ISKAZNA LOGIKA

Iskazna logika - uvod

Logički sistem ima tri aspekta:

I **Sintaksa** *(jezik)*

II **Semantika** *(zna cenje jezika)*

III **Deduktivni sistem** *(formalna teorija)*

Centralni problemi u iskaznoj logici su ispitivanje da li je data iskazna formula:

- **valjana** (tautologija)
- **zadovoljiva** (SAT problem)

Sintaksa iskazne logike

Sintaksni aspekt iskazne logike govori o njenom jeziku, a o formulama isključivo kao o nizovima simbola i ne uzima u obzir bilo kakvo njihovo (moguće) značenje.

Sintaksa iskazne logike

Sintaksni aspekt iskazne logike govori o njenom jeziku, a o formulama isključivo kao o nizovima simbola i ne uzima u obzir bilo kakvo njihovo (moguće) značenje.

Alfabet *(signaturu)* Σ *čine sledeća četiri skupa:*

Sintaksa iskazne logike

Sintaksni aspekt iskazne logike govori o njenom jeziku, a o formulama isključivo kao o nizovima simbola i ne uzima u obzir bilo kakvo njihovo (moguće) značenje.

Alfabet *(signaturu)* Σ *čine sledeća četiri skupa:*

1. *prebrojivi skup iskaznih slova* $P = \{p, q, r, \dots, p_0, q_0, r_0, \dots\}$*;*

Sintaksa iskazne logike

Sintaksni aspekt iskazne logike govori o njenom jeziku, a o formulama isključivo kao o nizovima simbola i ne uzima u obzir bilo kakvo njihovo (moguće) značenje.

Alfabet *(signaturu)* Σ *čine sledeća četiri skupa:*

1. *prebrojivi skup iskaznih slova* $P = \{p, q, r, \ldots, p_0, q_0, r_0, \ldots\}$*;*
2. *skup logičkih veznika* $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

   $\neg$ *- negacija*
   $\wedge$ *- konjunkcija*
   $\vee$ *- disjunkcija*
   $\Rightarrow$ *- implikacija*
   $\Leftrightarrow$ *- ekvivalencija*

   pri čemu je $\neg$ *unarni veznik, a* $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ *su binarni veznici;*

Sintaksa iskazne logike

Sintaksni aspekt iskazne logike govori o njenom jeziku, a o formulama isključivo kao o nizovima simbola i ne uzima u obzir bilo kakvo njihovo (moguće) značenje.

Alfabet *(signaturu)* Σ *čine sledeća četiri skupa:*

1. *prebrojivi skup iskaznih slova* $P = \{p, q, r, \ldots, p_0, q_0, r_0, \ldots\}$*;*
2. *skup logičkih veznika* $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

   $\neg$ *- negacija*
   $\wedge$ *- konjunkcija*
   $\vee$ *- disjunkcija*
   $\Rightarrow$ *- implikacija*
   $\Leftrightarrow$ *- ekvivalencija*

   pri čemu je $\neg$ *unarni veznik, a* $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ *su binarni veznici;*
3. *skup logičkih konstanti* $\{\perp, \top\}$*;*

Sintaksa iskazne logike

Sintaksni aspekt iskazne logike govori o njenom jeziku, a o formulama isključivo kao o nizovima simbola i ne uzima u obzir bilo kakvo njihovo (moguće) značenje.

Alfabet *(signaturu)* Σ *čine sledeća četiri skupa:*

1. *prebrojivi skup iskaznih slova* $P = \{p, q, r, \ldots, p_0, q_0, r_0, \ldots\}$;
2. *skup logičkih veznika* $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

   $\neg$ - *negacija*
   $\wedge$ - *konjunkcija*
   $\vee$ - *disjunkcija*
   $\Rightarrow$ - *implikacija*
   $\Leftrightarrow$ - *ekvivalencija*

   pri čemu je $\neg$ *unarni veznik, a* $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ *su binarni veznici;*
3. *skup logičkih konstanti* $\{\bot, \top\}$;
4. *skup pomoćnih simbola* $\{(,)\}$.

Iskazne formule

Reč nad Σ - konačan niz simbola iz Σ
Jezik nad Σ - proizvoljan podskup skupa svih reči nad Σ

Iskazne formule

Reč nad Σ - konačan niz simbola iz Σ
Jezik nad Σ - proizvoljan podskup skupa svih reči nad Σ

Jezik iskazne logike $\mathcal{L}$ *(ili* **skup iskaznih formula***) je najmanji jezik nad* Σ *za koji važi*

Iskazne formule

Reč nad Σ - konačan niz simbola iz Σ
Jezik nad Σ - proizvoljan podskup skupa svih reči nad Σ

Jezik iskazne logike $\mathcal{L}$ *(ili* **skup iskaznih formula***) je najmanji jezik nad* Σ *za koji važi*

- *iskazna slova i logičke konstante su iskazne formule;*

Iskazne formule

Reč nad Σ - konačan niz simbola iz Σ
Jezik nad Σ - proizvoljan podskup skupa svih reči nad Σ

***Jezik iskazne logike** $\mathcal{L}$ (ili **skup iskaznih formula**) je najmanji jezik nad Σ za koji važi*

- *iskazna slova i logičke konstante su iskazne formule;*
- *ako su A i B iskazne formule, onda su i $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ iskazne formule.*

Iskazne formule

Reč nad Σ - konačan niz simbola iz Σ
Jezik nad Σ - proizvoljan podskup skupa svih reči nad Σ

Jezik iskazne logike $\mathcal{L}$ *(ili **skup iskaznih formula**) je najmanji jezik nad* Σ *za koji važi*

- *iskazna slova i logičke konstante su iskazne formule;*
- *ako su A i B iskazne formule, onda su i* $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ *iskazne formule.*

Primer

1. Reč $p\neg q(r \Rightarrow\Leftrightarrow p)\wedge)(\wedge qr$ nije iskazna formula.

Iskazne formule

Reč nad Σ - konačan niz simbola iz Σ
Jezik nad Σ - proizvoljan podskup skupa svih reči nad Σ

Jezik iskazne logike $\mathcal{L}$ *(ili* **skup iskaznih formula***) je najmanji jezik nad* Σ *za koji važi*

- *iskazna slova i logičke konstante su iskazne formule;*
- *ako su A i B iskazne formule, onda su i* $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ *iskazne formule.*

Primer

1. Reč $p\neg q(r \Rightarrow\Leftrightarrow p)\wedge)(\wedge qr$ nije iskazna formula.
2. Reč
$$\Big(((p \Rightarrow q) \wedge (\neg r)) \Leftrightarrow ((\neg q) \vee r)\Big)$$
jeste iskazna formula.

Iskazne formule

Reč nad Σ - konačan niz simbola iz Σ
Jezik nad Σ - proizvoljan podskup skupa svih reči nad Σ

Jezik iskazne logike $\mathcal{L}$ *(ili* ***skup iskaznih formula****) je najmanji jezik nad* Σ *za koji važi*

- *iskazna slova i logičke konstante su iskazne formule;*
- *ako su* A *i* B *iskazne formule, onda su i* $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ *iskazne formule.*

Primer

1. Reč $p\neg q(r \Rightarrow\Leftrightarrow p)\wedge)(\wedge qr$ nije iskazna formula.
2. Reč
$$\Big(((p \Rightarrow q) \wedge (\neg r)) \Leftrightarrow ((\neg q) \vee r)\Big)$$
jeste iskazna formula.

Iskazne formule

Reč nad Σ - konačan niz simbola iz Σ
Jezik nad Σ - proizvoljan podskup skupa svih reči nad Σ

Jezik iskazne logike $\mathcal{L}$ *(ili* ***skup iskaznih formula****) je najmanji jezik nad* Σ *za koji važi*

- *iskazna slova i logičke konstante su iskazne formule;*
- *ako su A i B iskazne formule, onda su i* $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ *iskazne formule.*

Primer

1. Reč $p\neg q(r \Rightarrow\Leftrightarrow p)\wedge)(\wedge qr$ nije iskazna formula.
2. Reč
$$\Big(\big((p \Rightarrow q) \wedge (\neg r)\big) \Leftrightarrow \big((\neg q) \vee r\big)\Big)$$
jeste iskazna formula.

Iskazne formule

Reč nad Σ - konačan niz simbola iz Σ
Jezik nad Σ - proizvoljan podskup skupa svih reči nad Σ

***Jezik iskazne logike** $\mathcal{L}$ (ili **skup iskaznih formula**) je najmanji jezik nad Σ za koji važi*

- *iskazna slova i logičke konstante su iskazne formule;*
- *ako su A i B iskazne formule, onda su i $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ iskazne formule.*

Primer

1. Reč $p\neg q(r \Rightarrow\Leftrightarrow p)\wedge)(\wedge qr$ nije iskazna formula.
2. Reč
$$\Big(((p \Rightarrow q) \wedge (\neg r)) \Leftrightarrow ((\neg q) \vee r)\Big)$$
jeste iskazna formula.

Iskazne formule

Reč nad Σ - konačan niz simbola iz Σ
Jezik nad Σ - proizvoljan podskup skupa svih reči nad Σ

Jezik iskazne logike $\mathcal{L}$ *(ili* **skup iskaznih formula***) je najmanji jezik nad* Σ *za koji važi*

- *iskazna slova i logičke konstante su iskazne formule;*
- *ako su* A *i* B *iskazne formule, onda su i* $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ *iskazne formule.*

Primer

1. Reč $p\neg q(r \Rightarrow\Leftrightarrow p)\wedge)(\wedge qr$ nije iskazna formula.
2. Reč
$$\Big(((p \Rightarrow q) \wedge (\neg r)) \Leftrightarrow ((\neg q) \vee r)\Big)$$
jeste iskazna formula.

Zagrade

1) Svaka iskazna formula ima isti broj levih i desnih zagrada (dokazuje se indukcijom po složenosti formule);
npr. formula $\big(q \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \wedge r)\big)$ ima 4 leve i 4 desne zagrade.

Zagrade

1) Svaka iskazna formula ima isti broj levih i desnih zagrada (dokazuje se indukcijom po složenosti formule);
   npr. formula $\Big(q \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \wedge r)\Big)$ ima 4 leve i 4 desne zagrade.

2) Spoljne zagrade u svakoj formuli se izostavljaju;
   npr. umesto $\Big(q \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \wedge r)\Big)$ pišemo $q \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \wedge r)$.

Zagrade

1) Svaka iskazna formula ima isti broj levih i desnih zagrada (dokazuje se indukcijom po složenosti formule);
npr. formula $\big(q \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \wedge r)\big)$ ima 4 leve i 4 desne zagrade.

2) Spoljne zagrade u svakoj formuli se izostavljaju;
npr. umesto $\big(q \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \wedge r)\big)$ pišemo $q \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \wedge r)$.

3) Ako u formuli imamo nekoliko uzastopnih pojavljivanja veznika $\wedge$ ili $\vee$, zagrade se izostavljaju (asocijativnost $\wedge$ i $\vee$);
npr. umesto $q \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \wedge r)$ pišemo $q \Leftrightarrow (p \wedge (\neg q) \wedge r)$.

Zagrade

1) Svaka iskazna formula ima isti broj levih i desnih zagrada (dokazuje se indukcijom po složenosti formule);
npr. formula $\Big(q \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \wedge r)\Big)$ ima 4 leve i 4 desne zagrade.

2) Spoljne zagrade u svakoj formuli se izostavljaju;
npr. umesto $\Big(q \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \wedge r)\Big)$ pišemo $q \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \wedge r)$.

3) Ako u formuli imamo nekoliko uzastopnih pojavljivanja veznika $\wedge$ ili $\vee$, zagrade se izostavljaju (asocijativnost $\wedge$ i $\vee$);
npr. umesto $q \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \wedge r)$ pišemo $q \Leftrightarrow (p \wedge (\neg q) \wedge r)$.

4) Najveći prioritet ima veznik $\neg$, zatim veznici $\wedge$ i $\vee$, i na kraju $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$;
npr. umesto $q \Leftrightarrow (p \wedge (\neg q) \wedge r)$ pišemo $q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r$.

Potformule

Skup potformula formule A je najmanji skup formula koje zadovoljavaju sledeće uslove:

- *svaka iskazna formula A je potformula sama sebi;*
- *ako je $A = \neg B$, onda je svaka potformula od B istovremeno i potformula od A; ako je A jednako $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \Rightarrow C$ ili $B \Leftrightarrow C$, onda su sve potformula od B i C istovremeno i potformule od A.*

Potformule

Skup potformula formule A je najmanji skup formula koje zadovoljavaju sledeće uslove:

- *svaka iskazna formula A je potformula sama sebi;*
- *ako je $A = \neg B$, onda je svaka potformula od B istovremeno i potformula od A; ako je A jednako $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \Rightarrow C$ ili $B \Leftrightarrow C$, onda su sve potformula od B i C istovremeno i potformule od A.*

Primer

Potformule

Skup potformula formule A je najmanji skup formula koje zadovoljavaju sledeće uslove:

- *svaka iskazna formula A je potformula sama sebi;*
- *ako je $A = \neg B$, onda je svaka potformula od B istovremeno i potformula od A; ako je A jednako $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \Rightarrow C$ ili $B \Leftrightarrow C$, onda su sve potformula od B i C istovremeno i potformule od A.*

Primer

Skup potformula formule

$$A = \neg p \vee (q \wedge r) \Rightarrow \neg q$$

je

Potformule

Skup potformula formule A je najmanji skup formula koje zadovoljavaju sledeće uslove:

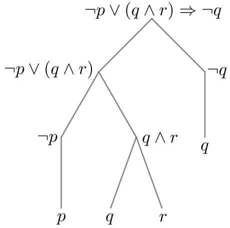
- *svaka iskazna formula A je potformula sama sebi;*
- *ako je $A = \neg B$, onda je svaka potformula od B istovremeno i potformula od A; ako je A jednako $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \Rightarrow C$ ili $B \Leftrightarrow C$, onda su sve potformula od B i C istovremeno i potformule od A.*

Primer

Skup potformula formule

$$A = \neg p \vee (q \wedge r) \Rightarrow \neg q$$

je



Potformule

Skup potformula formule A je najmanji skup formula koje zadovoljavaju sledeće uslove:

- *svaka iskazna formula A je potformula sama sebi;*
- *ako je $A = \neg B$, onda je svaka potformula od B istovremeno i potformula od A; ako je A jednako $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \Rightarrow C$ ili $B \Leftrightarrow C$, onda su sve potformula od B i C istovremeno i potformule od A.*

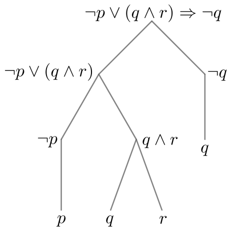
Primer

Skup potformula formule

$$A = \neg p \vee (q \wedge r) \Rightarrow \neg q$$

je

$$\{p, q, r, \neg p, \neg q, q \wedge r, \neg p \vee (q \wedge r), A\}.$$



Iskazne formule - terminologija

- **Atomičke iskazne formule** - iskazna slova i logičke konstante.
- **Literal** - atomička iskazna formula ili njena negacija;
  npr. p, $\neg p$.
- **Klauza** - disjunkcija literala;
  npr. $p \vee \neg q \vee r$.

Indukcija nad skupom iskaznih formula

Teorema

Neka je ϕ svojstvo reči jezika nad alfabetom Σ. Pretpostavimo da su zadovoljeni sledeći uslovi:

- *svojstvo ϕ važi za svaku atomičku iskaznu formulu;*
- *ako svojstvo ϕ važi za iskazne formule A i B, onda ono važi i za iskazne formule $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ i $A \Leftrightarrow B$.*

Tada svojstvo ϕ važi za svaku iskaznu formulu.

Indukcija nad skupom iskaznih formula

Teorema

Neka je ϕ svojstvo reči jezika nad alfabetom Σ. Pretpostavimo da su zadovoljeni sledeći uslovi:

- *svojstvo ϕ važi za svaku atomičku iskaznu formulu;*
- *ako svojstvo ϕ važi za iskazne formule A i B, onda ono važi i za iskazne formule $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ i $A \Leftrightarrow B$.*

Tada svojstvo ϕ važi za svaku iskaznu formulu.

Dokaz. Neka je $\mathcal{O}$ skup svih reči nad alfabetom Σ za koje je zadovoljen uslov ϕ. Skup $\mathcal{O}$ zadovoljava oba uslova defnicije skupa iskaznih formula $\mathcal{L}$. Kako je $\mathcal{L}$ najmanji takav skup, sledi da je $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{O}$, tj. svojstvo ϕ važi za svaku iskaznu formulu.

Semantika iskazne logike

Semantički aspekt iskazne logike govori o **značenju** formula.

Semantika iskazne logike

Semantički aspekt iskazne logike govori o **značenju** formula.

- **Valuacija** je preslikavanje $v : P \to \{0, 1\}$.
  $p \in P \rightsquigarrow v(p)$ - vrednost iskaznog slova p u valuaciji v

Semantika iskazne logike

Semantički aspekt iskazne logike govori o **značenju** formula.

