Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje–stari studenti
Merenje i regulacija–stari studenti
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 9. februar 2024.

PREZIME I IME: ______________________

BROJ INDEKSA: __________

Predispitne obaveze 1 – 20 poena

1. [3 poena] Napisati geometrijsku definiciju verovatnoće.

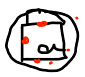
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad$ m – геом. мера

$A \subseteq \Omega$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$, Ω - ограничен, коначне геом. мере

Oko kocke ivice a opisana je lopta.
Izračunati verovatnoću da slučajno izabrana tačka iz lopte pripada kocki.

$\mathbb{R}^3$



Ω = лопта
A = коцка
m = запремина

$$p = \frac{V(\text{коцке})}{V(\text{лопте})} = \frac{a^3}{\frac{4}{3}r^3\pi}$$

(*) Ako se slučajno izabrana tačka nalazi u kocki izračunati verovatnoću da pripada ivici kocke.

$\mathbb{R}^3$ $\quad$ m = запремина

$$p = \frac{V(\text{ивице})}{V(\text{коцке})} = \frac{0}{a^3} = 0$$

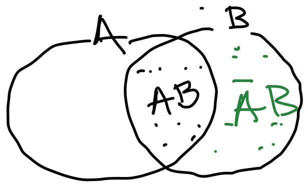
скоро немогућ

2. [1 poen] $P(ABC) =$ $P(A)P(B|A)P(C|AB)$

$P(A \cup B \cup C) =$ $P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

3. [2 poena] Ako su A i B nezavisni događaji pokazati da je $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$.

знам: $P(AB)=P(A)P(B)$ (*)



$$B = (AB) + (\overline{A}B)$$
$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$$
$$P(\overline{A}B) = P(B) - \underbrace{P(AB)}_{(*)} = P(B) - P(A)P(B)$$
$$= P(B)(1-P(A)) = P(B)\cdot P(\overline{A}) = P(\overline{A})P(B)$$

4. [3 poena] Napisati za koje slučajne promenljive važe navedene jednakosti

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ увек

$E(XY) = E(X)E(Y)$ некорелиране

$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ — " —

$D(X) = E(X^2) - E(X)^2$

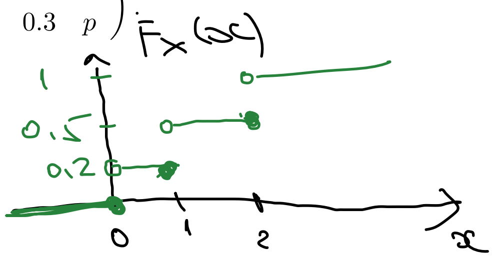
Ako je $E(X) = 2$ i $D(X) = 4$ onda je
$E(X^2) =$ $D(X) + E(X)^2 = 4 + 2^2 = 8$

$E(-X+3) =$ $E(-X)+3 = -E(X)+3 = -2+3 = 1$

$D(-X+3) =$ $D(-X) = (-1)^2 \cdot D(X) = 1\cdot 4 = 4$

5. [1 poen] Izračunati karakterističnu funkciju slučajne promenljive X koja sa jednakom verovatnoćom uzima vrednosti iz skupa $\{-1, 1\}$.

6. [4 poena] Slučajna promenljiva X data je zakonom reaspodele verovatnoća $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.3 & p \end{pmatrix}$.



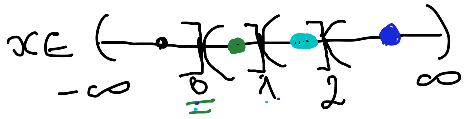
Izračunati konstantu p.

$0{,}2+0{,}3+p=1$

$p=0{,}5$

Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X i grafički je predstaviti.

$F_X(x)=P(X<x)$



$$F_X(x)=\begin{cases} x\in(-\infty,0] : & 0 \\ x\in(0,1] : & 0{,}2 \\ x\in(1,2] : & 0{,}2+0{,}3=0{,}5 \\ x\in(2,\infty) : & 0{,}2+0{,}3+0{,}5=1 \end{cases}$$

Izračunati $P(X<\frac{3}{2}) =$ $F_X(3/2) = 0{,}5$ ili $P(\underbrace{X}_{\{0,1\}}<3/2)=p(0)+p(1)=0{,}2+0{,}3$

Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = X^2 - X$.

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0{,}2+0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

7. [6 poena] Tačka (X, Y) se na slučajan način bira iz trougla T čija su temena $O(0,0)$, $A(2,0)$ i $B(2,2)$.

