

Prezime, ime, br. indeksa: LJUBO

30.01.2022.

Studijski program E1 E2 PR SW IT IN (zaokruži)

KOLOKVIJUM 1

Studenti koji kod pitanja do zvezdica naprave više od pet grešaka nisu položili ispit! U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti broj ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- 5x1 • Neka su funkcije $f, g : (-1, 0) \rightarrow (-1, 0)$ definisane sa $f(x) = -\sqrt{x+1}$ i $g(x) = x^2 - 1$. Tada je
 $f^{-1}(x) = x^2 - 1 = g(x)$, $(f \circ g)(x) = -\sqrt{x^2 - 1 + 1} = -\sqrt{x^2} = -x$, $(f \circ g)^{-1}(x) = x = -\sqrt{x^2} = -x$, $g^{-1}(x) = -\sqrt{x+1} = f(x)$, $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = x$
- 75310 • U Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ važi: 1) $x + y = x'y'$ 2) $xy = (x' + y)'$ 3) $xy = 1 \Rightarrow x + y = 1$
 4) $x + y = 1 \Leftrightarrow xy = 1$ 5) $x = y \Rightarrow x' = y'$ 6) $x' = y' \Rightarrow x = y$ 7) $f(x) = x' \Rightarrow f : B \rightarrow B$
- 7530 • Za funkciju $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ grupe $((0, \infty), \cdot)$ u grupu $(\mathbb{R}, +)$, definisanu sa $f(x) = -\log_3 x$ važi da je:
 1) homomorfizam 2) izomorfizam 3) f^{-1} homomorfizam 4) f^{-1} funkcija 5) f^{-1} izomorfizam
- 76420 • Zaokružiti broj (ili brojeve) ispred tvrđenja koja su tačna u svakom prstenu $(R, +, \cdot)$:
 1) $(b + c)a = ca + ba$ 2) $(b + c)a = ca + ab$ 3) $(R, +)$ je grupa 4) (R, \cdot) je asocijativni grupoid 5) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$
 6) operacija \cdot je distributivna prema operaciji $+$ 7) $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ 8) $a \cdot 0 = 0$ 9) $a \cdot (-a) = -a^2$
- 2+2 • Pri deljenju polinoma $x^4 - 4x^2 - 5$ sa $x^2 + 1$ nad \mathbb{R} , količnik je $x^2 - 5$, a ostatak je 0
- 3 • NZD(P,Q) za polinome $P = (t - 3)^4(t + 7)^2(t - 1)^5(t + 13)^3$ i $Q = (t - 3)^2(t - 15)(t - 1)^7(t + 13)^5$ je polinom
 1) $(t - 3)^4(t - 1)^7(t + 13)^5$ 2) $(t - 3)(t - 1)(t + 13)$ 3) $(t - 3)^4(t + 7)^2(t - 1)^7(t + 13)^5(t - 15)$
 4) $(t - 3)(t + 7)(t - 1)(t + 13)(t - 15)$ 5) $(t - 3)^2(t - 1)^5(t + 13)^3$
- 3 • Ako je $z \in \mathbb{C}$, upiši nedostajući element u skupu A , ako je $z^4 = -7 - 24i \Leftrightarrow z \in \{-1 - 2i, 2 - i, 1 + 2i, -2 + i\} = A$
- 5x1 • Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} d & a & b & c \\ c & b & d & a \end{pmatrix}$. Tada je $f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$,
 $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$, $(f \circ g)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$, $g^{-1} \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$
- 9x1 • Izračunati: 1) $\arg(\pi) = 0$ 2) $\arg(5e^{4i}) = 4$ 3) $\arg(-6\pi) = \pi$ 4) $\arg(9\pi) = 0$ 5) $\arg(2i) = \pi/2$
 6) $\arg(-1 - i) = -3\pi/4$ 7) $\arg(8e^{2i}) = 2$ 8) $\arg(-1 - i\sqrt{3}) = -2\pi/3$ 9) $\arg(e^{i\pi} + 1) = \pi$
- 6420 • Zaokružiti brojeve ispred sirektivnih funkcija: 1) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$ 2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = x^4$