- **Valuacija** je preslikavanje $v : P \to \{0, 1\}$.
  $p \in P \rightsquigarrow v(p)$ - vrednost iskaznog slova p u valuaciji v
- **Interpretacija** iskaznih formula za datu valuaciju v jeste preslikavanje $I_v : \mathcal{L} \to \{0, 1\}$
  $A \in \mathcal{L} \rightsquigarrow I_v(A)$ - vrednost iskazne formule A u interpretaciji I_v
  - $I_v(A) = 1$ - formula A je **tačna** u valuaciji v
  - $I_v(A) = 0$ - formula A je **netačna** u valuaciji v

Interpretacija iskaznih formula

Interpretacija I_v se definiše na sledeći način:

Interpretacija iskaznih formula

Interpretacija I_v se definiše na sledeći način:

- $I_v(p) = v(p)$, za sve $p \in P$;

Interpretacija iskaznih formula

Interpretacija I_v se definiše na sledeći način:

- $I_v(p) = v(p)$, za sve $p \in P$;
- $I_v(\top) = 1$ i $I_v(\bot) = 0$;

Interpretacija iskaznih formula

Interpretacija I_v se definiše na sledeći način:

- $I_v(p) = v(p)$, za sve $p \in P$;
- $I_v(\top) = 1$ i $I_v(\bot) = 0$;
- $I_v(\neg A) = 1$ ako je $I_v(A) = 0$ i $I_v(\neg A) = 0$ ako je $I_v(A) = 1$;

Interpretacija iskaznih formula

Interpretacija I_v se definiše na sledeći način:

- $I_v(p) = v(p)$, za sve $p \in P$;
- $I_v(\top) = 1$ i $I_v(\bot) = 0$;
- $I_v(\neg A) = 1$ ako je $I_v(A) = 0$ i $I_v(\neg A) = 0$ ako je $I_v(A) = 1$;
- $I_v(A \wedge B) = 1$ ako je $I_v(A) = 1$ i $I_v(B) = 1$, a $I_v(A \wedge B) = 0$ inače;

Interpretacija iskaznih formula

Interpretacija I_v se definiše na sledeći način:

- $I_v(p) = v(p)$, za sve $p \in P$;
- $I_v(\top) = 1$ i $I_v(\bot) = 0$;
- $I_v(\neg A) = 1$ ako je $I_v(A) = 0$ i $I_v(\neg A) = 0$ ako je $I_v(A) = 1$;
- $I_v(A \wedge B) = 1$ ako je $I_v(A) = 1$ i $I_v(B) = 1$, a $I_v(A \wedge B) = 0$ inače;
- $I_v(A \vee B) = 0$ ako je $I_v(A) = 0$ i $I_v(B) = 0$, a $I_v(A \vee B) = 1$ inače;

Interpretacija iskaznih formula

Interpretacija I_v se definiše na sledeći način:

- $I_v(p) = v(p)$, za sve $p \in P$;
- $I_v(\top) = 1$ i $I_v(\bot) = 0$;
- $I_v(\neg A) = 1$ ako je $I_v(A) = 0$ i $I_v(\neg A) = 0$ ako je $I_v(A) = 1$;
- $I_v(A \wedge B) = 1$ ako je $I_v(A) = 1$ i $I_v(B) = 1$, a $I_v(A \wedge B) = 0$ inače;
- $I_v(A \vee B) = 0$ ako je $I_v(A) = 0$ i $I_v(B) = 0$, a $I_v(A \vee B) = 1$ inače;
- $I_v(A \Rightarrow B) = 0$ ako je $I_v(A) = 1$ i $I_v(B) = 0$, a $I_v(A \Rightarrow B) = 1$ inače;

Interpretacija iskaznih formula

Interpretacija I_v se definiše na sledeći način:

- $I_v(p) = v(p)$, za sve $p \in P$;
- $I_v(\top) = 1$ i $I_v(\bot) = 0$;
- $I_v(\neg A) = 1$ ako je $I_v(A) = 0$ i $I_v(\neg A) = 0$ ako je $I_v(A) = 1$;
- $I_v(A \wedge B) = 1$ ako je $I_v(A) = 1$ i $I_v(B) = 1$, a $I_v(A \wedge B) = 0$ inače;
- $I_v(A \vee B) = 0$ ako je $I_v(A) = 0$ i $I_v(B) = 0$, a $I_v(A \vee B) = 1$ inače;
- $I_v(A \Rightarrow B) = 0$ ako je $I_v(A) = 1$ i $I_v(B) = 0$, a $I_v(A \Rightarrow B) = 1$ inače;
- $I_v(A \Leftrightarrow B) = 1$ ako je $I_v(A) = I_v(B)$, a $I_v(A \Leftrightarrow B) = 0$ inače.

Interpretacija iskaznih formula

Interpretacija I_v se definiše na sledeći način:

- $I_v(p) = v(p)$, za sve $p \in P$;
- $I_v(\top) = 1$ i $I_v(\bot) = 0$;
- $I_v(\neg A) = 1$ ako je $I_v(A) = 0$ i $I_v(\neg A) = 0$ ako je $I_v(A) = 1$;
- $I_v(A \wedge B) = 1$ ako je $I_v(A) = 1$ i $I_v(B) = 1$, a $I_v(A \wedge B) = 0$ inače;
- $I_v(A \vee B) = 0$ ako je $I_v(A) = 0$ i $I_v(B) = 0$, a $I_v(A \vee B) = 1$ inače;
- $I_v(A \Rightarrow B) = 0$ ako je $I_v(A) = 1$ i $I_v(B) = 0$, a $I_v(A \Rightarrow B) = 1$ inače;
- $I_v(A \Leftrightarrow B) = 1$ ako je $I_v(A) = I_v(B)$, a $I_v(A \Leftrightarrow B) = 0$ inače.

Za datu valuaciju v postoji tačno jedna interpretacija I_v (tj. jedna funkcija koja proširuje preslikavanje v sa skupa P na ceo skup $\mathcal{L}$).

Teorema

Vrednost iskazne formule A u nekoj valuaciji zavisi samo od vrednosti onih iskaznih slova koja figurišu u formuli A.

Teorema

Vrednost iskazne formule A u nekoj valuaciji zavisi samo od vrednosti onih iskaznih slova koja figurišu u formuli A.

Dokaz. Neka je $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ iskazna formula u kojoj se pojavljuju samo slova $p_1, \ldots, p_n$, i neka su υ i υ' dve valuacije takve da važi $\upsilon(p_i) = \upsilon'(p_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule (broju veznika) da važi $I_\upsilon(A) = I_{\upsilon'}(A)$.

Teorema

Vrednost iskazne formule A u nekoj valuaciji zavisi samo od vrednosti onih iskaznih slova koja figurišu u formuli A.

Dokaz. Neka je $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ iskazna formula u kojoj se pojavljuju samo slova $p_1, \ldots, p_n$, i neka su υ i υ' dve valuacije takve da važi $\upsilon(p_i) = \upsilon'(p_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule (broju veznika) da važi $I_\upsilon(A) = I_{\upsilon'}(A)$.

B.I. Ako je broj veznika u formuli 0, tada je $A = p$, pa važi $I_\upsilon(A) = \upsilon(p) = \upsilon'(p) = I_{\upsilon'}(A)$.

Teorema

Vrednost iskazne formule A u nekoj valuaciji zavisi samo od vrednosti onih iskaznih slova koja figurišu u formuli A.

Dokaz. Neka je $A = A(p_1, \dots, p_n)$ iskazna formula u kojoj se pojavljuju samo slova $p_1, \dots, p_n$, i neka su υ i υ' dve valuacije takve da važi $\upsilon(p_i) = \upsilon'(p_i)$, $i = 1, \dots, n$. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule (broju veznika) da važi $I_\upsilon(A) = I_{\upsilon'}(A)$.

B.I. Ako je broj veznika u formuli 0, tada je $A = p$, pa važi $I_\upsilon(A) = \upsilon(p) = \upsilon'(p) = I_{\upsilon'}(A)$.

I.H. Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaku formulu sa manje od k veznika.

Teorema

Vrednost iskazne formule A u nekoj valuaciji zavisi samo od vrednosti onih iskaznih slova koja figurišu u formuli A.

Dokaz. Neka je $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ iskazna formula u kojoj se pojavljuju samo slova $p_1, \ldots, p_n$, i neka su υ i υ' dve valuacije takve da važi $\upsilon(p_i) = \upsilon'(p_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule (broju veznika) da važi $I_\upsilon(A) = I_{\upsilon'}(A)$.

- B.I. Ako je broj veznika u formuli 0, tada je $A = p$, pa važi $I_\upsilon(A) = \upsilon(p) = \upsilon'(p) = I_{\upsilon'}(A)$.
- I.H. Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaku formulu sa manje od k veznika.
- I.K. Neka formula A ima k veznika. Tada ona može biti nekog od sledećih oblika: $\neg B$, $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \Rightarrow C$ ili $B \Leftrightarrow C$.

Teorema

Vrednost iskazne formule A u nekoj valuaciji zavisi samo od vrednosti onih iskaznih slova koja figurišu u formuli A.

Dokaz. Neka je $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ iskazna formula u kojoj se pojavljuju samo slova $p_1, \ldots, p_n$, i neka su υ i υ' dve valuacije takve da važi $\upsilon(p_i) = \upsilon'(p_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule (broju veznika) da važi $I_\upsilon(A) = I_{\upsilon'}(A)$.

- B.I. Ako je broj veznika u formuli 0, tada je $A = p$, pa važi $I_\upsilon(A) = \upsilon(p) = \upsilon'(p) = I_{\upsilon'}(A)$.
- I.H. Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaku formulu sa manje od k veznika.
- I.K. Neka formula A ima k veznika. Tada ona može biti nekog od sledećih oblika: $\neg B$, $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \Rightarrow C$ ili $B \Leftrightarrow C$.
  - 1° $A = \neg B$. Tada formula B ima $k - 1$ veznika, pa za nju važi induktivna pretpostavka, te imamo $I_\upsilon(A) = I_\upsilon(\neg B) = 1 - I_\upsilon(B) = 1 - I_{\upsilon'}(B) = I_{\upsilon'}(\neg B) = I_{\upsilon'}(A)$.

Teorema

Vrednost iskazne formule A u nekoj valuaciji zavisi samo od vrednosti onih iskaznih slova koja figurišu u formuli A.

Dokaz. Neka je $A = A(p_1, \dots, p_n)$ iskazna formula u kojoj se pojavljuju samo slova $p_1, \dots, p_n$, i neka su υ i υ' dve valuacije takve da važi $\upsilon(p_i) = \upsilon'(p_i)$, $i = 1, \dots, n$. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule (broju veznika) da važi $I_\upsilon(A) = I_{\upsilon'}(A)$.

- B.I. Ako je broj veznika u formuli 0, tada je $A = p$, pa važi $I_\upsilon(A) = \upsilon(p) = \upsilon'(p) = I_{\upsilon'}(A)$.
- I.H. Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaku formulu sa manje od k veznika.
- I.K. Neka formula A ima k veznika. Tada ona može biti nekog od sledećih oblika: $\neg B$, $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \Rightarrow C$ ili $B \Leftrightarrow C$.
  - 1° $A = \neg B$. Tada formula B ima $k - 1$ veznika, pa za nju važi induktivna pretpostavka, te imamo $I_\upsilon(A) = I_\upsilon(\neg B) = 1 - I_\upsilon(B) = 1 - I_{\upsilon'}(B) = I_{\upsilon'}(\neg B) = I_{\upsilon'}(A)$.
  - 2° $A = B \wedge C$. Tada formule B i C imaju manje od k veznika, pa za njih važi induktivna pretpostavka, te imamo
    $I_\upsilon(A) = I_\upsilon(B \wedge C) = I_\upsilon(B) \wedge I_\upsilon(C) = I_{\upsilon'}(B) \wedge I_{\upsilon'}(C) = I_{\upsilon'}(B \wedge C) = I_{\upsilon'}(A)$.

Teorema

Vrednost iskazne formule A u nekoj valuaciji zavisi samo od vrednosti onih iskaznih slova koja figurišu u formuli A.

Dokaz. Neka je $A = A(p_1, \dots, p_n)$ iskazna formula u kojoj se pojavljuju samo slova $p_1, \dots, p_n$, i neka su υ i υ' dve valuacije takve da važi $\upsilon(p_i) = \upsilon'(p_i)$, $i = 1, \dots, n$. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule (broju veznika) da važi $I_\upsilon(A) = I_{\upsilon'}(A)$.

- B.I. Ako je broj veznika u formuli 0, tada je $A = p$, pa važi $I_\upsilon(A) = \upsilon(p) = \upsilon'(p) = I_{\upsilon'}(A)$.
- I.H. Pretpostavimo da tvrđenje važi za svaku formulu sa manje od k veznika.
- I.K. Neka formula A ima k veznika. Tada ona može biti nekog od sledećih oblika: $\neg B$, $B \wedge C$, $B \vee C$, $B \Rightarrow C$ ili $B \Leftrightarrow C$.
  - 1° $A = \neg B$. Tada formula B ima $k-1$ veznika, pa za nju važi induktivna pretpostavka, te imamo $I_\upsilon(A) = I_\upsilon(\neg B) = 1 - I_\upsilon(B) = 1 - I_{\upsilon'}(B) = I_{\upsilon'}(\neg B) = I_{\upsilon'}(A)$.
  - 2° $A = B \wedge C$. Tada formule B i C imaju manje od k veznika, pa za njih važi induktivna pretpostavka, te imamo
    $I_\upsilon(A) = I_\upsilon(B \wedge C) = I_\upsilon(B) \wedge I_\upsilon(C) = I_{\upsilon'}(B) \wedge I_{\upsilon'}(C) = I_{\upsilon'}(B \wedge C) = I_{\upsilon'}(A)$.

    Ostala tri slučaja dokazuju se analogno drugom.

- Valuacija v je zadovoljavajuća za formulu *A* ako je $I_v(A) = 1$. Kažemo i da je zadovoljavajuća valuacija v model za *A* i pišemo $v \models A$.

- Valuacija v je zadovoljavajuća za formulu A ako je $I_v(A) = 1$. Kažemo i da je zadovoljavajuća valuacija v model za A i pišemo $v \models A$.

Za iskaznu formulu A kažemo da je:

- Valuacija v je zadovoljavajuća za formulu A ako je $I_v(A) = 1$. Kažemo i da je zadovoljavajuća valuacija v model za A i pišemo $v \models A$.

Za iskaznu formulu A kažemo da je:

- *zadovoljiva ako postoji valuacija u kojoj je ta formula tačna;*

- Valuacija v je zadovoljavajuća za formulu A ako je $I_v(A) = 1$. Kažemo i da je zadovoljavajuća valuacija v model za A i pišemo $v \models A$.

Za iskaznu formulu A kažemo da je:

- *zadovoljiva ako postoji valuacija u kojoj je ta formula tačna;*
- *poreciva ako postoji valuacija u kojoj ta formula nije tačna;*

- Valuacija v je zadovoljavajuća za formulu A ako je $I_v(A) = 1$. Kažemo i da je zadovoljavajuća valuacija v model za A i pišemo $v \models A$.

Za iskaznu formulu A kažemo da je:

- *zadovoljiva ako postoji valuacija u kojoj je ta formula tačna;*
- *poreciva ako postoji valuacija u kojoj ta formula nije tačna;*
- *tautologija ili valjana formula, u oznaci $\models A$, ako je tačna u svakoj valuaciji;*

- Valuacija v je zadovoljavajuća za formulu A ako je $I_v(A) = 1$. Kažemo i da je zadovoljavajuća valuacija v model za A i pišemo $v \models A$.

Za iskaznu formulu A kažemo da je:

- *zadovoljiva ako postoji valuacija u kojoj je ta formula tačna;*
- *poreciva ako postoji valuacija u kojoj ta formula nije tačna;*
- *tautologija ili valjana formula, u oznaci $\models A$, ako je tačna u svakoj valuaciji;*
- *nezadovoljiva ili kontradikcija ako nije tačna ni u jednoj valuaciji.*

- Valuacija v je zadovoljavajuća za formulu A ako je $I_v(A) = 1$. Kažemo i da je zadovoljavajuća valuacija v model za A i pišemo $v \models A$.

Za iskaznu formulu A kažemo da je:

- *zadovoljiva ako postoji valuacija u kojoj je ta formula tačna;*
- *poreciva ako postoji valuacija u kojoj ta formula nije tačna;*
- *tautologija ili valjana formula, u oznaci $\models A$, ako je tačna u svakoj valuaciji;*
- *nezadovoljiva ili kontradikcija ako nije tačna ni u jednoj valuaciji.*

Primer

- Iskazne formule $p \Rightarrow p$ i $p \vee \neg p$ su tautologije.
- Iskazna formula $p \Rightarrow q$ je zadovoljiva i poreciva.
- Iskazna formula $p \wedge \neg p$ je kontradikcija.

Istinitosne tablice

Pravila za odredjivanje vrednosti iskazne formule u zadatoj valuaciji mogu biti reprezentovana osnovnim **istinitosnim tablicama**:

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Istinitosne tablice

Na osnovu navedenih tablica moguće je konstruisati istinitosnu tablicu za proizvoljnu iskaznu formulu.

- Svakoj vrsti odgovara jedna valuacija iskaznih slova koje se pojavljuju u toj formuli.
- Ako je formula $A = A(p_1, \ldots, p_n)$, istinitosna tablica treba da sadrži sve moguće valuacije skupa varijabli $\{p_1, \ldots, p_n\}$.
- Svakoj koloni odgovara jedna potformula te formule.
- Posmatramo kolonu koja odgovara samoj iskaznoj formuli:
  - ako su sve vrednosti jednake 1, formula je tautologija;
  - ako je bar jedna vrednost jednaka 1, formula je zadovoljiva;
  - ako je bar jedna vrednost jednaka 0, formula je poreciva;
  - ako su sve vrednosti jednake 0, formula je kontradikcija.

Istinitosne tablice - primer

Primer

Koristeći istinitosnu tablicu ispitaćemo da li je formula

$$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$$

tautologija.

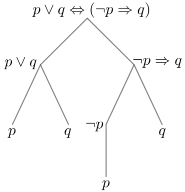
Istinitosne tablice - primer

Primer

Koristeći istinitosnu tablicu ispitaćemo da li je formula

$$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$$

tautologija.



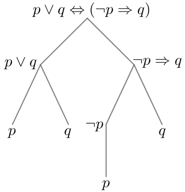
Istinitosne tablice - primer

Primer

Koristeći istinitosnu tablicu ispitaćemo da li je formula

$$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$$

tautologija.



p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

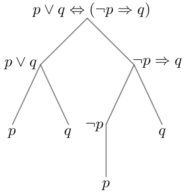
Istinitosne tablice - primer

Primer

Koristeći istinitosnu tablicu ispitaćemo da li je formula

$$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$$

tautologija.



p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
0	0	1			
0	1	1			
1	0	0			
1	1	0			

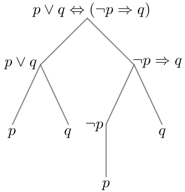
Istinitosne tablice - primer

Primer

Koristeći istinitosnu tablicu ispitaćemo da li je formula

$$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$$

tautologija.



p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
0	0	1	0		
0	1	1	1		
1	0	0	1		
1	1	0	1		

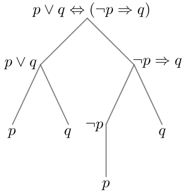
Istinitosne tablice - primer

Primer

Koristeći istinitosnu tablicu ispitaćemo da li je formula

$$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$$

tautologija.



p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
0	0	1	0	0	
0	1	1	1	1	
1	0	0	1	1	
1	1	0	1	1	

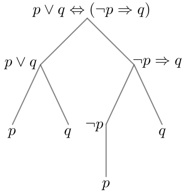
Istinitosne tablice - primer

Primer

Koristeći istinitosnu tablicu ispitaćemo da li je formula

$$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$$

tautologija.



p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1

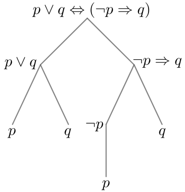
Istinitosne tablice - primer

Primer

Koristeći istinitosnu tablicu ispitaćemo da li je formula

$$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$$

tautologija.



p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1

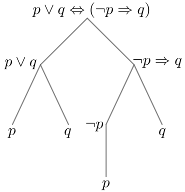
Istinitosne tablice - primer

Primer

Koristeći istinitosnu tablicu ispitaćemo da li je formula

$$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$$

tautologija.



p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1

S obzurom da su u poslednjoj koloni sve vrednosti jednake 1, zaključujemo da je data formula tautologija.

