Адхерентна тачка

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\ L(a,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$

тачка $a\in X$ је адхерентна ако свака ε-околина тачке a има непразан пресек са скупом A

На пр.:

$A=(a,b]$

$\bar{\bar{A}}=\bar{A}$ $\quad \bar{A}=[a,b]$

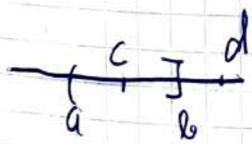
Скуп свих адхерентних тачака зовемо адхеренција (затворење) скупа A.

Тачка нагомилавања

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\ L(a,\varepsilon)\cap (A\setminus\{a\})\neq\emptyset$

- свака ε-околина тачка a има непразан пресек са скупом $A\setminus\{a\}$).

На пр.:



тачке нагомилавања

a, c, b

а, ако имамо скуп $B=A\cup\{d\}$

d није тачка нагомилавања

* Скуп свих тачака нагомилавања обележавамо са A'
* Свака тачка нагомилавања је адхерентна тачка тј важи $A'\subset\bar{A}$

Изолована тачка

$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+)\ L(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$

Конвергенција низова у метричком простору

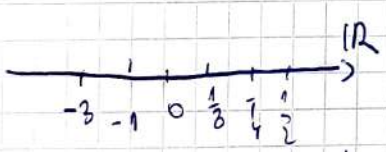
* Скуп је пребројив ако постоји бијективна функција која слика из скупа у $\mathbb{N}$

$\exists f: \mathbb{N} \xrightarrow[на]{1-1} A$ пребројив скуп

$a(1)$ - први члан низа

$a(2) = a_2$ - други члан низа

ако је $X = \mathbb{R}$ онда је низ реалан, а ако је $X = \mathbb{C}$ онда је низ комплексан



- највеће доње ограничење је инфимум (иако не припада низу)

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

ограничен са обе стране

$a_n = (-1)^n \cdot n \quad n \in \mathbb{N}$

$a_n = n \quad n \in \mathbb{N}$

$\inf a_n = 1$ супремум не постоји

Нека је (X,d) метрички простор. За низ $\{a_n\} \subset X$ кажемо да има граничну вредност $a \in X$ и пишемо да је $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in L(a, \varepsilon)),$$

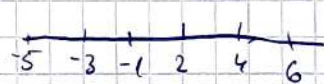
* $$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon)$$ *

① $a_n = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$

a) да ли је $\frac{1}{3}$ гранична вр. низа? не

b) Има ли овај низ. гр. вр.? Ако има, да ли је она члан низа? има, 0, није члан низа

② $a_n = (-1)^n \cdot n \quad n \in \mathbb{N}$ - не постоји -



③ $a_n = n \quad n \in \mathbb{N}$

④ $a_n = (-1)^n \quad n \in \mathbb{N}$

- тачка нагомилавања скупа није исто што и тачка нагомилавања низа -

Ако је a тачка нагомилавања низа a_n $n \in \mathbb{N}$ тада постоји подниз a_{n_k} $k \in \mathbb{N}$ низа a_n, $n \in \mathbb{N}$ такав да је $\boxed{\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = a}$

- Вежбе 1 -

20. април
1. колоквијум

Конвергенција низова

Дефиниција 1:

Произвољно пресликавање $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ зовемо реални низ, док вредности $a(n) = a_n$ називамо општи члан низа

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Дефиниција 2:

Број $a \in \mathbb{R}$ је гранична вредност реалног низа $\{a_n\}$ у скуп $\mathbb{R}$ акко је испуњено $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ $(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$

кратки запис $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = a}$

- Ако је $g \leq a_n \leq G$ $\forall n \in \mathbb{N}$, низ $\{a_n\}$ је ограничен
  (g – доња гр., G – горња гр.)

- Ако је низ ограничен са ~~доње~~ горње стране, тада постоји ~~најмање~~ најбоље ~~доње~~ горње ограничење супремум - sup

- Ако је низ ограничен са доње стране, постоји најмање доње огр. инфимум - inf

- За тачку a кажемо да је тачка нагомилавања низа акко се у свакој ε околини налази бесконачно много чланова низа.

· Сваки монотоно растући (неопадајући) низ који је огр. са горње стране, конвергира свој sup.

· Сваки монотоно опадајући (нерастући) низ који је огр. са доње стране, конвергира свој inf.

$\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad a_n=\frac{1}{n}$ $\quad a_1=1$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{3}$

ограничен низ!

$0<a_n\leq 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$

инфимум

inf, sup > не морају да буду чланови низа

+ објашњење +

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\\ \varepsilon=0{,}01\\ n_0=100\\ a_{101}, a_{102}\ldots \quad |a_n-0|<0{,}01\end{array}}$$

$a_n=(-1)^n$

$a_1=-1$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ = не постоји

$a_n=3$

$a_1=a_2=a_3\ldots=3$

$\lim\limits_{n\to\infty}3=3$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \qquad \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\pm b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$ $\quad c = const$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$ $\quad b_n \neq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$b \neq 0$

Низ је конвергентан ако има коначну гр. вредност.
У супротном кажемо да је дивергентан.

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не постоји (дивергентан)

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$ (дивергентан)

$$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \text{ (конвергентан)}}$$!

$\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$

Скала раста низова:

$\ln n < n^a < n^b < p^n < q^n < n! < n^n$

$0 < a < b \quad 1 < p < q$

спорије расте

$$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n = \frac{\lim 5^n}{\lim 2^n} = \infty}$$!

$\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$

Неодређени изрази:

„$\frac{\infty}{\infty}$", „$\infty \cdot 0$", „$\frac{0}{0}$", „0^0", „∞^0", „1^∞", „$\infty - \infty$"

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Задаци:

1.

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+4}{3n^3+5n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\left(\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{0}{3} = 0$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^7+8n^2-10}{6n^6-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^7}\left(1+\frac{8}{n^5}-\frac{10}{n^7}\right)}{\cancel{n^7}\left(\frac{6}{n}-\frac{1}{n^7}\right)} = \frac{1}{0} = +\infty$$

плус јер је $\frac{6}{n} > \frac{1}{n^7}$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^4+n^3+2}{7n^4+n^2-3} = \frac{\cancel{n^4}\left(5+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}{\cancel{n^4}\left(7+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^4}\right)} = \frac{5}{7}$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{5n^2+n}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^\infty = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q|<1 \\ 1, & q=1 \\ \infty, & q>1 \end{cases}$$

не постоји, $q<-1$

$\lim (-5)^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot 5^n =$ не постоји

$\lim \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

одређена константа

3. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3+2}{5n^3}\right)^{n^3} \overset{1^\infty}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5n^3}\right)^{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5n^3}{2}}\right)^{\frac{5n^3}{2}\cdot\frac{2}{5n^3}\cdot n^3} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{5n^3}} = \boxed{e^{\frac{2}{5}}}$$

$$④\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \overset{"1^\infty"}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1-1}{2n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-2n-1}\right)^{(-2n-1)\cdot\frac{1}{-2n-1}\cdot n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-2n-1}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n = 2^\infty = \infty$$

Само је 1^∞ неодређен

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\dots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$⑤\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n^2}\right) \overset{"\infty\cdot 0"}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\dots+n-1}{n^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

$$⑥\ \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\dots n(n+1)}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(1+1)+2(2+1)+3(3+1)+\dots n(n+1)}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\dots+n^2+1+2+\dots+n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2+3n+1)+3n^2+3n}{6n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+6n^2+4n}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

7. $$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n-5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{5^{n+1}}^{\,5}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1 \to 0}+1\right)}{\cancel{5^n}_{\,1}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{n \to 0}-1\right)} = \frac{5}{-1} = -5$$

8. $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!+(n+1)!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} + 1 = 0+1 = 1$$

9. $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right) \overset{\text{"}\infty-\infty\text{"}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{(n+\sqrt{n})-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{n}}{n}}^{\to 0}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{n}}{n}}\right)} =$$

$$= \frac{2}{1+1} = 1$$

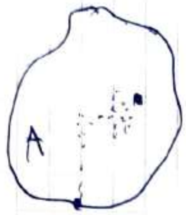
10. $$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n+n-\sqrt[3]{n^3+n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} + \lim_{n\to\infty} n\left(n-\sqrt[3]{n^3+n}\right)\frac{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt[3]{(n^3+n)^2}}{-\|-}$$

$$= n\cdot\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} + \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\cancel{n^3}-\cancel{n^3}-n}{n^2+n\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt[3]{n^6\left(1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} + \lim_{n\to\infty}\frac{-\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\right)} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Предавање 1,



Највећу тачку нагомилавања зовемо **limes superior**. ($\lim\sup a_n$)

Најмању тачку нагомилавања зовемо **limes inferior**. ($\lim\inf a_n$)

-ако су $\lim\sup a_n$ и $\lim\inf a_n$ различити низ не конвергира, ако конвергира једнаки су.

На пример:

$$a_n = \begin{cases} 2, & n\text{ - парно} \\ n, & n\text{ - непарно} \end{cases}$$

$$2 = \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$$

↳ али није гранична вредност

Дивергенција реалних низова

Дефиниција:

Ако низ a_n тежи $+\infty$ или $-\infty$ кажемо да је <u>дивергентан у ужем смислу</u>. За низ који је дивергентан, али не у ужем смислу, кажемо да је <u>дивергентан у ширем смислу</u>.

$a_n, n \in \mathbb{N}$ - реалан низ ($a_n \in \mathbb{R}$)

1) $+\infty$ је тачка нагомилавања низа a_n ако
$\forall k \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, a_{n_0} \geq k$

2) $-\infty$ је тачка нагомилавања низа a_n ако
$\forall k \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, a_{n_0} \leq k$

Основне особине реалних конвергентних низова

1° Ако је $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, тада је a једина тачка нагомилавања низа $\{a_n\}$

2° Конвергентан низ a_n има јединствену граничну вредност.

3° Конвергентан низ је ограничен

4° Ако је реалан низ a_n ограничен и има 1 тачку нагомилавања, тада је конвергентан и његова гр. вредност је тачка нагомилавања.

(X, d) - метр. простор је комплетан ако:

$\forall A \subseteq X$, $\forall$ тачка нагом. a важи $a \in X$ — дефиниција

5° Ако низ a_n конвергира ка броју a, тада је и низ $\{|a_n|\}$ конвергентан и конвергира ка броју $|a|$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim |a_n| = |a|}$$

- обрнуто није тачно!

6° Ако низ $\{|a_n|\}$ конвергира ка броју 0, тада је и низ $\{a_n\}$ конвергентан и конвергира ка броју 0

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

7° Ако су низови $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такви да је $a_n \le b_n$ за $n \ge k$ и ако је $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ тада ја $a \le b$

8° Ако су низови $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ такви да је $a_n \le b_n \le c_n$ за $n \ge k$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$ онда је и $\lim_{n\to\infty} b_n = a$

9° Нека је $\{b_n\}$ низ природних бројева за који важи да је $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Ако је $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ тада је и $\lim_{n\to\infty} a_{b_n} = a$

10° Ако низ a_n конвергира ка a, тада и сваки подниз a_{nk} низа a_n конвергира ка a.

* 9 и 10 важе у произвољном ~~ме~~ метричком простору (X, d)

- Вежбе 2 -

наставак

11. $\lim_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\underbrace{\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi}_{\alpha} + \underbrace{n\pi}_{\beta}) =$

$= \lim_{n\to\infty} (\sin\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\cdot \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} + \cos\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\underbrace{\sin n\pi}_{0})^2 =$

$= \lim_{n\to\infty} ((-1)^n\cdot\sin\pi(\sqrt{n^2+n}-n))^2 = \lim_{n\to\infty}\sin^2\pi(\sqrt{n^2+n}-n)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} =$

$= \lim_{n\to\infty}\sin^2\pi\cdot\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}+n} = \lim_{n\to\infty}\sin^2\pi\,\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$

$*\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

12. У зависности од реалног параметра a дискутовати граничну вредност низа са општим чланом

$a_n = \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-n+2}\right)^{\frac{n^2-n+2}{an^2+(a+1)n-1}}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+2-n-1}{n^2-n+2}\right)^{\frac{n^2-n+2}{an^2+(a+1)n-1}} =$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-n-1}{n^2-n+2}\right)^{\frac{n^2-n+2}{an^2+(a+1)n-1}} =$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+2}{-n-1}}\right)^{\frac{n^2-n+2}{-n-1}\cdot\frac{-n-1}{\cancel{n^2-n+2}}\cdot\frac{\cancel{n^2-n+2}}{an^2+(a+1)n-1}} =$

$*e$

$e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-n-1}{an^2+(a+1)n-1}}$

- ako je $a \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$$

- ako je $a=0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-n-1}{n-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

13. Дат је низ a_n, где су p и $q \in \mathbb{R}$, $p>0$. У зависности од параметара p и q одредити када овај низ дивергира, а када конвергира ка
a) нули b) броју различитом од нуле.

$$a_n = n-1-\sqrt{pn^2+qn}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n-1-\sqrt{pn^2+qn}) \cdot \frac{n-1+\sqrt{pn^2+qn}}{n-1+\sqrt{pn^2+qn}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2-(pn^2+qn)}{n-1+\sqrt{pn^2+qn}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-p)n^2-(2+q)n+1}{n-1+n\sqrt{p+\frac{q}{n}}}$$

1° случај

$p \neq 1$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ дивергира за $p\neq 1$ и $\forall q$

2° случај

$p=1$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(-2-q+\frac{1}{n})}{n(1-\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{q}{n}})} = \frac{-2-q}{2}$$

(a) $\frac{-2-q}{2}=0$ (b) $p=1$ и $q\neq -2$

$\Leftrightarrow q=-2$

(14.) Испитати: ограниченост, супремум, инфимум, одредити тачке нагомилавања и граничну вредност (ако постоји) за низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n=\frac{3n-1}{5n+1}$

$a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{5}{11}$, $a_3=\frac{1}{2}$, $a_4=\frac{11}{21}$

Докажимо да је низ растући, тј. $a_{n+1}>a_n$ за сваки природан број n $(\forall n\in\mathbb{N})$

$$a_{n+1}>a_n \Leftrightarrow a_{n+1}-a_n>0 \Leftrightarrow \frac{3(n+1)-1}{5(n+1)+1}-\frac{3n-1}{5n+1}>0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3n+2}{5n+6}-\frac{3n-1}{5n+1}>0 \Leftrightarrow \frac{(3n+2)(5n+1)-(3n-1)(5n+6)}{(5n+6)(5n+1)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{15n^2}+\cancel{13n}+2-\cancel{15n^2}-\cancel{13n}+6}{(5n+6)(5n+1)}=\frac{\overset{>0}{8}}{(5n+6)(5n+1)}>0$$

$$n\in\mathbb{N} \Rightarrow \overbrace{(5n+6)(5n+1)}^{\text{увек је позитивно}}>0$$

* Низ је монотоно растући

(T)

$\inf\{a_n\}=\frac{1}{3}$ → када је низ монотоно растући inf је увек први члан низа

$\frac{1}{3}\leq a_n\leq 1$ → једно горње ограничење

$3n-1\leq 5n+1$

$-2<2n$ ✓ увек тачно

низ је ограничен

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3}{5}$$ → гранична вредност

$\sup\{a_n\} = \frac{3}{5}$ — није члан низа

$\left\{\frac{3}{5}\right\}$ тачка нагомилавања

ако низ има гр. вр. што је једина тачка нагомилавања

15. За претходни пример одредити од ког члана се сви наредни чланови налазе у ε околини граничне вредности

$\varepsilon = 0.1$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - \underset{\text{гр. вредност}}{a}| < \varepsilon)$$

$a = \frac{3}{5}$

$$|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3n-1}{5n+1} - \frac{3}{5}\right| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left|\frac{15n-5-15n-3}{5(5n+1)}\right| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{5(5n+1)} < \frac{1}{10}$$

$$80 < 25n + 5$$

$$75 < 25n$$

$$n > 3$$

$n_0 := 4$ → $\boxed{\text{1., 2., 3. члан испадају из околине}}$

16. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sin(n!)}{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} \sin(n)$ — Не постоји

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = 0$$ нула низ

$0 \leq |\sin(n!)| \leq 1$ ограничен низ

Ограничен низ пута нула низ је увек нула низ.

Теорема о укљештеним низовима:

Нека су дати реални низови $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и низ $\{c_n\}$. Ако су $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ конвергентни и имају исту границу $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ и важи $a_n \le c_n \le b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ онда је и низ $\{c_n\}$ конвергентан

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$.

