

Predispitne obaveze 1
20 poena

$$P(V) = 0.4 \quad P(C) = 0.6$$

$$P(V \cup C) = 0.9$$

1. [3 poena] Verovatnoća da Pera u toku jednog dana jede sladoled od vanile je 0.7, a verovatnoća da u toku jednog dana jede sladoled od čokolade je 0.6. Verovatnoća da jede bar jednu (od navedenih) vrstu sladoleda je 0.9.

Da li je događaj u toku jednog dana Pera jede sladoled od vanile i sladoled od čokolade nemoguć događaj? Objasniti odgovor!

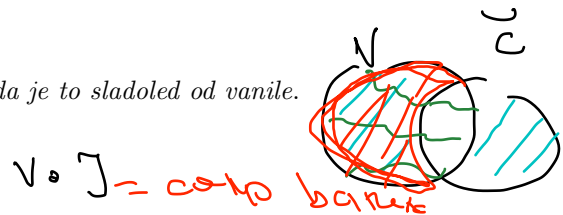
$$P(V)$$

Izračunati verovatnoću da u toku jednog dana Pera jede tačno jednu vrstu sladoleda. =]



Ako Pera jednog dana jede jednu vrstu sladoleda izračunati verovatnoću da je to sladoled od vanile.

$$P(V | J) = \frac{P(V \cap J)}{P(J)}$$



2. [3 poena] Ako su događaji A i B nezavisni, onda su i događaji \bar{A} i \bar{B} nezavisni. Dokazati!

$$\text{zakon: } P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (*) \quad \bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cap B}$$

$$\text{pretpostavka: } P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \stackrel{\text{de Morgan}}{=} P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

$$\stackrel{(*)}{=} 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A)) - P(B)(1 - P(A)) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\bar{A})P(\bar{B})$$

3. [1 poen] Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) prostor verovatnoće i $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$. Definirati nezavisnost događaja u parovima i nezavisnost događaja u ukupnosti (totalnu nezavisnost). Objasniti vezu između ove dve vrste nezavisnosti.

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j), \quad \forall i \neq j \quad \text{nezab. u parovima}$$

$$\text{u ukupnosti: } P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n), \quad \forall n \geq 2$$

$$\text{nezab. u ukupnosti} \Rightarrow \text{nezab. u parovima}$$

4. [4 poena] Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu.

$$\frac{x - \mu(X)}{\sqrt{\sigma(X)}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

Napisati standardizovanu slučajnu promenljivu $X^* = \dots$

$$\int_0^\infty 2e^{-2x} dx$$

Izračunati $P(X \leq 3) = \dots$

Na grafiku funkcije gustine i funkcije raspodele eksponencijalne $\mathcal{E}(2)$ raspodele predstaviti $P(X \leq 3)$.

$$f_X(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad a=2$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-ax}, & x > 0 \end{cases} \quad a=2$$

Odrediti parametar $a \in \mathbb{R}$ takav da je $P(X \geq A) = 0.5$.

$$1 - P(X < A) = 0.5$$

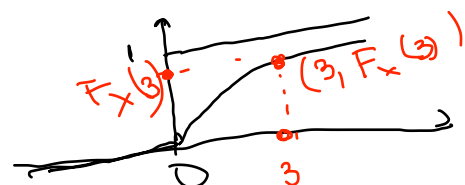
$$1 - F_X(A) = 0.5$$

$$F_X(A) = 0.5 > 0$$

$$1 - e^{-2A} = 0.5$$

$$e^{-2A} = 0.5 \Rightarrow -2A = \ln 0.5$$

$$A = \frac{\ln 0.5}{-2}$$



5. [3 poen] Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele verovatnoća $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$.

Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X i grafički je predstaviti.

Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive $Y = -X + 3$.

$$E(Y) = -E(X) + 3$$
$$D(Y) = D(-X)$$

6. [6 poena] Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodelu, a uslovna slučajna promenljiva $Y|X = x, x \in (0, 1)$, ima uniformnu $\mathcal{U}(x, x + 2)$ raspodelu.

Odrediti gustinu raspodele slučajne promenljive (X, Y) .

Izračunati $F_{X,Y}(0.5; 1)$.

Odrediti gustinu raspodele slučajne promenljive Y i njeno matematičko očekivanje.

Odrediti funkciju raspodele $F_{Y|X=x}(y)$ slučajne promenljive $Y|X = x$.

Odrediti matematičko očekivanje $E(Y|X = x)$ slučajne promenljive $Y|X = x$.

Deo završnog ispita 1
40 poena**Zadaci – Raditi u svesci!**

1. [7 poena] Na stolu se nalaze kutije bele, crne i crvene boje. U beloj kutiji se nalazi jedna kuglica sa brojem 1, jedna kuglica sa brojem 2 i dve kuglice sa brojem 3. U crnoj kutiji se nalaze dve kuglice sa brojem 1, jedna kuglica sa brojem 2 i dve kuglice sa brojem 4. U crvenoj kutiji se nalaze četiri kuglice i to po jedna kuglica sa brojevima 1, 2, 3 i 4. Veka prvo bira kutiju i zatim iz izabrane kutije izvlači dve kuglice odjednom. Veka tri puta verovatnije bira kutiju bele boje nego što bira kutiju crne boje, dok kutije crne i crvene boje bira sa jednakim verovatnoćama.
 - a) Izračunati verovatnoću da je zbir izvučenih brojeva na kuglicama deljiv sa 3.
 - b) Ako zbir izvučenih brojeva na kuglicama 5, izračunati verovatnoću da je Veka izabrala kutiju crne ili crvene boje.
2. [7 poena] Kockica se baca tri puta i ako bar jednom padne paran broj, izvodi se još jedno bacanje. Slučajna promenljiva X predstavlja broj palih parnih brojeva, a slučajna promenljiva Y broj izvedenih bacanja.
 - a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive (X, Y) .
 - b) Naći zakon raspodele slučajne promenljive $X|Y = 4$.
 - c) Izračunati koeficijent korelacije ρ_{XY} .
3. [8 poena] Slučajna promenljiva X je data funkcijom gustine $\varphi_X(x) = ae^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ i $a > 0$.
 - a) Odrediti konstantu a .
 - b) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = 3X - 1$.
 - c) Odrediti matematičko očekivanje slučajne promenljive $Y = 3X - 1$.
4. [8 poena] Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive, pri čemu X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu, a Y uniformnu $\mathcal{U}(1, 2)$ raspodelu. Naći raspodelu slučajne promenljive $Z = X - Y$.

Teorijska pitanja – Raditi na ovom papiru!

1. [4 poena] Formula totalne verovatnoće (formulisati teoremu i dokazati je).
2. [3 poena] Matematičko očekivanje (definicija i dokaz jedne osobine po izboru).
3. [3 poena] Definicija i osobine funkcije raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) .