Istinitosne tablice - skraćena verzija

Primer

Zapisujemo samo zadatu iskaznu formulu i odgovarajuće vrednosti ispod pojedinačnih iskaznih slova i veznika.

Istinitosne tablice - skraćena verzija

Primer

Zapisujemo samo zadatu iskaznu formulu i odgovarajuće vrednosti ispod pojedinačnih iskaznih slova i veznika.

p	$\vee$	q	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	p	$\Rightarrow$	$q)$
0		0			0		0
0		1			0		1
1		0			1		0
1		1			1		1

Istinitosne tablice - skraćena verzija

Primer

Zapisujemo samo zadatu iskaznu formulu i odgovarajuće vrednosti ispod pojedinačnih iskaznih slova i veznika.

p	$\vee$	q	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	p	$\Rightarrow$	$q)$
0		0		1	0		0
0		1		1	0		1
1		0		0	1		0
1		1		0	1		1

Istinitosne tablice - skraćena verzija

Primer

Zapisujemo samo zadatu iskaznu formulu i odgovarajuće vrednosti ispod pojedinačnih iskaznih slova i veznika.

p	$\vee$	q	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	p	$\Rightarrow$	$q)$
0	0	0		1	0		0
0	1	1		1	0		1
1	1	0		0	1		0
1	1	1		0	1		1

Istinitosne tablice - skraćena verzija

Primer

Zapisujemo samo zadatu iskaznu formulu i odgovarajuće vrednosti ispod pojedinačnih iskaznih slova i veznika.

p	$\vee$	q	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	p	$\Rightarrow$	$q)$
0	0	0		1	0	0	0
0	1	1		1	0	1	1
1	1	0		0	1	1	0
1	1	1		0	1	1	1

Istinitosne tablice - skraćena verzija

Primer

Zapisujemo samo zadatu iskaznu formulu i odgovarajuće vrednosti ispod pojedinačnih iskaznih slova i veznika.

p	$\vee$	q	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	p	$\Rightarrow$	$q)$
0	0	0	**1**	1	0	0	0
0	1	1	**1**	1	0	1	1
1	1	0	**1**	0	1	1	0
1	1	1	**1**	0	1	1	1

Logičke posledice

Iskazna formula A je **logička posledica** *skupa iskaznih formula Γ ako je svaki model za skup Γ istovremeno i model za formulu A. Zapisujemo: $\Gamma \models A$.*

Logičke posledice

Iskazna formula A je **logička posledica** *skupa iskaznih formula Γ ako je svaki model za skup Γ istovremeno i model za formulu A. Zapisujemo: $\Gamma \models A$.*

Teorema

(a) *Formula je valjana ako i samo ako je logička posledica praznog skupa formula.*

Logičke posledice

Iskazna formula A je **logička posledica** *skupa iskaznih formula Γ ako je svaki model za skup Γ istovremeno i model za formulu A. Zapisujemo: $\Gamma \models A$.*

Teorema

(a) *Formula je valjana ako i samo ako je logička posledica praznog skupa formula.*

(b) *Ako je skup Γ kontradiktoran, onda je svaka formula njegova logička posledica. Specijalno, svaka formula je logička posledica skupa $\{\bot\}$.*

Logičke posledice

Iskazna formula A je **logička posledica** *skupa iskaznih formula Γ ako je svaki model za skup Γ istovremeno i model za formulu A. Zapisujemo: $\Gamma \models A$.*

Teorema

(a) *Formula je valjana ako i samo ako je logička posledica praznog skupa formula.*

(b) *Ako je skup Γ kontradiktoran, onda je svaka formula njegova logička posledica. Specijalno, svaka formula je logička posledica skupa $\{\bot\}$.*

(c) *Ako je $\Gamma \subseteq \Delta$ i $\Gamma \models A$, onda je $\Delta \models A$.*

Logičke posledice

Iskazna formula A je **logička posledica** *skupa iskaznih formula Γ ako je svaki model za skup Γ istovremeno i model za formulu A. Zapisujemo: $\Gamma \models A$.*

Teorema

(a) *Formula je valjana ako i samo ako je logička posledica praznog skupa formula.*

(b) *Ako je skup Γ kontradiktoran, onda je svaka formula njegova logička posledica. Specijalno, svaka formula je logička posledica skupa $\{\bot\}$.*

(c) *Ako je $\Gamma \subseteq \Delta$ i $\Gamma \models A$, onda je $\Delta \models A$.*

(d) *Ako je formula A valjana i $\Gamma \models B$, onda je $\Gamma \setminus \{A\} \models B$.*

Logičke posledice

Iskazna formula A je **logička posledica** *skupa iskaznih formula Γ ako je svaki model za skup Γ istovremeno i model za formulu A. Zapisujemo: $\Gamma \models A$.*

Teorema

(a) *Formula je valjana ako i samo ako je logička posledica praznog skupa formula.*

(b) *Ako je skup Γ kontradiktoran, onda je svaka formula njegova logička posledica. Specijalno, svaka formula je logička posledica skupa $\{\bot\}$.*

(c) *Ako je $\Gamma \subseteq \Delta$ i $\Gamma \models A$, onda je $\Delta \models A$.*

(d) *Ako je formula A valjana i $\Gamma \models B$, onda je $\Gamma \setminus \{A\} \models B$.*

Teorema

$\Gamma, A \models B$ *ako i samo ako* $\Gamma \models A \Rightarrow B$.

Logičke ekvivalencije

Kažemo da su dve iskazne formule A i B **logički ekvivalentne***, u oznaci $A \equiv B$, ako je svaki model formule A model i za B i obratno (tj. važi $A \models B$ i $B \models A$).*

Logičke ekvivalencije

Kažemo da su dve iskazne formule A i B **logički ekvivalentne**, *u oznaci $A \equiv B$, ako je svaki model formule A model i za B i obratno (tj. važi $A \models B$ i $B \models A$).*

Teorema

$A \equiv B$ *ako i samo ako* $\models A \Leftrightarrow B$.

Logičke ekvivalencije

Kažemo da su dve iskazne formule A i B **logički ekvivalentne**, *u oznaci $A \equiv B$, ako je svaki model formule A model i za B i obratno (tj. važi $A \models B$ i $B \models A$).*

Teorema

$A \equiv B$ ako i samo ako $\models A \Leftrightarrow B$.

Dokaz.

($\Rightarrow$) Ako važi $A \equiv B$, tada u proizvoljnoj valuaciji v formule A i B imaju istu vrednost, pa je formula $A \Leftrightarrow B$ tačna u v. Otuda je $A \Leftrightarrow B$ tautologija.

Logičke ekvivalencije

Kažemo da su dve iskazne formule A i B **logički ekvivalentne**, *u oznaci $A \equiv B$, ako je svaki model formule A model i za B i obratno (tj. važi $A \models B$ i $B \models A$).*

Teorema

$A \equiv B$ ako i samo ako $\models A \Leftrightarrow B$.

Dokaz.

($\Rightarrow$) Ako važi $A \equiv B$, tada u proizvoljnoj valuaciji v formule A i B imaju istu vrednost, pa je formula $A \Leftrightarrow B$ tačna u v. Otuda je $A \Leftrightarrow B$ tautologija.

($\Leftarrow$) Pod pretpostavkom da je $A \Leftrightarrow B$ tautologija, ako je u proizvoljnoj valuaciji v formula A tačna, onda mora i B biti tačna u v. Dakle, svaki model za A je model i za B. Analogno, svaki model za B je model i za A, te sledi $A \equiv B$.

Relacija $\equiv$ je relacija ekvivalencije, tj. za proizvoljne formule A, B i C važi:

(R) $A \equiv A$;

(S) *ako* $A \equiv B$, *onda* $B \equiv A$;

(T) *ako* $A \equiv B$ *i* $B \equiv C$, *onda* $A \equiv C$.

Relacija $\equiv$ je relacija ekvivalencije, tj. za proizvoljne formule A, B i C važi:

(R) $A \equiv A$;

(S) ako $A \equiv B$, onda $B \equiv A$;

(T) ako $A \equiv B$ i $B \equiv C$, onda $A \equiv C$.

Teorema

Ako je $A_1 \equiv A_2$ i $B_1 \equiv B_2$, tada važi:

(a) $\neg A_1 \equiv \neg A_2$;

(b) $A_1 \wedge B_1 \equiv A_2 \wedge B_2$;

(c) $A_1 \vee B_1 \equiv A_2 \vee B_2$;

(d) $A_1 \Rightarrow B_1 \equiv A_2 \Rightarrow B_2$;

(e) $A_1 \Leftrightarrow B_1 \equiv A_2 \Leftrightarrow B_2$.

Logičke ekvivalencije - primeri

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	zakon dvostruke negacije
$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$	zakon isključenja trećeg
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\equiv$	$\top$	zakon neprotivrečnosti
$A \wedge A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\wedge$
$A \vee A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\vee$
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	zakon komutativnosti za $\wedge$
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	zakon komutativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$B \Leftrightarrow A$	zakon komutativnosti za $\Leftrightarrow$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	zakon asocijativnosti za $\wedge$
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	zakon asocijativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$\equiv$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	zakon asocijativnosti za $\Leftrightarrow$

Logičke ekvivalencije - primeri

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	zakon dvostruke negacije
$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$	zakon isključenja trećeg
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\equiv$	$\top$	zakon neprotivrečnosti
$A \wedge A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\wedge$
$A \vee A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\vee$
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	zakon komutativnosti za $\wedge$
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	zakon komutativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$B \Leftrightarrow A$	zakon komutativnosti za $\Leftrightarrow$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	zakon asocijativnosti za $\wedge$
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	zakon asocijativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$\equiv$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	zakon asocijativnosti za $\Leftrightarrow$

Logičke ekvivalencije - primeri

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	zakon dvostruke negacije
$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$	zakon isključenja trećeg
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\equiv$	$\top$	zakon neprotivrečnosti
$A \wedge A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\wedge$
$A \vee A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\vee$
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	zakon komutativnosti za $\wedge$
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	zakon komutativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$B \Leftrightarrow A$	zakon komutativnosti za $\Leftrightarrow$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	zakon asocijativnosti za $\wedge$
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	zakon asocijativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$\equiv$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	zakon asocijativnosti za $\Leftrightarrow$

Logičke ekvivalencije - primeri

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	zakon dvostruke negacije
$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$	zakon isključenja trećeg
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\equiv$	$\top$	zakon neprotivrečnosti
$A \wedge A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\wedge$
$A \vee A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\vee$
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	zakon komutativnosti za $\wedge$
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	zakon komutativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$B \Leftrightarrow A$	zakon komutativnosti za $\Leftrightarrow$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	zakon asocijativnosti za $\wedge$
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	zakon asocijativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$\equiv$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	zakon asocijativnosti za $\Leftrightarrow$

Logičke ekvivalencije - primeri

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	zakon dvostruke negacije
$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$	zakon isključenja trećeg
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\equiv$	$\top$	zakon neprotivrečnosti
$A \wedge A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\wedge$
$A \vee A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\vee$
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	zakon komutativnosti za $\wedge$
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	zakon komutativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$B \Leftrightarrow A$	zakon komutativnosti za $\Leftrightarrow$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	zakon asocijativnosti za $\wedge$
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	zakon asocijativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$\equiv$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	zakon asocijativnosti za $\Leftrightarrow$

Logičke ekvivalencije - primeri

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	zakon dvostruke negacije
$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$	zakon isključenja trećeg
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\equiv$	$\top$	zakon neprotivrečnosti
$A \wedge A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\wedge$
$A \vee A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\vee$
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	zakon komutativnosti za $\wedge$
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	zakon komutativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$B \Leftrightarrow A$	zakon komutativnosti za $\Leftrightarrow$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	zakon asocijativnosti za $\wedge$
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	zakon asocijativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$\equiv$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	zakon asocijativnosti za $\Leftrightarrow$

Logičke ekvivalencije - primeri

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	zakon dvostruke negacije
$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$	zakon isključenja trećeg
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\equiv$	$\top$	zakon neprotivrečnosti
$A \wedge A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\wedge$
$A \vee A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\vee$
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	zakon komutativnosti za $\wedge$
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	zakon komutativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$B \Leftrightarrow A$	zakon komutativnosti za $\Leftrightarrow$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	zakon asocijativnosti za $\wedge$
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	zakon asocijativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$\equiv$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	zakon asocijativnosti za $\Leftrightarrow$

Logičke ekvivalencije - primeri

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	zakon dvostruke negacije
$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$	zakon isključenja trećeg
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\equiv$	$\top$	zakon neprotivrečnosti
$A \wedge A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\wedge$
$A \vee A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\vee$
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	zakon komutativnosti za $\wedge$
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	zakon komutativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$B \Leftrightarrow A$	zakon komutativnosti za $\Leftrightarrow$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	zakon asocijativnosti za $\wedge$
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	zakon asocijativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$\equiv$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	zakon asocijativnosti za $\Leftrightarrow$

Logičke ekvivalencije - primeri

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	zakon dvostruke negacije
$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$	zakon isključenja trećeg
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\equiv$	$\top$	zakon neprotivrečnosti
$A \wedge A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\wedge$
$A \vee A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\vee$
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	zakon komutativnosti za $\wedge$
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	zakon komutativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$B \Leftrightarrow A$	zakon komutativnosti za $\Leftrightarrow$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	zakon asocijativnosti za $\wedge$
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	zakon asocijativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$\equiv$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	zakon asocijativnosti za $\Leftrightarrow$

Logičke ekvivalencije - primeri

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	zakon dvostruke negacije
$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$	zakon isključenja trećeg
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\equiv$	$\top$	zakon neprotivrečnosti
$A \wedge A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\wedge$
$A \vee A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\vee$
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	zakon komutativnosti za $\wedge$
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	zakon komutativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$B \Leftrightarrow A$	zakon komutativnosti za $\Leftrightarrow$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	zakon asocijativnosti za $\wedge$
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	zakon asocijativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$\equiv$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	zakon asocijativnosti za $\Leftrightarrow$

Logičke ekvivalencije - primeri

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	zakon dvostruke negacije
$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$	zakon isključenja trećeg
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\equiv$	$\top$	zakon neprotivrečnosti
$A \wedge A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\wedge$
$A \vee A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\vee$
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	zakon komutativnosti za $\wedge$
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	zakon komutativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$B \Leftrightarrow A$	zakon komutativnosti za $\Leftrightarrow$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	zakon asocijativnosti za $\wedge$
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	zakon asocijativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$\equiv$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	zakon asocijativnosti za $\Leftrightarrow$

Logičke ekvivalencije - primeri

$\neg\neg A$	$\equiv$	A	zakon dvostruke negacije
$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$	zakon isključenja trećeg
$\neg(A \wedge \neg A)$	$\equiv$	$\top$	zakon neprotivrečnosti
$A \wedge A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\wedge$
$A \vee A$	$\equiv$	A	zakon idempotentnosti za $\vee$
$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	zakon komutativnosti za $\wedge$
$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$	zakon komutativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$B \Leftrightarrow A$	zakon komutativnosti za $\Leftrightarrow$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	zakon asocijativnosti za $\wedge$
$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$	zakon asocijativnosti za $\vee$
$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$\equiv$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	zakon asocijativnosti za $\Leftrightarrow$

Logičke ekvivalencije - primeri

$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	zakon distributivnosti $\wedge$ u odnosu na $\vee$
$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	zakon distributivnosti $\vee$ u odnosu na $\wedge$
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	De Morganov zakon
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$	De Morganov zakon
$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	zakon kontrapozicije

Logičke ekvivalencije - primeri

$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	zakon distributivnosti $\wedge$ u odnosu na $\vee$
$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	zakon distributivnosti $\vee$ u odnosu na $\wedge$
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	De Morganov zakon
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$	De Morganov zakon
$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	zakon kontrapozicije

Logičke ekvivalencije - primeri

$A \lor (A \land B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \land (A \lor B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \land (B \lor C)$	$\equiv$	$(A \land B) \lor (A \land C)$	zakon distributivnosti $\land$ u odnosu na $\lor$
$A \lor (B \land C)$	$\equiv$	$(A \lor B) \land (A \lor C)$	zakon distributivnosti $\lor$ u odnosu na $\land$
$\neg(A \land B)$	$\equiv$	$\neg A \lor \neg B$	De Morganov zakon
$\neg(A \lor B)$	$\equiv$	$\neg A \land \neg B$	De Morganov zakon
$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	zakon kontrapozicije

Logičke ekvivalencije - primeri

$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	zakon distributivnosti $\wedge$ u odnosu na $\vee$
$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	zakon distributivnosti $\vee$ u odnosu na $\wedge$
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	De Morganov zakon
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$	De Morganov zakon
$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	zakon kontrapozicije

Logičke ekvivalencije - primeri

$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	zakon distributivnosti $\wedge$ u odnosu na $\vee$
$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	zakon distributivnosti $\vee$ u odnosu na $\wedge$
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	De Morganov zakon
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$	De Morganov zakon
$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	zakon kontrapozicije

Logičke ekvivalencije - primeri

$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	zakon distributivnosti $\wedge$ u odnosu na $\vee$
$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	zakon distributivnosti $\vee$ u odnosu na $\wedge$
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	De Morganov zakon
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$	De Morganov zakon
$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	zakon kontrapozicije

Logičke ekvivalencije - primeri

$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	zakon distributivnosti $\wedge$ u odnosu na $\vee$
$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	zakon distributivnosti $\vee$ u odnosu na $\wedge$
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	De Morganov zakon
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$	De Morganov zakon
$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	zakon kontrapozicije

Logičke ekvivalencije - primeri

$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A	zakon apsorpcije
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	zakon distributivnosti $\wedge$ u odnosu na $\vee$
$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	zakon distributivnosti $\vee$ u odnosu na $\wedge$
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	De Morganov zakon
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$	De Morganov zakon
$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	zakon kontrapozicije

Logičke ekvivalencije - primeri

$$A \wedge \top \equiv A \qquad A \wedge \bot \equiv \bot$$

$$A \vee \top \equiv \top \qquad A \vee \bot \equiv A$$

$$A \Rightarrow \top \equiv \top \qquad A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$\top \Rightarrow A \equiv A \qquad \bot \Rightarrow A \equiv \top$$

$$A \Leftrightarrow \top \equiv A \qquad A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$A \Rightarrow A \equiv A \qquad A \Leftrightarrow A \equiv A$$

