АНАЛИЗА 2

I

Бројни редови

* к-та парцијална сума

$$\boxed{S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k}$$ → овде имамо коначно много сабирака

$\{S_k\}_{k \in N}$

* ред је конвергентан акко је низ његових парцијалних сума конвергентан

* Ако је $S = \lim\limits_{k \to \infty} S_k < \infty$ тада се S назива СУМА РЕДА

$$\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

* ГЕОМЕТРИЈСКИ РЕДОВИ

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} + \ldots \qquad q \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{S_k = \frac{1-q^k}{1-q}}$$

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \begin{cases} K & |q| < 1 \to \text{конвергентан} \\ D & |q| \geq 1 \to \text{дивергентан} \end{cases}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1}$$

* особине конвергентних редова:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ → особина адитивности

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \ \alpha \neq 0$ ← константе излазе испред реда

Критеријуми за конвергенцију редова

НАПОМЕНА:
* Коначно много сабирака не утиче на конвергенцију реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1+a_2+\dots a_{n_0}}_{\text{коначан бр. сабирака}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$$

→ ако је овај ред конвергентан

онда је и почетни конвергентан

* Ако нам само треба информација да ли је ред конвергентан или НЕ није битно одакле креће бројач!

1) – Кошијев критеријум конвергенције –

(Т) Ред $\sum a_n$ је конвергентан акко

$$(\forall \varepsilon>0)\,(\exists k_0\in\mathbb{N})\,(\forall p,k\in\mathbb{N})\,\Big(k\geq k_0 \Rightarrow \Big|\underbrace{\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n}_{S_{k+p}-S_k}\Big|<\varepsilon\Big)$$

* Ред је конвергентан акко је низ парцијалних сума $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ Кошијев.

* ПОСЛЕДИЦА Кошијевог критеријума
* Ако је ред конвергентан тада је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2) – Критеријум о дивергенцији реда –

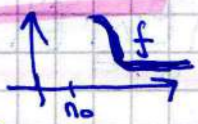
* Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ тада је ред ДИВЕРГЕНТАН!

3) - Интегрални критеријум за конвергенцију редова -

$$\underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{несвојствени интеграл}} = \lim_{T\to+\infty} \underbrace{\int_1^{T} f(x)\,dx}_{\text{одређени интеграл}}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx}$$

Ако . . . : услови



* Тада $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира акко $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{matrix} \nearrow \ \alpha > 1 \ (K) \\ \rightarrow \ \alpha \le 1 \ (D) \end{matrix}$$

ХАРМОНИЈСКИ РЕДОВИ

4) - Упоредни критеријум I врсте -

* Нека је Σa_n ред такав да је $a_n \geq 0$ за све $n \geq n_0$ где је $n_0 \in \mathbb{N}$. Тада ако важи $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$ имамо:

1) Ако је Σb_n конвергентан тада је и Σa_n конвергентан
2) Ако је Σa_n дивергентан тада је и Σb_n дивергентан

Скала раста ф-је:

$$\ln n < n^a < n^b < p^n < q^n < n! < n^n$$

при чему је $0 < a < b$, $1 < p < q$

$\frac{\text{полином}}{\text{полином}}$

5) - Упоредни критеријум II врсте - (критеријум о понашању)

* Нека су $\sum a_n$ и $\sum b_n$ редови такви да су $a_n \geq 0$ и $b_n \geq 0$ $\forall n \geq n_0$. Тада ако се $a_n \sim \lambda \cdot b_n$, $\lambda \neq 0$, $n \to \infty$ ред $\sum a_n$ конвергира (дивергира) акко $\sum b_n$ конвергира (дивергира).

$$\boxed{a_n \sim \lambda b_n \iff \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda}$$

$\operatorname{arctg} x \sim x$, $x \to 0$

$e^x - 1 \sim x$, $x \to 0$

$n \to \infty$ $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n}$

$\sin x \overset{x\to 0}{\sim} x$ $\to \sin f(x) \sim f(x)$

$\ln x \overset{x\to 0}{\sim} x$ $\to \ln f(x) \sim f(x)$

Апроксимације

6) - Кошијев (коренски) критеријум - ← погодан када је a_n на неки степен n!

