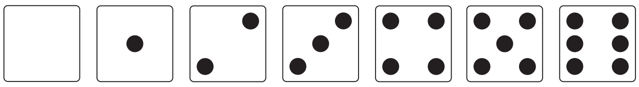
NEUREĐENI IZBORI

1. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000000 čiji je zbir cifara 7?

Rešenje: Svaki prirodan broj manji od 10^6 možemo zapisati kao niz $a_1a_2\dots a_6$, gde je $0 \leq a_i \leq 9$. Dakle, prirodnih brojeva koji zadovoljavaju uslov iz zadatka ima koliko ima i rešenja jednačine $a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 7$ na skupu nenegativnih celih brojeva, odnosno $\binom{7+6-1}{7} = \binom{7+6-1}{6-1}$.

2. Domina je pločica za igru na koju su nalepljene dve sličice (ne obavezno različite). Ako na raspolaganju imamo 7 vrsta sličica, koliko je različitih domina moguće napraviti pomoću njih?

Rešenje: Standardni paket sadrži domine sa sledećim sličicama:



Neka je sa x_i označen broj sličica na kojima je nacrtano i tačkica na jednoj uočenoj domini, $i \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$. Kako svaka domina ima dve sličice, važi $0 \leq x_i \leq 2$, za svako i. Sada broj domina odgovara broju rešenja jednačine

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$$

u skupu nenegaticnih celih brojeva. Prema tome, broj različitih domina koje možemo napraviti sa datim vrstama sličica je $\binom{2+6}{2} = \binom{8}{2} = 28$.

3. Iz kompleta koji sadrži 32 različite karte bira se 8 karata SA/BEZ vraćanja, tako da njihov redosled JESTE/NIJE bitan. Koliko različitih izbora ima?

Rešenje:

Slučaj SA/JESTE (sa vraćanjem, a redosled jeste bitan) odgovara broju 8–permutacija elemenata multiskupa $\overline{P}(32; 8) = 32^8$.

Slučaj SA/NIJE odgovara kombinacijama elemenata multiskupa (32 karte kao 32 kutije razdvojene 31 pregradom i 8 kuglica), $\overline{C}(32; 8) = \binom{8+31}{8} = \binom{39}{8}$.

Slučaj BEZ/JESTE odgovara broju 8–permutacija elemenata skupa sa 32 elementa, tj. $P(32; 8) = 32 \cdot 31 \cdot \dots \cdot (32 - 8 + 1)$.

Slučaj BEZ/NIJE odgovara kombinacijama elemenata skupa $C(32; 8) = \binom{32}{8}$.

4. Koliko ima binarnih nizova od n nula i $2n + 2$ jedinica takvih da se između svake dve nule nalaze bar dve jedinice?

Rešenje: Rasporedimo n nula, a zatim $2(n-1)$ jedinica po dve između svake dve nule. Broj načina da rasporedimo preostale 4 jedinice odgovara broju rasporeda 4 kuglice u $n + 1$ kutiju, gde u svakoj kutiji može da bude od 0 do 4 kuglice, tj. traženi broj je $\binom{n+4}{4}$.

5. Koliko celobrojnih rešenja ima jednačina

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 23,$$

pod uslovom da važi $x_1 > 1$, $x_2 > 2$, $x_3 > 3$, $x_4 > 4$ i $x_5 > 5$?

Rešenje: Kako su uslovi $x_i \geq i + 1$, uvodeći nove promenljive $y_i = x_i - i - 1$ dobijamo da za svako y_i važi $y_i \geq 0$, kao i

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 23 - (2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.$$

Dakle, problem se sveo na traženje broja rešenja jednačine $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 3$ na skupu nenegativnih celih brojeva i taj broj iznosi $\binom{3+4}{3}$.

6. Broj studenata koji izlaze na usmeni ispit iz Algebre je 60. Usmeni se može polagati kod jednog od tri profesora. Prva dva profesora moraju ispitati bar 10 studenata, a treći bar 15. Na koliko načina profesori mogu da izvrše podelu posla, ukoliko nam nije bitno koji će student kod koga odgovarati, nego samo broj ispitanih studenata po profesoru? (domaći)

Rešenje: Neka je x_i broj studenata koje ispita i-ti profesor, $1 \leq i \leq 3$. Tražimo broj rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 = 60, \quad \text{ako je } x_1 \geq 10,\ x_2 \geq 10,\ x_3 \geq 15.$$

Uvodeći nove promenljive $y_1 = x_1 - 10$, $y_2 = x_2 - 10$ i $y_3 = x_3 - 15$ problem se svodi na određivanje broja rešenja jednačine $y_1 + y_2 + y_3 = 60 - 35 = 25$ na skupu nenegativnih celih brojeva, $y_i \geq 0$. Profesori mogu podeliti posao na $\binom{25+2}{2} = \binom{27}{2}$ načina.