(17.) Одредити граничну вредност низа

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \cdot n}_{a_n} \le c_n \le \underbrace{n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

по теореми

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

(18.) $$c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+5n^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+5n^2}} \cdot 5n^2 \le c_n \le 5n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \cancel{4}\,\frac{5}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{n^2\sqrt[3]{8+\frac{5}{n^4}}} = \frac{5}{2} \checkmark \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2}{n^2\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^6}}} = \frac{5}{2} \checkmark$$

Штолцова теорема

Дати су низови a_n и b_n при чему је $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ и почев од неког коначног природног броја $\{b_n\}$ је монотоно растући. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

(19.) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{1+2+\dots+n}^{a_n}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\dots+n-1-2-\dots-(n-1)}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

$b_n = n^2$ растући

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

(20.) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 + \dots + n(2n-1)}{1^2+2^2+\dots+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n-1)}{n^2} = 2$$

$b_n = 1^2+2^2+ n^2$ растући низ

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

*подниз

Рекурзивни низови

(1.) Нека је дат низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_1=1$, $a_{n+1}=3\cdot\frac{2a_n+1}{a_n+4}$
$n\in\mathbb{N}$

$a_2=\frac{9}{5}$, $a_3=\frac{69}{29}$, ... Показати да низ конвергира и наћи његову граничну вредност.

$a_n>0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

- Покажимо математичком индукцијом да је $\{a_n\}$ монотоно растући.

1) база индукције

$a_1<a_2$

$1<\frac{9}{5}$ (T)

2) И.Х.

$a_{n-1}<a_n$

за $\exists n\in\mathbb{N}$

3) И.К.

$a_n<a_{n+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_{n+1}-a_n>0$

$$3\cdot\frac{2a_n+1}{a_n+4}-3\cdot\frac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+4}=3\frac{(2a_n+1)(a_{n-1}+4)-(2a_{n-1}+1)(a_n+4)}{(a_n+4)(a_{n-1}+4)}>0$$

$$3\frac{\cancel{2a_na_{n-1}}+8a_n+a_{n-1}+4-\cancel{2a_{n-1}a_n}-8a_{n-1}-a_n-4}{(a_n+4)(a_{n-1}+4)}>0$$

$$\frac{21(a_n-a_{n-1})}{\underbrace{(a_n+4)}_{>0}\underbrace{(a_{n-1}+4)}_{>0}}>0$$

- веће од 0 по индукцијској хипотези

(T)

- Покажимо математичком индукцијом да је $\{a_n\}$ ограничен са горње стране $a_n<3 \ \forall n\in\mathbb{N}$

1) база индукције

$a_1<3$

$1<3$ (T)

2) И.Х.

$a_{n-1}<3 \ \exists n\in\mathbb{N}$

3) И.К.

$a_n<3 \Leftrightarrow$

$$3\cdot\frac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+4}<3$$

$$\frac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+4}<1$$

$$2a_{n-1}+1 < a_{n-1}+4 \Leftrightarrow \overset{\text{по и.х.}}{a_{n-1} < 3} \quad \text{Т}$$

Сваки монотоно растући низ ограничен са ~~доње~~ горње стране је конвергентан.

Сада тражимо граничну вредност:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 3\,\frac{2a_n+1}{a_n+4} =$$

$$= 3 \cdot \frac{2\lim_{n\to\infty} a_n + 1}{\lim_{n\to\infty} a_n + 4} = 3 \cdot \frac{2A+1}{A+4}$$

$$A = 3 \cdot \frac{2A+1}{A+4} \quad / \cdot A+4$$

$$A^2+4A = 6A+3$$

$$A^2-2A-3=0$$

$$A_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$A_1 = 3 \qquad \cancel{A_2 = -1}$$

Не може бити гр. вредност јер је $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 3}$$

Напомена:

Конвергенција рекурзивно задатог низа зависи од избора I члана низа. У овом примеру ако је $0 < a_1 < 3$ добијамо низ који је растући и ограничен са горње стране. Уколико је $a_1 = 3$ добијамо константан низ $a_n = 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$ и он је по дефиницији конвергентан. Ако је $a_1 > 3$ добићемо низ који је монотоно опадајући који је ограничен са доње стране, а његова граница биће

3.

(2.) Нека је дат $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$ $a_1 = \frac{c}{2}$, $c \in \mathbb{R}^+$.
Показати да је низ монотоно растући. Доказати да је низ конвергентан акко $\{a_n\}$ конвергентан $\Leftrightarrow c \in (0,1]$ и наћи његову граничну вредност

$a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

(I) Математичком индукцијом покажимо да је низ монотоно растући:

1) Б.И.

$a_1 < a_2$

$\frac{c}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8}$ јер је $c > 0$

(T)

2) И.Х.

$a_{n-1} < a_n$

$a_n - a_{n-1} > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$

3) И.К.

$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} - \left(\frac{c}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$

$\frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\overbrace{(a_n - a_{n-1})}^{\text{по и.х.}}\overbrace{(a_n + a_{n-1})}^{>0}}{\underbrace{2}_{>0}} > 0$ (T)

(II) $\{a_n\}$ је конвергентан $\Leftrightarrow c \in (0,1]$

претпоставимо да $\{a_n\}$ конвергентан

$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}\right) = \frac{c}{2} + \frac{A^2}{2}$

$A = \frac{c}{2} + \frac{A^2}{2} \ /\cdot 2 \quad c > 0$

$2A = c + A^2$

$-A^2 + 2A - c = 0$ $\qquad A_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-c}}{2}$

$\Rightarrow \quad 1-c \geq 0$

$c \leq 1 \quad$ и $\quad c > 0 \Rightarrow c \in (0,1]$

Доказ у супротном смеру:
Претпостављамо да $c \in (0,1]$

$$A_1 = 1 + \sqrt{1-c} > 1 \qquad A_2 = 1 - \sqrt{1-c} < 1$$

– Покажимо математичком индукцијом да је $a_n < 1 \; \forall_{n\in\mathbb{N}}$

1) Б.И.

$a_1 < 1$

$\frac{c}{2} < 1$ јер је $0 < c \leq 1$

$\frac{c}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$ Т

2) И.Х.

$a_n < 1$ за неко $n \in \mathbb{N}$

3) И.К. $a_{n+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ Т

$\frac{c}{2} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{a_n^2}{2} < \frac{1}{2} \rightarrow$ по хипотези

Низ је растући и ограничен са горње стране, па на основу теореме он је конвергентан.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-c}}$$

3. $a_1 = 0$

$a_n = \sqrt{2a_{n-1}+3}$ $n \in \mathbb{N}$. Показати да овај низ конверги-ра. и наћи граничну вредност.

$A = \sqrt{2A+3}$

$A^2 - 2A - 3 = 0$

$A_2 = 3$

$a_2 = \sqrt{3}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{3}+3}$

- Математичком индукцијом ћемо показати да је низ растући.

1) Б.И. 2) И.Х. 3). И.К.

$a_1 < a_2$

$0 < \sqrt{3}$ T

$a_{n-1} < a_n$

$\exists n \in \mathbb{N}$

$a_n - a_{n-1} > 0$

$a_n < a_{n+1}$

$a_{n+1} - a_n > 0 \iff$

$\sqrt{2a_n+3} - \sqrt{2a_{n-1}+3} > 0 \iff$

$\sqrt{2a_n+3} > \sqrt{2a_{n-1}+3} \;/^2$

$\cancel{2}a_n + \cancel{3} > \cancel{2}a_{n-1} + \cancel{3}$

$a_n > a_{n-1}$ по и.х.

T

- Математичком индукцијом ћемо показати

$a_n < 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Б.И. 2) И.Х 3) И.К.

$a_1 < 3$

$0 < 3$ T

$a_n < 3$

$a_{n+1} < 3$

$\sqrt{2a_n+3} < 3 \;/^2$

$2a_n + 3 < 9$

$2a_n < 6$

$a_n < 3$ по. и.х.

T

По теореми низ је конвергентан.

$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{2A+3}$

$A = \sqrt{2A+3} \;/^2$ $A^2 - 2A - 3 = 0$ $\boxed{A=3}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

Предавања

Тврђење:

Сваки монотоно неопадајући низ који је ограничен са горње стране конвергира ка свом $\boxed{\text{супремуму}}$ а сваки монотоно нерастући низ ограничен са доње стране конвергира свом $\boxed{\text{инфимуму}}$

(1) Ако низ $\{a_n\}$, $a_n>0$ конвергира ка броју $a>0$ тада је и низ $\{\ln a_n\}$ конвергентан и конвергира ка броју $\ln a$.

(2) Ако низ $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$ конвергира ка a, тада је и низ $\{e^{a_n}\}$, конвергентан и конвергира ка e^a.

(3) Ако низ $\{a_n\}$ $a_n \geq 0$ конвергира ка броју a, тада је и низ $\{\sqrt[k]{a_n}\}$ $k \in \mathbb{N}$ конвергентан и конвергира ка броју $\sqrt[k]{a}$.

(4) Ако је $\{a_n\}$ низ такав да $a_n \to \infty$ тада је

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

(5) Ако је $\{a_n\}$ низ такав да $a_n \to -\infty$ тада је

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

Таблица:*

(1) $a>0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(3) $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & |q|<1 \\ 1 & q=1 \\ \infty & q>1 \end{cases}$

(4) $\alpha \in \mathbb{R}\ a>1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

Дефиниција:

Метрички простор (X, d) је $\boxed{\text{комплетан}}$ уколико у њему сваки Кошијев низ конвергира.

пример:

$a_n = \sqrt{2} + \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{R}$: конвергентан, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2} \Rightarrow$ Кошијев

$\mathbb{Q}$: није конв. јер $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; Кошијев? да

* Сваки конвергентан низ је Кошијев низ.

Простор $\mathbb{Q}$ се може комплетирати тј. проширити до најмањег простора који је комплетан. Тако можемо доћи до скупа $\mathbb{R}$ реалних бројева.

Тврђење:

Затворен простор комплетног метричког простора је комплетан.

Хајнеова теорема

Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори и нека је дата функција $f: D \to Y$, $D \subset X$. Тада $f(x) \to A \in Y$, $x \to a \in X$ ако и само ако за сваки низ $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$ који конвергира ка a следи да низ $\{f(x_n)\}$ конвергира ка A.

* тачка нагомилавања, лимес, хајнеова теорема (за усмени дефиниције)

Вежбе 4

Кошијеви низови

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)$$

или

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)}$$

за задатке

Сваки конвергентан низ је Кошијев. обрнуто не важи увек.

У метричком простору $\mathbb{R}$ низ је Кошијев акко је конвергентан.

1. Дати су Кошијеви низови $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

a) Ако је $a_n \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} / \{1\}$ испитати да ли је $\{a_n\}$ конвергентан

i) у $\mathbb{R}$? ii) у $\mathbb{R}_1$ $\left(a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

решење:

i)
a_n је Кошијев $\Rightarrow$ увек је конвергентан у $\mathbb{R}$

ii)
већ урађен задатак (теорема уклештених низова)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$$ не припада

$1 \notin \mathbb{R}_1$ $\Rightarrow$ a_n није конвергентан у $\mathbb{R}_1$

б) Да ли је низ $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

i) конвергентан? ii) Кошијев?

решење

У простору $\mathbb{R}$ $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ су конвергентни низови

тј. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ $a, b \in \mathbb{R}$

i) $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

$\{a_n \cdot b_n\}$ конвергира у $\mathbb{R}$.

ii) пошто је конвергентан онда је и Кошијев

за испит (?):

2. Дат је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

показати да је низ a_n дивергентан

Показаћемо да низ није Кошијев

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n, p \in \mathbb{N})(n \geq 0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon)$$

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\cancel{1} + \cancel{\tfrac{1}{2}} + \dots \cancel{\tfrac{1}{n}} + \frac{1}{n+1} + \dots \frac{1}{n+p} - \cancel{1} - \cancel{\tfrac{1}{2}} \dots - \cancel{\tfrac{1}{n}}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots \frac{1}{n+p}\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \dots + \frac{1}{n+p} > \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} \dots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$$

За $p = n$ $\quad |a_{2n} - a_n| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{2}$

Није Кошијев па није ни конвергентан

$$|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$$
$$|x+y| \leq |x| + |y|$$
$$||x|-|y|| \leq |x+y|$$
$$||x|| = |x|$$

знамо

$$1+q+q^2+q^3 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q|<1$$

3. Помоћу Кошијевог критеријума показати да $\{a_n\}$ чији је општи члан дат са $a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots \frac{\sin n}{2^n}$ конвергентан.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)$$

доказујемо

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \cancel{\frac{\sin 1}{2}} + \cancel{\frac{\sin 2}{2^2}} + \ldots + \cancel{\frac{\sin n}{2^n}} + \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} - \cancel{\frac{\sin 1}{2}} - \ldots - \cancel{\frac{\sin n}{2^n}} \right| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right|$$

$$\left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} \ldots \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} \right| + \ldots + \left| \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} + \frac{1}{2^{n+p+1}} \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon} \quad / \ln$$

$$\ln 2^n > \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n \ln 2 > \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$$

$$n_0 := \left\lfloor \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right\rfloor + 1$$

4. Помоћу Кошијевог критеријума показати да је b_n дивергентан $b_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n}$

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} \dots + \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} - \right.$$

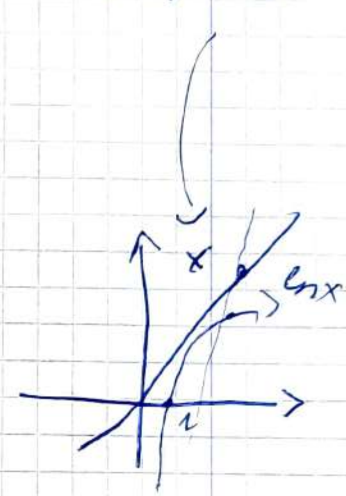
$$\left. - \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} - \dots - \frac{1}{\ln n} \right| = \left| \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} \right| =$$

$$\frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} > \frac{1}{\ln(n+p)} + \dots \frac{1}{\ln(n+p)} = \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p}$$

$n = p$

$$|a_{2n} - a_n| > \frac{1}{2}$$

Није Кошијев (дивергира).



$2 > \ln 2$

5. Показати да је низ Кошијев

$$a_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$$

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} + \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} - \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} - \dots - \frac{\cos n!}{n(n+1)} \right| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} +$$

$$+ \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} <$$

$$< \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n_0 := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} \quad / (n+1)(n+2)$$

$$1 = An + 2A + Bn + B$$

$$0 = (A+B) \qquad A = -B$$

$$1 = 2A + B$$

$$-1 = -A \qquad \boxed{A = 1 \quad B = -1}$$

6. Показати да је низ Кошијев

$$c_n = \frac{\cos 27}{1\cdot 2} + \frac{\cos 27^2}{2\cdot 3} + \dots + \frac{\cos 27^n}{n(n+1)}$$

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\cos 27}{1\cdot 2} + \frac{\cos 27^2}{2\cdot 3} + \dots + \frac{\cos 27^n}{n(n+1)} + \frac{\cos 27^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + \right.$$

$$+ \frac{\cos 27^{n+p}}{(n+p)(n+p+1)} -$$

Вежбе 5

Граничне вредности функција

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 тачка нагомилавања за D

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{x_0\}) (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

или краће:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \\ &\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \\ &\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ &\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \end{aligned}}$$

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 = 3$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin(ax)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin(ax)}{ax \frac{1}{a} b}} = \frac{b}{a}$$

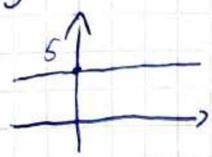
$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=$

$=\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\cdot\lim\limits_{x\to a}\underbrace{\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}}_{1}=\cos a\cdot 1=\cos a$

4. Проверити да ли постоји гранична вредност.

$\lim\limits_{x\to 3}5=5$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1}2x=2$



$\ln 0^+=-\infty$
$\ln\infty=\infty$
$e^{+\infty}=\infty$
$e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=0$
$e^0=1$
$\ln 1=0$
$\ln e=1$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2}=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{0^-}=-\infty$ не постоји гр. вредност јер нису исте вредности

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1+e^{\infty}}=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{1+e^{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=1$

не постоји

6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{|x-1|}$ $\qquad$ $|x-1|=\begin{cases}x-1, & x-1\geq 0,\ x\geq 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1}{1-x}=-1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1$ не постоји

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)^2}(x+2)}{\cancel{(x-1)^2}(x^2+2x+3)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Хорнерова шема

	1	0	-3	2	
1	1	1	-2	0	$\Leftarrow (x-1)$
1	1	2	0		$\Leftarrow (x-1)$
	a	b			

	1	0	0	-4	3	
1	1	1	1	-3	0	$\Leftarrow (x-1)$
1	1	2	3	0		$\Leftarrow (x-1)$
	a	b	c			x^2+2x+3

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}} = \left| S: x = t^{12} \quad t = \sqrt[12]{x} \quad x\to 1 \ t\to 1 \right.$

* имају исту вредност у тачку 1 па смо смели да уведемо смену

$= \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^4-1}{t^3-1} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\cancel{(t-1)}(t+1)(t^2+1)}{\cancel{(t-1)}(t^2+t+1)} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$

± 3 (јер ако то додамо биће 0-0)

9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - \sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6} + \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6} =$

$=$

I $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+5}+3}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5-9}{(x^2-5x+6)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)(\sqrt{x^2+5}+3)} = -\dfrac{4}{6}$

II: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6} \cdot \dfrac{9+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}}{-11-} =$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{27-(x^3+x^2+15)}{(x^2-5x+6)(9+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+\sqrt[3]{(\ )^2})} = -\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+x^2-12}{(x-2)(x-3)}$.

