predmet: Matematička analiza 2

Sumiranje stepenih redova

1. Odrediti oblast konvergencije sledećih stepenih redova:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}(2x+1)^n$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2n+1}(x+1)^n$; c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)!}x^n$.

Rešenje:

a) Neka je $2x+1=t$. Poluprečnik konvergencije stepenog reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}t^n$ je

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{3}.$$

Rešavanjem $|2x+1| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < 2x+1 < \frac{1}{3}$ dobijamo da za $x \in \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ red konvergira. Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

– za $x = -\frac{2}{3}$ dobija se red $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ koji konvergira (alternativni harmonijski red);
– za $x = -\frac{1}{3}$ dobija se red $\sum \frac{1}{n}$ koji divergira (harmonijski red, $\alpha = 1$).

Stoga je oblast konvergencije datog reda interval $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

b) Neka je $x+1=t$. Poluprečnik konvergencije stepenog reda $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2n+1}t^n$ je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{2n+1}}{\frac{(n+1)!}{2n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{(n+1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n^2+3n+1} = 0.$$

Stoga je oblast konvergencije datog reda samo tačka $x_0 = -1$.

c) Poluprečnik konvergencije stepenog reda $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)!}x^n$ je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{(n+1)!}}{\frac{2n+2}{(n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n(n+2)}{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n+1} = \infty.$$

Stoga je oblast konvergencije datog reda ceo skup $\mathbb{R}$.

2. Odrediti oblast konvergencije i sumirati sledeće stepene redove:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(2x-3)^n$.

Rešenje:

a) Poluprečnik konvergencije datog stepenog reda je

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1.$$

Rešavanjem $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ dobijamo da za $x \in (-1,1)$ red konvergira.

Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

- za $x = -1$ dobija se red $\sum(-1)^n$ koji divergira ($\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \neq 0$);
- za $x = 1$ dobija se red $\sum 1$ koji divergira ($\lim\limits_{n\to\infty} 1 \neq 0$).

Stoga je oblast konvergencije interval $(-1, 1)$.

Suma datog stepenog reda za vrednosti x iz oblasti konvergencije je

(**I način**):

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1-1+x}{1-x} = \frac{x}{1-x};$$

(**II način**):

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

b) Poluprečnik konvergencije datog stepenog reda je

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

Rešavanjem $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ dobijamo da za $x \in (-1, 1)$ red konvergira.
Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

- za $x = -1$ dobija se red $\sum n(-1)^n$ koji divergira ($\lim\limits_{n\to\infty} n(-1)^n \neq 0$);
- za $x = 1$ dobija se red $\sum n$ koji divergira ($\lim\limits_{n\to\infty} n \neq 0$).

Stoga je oblast konvergencije interval $(-1, 1)$.

Suma datog stepenog reda za vrednosti x iz oblasti konvergencije je

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big)' = x\Big(\frac{x}{1-x}\Big)' = x\frac{1-x-x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Napomena: Unutar oblasti konvergencije stepenih redova se može izvršiti zamena procesa sumiranja i diferenciranja, kao i zamena procesa sumiranja i integracije.

c) Poluprečnik konvergencije datog stepenog reda je

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1.$$

Rešavanjem $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ dobijamo da za $x \in (-1, 1)$ red konvergira.
Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

- za $x = -1$ dobija se red $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ koji konvergira (alternativni harmonijski red);
- za $x = 1$ dobija se red $\sum \frac{1}{n}$ koji divergira (harmonijski red, $\alpha = 1$).

Stoga je oblast konvergencije interval $[-1, 1)$.

Suma datog stepenog reda za vrednosti x iz oblasti konvergencije je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln|1-t|\Big|_0^x = -\ln|1-x|.$$

d) Neka je $t = 2x - 3$. Poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 t^n$ je

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}} = 1.$$

Rešavanjem $|2x - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x - 3 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$ dobijamo da za $x \in (1, 2)$ red konvergira.

Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

– za $x = 1$ dobija se red $\sum n^2(-1)^n$ koji divergira ($\lim\limits_{n\to\infty} n^2(-1)^n \neq 0$);

– za $x = 2$ dobija se red $\sum n^2$ koji divergira ($\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \neq 0$).

Stoga je oblast konvergencije interval $(1, 2)$.

