

Alternativni redovi

1. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju sledećih redova:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{5n+6}, \quad \text{c) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n\sqrt{n}-1}, \\ \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}, \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{2n-1} \right)^n. \end{aligned}$$

Rešenje:

a) Prvo ćemo ispitati apsolutnu konvergenciju. $|a_n| = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$, a $\sum \frac{1}{n}$ je harmonijski red koji divergira, zaključujemo da i početni red divergira apsolutno.

Ostaje nam da ispitamo da li red konvergira uslovno. Kako je $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ alternativni red, običnu konvergenciju ispitujemo Lajbnicovim kriterijumom:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

$$2) |a_{n+1}| \stackrel{?}{\leq} |a_n|$$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow (n+1)(n^2+1) \leq n(n+1)^2 \Leftrightarrow n^3+n^2+n+1 \leq n^3+2n^2+2n \Leftrightarrow 1 \leq n^2+n$$

Dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ obično konvergira, a divergira apsolutno, pa stoga konvergira uslovno.

b) Kako je $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{5n+6} = \frac{2}{5}$, i kako $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ne postoji (niz $\{a_n\}$ ima dve tačke nagomilavanja: $\frac{2}{5}$ i $-\frac{2}{5}$), zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{5n+6}$ divergira obično, pa samim tim i apsolutno.

c) Prvo ćemo ispitati apsolutnu konvergenciju. $|a_n| = \frac{n}{n\sqrt{n}-1} \sim \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}} = n^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$, a $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ divergira ($\frac{1}{2} < 1$), zaključujemo da i početni red divergira apsolutno.

Ostaje nam da ispitamo da li red konvergira uslovno. Kako je $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n\sqrt{n}-1}$ alternativni red, običnu konvergenciju ispitujemo Lajbnicovim kriterijumom:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{n}-1} = 0$$

$$2) |a_{n+1}| \stackrel{?}{\leq} |a_n|$$

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \leq \frac{n}{n\sqrt{n}-1} &\Leftrightarrow (n+1)(n\sqrt{n}-1) \leq n(n+1)\sqrt{n+1}-n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (n+1)(n\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}) \leq 1 \Leftrightarrow n(n+1)(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}) \leq 1 \end{aligned}$$

Dakle, red $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n\sqrt{n}-1}$ obično konvergira, a divergira apsolutno, pa stoga konvergira uslovno.

d) Prvo ćemo ispitati apsolutnu konvergenciju. Na osnovu Dalamberovog kriterijuma, red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergira:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Odatle zaključujemo da početni red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$ konvergira apsolutno, pa samim tim i obično.

e) Prvo ćemo ispitati apsolutnu konvergenciju. Na osnovu Košijevog korenskog kriterijuma, red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ konvergira:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Odatle zaključujemo da početni red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ konvergira apsolutno, pa samim tim i obično.

2. U zavisnosti od parametra, ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R},$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)a^{2n}}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Rešenje:

a) Iz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha < 0 \end{cases}$ zaključujemo:

– za $\alpha \leq 0$ red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\alpha}$ divergira obično, a samim tim i apsolutno (opšti član mu ne teži nuli),

– za $\alpha > 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira, pa red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira apsolutno, a samim tim i obično.

– za $0 < \alpha \leq 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ divergira, pa red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\alpha}$ divergira apsolutno. Lajbnicovim kriterijumom ispitujemo običnu konvergenciju:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

2) $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

Dakle, za $0 < \alpha \leq 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\alpha}$ obično konvergira, a divergira apsolutno, pa stoga konvergira uslovno.

b) Iz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)a^{2n}} = \begin{cases} 0, & \frac{1}{a^2} \leq 1 \\ \infty, & \frac{1}{a^2} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ \infty, & a \in (-1, 0) \cup (0, 1) \end{cases}$ zaključujemo:

– za $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, red $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)a^{2n}}$ divergira i obično i apsolutno jer mu opšti član ne teži nuli.

– za $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)a^{2n}} = 0$ što je potreban, ali ne i dovoljan uslov za konvergenciju. Na osnovu Dalamberovog kriterijuma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+2)a^{2n+2}}}{\frac{1}{(n+1)a^{2n}}} = \frac{1}{a^2} < 1$$

zaključujemo da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)a^{2n}}$ konvergira, što znači da red $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)a^{2n}}$ konvergira apsolutno, a samim tim i obično.

– za $a = \pm 1$ dobija se red $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1}$ koji divergira apsolutno. Lajbnicovim kriterijumom ispitujemo običnu konvergenciju:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$$

$$2) \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1}$$

Dakle, za $a = \pm 1$ red $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)a^{2n}}$ obično konvergira, a divergira apsolutno, pa stoga konvergira uslovno.

3. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ konvergira i naći sumu sa tačnošću 0.01.

Rešenje:

Kako je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ alternativni red, običnu konvergenciju ispitujemo Lajbnicovim kriterijumom:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = 0$$

$$2) \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \leq \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{n}$$

Ispunjena su oba uslova pa zaključujemo da dati red konvergira.

Da bismo našli sumu sa tačnošću 0.01, treba da važi:

$$|S - S_n| \leq |a_{n+1}| < 0.01 \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} < 0.01 \Leftrightarrow (n+1)(n+2)(n+3) > 100.$$

Odatle zaključujemo da su potrebna prva tri sabirka da bi se postigla tražena tačnost ($4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$) i dobijamo $S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{60} = \frac{17}{120}$.