 3) $f : (-\infty, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ 4) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \ln(x + 1)$ 5) $f : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = e^{x^2}$
- 8x1 • Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti broj elemenata sledećih skupova funkcija ako $f \nearrow$ označava rastuću funkciju f i $f \searrow$ označava neopadajuću funkciju f :
 $|\{f|f : A \rightarrow B\}| = 8$, $|\{f|f : A \xrightarrow{1-1} B\}| = 0$, $|\{f|f : A \rightarrow B \wedge f \nearrow\}| = 0$, $|\{f|f : B \xrightarrow{na} B\}| = 2$,
 $|\{f|f : B \rightarrow A\}| = 9$, $|\{f|f : A \rightarrow A \wedge f \nearrow\}| = 1$, $|\{f|f : B \rightarrow A \wedge f \searrow\}| = 6$, $|\{f|f : A \xrightarrow{na} B\}| = 6$
- 7530 • Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(1 + 3i) = 0$, tada je: 1) $x - 1 + 2i | f(x)$ 2) $x - 1 - 3i | f(x)$ 3) $x - \sqrt{10} e^{i \arctg 3} | f(x)$
 4) $x^2 - 2x + 10 | f(x)$ 5) $x^2 - 2x - 8 | f(x)$ 6) $x - \sqrt{5} e^{-i \arctg 2} | f(x)$ 7) $x^2 - x + 4 | f(x)$
- 75310 • Za svako $z \in \mathbb{C}$ je:
 1) $\arg z \geq 0 \Leftrightarrow I_m(z) \geq 0$ 2) $\arg z \geq 0 \Leftrightarrow (R_e(z) \geq 0 \wedge z \neq 0)$
 3) $\arg z \geq 0 \Leftrightarrow (I_m(z) \geq 0 \wedge z \neq 0)$ 4) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow R_e(z) \geq 0$ 5) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_e(z) \geq 0$
 6) $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow (I_m(z) \in \mathbb{R} \wedge z \neq 0)$ 7) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow (I_m(z) \in \mathbb{R} \wedge z \neq 0)$
- 3 • Funkcija $f : (-\pi, 0) \rightarrow (-1, 1]$ definisana sa $f(x) = \cos x$ je:
 1) sirjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije sirjektivna 3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna
- 3 • Funkcija $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \rightarrow (-1, 1]$ definisana sa $f(x) = \sin x$ je:
 1) sirjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije sirjektivna 3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna
- 3 • Funkcija $f : (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}) \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $f(x) = \tg x$ je:
 1) sirjektivna i nije injektivna 2) injektivna i nije sirjektivna 3) nije injektivna i nije sirjektivna 4) bijektivna
- 3x1 • Ako je $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$, tada je $f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $f \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $f \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$
- 4 • Neka je $\{-2, 1, -1\}$ skup svih korena polinoma $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ nad poljem realnih brojeva. Tada skup svih mogućnosti za a je $a \in \{2\}$
- 3+3 • Neka su $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2$ i $z_3 = 1$. Izraziti u zavisnosti od z_1 , z_2 i z_3 ugao $\angle z_2 z_3 z_1 = \arg \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \arg \frac{1 - 1}{2 - 1} = \arg 0$ i zatim ga efektivno izračunati $\angle z_2 z_3 z_1 = \frac{\pi}{2}$ Da li je ovaj ugao pozitivno orijentisan? DA NE

