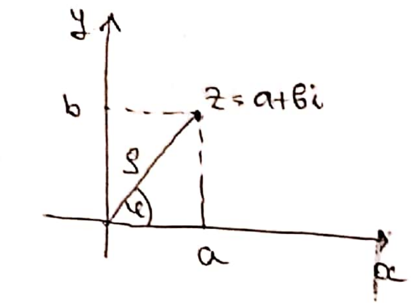
Kompleksna analiza

$\mathbb{C}$ - skup kompleksnih brojeva

Kompleksna ravan



Algebarski oblik $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

$Re(z)$ — a, $Im(z)$ — b

modul $|z| = \rho = \sqrt{a^2+b^2}$

$i^2 = -1$

Trigonometrijski oblik

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\varphi = \arg(z)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$\arg(z)$ — glavna vrednost argumenta

$Arg(z) = \arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ - skup svih argumenata

Eksponencijalni oblik

$z = \rho e^{\varphi i}$

$e^{xi} = \cos x + i\sin x$

Jednakost kompleksnih brojeva

$z_1 = \rho_1 e^{\varphi_1 i}$, $z_2 = \rho_2 e^{\varphi_2 i}$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Stepenovanje i korenovanje

$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n e^{n\varphi i}$ ← Moavrova formula

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$\sqrt[n]{z}$ — nije jednoznačno određen (zavisi od n)

1. **U kompleksnoj ravni predstaviti sledeće skupove tačaka:**

   a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r,\ z_0 \in \mathbb{C}, r > 0\}$,

   b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > \dfrac{1}{2}\}$,

   c) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 2\}$,

   d) $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$,

   e) $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \arg z < \beta,\ \alpha, \beta \in [0, 2\pi]\}$,

   f) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z - z_0) > 1,\ z_0 \in \mathbb{C}\}$,

   g) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z\}$,

   h) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 1\}$,

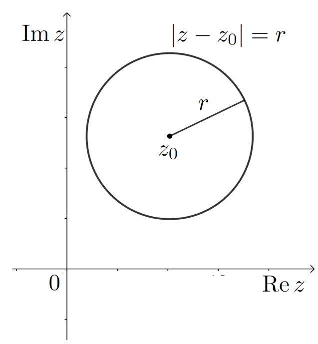
   i) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z < 2,\ \mathrm{Im}\, z > -2\}$.

Rešenje:

a) Neka je $z = x + iy$ i $z_0 = x_0 + iy_0$. Tada je

$$\begin{aligned} |z - z_0| = r &\Leftrightarrow |x - x_0 + i(y - y_0)| = r \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \end{aligned}$$

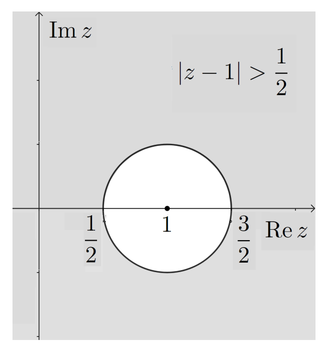
pa je traženi skup tačaka kružnica sa centrom u tački (x_o, y_o) i poluprečnikom r. Kako je u kompleksnoj ravni tačka (x_o, y_o) zapravo tačka z_0, sledi da je traženi skup tačaka kružnica sa centrom u tački z_0 i poluprečnikom r, što označavamo sa $K(z_0, r)$.



b) Slično kao u zadatku pod a) dobija se

$$|z - 1| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x - 1 + iy| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 > \frac{1}{2},$$

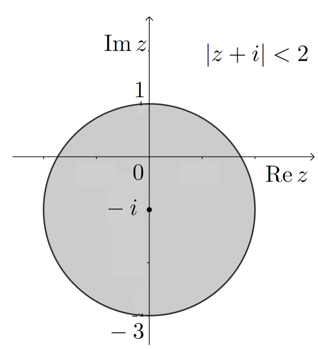
pa je traženi skup tačaka spoljašnjost kružnice sa centrom u tački $z_0 = 1$ i poluprečnikom $r = \dfrac{1}{2}$.



c)

$$|z + i| < 2 \Leftrightarrow |x + i(y + 1)| < 2 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 < 2,$$

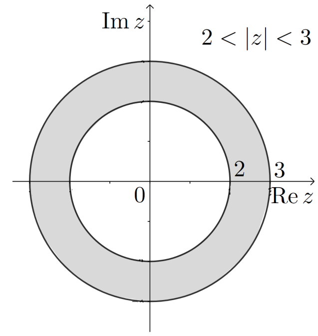
pa je traženi skup tačaka unutrašnjost kružnice sa centrom u tački $z_0 = -i$ i poluprečnikom $r = 2$.



