**Univerzitet u Novom Sadu**
Fakultet tehničkih nauka
Odsek za računarsku tehniku i računarske komunikacije

# Minimizacija prekidačkih funkcija

# Uvod

- U projektovanju kombinacionih mreža jedan od bitnih zadataka je minimizacija Bulovih funkcija kojima je opisana kombinaciona mreža.

- U opštem slučaju zadatak minimizacije Bulovih funkcija se svodi na određivanje Bulove funkcije sa minimalnim brojem superpozicija unutar jednog funkcionalno potpunog sistema.

- Inženjerski gledano, cilj je svesti količinu upotrebljenih logičkih kola na minimum, a da izlazna funkcija bude očuvana.

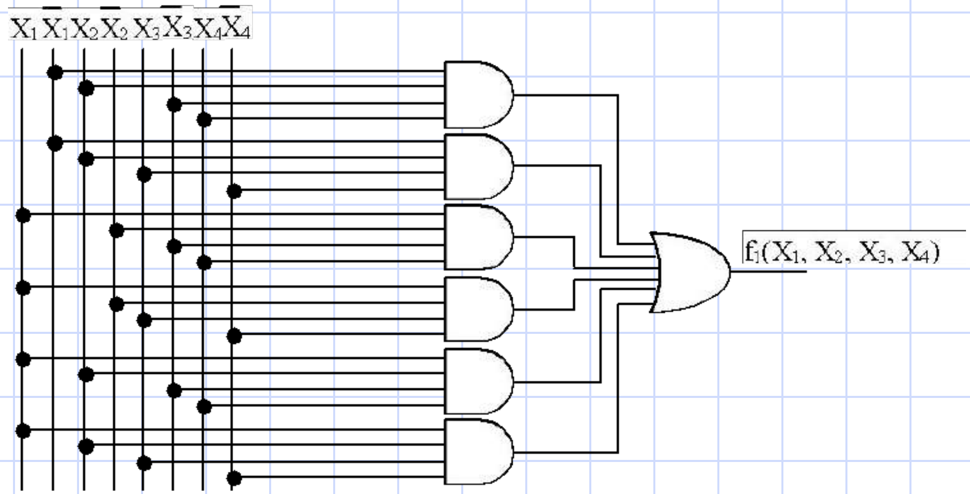
# Motivacija

- Zbog nepostojanja dovoljno efikasnih rešenja tako postavljenog zadatka rešenje se traži u minimizaciji (traženju minimalnih formi) Bulove funkcije unutar konkretnog funkcionalno potpunog sistema.
- Najčešće je to sistem koji obrazuje konjukcija, disjunkcija i negacija.
- Negacija (NE) Konjunkcija (I) Disjunkcija (ILI)

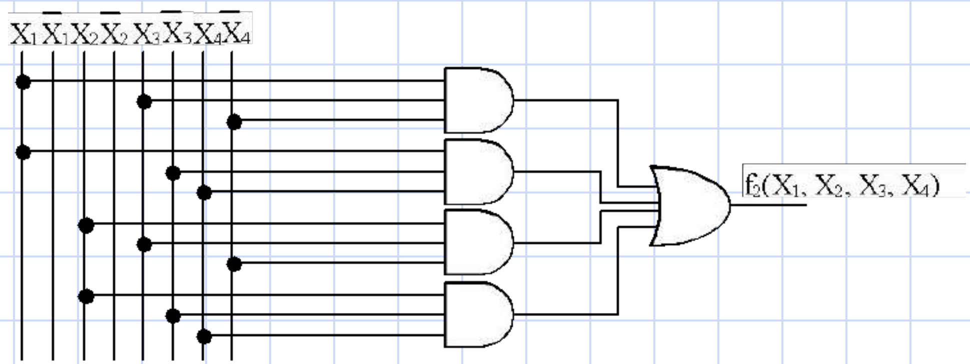
# Primer

Izvršiti analizu realizacije funkcije n = 4 promenljive, zadate skupom indeksa slogova f1 = (5, 6, 9, 10, 13, 14).