Prezime, ime, br. indeksa: LJUBO

30.01.2022. Studijski

program E1 E2 PR SW IT IN (zaokruži)

KOLOKVIJUM 2

Studenti koji kod pitanja do zvezdica naprave više od pet grešaka nisu položili ispit! U svakom zadatku dato je više odgovora, a treba zaokružiti tačne odgovore tj. slova ili brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,...,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora.

- Vektor normale ravni $\alpha: z = x + y - 1$ je: 1) (1,0,1) 2) (1,0,-1) 3) (0,1,0) 4) (-1,-1,1) 5) (1,1,-1)
Koordinate jedne njene tačke su: 6) (0,0,0) 7) (1,0,0) 8) (0,1,0) 9) (0,0,1) 10) (1,1,1)

- Sistem jednačina $ax + ay = a \wedge ax - ay = -a$ je određen za: 1) $a \neq 1$ 2) $a \neq -1$ 3) $a \neq 1 \wedge a \neq -1$ 4) $a \neq 0$
neodređen za: 5) $a = 1$ 6) $a = 0$ 7) $a = -1$ protivrečan za: 8) $a = 1$ 9) $a = 0$ 10) $a = -1$ 11) $a = -1 \wedge a = 1$

- Izračunati vektore položaja $r_{T'}$ i $r_{T''}$ projekcija tačke $T(-1,1,-1)$ na pravu
 $a: \vec{r} = (-1,0,-2) + t(1,-1,1), t \in \mathbb{R}$ i ravan $\alpha: (1,-1,0) \cdot \vec{r} = (1,-1,0) \cdot (1,0,0)$.

$$\vec{r}_{T'} = (-1, 0, -2) \quad \vec{r}_{T''} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

- Izračunati α i β ako je $\alpha(1,-3,2) + \beta(3,7,-3) = (0,0,0): (\alpha, \beta) \in \{ (0,0) \}$

- Izračunati α i β ako je $\alpha(1,-3,2) + \beta(2,-6,4) = (0,0,0): (\alpha, \beta) \in \{ (-2\beta, \beta) | \beta \in \mathbb{R} \}$

- Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ uređena trojka nekoplanarnih slobodnih vektora. Tada: 1) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno nezavisna 2) trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ je uvek linearno zavisna 3) postoji takav vektor \vec{d} da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna 4) postoji takav vektor \vec{d} da je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna 5) za svaki vektor \vec{d} je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ nezavisna 6) za svaki vektor \vec{d} je četvorka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ zavisna 7) svaki vektor \vec{d} je linearna kombinacija uređene trojke vektora $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

- Format (m,n) , matrice linearne transformacije 1) $h(x) = 5x$ je (0,1), (1,0), (1,1) 2) $f(x,y) = x + 2y$ je (2,2), (2,1), (1,2); 3) $g(x,y) = (x, x-y, x+y)$ je (2,3), (3,2), (2,2); 4) $s(x,y) = x$ je (2,1), (1,2), (1,1)

- Ispod svake matrice zaokružiti broj koji predstavlja njen rang.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- Ako je $\vec{a} = (-2, 2, 1)$ i $\vec{b} = (1, -4, 8)$, tada je: 1) $|\vec{a}| = 3$ 2) $|\vec{b}| = 9$ 3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ 4) $\vec{a} \times \vec{b} = (20, 17, 6)$ 5) $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{\sqrt{29}}$

- Ako je: $a = ((0,0,1), (0,1,0), (1,0,0))$ $b = ((1,0,0), (0,-1,0))$ $c = ((0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,2,3))$
 $d = ((1,1,1), (2,2,2), (3,3,3))$, tada su nezavisne u \mathbb{R}^3 : 1) a 2) b 3) c 4) d

- Ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tada je: 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ 2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ 3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

- Neka je $ABCD$ paralelogram, a tačka T težište trougla BCD (BD je dijagonala paralelograma). Izraziti vektor \vec{DT} kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \vec{AB}$ i $\vec{b} = \vec{BC}$. $\vec{DT} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

- Neka je u sedmodimenzionalnom vektorskom prostoru V , k -torka vektora (a_1, \dots, a_k) generatorna. Tada je uvek: 1) $k < 7$ 2) $k \leq 7$ 3) $k = 7$ 4) $k > 7$ 5) $k \geq 7$ 6) ništa od prethodnog

- Ako su nenula vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ kolinearni tada je: 1) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

- 3) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 1$ 4) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \leq 2$ 5) $\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = 2$ 6) \vec{a} i \vec{b} su zavisni

- 7) $(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \vec{a} \neq \lambda \vec{b}$ 8) $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \vec{b} \neq \lambda \vec{a}$ 9) $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\vec{a} \neq \lambda \vec{b} \wedge \lambda \vec{a} \neq \vec{b})$ 10) $\vec{a} \parallel \vec{b}$

- 11) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ 12) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0$

- Koji od vektora su karakteristični vektori za matricu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$? 1) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

- Ako je matrica A' dobijena od matrice $A = [a_{ij}]_{nn}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ elementarnim transformacijama, tada je:

- 1) $|\det(A)| = \lambda |\det(A')|$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$ 2) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$ 3) $A \cdot A' = I$ 4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A' \neq 0$

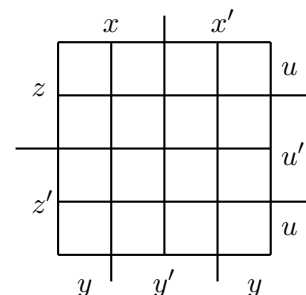
- Koje od tvrdjenja je tačno za bilo koje kvadratne matrice A, B, C reda 2 i svaki skalar λ :