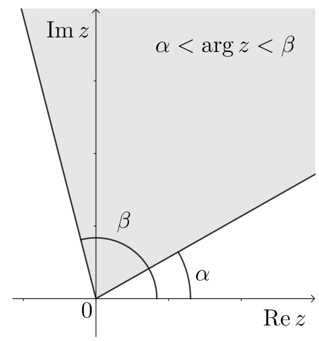
d)

$$2 < |z| < 3 \Leftrightarrow 2 < |z| \wedge |z| < 3.$$

$2 < |z|$ je spoljašnjost kružnice $K(0,2)$ a $|z| < 3$ je unutrašnjost kružnice $K(0,3)$, pa je traženi skup tačaka unutrašnjost kružnog prstena sa centrom u tački $z_0 = 0$ i poluprečnicima $r_1 = 2$ i $r_2 = 3$.



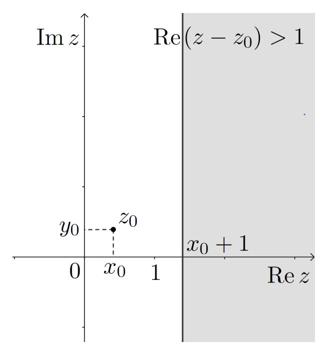
e) Traženi skup tačaka čine sve tačke kompleksne ravni koje se nalaze između poluprave sa početkom u koordinatnom početku, koja zaklapa ugao α sa pozitivnim delom realne ose i poluprave sa početkom u koordinatnom početku, koja zaklapa ugao β sa pozitivnim delom realne ose.



f) Neka je $z = x + iy$ i $z_0 = x_0 + iy_0$. Tada je

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z - z_0) > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(x - x_0 + i(y - y_0)) > 1\\ &\Leftrightarrow \quad x - x_0 > 1\\ &\Leftrightarrow \quad x > x_0 + 1,\end{aligned}$$

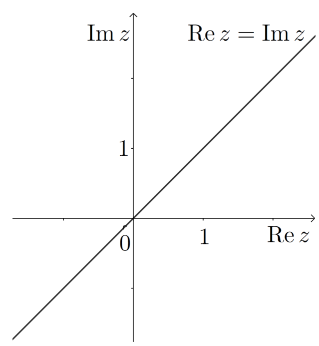
pa je traženi skup tačaka poluravan kojoj pripadaju kompleksni brojevi sa realnim delom većim od $x_0 + 1$.



g) Neka je $z = x + iy$. Tada je

$$\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z \Leftrightarrow x = y,$$

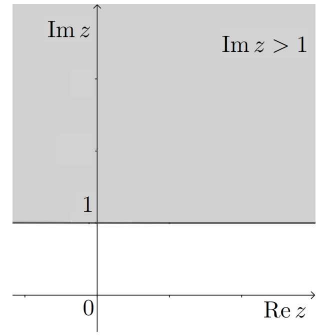
pa je traženi skup tačaka prava koja sadrži koordinatni početak i zaklapa ugao $\dfrac{\pi}{4}$ sa pozitivnim delom realne ose.



h) Neka je $z = x + iy$. Tada je

$$\operatorname{Im} z > 1 \Leftrightarrow y > 1,$$

pa je traženi skup tačaka poluravan kojoj pripadaju kompleksni brojevi sa imaginarnim delom većim od 1.



i) Neka je $z = x + iy$. Tada je

$$\operatorname{Re} z < 2 \wedge \operatorname{Im} z > -2 \Leftrightarrow x < 2 \wedge y > -2,$$

pa traženi skup tačaka čine sve tačke kompleksne ravni kod kojih je realni deo manji od 2 a imaginarni deo veći od -2.