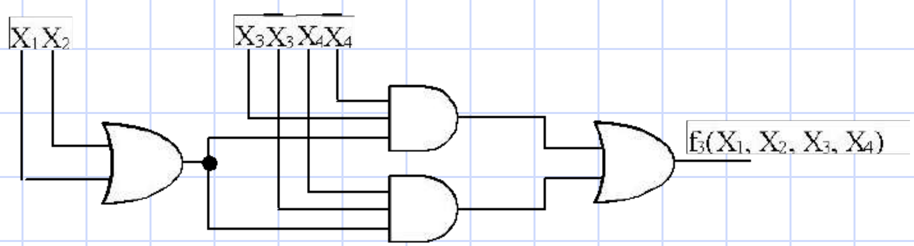
- ***Rešenje:***
- Funkciju je moguće napisati na sledeće načine:
- a) $$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4+$$ $$+x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+x_1x_2\bar{x}_3x_4+x_1x_2x_3\bar{x}_4$$
- b) $$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_3\bar{x}_4+x_1\bar{x}_3x_4+x_2x_3\bar{x}_4+x_2\bar{x}_3x_4$$
- c) $$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)(x_3\bar{x}_4+\bar{x}_3x_4)$$


$X_1 \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_2 X_3 \bar{X}_3 X_4 \bar{X}_4$
$f_1(X_1, X_2, X_3, X_4)$

a)


$X_1 \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_2 X_3 \bar{X}_3 X_4 \bar{X}_4$
$f_2(X_1, X_2, X_3, X_4)$

b)


$X_1 X_2$
$X_3 \bar{X}_3 X_4 \bar{X}_4$
$f_3(X_1, X_2, X_3, X_4)$

c)

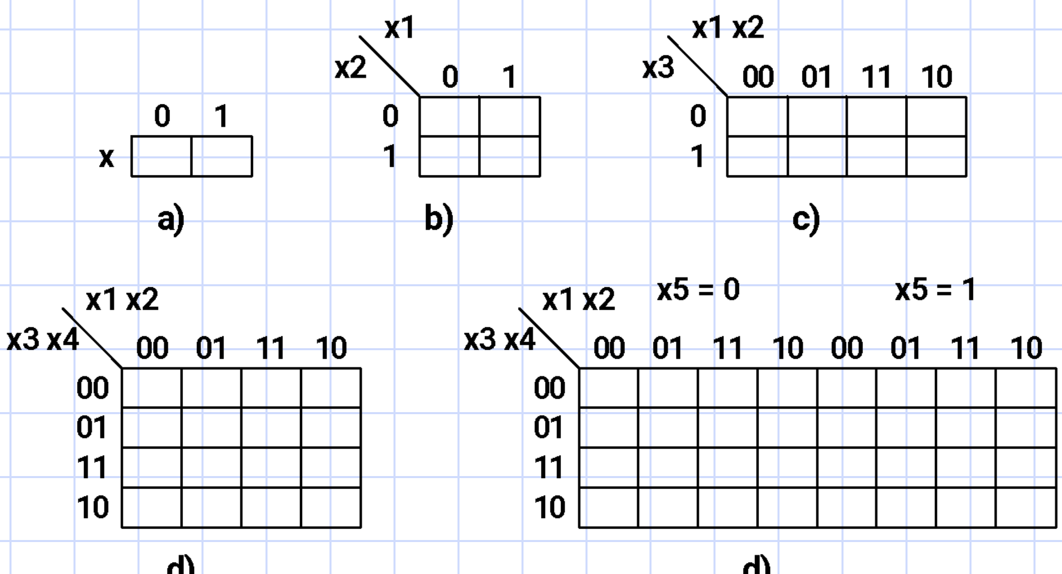
# Minimizacija pomoću Karnoovih mapa (Karnaugh) 1/3

- Ovaj metod koristi modifikovanu kombinacionu tablicu sa brojem ćelija jednakim broju slogova Bulove funkcije.

- Da bi se Bulova funkcija unela u tablicu uzima se onaj slog na kome je vrednost funkcije 1 i unosi u ćeliju koja odgovara tome slogu. Uobičajeno je da se ćelije sa vrednošću funkcije 0 ostavljaju prazne.

# Minimizacija pomoću Karnoovih mapa (Karnaugh) 2/3

- Slogovi koji se razlikuju samo po vrednosti jedne promenljive nazvaće se logički susednim. To znači da su sve fizički susedne ćelije na Karnoovoj karti logički susedne ćelije, što predstavlja osnovnu karakteristiku ovog metoda minimizacije. Ovo je omogućeno primenom Grejovog koda, kod koga se N-ti i N+1-vi broj međusobno razlikuju samo u jednom razredu.