Odrediti gustinu raspodele verovatnoća slučajne promenljive (X, Y).

Odrediti marginalnu gustinu slučajne promenljive Y.

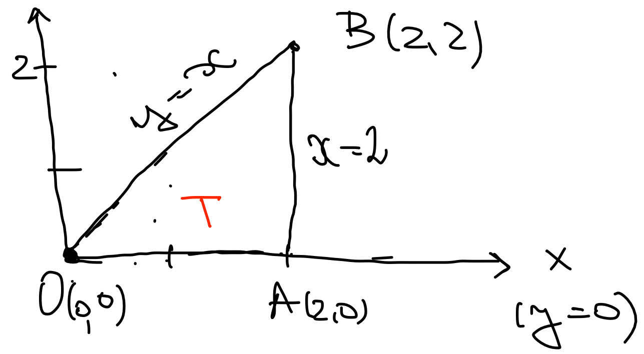
Odrediti gustinu raspodele verovatnoća slučajne promenljive $X|Y = y$, $\boxed{y \in (0, 2)}$.

Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive $X|Y = y$, $y \in (0, 2)$.

Izračunati matematičko očekivanje slučajne promenljive $X|Y = y$, $y \in (0, 2)$.

$\mathbb{R}^2$

(X,Y)



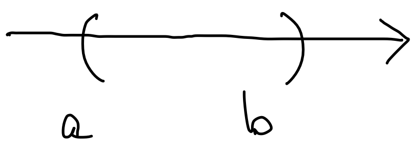
: $\varphi_{X,Y}(x,y) = ?$

$\mathbb{R}^2 \to$ мера = површина

(X,Y) бира из T

$$\boxed{(X,Y) : U(T)}$$

$\mathbb{R}$ X се бира из (a,b)



$X : U(a,b)$

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

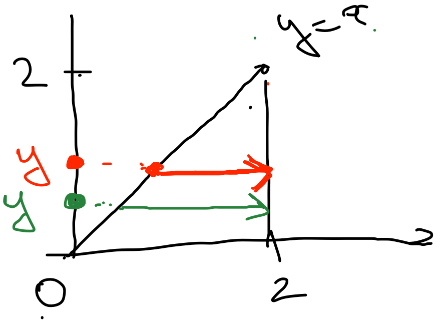
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{дужина}}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{Pov(T)}, & (x,y) \in T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad Pov(T) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y) \in T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$T = \{(x,y) : x \in (0,2) \wedge y \in (0,x)\}$$

- $\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dx$



$$y \in (0,2) : \varphi_Y(y) = \int_y^2 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2} x \Big|_y^2 = \frac{1}{2}(2-y) = 1 - \frac{y}{2}$$

$$y \notin (0,2) : \varphi_Y(y) = 0$$

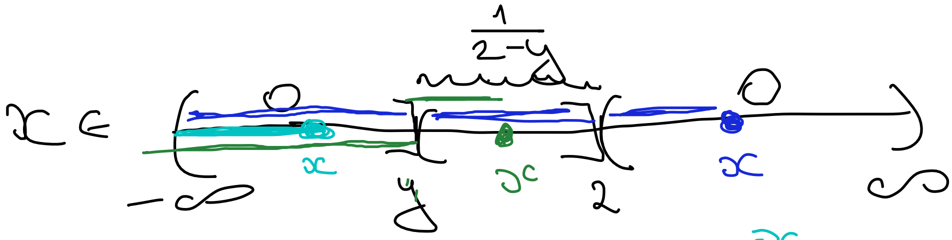
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

• $\varphi_{X|Y=y}(x) = \dfrac{\varphi_{X,Y}(x,y)}{\underbrace{\varphi_Y(y)}}$, $\varphi_Y(y) \neq 0$

$\boxed{\text{За } y\in(0,2)}$

$$\varphi_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}(2-y)} = \dfrac{1}{2-y}, & \boxed{x\in(y,2]} \\ \dfrac{0}{\frac{1}{2}(2-y)} = 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

• $\underbrace{F_{X|Y=y}}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{X|Y=y}(t)\,dt$



$x\in(-\infty, y]$: $F_{X|Y=y}(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

$x\in(y, 2]$: $F_{X|Y=y}(x) = \int_{-\infty}^{y} 0\,dt + \int_{y}^{x} \frac{1}{2-y}\,dt$

$x\in(2, \infty)$: $F_{X|Y=y}(x) = \int_{-\infty}^{y} 0\,dt + \int_{y}^{2} \frac{1}{2-y}\,dt + \int_{2}^{x} 0\,dt = 1$

• $E(\underline{\underline{X}}|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi_{X|Y=y}(x)\,dx = \int_{y}^{2} x\cdot \underbrace{\frac{1}{2-y}}\,dx$

$$= \frac{1}{2-y}\int_{y}^{2} x\,dx$$

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 9. februar 2024.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Predispitne obaveze 2
10 poena

1. [1 poen] Obeležje X ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu ($\lambda > 0$). Na osnovu uzorka: $2,3$; $1,7$; $3,6$; $2,5$; $1,5$; $2,4$ metodom momenata oceniti parametar λ.