Logičke ekvivalencije - primeri

$$A \wedge \top \equiv A \qquad A \wedge \bot \equiv \bot$$

$$A \vee \top \equiv \top \qquad A \vee \bot \equiv A$$

$$A \Rightarrow \top \equiv \top \qquad A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$\top \Rightarrow A \equiv A \qquad \bot \Rightarrow A \equiv \top$$

$$A \Leftrightarrow \top \equiv A \qquad A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$A \Rightarrow A \equiv A \qquad A \Leftrightarrow A \equiv A$$

Logičke ekvivalencije - primeri

$$A \wedge \top \equiv A \qquad A \wedge \bot \equiv \bot$$

$$A \vee \top \equiv \top \qquad A \vee \bot \equiv A$$

$$A \Rightarrow \top \equiv \top \qquad A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$\top \Rightarrow A \equiv A \qquad \bot \Rightarrow A \equiv \top$$

$$A \Leftrightarrow \top \equiv A \qquad A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$A \Rightarrow A \equiv A \qquad A \Leftrightarrow A \equiv A$$

Logičke ekvivalencije - primeri

$$A \wedge \top \equiv A \qquad A \wedge \bot \equiv \bot$$

$$A \vee \top \equiv \top \qquad A \vee \bot \equiv A$$

$$A \Rightarrow \top \equiv \top \qquad A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$\top \Rightarrow A \equiv A \qquad \bot \Rightarrow A \equiv \top$$

$$A \Leftrightarrow \top \equiv A \qquad A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$A \Rightarrow A \equiv A \qquad A \Leftrightarrow A \equiv A$$

Logičke ekvivalencije - primeri

$$A \wedge \top \equiv A \qquad A \wedge \bot \equiv \bot$$

$$A \vee \top \equiv \top \qquad A \vee \bot \equiv A$$

$$A \Rightarrow \top \equiv \top \qquad A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$\top \Rightarrow A \equiv A \qquad \bot \Rightarrow A \equiv \top$$

$$A \Leftrightarrow \top \equiv A \qquad A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$A \Rightarrow A \equiv A \qquad A \Leftrightarrow A \equiv A$$

Logičke ekvivalencije - primeri

$$A \wedge \top \equiv A \qquad A \wedge \bot \equiv \bot$$

$$A \vee \top \equiv \top \qquad A \vee \bot \equiv A$$

$$A \Rightarrow \top \equiv \top \qquad A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$\top \Rightarrow A \equiv A \qquad \bot \Rightarrow A \equiv \top$$

$$A \Leftrightarrow \top \equiv A \qquad A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$A \Rightarrow A \equiv A \qquad A \Leftrightarrow A \equiv A$$

Logičke ekvivalencije - primeri

$A \wedge \top \equiv A$	$A \wedge \bot \equiv \bot$
$A \vee \top \equiv \top$	$A \vee \bot \equiv A$
$A \Rightarrow \top \equiv \top$	$A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$
$\top \Rightarrow A \equiv A$	$\bot \Rightarrow A \equiv \top$
$A \Leftrightarrow \top \equiv A$	$A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A$
$A \Rightarrow A \equiv A$	$A \Leftrightarrow A \equiv A$

Logičke ekvivalencije - primeri

$A \wedge \top \equiv A$	$A \wedge \bot \equiv \bot$
$A \vee \top \equiv \top$	$A \vee \bot \equiv A$
$A \Rightarrow \top \equiv \top$	$A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$
$\top \Rightarrow A \equiv A$	$\bot \Rightarrow A \equiv \top$
$A \Leftrightarrow \top \equiv A$	$A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A$
$A \Rightarrow A \equiv A$	$A \Leftrightarrow A \equiv A$

Logičke ekvivalencije - primeri

$$A \wedge \top \equiv A \qquad A \wedge \bot \equiv \bot$$

$$A \vee \top \equiv \top \qquad A \vee \bot \equiv A$$

$$A \Rightarrow \top \equiv \top \qquad A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$\top \Rightarrow A \equiv A \qquad \bot \Rightarrow A \equiv \top$$

$$A \Leftrightarrow \top \equiv A \qquad A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$A \Rightarrow A \equiv A \qquad A \Leftrightarrow A \equiv A$$

Logičke ekvivalencije - primeri

$A \wedge \top \equiv A$	$A \wedge \bot \equiv \bot$
$A \vee \top \equiv \top$	$A \vee \bot \equiv A$
$A \Rightarrow \top \equiv \top$	$A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$
$\top \Rightarrow A \equiv A$	$\bot \Rightarrow A \equiv \top$
$A \Leftrightarrow \top \equiv A$	$A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A$
$A \Rightarrow A \equiv A$	$A \Leftrightarrow A \equiv A$

Logičke ekvivalencije - primeri

$$A \wedge \top \equiv A \qquad A \wedge \bot \equiv \bot$$

$$A \vee \top \equiv \top \qquad A \vee \bot \equiv A$$

$$A \Rightarrow \top \equiv \top \qquad A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$\top \Rightarrow A \equiv A \qquad \bot \Rightarrow A \equiv \top$$

$$A \Leftrightarrow \top \equiv A \qquad A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$A \Rightarrow A \equiv A \qquad A \Leftrightarrow A \equiv A$$

Logičke ekvivalencije - primeri

$$A \wedge \top \equiv A \qquad A \wedge \bot \equiv \bot$$

$$A \vee \top \equiv \top \qquad A \vee \bot \equiv A$$

$$A \Rightarrow \top \equiv \top \qquad A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$\top \Rightarrow A \equiv A \qquad \bot \Rightarrow A \equiv \top$$

$$A \Leftrightarrow \top \equiv A \qquad A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A$$

$$A \Rightarrow A \equiv A \qquad A \Leftrightarrow A \equiv A$$

Logičke ekvivalencije - primeri

$$
\begin{array}{cc}
A \wedge \top \equiv A & A \wedge \bot \equiv \bot \\
A \vee \top \equiv \top & A \vee \bot \equiv A \\
A \Rightarrow \top \equiv \top & A \Rightarrow \bot \equiv \neg A \\
\top \Rightarrow A \equiv A & \bot \Rightarrow A \equiv \top \\
A \Leftrightarrow \top \equiv A & A \Leftrightarrow \bot \equiv \neg A \\
A \Rightarrow A \equiv A & A \Leftrightarrow A \equiv A
\end{array}
$$

Supstitucija

Rezultat **zamene** *(***supstitucije***) svih pojavljivanja (pot)formule C u formuli A formulom D označavamo sa $A[C \mapsto D]$. Ta zamena (supstitucija) definiše se na sledeći način:*

Supstitucija

Rezultat **zamene** *(***supstitucije***) svih pojavljivanja (pot)formule C u formuli A formulom D označavamo sa $A[C \mapsto D]$. Ta zamena (supstitucija) definiše se na sledeći način:*

- *ako za iskazne formule A i C važi $A = C$, onda je $A[C \mapsto D] = D$;*

Supstitucija

Rezultat **zamene** *(***supstitucije***) svih pojavljivanja (pot)formule C u formuli A formulom D označavamo sa $A[C \mapsto D]$. Ta zamena (supstitucija) definiše se na sledeći način:*

- *ako za iskazne formule A i C važi $A = C$, onda je $A[C \mapsto D] = D$;*
- *ako za iskazne formula A i C važi $A \neq C$ i A je atomička iskazna formula, onda je $A[C \mapsto D] = A$;*

Supstitucija

Rezultat **zamene** *(***supstitucije***) svih pojavljivanja (pot)formule C u formuli A formulom D označavamo sa $A[C \mapsto D]$. Ta zamena (supstitucija) definiše se na sledeći način:*

- *ako za iskazne formule A i C važi $A = C$, onda je $A[C \mapsto D] = D$;*
- *ako za iskazne formula A i C važi $A \neq C$ i A je atomička iskazna formula, onda je $A[C \mapsto D] = A$;*
- *ako za iskazne formule A, B i C važi $A \neq C$ i $A = \neg B$, onda je $A[C \mapsto D] = \neg(B[C \mapsto D])$;*

Supstitucija

Rezultat **zamene** *(***supstitucije***) svih pojavljivanja (pot)formule C u formuli A formulom D označavamo sa $A[C \mapsto D]$. Ta zamena (supstitucija) definiše se na sledeći način:*

- *ako za iskazne formule A i C važi $A = C$, onda je $A[C \mapsto D] = D$;*
- *ako za iskazne formula A i C važi $A \neq C$ i A je atomička iskazna formula, onda je $A[C \mapsto D] = A$;*
- *ako za iskazne formule A, B i C važi $A \neq C$ i $A = \neg B$, onda je $A[C \mapsto D] = \neg(B[C \mapsto D])$;*
- *ako za iskazne formule A, B_1, B_2 i C važi $A \neq C$ i*
    - $A = B_1 \wedge B_2$, *onda je* $A[C \mapsto D] = B_1[C \mapsto D] \wedge B_2[C \mapsto D]$;
    - $A = B_1 \vee B_2$, *onda je* $A[C \mapsto D] = B_1[C \mapsto D] \vee B_2[C \mapsto D]$;
    - $A = B_1 \Rightarrow B_2$, *onda je* $A[C \mapsto D] = B_1[C \mapsto D] \Rightarrow B_2[C \mapsto D]$;
    - $A = B_1 \Leftrightarrow B_2$, *onda je* $A[C \mapsto D] = B_1[C \mapsto D] \Leftrightarrow B_2[C \mapsto D]$.

Uopštena supstitucija

***Uopštena zamena** je skup zamena $[C_1 \mapsto D_1], \ldots, [C_n \mapsto D_n]$, gde su C_i i D_i proizvoljne iskazne formule. Takvu zamenu zapisujemo $[C_1 \mapsto D_1, \ldots, C_n \mapsto D_n]$.*
Formulu koja je rezultat primene ovakve zamene nad formulom A, označavamo sa $A[C_1 \mapsto D_1, \ldots, C_n \mapsto D_n]$.

Primer

Neka je $A = p \vee (\neg q \Leftrightarrow r)$. Tada važi:

$$A[p \mapsto p \Rightarrow q, q \mapsto p \wedge q] = (p \Rightarrow q) \vee \big(\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow r\big)$$
$$A[p \mapsto p \Rightarrow q, p \Rightarrow q \mapsto \neg r] = (p \Rightarrow q) \vee (\neg q \Leftrightarrow r)$$

Teorema

Ako je iskazna formula $A = A(p_1, \dots, p_n)$ tautologija i ako su $A_1, \dots, A_n$ proizvoljne formule, onda je formula $B = A[p_1 \mapsto A_1, \dots, p_n \mapsto A_n]$ takođe tautologija.

Dokaz. Neka je υ proizvoljna valuacija za formulu B. Definišemo novu valuaciju ω na sledeći način: $\omega(p_i) = I_\upsilon(B_i)$, $i = 1, \dots, n$. Indukcijom nad skupom iskaznih formula može se dokazati da važi $I_\upsilon(B) = I_\omega(A)$. Kako je iskazna formula A tautologija, ona je tačna u svakoj valuaciji, tj. $I_\omega(A) = 1$. Otuda je i $I_\upsilon(B) = 1$, pa kako je υ proizvoljna valuacija, sledi da je formula B tautologija.

Primer

Formula $A = p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ je tautologija, pa isto važi i za formulu $A[p \mapsto p \vee q, q \mapsto \neg p] = (p \vee q) \Rightarrow \big(\neg p \Rightarrow (p \vee q)\big)$.

Teorema o zameni

Teorema

Ako je $C \equiv D$, onda je $A[C \mapsto D] \equiv A$.

Dokaz. Ako je $A = C$, onda je $A[C \mapsto D] = D$, pa iz $C \equiv D$ očigledno sledi $A[C \mapsto D] \equiv A$.
Ako je $A \neq C$, dokaz vršimo indukcijom po složenosti formule.

B.I. Ako je A atomička formula, onda je $A[C \mapsto D] = A$, te tvrđenje trivijalno važi.

I.H. Pretpostavimo da tvrđenje teoreme važi za formule A i B, proizvoljne složenosti.

I.K. Dokazujemo da tvrđenje važi za formule $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ i $A \Leftrightarrow B$.

- 1° Po definiciji zamene važi $(\neg A)[C \mapsto D] = \neg A[C \mapsto D]$. Na osnovu induktivne pretpostavke je $A[C \mapsto D] \equiv A$, odakle je sledi $\neg A[C \mapsto D] \equiv \neg A$, odnosno $(\neg A)[C \mapsto D] \equiv \neg A$.
- 2° Po definiciji zamene važi $(A \wedge B)[C \mapsto D] = A[C \mapsto D] \wedge B[C \mapsto D]$. Na osnovu induktivne pretpostavke je $A[C \mapsto D] \equiv A$ i $B[C \mapsto D] \equiv B$, odakle je sledi $A[C \mapsto D] \wedge B[C \mapsto D] \equiv A \wedge B$, odnosno $(A \wedge B)[C \mapsto D] \equiv A \wedge B$.

  Ostali slučajevi se anlogno dokazuju.

Normalne forme

- Iskazna formula je u **konjunktivnoj normalnoj formi (KNF)** ako je oblika
$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n,$$
pri čemu je svaka formula A_i $(1 \leq i \leq n)$ klauza, tj. disjunkcija literala, npr.
$$(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg r).$$

- Iskazna formula je u **disjunktivnoj normalnoj formi (DNF)** ako je oblika
$$A_1 \vee \ldots \vee A_n,$$
pri čemu je svaka formula A_i $(1 \leq i \leq n)$ konjunkcija literala, npr.
$$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r).$$

Algoritam za KNF

1. Eliminisati veznik $\Leftrightarrow$ koristeći logičku ekvivalenciju
$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$
2. Eliminisati veznik $\Rightarrow$ koristeći logičku ekvivalenciju
$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$
3. Dok god je to moguće primenjivati logičke ekvivalencije (De Morganovi zakoni):
$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$
4. Eliminisati višestruke veznike koristeći logičku ekvivalenciju (Zakon dvostruke negacije):
$$\neg\neg A \equiv A$$
5. Dok god je to moguće primjenjivati logičke ekvivalencije (zakoni distributivnosti):
$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Istinitosna funkcija

Svakoj iskaznoj formuli $A = A(p_1, \ldots, p_n)$ dodeljujemo **istinitosnu funkciju** $f_A : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ takvu da važi

$$f_A(a_1, \ldots, a_n) = I_v(A(p_1, \ldots, p_n)),\ a_1, \ldots, a_n \in \{0,1\},$$

pri čemu je v valuacija u kojoj je $v(p_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Primer

Formula $A = (p \Rightarrow \neg q) \vee r$ u valuaciji $v = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ima vrednost $I_v(A) = 1$, pa je $f_A(1,0,0) = 1$.

★ Logički ekvivalentnim formulama sa istim brojem iskaznih slova odgovaraju identične istinitosne funkcije (iz $A \equiv B$ sledi $I_v(A) = I_v(B)$).

Postavlja se pitanje da li važi i obrnuto, tj. da li za svaku istinitosnu funkciju postoji iskazna formula čija je to istinitosna funkcija?

Odgovor je: DA!

Specijalno,

- ako je $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$ za sve $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ onda nju generiše tautologija, pa možemo uzeti formulu $p \vee \neg p$,
- ako je $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ za sve $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ onda nju generiše kontradikcija, pa možemo uzeti formulu $p \wedge \neg p$.

Kanonička disjunktivna normalna forma

Teorema

Neka je $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *istinitosna funkcija koja nije uvek jednaka* 0*. Tada važi*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n} \left(f(a_1,\ldots,a_n) \wedge x_1^{a_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{a_n}\right),$$

gde je $x^a = \begin{cases} x & , \quad a = 1 \\ \neg x & , \quad a = 0 \end{cases}.$

Dokaz. Neka je $(b_1,\ldots,b_n) \in \{0,1\}^n$ proizvoljna n-torka. Tada važi $b_i^{a_i} = 1$ akko $b_i = a_i$, pa je

$$b_1^{a_1} \wedge \cdots \wedge b_n^{a_n} = \begin{cases} 1 & , \quad b_1 = a_1,\ldots,b_n = a_1 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}.$$

Znači, svi konjunkti $f(a_1,\ldots,a_n) \wedge b_1^{a_1} \wedge \ldots \wedge b_n^{a_n}$ će imati vrednost 0, osim kada je $(b_1,\ldots,b_n) = (a_1,\ldots,a_n)$, a tada je jednaka vrednosti $f(b_1,\ldots,b_n)$.

Primetimo sledeće u vezi formule

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n} \left(f(a_1,\ldots,a_n)\wedge x_1^{a_1}\wedge\ldots\wedge x_n^{a_n}\right).$$

Pošto je $\perp\wedge x_1^{a_1}\wedge\ldots\wedge x_n^{a_n}\equiv\perp$ i $y\vee\perp\equiv y$ za svako y, vrednost izraza sa desne strane se neće promeniti ukoliko uklonimo sve konjunkte u kojima je $f(a_1,\ldots,a_n)=0$. S druge strane, ako je $f(a_1,\ldots,a_n)=1$, tada umesto $\top\wedge x_1^{a_1}\wedge\ldots\wedge x_n^{a_n}$ možemo staviti samo $x_1^{a_1}\wedge\ldots\wedge x_n^{a_n}$. Zato je

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{f(a_1,\ldots,a_n)=1} \left(x_1^{a_1}\wedge\ldots\wedge x_n^{a_n}\right).$$

Za poslednju formulu kažemo da je u **kanoničkoj disjunktivnoj normalnoj formi**.