* Нека је $\sum a_n$ ред такав да је $a_n \geq 0$, $\forall n \geq n_0$.

Ако је:
1) $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ ред је конвергентан
2) $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ ред је дивергентан
3) $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$ критеријум не даје одговор!

* Ако је $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан онда је $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

7) - Даламберов (количнички) критеријум ← погодан када се појављује факторијел

* Нека је $\sum a_n$ ред такав да је $a_n \geq 0$ $\forall n \geq n_0$. Тада
1) ако је $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ред конвергира
2) ако је $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ред дивергира
3) ако је $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ критеријум не даје одговор!

* ако је $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ конвергентан тада је $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1$$

Алтернативни редови

* Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је АЛТЕРНАТИВАН ако је $\boxed{a_n = (-1)^{n-1} \cdot b_n}$, $b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

пр. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ $\quad \boxed{b_n = \frac{1}{n}}$ ненегативни ред

* битно да се смењује знак, није битан редослед

$\cos n\pi = (-1)^n$

- Лајбницов критеријум за конвергенцију алтернативних редова -

* Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot b_n$ алтернативни ред

Тада ако важе услови:

1) $\boxed{b_{n+1} \leq b_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ монотоно растући)

2) $\boxed{\lim_{n \to \infty} b_n = 0}$ $\quad$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ је КОНВЕРГЕНТАН

* ово је само за доказ конвергенције, ако ови услови нису испуњени НЕ МОЖЕМО ЗАКЉУЧИТИ ДИВЕРГЕНЦИЈУ!

Апсолутно конвергентни редови

деф.

* Ред $\sum a_n$ је апсолутно конвергентан ако је $\sum |a_n|$ конвергентан.

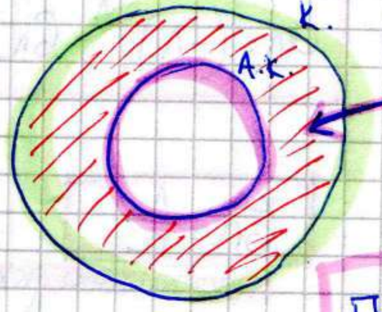
(T) Ако је ред апсолутно конвергентан и тада је и обично конвергентан и важи

$$\boxed{\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|} \rightarrow \text{неједнакост } \Delta \text{ за редове}$$

$|x+y| \leq |x| + |y|$

$\boxed{A.K \Rightarrow K}$

* АПСОЛУТНА КОНВЕРГЕНЦИЈА ИМПЛИЦИРА ОБИЧНУ!



условно конвергентни редови су редови који конвергирају, али не конвергирају и апсолутно

Пр. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ У.К. (Лајбницов к.)

Операције са редовима

1) САБИРАЊЕ

* Ако су $\sum a_n$ и $\sum b_n$ конвергентни редови тада

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$$

* напомена:

Ако је један од редова $\sum a_n$ и $\sum b_n$ дивергентан, а други конвергентан тада је и $\sum(a_n \pm b_n)$ дивергентан.

2) МНОЖЕЊЕ РЕДА СКАЛАРОМ

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

3) МНОЖЕЊЕ ДВА РЕДА

* Нека су $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ апсолутно конвергентни

Тада $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ при чему је

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \cdot b_k$$

као множење са коначним чл.

$$(a_0+a_1+a_2+\dots)(b_0+b_1+b_2+\dots) = \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{c_1} +$$

* најчешће множење два реда где нам је потребна Биномна формула: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

биномни коеф.

