Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet Verovatnoća i slučajni procesi
datum 18 jun 2024.

PREZIME I IME Јана

BROJ INDEKSA

Predispitne obaveze 2
10 poena

1. [2 poena] **Definisati** strogo stacionaran proces i izračunati njegovo očekivanje

- Све коначнодим. расподеле инваријантне у односу на транслацију у времену 1

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi_{X_t}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi_{X_{t+c}}(x)\, dx = m_x(t+c)$$

$$\sum x_i \cdot P(X_t = x_i) = \sum x_i P(X_{t+c} = x_i)$$ 1

$$m_x(t) = m_x(t+c), \ \forall c \Rightarrow m_x(t) = const$$

2. [4 poena] Dat je lanac Markova čiji je skup stanja $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ i čija je matrica prelaza $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Da li postoje finalne verovatnoće? Odgovor objasniti! Ako postoje, izračunati ih.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^2 & 0 & 1-(\frac{1}{2})^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 1

$$P^n = \begin{bmatrix} (1/2)^n & 0 & 1-(1/2)^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 1

P^n конв, али нису исте врсте $\Downarrow$ не постоје фин. вер

b) Ako je $p_2(0) = 1$ izračunati $\mathbf{p}(2)$ i $p_2(2)$.

$$p(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & s_2 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$p(2) = p(0) \cdot P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1/2)^2 & 0 & 1-(\frac{1}{2})^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 1

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad p_2(2) = 1$$

c) Izračunati $P(X_2 = s_2, X_4 = s_2, X_5 = s_2) = p_2(2) \cdot p_{22}(2) \cdot p_{22}(1)$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$ 1

3. [3 poena] Neka je $X_t = 2Y_t + 1$, $t \in [0, \infty)$ slučajni proces, gde je Y_t Poasonov proces sa parametrom λ, $\lambda > 0$. Izračunati srednju vrednost i korelacionu funkciju slučajnog procesa X_t.

$$X_t = 2Y_t + 1, \qquad Y_t : \mathcal{P}(\lambda t)$$

$$m_X(t) = E(X_t) = E(2Y_t + 1) = 2E(Y_t) + 1 = 2 \cdot \lambda t + 1 \qquad 1$$

$$R_X(t,s) = E(X_t \cdot X_s) = E\big((2Y_t+1)(2Y_s+1)\big)$$

$$= 4E(Y_t Y_s) + 2E(Y_t) + 2E(Y_s) + 1$$

$$= 4 \cdot R_Y(t,s) + 2(m_Y(t) + m_Y(s)) + 1 \qquad 2$$

$$= 4 \cdot (\lambda \cdot \min\{t,s\} + \lambda^2 ts) + 2(2\lambda t + 1 + 2\lambda s + 1) + 1$$

$$= 4\lambda \min\{t,s\} + 4\lambda^2 ts + 4\lambda(t+s) + 5$$

4. [1 poen] Slučajni proces X_t, $t \in [0, \infty)$ je ergodičan po matematičkom očekivanju

$$m_X(t) = \overline{m} = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{A} \int_0^A x_t \, dt \qquad 1$$