Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 11. jul 2023.

PREZIME I IME: ______________________

BROJ INDEKSA: __________

Predispitne obaveze 1 – 20 poena

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

1. [2 poena] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće.

   Za svaka dva događaja A i B je $P(A\cup B)$ ...$\leq$... $P(A)+P(B)$ (Na mesto označeno tačkicama upisati jedan od znakova $<, >, =, \leq, \geq$)
   Za ...дисјунктне... događaje A i B je $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$
   Za ...независне... događaje A i B je $P(AB) = P(A)P(B)$
   Za ...у паровима дисјунктне... događaje A, B i C je $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)$.

2. [1 poen] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće. Ispitati nezavisnost sigurnog događaja Ω i nemogućeg događaja $\emptyset$.

$P(\Omega\cdot\emptyset) \stackrel{?}{=} P(\Omega)\cdot P(\emptyset)$

$D = 1\cdot 0 = 0$

$\Omega\cdot\emptyset = \emptyset$

$L = P(\Omega\cdot\emptyset) = P(\emptyset) = 0$

$L = D$
$\Downarrow$
Ω и $\emptyset$ јесу независни

3. [2 poena] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće.

   Da li događaji A i B mogu da budu disjunktni ako je $P(A) = 0,6$ i $P(B) = 0.7$? Odgovor obrazložiti!

Претп. $A\cap B = \emptyset$ $(*)$

$P(A\cup B) \stackrel{(*)}{=} P(A) + P(B) = 0.6 + 0.7 = 1.3$ ↯

$P(A\cup B) \in [0,1]$

$\Rightarrow$ A и B нису дисјунктни

   Da li događaji A i B mogu da budu nezavisni ako je $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0.7$ i $P(A\cup B) = 0,9$? Odgovor obrazložiti!

$\underbrace{P(AB)}_{L} \stackrel{?}{=} \underbrace{P(A)P(B)}_{D}$

$D = 0.6\cdot 0.7 = 0.42$

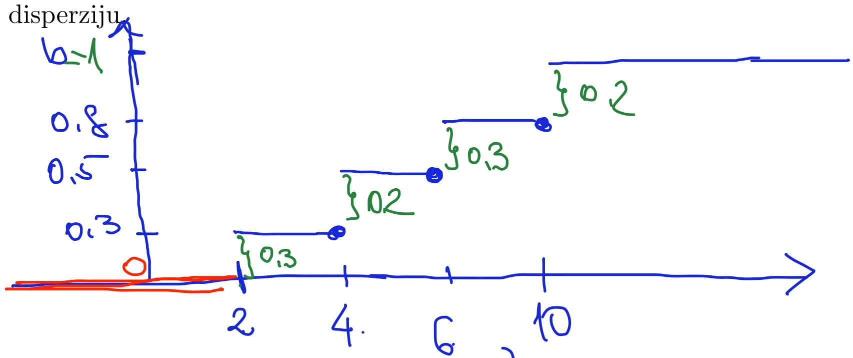
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$L = P(AB) = 0.6 + 0.7 - 0.9 = 0.4$

$L \neq D \Rightarrow A$ и B нису независни

4. [5 poena] Diskretna slučajna promenljiva X data je funkcijom raspodele $F_X(x) = \begin{cases} a, & x\leq 2 \\ 0,3, & 2 < x \leq 4 \\ 0,5, & 4 < x \leq 6 \\ 0,8, & 6 < x \leq 10 \\ b, & x > 10 \end{cases}$. Odrediti konstante a i b. Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive X i izračunati njeno matematičko očekivanje i disperziju.

$\leftarrow (-\infty, 2)$



$F_X(+\infty) = 1$

$b = 1$

$F_X(-\infty) = 0$

$a = 0$

$R_X = \{2, 4, 6, 10\}$

$X : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$

$E(X) = \sum x_i p(x_i)$
$= 0.6 + 0.8 + 1.8 + 2 =$

$E(X^2) = \sum x_i^2 p(x_i)$
$= 2^2\cdot 0.3 + 4^2\cdot 0.2 + 6^2\cdot 0.3 + 10^2\cdot 0.2$

$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \ldots$

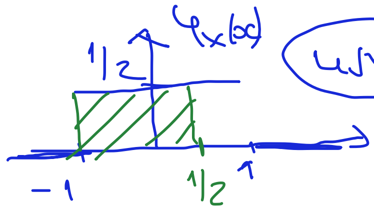
$E(X) = \frac{-1+1}{2} = 0$ $\quad D(X) = \frac{(1+1)^2}{12} = \frac{4}{12} = 1/3$ $\quad$ " $F_X(1/2)$