и) КОМУТАТИВНИ И АСОЦИЈАТИВНИ ЗАКОН ЗА РЕДОВЕ

Комутативност: Нека је $\sum a_n$ апсолутно конвергентан ред и $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ произвољна пермутација скупа $\mathbb{N}$

Тада $\boxed{\sum a_n = \sum a_{p(n)}}$

Асоцијативност: Ако је ред $\sum a_n$ апсолутно конвергентан тада

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} a_n + \sum_{n\in\mathbb{N}_2} a_n + \ldots + \sum_{n\in\mathbb{N}_k} a_n + \ldots}$$

* При чему је $\{\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \ldots, \mathbb{N}_k, \ldots\}$ партиција скупа $\mathbb{N}$

унија свих партиција даје скуп цео а пресек између парт је празан скуп

Задаци:

* Када испитујемо конвергенцију неког реда:
 - гледамо да ли је ненегативан, алтернативни

• неки од критеријума може слободно да се искористи

• апсолутна конвергенција $AK \Rightarrow K$ | ако див.

• условна конвергенција (Лајбницов критеријум)

IV

Функционални редови

* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{f_n(x)}_{a_n \to \text{општи члан}}$ $\{f_n(x)\}_{n\in N} \to$ низ ф-ја над интервалом $I \subseteq R$

Деф. (Тачкаста конвергенција) ← као обична конвергенција али за функционалне редове

* $\sum f_n(x)$ конвергира тачкасто над интервалом I ако $(\forall x_0 \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\underbrace{\exists k_0 \in N}_{k_0 = k_0(\varepsilon, x_0)})(\forall k, p \in N)$

$$(k \geq k_0) \Rightarrow \Big|\underbrace{\sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x_0)}_{S_{k+p} - S_k}\Big| < \varepsilon)$$

$S_k \to$ низ парц. сума

* функ. ред конв. за свако x
* не може се лако испитати јер је потребно испитивање за сваку тачку, а имамо бесконачно тачака

Деф. Униформна конвергенција

* $\sum f_n(x)$ униформно конвергира над $I \subseteq R$ ако $(\forall \varepsilon > 0)(\underbrace{\exists k_0 \in N}_{k_0 = k_0(\varepsilon)})(\forall k, p \in N)(\underbrace{\forall x \in I}_{\text{разлика}})(k \geq k_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Big|\sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x)\Big| < \varepsilon)$$

(T) Ако је ред $\sum f_n(x)$ униформно конвергентан ← ред конв. над неким целим интервалом!
над I тада је и тачкасто конвергентан над I.

$$У.К \Rightarrow Т.К$$

Тачкасто НЕ конв. ⇒ униформно НЕ конв.

* Вајерштрасов критеријум униформне конв.

- Нека је $\sum a_n$, $a_n \geq 0$, конвергентан бројни ред. Ако је $\{f_n(x)\}_{n\in N}$, $x \in I$ низ ф-ја такав да $\boxed{|f_n(x)| \leq a_n}$, $\forall x \in I$ тада функ. ред $\sum f_n(x)$ конв. униформно.

$|arctg(x)| < \frac{\pi}{2}$
$|\cos x| \leq 1$
$|\sin t| \leq |t|$

- Јајаји: - која је функ. ред гледамо са којим бројним редом можемо да га упоредимо (ограничимо) тако да је $|f_n(x)| \leq a_n$,
  - онда гледамо да ли је бројни ред конв. или не на основу неког ој критеријума
  - на основу ВАЈЕРШТРАСОВОГ крит. онда наш функц. ред униформно конв. или не конв.

* Није дефинисана униформна и тачкаста дивергенција, као ни условна и апсолутна!

Степени редови

* посебна врста функц. редова

* деф. $\sum f_n(x)$ је степени ред ако $\boxed{f_n(x) = a_n(x-x_0)^n}$ при чему су a_n коефицијенти степеног реда, а x_0 центар степеног реда.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \xrightarrow[x-x_0 = t]{\text{сменом}} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n}_{\text{центриран у нули!}}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_k \cdot t^k + \dots$$

степени редови → полиноми бесконачног степена

* степени редови могу бити конв. у неком интервалу, над целим скупом или у једној тачки.

* сваки степени ред је конв. у свом центру, тад могу бити да јединo конв.

* КАДА СЕ ПРИЧА О КОНВ. ПРИЧА СЕ О ТАЧКАСТОЈ КОНВ!