Kanonička konjunktivna normalna forma

Za istinitosnu funkciju $f'(x_1, \dots, x_n) = \neg f(x_1, \dots, x_n)$ na osnovu prethodne teoreme važi

$$\neg f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(a_1,\dots,a_n)\in\{0,1\}^n} \left(\neg f(a_1, \dots, a_n) \wedge x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}\right).$$

Ako negiramo obe strane jednakosti, dobijamo

$$\begin{aligned}
\neg\neg f(x_1, \dots, x_n) &= \neg \bigvee_{(a_1,\dots,a_n)\in\{0,1\}^n} \left(\neg f(a_1, \dots, a_n) \wedge x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}\right) \\
&\equiv \bigwedge_{(a_1,\dots,a_n)\in\{0,1\}^n} \neg\left(\neg f(a_1, \dots, a_n) \wedge x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n}\right) \\
&\equiv \bigwedge_{(a_1,\dots,a_n)\in\{0,1\}^n} \left(\neg\neg f(a_1, \dots, a_n) \vee \neg x_1^{a_1} \vee \dots \vee \neg x_n^{a_n}\right) \\
&\equiv \bigwedge_{(a_1,\dots,a_n)\in\{0,1\}^n} \left(f(a_1, \dots, a_n) \vee x_1^{\neg a_1} \vee \dots \vee x_n^{\neg a_n}\right).
\end{aligned}$$

Dualno prethodnom slučaju zaključujemo da se, s obzirom da je $\top \vee x_1^{\neg a_1} \vee \ldots \vee x_n^{\neg a_n} \equiv \top$ i $y \wedge \top \equiv y$ za svako y, vrednost izraza sa desne strane neće promeniti ukoliko uklonimo sve disjunkte u kojima je $f(a_1, \ldots, a_n) = 1$, a ako je $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, tada umesto $\bot \vee x_1^{\neg a_1} \vee \ldots \vee x_n^{\neg a_n}$ možemo ostaviti samo $x_1^{\neg a_1} \vee \ldots \vee x_n^{\neg a_n}$. Otuda je

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{f(a_1,\ldots,a_n)=0} \left(x_1^{\neg a_1} \vee \ldots \vee x_n^{\neg a_n}\right).$$

Za poslednju formulu kažemo da je u **kanoničkoj konjuktivnoj normalnoj formi**.

Kanoničke forme - primer

Primer

Neka su istinitosne vrednosti formule A prikazane u tablici

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

KDNF:

$$A \equiv (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee \\ \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

KKNF:

$$A \equiv (p \vee q \wedge r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

Potpuni skup veznika

- Za neki skup veznika kažemo da je **potpun** ako je svaka iskazna formula logički ekvivalentna nekoj iskaznoj formuli samo nad tim skupom veznika i bez logičkih konstanti $\top$ i $\bot$.
- Ako je potpun skup veznika minimalan, tj. nijedan njegov pravi podskup nije potpun, onda je on **baza**.
- Kako za svaku iskaznu formulu postoje njoj ekvivalentne formule u *KNF* i *DNF*, sledi da je $\{\neg, \wedge, \vee\}$ jedan potpun skup veznika, ali nije minimalan.

Teorema

Svaki od sledećih skupova veznika je potpun:

a) $\{\neg, \wedge\}$
b) $\{\neg, \vee\}$
c) $\{\neg, \Rightarrow\}$

Dokaz.

a) Kako je $\{\neg, \wedge, \vee\}$ potpun skup veznika, dovoljno je pokazati da se $\vee$ može izraziti preko $\neg$ i $\wedge$. Koristeći zakon dvostruke negacije i De Morganov zakon izvodimo

$$p \vee q \equiv \neg\neg(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q.)$$

b) Dualno prethodnom slučaju imamo $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$.

c) Koristimo ekvivalencije:

$$p \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q$$
$$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \Rightarrow \neg q)$$

Teorema

Skupovi $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ *i* $\{\neg, \Rightarrow\}$ *su baze iskazne logike.*

Dokaz. Pokazaćemo da nijedan pravi podskup ovih skupova veznika nije potpun.

$\{\neg\}$ nije baza jer su sve formule u kojima se od veznika pojavljuje samo $\neg$ oblika $\neg\neg\ldots\neg p$, za neko iskazno slovo p, što je, u zavisnosti od parnosti broja veznika, ekvivalentno sa p ili $\neg p$.

Indukcijom po složenosti formule može se pokazati da svaka formula $F(p_1, \ldots, p_n)$ u kojoj se od veznika pojavljuju samo $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ zadovoljava svojstvo: ako je $v(p_1) = \cdots = v(p_n) = 1$, onda je $I_v(F) = 1$. Otuda sledi da se $\neg$ ne može izraziti pomoću veznika $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$.

Jednoelementne baze

Veznici $\downarrow$ i $\uparrow$ se definišu na sledeći način:

$A \downarrow B = \neg(A \vee B)$ Lukašijevičeva funkcija (NOR)

$A \uparrow B = \neg(A \wedge B)$ Šeferova funkcija (NAND).

Na osnovu ovih definicija možemo formirati istinitosne tablice

A	B	$A \downarrow B$	$A \uparrow B$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Teorema

$\{\downarrow\}$ i $\{\uparrow\}$ su jedini jednoelementni skupovi binarnih veznika koji su baze.

Dokaz. Skupovi $\{\downarrow\}$ i $\{\uparrow\}$ jesu baze jer važi

$$
\begin{aligned}
p \downarrow p &\equiv \neg(p \vee p) \equiv \neg p \\
p \vee q &\equiv \neg\neg(p \vee q) \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \uparrow p &\equiv \neg(p \wedge p) \equiv \neg p \\
p \wedge q &\equiv \neg\neg(p \wedge q) \equiv \neg(p \uparrow q) \equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q),
\end{aligned}
$$

tj. veznici u bazi $\{\neg, \vee\}$ se mogu izraziti pomoću $\downarrow$, a veznici u bazi $\{\neg, \wedge\}$ se mogu izraziti pomoću $\uparrow$.

Dokaz jedinstvenosti. Neka je $*$ binarni veznik takav da je $\{*\}$ baza. Ukoliko $*$ očuvava tačnost ili netačnost, tj. ako iz $I_v(A) = I_v(B) = 1$ sledi $I_v(A * B) = 1$ ili iz $I_v(A) = I_v(B) = 0$ sledi $I_v(A * B) = 0$, onda pomoću $*$ nije moguće izraziti $\neg$, pa mora da važi

A	B	$A * B$
0	0	1
0	1	a
1	0	b
1	1	0

Ako je $a = b = 0$, onda je $* = \downarrow$, a ako je $a = b = 1$, onda je $* = \uparrow$.

Ako je $a = 1$ i $b = 0$, onda je $A * B \equiv \neg A$, dok u slučaju $a = 0$ i $b = 1$ imamo $A * B \equiv \neg B$, što su suštinski unarne operacije koje nisu dovoljne da bi se preko njih izrazila bilo koja od binarnih operacija $\wedge, \vee, \Rightarrow, \ldots$

Dejvis-Patnam-Logman-Lovelandova procedura

- Dejvis-Patnam-Logman-Lovelandova procedura (DPLL procedura) vrši ispitivanje zadovoljivosti iskaznih formula (SAT problem).
- Primenjuje se na iskazne formule u konjunktivnoj normalnoj formi.
- Ulaznu formulu možemo posmatrati kao (multi)skup klauza, a svaku klauzu možemo posmatrati kao (multi)skup literala.
- U proceduri se podrazumevaju sledeće konvencije:
  - prazan skup klauza (prazna formula) je zadovoljiv;
  - klauza koja ne sadrži nijedan literal (prazna klauza) je nezadovoljiva;
  - formula koja sadrži praznu klauzu je nezadovoljiva.
- Za literal ℓ označimo sa $\bar{\ell}$ njegovu negaciju. **Jedinična klauza** je klauza koja se sastoji iz jednog literala. **Čist literal** ℓ je takav da se on pojavljuje u formuli dok se $\bar{\ell}$ ne pojavljuje.

DPLL algoritam

Ulaz: multiskup klauza $D(D = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\})$

Izlaz: **DA**, ako je multiskup D zadovoljiv;

NE, ako multiskup D nije zadovoljiv

1. Ako je D prazan, vrati DA.
2. Zameni sve literale $\neg\bot$ sa $\top$ i zameni sve literale $\neg\top$ sa $\bot$.
3. Obriši sve literale jednake $\bot$.
4. Ako D sadrži praznu klauzu, vrati NE.
5. Ako neka klauza C_i sadrži literal $\top$ ili sadrži i neki literal i njegovu negaciju, vrati vrednost koju vraća $\mathrm{DPLL}(D \setminus C_i)$ (tautology).
6. Ako je C_i jedinična klauza jednaka literalu ℓ, onda vrati vrednost koju vraća $\mathrm{DPLL}(D[\ell \to \top])$ (unit propagation).
7. Ako D sadrži čist literal ℓ, onda vrati vrednost koju vraća $\mathrm{DPLL}(D[\ell \to \top])$ (pure literal).
8. Ako $\mathrm{DPLL}(D[p \to \top])$ vraća DA, onda vrati DA; inače vrati vrednost koju vraća $\mathrm{DPLL}(D[p \to \bot])$ (p je iskazno slovo u D) (split).

Korektnost DPLL procedure

Teorema

Za svaku iskaznu formulu DPLL procedura se zaustavlja i vraća odgovor DA ako i samo ako je polazna formula zadovoljiva.

Dokaz. Dokazaćemo da se procedura DPLL zaustavlja indukcijom po broju $N + L$, gde je N broj iskaznih slova, a L broj klauza u D.

- B.I. Ako je $N + L = 0$, onda se procedura zaustavlja u koraku 1.
- I.H. Pretpostavimo da se procedura zaustavlja za vrednosti $N + L$ manje od k.
- I.K. Neka za ulazne vrednosti važi $N + L = k$. Tada se procedura može zaustaviti u koraku 1 ili u koraku 4 ili stiže do koraka 5. Ukoliko je izvršavanje procedure stiglo do koraka 5, ono se nastavlja izvršavanjem (tačno) jednog od koraka 5, 6, 7 ili 8. U koraku 5 se (rekurzivno) poziva procedura DPLL sa ulaznim parametrima za vrednost $N + (L - 1) < k$, dok se u koracima 6,7 i 8 pozivaju procedure DPLL sa ulaznim parametrima za vrednost $(N - 1) + L < k$, pa na osnovu induktivne pretpostavke taj poziv se izvršava u konačnom broju koraka, te se zaustavlja tekući korak i, a time i izvršavanje procedure.

Dokaz korektnosti. Potrebno je još dokazati da procedura vraća **DA** akko ulazu odgovara zadovoljiva formula. Za to je potrebno i dovoljno dokazati korektnost svakog od koraka, odnosno:

1. Ako je D prazan, onda je on zadovoljiv.
2. D je zadovoljiv akko je zadovoljiv $D[\neg\bot \to \top, \neg\top \to \bot]$.
3. D je zadovoljiv akko je zadovoljiv $D[A \vee \bot \vee B \to A \vee B]$.
4. Ako D sadrži praznu klauzu, onda je on nezadovoljiv.
5. Ako neka klauza C_i sadrži literal $\top$ ili sadrži i neki literal i njegovu negaciju, onda je D zadovoljiv akko je zadovoljiv $D \setminus C_i$.
6. Ako je neka klauza jedinična i jednaka literalu ℓ, onda je D zadovoljiv akko je zadovoljiv $D[\ell \to \top]$.
7. Ako D čist literal ℓ, onda je D zadovoljiv akko je zadovoljiv $D[\ell \to \top]$.
8. D je zadovoljiv akko je zadovoljiv jedan od (multi)skupova $D[p \to \top]$, $D[p \to \bot]$.

- Kako SAT problem spada u grupu NP-kompletnih problema, DPLL procedura je u najgorem slučaju eksponencijalne složenosti $O(2^N)$, gde je N broj iskaznih slova u formuli.
- Iako je DPLL procedura predstavljena još 1962. godine i dalje predstavlja bazu najefikasnijih algoritama za rešavanje SAT problema.
- DPLL proceduru možemo iskoristiti i za ispitivanje da li je data formula tautologija, poreciva ili kontradikcija.
- Pravci razvoja:
  - Definisanje novih pravila za izbor literala u pravilu split,
  - Definisanje novih struktura podataka u cilju ubrzanje izvršenja algoritma,
  - Razvoj varijacija osnovnog algoritma sa vraćanjem.

Metod rezolucije

- Metod rezolucije ispituje da li je data formula zadovoljiva.
- Primenjuje na iskazne formule u konjunktivnoj normalnoj formi.
- Zbog komutativnosti i asocijativnosti konjunkcije i disjunkcije svaku formulu u KNF možemo posmatrati kao (multi)skup klauza, a svaku klauzu kao (multi)skup literala.

Primer

Posmatrajmo formulu

$$(p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor \neg r)$$

Zapisaćemo je kao skup klauza $S = \{C_1, C_2, C_3\}$, pri čemu je svaka od njih skup literala:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{p, q, r\} \\ C_2 &= \{\neg p, \neg q, r\} \\ C_3 &= \{\neg p, q, \neg r\} \end{aligned}$$

- Višestruka pojavljivanje nekog literala u klauzi možemo eliminisati na osnovu logičke ekvivalencije $A \vee A \equiv A$.

  Slično, na osnovu logičke ekvivalencije $A \wedge A \equiv A$, možemo da eliminišemo višestruka pojavljivanja istih klauza.

- Klauza je zadovoljiva u nekoj valuaciji ako je bar jedan literal iz klauze tačan u toj valuaciji. Formula je tačna u nekoj valuaciji ako je svaka klauza tačna u toj valuaciji.

- **Prazna klauza**, u oznaci $\Box$, je klauza koja ne sadrži nijedan literal i nije zadovoljiva.

- Ako neka klauza sadrži literal $\bot$, onda taj literal možemo izbrisati, a da ne promenimo zadovoljivost formule, jer važi $A \vee \bot \equiv A$.

  Ako neka klauza sadrži literal $\top$, onda tu klauzu možemo izbrisati, a da ne promenimo zadovoljivost formule, jer je ta klauza u svakoj valuaciji tačna i važi $A \wedge \top \equiv A$.

Primer

Posmatrajmo skup klauza $S = \{C_1, C_2, C_3\}$, gde je

$$C_1 = \{p, \top, \neg q\},\ C_2 = \{\neg r, q, s\},\ C_3 = \{\bot, \neg p, r, q\}.$$

Primetimo da klauza C_1 sadrži logičku konstantu $\top$, te je ona tačna u svakoj valuaciji, što znači da ne utiče na zadovoljivost skupa S i možemo da je eliminišemo. Dobijamo skup klauza $S' = \{C_2, C_3\}$, gde je

$$C_2 = \{\neg r, q, s\},\ C_3 = \{\bot, \neg p, r, q\}.$$

Dalje, klauza C_3 sadrži logičku konstantu $\bot$, pa možemo da eliminišemo taj literal, bez uticaja na zadovoljivost formule, i dobijamo sledeći skup klauza $S'' = \{C_2, C_3'\}$, gde je

$$C_2 = \{\neg r, q, s\},\ C_3' = \{\neg p, r, q\}.$$

Ova eliminacija nije uticala na zadovoljivost početnog skupa, tj. skup klauza S je zadovoljiv ako i samo ako je zadovoljiv skup S''.

Pravilo rezolucije

- Označimo sa $\bar{\ell}$ negaciju literala ℓ. Za literale ℓ i $\bar{\ell}$ kažemo da su **komplementarni**.
- **Pravilo rezolucije** primenjujemo na klauze koje sadrže komplemetarne literale, tj.

$$\frac{C' \vee \ell \qquad C'' \vee \bar{\ell}}{C' \vee C''}$$

Primer

Posmatrajmo klauze $C_1 = p \vee q$, $C_2 = s \vee \neg q$ i $C_3 = q \vee \neg r$.
Klauze C_1 i C_2 sadrže komplementarne literale (q i $\neg q$), pa na ove dve klauze možemo primeniti pravilo rezolucije na sledeći način:

$$\frac{p \vee q \qquad s \vee \neg q}{p \vee s}$$

Klauze C_1 i C_3 ne sadrže komplementarne literale, pa se na njih ne može primeniti pravilo rezolucije.

Pravilo rezolucije

$$\frac{C' \vee \ell \qquad C'' \vee \bar{\ell}}{C' \vee C''}$$

- Klauzu $C' \vee C''$ zovemo **rezolventom** klauza $C' \vee \ell$ i $C'' \vee \bar{\ell}$, a klauze $C' \vee \ell$ i $C'' \vee \bar{\ell}$ **roditeljima rezolvente.**

- Pravilo rezolucije zasnovano je na sledećem:

  važi $C' \vee \ell \equiv \neg C' \Rightarrow \ell$ i $C'' \vee \bar{\ell} \equiv \ell \Rightarrow C''$, pa zbog tranzitivnosti implikacije formule $\neg C' \Rightarrow \ell$ i $\ell \Rightarrow C''$ kao logičku posledicu imaju $\neg C' \Rightarrow C'' \equiv C' \vee C''$.

Metod rezolucije

- Primenom pravila rezolucije ne zamenjujemo roditelje rezolvente sa rezolventom, nego rezolventu dodajemo skupu klauza.

Primer

Neka je dat skup klauza $S = \{C_1, C_2, C_3\}$, pri čemu su klauze $C_1 = \{p, q, \neg r\}$, $C_2 = \{p, \neg q\}$, $C_3 = \{r\}$. Pravilo rezolucije možemo primeniti na klauze C_1 i C_2, što nam daje

$$\frac{p \vee q \vee \neg r \qquad p \vee \neg q}{p \vee \neg r}$$

Dakle, dobili smo rezolventu $C_4 = \{p \vee \neg r\}$, pa u nastavku postupak primenjujemo na skup klauza $S' = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$.

- **Metod rezolucije** je postupak za ispitivanje zadovoljivosti skupa klauza, koji se sastoji od uzastopnog primenjivanja pravila rezolucije.

Metod rezolucije

- Neka je S zadati skup klauza za koji ispitujemo zadovoljivost. Formiramo niz skupova na sledeći način:

  $S_0 = S$, a S_{i+1} je rezultat primene pravila rezolucije na neke klauze iz skupa S_i.

- Postupak se zaustavlja na jedan od sledeća dva načina:
  - ako u nekom koraku skup S_i sadrži praznu klauzu ($\Box$), onda se procedura zaustavlja i vraća odgovor "skup S nije zadovoljiv";
  - ako se za neko i skupovi S_i i S_{i+1} poklapaju (u S_i ne postoje klauze na koje se može primeniti pravilo rezolucije ili se svaka moguća rezolventa već nalazi u skupu S_i), onda se procedura zaustavlja i vraća odgovor "skup S je zadovoljiv".

Zaustavljanje metoda rezolucije

Teorema

Metod rezolucije se zaustavja.

Dokaz. Nad skupom od n iskaznih slova ima $2n$ različitih literala (za svako iskazno slovo p postoje literali p i $\neg p$) i svaki od njih može da se pojavljuje ili ne pojavljuje u klauzi, pa različitih klauza ima najviše $2^{2n} = 4^n$.

Kako se u svakom koraku metoda rezolucije tekućem skupu dodaje nova klauza, procedura se mora zaustaviti u konačno mnogo koraka, jer se iz literala iz skupa S može izvesti samo konačan broj (novih) klauza.