- 1) $\det(AB) = \det(A) + \det(B)$ 2) $(B+C)A = BA + CA$ 3) $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$ 4) $\det(AB) = \det(B) \det(A)$
5) $(AB)^2 = A^2 B^2$ 6) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A) \text{rang}(B)$ 7) $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$ 8) $A(BC) = (AB)C$

1. Neka je $z_1 = a + 1 + i(a - 1)$, $z_2 = 2a - ia$ i $w = \frac{z_1}{z_2}$. Odrediti $a \in \mathbb{R}$ tako da je
 (a) $I_m(w) = 0$, (b) $R_e(w) = 0$, (c) $|w| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
2. Za uređeni par $([0, \infty), *)$, gde je binarna operacija $*$ skupa $[0, \infty)$ definisana sa $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$, ispitati zatvorenost operacije, asocijativnost, komutativnost, egzistenciju neutralnog elementa i egzistenciju inverznih elemenata.

3. Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0

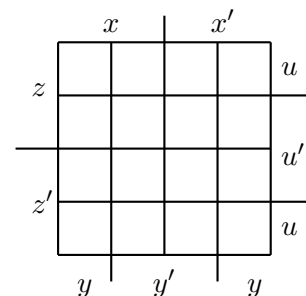


4. Neka je $A \neq B$ i $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$. U zavisnosti od vektora \vec{n} i vektora položaja \vec{r}_A i \vec{r}_B susednih temena A i B kočke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, izraziti vektore položaja temena kočke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kod koje je ravan dijagonalnog preseka $ABC_1 D_1$ normalna na vektor \vec{n} .
5. Operacije $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ su definisane na sledeći način: za sve $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$ je:
 $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $\lambda \odot (a, b) = (\lambda a, b)$.
 Na uređenoj četvorci $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$ ispitati sve aksiome vektorskog prostora.
6. Za linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je poznato da je $f(1, 2) = (-1, 3)$ i $f(1, 1) = (2, -6)$.
 (a) Izračunati $f(x, y)$ i matricu M linearne transformacije f . (b) Odrediti rang linearne transformacije f .
 (c) Ispitati da li postoji inverzna linearna transformacija f^{-1} . (d) Napisati jednačinu skupa tačaka $f(\mathbb{R}^2) = \{f(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ i dati geometrijsku interpretaciju toga skupa.

1. Neka je $z_1 = a + 1 + i(a - 1)$, $z_2 = 2a - ia$ i $w = \frac{z_1}{z_2}$. Odrediti $a \in \mathbb{R}$ tako da je
 (a) $I_m(w) = 0$, (b) $R_e(w) = 0$, (c) $|w| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
2. Za uređeni par $([0, \infty), *)$, gde je binarna operacija $*$ skupa $[0, \infty)$ definisana sa $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$, ispitati zatvorenost operacije, asocijativnost, komutativnost, egzistenciju neutralnog elementa i egzistenciju inverznih elemenata.

3. Napisati $SDNF$, sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0



4. Neka je $A \neq B$ i $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$. U zavisnosti od vektora \vec{n} i vektora položaja \vec{r}_A i \vec{r}_B susednih temena A i B kočke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, izraziti vektore položaja temena kočke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kod koje je ravan dijagonalnog preseka $ABC_1 D_1$ normalna na vektor \vec{n} .
5. Operacije $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ su definisane na sledeći način: za sve $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$ je:
 $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $\lambda \odot (a, b) = (\lambda a, b)$.
 Na uređenoj četvorci $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$ ispitati sve aksiome vektorskog prostora.
6. Za linearnu transformaciju $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je poznato da je $f(1, 2) = (-1, 3)$ i $f(1, 1) = (2, -6)$.
 (a) Izračunati $f(x, y)$ i matricu M linearne transformacije f . (b) Odrediti rang linearne transformacije f .
 (c) Ispitati da li postoji inverzna linearna transformacija f^{-1} . (d) Napisati jednačinu skupa tačaka $f(\mathbb{R}^2) = \{f(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ i dati geometrijsku interpretaciju toga skupa.

REŠENJA

1. Kako je

$$\begin{aligned} w = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+1+i(a-1)}{2a-ia} = \frac{a+1+i(a-1)}{2a-ia} \cdot \frac{2a+ia}{2a+ia} \\ &= \frac{2a^2+2a-a^2+a+i(2a^2-2a+a^2+a)}{4a^2+a^2} = \frac{a^2+3a+i(3a^2-a)}{5a^2} \\ &= \frac{a^2+3a}{5a^2} + i \frac{3a^2-a}{5a^2}, \end{aligned}$$

dobijamo sledeća rešenja.