$\cdot \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{9+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+\sqrt[3]{(\ )^2}} = -\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+3x+6)}{\cancel{(x-2)}(x-3)} \cdot \dfrac{1}{27} =$

$= \dfrac{-16}{-1} \cdot \dfrac{1}{27} = \dfrac{16}{27}$

хорнер

	1	1	0	-12	
2	1	3	6	0	$(x-2)$

$\mathrm{I} + \mathrm{II} = -\dfrac{4}{6} + \dfrac{16}{27} = \boxed{\dfrac{-2}{27}}$

10. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x\to2}\left(1+\frac{2x^2-3}{x+3}-1\right)^{\frac{x}{x^2-4}} =$

$= \lim\limits_{x\to2}\left(1+\frac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2x^2-x-6}\cdot\frac{2x^2-x-6}{x+3}\cdot\frac{x}{x^2-4}} = e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(2x+3)\cdot x}{(x+3)\cancel{(x-2)}(x+2)}} =$

$= \boxed{e^{\frac{14}{20}}}$

11. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} = \lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e} =$

$2x^2-x-6=0$

$x_{1,2}=$

$x_1=2 \quad x_2=-\frac{3}{2}$

$2(x-2)(x+\frac{3}{2})$

$= \lim\limits_{x\to e}\frac{1}{x-e}\cdot\ln\left(\frac{x}{e}\right) = \lim\limits_{x\to e}\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}} =$

$* \ \ln a^c = c\cdot\ln a$

$= \ln\lim\limits_{x\to e}\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}} = \ln\lim\limits_{x\to e}\left(1+\frac{x}{e}-1\right)^{\frac{1}{x-e}} =$

$= \ln\lim\limits_{x\to e}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\cdot\frac{x-e}{e}\cdot\frac{1}{x-e}} = \ln e^{\lim\limits_{x\to e}\frac{1}{e}} = \boxed{\frac{1}{e}}$

12. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\,tg\left(\frac{\pi x}{2}\right) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to1}(1-x)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim\limits_{x\to1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot$

$\cdot\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2}(1-x) = \lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)(1-x)} =$

$= \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}\cdot\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{2}{\pi}}$

13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+tg\,x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \ldots = \frac{1}{4}$ за домашни

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2x} \overset{1^\infty}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x-1)^{\frac{1}{\sin x-1}\cdot\sin x-1\cdot tg^2 x}$ $\quad tg^2x = \frac{\sin^2x}{\cos^2x}$ $=$

$= e^{\sin x-1\cdot\frac{\sin^2x}{\cos^2x}} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cdot\lim\frac{\sin x-1}{1-\sin^2x}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$

$= \boxed{e^{-\frac{1}{2}}}$

Вежбе 6

Непрекидност функције

$f: D \xrightarrow{\subseteq \mathbb{R}} \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in D$ произ. тачака

$$\boxed{(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in D)(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

- Привидни прекид $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$

- Прекид I врсте $\underbrace{\lim_{x\to x_0^-} f(x)}_{A\in\mathbb{R}} \neq \underbrace{\lim_{x\to x_0^+} f(x)}_{B\in\mathbb{R}}$

- Прекид II врсте $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \infty \\ \text{не постоји} \end{cases} \vee \lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{cases} \infty \\ \text{не постоји} \end{cases}$

1. $f(x) = \begin{cases} (e+x)^{\sin x}, & x \geq 0 \\ \sin x + A, & x < 0 \end{cases}$

Одреди A тако да функција буде непрекидна у свакој тачки.

За све негативне бројеве $f(x) = \sin x + A$ а $\sin(x)$ непрекидна и A је непрекидна, а то је збир 2 непрекидне па је $f(x)$ непрекидна за $x<0$.

За све позитивне бројеве $e+x$ је непрекидна, $\sin x$ је непрекидна, а ово је композиција непрекидних ф-ја па је $f(x)$ непрекидна за $x>0$.

Проверимо непрекидност у $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-}(\sin x + A) = A$$

$$\boxed{A=1}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(e+x)^{\sin x} = (e+0)^0 = 1$$

$$f(0) = (e+0)^{\sin 0} = 1$$

2. Одреди A тако да $f(x)$ буде непрекидна у 0.

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ A, & x=0 \\ \frac{-1}{1+\ln x}, & x>0 \quad x\neq \frac{1}{e} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \; (x+2)e^{\frac{1}{x}} = 2\cdot e^{-\infty} = 2\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{1+\ln x} = \frac{-1}{1+(-\infty)} = 0 \qquad \boxed{A=0}$$

$$f(0) = A$$

3. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ A, & x=0 \end{cases}$$

За све бројеве $\neq 0$ ф-ја је непрекидна

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}(1+\tfrac{1}{x}) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$f(0) = A$

Није могуће одредити A јер функција има прекид I врсте у тачки $x=0$.

4. Одредити A и B тако да $f(x)$ буде непрекидна у $x=0$.

$$f(x) = \begin{cases} (\sin^2(2x)+1)^{\frac{\cos^3 x}{x^2}}, & x<0 \\ A & x=0 \\ e^{-\frac{1}{x}} + B^2 & x>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} (1+\sin^2(2x))^{\frac{\cos^3 x}{x^2}} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to 0^-} \left(1+\sin^2(2x)\right)^{\frac{1}{\sin^2(2x)}\cdot \sin^2(2x)\cdot\frac{\cos^3 x}{x^2}} =$$

$$= e^{\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \cos^3 x}_{1} \cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(2x)}{4x^2}\cdot 4} = \boxed{e^4}$$

$\downarrow$ 1

$$\lim_{x\to 0^+} (e^{-\frac{1}{x}} + B^2) = e^{-\infty} + B^2 = B^2$$

$f(0) = A$ $\quad \boxed{A = e^4}$ $\quad B^2 = e^4$

$\boxed{B = \pm e^2}$

5. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 3 \\ (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}, & x > 3 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \to 3^-} (2x+1) = 7 \qquad f(3) = 7 \qquad \lim_{x \to 3^+} (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} \overset{"1^\infty"}{=} \left(\left(1 + x - 3\right)^{\frac{1}{x-3}}\right)^{x-3 \cdot \frac{1}{(x-3)^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3}} = e^{\infty} = +\infty$$

6. Одредите A и B тако да буде непрекидна на области $(0, \pi)$

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{tg^2 x} & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ A & , x = \frac{\pi}{2} \\ A \cdot e + \frac{B}{x} & , x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\frac{\cos^2}{x^2}$

$=$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{tg^2 x} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(A \cdot e + \frac{B}{x}\right) = Ae + \frac{B}{\frac{\pi}{2}} = Ae + \frac{2B}{\pi}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = A$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{e}} \qquad \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot e + \frac{2B}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

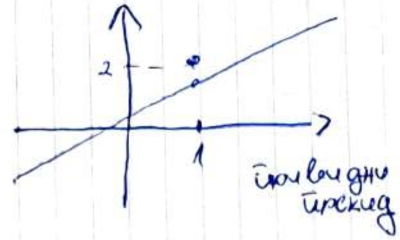
$$e + \frac{2B\sqrt{e}}{\pi} = 1$$

$$2B\sqrt{e} = (1-e)\pi$$

$$2B = \frac{(1-e)\pi}{\sqrt{e}}$$

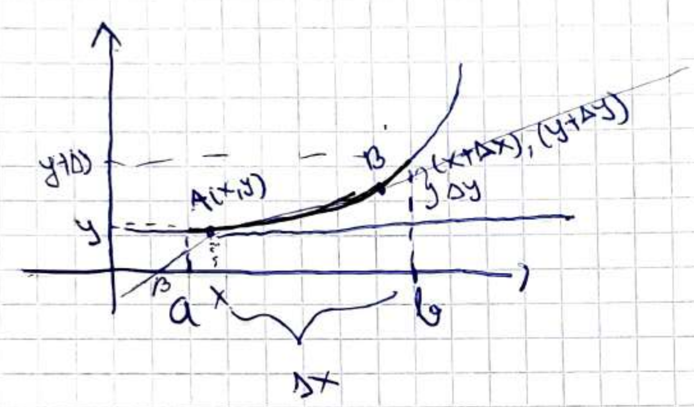
$$\boxed{B = \frac{(1-e)\pi}{2\sqrt{e}}}$$

$$\begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$



Диференцијални рачун

$y = f(x)$ непрекидна над (a, b)



β - угао између сечице AB и позитивног дела x-осе

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad , x, x+\Delta x \in (a, b)$$

Ако постоји гр. вр. онда се она означава са $f'(x)$ или y' и зове се извод ф-је $f(x)$ у тачки x.

$$tg\, \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$tg\, \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Пр. 1.

$y = x^2$ по деф. $y' = ?$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + 2x\times\Delta + \Delta x^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x$$

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$$

Пр. 2.

$y = \ln x$ $y' = ?$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} =$$

$$\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \to 0} \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \ln e^{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}} = \boxed{\ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}}$$

$y'' = (y')'$ y''', y^{IV} или $y^{(4)}$ $y^{(n)}$

Особине извода

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $c = const$

3) $(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $v(x) \neq 0$

$c' = 0$

1. a) $y=\frac{1}{x}$ $\quad y'=(x^{-1})'=(-1)x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

b) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad y'=(x^{-\frac{1}{3}})'=(-\frac{1}{3})x^{-\frac{4}{3}}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

c) $y=e^x\cdot\sin x$ $\quad y'=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x$

d) $y=\frac{\ln x}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$

Извод сложене функције:

$$\boxed{\begin{aligned}(\ln *)'&=\frac{1}{*}*'\\ (*^5)'&=5*^4\cdot *'\end{aligned}}$$

2. $y=(x^2-3x+3)^5=$

$y'=5\cdot(x^2-3x+3)^4\cdot(2x-3)$

3. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$

$y'=2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\ln 2\cdot\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\ln 2\,\frac{1\cdot\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$

4. $y=\left(\frac{x}{a}\right)^b+\left(\frac{b}{x}\right)^a+\left(\frac{a}{b}\right)^x$

$y'=\frac{1}{a^b}\cdot b x^{b-1}+b^a\cdot(-a)x^{-a-1}+\left(\frac{a}{b}\right)^x\cdot\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

5. $y=a^{a^x}+a^{x^a}+x^{a^a}+a^{a^a}$

$y'=a^{a^x}\cdot\ln a\cdot a^x\ln a+a^{a^x}\cdot\ln a\cdot ax^{a-1}+(a^a)\cdot x^{(a^a-1)}$

$a^{a^x}=a^{a^x}\cdot\ln a\cdot a^x\ln a$

$a^{x^a}=a^{x^a}\cdot\ln a\cdot ax^{a-1}$

$x^{a^a}=(a^a)\cdot x^{(a^a-1)}$

6. $y = e^{\cos(\cos x)} = y' = e^{\cos(\cos x)} \cdot -(\sin(\cos x)) \cdot (-\sin x)$

7. $y = \sqrt{\sin(3x)} + \sin x^2 =$

$= \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}} \cdot \cos(3x) \cdot 3 + \cos x^2 \cdot 2x$ $\boxed{y = \sqrt{x} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

8. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

$y'' = ?$

$* \; y' = 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x + 4\cos^3 x \cdot (-\sin x) = 4\sin x \cdot \cos x \underbrace{(\sin^2 x - \cos^2 x)}_{1 - 2\cos^2 x}$

$y'' = 4 \cdot \left[(\cos x \cos x + \sin x^2 x)(1 - 2\cos^2 x) + \sin x \cos x (4\cos x \sin x) \right]$

$= 4 \cdot \left[\cos^2 x - 2\cos^4 x - \sin^2 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + 4\sin^2 x \cos^2 x \right] =$

$= 4 \cdot (\cos^2 x - 2\cos^4 x - \sin^2 x + 6\sin^2 x \cos^2 x)$

9. Показати да функција задовољава једначину:

$y = e^{2x} \cdot \sin 5x$

$y' = e^{2x} \cdot 2 \cdot \sin(5x) + e^{2x} \cdot \cos(5x) 5 =$

$\cancel{= e^{2x} (2 \cdot \sin(5x))}$

$y'' = 2(2e^{2x} \sin 5x + e^{2x} \cdot 5\cos 5x) + 5(2e^{2x} \cdot \cos 5x + e^{2x} \cdot (-\sin 5x) 5)$

$= 4e^{2x} \sin 5x + 10e^{2x} \cos 5x + 10e^{2x} \cos 5x - 25e^{2x} \cdot \sin 5x$

$y'' = -21e^{2x} \sin 5x + 20e^{2x} \cdot \cos 5x$

$-21e^{2x} \cdot \sin 5x + 20e^{2x} \cdot \cos 5x - 8e^{2x} \sin 5x - 20e^{2x} \cos 5x +$
$29e^{2x} \cdot \sin 5x = 0$

Логаритамски изрази

$y = f(x)^{g(x)} \,/\ln \qquad f(x)>0$

$\ln y = g(x)\ln f(x) \,/'$

$\frac{1}{y}\cdot y' = g'(x)\cdot \ln f(x) + g(x)\cdot \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

$y' = f(x)^{g(x)}\cdot [-||-]$

1.

$y = x^x \,/\ln' \quad x>0$

$\ln y = x\cdot \ln x \,/'$

$\frac{1}{y}\cdot y' = 1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x} \,/\cdot y$

$y' = y(\ln x + 1)$

$y' = x^x\cdot(\ln x + 1)$

$y'' = (x^x)'\cdot(\ln x+1) + x^x \frac{1}{x} = x^x(\ln x+1)(\ln x+1) + \frac{x^x}{x}$

2. $y = \underbrace{\left(\frac{x}{1+x}\right)^x}_{y_1} + \ln x$

$y' = y_1' + \frac{1}{x} = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x\cdot\left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{x}$

$y_1 = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \,/\ln$

$\ln y_1 = x\cdot \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$

$\frac{1}{y_1}\cdot y_1' = 1\cdot \ln\frac{x}{1+x} + x\cdot \frac{1+x}{x}\cdot\frac{1(1+x)-x\cdot 1}{(1+x)^2} \,/\cdot y_1$

$$y_1' = y_1\left(\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \left(\frac{1}{1+x}\right)\right)$$

$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

3. $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x$

$$\ln y = \ln x^{\frac{2}{3}} + \ln\frac{1-x}{1+x^2} + \ln(\sin x)^3 + \ln(\cos x)^2$$

$$\ln y = \frac{2}{3}\ln x + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3\ln(\sin x) + 2\ln(\cos x)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}(-1) - \frac{1}{1+x^2}\cdot 2x + 3\cdot\frac{1}{\sin x}\cos x +$$

$$+ 2\frac{1}{\cos x}(-\sin x)$$

Извод инверзне функције

Нека је $f(x)$ непрекидна строго монотона функција над (a,b), а $f^{-1}(x)$ њена инверзна функција. Ако $f(x)$ има $f'(x)$ у тачки x која припада (a,b) и $f'(x) \neq 0$ тада $f^{-1}(x)$ има извод у тачки $y = f(x)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{тј.} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x'_y}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{x'_y}\right)\frac{dy}{dx} =$$

$$= -\frac{x''_y}{(x'_y)^2}\cdot\frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_y}{(x'_y)^3}$$

1. $y'' = ?$ $\qquad y = tg(x+y)$

$$arctg\, y = x + y$$

$$x = arctg\, y - y$$

$$x'_y = \frac{1}{1+y^2} - 1 = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-y^2}{1+y^2} = \frac{-y^2}{1+y^2}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{-y^2}{1+y^2}} = -\frac{1}{y^2} - 1$$

$$y''_x = (y'_x)'_y \cdot y'_x$$

$$y''_x = \frac{-x''_y}{(x'_y)^3} = -\frac{\frac{2y}{(1+y^3)^2}}{\frac{-y^6}{(1+y^2)^3}} = \boxed{-\frac{2(1+y^2)}{y^5}}$$

$$x''_y = \frac{-2y(1+y^2)+y^2 \cdot 2y}{(1+y^2)^2} = \frac{-2y-2y^3+2y^3}{(1+y^2)^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$$