Saglasnost pravila rezolucije

Teorema

Neka je skup klauza S' dobijen od skupa klauza S primenom pravila rezolucije. Ako neka valuacija zadovoljava skup S, onda ona zadovoljava i skup S'.

Dokaz. Pretpostavimo da je valuacija v model za sve klauze iz skupa S, tj. $v \models S$. Dokažimo da tada važi i $v \models S'$. Pretpostavimo da je pravilo rezolucije primenjeno na klauze C_a i C_b i da je njihova rezolventa klauza C_r. Jedina klauza koja pripada skupu S', a moguće ne pripada skupu S je klauza C_r, pa je dovoljno dokazati $v \models C_r$.
Pretpostavimo da $\ell \in C_a$ i $\overline{\ell} \in C_b$. Ako je literal ℓ tačan u valuaciji v, onda je literal $\overline{\ell}$ netačan, a kako je $v \models C_b$, u klauzi C_b mora da postoji neki literal (različit od $\overline{\ell}$) koji je tačan u valuaciji v. Taj literal je i element klauze C_r, pa je i ona zadovoljiva u valuaciji v. Analogno se dokazuje slučaj kada je literal ℓ netačan u valuaciji v.

Saglasnost metoda rezolucije

Teorema

Ako se iz skupa klauza S može izvesti prazna klauza, onda je S nezadovoljiv skup klauza.

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme, ako je skup klauza S zadovoljiv, zadovoljiv je i svaki skup klauza S', dobijen u nekoj iteraciji metoda. Obratno, skup klauza S je nezadovoljiv ako je nezadovoljiv skup S'. Dakle, ako skup S' sadrži praznu klauzu on je kontradiktoran, pa isto važi i za skup S.

Potpunost metoda rezolucije

Teorema

Ako je S nezadovoljiv skup klauza, onda se iz njega može izvesti prazna klauza.

Dokaz. Neka je S' poslednji skup dobijen metodom rezolucije od skupa S. Ako je skup S nezadovoljiv, isto važi i za skup S'. Tada se iz skupa S' može izabrati konačan nezadovoljiv podskup klauza $S^* = \{C_1, \dots, C_m\}$. Označimo sa $|C|$ broj literala u klauzi C. Tvrđenje ćemo dokazati indukcijom po broju $n = |C_1| + \cdots + |C_m| - m$.

B.I. Ako je $n = 0$, moguće je da su ili sve klauze jedinične, ili da je neka klauza prazna. U drugom slučaju tvrđenje je dokazano, dok u prvom, pošto je S nezadovoljiv, moraju postojati dve klauze čiji su literali komplementarni. Primenom pravila rezolucije na ove dve klauze izvodi se prazna klauza.

Potpunost metoda rezolucije

Dokaz - nastavak

I.H. Pretpostavimo da tvrđenje važi za svako $n < k$.

I.K. Neka je $n = |C_1| + \cdots + |C_m| - m = k$. Sada bar jedna od klauza sadrži bar dva literala. Neka je to klauza C_i - ona je oblika $C_i' \cup C_i''$, gde su C_i' i C_i'' neprazni skupovi literala. Posmatrajmo skup klauza $\{C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i', C_{i+1}, \ldots, C_m\}$. Kako je skup S^* nezadovoljiv, nezadovoljiv je i ovaj skup, ali za njega važi $|C_1| + \cdots + |C_i'| + \cdots + |C_m| - m < k$, pa se, na osnovu induktivne pretpostavke, iz ovog skupa klauza moze izvesti prazna klauza, što onda važi i za skup S^* ako u tom izvođenju nije učestvovala klauza C_i'. Ako klauza C_i' jeste učestvovala u izvođenju prazne klauze, razmotrimo izvođenje u kome se umesto C_i' koristi C_i. To bi bio dokaz za C_i''. Ponovnom primenom induktivne pretpostavke na skup $\{C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i'', C_{i+1}, \ldots, C_m\}$ zaključujemo da se i iz ovog skupa izvodi prazna klauza, pa to važi i za skup S^*.

Metod rezolucije može se optimizovati koristeći sledeće činjenice:

- ako je klauza C tautologija, onda je skup S zadovoljiv akko je skup $S \setminus \{C\}$ zadovoljiv;
- ako skup S sadrži jediničnu klauzu $\{\ell\}$, onda je skup S zadovoljiv akko je zadovoljiv skup dobijen od S brisanjem svih klauza koje sadrže literal ℓ i, zatim, brisanjem svih pojavljivanja literala $\bar{\ell}$;
- ako se u skupu klauza S pojavljuje literal ℓ, a ne i literal $\bar{\ell}$, onda je skup S zadovoljiv akko je zadovoljiv skup dobijen od S brisanjem svih klauza koje sadrže literal ℓ;
- ako skup S sadrži klauze C_0 i C_1 i ako je $C_0 \subseteq C_1$, onda je skup S zadovoljiv akko je zadovoljiv skup $S \setminus \{C_1\}$.

- Pomoću metoda rezolucije može se dokazati valjanost formule A tako što se pokaže da je formula $\neg A$ nezadovoljiva.

- Metodom rezolucije može se ispitati i da li važi $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \models B$. Ovo tvrđenje je tačno akko je formula $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$ valjana, a to važi akko je njena negacija nezadovoljiva.

$$\begin{aligned}\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B) &\equiv \neg\big(\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \vee B\big)\\ &\equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B\end{aligned}$$

Teorema o kompaktnosti

Teorema

Ako je svaki konačan podskup skupa formula Γ zadovoljiv, onda i je skup Γ zadovoljiv.

- Ako je skup formula Γ protivrečan, onda postoji konačan podskup skupa Γ koji je protivrečan.
- Za svaki skup formula Γ ako važi $\Gamma \models A$, onda postoji konačno mnogo formula $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Gamma$ tako je $A_1, A_2, \ldots, A_n \models A$.

Formalna teorija

Formalna teorija $\mathcal{T}$ je uređena četvorka
$$\mathcal{T} = (\Sigma, For, Ax, P)$$
gde je

- Σ prebrojiv skup simbola koji čine **alfabet** teorije. Označimo sa Σ^* skup svih reči nad Σ;
- For $\subseteq \Sigma^*$ **skup formula**. Dat je efektivan postupak kojim se može utvrditi da li data reč pripada skupu For ili ne;
- Ax $\subseteq For$ **skup aksioma**. Ako je dat efektivan postupak za odlučivanje da li je neka formula aksioma ili ne, kažemo da je teorija **aksiomatska**;
- P $= \{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$ konačan skup **pravila izvođenja**. Svako pravilo izvođenja R_i je shema oblika

$$\frac{A_1 \;\; A_2 \;\; \ldots \;\; A_n}{A} \; R_i$$

gde su $A_1, A_2, \ldots, A_n, A \in For$. Pravilo R_i je relacija arnosti $(n+1)$ na skupu For.

Deduktivni sitemi

Tri najpoznatija deduktivna sistema su:

I Aksiomatski (Hilbertov) sistem:
- aksiome
- pravilo izvođenja (MP)

II Prirodna dedukcija:
- aksiome
- pravila eliminacije
- pravila uvođenja

III Račun sekvenata:
- aksiome
- pravila uvođenja sa leve strane
- pravila uvođenja sa desne strane
- pravilo sečenja

Pojam dokaza može da se razlikuje od jednog do drugog deduktivnog sistema. Obično je dokaz niz formula (ili skup formula pridruženih stablu)

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

takav da je svaka formula A_i

- aksioma teorije $\mathcal{T}$ ili
- direktna posledica nekih od prethodnih formula u nizu na osnovu nekog pravila izvođenja.

Formula A teorije $\mathcal{T}$ je **teorema** teorije $\mathcal{T}$ ako postoji dokaz čiji je poslednji član formula A. Taj dokaz tada zovemo **dokazom formule** A i kažemo i da je formula A **dokaziva** u teoriji $\mathcal{T}$.

Pod pojmom "teorija $\mathcal{T}$" podrazumevamo skup svih teorema teorije $\mathcal{T}$. Ako postoji efektivna procedura za utvrđivanje da li je data formula teorema teorije $\mathcal{T}$, onda kazemo da je teorija $\mathcal{T}$ **odlučiva**, a inače kažemo da je **neodlučiva**.

Svaki intuicionistički dokaz istovremeno je i dokaz u klasičnoj logici, ali ne važi obratno: intuicionistički kriterijum dokaza je strožiji od klasičnog i intuicionisti ne prihvataju sve dokaze koje prihvata klasična logika.

Primer

Dokazati da postoje iracionalni brojevi p i q takvi da je broj p^q racionalan.
Dokaz.

Ako je $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ racionalan broj, onda brojevi $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ zadovoljavaju zadati uslov.
Ako $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nije racionalan broj, onda iz

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \in \mathbb{Q}$$

sledi da zadati uslov zadovoljavaju brojevi $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Koristili smo zakon isključenja trećeg $A \vee \neg A$. I dalje ne znamo koji su to brojevi, znamo samo da postoje. To je intuicionistima neprihvatljivo.

Deduktivne posledice

Neka je $\Gamma \subseteq For$ proizvoljan skup formula teorije $\mathcal{T}$ i neka je $A \in For$. Formula A je **deduktivna (sintaksna) posledica** skupa Γ, u oznaci $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}} A$, ako postoji konačan niz $B_1, \ldots, B_n$ formula iz For tako da je $B_n = A$ i za svako B_i, $1 \leq i \leq n$ važi

1. $B_i \in Ax$ ili
2. $B_i \in \Gamma$ ili
3. B_i se može dobiti od prethodnih formula u nizu primenom nekog pravila izvođenja iz $\mathcal{T}$.

Elemente skupa Γ zovemo **hipotezama** ili **premisama**.
Ako je skup Γ konačan, onda umesto $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash A$ pišemo kraće $A_1, \ldots, A_n \vdash A$.
Ako je skup Γ prazan, onda umesto $\emptyset \vdash A$ pišemo samo $\vdash A$.
Važi $\vdash A$ ako i samo ako je A teorema teorije $\mathcal{T}$.

Hilbertov sistem

Hilbertov sistem je formalna teorija $\mathcal{L} = (\Sigma, For, Ax, P)$ gde je

Σ $= \{p_1, \ldots, p_n, \ldots, \neg, \Rightarrow, (,)\}$ pri čemu je $\{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ prebrojiv skup iskaznih slova, $\neg$ i $\Rightarrow$ su iskazni veznici, a (i) su zagrade;

For je skup iskaznih formula koje od veznika sadrže samo $\neg$ i $\Rightarrow$;

Ax je beskonačan skup formula koje su određuju sledeće sheme (za proizvoljne formule A, B, C):

(A1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
(A2) $\big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow \big((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)\big)$
(A3) $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \big((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B\big)$

P $= \{MP\}$, gde je MP pravilo izvođenja **modus ponens** dato sa

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}\, MP$$

Hilbertov sistem

Hilbertov sistem je formalna teorija $\mathcal{L} = (\Sigma, For, Ax, P)$ gde je

Σ $= \{p_1, \ldots, p_n, \ldots, \neg, \Rightarrow, (,)\}$ pri čemu je $\{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ prebrojiv skup iskaznih slova, $\neg$ i $\Rightarrow$ su iskazni veznici, a (i) su zagrade;

For je skup iskaznih formula koje od veznika sadrže samo $\neg$ i $\Rightarrow$;

Ax je beskonačan skup formula koje su određuju sledeće sheme (za proizvoljne formule A, B, C):

(A1) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

(A2) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

intuicionistička logika

P $= \{MP\}$, gde je MP pravilo izvođenja **modus ponens** dato sa

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}\, MP$$

Sledećim definicijama uvodimo logičke veznike $\wedge, \vee, \Leftrightarrow$:

(D1) $A \wedge B$ je kraći zapis za $\neg(A \Rightarrow \neg B)$

(D2) $A \vee B$ je kraći zapis za $\neg A \Rightarrow B$

(D3) $A \Leftrightarrow B$ je kraći zapis za $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Sledećim definicijama uvodimo logičke konstante $\top, \bot$:

(D4) $\top$ je kraći zapis za $A \Rightarrow A$, gde je A proizvoljna formula;

(D5) $\bot$ je kraći zapis za $\neg(A \Rightarrow A)$, gde je A proizvoljna formula.

Teorema

(a) *Ako je* $\Gamma \vdash A$ *i* $\Gamma \subseteq \Delta$, *onda je* $\Delta \vdash A$.

(b) $\Gamma \vdash A$ *akko postoji konačan skup* $\Delta \subseteq \Gamma$ *takav da* $\Delta \vdash A$.

(c) *Ako važi* $\Gamma \vdash A$ *i ako za svaku formulu* $B \in \Gamma$ *važi* $\Delta \vdash B$, *onda važi* $\Delta \vdash A$.

Teorema

Za svaku iskaznu formulu A *važi* $\vdash_{\mathcal{L}} A \Rightarrow A$, *tj. formula* $A \Rightarrow A$ *je teorema u teoriji* $\mathcal{L}$.

Teorema o dedukciji

Teorema

Ako je Γ skup iskaznih formula, A i B su iskazne formule i ako važi $\Gamma, A \vdash B$, onda važi i $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$.
Specijalno, ako važi $A \vdash B$, onda važi i $\vdash A \Rightarrow B$.

Dokaz. Dokazaćemo, indukcijom po n, da za svaku formulu B važi tvrđenje: ako postoji izvođenje formule B u n koraka $(B_1, B_2, \ldots, B_n = B)$ iz hipoteza $\Gamma \cup \{A\}$, onda postoji i izvođenje formule $A \Rightarrow B$ iz hipoteza Γ.

B.I. Ako je $n = 1$ onda se izvođenje sastoji samo od B. Razlikujemo sledeće slučajeve:

1° B je aksioma. Tada je sledeći niz formula izvođenje za $A \Rightarrow B$ iz Γ

1.	B	aksioma
2.	$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$(A1)$
3.	$A \Rightarrow B$	$MP(1,2)$

2° B je iz Γ. Tada je sledeći niz formula izvođenje za $A \Rightarrow B$ iz Γ

1.	B	Hyp
2.	$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	(A1)
3.	$A \Rightarrow B$	$MP(1,2)$

3° B je A. Tada je $\vdash A \Rightarrow A$, pa važi i $\Gamma \vdash A \Rightarrow A$.

Dokaz - nastavak

I.H. Pretpostavimo da tvrđenje važi za svako $k < n$.

I.K. Neka postoji izvođenje $B_1, \ldots, B_n = B$. Tada je B ili aksioma ili hipoteza iz Γ ili hipoteza A ili je dobijena primenom pravila MP na prethodne formule u nizu. U prva tri slučaja dokazi se vrše analogno onim u bazi indukcije. U poslednjem slučaju izvođenje ima sledeći oblik

$$\begin{array}{lll} 1. & B_1 & \\ 2. & B_2 & \\ \ldots & & \\ i. & B_i & \\ \ldots & & \\ j. & B_i \Rightarrow B & \\ \ldots & & \\ n. & B & MP(i,j) \end{array}$$

Prvih i formula čine izvođenje za B_i, a prvih j formula čine izvođenje za $B_i \Rightarrow B$. Kako je $i, j < n$, na osnovu induktivne hipoteze postoje izvođenja iz skupa Γ

$$C_1, \ldots, C_p \quad \text{gde je } C_p = A \Rightarrow B_i$$

kao i

$$D_1, \ldots, D_q \quad \text{gde je } D_q = A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B)$$

.

Dokaz - nastavak

Posmatrajmo niz formula

$$
\begin{array}{rll}
1. & C_1 & \\
2. & C_2 & \\
\ldots & & \\
p. & A \Rightarrow B_i & \\
(p+1). & D_1 & \\
(p+2). & D_2 & \\
\ldots & & \\
r. & A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B) & \\
(r+1). & (A \Rightarrow (B_i \Rightarrow B)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B)) & \text{(A2)} \\
(r+2). & (A \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B) & MP(r, r+1) \\
(r+3). & A \Rightarrow B & MP(p, r+2)
\end{array}
$$

gde je $r = p + q$. Koraci od 1 do r predstavljaju izvođnje iz Γ, a u preostalim koracima su korišćeni samo aksiome i pravilo MP, tako da je to izvođenje formule $A \Rightarrow B$ iz Γ.

Obrat teoreme o dedukciji

Teorema

Ako je Γ skup iskaznih formula, A i B su iskazne formule i ako važi $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$, onda važi i $\Gamma, A \vdash B$.

Dokaz. Ako je $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$, onda važi i $\Gamma, A \vdash A \Rightarrow B$. Sada iz $\Gamma, A \vdash A$ i $\Gamma, A \vdash A \Rightarrow B$ primenom pravila *MP* sledi $\Gamma, A \vdash B$.

Napomena: Primetimo da su u dokazu teoreme o dedukciji korišćene samo aksiome (A1) i (A2) i pravilo *MP*, tako da ovo tvrđenje važi i u klasičnoj i u intuicionističkoj logici.

Saglasnost teorije $\mathcal{L}$

Teorema

Svaka teorema teorije $\mathcal{L}$ je tautologija (tj. ako $\vdash_{\mathcal{L}} A$, onda $\models A$).

Dokaz. Neposrednom proverom jednaostavno se pokazuje da su sve aksiome teorije $\mathcal{L}$ tautologije. Pokazaćemo indukcijom po n da ako za formulu A postoji dokaz dužine n u $\mathcal{L}$, onda je A tautologija.

- B.I. Za $n = 1$ formula A je aksioma, pa je tautologija.
- I.H. Pretpostavimo da tvrđenje važi za svako $k < n$.
- I.K. Neka je A proizvoljna formula koja ima dokaz dužine n. Ako je A aksioma, onda je tautologija. U suprotnom je A dobijena primenom pravila MP na prethodne članove u nizu

$$\begin{array}{lll} 1. & B_1 & \\ 2. & B_2 & \\ \dots & & \\ i. & B_i & \\ \dots & & \\ j. & B_i \Rightarrow A & \\ \dots & & \\ n. & A & MP(i,j) \end{array}$$

Formule B_i i $B_i \Rightarrow A$ imaju dokaze dužine manje od n, pa na osnovu induktivne pretpostavke važi $\models B_i$ i $\models B_i \Rightarrow A$, odakle je i $\models A$.

Kalmarova lema

Teorema

Neka je A iskazna formula i neka su $p_1, p_2, \ldots, p_k$ iskazna slova koja se pojavljuju u formuli A. Neka je υ neka valuacija za ta iskazna slova. Definišimo iskazne formule $B_1, B_2, \ldots, B_k$ na sledeći način:

$$B_i = \begin{cases} p_i, & \upsilon(p_i) = 1 \\ \neg p_i, & \upsilon(p_i) = 0 \end{cases}$$

Neka je iskazna formula A' data sa

$$A' = \begin{cases} A, & I_\upsilon(A) = 1 \\ \neg A, & I_\upsilon(A) = 0 \end{cases}$$

Tada važi $B_1, B_2, \ldots, B_k \vdash A'$.