(a) $I_m(w) = 0$ ako je

$$\begin{aligned} \frac{3a^2-a}{5a^2} &= 0 \Leftrightarrow (3a^2-a=0 \wedge 5a^2 \neq 0) \\ \Leftrightarrow (a(3a-1)=0 \wedge a \neq 0) &\Leftrightarrow a = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(b) $R_e(w) = 0$ ako je

$$\begin{aligned} \frac{a^2+3a}{5a^2} &= 0 \Leftrightarrow (a^2+3a=0 \wedge 5a^2 \neq 0) \\ \Leftrightarrow (a(a+3)=0 \wedge a \neq 0) &\Leftrightarrow a = -3. \end{aligned}$$

(c) $|w| = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{a^2+3a}{5a^2}\right)^2 + \left(\frac{3a^2-a}{5a^2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

Za $a = 0$ broj w nije definisan, a za $a \neq 0$ je

$$\begin{aligned} |w| &= \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{a+3}{5a}\right)^2 + \left(\frac{3a-1}{5a}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(a+3)^2 + (3a-1)^2}{25a^2}} &= \sqrt{\frac{10a^2+10}{25a^2}} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{a^2+1}}{5|a|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{5}|a|} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} = \sqrt{2}|a| \quad /^2 \\ \Leftrightarrow a^2+1 &= 2a^2 \Leftrightarrow a^2=1 \Leftrightarrow a \in \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

2. (a) Zatvorenost operacije $*$ je očigledna jer za $x, y \in [0, \infty)$ je $\sqrt{x^2+y^2} \in [0, \infty).$

(b) Operacija $*$ jeste asocijativna jer za

$$\begin{aligned} L &= (x * y) * z = \sqrt{x^2+y^2} * z = \sqrt{(\sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ D &= x * (y * z) = x * \sqrt{y^2+z^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{y^2+z^2})^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \end{aligned}$$

imamo da je $L = D$.

(c) Komutativnost operacije $*$ je očigledna jer je

$$x * y = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y^2+x^2} = y * x.$$

(d) Neutralni element je $0 \in [0, \infty)$ jer za sve $x \in [0, \infty)$ važi

$$0 * x = x * 0 = \sqrt{x^2+0^2} = |x| = x.$$

(e) Inverzni element za 0 je naravno 0, a za sve ostale $x > 0$ ne postoji $x' \geq 0$ takvo da je $x * x' = \sqrt{x^2+(x')^2} = 0$ (jer je $x^2 > 0$).

3. Proste implikante:

$$yu', y'zu, x'y'z, x'zu'.$$

$$MDNF_1 = yu' + y'zu + x'y'z,$$

$$MDNF_2 = yu' + y'zu + x'zu'.$$

	x		x'	
z		*	*	u
	*		*	*
	*			*
z'				u
	y		y'	y

4. Duži AD_1 i BC_1 su dijagonale strana kocke tj. kvadrata ADD_1A_1 i BCC_1B_1 , te je $|AD_1| = |BC_1| = \sqrt{2}|\overrightarrow{AB}|$. Vektori $|AD_1|$ i $|BC_1|$ su normalni i na \overrightarrow{AB} i na \vec{n} , dakle imaju pravac vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \times \vec{n}$. Stoga je

$$\vec{r}_{D_1} = \vec{r}_A \pm \sqrt{2}|\overrightarrow{AB}| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{r}_{C_1} = \vec{r}_B \pm \sqrt{2}|\overrightarrow{AB}| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

(zadatak ima dva rešenja). Neka je S sredina duži BC_1 , dakle $\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_{C_1})$.

Vektori SC i SB_1 su istog pravca kao vektor \vec{n} i jednake dužine kao vektori \overrightarrow{SB} i $\overrightarrow{SC_1} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC_1}|$, te je

$$\vec{r}_C = \vec{r}_S \pm \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC_1}| \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \quad \vec{r}_{B_1} = \vec{r}_S \mp \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC_1}| \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

(rešenja dobijena sa \pm i \mp su jednaka jer se razlikuju samo u oznakama temena kocke).

Na kraju iz $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BB_1}$ dobijamo $\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_A + \vec{r}_{B_1} - \vec{r}_B$, $\vec{r}_D = \vec{r}_{D_1} - \vec{r}_{B_1} + \vec{r}_B$.