7. Koliko rešenja u skupu nenegativnih celih brojeva ima nejednačina

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leq n?$$

Rešenje: Jedan način jeste da nađemo brojeve rešenja jednačina

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = i, \quad 0 \leq i \leq n$$

u skupu nenegativnih celih brojeva i sve ih saberemo, tj. $\sum_{i=0}^{n} \binom{i+m-1}{i}$.

Nešto elegantniji način bi bio da nađemo broj svih rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m + y = n$$

u skupu nenegativnih celih brojeva. Jasno, y može uzimati vrednosti od 0 do n, čime preostali zbir $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ uzima respektivno vrednosti od n do 0.

Broj rešenja nejednačine iznosi $\binom{n+m}{n}$.

8. Koliko ima $n-$cifrenih prirodnih brojeva u čijem dekadnom zapisu nijedna cifra
   (a) nije manja od prethodne;
   (b) nije veća od prethodne?

   Napisati kod u programskom jeziku JAVA koji ispisuje sve takve šestocifrene brojeve.

Rešenje:

(a) Svaki $n-$cifreni prirodni broj koji zadovoljava uslov zadatka se može predstaviti kao niz $a_1a_2a_3\dots a_{n-1}a_n$, pri čemu važi $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n$, tj. trebaju nam $n-$cifreni brojevi kod kojih su cifre u **neopadajućem** poretku. Svaki takav broj je jedinstveno određen brojem jedinica, dvojki, trojki,..., devetki u njegovom dekadnom zapisu. Ako sa x_i označimo broj pojavljivanja cifre i, $1 \leq i \leq 9$, traženi broj odgovara broju rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = n.$$

Broj $n-$cifrenih prirodnih brojeva kod kojih su cifre u neopadajućem poretku je $\binom{n+8}{8}$. Ovaj broj odgovara raspoređivanju n kuglica u 9 kutija.

```java
public class Neopadajuci6-cifreni{

   public static void main(String []args) {
       int s=0;

       for (int i=1; i<=9; i++){
           for (int j=i; j<=9; j++){
               for (int k=j; k<=9; k++){
                   for (int l=k; l<=9; l++){
                       for (int m=l; m<=9; m++){
                           for (int n=m; n<=9; n++){
                               System.out.println(""+i+j+k+l+m+n);
                               s += 1;
                           }
                       }
                   }
               }
           }
       }

       System.out.println("S="+s);
   }
}
```

Traženih šestocifrenih brojeva ima $\binom{6+8}{8} = \binom{14}{8} = 3\,003.$

(b) Poredak cifara u ovom slučaju treba da bude **nerastući,** pa je potrebno da važi uslov $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n$. Zadatak rešavamo slično kao u primeru pod (a), jedino što je sada i cifra 0 na raspolaganju. Broj rešenja jednačine

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = n$$

je $\binom{n+9}{9}$. Međutim, ne odgovaraju sva rešenja $n-$cifrenim prirodnim brojevima. Među rešenjima jednačine je i rešenje $x_0 = n$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_9 = 0$, koje bi odgovaralo broju 0 koji nije prirodan broj. Prema tome, traženih brojeva ima $\binom{n+9}{9} - 1$.

```java
public class Nerastuci6-cifreni{

    public static void main(String []args) {
        int s=0;

        for (int i=1; i<=9; i++){
            for (int j=0; j<=i; j++){
                for (int k=0; k<=j; k++){
                    for (int l=0; l<=k; l++){
                        for (int m=0; m<=l; m++){
                            for (int n=0; n<=m; n++){
                                System.out.println(""+i+j+k+l+m+n);
                                s += 1;
                            }
                        }
                    }
                }
            }
        }

        System.out.println("S="+s);
    }
}
```

Ovakvih šestocifrenih brojeva ima $\binom{6+9}{9} - 1 = \binom{15}{9} - 1 = 5\,004$.