- Полупречник конв. степених редова

* Нека је $\sum a_n x^n$ степени ред. Тада се:

1) $\boxed{r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}$ или 2) $\boxed{r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$

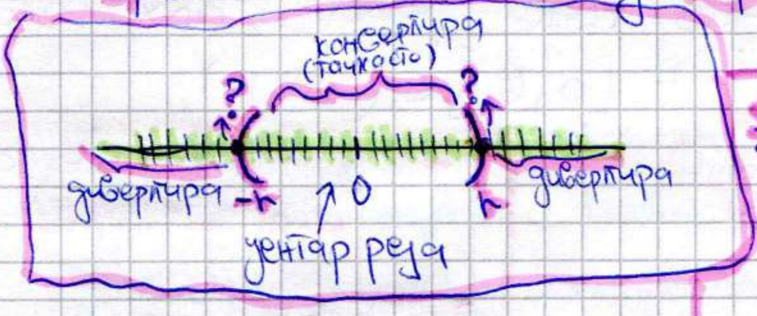
назива полупречником конв. степеног реда $\sum a_n x^n$.

* Ако је $r>0$ полупречник конвергенције реда $\sum a_n x^n$ тада:

1) ред (тачкасто) конвергира $\boxed{\forall x \in (-r, r)}$

2) ред дивергира за $\boxed{\forall x \in (-\infty, -r) \cup (r, +\infty)}$

3) за $x=r$ и $x=-r$ су потребна додатна испитивања



* Специјално, ако је: $r=0$ ред конвергира САМО ЗА $x=0$, а ако је $r=\infty$ конв. НАД R.

- Особине степених редова

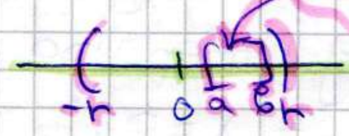
1) За свако x из пресека интервала конвергенције степених редова $\sum a_n x^n$ и $\sum b_n x^n$ важи:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}$$

2) Ако је $\boxed{\sum a_n x^n = \sum b_n x^n}$, $\forall x \in (-r, r)$ где је r полупр. за оба степена реда тада је и $\boxed{a_n = b_n}$ за $\forall n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

* СВАКИ СТЕПЕНИ РЕД ЈЕ ЈЕДИНСТВЕНО ОДРЕЂЕН СВОЈИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА!

3) Ако је $r>0$ полупр. конв. реда $\sum a_n x^n$ тада ред униформно конв. $\forall [a,b] \subset (-r, r)$



чак не мора да садржи центар

- на целом интервалу **САМО ТАЧКАСТА**
- на деловима интервала (као пројекта) **УНИФОРМНА**

4) Извод и интеграл степеног реда:

* Нека је $\sum a_n x^n$ ред са полупр. $r>0$

Тада важи:

1) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} \quad \forall x \in (-r, r)$$

2) $$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n\, dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \in (-r, r)$$

* ЗАМЕЊУЈЕМО МЕСТА СУМЕ И ИЗВОДА/ИНТЕГРАЛА

главна примена:

* користећи теорију степеног реда можемо да израчунамо суме бројних редова

V

Развој ф-је у степени ред

Деф. Функција $f(x)$ је аналитичка у тачки $\alpha \in \mathbb{R}$ ако постоји степени ред $\sum a_n (x-\alpha)^n$ и $r>0$ такви да $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n$, $\forall x \in (\alpha - r, \alpha + r)$.

* АНАЛИТИЧКА ф-ЈА → у некој околини α се може развити у степени ред (центриран у тачки α)

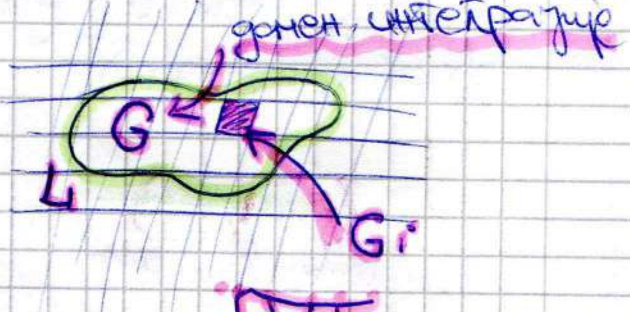
* Може се показати да су коефицијенти дати са $a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$ — n-ти извод $n \in \mathbb{N}$

* ако је ф-ја аналитичка добро деф. изводи

* Ред $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x-\alpha)^n}$, $x \in (\alpha - r, \alpha + r)$ се назива ТЕЈЛОРОВ РЕД Ф-ЈЕ f у тачки α. Специјално, за $\alpha = 0$ добијамо МАКЛОРЕНОВ РЕД.