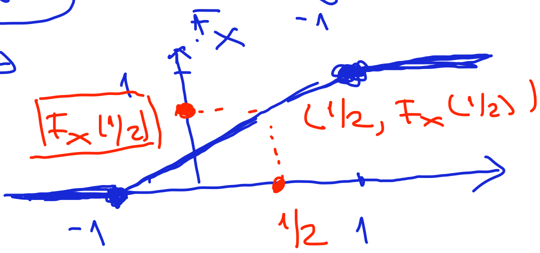
5. [2 poena] Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(-1,1)$ raspodelu. Izračunati verovatnoću $P(X < \frac{1}{2})$ i predstaviti je na grafiku funkcije gustine i funkcije raspodele slučajne promenljive X. Napisati standardizovanu (normalizovanu) slučajnu promenljivu za slučajnu promenljivu X.

$P(X < 1/2) = F_X(1/2) = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$

$\to F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{x+1}{2}, & -1 < x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

или $\quad P(X < 1/2) = \int_{-1}^{1/2} \frac{1}{2}\, dx = \frac{3}{4}$





$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in (-1,1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - 0}{\sqrt{1/3}}$

6. [2 poena] Nezavisne slučajne promenljive X i Y imaju eksponencijalnu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu.

Funkcija gustine $\varphi_{X,Y}(x,y)$ slučajne promenljive (X,Y) je

$\varphi_{X,Y}(x,y) \overset{\text{незав.}}{=} \varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \cdot \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 4e^{-2(x+y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$P(X < 2, Y = 1) =$ нез. $P(X<2)\cdot \boxed{P(Y=1)} = F_X(2)\cdot 0 = 0$

$E(-X+Y) = E(-X) + E(Y) = -E(X) + E(Y) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$D(-X+Y) \overset{\text{нез.}}{=} \boxed{D(-X)} + D(Y) = (-1)^2 \cdot D(X) + D(Y) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{2}{4}$

7. [4 poena] Slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(25, \frac{1}{5})$ raspodelu. Proceniti verovatnoću $P(|X - E(X)| < 3\sqrt{D(X)})$ pomoću

П кол.

nejednakosti Čebiševa; $\quad \forall \varepsilon > 0:\ P(|X - E(X)| \ge \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

Muavr-Laplasove teoreme.

8. [2 poena] Dvodimenzionalna diskretna slučajna promenljiva (X,Y) data je skupom vrednosti $\mathcal{R}_{X,Y} = \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m\}$ i verovatnoćama $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
x_1				
x_2				
x_i				1
x_n				

Marginalna verovatnoća $p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)$

Uslovna verovatnoća $p(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}$, $p(x_i) \ne 0$

Slučajne promenljive X i Y su nezavisne akko $p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j)$ $\forall i = 1, \ldots, n \wedge j = 1, \ldots, m$

[$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$]

Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, izračunati $\rho_{X,Y}$, gde je $\rho_{X,Y}$ koeficijent koelacije slučajnih promenljivih X i Y.

$\rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \overset{\text{нез}}{=} \frac{E(X)E(Y) - E(X)E(Y)}{\sim\sim} = 0$

Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 11. jul 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Predispitne obaveze 2 – 10 poena

1. [1 poen] Definisati Poasonov proces.

2. [4 poena] Ako je X_t, $t > 0$, Poasonov proces sa parametrom λt, $\lambda > 0$ izračunati njegovo matematičko očekivanje, disperziju i korelacionu funkciju.

3. [3 poen] Lanac Markova X_n, $n \in \mathbf{N}$, zadat je skupom stanja $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ i matricom prelaza $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Da li postoje finalne verovatnoće za dati lanac Markova? Odgovor obrazložiti! Ako postoje izračunati ih.

Ako je na početku sistem bio u stanju s_1 onda je $p(0) =$.................................. i

$P(X_0 = s_1, X_1 = s_3, X_2 = s_3) =$

Odrediti, ako je to moguće vektor $p(0)$ tako da dati lanac Markova bude stacionaran.