Potpunost teorije $\mathcal{L}$

Teorema

Ako je formula A tautologija, onda je ona teorema teorije $\mathcal{L}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $A = A(p_1, p_2, \dots, p_k)$ tautologija. Za valuaciju υ, označimo $B_i = p_i$ ako je $\upsilon(p_i) = 1$, a $B_i = \neg p_i$ ako je $\upsilon(p_i) = 0$, za $1 \leq i \leq n$. Na osnovu Kalmarove leme, za svaku valuaciju υ važi $B_1, B_2, \dots, B_k \vdash A$. Za svaku valuaciju υ' takvu da je $\upsilon'(p_k) = 1$ važi

$$B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, p_k \vdash A,$$

a za valuaciju υ'' takvu da je $\upsilon''(p_i) = \upsilon'(p_i)$ za $i < k$ i $\upsilon''(p_k) = 0$ važi

$$B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, \neg p_k \vdash A.$$

Na osnovu teoreme o dedukciji dobjamo

$$B_1, B_2, \dots, B_{k-1} \vdash p_k \Rightarrow A \quad \text{i} \quad B_1, B_2, \dots, B_{k-1} \vdash \neg p_k \Rightarrow A.$$

Kako je

$$p_k \Rightarrow A, \neg p_k \Rightarrow A \vdash A,$$

sledi

$$B_1, B_2, \dots, B_{k-1} \vdash A.$$

Ponavljajući ovaj postupak još $k - 1$ puta dobijamo $\vdash A$.

Teorema o saglasnosti i teorema o potpunosti teorije $\mathcal{L}$ govore o vezi između semantičke i sintaksno-deduktivne prirode neke iskazne formule. Ta veza može kratko biti zapisana i na sledeći način:

$$\models A \quad \text{ako i samo ako} \quad \vdash_{\mathcal{L}} A.$$

Teorema

Važi

$$\Gamma \models A \quad \textit{ako i samo ako} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A.$$

Odlučivost teorije $\mathcal{L}$

Teorema

Teorija $\mathcal{L}$ je odlučiva, tj. za svaku iskaznu formulu može se efektivno proveriti da li je teorema teorije $\mathcal{L}$.

Dokaz. Za svaku iskaznu formulu može se efektivno proveriti da li je tautologija (npr. metodom istinitosnih tablica). Kako je iskazna formula teorema teorije $\mathcal{L}$ ako i samo ako je tautologija, sledi da se za svaku iskaznu formulu postoji efektivan metod provere da li je teorema teorije $\mathcal{L}$. To znači da je teorija $\mathcal{L}$ odlučiva.

Konzistentnost teorije $\mathcal{L}$

Teorema

Teorija $\mathcal{L}$ je konzistentna (neprotivrečna), tj. ne postoji iskazna formula A takva da su i A i $\neg A$ teoreme teorije $\mathcal{L}$.

Dokaz. Iskazna formula je teorema teorije $\mathcal{L}$ ako i samo ako je tautologija. Ne postoji formula A takva da su i A i $\neg A$ tautologije (ako je A tautologija, onda je $\neg A$ kontradikcija, i obrnuto). Odatle sledi da ne postoji formula A takva da su i A i $\neg A$ teoreme teorije $\mathcal{L}$.

Prirodna dedukcija

- Gerhard Gencen, Stanislav Jaskovski (nezavisno), 1934.
- Koriste se logički veznici $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, i logička konstanta $\bot$.
  - $A \Leftrightarrow B$ je kraći zapis za $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
  - $\top$ je kraći zapis za $A \Rightarrow A$.
- Postoje sistemi prirodne dedukcije za klasičnu i za intuicionističku logiku.
  - Za klasičnu logiku postoji jedna aksiomska shema $A \vee \neg A$ (*tertium non datur*).
  - Za intuicionističku logiku nema aksioma.

- Tokom izvođenja dokaza u sistemu prirodne dedukcije mogu se koristiti i pretpostavke koje nisu dokazane, ali one moraju biti zatvorene („oslobođene”) pre kraja dokaza korišćenjem odgovarajućeg pravila.
- Pretpostavkama su pridružene oznake (obično prirodni brojevi), koje se zapisuju i u okviru zapisa primenjenog pravila (kako bi se znalo koja pretpostavka je oslodođena u kom koraku).
- Otvaranjem i zatvaranjem ovakve pretpostavke mi definišemo poddokaz, tj. dokaz unutar dokaza.
- U jednom dokazu možemo imati i više poddokaza, ali se ti poddokazi ne smeju preklapati (osim u slučaju kada je ceo poddokaz sadržan u drugom poddokazu).
- Sve što smo dokazali pre otvaranja poddokaza možemo koristiti unutar poddokaza, ali ono što smo dokazali unutar poddokaza ne smemo koristiti van tog poddokaza. Samo zaključak poddokaza, tj. formulu koju smo izveli zatvaranjem poddokaza, možemo slobodno koristiti u nastavku dokaza.

Zapis dokaza

U sistemu prirodne dedukcije dokaz možemo zapisati:

- u obliku stabla (Gencen)
    - lako je pratiti zavisnost dokazanih iskaza od pretpostavljenih
    - crtanje stabla nije praktično za duže i komplikovanije dokaze
- linearno – u vidu numerisane liste (Jaskovski)
    - u svakom redu nalazi se tačno jedna formula pored koje je navedeno da li je ona premisa, pretpostavka, ili je dobijena primenom nekog pravila na prethodne formule (u tom slučaju se navodi skraćeno ime tog pravila i redni brojevi formula na koje je pravilo primenjeno)
    - ako se u nekom trenutku u dokazu uvede (nedokazana) pretpostavka, tada se uokviruje poddokaz koji se odnosi na tu pretpostavku.

Prirodna dedukcija - pravila izvođenja

Za svaki logički veznik postoje dva tipa pravila izvođenja:

- pravilo uvođenja veznika (pravilo *I*-tipa) - veznik koji uvodimo se pojavljuje u formuli koja je u zaključku;
- pravilo eliminacije veznika (pravilo *E*-tipa) - veznik koji eliminišemo se pojavljuje u formuli u premisi, a u formuli u zaključku je eliminisan.

Pravilo *efq* (*Ex falso quodlibet*) je jedino pravilo koje ne uvodi niti eliminiše neki logički veznik.

$$\frac{\perp}{D}\ efq$$

Prirodna dedukcija - pravila izvođenja

- **Pravila uvođenja veznika**

$$\frac{\begin{array}{c}[A]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg A}\ \neg I, u \qquad \frac{\begin{array}{c}[A]^u\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\ \Rightarrow I, u$$

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\ \wedge I \qquad \frac{A}{A \vee B}\ \vee I_1 \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee I_2$$

- **Pravila eliminacije veznika**

$$\frac{A \qquad \neg A}{\bot}\ \neg E \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge E_1 \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge E_2$$

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]^u\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]^v\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\ \vee E, u, v \qquad \frac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}\ \Rightarrow E$$

Pravila izvođenja - konjunkcija

- Pravilo za uvođenje konjunkcije govori nam da ako znamo da važe formule A i B, tada znamo da važi i njihova konjunkcija $A \wedge B$. Ovo pravilo zapisujemo na sledeći način:

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B} \; {\color{blue}\wedge I}$$

- Za eliminaciju konjunkcije postoje dva pravila – po prvom pravilu iz konjunkcije $A \wedge B$ možemo da izvedemo levi konjunkt A, a po drugom možemo izvesti desni konjunkt B:

$$\frac{A \wedge B}{A} \; {\color{blue}\wedge E_1} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{B} \; {\color{blue}\wedge E_2}$$

Pravila izvođenja - konjunkcija

Primer

Pokažimo da važi $A \wedge B, C \vdash B \wedge C$.

1	$A \wedge B$	premisa
2	C	premisa
3	B	$\wedge E_2$ 1
4	$B \wedge C$	$\wedge I$ 3, 2

$$\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\,\wedge E_2 \qquad C}{B \wedge C}\,\wedge I$$

Pravila izvođenja - disjunkcija

- Pravila uvođenja disjunkcije pokazuju nam da iz formule A možemo zaključiti formulu $A \vee B$, gde je B proizvoljna formula, odnosno da iz formule B možemo zaključiti formulu $A \vee B$, gde je A proizvoljna formula:

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee I_1 \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee I_2$$

- Da bismo iz $A \vee B$ izveli C, moramo napraviti dva dodatna poddokaza. U prvom poddokazu iz pretpostavke A i izvodimo zaključak C, a u drugom iz pretpostavke B i izvodimo C. Tada, primenjujući pravilo na disjunkciju i navedene dokaze, možemo zaključiti C.

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]^u\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]^v\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\ \vee E, u, v$$

Pravila izvođenja - disjunkcija

Primer

Pokažimo da važi $A \vee B \vdash B \vee A$.

1	$A \vee B$	premisa
2	A	pretpostavka
3	$B \vee A$	$\vee I_2$ 2
4	B	pretpostavka
5	$B \vee A$	$\vee I_1$ 4
6	$B \vee A$	$\vee E$ $1, 2-3, 4-5$

$$\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{[A]^1}{B \vee A}\,\vee I_2 \qquad \dfrac{[B]^2}{B \vee A}\,\vee I_1}{B \vee A}\,\vee E, 1, 2$$

Pravila izvođenja - implikacija

- Prilikom uvođenja implikacije najpre uvodimo dodatnu pretpostavku A, pa kada uz pomoć te pretpostavke uspemo da dokažemo formulu B, možemo zaključiti da važi $A \Rightarrow B$, i tako zatvoriti poddokaz.

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^u \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I, u$$

- Pravilo eliminacije implikacije je zapravo pravilo *Modus ponens*. Ono nam govori da ako važi A i ako znamo da iz A sledi B, tada možemo zaključiti B.

$$\dfrac{A \qquad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E$$

Pravila izvođenja - implikacija

Primer

Pokažimo da važi $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$.

1	$A \Rightarrow B$	premisa
2	$B \Rightarrow C$	premisa
3	A	pretpostavka
4	B	$\Rightarrow E$ 1, 3
5	C	$\Rightarrow E$ 2, 4
6	$A \Rightarrow C$	$\Rightarrow I$ 3 – 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad [A]^1}{B}\Rightarrow E \qquad B \Rightarrow C}{C}\Rightarrow E}{A \Rightarrow C}\Rightarrow I,\ 1$$

Pravila izvođenja - negacja

- Pravilom uvođenja negacije iz poddokaza koji se završava kontradikcijom možemo zaključiti negaciju dodatne pretpostavke kojom je započet poddokaz.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\ \neg I, u$$

- Upotrebom pravila eliminacije negacije na formulu i njenu negaciju, dobijamo kontradikciju.

$$\dfrac{A \qquad \neg A}{\bot}\ \neg E$$

Pravila izvođenja - negacija

Primer

Pokažimo da važi $A \Rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$ (*Modus tollens*).

1	$A \Rightarrow B$	premisa
2	$\neg B$	premisa
3	A	pretpostavka
4	B	$\Rightarrow E$ 1, 3
5	$\bot$	$\neg E$ 4, 2
6	$\neg A$	$\neg I$ 3 – 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B \qquad [A]^1}{B}\Rightarrow E \qquad \neg B}{\bot}\neg E}{\neg A}\neg I,\ 1$$

Prirodna dedukcija - pravila izvođenja

(efq) $\perp \vdash B$

($\neg E$) $A, \neg A \vdash \perp$

($\neg I$) Ako $\Gamma, A \vdash \perp$, onda $\Gamma \vdash \neg A$

($\wedge I$) $A, B \vdash A \wedge B$

($\wedge E$) $A \wedge B \vdash A$ i $A \wedge B \vdash B$

($\Rightarrow E$) $A, A \Rightarrow B \vdash B$

($\Rightarrow I$) Ako $\Gamma, A \vdash B$, onda $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$

($\vee I$) $A \vdash A \vee B$ i $B \vdash A \vee B$

($\vee E$) Ako $\Gamma, A \vdash C$ i $\Delta, B \vdash C$, onda $\Gamma, \Delta, A \vee B \vdash C$

Dokaz

U sistemu prirodne dedukcije **dokaz** je stablo čijem je svakom čvoru pridružena formula i koje zadovoljava sledeće uslove:

- stablo sa jednim čvorom kojem je pridružena aksioma je dokaz;
- stablo sa jednim čvorom kojem je pridružena formula A je dokaz;
- ako su $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ dokazi sa korenima kojima su pridružene redom formule $A_1, \ldots, A_n$ i ako je formula A direktna posledica formula $A_1, \ldots, A_n$ na osnovu nekog od pravila izvođenja $\neg E$, $\wedge I$, $\Rightarrow E$ (tada je $n = 2$) ili $\wedge E$, $\vee I$, *efq* (tada je $n = 1$), onda je dokaz i stablo u čijem je korenu A, a čiji su direktni potomci koreni stabala $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$;

Dokaz

- ako je $\mathcal{D}$ dokaz sa korenom kojem je pridružena formula $\perp$ i koji sadrži nula ili više neoslobođenih pretpostavki A, onda je dokaz i stablo (dobijeno primenom pravila $\neg I$) sa korenom $\neg A$ čiji je direktni potomak koren stabla $\mathcal{D}$;

- ako je $\mathcal{D}$ dokaz sa korenom kojem je pridružena formula B i koji sadrži nula ili više neoslobođenih pretpostavki A, onda je dokaz i stablo (dobijeno primenom pravila $\Rightarrow I$) sa korenom $A \Rightarrow B$ čiji je direktni potomak koren stabla $\mathcal{D}$;

- ako je $\mathcal{D}_1$ dokaz sa korenom kojem je pridružena formula $A \vee B$, ako je $\mathcal{D}_2$ dokaz sa korenom kojem je pridružena formula C i koji sadrži nula ili više neoslobođenih pretpostavki A i ako je $\mathcal{D}_3$ dokaz sa korenom kojem je pridružena formula C i koji sadrži nula ili više neoslobođenih pretpostavki B, onda je dokaz i stablo (dobijeno primenom pravila $\vee E$) sa korenom C čiji su direktni potomci koreni stabala $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$.

- Formula A je **teorema** sistema prirodne dedukcije ako postoji dokaz u čijem je korenu A i koji nema neoslobođenih pretpostavki i tada pišemo $\vdash A$ i kažemo da je formula A **dokaziva** u sistemu prirodne dedukcije.

- Ako postoji dokaz, u čijem je korenu formula A i koji ima neoslobođene pretpostavke koje pripadaju nekom nizu Γ, onda kažemo da je formula A **deduktivna posledica** niza Γ i tada pišemo $\Gamma \vdash A$.

Teorema

Ako je iskazna formula teorema teorije $\mathcal{L}$, onda je ona teorema i sistema prirodne dedukcije za klasičnu logiku.

Dokaz. Ako je formula A teorema teorije $\mathcal{L}$, onda postoji dokaz formule A - niz formula $B_1, B_2, \ldots, B_n = A$, pri čemu je svaka od formula B_i ili aksioma teorije $\mathcal{L}$ ili je dobijena od prethodnih formula u nizu primenom pravila *MP*.
Dokažimo matematičkom indukcijom da je svaka od formula $B_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, teorema sistema prirodne dedukcije za klasičnu logiku.

B.I. Formula B_1 je aksioma teorije $\mathcal{L}$. Za svaku od aksioma teorije $\mathcal{L}$ može se dokazati da je teorema sistema prirodne dedukcije za klasičnu logiku:

$$(A1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad [B]^2}{A \wedge B}\,\wedge I}{A}\,\wedge E_1}{B \Rightarrow A}\,\Rightarrow I,\ 2}{A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\,\Rightarrow I,\ 1$$

(A2)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad [A \Rightarrow B]^2}{B}\,{\Rightarrow E} \qquad \dfrac{[A]^1 \qquad [A \Rightarrow (B \Rightarrow C)]^3}{B \Rightarrow C}\,{\Rightarrow E}}{C}\,{\Rightarrow E}}{A \Rightarrow C}\,{\Rightarrow I,\ 1}}{(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)}\,{\Rightarrow I,\ 2}}{(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))}\,{\Rightarrow I,\ 3}
$$

(A3)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vee \neg B \qquad [B]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg B]^2 \qquad [\neg B \Rightarrow A]^3}{A}\,{\Rightarrow E} \qquad \dfrac{[\neg B]^2 \qquad [\neg B \Rightarrow \neg A]^4}{\neg A}\,{\Rightarrow E}}{\bot}\,{\neg E}}{B}\,{efq}}{B}\,{\vee E,\ 1,2}}{(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B}\,{\Rightarrow I,\ 3}}{(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)}\,{\Rightarrow I,\ 4}
$$

I.H. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve formule B_k za $k < i$.

I.K. Ako je formula B_i aksioma teorije $\mathcal{L}$, onda je ona teorema sistema prirodne dedukcije za klasičnu logiku. U suprotnom je B_i dobijena primenom pravila MP na prethodne članove u nizu

$$\begin{array}{lll}
1. & B_1 & \\
2. & B_2 & \\
\dots & & \\
j. & B_j & \\
\dots & & \\
m. & B_j \Rightarrow B_i & \\
\dots & & \\
i. & B_i & MP(j, m)
\end{array}$$

Pošto je $j, m < i$, na osnovu induktivne pretpostavke, formule B_j i $B_j \Rightarrow B_i$ su teoreme sistema prirodne dedukcije za klasičnu logiku, pa postoje dokaz $\mathcal{D}_1$, sa korenom B_j, i dokaz $\mathcal{D}_2$, sa korenom $B_j \Rightarrow B_i$. Tada je dokaz i stablo (dobijeno primenom pravila $\Rightarrow E$) sa korenom B_i čiji su direktni potomci koreni stabala $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$, te je i formula B_i teorema sistema prirodne dedukcije za klasičnu logiku.

Račun sekvenata

- Gerhard Gencen, 1935.
- Ima veliki uticaj na teoriju dokaza (automatsko dokazivanje teorema)
- Koriste se logički veznici $\neg$, $\wedge$, $\vee$ i $\Rightarrow$.
  - $A \Leftrightarrow B$ je kraći zapis za $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
  - $\top$ je kraći zapis za $A \Rightarrow A$.
  - $\bot$ je kraći zapis za $A \wedge \neg A$.