# Minimizacija pomoću Karnoovih mapa (Karnaugh) 3/3

- minimizovati: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5,7,10,13,15)$

- ***Rešenje:***
  Za zadati skup indeksa na kojima funkcija ima vrednost 1 formira se K karta.

| x3 x4 \ x1 x2 | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | | 1 | 1 | |
| 11 | | 1 | 1 | |
| 10 | | | | 1 |

- Iz K-karte se uočavaju figure ranga 2 i ranga 0, odnosno, minimalna DNF je data izrazom:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 x_4 + x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4$$

# Analitički metod minimizacije Bulovih funkcija (Quine McCluskey) 1/6

- Analitički metod ili tabelarni metod minimizacije Bulovih funkcija, predstavlja potpuno formalizovanu proceduru koja iz koraka u korak dovodi do jednoznačnog rezultata, odnosno, do potpunog skupa skraćenih DNF, odnosno do nepreopširnih skraćenih DNF. (W.V. Quine i E.J. McCluskey 1956)

- Tabelarni metod minimizacije sastoji se od dva koraka. U prvom se pronalazi potpun skup prostih implikanti a u drugom sa izabira ne preopširan potpun sistem prostih implikanti koji daje izraz za minimalnu DNF.

# Analitički metod minimizacije Bulovih funkcija 2/6

- Primer: minimizovati QMC metodom: $f1(X1,X2,X3,X4)=(0,3,5,7,11,13,15)$

# Analitički metod minimizacije Bulovih funkcija 3/6

- Tabelarno predstavljamo funkciju

| indeksi sloga | | X1 | X2 | X3 | X4 | f | br. Jedinica |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | **0** |
| 1 | | 0 | 0 | 0 | 1 | | 1 |
| 2 | | 0 | 0 | 1 | 0 | | 1 |
| **3** | | **0** | **0** | **1** | **1** | **1** | 2 |
| 4 | | 0 | 1 | 0 | 0 | | 1 |
| **5** | | **0** | **1** | **0** | **1** | **1** | 2 |
| 6 | | 0 | 1 | 1 | 0 | | 2 |
| **7** | | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | 3 |
| 8 | | 1 | 0 | 0 | 0 | | 1 |
| 9 | | 1 | 0 | 0 | 1 | | 2 |
| 10 | | 1 | 0 | 1 | 0 | | 2 |
| **11** | | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | 3 |
| 12 | | 1 | 1 | 0 | 0 | | 2 |
| **13** | | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | 3 |
| 14 | | 1 | 1 | 1 | 0 | | 3 |
| **15** | | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | 4 |

# Analitički metod minimizacije Bulovih funkcija 4/6

- Prvi put prolazimo kroz tabelu i tražimo slične slogove. Grupišemo slične (različite za jednu bitsku poziciju), objedinjujemo stanja i prepisujemo u desnu tabelu.

| indeksi sloga | | X1 | X2 | X3 | X4 | f | br. Jedinica |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | √ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 5 | √ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 7 | √ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 11 | √ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 13 | √ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 15 | √ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |

| indeksi sloga | | X1 | X2 | X3 | X4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3,7 | √ | 0 | x | 1 | 1 |
| 3,11 | √ | x | 0 | 1 | 1 |
| 5,7 | √ | 0 | 1 | x | 1 |
| 5,13 | √ | x | 1 | 0 | 1 |
| 7,15 | √ | x | 1 | 1 | 1 |
| 11,15 | √ | 1 | x | 1 | 1 |
| 13,15 | √ | 1 | 1 | x | 1 |

# Analitički metod minimizacije Bulovih funkcija 5/6

- Nastavljamo proces...

| indeksi sloga | | X1 | X2 | X3 | X4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3,7 | √ | 0 | x | 1 | 1 |
| 3,11 | √ | x | 0 | 1 | 1 |
| 5,7 | √ | 0 | 1 | x | 1 |
| 5,13 | √ | x | 1 | 0 | 1 |
| 7,15 | √ | x | 1 | 1 | 1 |
| 11,15 | √ | 1 | x | 1 | 1 |
| 13,15 | √ | 1 | 1 | x | 1 |

| indeksi sloga | | X1 | X2 | X3 | X4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3,7,11,15 | | x | x | 1 | 1 |
| 3,11,7,15 | | x | x | 1 | 1 |
| 5,7,13,15 | | x | 1 | x | 1 |

# Analitički metod minimizacije Bulovih funkcija 6/6

| indeksi sloga | | X1 | X2 | X3 | X4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3,7,11,15 | | x | x | 1 | 1 |
| 3,11,7,15 | | x | x | 1 | 1 |
| 5,7,13,15 | | x | 1 | x | 1 |