Двоструки интеграл

Деф. Нека је L по деловима глатка затворена крива која ограничава област G у R^2.
Тада
$$\boxed{\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta G_i}_{\text{интегрална сума}}}$$



VI

Особине двоструког интеграла

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\iint_G (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx\,dy =$
$$= \boxed{\alpha \iint_G f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_G g(x,y)\,dx\,dy}$$

2) Ако је $\{G_1, G_2\}$ подела области G тада

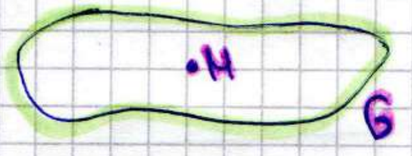
$$\boxed{\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{G_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{G_2} f(x,y)\,dx\,dy}$$

3) Ако је $f(x,y) \le g(x,y)$ над области G тада
$$\boxed{\iint_G f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_G g(x,y)\,dx\,dy}$$

* Следствено, $f(x,y) \ge 0$ над области G тада је и $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy \ge 0$

г) Теорема средње вредности

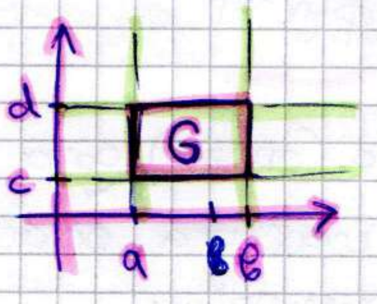
* Нека је f непрекидна ф-ја над области G тада постоји тачка M унутар области G таква да је $\boxed{\iint_G f(x,y)\,dxdy = f(M)\cdot \Delta G}$, ΔG - површина области G



* Специјално, ако је $f(x,y)=1$ над G тада је $\boxed{\iint_G dxdy = \Delta G}$ → директна последица теореме средње вр.

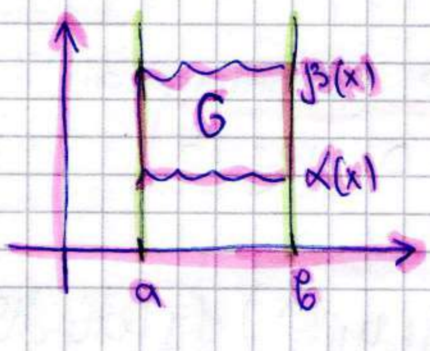
Израчунавање двоструког интеграла

1) $G = \{(x,y)\in R^2 \mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ $a,b,c,d\in R$



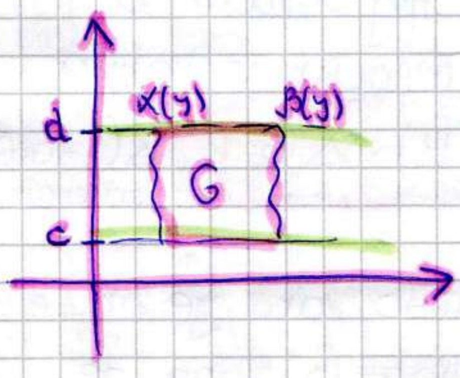
$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

2) $G = \{(x,y)\in R^2 \mid a\le x\le b,\ \alpha(x)\le y\le \beta(x)\}$ $a,b\in R$, $\alpha,\beta\ [a,b]\to R$



$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right)dx \underset{\text{ознака}}{:=} \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$$

3) $G = \{(x,y) \in R^2 \mid \alpha(y) \le x \le \beta(y),\ c \le y \le d\}$ $\quad c,d \in R,\ \alpha,\beta:[c,d] \to R$