Извод параметарски задате функције

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in I \quad , \quad t \in \varphi^{-1}(x)$$

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}} \quad \boxed{y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}} \quad \boxed{y'''_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t}}$$

1. $y''_x = ?$ $\quad x = \ln t \quad y = t + \frac{1}{t}$

$x'_t = \frac{1}{t}$

$y'_t = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}$

$y'_x = \frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2-1}{t} = t - \frac{1}{t}$

$y''_x = \frac{(t-\frac{1}{t})'_t}{\frac{1}{t}} = \frac{1+\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{\frac{t^2+1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2+1}{t} = \boxed{t + \frac{1}{t}}$

Извод имплицитно задате функције

$F(x,y) = 0$

2. $y''_x = ?$ $\quad \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} \;/'$

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - y \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2x + 2yy')$$

$$\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{\cancel{2}(x^2+y^2)} \cdot \cancel{2}(x + yy')$$

$$\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$$

$$y'x-y=x+yy'$$

$$y'(x-y)=x+y$$

$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

$$y''=\frac{(1+y')\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(1-y')}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{x-y+y'x-\cancel{yy'}-\cancel{x}-y+xy'+\cancel{yy'}}{(x-y)^2}=$$

$$=\frac{2xy'-2y}{(x-y)^2}=\boxed{\frac{2x\frac{x+y}{x-y}-2y}{(x-y)^2}}$$

Лопиталово правило

("$\frac{0}{0}$" или "$\frac{\infty}{\infty}$")

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\text{"}\frac{0}{0}\text{" или "}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

под условом да постоји граница вредност десне стране

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-e^{-tgx}-2x}{2x^{3}}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}$$

x^3 → 3 пута радимо Л.П. лопиталово правило

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2x}+e^{-tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2x}-2}{6x^2}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{tgx}+e^{-tgx}-2\cos^2 x}{6x^2\cdot\cos^2 x} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{6\cos^2 x}}_{\frac{1}{6}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}+e^{-tgx}-2\cos^2 x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{л.п.}{=}}$$

мора да се пише

$$= \frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}\frac{1}{\cos^2 x}-e^{-tgx}\frac{1}{\cos^2 x}+4\cos x\sin x}{2x} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-e^{-tgx}+4\cos^3 x\sin x}{2x\cos^2 x} = \frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-e^{-tgx}+4\cos^3 x\sin x}{x} =$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{e^{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+e^{-tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-12\cos^2 x\sin^2 x+4\cos^4 x}{1} =$$

$$= \frac{6}{12} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{ax}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{л.п.}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^{ax}\cdot a} = \frac{n}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^{ax}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{л.п.}{=}}$$

$a>0$ $n>0$

$$= \frac{n}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{e^{ax}\cdot a} = \frac{n(n-1)}{a^2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-2}}{e^{ax}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

(применимо л.п. још $n-2$ пута) $$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{a^n}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^0}{e^{ax}} =$$

$$= \frac{n!}{a^n}\cdot 0 = \boxed{0}$$

(јер је $e^{\infty}=0$)

(6.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(-100)\cdot x^{-101}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot \frac{-2}{x^3}} =$

$= 50 \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-98}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{Л.П}}{=}} 50\cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-98\, x^{-99}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot \frac{-2}{x^3}} =$

$= 50\cdot 49\cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-96}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{Л.П}}{=}} \dots = \cancel{\lim\limits_{x\to 0}}\ 50! \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-2}}{e^{\frac{1}{x^2}}} =$

$= 50!\cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{-2}x^{-3}}{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot \frac{\cancel{-2}}{\cancel{x^3}}} = \boxed{0}$

(7.) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} (1+\cos x) =$ не постоји

$\lim\limits_{x\to\infty} \sin x =$ не постоји

Не можемо применити Лопиталово правило на овај задатак

$\lim \dfrac{\sin x}{x} = 0$

јер $|\sin x| \le 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\boxed{0\cdot\infty}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) \overset{\text{"}0\cdot\infty\text{"}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\underset{\text{Л.П.}}{=}} \end{cases}$

$$⑧\ \lim_{x\to 1^+} \ln(x-1)\cdot \ln x \overset{\text{"}-\infty\cdot 0\text{"}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln^2 x\cdot x}{x-1} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 1^+} \frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x+\ln^2 x\cdot 1}{1} = 0$$

$$\boxed{\text{"}\infty-\infty\text{"}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)}$$

$$⑨\ \lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} x\Big(1-\underbrace{x\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)}_{1}\Big) \overset{\text{"}\infty\cdot 0\text{"}}{=}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{\text{"}\infty\cdot 0\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 1$$

проверка

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{-\left(1\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{-1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{(x+1)^2}}{+\frac{2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(x+1)x}-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1-x}{x(x+1)^2}}{\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x+1)^2} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\text{„}1^{\infty}\text{"} \quad \text{„}0^{0}\text{"} \quad \text{„}\infty^{0}\text{"}}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A \,/\, \ln$$

$f(x)>0$ (у некој околини a)

$$\ln A = \ln \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x)$$

10. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{\text{„}1^{\infty}\text{"}}{=} A \,/\, \ln$$

$$\ln A = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1}{x} =$$

нађемо заједничку

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{\text{Л.П.}}{\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{\text{Л.П.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}-\cancel{1}-x}{2x(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

$$\ln A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \boxed{e^{-\frac{1}{2}}}$$

11. $\lim_{x\to0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} \overset{"0^0"}{=} A \,/\ln$

$$\ln A = \lim_{x\to0^+} \frac{3}{4+\ln x}\cdot \ln x = \lim_{x\to0^+} \frac{3\ln x}{4+\ln x} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{\underset{\text{л.п.}}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} =$$

$= 3$

$\ln A = 3 \Rightarrow A = \boxed{e^3}$

12. $\lim_{x\to0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} \overset{"\infty^0"}{=} A \,/\ln$

$$\ln A = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\ln x}\cdot \ln(\operatorname{ctg} x) =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\ln x} \overset{"\frac{\infty}{\infty}"}{\underset{\text{л.п.}}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot -\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-x}{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot \sin^2 x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\cos x}\cdot \lim_{x\to0^+} \frac{-x}{\sin x} =$$

$$= -\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = -1$$

$\ln A = -1 \Rightarrow \boxed{A = e^{-1}}$

Испитивање функција

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

① Домен

$D: \; x^2-1 \neq 0$

$x^2 \neq 1$

$x \neq \pm 1$

$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

или $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

② Парност

$f(-x) = \dfrac{-x}{x^2-1} = -f(x)$

Непарна

③ Нуле

$y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $(0,0)$ пресек са x-осом

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ — " — y-осом

④ Знак ф-је

x	$-\infty$ до -1	-1 до 0	0 до 1	1 до $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$f(x) > 0$ за $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

$f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

⑤ Асимптоте

В.А.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{0^- \cdot 2} = -\infty$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^+ \cdot 2} = +\infty$$ $\boxed{x=1 \text{ ВА.}}$

Како је $f(x)$ непарна ф-ја $x=-1$ В.А.

Х. А.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

$y=0$ Х. А. када $x \to \pm\infty$

Нема К.А. јер има Х.А. $x\to\pm\infty$

(6.) Монотонат и екстремне вр.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-1) - x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2>0}$$ $\boxed{x \neq \pm 1}$

$f'(x) = 0 \iff -x^2-1=0$

$\cancel{x^2=-1}$

$f'(x) < 0 \ \forall x \in D$ $\quad -x^2-1<0 \ \forall x \in D$

коментари на колоквијуму

функција нема екстреме и монотоно је опадајућа

7) Облик криве и превојне тачке

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$, $\boxed{x \neq \pm 1}$

$f''(x)=0 \iff x=0 \lor x^2+3=0$

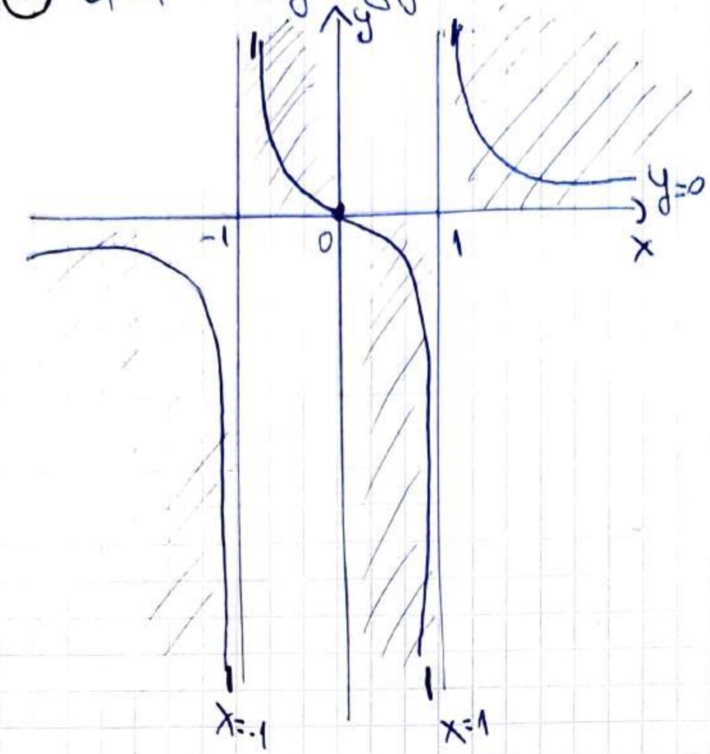
$x^2+3>0 \ \forall x \in D$

$f''(x)>0$ за $x\in(-1,0)\cup(1,\infty)$ ☺

$f''(x)<0$ за $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ ☹

$P(0,0)$ превојна тачка

8) График функције



2.

$$f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$$

домен

1) $D: x \neq 0$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) Парност

$$f(-x) = (-x+2)e^{-\frac{1}{x}} \neq f(x)$$

$$\neq -f(x)$$

„ни-ни"

3) Нуле

$y=0 \iff x+2=0 \lor e^{\frac{1}{x}} > 0 \; \forall x \in D$

$x=-2$

$(-2,0)$ пресек са x-осом

$x=0 \notin D$ не сече y-осу због домена

4) Знак

$f(x)>0 \Leftrightarrow x+2>0$, $x>-2$, $x\in(-2,0)\cup(0,\infty)$

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)$

5) В. А.

$\lim_{x\to 0^-} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = 2\cdot e^{-\infty} = 2\cdot 0 = 0$

морамо да добијемо $\pm\infty$

$\lim_{x\to 0^+} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = 2\cdot e^{+\infty} = +\infty$

$\boxed{x=0 \text{ В.А. } x\to 0^+ \text{ имамо само десну асимптоту}}$

Х.А.

$\lim_{x\to\pm\infty} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = \pm\infty$ нема Х.А. морамо да добијемо број

К.А.

$y=mx+n$

$m=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x}e^{\frac{1}{x}} = 1\cdot 1 = 1 \neq 0$

$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left((x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to\pm\infty} 2e^{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) \overset{\infty\cdot 0}{=} 2+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = 2+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = 2+1=3$

$\boxed{y=x+3 \quad \text{К.А.}, \; x\to\pm\infty}$

6) Монотоност

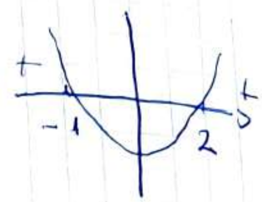
$f'(x) = 1\cdot e^{\frac{1}{x}} + (x+2)e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{x+2}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x^2-x-2}{x^2}$

$x\neq 0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \quad x_1=-1 \quad x_2=2$

$f'(x) > 0 \iff x^2 - x - 2 > 0$

$\iff x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty) \nearrow$



$f'(x) < 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (0, 2) \searrow$

3.

$T_{max}\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ $\approx 0{,}37$ $\quad T_{min}\left(2, 4\sqrt{e}\right)$ $\approx 6{,}6$

(7) Конвексност

$f''(x) = \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{>0} \cdot \frac{5x + 2}{\underbrace{x^4}_{>0}} \qquad x \neq 0$

$f''(x) = 0 \iff 5x + 2 = 0$

$x = -\frac{2}{5}$

$f''(x) > 0 \iff 5x + 2 > 0$

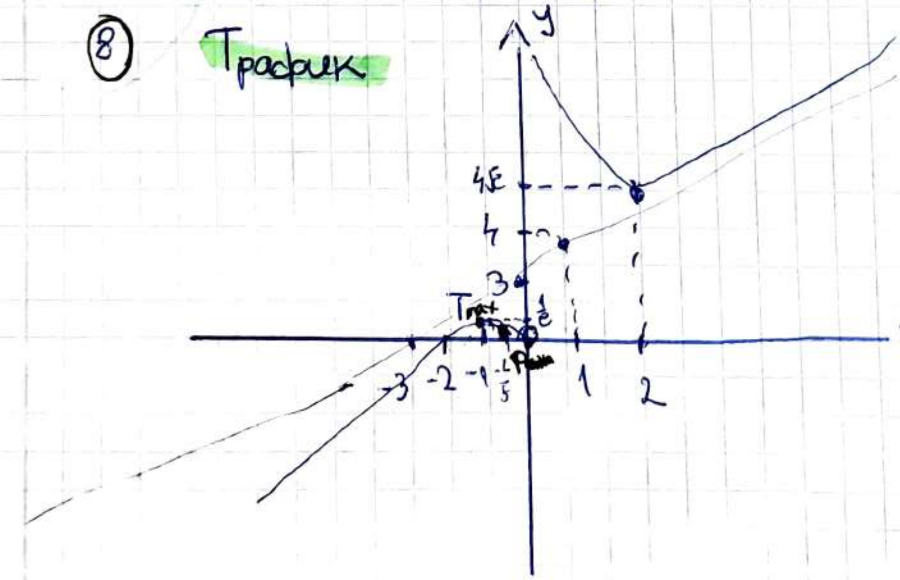
$x > -\frac{2}{5}$

$x \in \left(-\frac{2}{5}, 0\right) \cup (0, \infty)$ ☺

$f''(x) < 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right)$ ☹

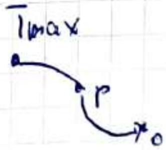
$P\left(-\frac{2}{5}, f\left(-\frac{2}{5}\right)\right)$

(8) Графиk



$y = x + 3$

x	0	1
y	3	4



3. $f(x) = \ln \frac{x+3}{1-x}$

① Домен

$D: \frac{x+3}{1-x} \wedge 1-x \neq 0$

$x \neq 1$

	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	
$1-x$	$+$	$+$	$-$	
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	

$x \in \; x \in (-3,1)$

② Парност

Домен није симетричан у односу на нулу па је „ни-ни"

③ Нуле

$y=0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{1-x} = 1$

$x+3 = 1-x$

$2x = -2$

$x = -1$

$(-1,0)$ пресек са x осом

$x=0 \Leftrightarrow y = \ln 3$

$(0, \ln 3)$ са y-осом

$\ln 3 \approx 1{,}1$

④ Знак

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{1-x} > 1$

$\frac{x+3-1+x}{1-x} > 0$

$\frac{2(x+1)}{1-x} > 0$

	-3	-1	1
$x+1$	$-$	$+$	
$1-x$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-$	$+$	

$f(x) > 0$ за $x \in (-1,1)$

$f(x) < 0$ за $x \in (-3,-1)$

5.) В.А

$$\lim_{x \to -3^+} \ln \frac{x+3}{1-x} = \ln \frac{0^+}{4} = -\infty$$

$\boxed{x=-3 \text{ В.А. } x \to -3^+}$

$$\lim_{x \to 1^-} \ln \frac{x+3}{1-x} = \ln \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$\boxed{x=1 \text{ В.А. } x \to 1^-}$

Х.А.

Нема ни Х.А ни К.А јер је домен ограничен!!!