▷ Osnovni objekti u izvođenju su **sekventi**. Svaki sekvent je oblika

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B_1, B_2, \ldots, B_n, \quad m \geq 0, n \geq 0.$$

- Neformalno, sekvent $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash B_1, B_2, \ldots, B_n$ ima značenje kao formula

  $$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m) \Rightarrow (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n)$$

  (odnosno, ako su sve formule $A_1, A_2, \ldots, A_m$ tačne, onda je bar jedna od formula $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tačna).

  - Ako je $m = 0$, onda sekvent $\vdash B_1, B_2, \ldots, B_n$ ima značenje kao formula $B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n$.
  - Ako je $n = 0$, onda sekvent $A_1, A_2, \ldots, A_m \vdash$ ima značenje kao formula $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m)$.
  - Ako je $m = 0$ i $n = 0$, onda sekvent $\vdash$ ima značenje kao $\perp$.

- Za svaku formulu A postoji sekvent koji joj odgovara – sekvent $\vdash A$.

- Postoji račun sekvenata za klasičnu logiku i račun sekvenata za intuicionistčku logiku.
  - U računu sekvenata za intuicionističku logiku dozvoljeni samo sekventi oblika $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ i $A_1, \ldots, A_n \vdash$.
  - U računu sekvenata za klasičnu logiku sa desne strane rampe može da bude skup formula.
- Račun sekvenata sadrži jednu aksiomu $A \vdash A$ (inicijalni sekvent).
- Pravila izvođenja su podeljena u dve grupe:
  - strukturalna pravila – ta pravila govore kako struktura sekventa utiče na izvođenje;
  - operaciona pravila – za svaki logički veznik imamo uvođenje veznika sa leve strane rampe i uvođenje veznika sa desne strane rampe.

Strukturalna pravila izvođenja

Slabljenje, sužavanje (weakining, thinning)

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{D, \Gamma \vdash \Theta}\ W_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, D}\ W_R$$

Kontrakcija (contracting)

$$\frac{D, D, \Gamma \vdash \Theta}{D, \Gamma \vdash \Theta}\ C_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta, D, D}{\Gamma \vdash \Theta, D}\ C_R$$

Zamena, permutacija (interchange, permutation)

$$\frac{\Delta, E, D, \Gamma \vdash \Theta}{\Delta, D, E, \Gamma \vdash \Theta}\ P_L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta, E, D, \Lambda}{\Gamma \vdash \Theta, D, E, \Lambda}\ P_R$$

Sečenje (cut)

$$\frac{\Gamma \vdash \Lambda, D \qquad D, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}\ Cut$$

Strukturalna pravila izvođenja

intuicionistička logika

Slabljenje, sužavanje
(weakining, thinning)

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta}{D, \Gamma \vdash \Theta}\, W_L \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash D}\, W_R$$

Kontrakcija
(contracting)

$$\frac{D, D, \Gamma \vdash \Theta}{D, \Gamma \vdash \Theta}\, C_L$$

Zamena, permutacija
(interchange, permutation)

$$\frac{\Delta, E, D, \Gamma \vdash \Theta}{\Delta, D, E, \Gamma \vdash \Theta}\, P_L$$

Sečenje
(cut)

$$\frac{\Gamma \vdash D \qquad D, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Theta}\, Cut$$

Θ sadrži najviše jednu formulu

Operaciona pravila izvođenja

⋆ klasična logika ⋆

$\boxed{\neg}$

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Theta}\ \neg L \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \Theta, \neg A}\ \neg R$$

$\boxed{\wedge}$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Theta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Theta}\ \wedge L \qquad \frac{B, \Gamma \vdash \Theta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Theta}\ \wedge L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta, A \qquad \Gamma \vdash \Theta, B}{\Gamma \vdash \Theta, A \wedge B}\ \wedge R$$

$\boxed{\vee}$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Theta \qquad B, \Gamma \vdash \Theta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Theta}\ \vee L \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta, A}{\Gamma \vdash \Theta, A \vee B}\ \vee R \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta, B}{\Gamma \vdash \Theta, A \vee B}\ \vee R$$

$\boxed{\Rightarrow}$

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, A \qquad B, \Delta \vdash \Lambda}{A \Rightarrow B, \Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Lambda}\ \Rightarrow L \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Theta, B}{\Gamma \vdash \Theta, A \Rightarrow B}\ \Rightarrow R$$

Operaciona pravila izvođenja

⋆ intuicionistička logika ⋆

$\boxed{\neg}$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\neg A, \Gamma \vdash} \neg L \qquad \frac{A, \Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \neg A} \neg R$$

$\boxed{\wedge}$

$$\frac{A, \Gamma \vdash C}{A \wedge B, \Gamma \vdash C} \wedge L \qquad \frac{B, \Gamma \vdash C}{A \wedge B, \Gamma \vdash C} \wedge L \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge R$$

$\boxed{\vee}$

$$\frac{A, \Gamma \vdash C \qquad B, \Gamma \vdash C}{A \vee B, \Gamma \vdash C} \vee L \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee R \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee R$$

$\boxed{\Rightarrow}$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad B, \Delta \vdash C}{A \Rightarrow B, \Gamma, \Delta \vdash C} \Rightarrow L \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow R$$

sekventni račun		**prirodna dedukcija**
pravila uvođenja veznika sa desne strane rampe	=	pravila uvođenja veznika
pravila uvođenja veznika sa leve strane rampe	=	pravila eliminacije veznika

Sva pravila možemo čitati na dva načina:

- **odozgo nadole** – ako smo dokazali hipoteze pravila, možemo dokazati i sekvent koji se nalazi ispod horizontalne linije (**sinteza**);
- **odozdo nagore** – da bismo dokazali sekvent koji je zaključak pravila, dovoljno je dokazati hipoteze pravila (**analiza**).

Dokaz

Dokaz u računu sekvenata je stablo čijim su čvorovima pridruženi sekventi i koje zadovoljava sledeće uslove:

- stablo sa jednim čvorom kojem je pridružena aksioma je dokaz;
- ako su $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ ($n \in \{1, 2\}$) dokazi sa korenima kojima su pridruženi redom sekventi $s_1, \ldots, s_n$ i ako je sekvent s direktna posledica sekvenata $s_1, \ldots, s_n$ na osnovu nekog od pravila izvođenja, onda je dokaz i stablo u čijem je korenu s, a čiji su direktni potomci koreni stabala $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$.

- Sekvent s je dokaziv ako postoji dokaz u čijem je korenu s.
- Ako je dokaziv sekvent $\vdash A$, onda je formula A **teorema** računa sekvenata.
- Ako je dokaziv sekvent $\Gamma \vdash A$, onda kažemo da je formula A **deduktivna posledica** niza Γ, čije elemente zovemo premisama ili hipotezama dokaza.

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ teorema u računu sekvenata.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{}}{}}{}}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ teorema u računu sekvenata.

$$\dfrac{A \vdash B \Rightarrow A}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)} \Rightarrow R$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ teorema u računu sekvenata.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{}}{B, A \vdash A}}{A \vdash B \Rightarrow A}\ \Rightarrow R}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\ \Rightarrow R$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ teorema u računu sekvenata.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{B, A \vdash A}\, W_L}{A \vdash B \Rightarrow A}\, \Rightarrow R}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\, \Rightarrow R$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ teorema u računu sekvenata.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax}{B, A \vdash A}\,W_L}{A \vdash B \Rightarrow A}\Rightarrow R}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\Rightarrow R$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ teorema u računu sekvenata.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A \vdash A}\,Ax}{B, A \vdash A}\,W_L}{A \vdash B \Rightarrow A}\Rightarrow R}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\Rightarrow R
$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow \neg\neg A$ teorema u računu sekvenata.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\quad}}{\quad}}{\quad}}{\vdash A \Rightarrow \neg\neg A}
$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ teorema u računu sekvenata.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax}{B, A \vdash A}\,W_L}{A \vdash B \Rightarrow A}\,\Rightarrow R}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\,\Rightarrow R
$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow \neg\neg A$ teorema u računu sekvenata.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{}}{}}{A \vdash \neg\neg A}}{\vdash A \Rightarrow \neg\neg A}\,\Rightarrow R
$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ teorema u računu sekvenata.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax}{B, A \vdash A}\,W_L}{A \vdash B \Rightarrow A}\Rightarrow R}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\Rightarrow R$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow \neg\neg A$ teorema u računu sekvenata.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{}}{\neg A, A \vdash}}{A \vdash \neg\neg A}\,\neg R}{\vdash A \Rightarrow \neg\neg A}\Rightarrow R$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ teorema u računu sekvenata.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax}{B, A \vdash A}\,W_L}{A \vdash B \Rightarrow A}\Rightarrow R}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\Rightarrow R
$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow \neg\neg A$ teorema u računu sekvenata.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\neg A, A \vdash}\,\neg L}{A \vdash \neg\neg A}\,\neg R}{\vdash A \Rightarrow \neg\neg A}\Rightarrow R
$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ teorema u računu sekvenata.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax}{B, A \vdash A}\,W_L}{A \vdash B \Rightarrow A}\Rightarrow R}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\Rightarrow R$$

Primer

Pokažimo da je formula $A \Rightarrow \neg\neg A$ teorema u računu sekvenata.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax}{\neg A, A \vdash}\,\neg L}{A \vdash \neg\neg A}\,\neg R}{\vdash A \Rightarrow \neg\neg A}\Rightarrow R$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \wedge B, C \vdash B \wedge C$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,{\color{blue}Ax}}{C, B \vdash B}\,{\color{blue}W_L}}{B, C \vdash B}\,{\color{blue}P_L}}{A \wedge B, C \vdash B}\,{\color{blue}\wedge L}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{C \vdash C}\,{\color{blue}Ax}}{A \wedge B, C \vdash C}\,{\color{blue}W_L}
$$

$$
\dfrac{A \wedge B, C \vdash B \qquad A \wedge B, C \vdash C}{A \wedge B, C \vdash B \wedge C}\,{\color{blue}\wedge R}
$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \wedge B, C \vdash B \wedge C$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{C, B \vdash B}\,W_L}{B, C \vdash B}\,P_L}{A \wedge B, C \vdash B}\,\wedge L \qquad \dfrac{\dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{A \wedge B, C \vdash C}\,W_L}{A \wedge B, C \vdash B \wedge C}\,\wedge R$$

Primer

Ispitati da li je formula $A \vee B \vdash B \wedge C$ teorema računa sekvenata.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash B \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \vee B \vdash B}\,\vee L}{A \vee B \vdash B \vee C}\,\vee R}{\vdash A \vee B \Rightarrow B \vee C}\,\Rightarrow R$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \wedge B, C \vdash B \wedge C$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{C, B \vdash B}\,W_L}{B, C \vdash B}\,P_L}{A \wedge B, C \vdash B}\,\wedge L \qquad \dfrac{\dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{A \wedge B, C \vdash C}\,W_L
$$
$$
\dfrac{A \wedge B, C \vdash B \qquad A \wedge B, C \vdash C}{A \wedge B, C \vdash B \wedge C}\,\wedge R
$$

Primer

Ispitati da li je formula $A \vee B \vdash B \wedge C$ teorema računa sekvenata.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash B \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \vee B \vdash B}\,\vee L}{A \vee B \vdash B \vee C}\,\vee R}{\vdash A \vee B \Rightarrow B \vee C}\,\Rightarrow R
$$

Pravilo sečenja

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad A, \Delta \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}\ Cut$$

- Pravilo sečenja „ometa” analitički način konstrukcije dokaza jer jedino kod pravila sečenja u pretpostavkama postoji formula koja se ne pojavljuje u zaključku.
- Hauptsatz (Gencen) – sve što se može dokazati korišćenjem pravila sečenja, može se dokazati i bez njega

Pravilo sečenja

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad A, \Delta \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}\ Cut$$

- Pravilo sečenja „ometa” analitički način konstrukcije dokaza jer jedino kod pravila sečenja u pretpostavkama postoji formula koja se ne pojavljuje u zaključku.
- Hauptsatz (Gencen) – sve što se može dokazati korišćenjem pravila sečenja, može se dokazati i bez njega

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$.

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$.

- *I način* – sa pravilom sečenja

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax
}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,{\Rightarrow}L
\qquad
\dfrac{
\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad
\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, B \vdash C}\,{\Rightarrow}L
}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, B \vdash C}\,{\Rightarrow}L
}{
\dfrac{A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
}\,Cut
$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$.

- *I način* – sa pravilom sečenja

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,{\Rightarrow}L
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, B \vdash C}\,{\Rightarrow}L}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, B \vdash C}\,{\Rightarrow}L
}{
\dfrac{A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
}\,Cut
$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$.

- *I način* – sa pravilom sečenja

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,\Rightarrow L \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, B \vdash C}\,\Rightarrow L}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, B \vdash C}\,\Rightarrow L}{A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash C}\,Cut}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$.

- *I način* – sa pravilom sečenja

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\Rightarrow L
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, B \vdash C}\Rightarrow L}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, B \vdash C}\Rightarrow L
}{
\dfrac{A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
}\,Cut
$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$.

- *I način* – sa pravilom sečenja

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{A \vdash A}\,{\scriptstyle Ax}
    \qquad
    \dfrac{}{B \vdash B}\,{\scriptstyle Ax}
  }{A \Rightarrow B, A \vdash {\color{red}B}}\,{\scriptstyle \Rightarrow L}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{}{A \vdash A}\,{\scriptstyle Ax}
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{}{B \vdash B}\,{\scriptstyle Ax}
      \qquad
      \dfrac{}{C \vdash C}\,{\scriptstyle Ax}
    }{B \Rightarrow C, B \vdash C}\,{\scriptstyle \Rightarrow L}
  }{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, {\color{red}B} \vdash C}\,{\scriptstyle \Rightarrow L}
}{
  \dfrac{A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,{\scriptstyle C_L}
}\,{\scriptstyle Cut}
$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$.

- *I način* – sa pravilom sečenja

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,\Rightarrow L
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, B \vdash C}\,\Rightarrow L}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, B \vdash C}\,\Rightarrow L
}{
\dfrac{A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
}\,Cut
$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$.

- *I način* – sa pravilom sečenja

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\Rightarrow L \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, B \vdash C}\Rightarrow L}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, B \vdash C}\Rightarrow L}{A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash C}\,Cut}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
$$

- *II način* – bez pravila sečenja

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\Rightarrow L \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, A \Rightarrow B, A \vdash C}\Rightarrow L}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, A \Rightarrow B, A \vdash C}\Rightarrow L}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$.

- *I način* – sa pravilom sečenja

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{A \vdash A}\,\mathit{Ax}
    \qquad
    \dfrac{}{B \vdash B}\,\mathit{Ax}
  }{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,\Rightarrow L
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{}{A \vdash A}\,\mathit{Ax}
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{}{B \vdash B}\,\mathit{Ax}
      \qquad
      \dfrac{}{C \vdash C}\,\mathit{Ax}
    }{B \Rightarrow C, B \vdash C}\,\Rightarrow L
  }{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, B \vdash C}\,\Rightarrow L
}{
  \dfrac{A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
}\,\mathit{Cut}
$$

- *II način* – bez pravila sečenja

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{A \vdash A}\,\mathit{Ax}
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{}{A \vdash {\color{red}A}}\,\mathit{Ax}
        \qquad
        \dfrac{}{{\color{red}B} \vdash B}\,\mathit{Ax}
      }{{\color{red}A \Rightarrow B}, A \vdash B}\,\Rightarrow L
      \qquad
      \dfrac{}{C \vdash C}\,\mathit{Ax}
    }{B \Rightarrow C, A \Rightarrow B, A \vdash C}\,\Rightarrow L
  }{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, A \Rightarrow B, A \vdash C}\,\Rightarrow L
}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$.

- *I način* – sa pravilom sečenja

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,\Rightarrow L
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, B \vdash C}\,\Rightarrow L}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, B \vdash C}\,\Rightarrow L
}{
\dfrac{A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
}\,Cut
$$

- *II način* – bez pravila sečenja

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,\Rightarrow L \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, A \Rightarrow B, A \vdash C}\,\Rightarrow L
}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, A \Rightarrow B, A \vdash C}\,\Rightarrow L
}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$.

- *I način* – sa pravilom sečenja

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,{\Rightarrow}L
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, B \vdash C}\,{\Rightarrow}L}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, B \vdash C}\,{\Rightarrow}L
}{
\dfrac{A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
}\,Cut
$$

- *II način* – bez pravila sečenja

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,{\Rightarrow}L \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, A \Rightarrow B, A \vdash C}\,{\Rightarrow}L
}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, A \Rightarrow B, A \vdash C}\,{\Rightarrow}L
}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
$$

Primer

Pokažimo da u računu sekvenata važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C$.

- *I način* – sa pravilom sečenja

$$
\dfrac{
  \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,{\Rightarrow}L
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,Ax \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, B \vdash C}\,{\Rightarrow}L}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, B \vdash C}\,{\Rightarrow}L
}{
  \dfrac{A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash C}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
}\,Cut
$$

- *II način* – bez pravila sečenja

$$
\dfrac{
  \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Ax}{A \Rightarrow B, A \vdash B}\,{\Rightarrow}L \qquad \dfrac{}{C \vdash C}\,Ax}{B \Rightarrow C, A \Rightarrow B, A \vdash C}\,{\Rightarrow}L}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A, A \Rightarrow B, A \vdash C}\,{\Rightarrow}L
}{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \Rightarrow B, A \vdash C}\,C_L
$$

Veza između deduktivnih sistema

Veza između deduktivnih sistema

Teorema

Ako je iskazna formula teorema sistema prirodne dedukcije za klasičnu logiku, onda je ona teorema i računa sekvenata za klasičnu logiku.

Veza između deduktivnih sistema

Teorema

Ako je iskazna formula teorema sistema prirodne dedukcije za klasičnu logiku, onda je ona teorema i računa sekvenata za klasičnu logiku.

Teorema

Ako je iskazna formula teorema računa sekvenata za klasičnu logiku, onda je ona teorema i teorije $\mathcal{L}$.

Veza između deduktivnih sistema

Teorema

Ako je iskazna formula teorema sistema prirodne dedukcije za klasičnu logiku, onda je ona teorema i računa sekvenata za klasičnu logiku.

Teorema

Ako je iskazna formula teorema računa sekvenata za klasičnu logiku, onda je ona teorema i teorije $\mathcal{L}$.

Teorema

Iskazna formula je teorema teorije $\mathcal{L}$ **akko** *je ona teorema sistema prirodne dedukcije za klasičnu iskaznu logiku* **akko** *je teorema računa sekvenata za klasičnu iskaznu logiku.*