$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

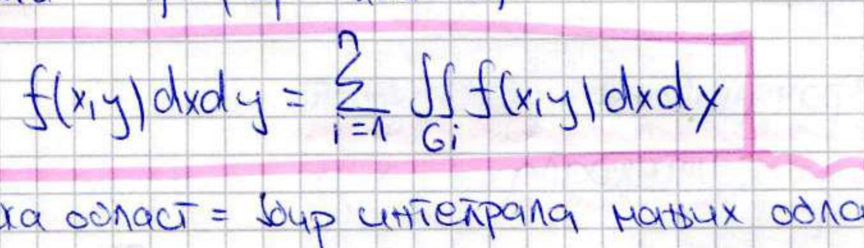
* Свака област G се може поделити на подобласти облика 1), 2) или 3).

$$\boxed{\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1} \iint_{G_i} f(x,y)\,dx\,dy}$$

нека област = збир интеграла мањих области које знамо како да израчунамо!

Смена променљиве у двоструком интегралу

* Нека је T бијективно пресликавање (смена) дата са $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$ која слика област G^* из uv-равни у област G у xy-равни.



* Јакобијан пресликавања T је детерминанта 2×2 дата са $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ над G

* Тада $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{G^*} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J|\,du\,dv$

апс. вр. јакобијана

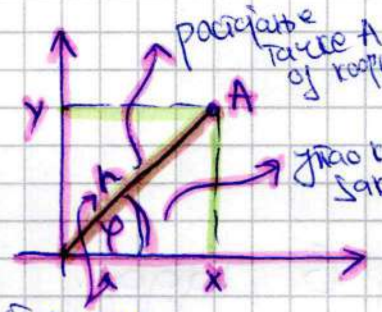
елиптичне координате

$x = a \cdot r \cdot \cos\varphi$ (нису класичне поларне)

$y = b \cdot r \cdot \sin\varphi$

*Јакобијан мора да се израчуна!

Смена у поларним координатама



$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cdot\cos\varphi, \quad r\in[0,+\infty)$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cdot\sin\varphi, \quad \varphi\in[0,2\pi]$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\varphi - (-r\sin\varphi)\cdot\sin\varphi =$$

$$= \underbrace{r\cdot\cos^2\varphi + r\cdot\sin^2\varphi}_{=1} = r \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|J| = r}$$

формула за смену поларних координата

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{G^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr\,d\varphi$$

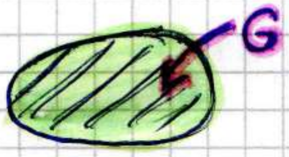
VII

Примена двоструког интеграла

1) Рачунање површине делова равни

$$\boxed{\iint_G dx\,dy = \Delta G}$$

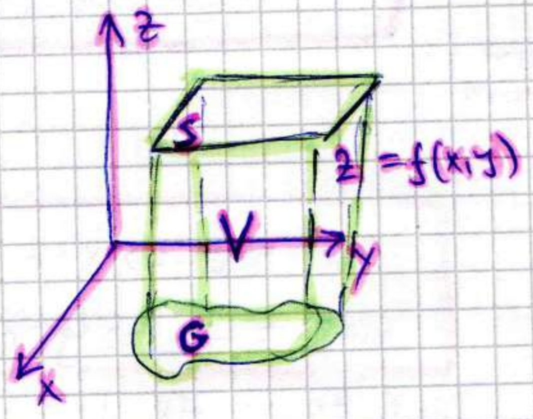
површина области G



2) Рачунање запремине

*Нека је $S: z = f(x,y) \geq 0$ површ у R^3 и G (ортогонална) пројекција од S на xy-раван и V област у R^3 коју ограничу G и S.

Тада запремину области V рачунамо као: $\boxed{\Delta V = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy}$



* Ако је $f(x,y) \geq g(x,y)$ над G тада

$\boxed{\iint_G (f(x,y) - g(x,y))\,dxdy}$ је запремина између површи графика ф-ја f и g.

3) Рачунање површине површи

Нека је $S: z=f(x,y)$ површ и G њена пројекција на xy-раван.

Тада $$\boxed{\Delta S = \iint_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy}$$