6. Монотоност

$$f'(x) = \frac{4}{\underbrace{(x+3)(1-x)}_{>0 \ \forall x \in D}} \qquad x \neq -3, \ x \neq 1$$

$f'(x) \neq 0$
$x \in D$

Нема екстрема

$f'(x) > 0 \ \forall x \in D$

растућа је на целом домену ↗

7. Конвексност

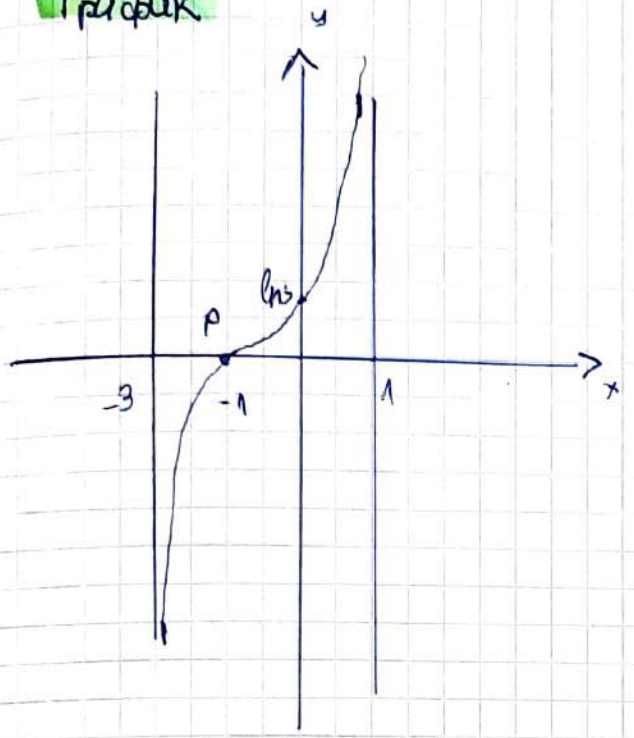
$$f''(x) = \frac{8(x+1)}{(x+3)^2(1-x^2)}, \quad x \in D \qquad P(-1,0)$$

$f''(x) = 0 \iff x = -1$

$f''(x) > 0$ за $x \in (-1,1)$ ◡

$f''(x) < 0$ за $x \in (-3,-1)$ ◠

8 **График**



Једначина тангенте и нормале

Ако $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ има први извод у $x_0\in(a,b)$

$$\boxed{y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$$

тангента графика ф-је у тачки ($y_0=f(x_0)$) $A(x_0, \underbrace{f(x_0)}_{y_0})$

$tg\,\alpha=f'(x_0)$, α угао између тангенте графика у x_0 и поз. смера x-осе.

Ако је $f'(x_0)\neq 0$ тада

$$\boxed{y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)}$$

Нормала графика ф-је f у тачки $A(x_0,y_0)$

(1.) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x} - \ln x$ у тачки чија је апсциса $x=1$

$x_0 = 1 \quad y_0 = f(1) = 2 \quad A(1,2)$

$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

$f'(1) = 3 - 1 - 1 = 1$

$\boxed{t: y-2 = 1(x-1) \quad y = x+1}$

$\boxed{n: y-2 = -\frac{1}{1}(x-1) \quad y = -x+3}$

(2.) $x = 2\operatorname{tg} t$

$y = 2\sin^2 t + \sin(2t)$ у тачки $A(\overset{x_0}{2}, \overset{y_0}{2})$

$2 = 2\operatorname{tg} t \Rightarrow \operatorname{tg} t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\sin t\cos t + 2\cos(2t)}{\frac{2}{\cos^2 t}}$$

$$y'_x\left(t = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cancel{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + 2 \cdot 0}{\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{2}{2}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{t: y-2 = \frac{1}{2}(x-2)}$

$\boxed{n: y-2 = -\frac{1}{\frac{1}{2}}(x-2)}$

Диференцијабилност функције

Функција $f(x)$ је диференцијабилна над $D \subseteq \mathbb{R}$ акко постоји извод ф-је f за свако x које $\in D$

Ако је функција диференцијабилна у тачки онда је она непрекидна у тој тачки. Обрнуто не важи увек.

* кајокојун

1. Одредити A и B тако да $f(x)$ буде диференцијабилна за свако x

$$f(x) = \begin{cases} Ax+B & , x \leq 0 \\ (x+1)^{\frac{1}{x}} & , x > 0 \end{cases}$$

Да би била диференцијабилна за свако x, мора да буде и непрекидна.

Ова функција је непрекидна као композиција непрекидних ф-ја за $\forall x \neq 0$

- Проверавамо непрекидност у нули:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} (Ax+B) = B = f(0)$$

$\boxed{B=e}$

$$\lim_{x \to 0^+} (x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$f'(x) = \begin{cases} A & , x<0 \\ (x+1)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)}\right) & ; x>0 \end{cases}$$

$* \; (x+1)^{\frac{1}{x}} / \ln$

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(x+1) \,/\,'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = -\frac{1}{x^2}\ln(x+1) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$y' = (x+1)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} A = A \qquad \boxed{A = -\frac{e}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x+1)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)}\right) = e\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-(x+1)\ln(x+1)+x}{x^2(x+1)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L.\ddot{u}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln(x+1)-(x+1)\cancel{\frac{1}{x+1}}+1}{2x(x+1)+x^2 1} =$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L.\ddot{u}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x+1}}{2(x+1)+2x+2x} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

(2) $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}+x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ A, & x=0 \end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}+x^3\cdot\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ B, & x=0 \end{cases}$

a) $f'(0)=g'(0)=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\right)=0$$

$f(0)=A \qquad A=0$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2}+x^3\cdot\cos\frac{1}{x}\right)=0$$

$g(0)=B \qquad B=0$

За $x\neq 0$ $f'(x)=\frac{1}{2}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}+3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} g'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}}$$

$\lim_{x\to 0} f'(x)=$ не постоји јер не постоји $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{2}+(\Delta x)^2\cos\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\Delta x\cos\frac{1}{\Delta x}\right)=\frac{1}{2}$$

b) Како је $\lim_{x\to 0} g'(x)=g'(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow g'(x)$ је непрекидна у $x=0$ а за $x\neq 0$ $g'(x)$ је очигледно непрекидна.

$\boxed{\lim_{x\to 0} f'(x) \text{ не постоји, } f'(x) \text{ има прекид у } x=0}$

c) Да ли постоје околине тачке $x=0$ у којима f и g монотоне ф-је.

$\left(a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad и \quad b_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}\right)$

$$f'(a_n) = \frac{1}{2} + 2a_n \cos\frac{1}{a_n} + \sin\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) +$$

$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \frac{3}{2} > 0$$

$$f'(b_n) = \frac{1}{2} + 2b_n\cos\frac{1}{b_n} + \sin\frac{1}{b_n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) +$$

$$+ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -\frac{1}{2} < 0$$

У свакој околини тачке $x=0$ постоје тачке у којима је $f'(x) > 0$ и тачке у којима је $f'(x) < 0$ па не постоји ниједна околина $x=0$ у којој је f монотона.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0}$$

3. $$f(x) = \begin{cases} Ax + B & x \le 0 \\ \frac{x}{3} + x^2 \sin\frac{1}{7x}, & x > 0 \end{cases}$$

Одредити A и B да f буде диференцијабилна за свако x. Да ли је функција растућа у $x=0$?

Да ли је функција монотона у околини $x=0$?

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} (Ax + B) = B = f(0) \\ &\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{3} + x^2 \sin\frac{1}{7x}\right) = 0 \end{aligned}\right\} B = 0$$

$$f'(x)=\begin{cases} A & x<0 \\ \frac{1}{3}+2x\cdot\sin\frac{1}{7x}-\frac{1}{7}\cos\frac{1}{7x}, & x>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} A = A$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{3}+2x\cdot\sin\frac{1}{7x}-\frac{1}{7}\cos\frac{1}{7x}\right) \text{ - не постоји}$$

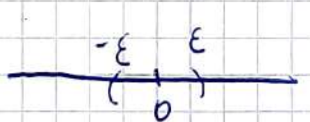
$$f'(0^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0^++\Delta x)-f(0^+)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\frac{\Delta x}{3}+(\Delta x)^2\cdot\sin\frac{1}{7\Delta x}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{3}}$$

$f'(0)=\frac{1}{3}>0 \Rightarrow f$ је растућа у $x=0$

За $x\in(-\varepsilon,0]$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}>0$



За $x\in(0,\varepsilon)$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}+2x\sin\frac{1}{7x}$

$-\frac{1}{7}\cos\frac{1}{7x}\geq$

$\frac{1}{3}+2\varepsilon-\frac{1}{7}=\frac{4}{21}-2\varepsilon>0$

$\varepsilon<\frac{2}{21}$

Тејлоров и Маклоренов полином

Теорема:

Нека су функција $f(x)$ и сви њени изводи до $n-1$ реда непрекидни над $[a,b]$ и нека $f(x)$ има n-ти извод над отвореним интервалом (a,b) тада за $x, a \in [a,b]$ важи Тејлорова формула

$$f(x) = \underbrace{T_{n-1}(x)}_{\text{Тејлоров полином}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{остатак, грешка}}$$

где је

$$\boxed{T_{n-1}(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a)}$$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)), \quad 0<\theta<1, \quad x \in [a,b]}$$

Ако је $a=0$ добићемо Маклоренову ф-лу.

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)}_{\text{Маклоренов полином}} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x), \quad 0<\theta<1$$

Маклоренов полином:

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\sin x = 0 + \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+x) = \frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

1. Апроксимирати $\ln(1.1)$ користећи Тејлоров полином III степена: $(n=4)$

Бирамо ф-ју $f(x) = \ln x$, бирамо тачку $a=1$

$$\boxed{\begin{array}{lll} f'(x) = \frac{1}{x} & f''(x) = -\frac{1}{x^2} & f'''(x) = \frac{2}{x^3} \\ f'(1) = 1 & f''(1) = -1 & f'''(1) = 2 \end{array}} \qquad f(1) = 0$$

$$T_3(x) = 0 + \frac{x-1}{1!} \cdot 1 + \frac{(x-1)^2}{2!}(-1) + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot 2$$

$$T_3(1.1) = 0.1 - 0{,}005 + 0.00033 \approx \boxed{0{,}0953}$$

2. Развити ф-ју $f(x) = \mathrm{arctg}(x) + x^3 - 2x^2 + 1$ у Тејлоров полином III степена у тачки $a=1$

$$f(x) = \underbrace{\mathrm{arctg}\, x}_{Z(x)} + \underbrace{x^3 - 2x^2 + 1}_{g(x)}$$

$a = 1$

$g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

$g(1) = 0$

$g'(x) = 3x^2 - 4x \qquad g'(1) = -1$

$g''(x) = 6x - 4 \qquad g''(1) = 2$

$g'''(x) = 6 \qquad g'''(1) = 6$

за $g(x)$:

$$T_3(x) = 0 + \frac{(x-1)}{1!}(-1) + \frac{(x-2)^2}{2!} \cdot 2 + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot 6$$

$$= -x + 1 + x^2 - 2x + 1 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 =$$

$$= \boxed{x^3 - 2x^2 + 1}$$

$Z(x) = \operatorname{arctg} x$

$Z(1) = \frac{\pi}{4}$

$Z'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad Z'(1) = \frac{1}{2}$

$Z''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad Z''(1) = -\frac{1}{2}$

$Z'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \qquad Z'''(1) = \frac{1}{2}$

за $Z(x)$:

$$T_3(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \frac{1}{2}$$

Коначно решење:

$$\boxed{T_3(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \frac{1}{2} + x^3 - 2x^2 + 1}$$

* за колоквијум (3. задатак)

3. Колико чланова Маклореновог полинома од $f(x)$ треба узети да би се $\sqrt[3]{e^2}$ израчунао са грешком мањом од $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$ и

$f(x) = e^x$

$$M_{n-1}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Напамет научити грешке за функције!

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, \quad 0<\theta<1$$

$f^{(n)}(x) = e^x$

$f^{(n)}(\theta x) = e^{\theta x}$

$\sqrt[3]{e^2} = e^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \qquad f\left(\frac{2}{3}\right) = e^{\frac{2}{3}}$

$$\left|R_n\left(\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n!} e^{\frac{2}{3}\theta}\right| < \frac{2^{n+1}}{3^n \cdot n!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{200}$$

$$e^{\frac{2}{3}\theta} < e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2} < \sqrt[3]{8} = 2$$

$* \; e = 2,7$

$n=1: \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3} > \frac{1}{200} \perp$

$n=2: \frac{4}{9} > \frac{1}{200} \perp$

$n=3: \frac{16}{162} > \frac{1}{200} \perp$

$n=4: \frac{4}{243} > \frac{1}{200} \perp$

$n=5: \frac{8}{3645} < \frac{1}{200} \top$

потребно је узети 4 члана, а грешка ће бити 5.

(4) На ком интервалу једначина даје резултат са грешком мањом од 10^{-5}.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}$$

Маклоренов полином III степена

ако смо стали код непарног сл. непарну је грешка!

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \cos(\theta x) \quad , \quad 0<\theta<1$$

$$|R_n(x)| < 10^{-5}$$

$2n-1=3$

$n=2$

$|\cos(\theta x)| \leq 1$

$$|R_2(x)| = \left|(-1)^2 \cdot \frac{x^5}{5!} \cdot \cos(\theta x)\right| \leq \frac{|x|^5}{5!} < 10^{-5} \Rightarrow |x|^5 < \frac{5!}{10^5} = \frac{3}{2500}$$

$$|x| < \sqrt[5]{\frac{3}{2500}} \approx 0,25$$

$$\boxed{x \in (-0,26\ ,\ 0,26)}$$

5. Колико чланова у развоју функције $f(x)=\ln(1+x)$ у Маклореновом полином треба узети да би вредност $\ln(0,5)$ израчунали са грешком $<0,01$.

$$f^{(2n+1)}(x)=\frac{(2n)!}{(1+x)^{2n+1}}$$

$$f^{(2n)}(x)=-\frac{(2n-1)!}{(1+x)^{2n}}$$

$$f(x)=\ln(1+x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x} \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2} \qquad f''(0)=-1$$

$$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0)=2$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-3!}{(1+x)^4} \qquad f'''(0)=-6$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{4!}{(1+x)^5}$$

$$\boxed{M_{n-1}(x)=\ln 1+\frac{x}{1!}\cdot 1+\frac{x^2}{2!}(-1)+\frac{x^3}{3!}\cdot 2+\frac{x^4}{4!}\cdot\frac{-3!}{1}+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}(-1)^{n-2}\cdot(n-2)!}$$

$$M_{n-1}(x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$R_n(x)=\frac{x^n}{n!}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+\theta x)^n}, \quad 0<\theta<1$$

$\ln(0,5) \to x=0,5$

$$|R_n(-0,5)|=\left|\frac{(-0,5)^n\cdot(-1)^{n-1}\cdot\cancel{(n-1)!}}{\underbrace{\cancel{n!}}_{n}\cdot(1-0,5\theta)^n}\right|=\left|\frac{(-1)^n(0,5)^n\cdot(-1)^{n-1}}{n(1-0,5\theta)^n}\right|=$$

$$=\frac{(0,5)^n}{n(1-0,5\theta)^n}<\frac{\cancel{(0,5)^n}}{n\cdot\cancel{(0,5)^n}}$$

$$\theta=1 \qquad \frac{1}{n}<\frac{1}{100} \qquad \boxed{n>100}$$

Ф-је више променљивих

$f: A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R}^n$

$\underset{\text{зависна променљива}}{y} = f\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{независне пром.}}$

Парцијални извод ф-је $z = f(x, y)$ по x је: $\cancel{\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}}$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}$$

2

$\cdot (n-2)!$

по y је: $$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}$$

Тотални диференцијал првог реда ф-је

$z = f(x, y)$: $$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy}$$

Тотални диференцијал другог реда ф-је $z = f(x, y)$

$$\boxed{d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2}$$

У општем случају, мешовити парцијални изводи

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M)$ ако постоје, могу имати

разл. вредности.

1. За $z(x,y)=x^2-2xy^2+y^3$ Нађи тотални диференцијал I и II реда.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y^2$$ y је константа

$$\frac{dz}{\partial y}=-4xy+3y^2$$

$$\partial z=(2x-2y^2)\,dx+(-4xy+3y^2)\,dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-4x+6y$$

$$\frac{d^2 z}{\partial x\, dy}=\frac{d}{\partial x}\left(\frac{dz}{dy}\right)=-4y$$

$$d^2 z=2dx^2-8y\,dx\,dy+(-4x+6y)\,dy^2$$

2. Нађи парцијалне изводе

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

За $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{y\cdot(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{x(x^2+y^2)-xy-2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} =$$

фиксна нула

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

само тежи нули

није „$\frac{0}{0}$"!

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{0 \cdot \Delta y}{0^2 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

Напомена:

Приметимо да функција има парцијалне изводе за x,y у тачки (0,0) али у тој тачки има прекид. Код ф-ја 1 променљиве непрекидност је потребан услов за постојање I извода.