9. Odrediti broj svih monotono nerastućih uređenih petorki $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ elemenata iz skupa $\{1, 2, 3\}$. (domaći)

Rešenje: Pošto su u pitanju narastuće petorke treba da važi

$$3 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq 1.$$

Rešenje možemo interpretirati pomoću kutija i kuglica kao i u prethodnom zadatku. Kutije su numerisane redom brojevima 3, 2 i 1, a kuglica imamo 5. Svaki raspored kuglica u kutijama odgovara jednoj uređenoj petorci koja zadovoljava uslove zadatka i obrnuto. Na primer, rasporedu u kome u prvoj kutiji imamo 2 kuglice, drugoj 3, a nijednu u trećoj kutiji odgovara uređena petorka $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (3, 3, 2, 2, 2)$.

Rešenje je $\binom{2+5}{5} = \binom{7}{2} = 21$.

10. Dati kombinatornu interpretaciju izračunavanja vrednosti promenljive `s` na kraju izvršavanja koda napisanog u programskom jeziku JAVA:

```java
public class IzracunajS{

   public static void main(String[] args) {
       int s=0;

       for (int i=1; i<=20; i++){
           for (int j=1; j<=20; j++){
               for (int k=j; k<=20; k++){
                   for (int l=k; l<=20; l++){
                       if (i != j){
                            s += 1;
                       }
                   }
               }
           }
       }

      System.out.println("S= "+s);
   }
}
```

Rešenje: Brojač i je nezavisan od preostala 3 brojača i uzima vrednosti od 1 do 20. Za brojače j, k i l važi $1 \leq j \leq k \leq l \leq 20$. Promenljiva s broji uređene četvorke (i,j,k,l) kod kojih je $i \neq j$, $1 \leq i \leq 20$ i $1 \leq j \leq k \leq l \leq 20$.

Ideja je da prvo nađemo broj četvorki (i,j,k,l) sa uslovima $1 \leq i \leq 20$ i $1 \leq j \leq k \leq l \leq 20$, dakle bez uslova $i \neq j$. Za traženje broja uređenih trojki (j,k,l) sa uslovom $1 \leq j \leq k \leq l \leq 20$, koristimo ideju koju smo videli u prethodnim zadacima. Ovakvih trojki ima koliko ima i rasporeda 3 kuglice u 20 kutija, tj. $\binom{19+3}{3} = \binom{22}{3}$, pa je broj četvorki, uzimajući u obzir da i uzima vrednosti od 1 do 20 nezavisno od preostala 3 brojača, jednak $20 \cdot \binom{22}{3}$.

Zatim nalazimo broj cetvorki (i,j,k,l) sa uslovima $1 \leq i \leq 20$ i $1 \leq j \leq k \leq l \leq 20$ kod kojih je $i = j$.

Analiziramo po slučajevima:
Za $i = 1$ tražimo sve trojke (j,k,l) za koje je $j = 1$ i važi $j \leq k \leq l \leq 20$.
Za $i = 2$ tražimo sve trojke (j,k,l) za koje je $j = 2$ i važi $j \leq k \leq l \leq 20$
$\vdots$
Za $i = 20$ tražimo sve trojke (j,k,l) za koje je $j = 20$ i važi $j \leq k \leq l \leq 20$.

Kako u svim trojkama (j,k,l), $1 \leq j \leq k \leq l \leq 20$ promenljiva j uzima vrednosti od 1 do 20, gornji slučajevi su ustvari pokupili sve ove uređene trojke. Ovakvih trojki ima $\binom{22}{3}$.

Dakle, rešenje je $20 \cdot \binom{22}{3} - \binom{22}{3} = 19 \cdot \binom{22}{3}$.

11. Dokazati da je $\sum_{i=0}^{r} \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r}$.

Rešenje: Dokaz dajemo indukcijom po r.

BI: Za $r = 0$ jednakost je tačna, jer je $\binom{n+0}{0} = \binom{n+0+1}{0} = 1$.