2. [2 poena] Verovatnoća da strelac pogodi metu, u svakom nezavisnom gađanju, je 0.6. Ako strelac gađa metu 100 puta, proceniti verovatnoću $P(|X-60|<10)$, gde je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj pogodaka, pomoću
   - nejednakosti Čebiševa
   - Muavr-Laplasove teoreme

3. [3 poena] Dat je slučajni proces $X_t = t + X$, $t \in \mathbf{R}$, gde je X slučajna promenljiva data zakonom raspodele verovatnoća $X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Odrediti raspodele prvog reda za slučajni proces X_t. Izračunati očekivanje i korelacionu funkciju slučajnog procesa X_t.

4. [5 poena] Dat je lanac Markova čiji je skup stanja $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ i čija je matrica prelaza $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3a & 0 & a \\ 3a & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) $a =$ ....

b) Ako je sistem u početnom momentu bio u stanju s_1 odrediti vektor početnih verovatnoća $\mathbf{p}(0) =$ ....

c) Odrediti vektor verovatnoća $\mathbf{p}(1) =$ .... i verovatnoću $p_2(1) =$ ....

d) Da li postoje finalne verovatnoće za dati lanac Markova? Odgovor obrazložiti! Ako postoje, odrediti ih.

e) Izračunati $P(X_0 = s_1, X_2 = s_1, X_3 = s_3, X_7 = s_3) =$

f) Da li dati lanac Markova ima apsorbujuće stanje? Ako ima pronaći ga i odgovor obrazložiti.

g) Odrediti, ako je to moguće, početni vektor verovatnoća $p(0)$ tako da dati lanac Markova bude stacionaran.

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 9. februar 2024.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 1
35 poena

Zadaci – Raditi u svesci!

1. [4 poena] Brojevi a i b biraju se na slučajan način iz intervala $[-2,2]$. Izračunati verovatnoću da kvadratna jednačina $ax^2 + bx + 2 = 0$ ima realna rešenja.

2. [6 poena] Prva kutija sadrži 3 roze i 4 plave kuglice, a druga sadrži dve roze kuglice. Emica na slučajan način uzima dve kuglice odjednom iz prve kutije i prebacuje ih u drugu kutiju, a zatim iz druge kutije na slučajan način uzima dve kuglice odjednom. Izračunati očekivani broj izvučenih kuglica plave boje iz druge kutije.

3. [7 poena] Slučajna promenljiva X data je funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} ax^2, & x \in (0,3) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

   a) Izračunati konstantu a i odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X.

   b) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = \max\{X, 1\}$. Da li je Y slučajna promenljiva neprekidnog tipa?

4. [10 poena] Emica baca novčić sve dok dva puta uzastopno ne padne pismo, ali najviše četiri puta. Slučajna promenljiva X predstavlja broj palih pisama, a slučajna promenljiva Y broj izvedenih bacanja novčića.

   a) Odrediti zakon raspodele verovatnoća dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y).

   b) Odrediti zakon raspodele veoatnoća slučajne promenljive $Z = XY$.

   c) Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive $Z = Y - X$.

5. [8 poena] Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0,4)$ raspodelu, a uslovna slučajna promenljiva $Y|X = x$, $x \in (0,4)$, ima uniformnu $\mathcal{U}(0, x+2)$ raspodelu. Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = X + Y$.

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 9. februar 2024.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 2
25 poena

Zadaci – Raditi u svesci!

1. [4 poena] Emica igra igru na sreću "Grebalica". Svaka srećka ili ima dobitak od 5 \$, dobitak od 10 \$ ili nema dobitak ("dobitak" od 0 \$). Poznato je da polovina srećki ima jedan od dva moguća dobitka. Ako srećka ima dobitak, onda je jednako verovatno da to bude 10 \$ ili 5 \$. Koliko najmanje srećki bi Emica trebalo da kupi da bi sa verovatnoćom 0.95 ukupno ogrebala dobitak od bar 1000 \$?