(3.) Показати да имплицитно задата ф-ја $z = z(x,y)$ дефинисана са $x+y+z = \ln(x^2+y^2+z^2)$ задовољава једначину $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z-x)\frac{\partial z}{\partial y} = x-y$

$$x+y+z = \ln(x^2+y^2+z^2) \Big/ \frac{\partial}{\partial x}$$

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(2x + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - (x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2 - 2z}}$$

$$x+y+z = \ln(x^2+y^2+z^2) \Big/ \frac{\partial}{\partial y}$$

$$1 + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y-(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z}}$$

$$(y-z)\,\frac{2x-(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z} + (z-x)\,\frac{2y-(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z} =$$

$$= \frac{\cancel{2xy} - y(x^2+y^2+z^2) - 2xz + \cancel{z(x^2+y^2+z^2)}}{x^2+y^2+z^2-2z} +$$

$$+ \frac{2yz - \cancel{z(x^2+y^2+z^2)} - \cancel{2xy} + x(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2-2z} =$$

$$= \frac{(x-y)(x^2+y^2+z^2) - 2z(x-y)}{x^2+y^2+z^2-2z} =$$

$$= \frac{(x-y)(x^2+y^2+z^2-2z)}{x^2+y^2+z^2-2z} = x-y$$

Екстремне вредности

Потребан услов за екстремну вредност у тачки $M(x_0, y_0)$ је (ф-ја $z=f(x,y)$)

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 0$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 0$ или не постоје

Стационарне тачке су тачке у којима су парцијални изводи једнаки нули.

Довољан услов за екстрем:

Нека је $M_0(x_0, y_0)$ стационарна тачка ф-је $z=f(x,y)$ и ако у некој околини те тачке укључујући и ну функција има непрекидне парцијалне изводе II реда тада:

1) ако је $d^2z > 0$ за $(dx, dy) \neq (0,0) \Rightarrow f$ има MIN у $M_0(x_0, y_0)$

2) ако је $d^2z < 0$ за $(dx, dy) \neq (0,0) \Rightarrow f$ има MAX у $M_0(x_0, y_0)$

3) ако d^2z мења знак $\rightarrow f$ нема екстреме у $M_0(x_0, y_0)$

!!! Само за f-је са 2 променљиве важи сл. услов

$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

1) f има MAX ако је $rt - s^2 > 0$ и $r < 0$ (или $t < 0$)

2) f има MIN ако је $rt - s^2 > 0$ и $r > 0$ (или $t > 0$)

3) нема екстрем ако је $rt - s^2 < 0$

4) $rt - s^2 = 0 \Rightarrow$

(4) Наћи екстремне вр. ф-је $(x, y) = \ln(y - 2xy) + xy - x$

Потребан услов:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y - 2xy} \cdot (-2y) + y - 1 = 0$$

$$\frac{-2}{1-2x} + y - 1 = 0 \ /\cdot(1-2x) \Leftrightarrow -2 + y - 2xy - 1 + 2x = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y-2xy} \cdot (1-2x) + x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} + x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{y}$$

$$-2 + y - 2 \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) \cdot y - 1 + 2\left(-\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$-\cancel{2} + y + \cancel{2} - 1 - \frac{2}{y} = 0 \; / y$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1^2+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$y_1 = -1$ $\quad$ $y_2 = 2$ $\quad$ $A(1, -1)$

$x_1 = 1$ $\quad$ $x_2 = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $B(-\frac{1}{2}, 2)$

стационарне тачке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{0 - (-2) \cdot (-2)}{(1-2x)^2} = -\frac{4}{(1-2x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

$A(1, -1)$:

$$r = \frac{-4}{(1-2)^2} = -4 \qquad t = \frac{-1}{(-1)^2} = -1 \qquad s = 1$$

$$rt - s^2 = 4 - 1^2 = 3 > 0$$

$$r < 0$$

У $A(1,-1)$ ф.ја има MAX

$$z(1, -1) = -2$$

$B(-\frac{1}{2}, 2)$

$r = \frac{-4}{(1+1)^2} = -1$

$t = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$

$s = 1$

$rt - s^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$

у $B(-\frac{1}{2}, 2)$ немамо екстрем

5. Одредити екстремне вр. функције

$u(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 4x + 6y + 6z$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y + 4 = 0 \Rightarrow x + y + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -y - 2}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + 2x + 2z + 6 = 0 \Rightarrow 2y + x + z + 3 = 0$

$\frac{\partial u}{\partial z} = 4z + 2y + 6 = 0 \Rightarrow 2z + y + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{-y-3}{2}}$

$2y - y - 2 + \frac{(-y-3)}{2} + 3 = 0 \;/\cdot 2$

$2y - 4 - y - 3 + 6 = 0$

$y = 1 \qquad x = -3$

$z = -2$

$A(-3, 1, -2)$ стационарна тачка

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2$

$$d^2u = 2dx^2 + 4dy^2 + 4dz^2 + 2 \cdot 2dxdy + 4\,dydz$$

$$d^2u(A) = \underbrace{2dx^2} + 4dy^2 + 4dz^2 + \underbrace{4dxdy} + 4dydz$$

$$= 2\underbrace{(dx+dy)^2}_{\geq 0} + 2\underbrace{(dy+dz)^2}_{\geq 0} + 2\underbrace{dz^2}_{\geq 0} > 0$$

за $(dx, dy, dz) \neq (0,0,0)$

која у тачки $A(-3,1,-2)$ има MIN

$u(-3,1,-2) = -9$

Условни екстреми

$z = f(x,y)$ уз услов $\varphi(x,y) = 0$

1. Формирамо Лагранжеву ф-је $F(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$

2. $$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ \varphi(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A(x_0, y_0)$$

стационарна тачка

3. Диференцирање услова

4. На основу знака тоталног диференцијала другог реда одређујемо екстреме

1.

$$z(x,y) = y^2 - x^2 + 5$$

под условом $y + 2x = 16$

I $F(x,y) = y^2 - x^2 + 5 + \lambda(y + 2x - 16)$

II $\frac{\partial F}{\partial x} = -2x + 2\lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \Rightarrow y = \frac{-\lambda}{2}$

$y + 2x - 16 = 0 \rightarrow \frac{-\lambda}{2} + 2\lambda = 16$

$-\lambda + 4\lambda = 32$

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda = \frac{32}{3}\\ &x = \frac{32}{3},\ y = -\frac{32}{6} = -\frac{16}{3}\end{aligned}}$$

$\boxed{A\left(\frac{32}{3}, \frac{-16}{3}\right) \text{ стационарна тачка}}$

III $y + 2x = 16$

$2\,dx + dy = 0$

$dy = -2\,dx$

IV $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$

$d^2F = -2\,dx^2 + 2\,dy^2$

$d^2F(A) = -2dx^2 + 2dy^2 =$

$= -2dx^2 + 2\cdot 4\,dx^2 =$

$= 6dx^2 > 0$

f има условни минимум у тачки A и износи

$f_{min} = \frac{-241}{3}$

(2) Проверити да ли функција $u(x,y,z)=xy+yz$ у тачки $A(1,1,1)$ има условни екстрем ако је $x^2+y^2=2$ и $y+z=2$

I $F(x,y,z)=xy+yz+\lambda_1(x^2+y^2-2)+\lambda_2(y+z-2)$

II $\frac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda_1 x=0$ $\quad 1+2\lambda_1=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1=-\frac{1}{2}}$

$\frac{\partial F}{\partial y}=x+z+2\lambda_1 y+\lambda_2=0$ $\quad 1+1-1+\lambda_2=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_2=-1}$

$\frac{\partial F}{\partial z}=y+\lambda_2$ $\quad 1+(-1)=0$

$x^2+y^2-2=0$ $\quad 1^2+1^2-2=0$

$y+z-2=0$ $\quad 1+1-2=0$

$A(1,1,1)$ - стационарна тачка

III Диференцирање услова

$y+z=2$ $\quad x^2+y^2=2$

$dy+dz=0$ $\quad 2xdx+2ydy=0$

$dz=-dy$ $\quad 2dx+2dy=0$

$dx=-dy$

IV

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda_1=-1$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=1$ $\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=1$

$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0$ $\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}=1$

$d^2F(A) = -dx^2 - dy^2 + 2\,dx\,dy + 2\,dy\,dz =$

$= -(dx - dy)^2 + 2dy(-dy) = -(-2dy^2) - dy^2 = -6dy^2 < 0$

f у $(1,1,1)$ има условни максимум

$U_{max}(1,1,1) = 2$

(3.) Број 27 представити као производ 3 природна броја тако да збир та 3 броја буде минималан.

$f = x + y + z$

$x \cdot y \cdot z = 27$

I $F(x, y, z) = x + y + z + \lambda_1 (xyz - 27)$

II $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \lambda yz = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{yz}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + \lambda xz = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \left(-\frac{1}{yz}\right) xz = 0 \quad 1 - \frac{x}{y} = 0$

$\frac{x}{y} = 1 \quad x = y$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \lambda yx = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \left(-\frac{1}{yz}\right) yx = \quad x = z$

$xyz = 27$

$xyz - 27 = 0$

$x^3 = 27 \qquad A(3, 3, 3) \qquad \boxed{\lambda = -\frac{1}{9}}$

$\boxed{x = 3}$

III ~~yzxzxy xyz~~

$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0 \qquad \boxed{dx = -dy - dz}$

$9dx + 9dy + 9dz = 0$

IV $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \lambda z = -\frac{1}{9} \cdot 3 = -\frac{1}{3}$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \lambda y = -\frac{1}{3}$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \lambda x = -\frac{1}{3}$

$d^2F(A) = -\frac{2}{3}(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz)$

$= -\frac{2}{3}(-dy^2 - dy\,dz - \cancel{dy\,dz} - dz^2 + \cancel{dy\,dz})$

$= \frac{1}{3}(2dy^2 + 2dz^2 + 2dy\,dz) \cdot$

$= \frac{1}{3}((dy+dz)^2 + dy^2 + dz^2) > 0$

$(dx, dy, dz) \neq (0,0,0)$

$u_{min}(3,3,3) = 9$

(4.) Нека су x, y, z странице квадра чија P омотача износи $24\,cm^2$ за које x, y, z ће запремина квадра бити max?

$V(x,y,z) = xyz$

услов: $2(xy + xz + yz) = 24$

$\boxed{xy + xz + yz = 12}$

I $F(x,y,z) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - 12)$

II $\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda(y+z) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda(x+z) = 0$

$\lambda = -1$

$x = y = z = 2$

$A(2,2,2)$
стационарна тачка

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda(x+y) = 0$$

$$xy + xz + yz - 12 = 0$$

III $\quad (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = 0$

$$dx + dy + dz = 0$$
$$dx = -dy - dz$$

IV $\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = z + \lambda = 2 - 1 = 1 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = y + \lambda = 1 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = x + \lambda = 1$$

$$d^2 F(A) = 2(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz) =$$

$$= 2(-dy^2 - dy\,dz - \cancel{dy\,dz} - dz^2 + \cancel{dy\,dz}) =$$

$$= -dy^2 - dz^2 - (dy + dz)^2 < 0$$

$$(dx, dy, dz) \neq (0,0,0)$$

$$V_{max} = 8\ cm^3$$

Интегрални рачун

Ако је $F(x)$ примитивна функција $f(x)$ (тј $F'(x)=f(x)$, $x\in I$) онда је скуп свих примитивних функција

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+c} \qquad c=const$$

1. $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} s: \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int t\cdot dt = \frac{t^2}{2}+c = \boxed{\frac{\ln^2 x}{2}+c}$$

2. $$\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} s: \operatorname{arctg}\frac{x}{2} = t \\ \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}dx = dt \\ \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 2dt \end{array} \right| =$$

$$4+x^2 = 4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\int t\cdot 2dt = \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{2}+c = \boxed{\frac{\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}}{4}+c}$$

3. $$\int \frac{e^{\operatorname{arctg}x} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} s: \operatorname{arctg}x = t & \ln(1+x^2) = s \\ \frac{1}{x^2+1}dx = dt & \frac{1}{1+x^2}2x = ds \\ & \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}ds \end{array} \right. =$$

$$= \int e^t dt + \frac{1}{2}\int s\,ds + \int \frac{dx}{1+x^2} = \boxed{e^{\operatorname{arctg}x} + \frac{\ln^2(1+x^2)}{4} + \operatorname{arctg}x + c}$$

(4.) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = \left| \begin{array}{l} S: \sqrt{1+\ln x} = t /^2 \\ 1+\ln x = t^2 \\ \frac{1}{x}dx = 2t\cdot dt \\ \ln x = t^2-1 \end{array} \right| =$

$= \int \frac{t^2-1}{t} 2t dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + C = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} - 2\sqrt{1+\ln x} + C}$

Парцијална интеграција

$\boxed{\int u dv = u\cdot v - \int v \cdot du}$

(5.) $\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \int dx = x \end{array} \right| = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$

$= x\ln x - x + C = \boxed{x(\ln x - 1) + C}$

(6.) $\int x^5 \cdot e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} S: -x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ x dx = -\frac{1}{2}dt \\ x^4 = (-t)^2 = t^2 \end{array} \right| =$

$C=0$

$= -\frac{1}{2}\int t^{2} \cdot e^t \cdot dt = \left| \begin{array}{ll} u = t^2 & dv = e^t dt \\ du = 2t dt & v = \int e^t dt = e^t \end{array} \right| =$

$= -\frac{1}{2} \cdot t^2 e^t - \int e^t \cdot 2t dt = t^2 e^t - 2\int t \cdot e^t dt = \left| \begin{array}{ll} u_1 = t & dv = e^t dt \\ du_1 = dt & v = e^t dt = e^t \end{array} \right| =$

$= -\frac{1}{2}\left(t^2 e^t - 2te^t + 2\int e^t dt\right) = t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C =$

$= \boxed{x^4 e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2} + 2e^{-x^2} + C}$ а $-\frac{1}{2}$ заборављена

(7.) „Илијин интеграл"

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2} - \frac{1}{a^2}$$

$$\underbrace{\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx}_{I} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2} - \frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \boxed{\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2} + C}$$

$$I = \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx \\ du = dx & v = \int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \left| \begin{array}{l} s:\ x^2+a^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{2\cdot(x^2+a^2)}$$

$$= \frac{-x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}$$

(8.)

$$I = \int \sin(2\ln x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin(2\ln x) & dv = dx \\ du = \cos 2\ln x \cdot \frac{2}{x}\,dx & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x\cdot\sin(2\ln x) - \int \cancel{x}\cdot\cos 2\ln\,\frac{2}{\cancel{x}}\,dx = x\sin(2\ln x) - 2\int\cos(2\ln x)\,dx$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u_1 = \cos(2\ln x) & dv_1 = dx, \\ du_1 = -\sin(2\ln x)\frac{2}{x}dx & v_1 = x \end{array} \right| = x\cdot\sin(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x) - 4$$

$$\underbrace{\int \sin(2\ln x)\,dx}_{4I}$$

$5I = x \cdot \sin x(2\ln x) - 2x\cos(2\ln x)$

$$\boxed{I = \frac{1}{5} x \sin x(2\ln x) - \frac{2}{5} x\cos(2\ln x) + C}$$

$$\boxed{+\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+C}$$

Интеграли са квадратним триномом

I $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0,\ b^2-4ac<0)$

$(m=0, n=1)$

9. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \left| \begin{array}{l} s: x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+2^2} =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \boxed{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C}$

$m=3 \quad n=-2$

10. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{3(2x-4)+4}{x^2-4x+5}\,dx =$

$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx + 2\int \frac{dx}{(x-2)^2+1^2} = \left| \begin{array}{l} s: x^2-4x+5=t \\ (2x-4)\,dx=dt \\ x-2=s \\ dx=ds \end{array} \right| =$

$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} + 2\int \frac{ds}{s^2+1^2} = \frac{3}{2}\ln|t| + 2\cdot\operatorname{arctg} s + C =$

$= \boxed{\frac{3}{2}\ln|x^2-4x+5| + 2\operatorname{arctg}(x-2) + C}$

$\underline{\text{II}}$ $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ ($a\neq 0$, $b^2-4ac<0$) као I

$\underline{\text{III}}$ $\int \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ ($m\neq 0$, $a\neq 0$, $b^2-4ac<0$)

S: $mx+n=\frac{1}{t}$

11. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \left| \begin{array}{l} S: x+1=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{1}{t^2}\,dt \\ x=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2}+\frac{2-2t}{t}}} =$

$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{(1-t)^2+2t-2t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\cancel{t}\cdot\frac{\sqrt{1-t^2}}{\cancel{t}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\arcsin t + c = \boxed{-\arcsin\frac{1}{x+1} + C}$$

$\underline{\text{IV}}$ $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ ($a\neq 0$, $b^2-4ac<0$) $=$

$= \int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ (Метод* Остроградског)

Интеграли рационалних ф-ја

$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ $\deg(P)<\deg(Q)$, ако не важи треба прво поделити

$$\frac{1}{(x-a)^k(x^2+px+q)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$$

$p^2-4q<0$

1. $\int\frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}dx=4\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx-4\int\frac{dx}{x-2}+4\int\frac{dx}{(x-2)^2}$

$x^2-3x+2=0$

$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$

$x_1=2 \quad x_2=1$

$$\frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}=\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2} \Big/ (x-1)^2(x-2)^2$$