IH: Pretpostavimo da je jednakost tačna za $r = k$, tj. da važi

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}.$$

IK: Dokažimo da je jednakost tačna za $r = k + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \binom{n+i}{i} &= \sum_{i=1}^{k} \binom{n+i}{i} + \binom{n+k+1}{k+1} && \text{(IH)} \\
&= \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} && \text{(Paskalov iden.)} \\
&= \binom{n+k+2}{k+1}.
\end{aligned}$$

II način: Treba dokazati da važi:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}.$$

Koristeći Paskalov identitet dobijamo:

$$\begin{aligned}
\binom{n+r+1}{r} &= \binom{n+r}{r} + \binom{n+r}{r-1} \\
&= \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r-1}{r-2} = \\
&= \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r-2}{r-2} + \binom{n+r-2}{r-3} \\
&\vdots \\
&= \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \cdots + \binom{n+2}{2} + \binom{n+2}{1} \\
&= \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \cdots + \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{0}.
\end{aligned}$$

Kako je $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n}{0}$ dobijamo da važi

$$\binom{n+r+1}{r} = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \cdots + \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0}.$$

12. Dokazati da je $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \qquad \text{(smena: j=k-1)} \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}.
\end{aligned}$$

II način: Posmatrajmo razvoj izraza $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

Diferenciranjem razvoja po x dobijamo

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}.$$

Kada uvrstimo $x=1$ u prethodni izraz dobijamo

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k,$$

čime je pokazano traženo tvrđenje.

13. Dokazati da je $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} \qquad \text{(smena: j=k+1)} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{0}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot(2^{n+1}-1).
\end{aligned}$$

14. Dokazati da je $\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}$.

Rešenje: **Algebarski dokaz:**

$$\begin{aligned}\binom{m}{n}\binom{n}{k} &= \frac{m!}{n!(m-n)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{(m-k)!}{(n-k)!(m-n)!}\\ &= \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}.\end{aligned}$$

Kombinatorni dokaz:

Neka je dat skup M sa m elemenata. Izračunajmo broj načina da formiramo skupove N i K, takve da važi $K \subseteq N \subseteq M$, $|K| = k$ i $|N| = n$. Dva su moguća pristupa rešavanju zavisno od redosleda formiranja ovih skupova.

Možemo prvo formirati skup N na $\binom{m}{n}$ načina, birajući n od m elemenata skupa M. Kako skup K mora biti podskup od N, njega možemo formirati na $\binom{n}{k}$ načina. Dakle, broj načina da formiramo skupove N i K, takve da važi $K \subseteq N \subseteq M$ iznosi $\binom{m}{n}\binom{n}{k}$, što je leva strana jednakosti.

Ukoliko bismo problem rešavali tako što prvo formiramo skup K, birajući k od m elemenata skupa M, a zatim skup K dopunjavali do skupa N dobili bismo desnu stranu jednakosti koju dokazujemo. Naime, broj načina da formiramo skup K je $\binom{m}{k}$, a broj načina da izaberemo još $n-k$ od $m-k$ elemenata za dopunjavanje do skupa N iznosi $\binom{m-k}{n-k}$.

15. Dokazati Vandermondov identitet

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}.$$

Rešenje: Posmatrajmo problem izbora k ljudi iz grupe od m žena i n muškaraca. Kako nemamo nikakav uslov u vezi sa polom osoba koje biramo, broj načina da izaberemo k ljudi iz ove grupe je $\binom{m+n}{k}$, što odgovara desnoj strani jednakosti koju dokazujemo.

S druge strane, sve te izbore možemo grupisati u zavisnosti od broja žena među k izabranih. Izbora u kojima nema žena ima $\binom{m}{0}\binom{n}{k}$, sa jednom ženom $\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}$, itd. Završavamo sa izborima u kojima su sve žene i njih ima $\binom{m}{k}\binom{n}{0}$. Dakle, ovom pristupu odgovara leva strana jednakosti, čime smo pokazali da su leva i desna strana jednakosti iste jer predstavljaju rešenje istog kombinatornog problema.

Napomena: Primetimo da se Vandermondov identitet može zapisati na sledeći način:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

16. Dokazati da je $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Rešenje: U dokazu korisitimo Vandermondov identitet i simetričnost binomnih koeficijenata.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}.$$

17.* Dokazati da je $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{2k}+\cdots = \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{2k+1}+\cdots = 2^{n-1}$.

Rešenje: Prvi deo tvrđenja možemo zapisati na sledeći način: dokazati da svaki skup sadrži isti broj podskupova sa parnim i sa neparnim brojem elemenata. Posmatrajmo proizvoljan skup X sa n elemenata i neka je $x \in X$. Neka se u $\mathcal{A}$ nalaze svi podskupovi skupa X koji imaju paran broj elemenata, a u $\mathcal{B}$ svi podskupovi sa neparnim brojem elemenata. Sada za $A \in \mathcal{A}$ definišemo preslikavanje $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ na sledeći način:

$$f(A) = \begin{cases} A \cup \{x\}, & x \notin A \\ A \setminus \{x\}, & x \in A \end{cases}.$$

Ovo preslikavanje je očigledno bijekcija, te važi $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$. Ovime je dokazan prvi deo tvrđenja. Kako je ukupan broj podskupova skupa sa n elemenata 2^n i kako svaki skup ima isti broj podskupova sa parnim i sa neparnim brojem elemenata, trivijalno važi da je broj takvih podskupova 2^{n-1}.