Koristeći rezultat zadatka pod b), dobijamo da je suma datog stepenog reda unutar oblasti konvergencije

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^n = t\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot nt^{n-1} = t\sum_{n=1}^{\infty} n(t^n)' = t\sum_{n=1}^{\infty}(nt^n)' = t\Big(\sum_{n=1}^{\infty} nt^n\Big)' = t\Big(\frac{t}{(1-t)^2}\Big)'$$
$$= t\frac{(1-t)^2 - t\cdot 2\cdot(1-t)\cdot(-1)}{(1-t)^4} = t\frac{(1-t)(1+t)}{(1-t)^4} = \frac{t^2+t}{(1-t)^3}.$$

Vraćanjem smene $t = 2x - 3$ dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(2x-3)^n = \frac{(2x-3)^2 + 2x - 3}{(1-2x+3)^3} = \frac{4x^2 - 10x + 6}{(4-2x)^3} = \frac{2x^2 - 5x + 3}{4(2-x)^3}.$$

3. Dat je stepeni red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{n}(x+2)^n$.

   a) Odrediti oblast konvergencije i sumirati dati red.

   b) Koristeći dobijeni rezultat, izračunati $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{2^n n}$.

Rešenje:

a) Neka je $t = x + 2$. Poluprečnik konvergencije stepenog reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{n} t^n$ je

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2-2}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n^2-2}}{\sqrt[n]{n}}} = 1.$$

Rešavanjem $|x+2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$ dobijamo da za $x \in (-3, -1)$ red konvergira. Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

– za $x = -3$ dobija se red $\sum \dfrac{n^2-2}{n}(-1)^n$ koji divergira ($\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2}{n}(-1)^n \neq 0$);

– za $x = -1$ dobija se red $\sum \dfrac{n^2-2}{n}$ koji divergira ($\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2}{n} \neq 0$).

Stoga je oblast konvergencije interval $(-3, -1)$.

Koristeći rezultate prethodnog zadatka pod b) i c), dobijamo da je suma datog stepenog reda unutar oblasti konvergencije

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{n} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} nt^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \frac{t}{(1-t)^2} + 2\ln|1-t|.$$

Vraćanjem smene $t = x + 2$ dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{n}(x+2)^n = \frac{x+2}{(x+1)^2} + 2\ln|x+1|.$$

b) Tražena suma se dobija za $t = \dfrac{1}{2}$ (tj. $x = -\dfrac{3}{2}$) i iznosi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{2^n n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + 2\ln\frac{1}{2} = 2 - 2\ln 2.$$

4. Odrediti oblast konvergencije i sumirati sledeće stepene redove:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+5n-1}{n-1}(x+1)^{2n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+5}{n^2+5n+6}\sin^n x$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+2)}\cdot\Big(\frac{x}{x-1}\Big)^n$.

Rešenje:

a) Neka je $t=(x+1)^2$. Poluprečnik konvergencije stepenog reda $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+5n-1}{n-1}t^n$ je

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^2+5n-1}{n-1}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2+5n-1}}{\sqrt[n]{n-1}}}=1.$$

Rešavanjem $|(x+1)^2|<1\Leftrightarrow (x+1)^2>-1\wedge (x+1)^2<1$ dobijamo da za $x\in(-2,0)$ red konvergira. Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

- za $x=-2$ dobija se red $\displaystyle\sum_{n=2}\frac{n^2+5n-1}{n-1}$ koji divergira ($\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n-1}{n-1}\neq 0$);
- za $x=0$ dobija se red $\displaystyle\sum_{n=2}\frac{n^2+5n-1}{n-1}$ koji divergira ($\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n-1}{n-1}\neq 0$).

Stoga je oblast konvergencije interval $(-2,0)$.

Suma datog reda unutar oblasti konvergencije je

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+5n-1}{n-1}t^n &= \sum_{n=2}^{\infty}\Big(n+6+\frac{5}{n-1}\Big)t^n=\sum_{n=2}^{\infty}nt^n+6\sum_{n=2}^{\infty}t^n+5\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n-1}\\
&= t\sum_{n=2}^{\infty}nt^{n-1}+6\sum_{n=2}^{\infty}t^n+5t\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n-1}\\
&= t\sum_{n=2}^{\infty}(t^n)'+6\frac{t^2}{1-t}+5t\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^t s^{n-2}ds\\
&= t\Big(\sum_{n=2}^{\infty}t^n\Big)'+\frac{6t^2}{1-t}+5t\int_0^t\sum_{n=2}^{\infty}s^{n-2}ds\\
&= t\Big(\frac{t^2}{1-t}\Big)'+\frac{6t^2}{1-t}+5t\int_0^t\frac{1}{1-s}ds\\
&= t\frac{2t(1-t)-t^2(-1)}{(1-t)^2}+\frac{6t^2}{1-t}-5t\ln|1-s|\Big|_0^t\\
&= \frac{-t^3+2t^2}{(1-t)^2}+\frac{6t^2}{1-t}-5t\ln|1-t|=\\
&= \frac{-7t^3+8t^2}{(1-t)^2}-5t\ln|1-t|.
\end{aligned}$$

Vraćanjem smene $t=(x+1)^2$ dobija se

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+5n-1}{n-1}(x+1)^{2n}=\frac{-7(x+1)^6+8(x+1)^4}{(x^2+2x)^2}-5(x+1)^2\ln|x^2+2x|.$$

b) Neka je $t=\sin x$. Poluprečnik konvergencije stepenog reda $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+5}{n^2+5n+6}t^n$ je

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2n+5}{n^2+5n+6}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2n+5}}{\sqrt[n]{n^2+5n+6}}}=1.$$

Rešavanjem $|\sin x|<1$ dobijamo da za $x\in\mathbb{R}\backslash\Big\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Big\}$ red konvergira.

