoje ime i prezime". Tada je $A = A_1A_2A_3 \cdots A_n$. Kako se imena i prezimena koje su već izvučena ne vraćaju nazad u kutije, izvlačenje nisu nezavisna, pa je:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) \cdots P(A_n \mid A_1A_2A_3...A_{n-1}) =$$
$$\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n-2}\right)\cdots\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{(n!)^2}.$$

Napomena: $P(A_2|A_1)$ *je* $\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-1}$ *jer je, nakon što je prva osoba izvlačila ime i prezime, u obe kutije je ostalo* $n-1$ *imena i prezimena, a svakoj osobi odgovara samo njeno ime i prezime.*

(b) Označimo sa B_i događaj "i-ta osoba je izukla ime i prezime neke osobe", a sa B događaj "svaka osoba je izvukla ime i prezime neke osobe". Onda je $B = B_1B_2B_3 \cdots B_n$. Kao i u prvom slučaju, izvlačenje nisu nezavisna, te je:

$$P(B) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1B_2) \cdots P(B_n \mid B_1B_2B_3 \cdots B_{n-1}) =$$
$$= \left(\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{n-2}{n-2}\cdot\frac{1}{n-2}\right)\cdots\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\right) =$$
$$\left(1\cdot\frac{1}{n}\right)\left(1\cdot\frac{1}{n-1}\right)\left(1\cdot\frac{1}{n-2}\right)\cdots 1 = \frac{1}{n!}.$$

Napomena: $P(B) = \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n}$ *jer ukoliko osoba prvo bira ime, može izvući bilo koje ime, tj. odgovara joj* n *imena od* n *mogućih, dok kad izvuče ime, odgovara joj samo prezime osobe sa tim imenom, od* n *prezimena koje može izvući.*

(c) Označimo sa C događaj "bar jedna osoba će izvući nečije ime i prezime". Onda je $C = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ... \cup B_n$. Odatle imamo:

$$P(C) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) - \sum_{i<j} P(B_iB_j) + \sum_{i<j<k} P(B_iB_jB_k) - ... + (-1)^{n-1}P(B_1B_2\cdots B_n) = *$$

Računamo:

$P(B_i) = 1\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$,

$P(B_iB_j) = P(B_i)P(B_j \mid B_i) = (1\cdot\frac{1}{n})(1\cdot\frac{1}{n-1}) = \frac{1}{n\cdot(n-1)} \quad (i<j)$,

$P(B_iB_jB_k) = P(B_i)P(B_j \mid B_i)P(B_k \mid B_iB_j) =$

$$= (1\cdot\frac{1}{n})(1\cdot\frac{1}{n-1})(1\cdot\frac{1}{n-2}) = \frac{1}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)} \quad (i<j<k),$$

$\vdots$

$P(B_1B_2...B_n) = \frac{1}{n!}$.

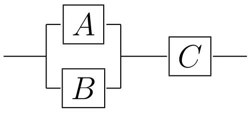
Onda je:

$$* = n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n\cdot(n-1)} + \binom{n}{3}\frac{1}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

Zadatak 9

Postavka:

Dato je strujno kolo sastavljeno od tri prekidača povezana kao na slici:



(a) Prekidač A je uključen sa verovatnoćom 0.6. Prekidač B je uključen sa verovatnoćom 0.8 ako je A uključen, a sa verovatnoćom 0.3 ako je A isključen. Prekidač C je nezavisan od A i B i uključen je sa verovatnoćom 0.6.

(b) Sva tri prekidača su nezavisna i uključena sa verovatnoćom 0.7.

Naći verovatnoću da struja prolazi kroz kolo.

Rešenje:

Obeležimo sa A, B i C redom događaje "Prekidač A je uključen", "Prekidač B je uključen" i "Prekidač C je uključen". Dalje, obeležimo sa S– "kroz kolo protiče struja". Da bi struja proticala kroz kolo, prekidač C mora biti uključen, a od prekidača A i B mora biti uključen bar jedan. Dakle, S je unija disjunktnih događaja, $S = ABC + A\overline{B}C + \overline{A}BC$, odnosno $P(S) = P(ABC) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}BC)$.

(a) Po uslovu zadatka važi
$P(A) = 0.6$, $P(B|A) = 0.8$, $P(B|\overline{A}) = 0.3$, odakle sledi da je

$$P(\overline{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$$
$$P(\overline{B}|A) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

Takođe, po uslovu zadatka je $P(C) = 0.6$.
Kako je prekidač C nezavisan od prekidača A i B, dobijamo:

$$P(S) = P(AB)P(C) + P(A\overline{B})P(C) + P(\overline{A}B)P(C) =$$

$$= P(A)P(B|A)P(C) + P(A)P(\overline{B}|A)P(C) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})P(C) =$$

$$= 0.6\cdot 0.8\cdot 0.6 + 0.6\cdot 0.2\cdot 0.6 + 0.4\cdot 0.3\cdot 0.6 = 0.$$

(b) Po uslovu zadatka važi $P(A) = P(B) = P(C) = 0.7$ i kako su sva tri prekidača nezavisna dobijamo

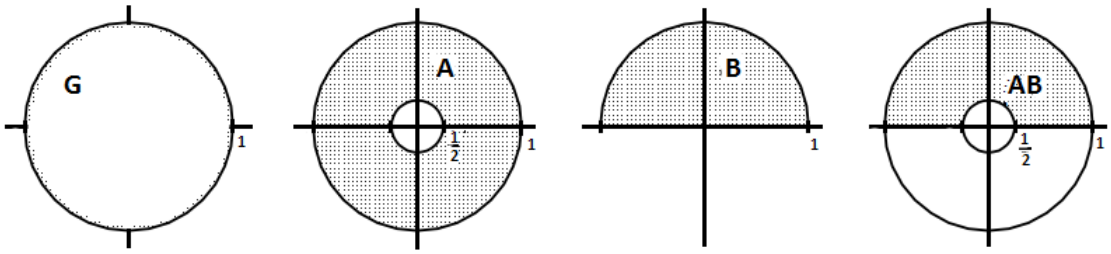
$$P(S) = P(A)P(B)P(C) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C) =$$

$$= 0.7^3 + 0.7^2\cdot 0.3 + 0.7^2\cdot 0.3 = 0.637.$$

Zadatak 10

Postavka: Strelac gađa kružnu metu poluprečnika 1. Ispitati nezavisnost događaja A — "pogođen je prsten sa poluprečnicima 0.5 i 1" i B — "pogođena je gornja polovina mete".

Rešenje:
Treba ispitati da li važi $P(AB) = P(A)P(B)$.
Možemo koristiti geometrijsku definiciju verovatnoće.



Sa slike se vidi da je $m(G) = \pi$, $m(A) = \pi - (\frac{1}{2})^2\pi = \frac{3}{4}\pi$, $m(B) = \frac{1}{2}\pi$ i $m(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{8}\pi$.
Tada je $P(A) = \frac{m(A)}{m(G)} = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{m(B)}{m(G)} = \frac{1}{2}$ i $P(AB) = \frac{m(AB)}{m(G)} = \frac{3}{8}$.
Kako je $P(AB) = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$, događaji A i B su nezavisni.