II način: Ako u formulu $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ stavimo $x = 1$ i $x = -1$, dobijamo sledeće identitete $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ i $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$. Ukoliko saberemo dobijene jednakosti dobićemo da važi

$$2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \cdots + 2\binom{n}{2k} + \cdots = 2^n,$$

odakle je $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2k} + \cdots = 2^{n-1}$.

Slično, oduzimanjem gornjih jednakosti dobijamo

$$2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 2\binom{n}{5} + \cdots + 2\binom{n}{2k+1} + \cdots = 2^n,$$

pa je $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{2k+1} + \cdots = 2^{n-1}$.

18. Naći koeficijent uz a^3b^2 u razvoju izraza $(3a-2b)^5$.

Rešenje:

$$(3a-2b)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(3a)^k(-2b)^{5-k}=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}3^k(-2)^{5-k}a^kb^{5-k}.$$

Za $k=3$ dobijamo da je koeficijent uz a^3b^2 jednak $\binom{5}{3}3^3(-2)^{5-3}=1080$.

19. Naći koeficijent uz x^5 u razvoju izraza $(3\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}})^{20}$.

Rešenje:

$$(3\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^{20}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(3\sqrt{x})^k(\frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^{20-k}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}\frac{3^k}{2^{20-k}}\cdot x^{\frac{k}{2}-\frac{20-k}{3}}.$$

Eksponent od x je jednak 5 kada je $\frac{k}{2}-\frac{20-k}{3}=5$, odnosno za $k=14$. Koeficijent uz x^5 je $\binom{20}{14}\dfrac{3^{14}}{2^{20-14}}=\binom{20}{14}3^{14}\cdot 2^{-6}$.

20. Zbir binomnih koeficijenata pri razvoju $(1+x)^n+(1+x)^{n+1}$ jednak je 1536. Odrediti koeficijent uz x^6.

Rešenje:

$$(1+x)^n+(1+x)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i+\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^j \tag{1}$$

Zbir binomnih koeficijenata dobijamo za $x=1$, pa važi:

$$2^n+2^{n+1}=1536.$$

Rešenje gornje jednačine je $n=9$. Iz (1) sledi da za $i=6$ i $j=6$ dobijamo koeficijent uz x^6, pa je traženi koeficijent $\binom{9}{6}+\binom{10}{6}=294$.

Napomena: Primetimo da smo do traženog koeficijenta mogli doći i na sledeći način.

$$\begin{aligned}(1+x)^n+(1+x)^{n+1}&=(1+(1+x))\ (1+x)^n\\&=(x+2)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}\ +\ 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.\end{aligned}$$

Kako je $n=9$, dobijamo da je koeficijent uz x^6 jednak $\binom{9}{5}+2\binom{9}{6}=294$.

21. Naći koeficijent uz $x^2y^3z^2$ u razvoju izraza $(x+y+z)^7$.

Rešenje:

$$(x+y+z)^7 = \sum_{\sum_{i=1}^{3} n_i=7,\ n_i\geq 0} \binom{7}{n_1, n_2, n_3} x^{n_1}\, y^{n_2}\, z^{n_3}.$$

Monom $x^2y^3z^2$ dobijamo za $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, te je koeficijent uz njega $\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2!3!2!}$.

22. Naći koeficijent uz x^{10} u razvoju izraza $(1-x^2+x^3)^{11}$.

Rešenje:

$$(1-x^2+x^3)^{11} = \sum_{\sum_{i=1}^{3} n_i=11,\ n_i\geq 0} \binom{11}{n_1, n_2, n_3} (-x^2)^{n_2}\, (x^3)^{n_3}.$$

Eksponent od x je jednak 10 kada je $2n_2 + 3n_3 = 10$. Kako su n_2 i n_3 nenegativni celi brojevi, rešenja su uređeni parovi $(n_2, n_3) = (5, 0)$ i $(n_2, n_3) = (2, 2)$.

Koeficijent uz x^{10} je: $(-1)^5 \frac{11!}{6!5!0!} + (-1)^2 \frac{11!}{7!2!2!}$.