4. [4 poena] Neka je $X_n = X + n$, $n \in \mathbf{N}$, slučajni proces, gde je X slučajna promenljiva sa binomnom $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$ raspodelom. Odrediti skup stanja sistem slučajnog procesa X_n i raspodelu prvog reda (zakon raspodele verovatnoća i funkciju raspodele) zaseka X_n.

Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 11. jul 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 1 – 40 poena

1. [5 poena] U kutiji se nalazi 10 kuglica bele boje i 10 kuglica plave boje. Pera na slučajan način bira 10 puta po dve kuglice (odjednom) iz kutije **bez vraćanja** izvučenih kuglica u kutiju. Izračunati verovatnoću da će u svakom izvlačenju izvući kuglice različitih boja.

2. [5 poena] U kutiji se nalazi 10 kuglica bele boje i 10 kuglica plave boje. Pera na slučajan način bira jednu po jednu kuglicu iz date kutije, **sa vraćanjem** izvučene kuglice u kutiju, dok ne izvuče kuglicu plave boje, ali najviše 5 puta. Odrediti očekivani broj izvlačenja.

3. [10 poena] Neprekidna slučajna promenljiva X data je funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} 4ax, & x \in [0,1] \\ \dfrac{a}{\sqrt{x}}, & x \in (1,4) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$. Izračunati konstantu a. Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X i raspodelu slučajne promenljive $Y = -X + 3$.

4. [10 poena] U dve kutije se nalaze kuglice označene brojevima. U prvoj kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem 3, dve kuglice označene brojem 6 i dve kuglice označene brojem 9. U drugoj kutiji se nalaze tri kuglice označene brojem 6 i tri kuglice označene brojem 9. Iz svake kutije se na slučajan način bira po jedna kuglica. Slučajna promenljiva X predstavlja broj kojim je označena kuglica izvučena is prve kutije, a Y broj kojim je označena izvučena kuglica iz druge kutije. Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive (U, V), gde je $U = \max\{X, Y\}$ i $V = \min\{X, Y\}$. Da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive?

5. [10 poena] Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu i uslovna slučajna promenljiva $Y|X = x$, $x > 0$, ima uniformnu $\mathcal{U}(x, x + 1)$ raspodelu. Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = X - Y$.

Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 11. jul 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 2 – 20 poena

1. [5 poena] Za slučajni proces $X_t = \sin(tX)$, $t > 0$, izračunati srednju vrednost, disperziju, korelacionu i kovarijansnu funkciju ako je X slučajna promenljiva čija je funkcija gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & x \in (1,2) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

2. [8 poena] Marko svakog dana ide da igra fudbal, košarku ili tenis. Ujutro baca kockicu za "Ne ljuti se čoveče" i na osnovu ishoda bacanja donosi odluku na koji sport odlazi (bez obzira na kom sportu je bio prethodnog dana).

   Ako prilikom bacanja kockice padne manje od 3 tačkice sa podjednakom verovatnoćom odlazi na fudbali ili košarku, a ne odlazi na tenis. Ako prilikom bacanja kockice padnu bar 3 tačkice, odlazi da igra tenis.

   Stanje sistema je definisano sportom na koji Marko odlazi u toku dana.

   a) Napraviti matricu prelaza za jedan korak (za opisani lanac Markova).
   b) Odrediti početni vektor $p(0)$.
   d) Odrediti matrice prelaza za dva i tri koraka i verovatnoće prelaza $p_{TT}(2)$ i $p_{TT}(3)$, gde je sa T označeno stanje "Marko igra tenis".
   d) Da li postoje finalne verovatnoće za dati lanac Markova? Obrazložiti odgovor i ako postoje napisati sistem iz kojeg se one mogu odrediti (ne rešavati sistem).
   e) Da li je dati lanac Markova strogo stacionaran? Obrazložiti odgovor!

3. [7 poena] U pekari rade tri prodavca. U toku sat vremena u pekaru prosečno dođe 60 mušterija, dok za sat vremena u pekari može da bude usluženo 180 mušterija. Red čekanja nije ograničen. Ukoliko se radi o procesu usluživanja $M : M : k : r$

   a) odrediti parametre k, r, λ i μ i matricu Λ;
   b) ispitati egzistenciju finalnih verovatnoća za opisani proces usluživanja i ako postoje izračunati ih;
   c) ukoliko pekara radi non-stop, izračunati očekivani broj mušterija u pekari;
   d) ako prodavci rade po 8h, izračunati koliko vremena će u proseku sva tri prodavca biti bez posla.

NAPOMENA: $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$