2. [7 poena] Obeležje X ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\theta}{3} & 1-\frac{\theta}{3} \end{pmatrix}$. Na osnovu uzorka obima n, metodom maksimalne verodostojnosti oceniti nepoznati parametar θ. Ispitati centriranost i postojanost dobijene ocene.

3. [8 poena] U tržnom centru postoje troje pokretnih stepenica. Verovatnoća da se u toku radnog vremena bilo koje pokretne stepenice pokvare je $\frac{1}{4}$ i u tom slučaju se tokom noći popravljaju i kreću ponovo sa radom sledećeg dana. Pokretne stepenice se kvare nezavisno od drugih pokratnih stepenica. Skup stanja sistema određen je brojem pokretnih stepenica koje rade bez kvara tokom celog radnog vremena.
   (a) Napraviti matricu prelaza za jedan korak.
   (b) Izračunati verovatnoću da će na kraju drugog dana sve pokretne stepenice raditi ako su na kraju prvog dana sve pokretne stepenice bile pokvarene.
   (c) Da li dati lanac Markova ima finalne verovatnoće? Obrazložiti odgovor! Ako ima, odrediti ih.
   (d) Da li je dati lanac Markova stacionaran? Odgovor obrazložiti!

4. [6 poena] U hitnoj pomoći su tokom noćne smene dežurna dva lekara. Broj pocijenata koji mogu da dodju na pregled je neograničen. Na svakih pola sata dodje jedan pacijent (Poasonov potok trebovanja), a pregled jednog pacijenta u proseku traje 15 minuta (eksponencijalna dužina usluživanja).
   (a) Opisati dati sistem usluživanja i naći λ, μ i Λ.
   (b) Odrediti očekivani broj pacijenata u hitnoj pomoći.
   (c) Koliko vremena lekari imaju da odmore ako im smena traje od 19h do 7h narednog dana?

Komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 9. februar 2024.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita

Zadaci – raditi u svesci

1. Brojevi a i b biraju se na slučajan način iz intervala $[-2, 2]$. Izračunati verovatnoću da kvadratna jednačina $ax^2+bx+2 = 0$ ima realna rešenja.

2. Prva kutija sadrži 3 roze i 4 plave kuglice, a druga sadrži dve roze kuglice. Emica na slučajan način uzima dve kuglice odjednom iz prve kutije i prebacuje ih u drugu kutiju, a zatim iz druge kutije na slučajan način uzima dve kuglice odjednom. Izračunati očekivani broj izvučenih kuglica plave boje iz druge kutije.

3. Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0, 4)$ raspodelu, a uslovna slučajna promenljiva $Y|X = x$, $x \in (0, 4)$, ima uniformnu $\mathcal{U}(0, x + 2)$ raspodelu. Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = X + Y$.

4. Emica igra igru na sreću "Grebalica". Svaka srećka ili ima dobitak od 5 \$, dobitak od 10 \$ ili nema dobitak ("dobitak" od 0 \$). Poznato je da polovina srećki ima jedan od dva moguća dobitka. Ako srećka ima dobitak, onda je jednako verovatno da to bude 10 \$ ili 5 \$. Koliko najmanje srećki bi Emica trebalo da kupi da bi sa verovatnoćom 0.95 ukupno ogrebala dobitak od bar 1000 \$?

5. Obeležje X ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\theta}{3} & 1-\frac{\theta}{3} \end{pmatrix}$. Na osnovu uzorka obima n, metodom maksimalne verodostojnosti oceniti nepoznati parametar θ. Ispitati centriranost i postojanost dobijene ocene.

6. U tržnom centru postoje troje pokretnih stepenica. Verovatnoća da se u toku radnog vremena bilo koje pokretne stepenice pokvare je $\frac{1}{4}$ i u tom slučaju se tokom noći popravljaju i kreću ponovo sa radom sledećeg dana. Pokretne stepenice se kvare nezavisno od drugih pokratnih stepenica. Skup stanja sistema određen je brojem pokretnih stepenica koje rade bez kvara tokom celog radnog vremena.
   (a) Napraviti matricu prelaza za jedan korak.
   (b) Izračunati verovatnoću da će na kraju drugog dana sve pokretne stepenice raditi ako su na kraju prvog dana sve pokretne stepenice bile pokvarene.
   (c) Da li dati lanac Markova ima finalne verovatnoće? Obrazložiti odgovor! Ako ima, odrediti ih.
   (d) Da li je dati lanac Markova stacionaran? Odgovor obrazložiti!