$x^2=A(x-1)(x-2)^2+B(x-2)^2+C(x-2)(x-1)^2+D(x-1)^2$

$x^2=Ax^3-4Ax^2+4Ax-Ax^2+4Ax-4A+Bx^2-$

$-4Bx+4B+Cx^3-2Cx^2+Cx-2Cx^2+4Cx-$

$-2C+Dx^2-2Dx+D$

уз x^3 $0=A+C$

уз x^2 $1=-5A+B-4C+D$

уз $0=8A-4B+5C-2D$

$0=-4A+4B-2C+D$

$A=4 \quad B=1 \quad C=-4 \quad D=4$

S: $x-1=t \quad x-2=s$

$dx=dt \quad dx=ds$

$$=4\int\frac{dt}{t}+\int t^{-2}dt-4\int\frac{ds}{s}+4\int s^{-2}ds=$$

$$=4\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-4\ln|x-2|-4\cdot\frac{1}{x-2}+C$$

I $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{px+q}\right)^{r_k}\right] dx$

$aq - bp \neq 0$

$S: \frac{ax+b}{px+q} = t^s$ $s = NZS$ {именилаца од $r_1, r_2 \ldots r_k$}

(2.) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{x+1}} = \int \frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}} = \left| \begin{array}{l} S: x+1 = t^{s} \quad s = NZS\{3,2\} \\ x+1 = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| =$

$= \int \frac{6t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6 \int \frac{t^2 dt}{t^3(t-1)} = 6 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt =$

$t^2 : (t-1) = t+1$
$-t^2 - t$
t
$t-1$
1

$\frac{t^2}{t-1} = t + 1 + \frac{1}{t-1}$

$= 6 \int \frac{(t-1)(t+1)}{t-1} dt + 6 \int \frac{1}{t-1} dt = 6 \cdot \frac{t^2}{2} + 6t + 6 \cdot$

$\cdot \ln|t-1| + C =$

$= \boxed{3 \cdot \sqrt[6]{(x+1)^2} + 6\sqrt[6]{x+1} + 6 \ln\left|\sqrt[6]{x+1} - 1\right| + C}$

II Интеграли биномног диференцијала

$\int x^m (a + bx^n)^p dx$ $m, n, p \in Q$
$n, p \neq 0$
$a, b \in R \setminus \{0\}$

$S: x^n = t$

$x = t^{\frac{1}{n}}$ $\Rightarrow \frac{1}{n} \int t^{Q} (a + bt)^p dt$

$dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n} - 1} dt$

Разликујемо 3 случаја

1° $p \in \mathbb{Z}$, $q =: \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ $\quad S: t = z^s$

2° $p = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ $\quad q \in \mathbb{Z}$ $\quad S: a + bt = z^s$

3° $p + q \in \mathbb{Z}$, $p = \frac{r}{s}$ $\quad \int t^q (a+bt)^p dt = \int t^{p+q} \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$

$$S: \frac{a+bt}{t} = z^s$$

(3.) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-\sqrt[3]{x})} = \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot (4 - x^{\frac{1}{3}})^{-1} dx =$

$= \left| \begin{array}{l} S: x^{\frac{1}{3}} = t \\ x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right| = \int t^{-\frac{3}{2}} \cdot (4-t)^{-1} \cdot 3t^2 dt = 3 \int t^{\frac{1}{2}} (4-t)^{-1} dt =$ $\quad \in \mathbb{Z}$

$= \left| \begin{array}{l} S: t = z^2 \\ dt = 2z\,dz \end{array} \right| = 3 \int z \cdot (4-z^2)^{-1} 2z\,dz = 6 \int \frac{z^2}{4-z^2} = -6 \int \frac{z^2 - 4 + 4}{z^2 - 4} dz$

$= -6 \int dz - 24 \int \frac{dz}{z^2-4} = -6z + 24 \int \frac{dz}{4-z^2} = -6z + 24 \cdot \frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+2}{z-2} \right| =$

$= -6\sqrt{t} + 6 \ln \left| \frac{2+\sqrt{t}}{2-\sqrt{t}} \right| + C$

$= \boxed{-6 \cdot \sqrt[6]{x} + 6 \ln \left| \frac{2+\sqrt[6]{x}}{2-\sqrt[6]{x}} \right| + C}$

(4.) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} (1 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} S: x^{\frac{1}{3}} = t \\ x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right| =$

$= \int t^{-2} (1+t)^{\frac{1}{2}} 3t^2 dt = 3 \int t^{0 \in \mathbb{Z}} (1+t)^{\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}} dt = \left| \begin{array}{l} S: 1+t = z^2 \\ dt = 2z\,dz \end{array} \right| =$

$= 3 \int z \cdot 2z\,dz = 6 \cdot \frac{z^3}{3} + C = 2 \cdot \sqrt{(1+t)^3} + C = \boxed{2 \cdot \sqrt{(1+x^{\frac{1}{3}})^3} + C}$

(5.) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \left|\begin{array}{l} s:\ x^2=t \\ x=t^{\frac{1}{2}} \\ dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt \end{array}\right|$$

3. случај

$$= \int t^{-1}(1+t)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}\in Q}(1+t)^{-\frac{3}{2}\in Q}dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{-3}\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{3}{2}}dt = \left|\begin{array}{ll} s:\ \frac{1+t}{t}=z^2 & dt=\frac{-2z}{(z^2-1)^2}dz \\ 1+t=z^2t & \\ 1=t(z^2-1) & \\ t=\frac{1}{z^2-1} & \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{(z^2-1)^{-3}}\cdot z^{-3}\cdot\frac{-2z}{(z^2-1)^2}dz = -\int\frac{(z^2-1)^3}{z^2}\cdot\frac{z}{(z^2-1)^2}dz =$$

$$= -\int\frac{z^2-1}{z^2}dz = -\int dz + \int\frac{dz}{z^2} = -z - \frac{1}{z} + C$$

III $$\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad a\neq 0 \quad = \underbrace{Q_{n-1}(x)}_{\text{непознати полином степена } n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} + \underbrace{\lambda}_{\text{непозната константа}}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Метод Остроградског

$Q_0(x)=A$

$Q_1(x)=Ax+B$

$Q_2(x)=Ax^2+Bx+C$

$Q_3(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$

(6.) $$\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = A\cdot\sqrt{(x^2+x+1)} + (Ax+B)\cdot\frac{2(x+\frac{1}{2})}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}} \Big/ \cdot\sqrt{x^2+x+1}$$

$$x^2+1 = Ax^2+Ax+A+Ax^2+\frac{A}{2}x+Bx+\frac{B}{2}+\lambda$$

$1=2A \qquad A=\frac{1}{2}$

$0=\frac{3}{2}A+B \qquad B=-\frac{3}{4}$

$1=A+\frac{B}{2}+\lambda \qquad \lambda=\frac{7}{8}$

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{7}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{7}{8} = \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{7}{8}\ln$$

$$\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C$$

$-\frac{3}{2}dt$

$* \; ax^2+bx+c$

$1(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$

$a((x+\ )^2-(x-\ )^2$

(7.) $$\int\sqrt{x^2+x+2}\,dx = \int\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+2} +$$

$$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}\ \Big|' = \cancel{x^2}(1+t)$$

$$= \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+2}} = A\sqrt{x^2+x+2} + (Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}} + \frac{\lambda}{x^2+x+2}\ \Big/ \cdot\sqrt{x^2+x+2}$$

$\overline{\underline{IV}}$ $$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad S: x-\alpha = \frac{1}{t}$$

$n\in N,\ a\neq 0$

(1.) $$\int\frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2-2x}} = \left| \begin{array}{l} S: x+1 = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \\ x = \frac{1}{t}-1 = \frac{1-t}{t} \end{array} \right| = \int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^3}\cdot\sqrt{\frac{(1-t)^2}{t^2}+\frac{2-2t}{t}}} = -\int\frac{dt}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1\cancel{-2t}+t^2\cancel{+2t}-2t^2}{t^2}}}$$

$$= -\int\frac{dt}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}} = +\int\frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = (At+B)\sqrt{1-t^2} + \lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\ \Big/'$$

$$\frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}} = A\sqrt{1-t^2} + (At+B)\frac{-\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{1-t^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}}\ \Big/\cdot\sqrt{1-t^2}$$

$$-t^2 = A - At^2 - At^2 - Bt + \lambda$$

$-1 = -2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$x+1$ $\quad 0 = -B \Rightarrow B = 0$

$0 = A+\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2}\arcsin t + C$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\sqrt{1-\frac{1}{(x+1)^2}} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right) + C$$

Интеграли тригонометријских ф-ја

$$^{*}\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

1. $$\int \cos x \cos(2x)\cdot\cos(3x)dx = \int \cos x \, \frac{\cos x + \cos(5x)}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos^2 x + \frac{1}{2}\int \frac{\cos(4x)\cos(6x)}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos(2x)}{2}dx + \frac{1}{4}\int \cos(4x)dx$$

$$+\frac{1}{4}\int \cos(6x)dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\sin(6x) + C$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \quad \left| \begin{array}{ll} S: tg\frac{x}{2} = t & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} & dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{array} \right|$$

2. $$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \left| \begin{array}{l} S: tg\frac{x}{2} = t \\ \dots \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1-t^2+4t+3+3t^2}{\cancel{1+t^2}}}dt = 2\int \frac{dt}{2(t^2+2t+2)} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1^2} =$$

$$= arctg(t+1) + C = arctg\left(tg\frac{x}{2}+1\right) + C$$

3. $$\int \frac{dx}{\sin x \sin(2x)} = \int \frac{dx \quad /\cdot\cos x}{\sin x \cdot 2\sin x\cos x /\cdot \cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)} = \left| \begin{array}{l} S: \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

$$= \frac{-1}{2\sin x} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$$

$$4.\quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\sin x \cdot \sin^4 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x}{\cos^4 x}\,dx$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{array} \right| = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^4}\,dt = -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^4}\,dt =$$

$$= -\int \frac{dt}{t^4} + 2\int \frac{dt}{t^2} - \int dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} - t + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C$$

$$5.\quad \int \frac{\sin x - \cos x \;|:\cos x}{\sin x + 2\cos x \;|:\cos x}\,dx = \int \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 2}\,dx = \left| \begin{array}{l} s:\ \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t-1}{t+2} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt = (*)$$

$$\frac{t-1}{(t-2)(1+t^2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \quad \Big/ (t+2)(1+t^2)$$

$$t-1 = A + At^2 + Bt^2 + 2Bt + Ct + 2C$$

$0 = A+B \Rightarrow A = -B \Rightarrow A = -\frac{3}{5}$

$1 = 2B + C \qquad 1 = 2B + C \;\; (-2) \qquad \Rightarrow C = -\frac{1}{5}$

$-1 = A + 2C \qquad -1 = -B + 2C \qquad -3 = -4B - B \Rightarrow B = \frac{3}{5}$

$$(*) = -\frac{3}{5}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{5}\int \frac{3t-1}{t^2+1}\,dt = -\frac{3}{5}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{5}\int \frac{\frac{3}{2}(2t-1)}{t^2+1}\,dt$$

$$= -\frac{3}{5}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{3}{10}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt - \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2+1} = \left| \begin{array}{l} s:\ t^2+1 = s \\ 2t\,dt = ds \end{array} \right| =$$

$$= \frac{-3}{5}\ln|\operatorname{tg} x + 2| + \frac{3}{10}\ln|\operatorname{tg}^2 x + 1| - \frac{1}{5}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C$$

Интеграли експоненцијалне ф-је

$$1.\quad \int \frac{e^{3x} - e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} s:\ e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3 - t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int \frac{\cancel{t}(t^2-1)}{t^2+1} \cdot \frac{1}{\cancel{t}}\,dt$$

$$= \int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}\,dt = \int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = t - 2\operatorname{arctg} t + C = e^x - 2\operatorname{arctg} e^x + C$$

$$② \int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^{x})}dx = \left| \begin{array}{l} s: e^{\frac{x}{2}} = t \quad /^2 \quad e^{x} = t^2 \\ \frac{x}{2} = \ln t \\ x = 2\ln t \\ dx = \frac{2}{t}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\operatorname{arctg} t}{t(1+t^2)} \cdot \frac{②}{t} dt = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} t & dv = \frac{1}{t^2(1+t^2)}dt \\ du = \frac{1}{1+t^2}dt & v = \int \frac{dt(1-t^2+t^2)}{t^2(1+t^2)} = -\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \end{array} \right|$$

$$= 2\left(\operatorname{arctg} t\left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t\right) + \int \frac{1}{t(1+t^2)}dt + \int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}dt \right)$$

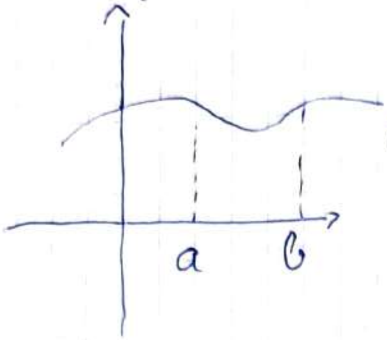
$$= \left| \begin{array}{l} s: \operatorname{arctg} t = s \\ \frac{1}{1+t^2}dt = ds \end{array} \right| = \frac{-2\operatorname{arctg} t}{t} - 2\operatorname{arctg}^2 t + \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t}{1+t^2}dt$$

$$+ \int s \cdot ds = \left| \begin{array}{l} 1+t^2 = \tilde{s} \\ 2t\,dt = d\tilde{s} \\ t\,dt = \frac{1}{2}d\tilde{s} \end{array} \right| = \frac{-2\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}} - 2\operatorname{arctg}^2(e^{\frac{x}{2}}) + \ln|e^{\frac{x}{2}}|$$

$$- \frac{1}{2}\ln|1+e^{x}| + \frac{\operatorname{arctg}^2 e^{\frac{x}{2}}}{2} + C$$

Дужина лука криве

Декартов координатни систем



$$\boxed{l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx} = \int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$l=\int_c^d\sqrt{1+x'^2}\,dy$$

1. Израчунати дужину лука функције $y=\ln(1-x^2)$ за $0\le x\le \frac{1}{2}$

$$y'=\frac{1}{1-x^2}\cdot(-2x) \qquad (y')^2=\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$1+(y')^2=\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}$$

$$l=\int_0^{\frac12}\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}\,dx=\int_0^{\frac12}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac12}\left(-1+\frac{2}{1-x^2}\right)dx=$$

$$=-x\Big|_0^{\frac12}+2\cdot\frac12\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^{\frac12}=-\frac12+\ln 3-\ln 1=\boxed{\ln 3-\frac12}$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}=\cancel{\frac{1+x^2}{(1-x)(1+x)}}=\cancel{\frac{A}{1-x}}+\cancel{\frac{B}{1+x}}\;/\,(1-x)(1+x)$$

$$(x^2+1):(-x^2+1)=-1$$

$$\frac{-\cancel{x^2}-1}{2}$$

2. Наћи дужину лука криве $y^2-2\ln y-4x=0$ од $x=\frac14$ до $x=\frac{e^2}{4}-\frac12$

$$x=\frac14 y^2-\frac12\ln y \qquad x=\frac14\Rightarrow y=1 \qquad x=\frac{e^2}{4}-\frac12\Rightarrow y=e$$

$x' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2y} = \frac{y^2-1}{2y}$

$1+(x')^2 = 1 + \frac{(y^2-1)^2}{4y^2} = \frac{4y^2+y^4-2y^2+1}{4y^2} = \frac{(1+y^2)^2}{4y^2}$

$l = \int_1^e \sqrt{1+x'^2}\,dy = \int_1^e \sqrt{\left(\frac{1+y^2}{4y}\right)^2}\,dy = \int_1^e \frac{1+y^2}{2y}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{dy}{y} + \frac{1}{2}\int_1^e y\,dy$

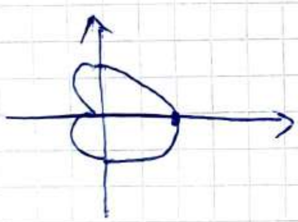
$= \frac{1}{2}\ln|y|\Big|_1^e + \frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\Big|_1^e = \frac{1}{2} - 0 + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}}$

Поларни коор. систем

$$\boxed{\begin{gathered}\rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta] \\ l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi\end{gathered}}$$

3.) Наћи дужину лука кардиоиде

$\rho = a(1+\cos\varphi) \quad a>0$



$\varphi \in [0, \pi]$

$\rho' = -a\sin\varphi$

Израчунаћемо дужину горње и помножићемо са 2

$\rho'^2 = a^2\sin^2\varphi$

$\boxed{\frac{1+\cos\varphi}{2} = \cos^2\frac{\varphi}{2}}$

$\rho^2 + \rho'^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) =$

$= 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\frac{1+\cos\varphi}{2} = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$

*$\cos\frac{\varphi}{2} > 0$ јер смо у I квадранту

$l = 2\cdot\int_0^\pi \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 2\int_0^\pi 2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \left| \begin{array}{l} s:\ \frac{\varphi}{2}=t \\ \frac{1}{2}d\varphi=dt \\ d\varphi=2dt \\ \varphi=0 \to t=0 \\ \varphi=\pi \to t=\frac{\pi}{2} \end{array}\right. = 8a\cdot\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a(1-0) = \boxed{8a}$$

Параметарски *каокоаиjи облик

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t\in[a,b]$$

$$l = \int_a^b \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$$

(4.) Израчунати дужину лука параметарски задане криве $x(t)=\frac{1}{6}t^6$ $y(t)=2-\frac{1}{4}t^4$ између пресечних тачака са координатни осама.