Proveravamo konvergenciju u tačkama za koje je $t = \pm 1$:

– za $t = 1$ $\Big($tj. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\Big)$ dobija se red $\sum\limits_{n=0} \frac{2n+5}{n^2+5n+6}$ koji divergira $\Big(\frac{2n+5}{n^2+5n+6} \sim \frac{2}{n}$, a red $2\sum \frac{1}{n}$ divergira, harmonijski red pomnožen sa 2$\Big)$;

– za $t = -1$ $\Big($tj. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\Big)$ dobija se red $\sum\limits_{n=0} \frac{2n+5}{n^2+5n+6}(-1)^n$ koji konvergira na osnovu Lajbnicovog kriterijuma:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6} = 0,$

2) $\frac{2(n+1)+5}{(n+1)^2+5(n+1)+6} \le \frac{2n+5}{n^2+5n+6} \Leftrightarrow (2n+7)(n^2+5n+6) \le (2n+5)(n^2+7n+12)$

$\Leftrightarrow 2n^3 + 17n^2 + 47n + 42 \le 2n^3 + 19n^2 + 59n + 60 \Leftrightarrow 0 \le 2n^2 + 12n + 18$ ✓, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Stoga je oblast konvergencije skup $\mathbb{R}\backslash\Big\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\Big\}$.

Suma datog reda unutar oblasti konvergencije za $t \neq 0$ je

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\Big) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+3} = \frac{1}{t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+2}}{n+2} + \frac{1}{t^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+3}}{n+3} \\
&= \frac{1}{t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t s^{n+1} ds + \frac{1}{t^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t s^{n+2} ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} ds + \frac{1}{t^3} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+2} ds \\
&= \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{s}{1-s} ds + \frac{1}{t^3} \int_0^t \frac{s^2}{1-s} ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{(s-1)+1}{1-s} ds + \frac{1}{t^3} \int_0^t \frac{(s^2-1)+1}{1-s} ds \\
&= \frac{1}{t^2} \int_0^t \Big(-1 + \frac{1}{1-s}\Big) ds + \frac{1}{t^3} \int_0^t \Big(-s - 1 + \frac{1}{1-s}\Big) ds \\
&= \frac{1}{t^2} \Big(-s - \ln|1-s|\Big)\Big|_0^t + \frac{1}{t^3} \Big(-\frac{s^2}{2} - s - \ln|1-s|\Big)\Big|_0^t \\
&= \frac{1}{t^2}(-t - \ln|1-t|) + \frac{1}{t^3}\Big(-\frac{t^2}{2} - t - \ln|1-t|\Big) \\
&= -\frac{3}{2t} - \frac{1}{t^2} - \Big(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}\Big) \ln|1-t|.
\end{aligned}$$

Vraćanjem smene $t = \sin x$ dobija se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6} \sin^n x = -\frac{3}{2\sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} - \Big(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^3 x}\Big) \ln|1 - \sin x|.$$

Za $t = 0$ (tj. $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$) dobija se suma $s = \frac{5}{6}$.

c) Neka je $t = \frac{-x}{x-1} = \frac{x}{1-x}$. Poluprečnik konvergencije stepenog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!(n+2)}$ je

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!(n+2)}}{\frac{1}{(n+1)!(n+3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+3}{n+2} = \infty.$$

Stoga je oblast konvergencije skup $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Suma datog reda unutar oblasti konvergencije za $t \neq 0$ je

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!(n+2)} &= \frac{1}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{t^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t s^{n+1} ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} s^{n+1} ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n!} ds \\
&= \frac{1}{t^2} \int_0^t s(e^s - 1) ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t s e^s ds - \frac{1}{t^2} \int_0^t s ds \\
&= \frac{1}{t^2}\Big((s-1)e^s\Big|_0^t - \frac{s^2}{2}\Big|_0^t\Big) = \frac{1}{t^2}\Big((t-1)e^t + 1 - \frac{t^2}{2}\Big) = \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\Big)e^t + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vraćanjem smene $t = \dfrac{x}{1-x}$ dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)} \cdot \left(\frac{x}{x-1}\right)^n = \frac{-2x^2+3x-1}{x^2} e^{\frac{x}{1-x}} + \frac{(1-x)^2}{x^2} - \frac{1}{2}.$$

Za $t = 0$ (tj. $x = 0$) dobija se suma $s = 0$.