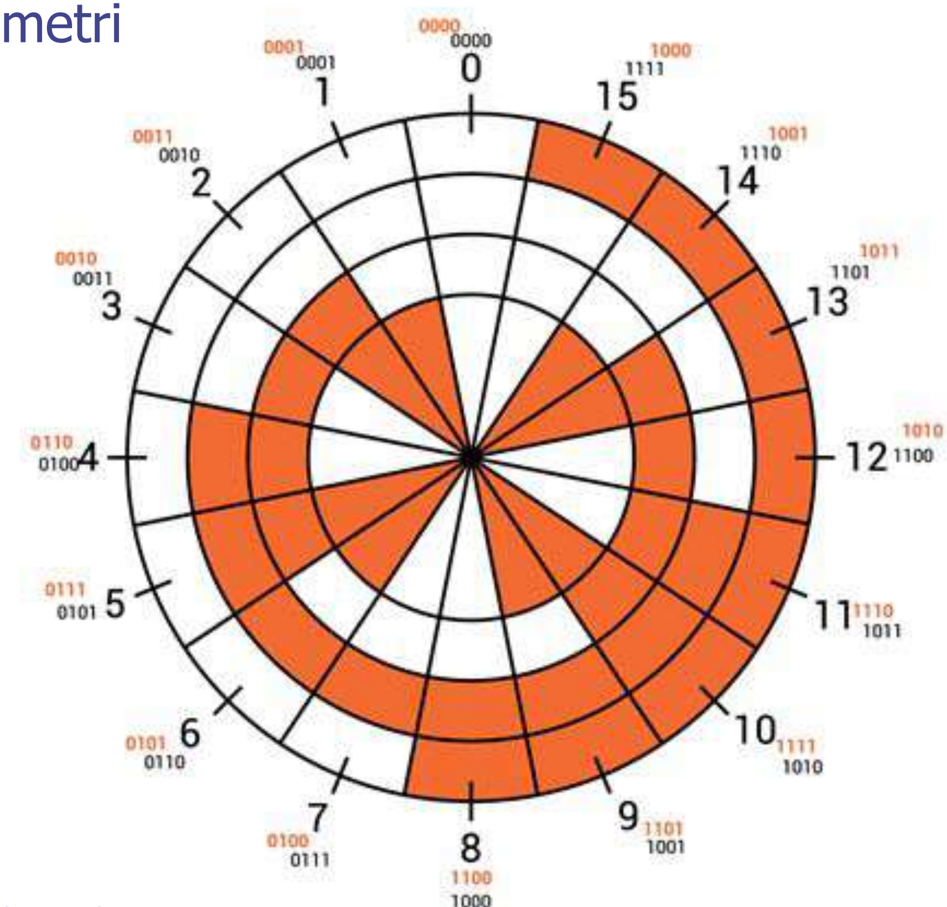
| indeksi sloga | | X1 | X2 | X3 | X4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3,7,11,15 | | x | x | 1 | 1 |
| 5,7,13,15 | | x | 1 | x | 1 |

$$f = \overline{X1}\,\overline{X2}\,\overline{X3}\,\overline{X4} + X3X4 + X2X4$$

# Grejov (Gray) kod

- Razlika između susednih kodnih reči 1 bit
- Nije težinski kod
- Pogodan za prenos brojačkih informacija između dva sistema
- Upotreba: apsolutni enkoderi, altimetri

| | Binarni kod | | | | Grejov kod | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i. sloga | A | B | C | D | Y3 | Y2 | Y1 | Y0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |



# Grejov (Gray) kod - minimizacija

$$Y3 = A$$

| Y2 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\overline{C}\overline{D}$ | $\overline{C}D$ | $CD$ | $C\overline{D}$ |
| $\overline{A}\overline{B}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\overline{A}B$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $AB$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $A\overline{B}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$Y2 = \overline{A}B + A\overline{B}$$

$$Y2 = (A+B)(\overline{A}+\overline{B})$$

$$Y2 = A \oplus B$$

MDNF

MKNF

XOR

| Y1 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\overline{C}\overline{D}$ | $\overline{C}D$ | $CD$ | $C\overline{D}$ |
| $\overline{A}\overline{B}$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\overline{A}B$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $AB$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $A\overline{B}$ | 0 | 0 | 1 | 1 |

$$Y1 = B\overline{C} + \overline{B}C$$

$$Y1 = (B+C)(\overline{B}+\overline{C})$$

$$Y1 = B \oplus C$$

| Y0 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\overline{C}\overline{D}$ | $\overline{C}D$ | $CD$ | $C\overline{D}$ |
| $\overline{A}\overline{B}$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\overline{A}B$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $AB$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $A\overline{B}$ | 0 | 1 | 0 | 1 |

$$Y0 = C\overline{D} + \overline{C}D$$

$$Y0 = (C+D)(\overline{C}+\overline{D})$$

$$Y0 = C \oplus D$$