испитни задаци

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow 0=\frac{1}{6}t^6 \Rightarrow t=0 \\ y=0 \Rightarrow 0=2-\frac{1}{4}t^4 \Rightarrow t=\sqrt[4]{8} \end{array}\right\}\ \text{пресечне тачке границе}$$

$$x_t' = t^5 \qquad x_t'^2 = t^{10}$$
$$y_t' = -t^3 \qquad y_t'^2 = t^6$$

jer je $\sqrt{t^6}$ позитиван за границе 0 и $\sqrt[4]{8}$

$$l = \int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{t^{10}+t^6}\,dt = \int_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^6(t^4+1)}\,dt = \int_0^{\sqrt[4]{8}} t^3\sqrt{t^4+1}\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} S:\ t^4+1=z \\ 4t^3dt=dz \\ t^3dt=\frac{1}{4}dz \\ t=0 \to z=1 \\ t=\sqrt[4]{8} \to z=9 \end{array}\right. = \int_1^9 \sqrt{z}\cdot\frac{1}{4}dz = \frac{1}{4}\,\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{z^3}\Big|_1^9 = \frac{27}{6}-\frac{1}{6} = \boxed{\frac{26}{6}}$$

Диференцијалне једначине I реда

$F(x,y,y')=0$ имплицитни
облик
$y'=f(x,y)$ експлицитни

$$\boxed{y'=\frac{dy}{dx}}$$

Разликујемо три решења ДЈ

1) опште $y=y(x,C)$, $C=const$

2) партикуларно решење добија се из општег за $C=C_0$

3) сингуларно решење које се не може добити ни за једно $C=C_0$

I ј-не које раздвајају променљиве

$$y'=f(x)\cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)}dy=f(x)dx$$

1. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'=xy-y$$

$$y'=y(x-1)$$

$$\frac{dy}{dx}=y(x-1) \,/\cdot \frac{1}{y}dx$$

$$\frac{dy}{y}=(x-1)dx \,/\int$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (x-1)\,dx$$

* C може само са 1 стране!

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} - x + C$$

$$\boxed{|y| = e^{\frac{x^2}{2} - x + C}}$$

(2.) $y(x^2-1)\,y' = -x(y^2-1)$

$$y(x^2-1)\cdot\frac{dy}{dx} = -x(y^2-1) \Big/ \cdot \frac{1}{y^2-1}$$

$$\frac{y}{y^2-1}(x^2-1)\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\frac{y}{y^2-1}\,dy = \frac{x}{x^2-1}\,dx \Big/ \cdot 2$$

$$\frac{2y}{y^2-1}\,dy = \frac{-2x}{x^2-1}\,dx \Big/ \int$$

$$\int \frac{2y}{y^2-1}\,dy = -\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} S:\ y^2-1 &= t \\ 2y\,dy &= dt \\ x^2-1 &= s \\ 2x\,dx &= ds \end{aligned}$$

$$\int \frac{dt}{t} = -\int \frac{ds}{s}$$

$$\ln|t| = -\ln|s| + C$$

$$\ln|t| = \ln\left|\frac{1}{s}\right| + \ln C_1$$

$$\ln|t| = \ln\left|\frac{C_1}{s}\right| \qquad |t| = \left|\frac{C_1}{s}\right|$$

$$\boxed{|y^2-1| = \frac{C_1}{|x^2-1|}}$$

3. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $(1+e^x)yy' = e^x$ који задовољава услов $y(0)=1$

$$(1+e^x)\, y\, \frac{dy}{dx} = e^x \;/\cdot \frac{1}{1+e^x} \cdot dx$$

$$y\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \;/\int$$

$$\int y\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \left|\begin{array}{l} s: \; 1+e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array}\right.$$

$$\int y\,dy = \int \frac{dt}{t}$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|t| + C$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + \ln C_1 = \ln C_1(1+e^x)$$

$$y^2 = 2\ln C_1(1+e^x)$$

$$y = \sqrt{2\ln C_1(1+e^x)}$$

опште решење

$$y(0)=1$$

$$x=0 \quad y=1$$

$$1 = \sqrt{2\ln(C_1 \cdot 2)} \;/^2$$

$$1 = 2\ln 2C_1$$

$$\frac{1}{2} = \ln 2C_1$$

$$2C_1 = e^{\frac{1}{2}}$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$\boxed{y = \sqrt{2\ln\frac{\sqrt{e}}{2}(1+e^x)}}$$

II хомотена диф. ј-на

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$S: \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x$$
$$y' = u'x + u$$

$$y' = \sqrt{\frac{y}{x}} - \ln\frac{y}{x}$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1$$

4.

$$(x-y)y\,dx - x^2dy = 0$$

$$(x-y)y\,dx = x^2dy \;/ : dx$$

$$(x-y)y = x^2 \cdot y' \;/ \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{(x-y)y}{x^2} = y'$$

$$\left(1 - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{y}{x} = y'$$

$$(1-u) \cdot u = u'x + u$$

$$\cancel{u} - u^2 = u'x + \cancel{u}$$

$$-u^2 = \frac{du}{dx}x \;/ \;\frac{dx}{x} \;\; \frac{1}{u^2}$$

$$\frac{-dx}{x} = \int\frac{du}{u^2}$$

$$-\ln|x| + c = -\frac{1}{u}$$

$$\ln|x| + c = \frac{1}{u}$$

$$\ln|x| + \ln c_1 = \frac{1}{u}$$

$$\ln c_1|x| = \frac{1}{u}$$

$$u = \frac{1}{\ln c_1|x|}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\ln c_1|x|}$$

$$\boxed{y = \frac{x}{\ln c_1|x|}}$$

III једначине које се своде на хомогене

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$$

1° Ако је $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ S: $a_1x + b_1y + c_1 = t$
или $a_2x + b_2y + c_2 = t$

2° Ако је $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ S: $x = X + \alpha$, $y = Y + \beta$ $\left.\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}$

1. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$

$$y' = \frac{x-y-1}{x-y-2}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

на пр.
S: $x - y - 2 = t$
$1 - y' = t'$
$y' = 1 - t'$

$1 - t' = \frac{t+1}{t}$

$t' = 1 - \frac{t+1}{t} = -\frac{1}{t}$

$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t}$

$t\,dt = -dx / \int$

$\int t\,dt = -\int dx$

$\frac{t^2}{2} = -x + c$

$t^2 = 2(-x + c)$

$\boxed{(x-y-2)^2 = 2(-x+c)}$

2. $y' = \frac{x+y-5}{x-y}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

S: $x = X + \alpha \implies x = X + 2$
$y = Y + \beta \implies y = Y + 3$

$y' = Y'$

$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta - 5 = 0 \\ \alpha - \beta + 1 = 0 \end{aligned}\right\} +$

$2\alpha - 4 = 0$

$\alpha = 2$
$\beta = 3$

$$y' = \frac{x+2+y+3-5}{x+2-y-3+1}$$

$$y' = \frac{x+y \,/ :x}{x-y \,/ :x} = \cancel{\frac{\frac{x}{x}+\frac{y}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{y}{x}}} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

хомогена:

$$S: \frac{y}{x} = u$$

$$y = ux$$

$$y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \frac{1+u}{1-u}$$

$$u'x = \frac{1+u-u+u^2}{1-u} = \frac{1+u^2}{1-u}$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1+u^2}{1-u}$$

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x} \quad \int$$

$S: 1+u^2 = t$, $2u\,du = dt$

$$\int \frac{1}{1+u^2}du - \int \frac{u}{1+u^2}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{arctg} u = \frac{1}{2}\ln|1+u^2| = \ln|x| + c$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln\sqrt{1+u^2} + \ln|x| + \ln c_1^{\,>0}$$

$$\operatorname{arctg} u = \ln c_1\sqrt{1+u^2}\,|x|$$

$$e^{\operatorname{arctg} u} = c_1\sqrt{1+u^2}\,|x|$$

$$e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = c_1\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\,|x|$$

$$\boxed{e^{\operatorname{arctg}\frac{y-3}{x-2}} = c_1\sqrt{1+\frac{(y-3)^2}{(x-2)^2}}\cdot|x-2|}$$

решење је експлицитно јер је и почетна једначина дата експлицитно

IV Линеарна диференцијална једначина

$$\boxed{\begin{array}{ll} y' + f(x)y = g(x) & \\ S: y = u\cdot v & u = u(x) \\ y' = u'v + uv' & v = v(x) \end{array}}$$

(3.) Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

линеарна

$$S: \quad y = u\cdot v$$
$$y' = u'\cdot v + u v'$$

Увек после смене извучемо u испред заграде

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{2}{x+1}v\right)}_{\text{увек } 0} = (x+1)^3$$

$$v' = \frac{2}{x+1}v$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x+1}v \Big/ \cdot \frac{1}{v}\,dx$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2\,dx}{x+1} \Big/ \int$$

$$\int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|v| = 2\ln|x+1|$$

када тражимо v не стављамо +C

$$\ln|v| = \ln(x+1)^2$$

$$|v| = (x+1)^2$$

$$\boxed{v = (x+1)^2}$$

→ v је ± али ми бирамо само + (може и само −)

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3$$

$$\frac{du}{dx} = x+1$$

$$du = (x+1)\,dx \Big/ \int$$

$$\int du = \int(x+1)\,dx$$

$$u = \frac{x^2}{2} + x + C$$

Коначно решење:

$$\boxed{y = u\cdot v = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)(x+1)^2}$$

V Бернулијева ДЈ

$$y' + f(x)y = g(x)y^m \quad m>0 \quad m\in\mathbb{R}$$

Два начина решавања

1°) $S: y = u\cdot v$

2°) $\dfrac{y'}{y^m} + f(x)y^{1-m} = g(x) \qquad S: y^{1-m} = z$

4. $xy' + y = y^2 \ln x$

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2$$

Бернулијева $m=2$

$S: y = uv$

$y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' + \dfrac{1}{x}uv = \dfrac{\ln x}{x}u^2v^2$

$u'v + u\left(v' + \dfrac{1}{x}v\right) = \dfrac{\ln x}{x}u^2v^2$

$v' = -\dfrac{1}{x}v$

$\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{1}{x}v$

$\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x} \quad / \int$

$\int\dfrac{dv}{v} = -\int\dfrac{dx}{x}$

$\ln|v| = -\ln|x|$

$\ln|v| = \ln x^{-1}$

$|v| = x^{-1}$ ← бирано $+v$

$\boxed{v = \dfrac{1}{x}}$

$u'\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{\ln x}{x}u^2\cdot\dfrac{1}{x^2} \quad / \cdot x \ \dfrac{1}{u^2}$

$u'\dfrac{1}{u^2} = \dfrac{\ln x}{x^2}$

$\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{\ln x}{x^2}dx$

$\int\dfrac{du}{u^2} = \int\dfrac{\ln x}{x^2}dx =$

$\left| \begin{array}{ll} u_1 = \ln x & dv_1 = \frac{1}{x^2}dx \\ du_1 = \frac{1}{x}dx & v_1 = -\frac{1}{x} \end{array} \right|$

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} + \int\frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = \frac{-\ln x - 1 + Cx}{x}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{\ln x + 1 - Cx}{x} \qquad \boxed{y = uv = \frac{1}{\ln x + 1 - Cx}}$$

$$u = \frac{x}{\ln x + 1 - Cx}$$

5. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$

ако баш ништа не иде пробати ову смену

$$x' = \frac{1}{y'} \qquad y' = \frac{1}{x'}$$

$$(2x^2 y \ln y - x)\frac{1}{x'} = y \quad / \cdot x'$$

$$2x^2 y \ln y - x = yx' \quad / \frac{1}{y'}$$

$$2x^2 \ln y - \frac{1}{y}x = x'$$

$$x' + \frac{1}{y}x = 2x^{\boxed{2}}\ln y$$

Бернулијева $m=2$

S: $x = u \cdot v$, $u = u(y)$

$x' = u'v + uv'$, $v = v(y)$

$$u'v + uv' + \frac{1}{y}uv = 2\ln y\, u^2 v^2$$

$$u'v + u(\underbrace{v' + \frac{1}{y}v}_{=0}) = 2\ln y\, u^2 v^2$$

$$v' = -\frac{1}{y}v$$

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{y}v$$

$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dy}{y}$$

$\ln|v| = -\ln|y| = \ln\left|\frac{1}{y}\right|$

$v = \frac{1}{y}$

$u' \cdot \frac{1}{y} = 2\ln y \, u^2 \cdot \frac{1}{y^2} \quad / \cdot y$

$\frac{du}{dy} = \frac{2\ln y}{y} u^2$

$\int \frac{du}{u^2} = 2\int \frac{\ln y}{y} dy = \left| \begin{matrix} S: \ln y = t \\ \frac{1}{y} dy = dt \end{matrix} \right|$

$-\frac{1}{u} = 2 \cdot \frac{\ln^2 y}{2} + c$

$\frac{1}{u} = -\ln^2 y - c$

$u = \frac{1}{-\ln^2 y - c}$ $\quad \boxed{x = uv = \frac{1}{y(-\ln^2 y - c)}}$

VI J-на тоталног диференцијала

$$\boxed{\begin{gathered} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \end{gathered}}$$

(6) Наћи опште решење

$(y - 3x^2)\,dx + (x - 4y)\,dy = 0$

I проверимо

$P(x,y) = y - 3x^2 \qquad Q(x,y) = x - 4y$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \quad = \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$

ако су једнаки

једначина је тоталног диференцијала

$$F(x,y)=\int p(x,y)\,dx=\int(y-3x^2)\,dx = y\cdot x-3\frac{x^3}{3}+\varphi(y)$$

мења +C

(остатак по y) јер је то констант

задатак може да се ради на сл. начин:

$F(x,y)=\int Q(x,y)\,dy$

$= \dots + \psi(x)$

остатак по x

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$$

$$x+\varphi'(y)=x-4y$$

$$\varphi(y)=-4\int y\,dy$$

$$\varphi(y)=-4\cdot\frac{y^2}{2}+C$$

$$\varphi(y)=-2y^2+C$$

Коначно решење:

$$\boxed{F(x,y)=yx-x^3-2y^2+C=0}$$

VII ј-не које допуштају интеграциони множитељ

(Неће да буде на колоквијуму али на испиту у сл. рокова хоће)

Ако не важи $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

$h(x,y)\neq 0$

питамо се да ли постоји

$$h(x,y)P(x,y)\,dx+h(x,y)Q(x,y)\,dy=0$$

7. Показати да диф. једначина

$$x\,dx+y\,dy+x\,dy-y\,dx=0$$

има интеграциони множитељ облика

$$h=h(x^2+y^2)$$

$$\underbrace{h(x,y)\cdot(x-y)}_{P(x,y)}\,dx+\underbrace{h(x,y)(x+y)}_{Q(x,y)}\,dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$h'(x^2+y^2)\cdot 2y\,(x-y) + h(x^2+y^2)\cdot(-1) =$$

$$= h'(x^2+y^2)\cdot 2x\cdot(x+y) + h(x^2+y^2)\cdot 1$$

$$h'(x^2+y^2)\cdot 2\,(yx - y^2 - x^2 - xy) = 2\, h(x^2+y^2)$$

$$-h'(x^2+y^2) = h(x^2+y^2)$$

$$s: t = x^2+y^2$$

$$-h'(t)\cdot t = h(t) \,/\, \cdot\left(-\frac{1}{t}\right)$$

$$h'(t) = \frac{-h(t)}{t}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-h(t)}{t} \qquad \frac{dh}{h(t)} = -\frac{dt}{t} \,/\int$$

$$\ln|h| = -\ln|t| = \ln\left|\frac{1}{t}\right|$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\underbrace{\frac{x-y}{x^2+y^2}}_{P}\,dx + \underbrace{\frac{x+y}{x^2+y^2}}_{Q}\,dy = 0$$

као претходни задатак се ради