5. (a) Ispitujemo da li je $(\mathbb{R}^2, +)$ komutativna grupa. Operacija $+$ je zatvorena jer je $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d) \in \mathbb{R}^2$ za sve $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Asocijativna je i komutativna jer je
- $$(a, b) + ((c, d) + (e, f)) = (a, b) + (c+e, d+f) = (a+c+e, b+d+f)$$
- $$= (a+c, b+d) + (e, f) = ((a, b) + (c, d)) + (e, f),$$
- $$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d) = (c+a, d+b) = (c, d) + (a, b).$$
- Neutralni element je $(0, 0)$ jer je $(a, b) + (0, 0) = (0, 0) + (a, b) = (a, b)$. Inverzni element za $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ je $(-a, -b) \in \mathbb{R}^2$ jer je $(a, b) + (-a, -b) = (-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$. Dakle, $(\mathbb{R}^2, +)$ je komutativna grupa.
- (b) Jeste $\lambda \odot ((a, b) + (c, d)) = \lambda \odot (a, b) + \lambda \odot (c, d)$ za svako $\lambda \in \mathbb{R}$ i sve $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ jer je
- $$\lambda \odot ((a, b) + (c, d)) = \lambda \odot (a+c, b+d) = (\lambda(a+c), \lambda(b+d))$$
- $$= (\lambda a + \lambda c, \lambda b + \lambda d) = (\lambda a, \lambda b) + (\lambda c, \lambda d) = \lambda \odot (a, b) + \lambda \odot (c, d).$$
- (c) Ispitujemo da li je $(\lambda + \theta) \odot (a, b) = \lambda \odot (a, b) + \theta \odot (a, b)$ za sve $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$ i svako $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nije, jer je npr. za $\lambda = \theta = a = b = 1$
- $$L = (\lambda + \theta) \odot (a, b) = ((1+1) \cdot 1, 1) = (2, 1),$$
- $$D = \lambda \odot (a, b) + \theta \odot (a, b) = (\lambda a, \lambda b) + (\theta a, \theta b) = (1, 1) + (1, 1) = (2, 2) \neq L.$$
- (d) Ispitujemo da li je $\lambda \odot (\theta \odot (a, b)) = (\lambda \theta) \odot (a, b)$ za sve $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$ i svako $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Jeste, jer je
- $$\lambda \odot (\theta \odot (a, b)) = \lambda \odot (\theta a, \theta b) = (\lambda \theta a, \lambda \theta b) = (\lambda \theta) \odot (a, b).$$
- (e) Očigledno je $1 \odot (a, b) = (1 \cdot a, b) = (a, b)$ za svako $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

6. (a) Lin. transf. f odgovara matrica $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, a iz uslova $f(1, 2) = (-1, 3)$ i $f(1, 1) = (2, -6)$ dobijamo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b \\ c+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a + 2b = -1 \\ c + 2d = 3 \end{array},$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a + b = 2 \\ c + d = -6 \end{array}.$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{rcl} a + 2b & = & -1 \\ c + 2d & = & 3 \\ a + b & = & 2 \\ c + d & = & -6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} a + 2b & = & -1 \\ a + b & = & 2 \\ c + 2d & = & 3 \\ c + d & = & -6 \end{array}$$

dobijamo $a = 5, b = -3, c = -15, d = 9$, dakle $M = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -15 & 9 \end{bmatrix}$, te je

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -15 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x - 3y \\ -15x + 9y \end{bmatrix}. \text{ Sledi da je } f(x, y) = (5x - 3y, -15x + 9y).$$

- (b) Ako prvu vrstu matrice M pomnoženu sa 3 dodamo drugoj, dobijamo da je $M \sim \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, odakle sledi da je $\text{rang}(M) = 1$.
- (c) Iz $\det M = 0$ sledi da ne postoji inverzna linearna transformacija f^{-1} .
- (d) $f(\mathbb{R}^2) = \{f(x, y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(5x - 3y, -15x + 9y) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(5x - 3y, -3(5x - 3y)) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
 $= \{(t, -3t) | t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, -3) | t \in \mathbb{R}\},$
 što je prava koja prolazi koordinatni početak i paralelna je sa vektorom $(1, -3)$, i njena jednačina je $f(\mathbb{R}^2) : \frac{x}{1} = \frac{y}{-3}.$