Вежбе 11

-Ојлерови графови-

Граф G је ОЈЛЕРОВ $\iff$ $\exists$ затворена стаза W таква да је $E(W)=E(G)$

ОЈЛЕРОВА (КОН)ТУРА = затворена стаза која садржи СВЕ ГРАНЕ графа G

Граф G је ПОЛУОЈЛЕРОВ $\iff$ $\exists$ стаза W таква да је $E(W)=E(G)$ ← ОЈЛЕРОВ ПУТ

Јасно је да је сваки Ојлеров граф и полуојлеров. Зато ћемо под полуојлеровим графовима подразумевати само графове који садрже стазу на којој се налазе све гране графа, али није могуће вратити се на крају у почетни чвор.

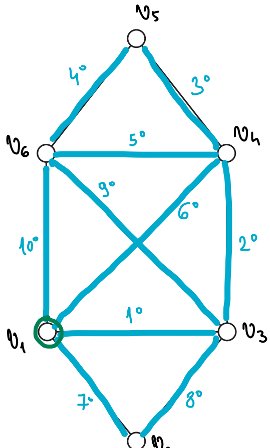
Директно из дефиниције добијамо да сваки Ојлеров граф мора бити ПОВЕЗАН.

Т: Повезан граф је Ојлеров АККО су СВИ чворови ПАРНОГ степена.

Т: Повезан граф је полуојлеров АККО су НАЈВИШЕ ДВА чвора НЕПАРНОГ степена.

ТАЧНО ДВА

1. Који од графова на слици су Ојлерови, а који полуојлерови?

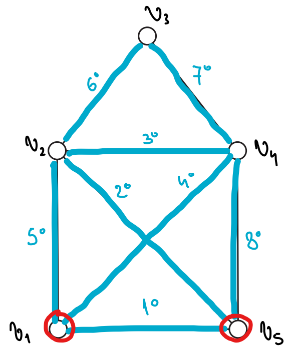


Сви чворови су парног степена

⇒ Ојлеров граф

Ојлерова (кон)тура

$v_1 v_3 v_4 v_5 v_6 v_4 v_1 v_2 v_3 v_6 v_1$



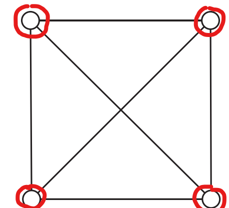
2 чвора степена 3

⇒ полуојлеров граф

Ојлеров пут

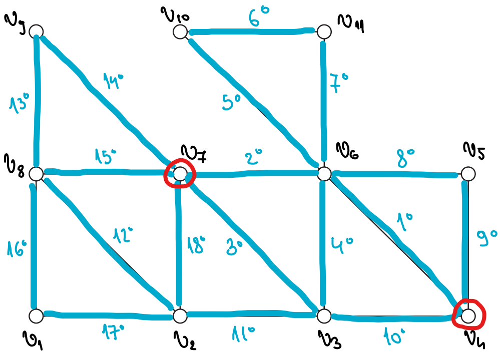
$v_1 v_5 v_2 v_4 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$

Почињемо у једном непарном чвору, а завршавамо у другом



Сва 4 чвора су степена 3

⇒ Граф није ни Ојлеров, ни полуојлеров



Чворови v_4 и v_7 имају непаран степен

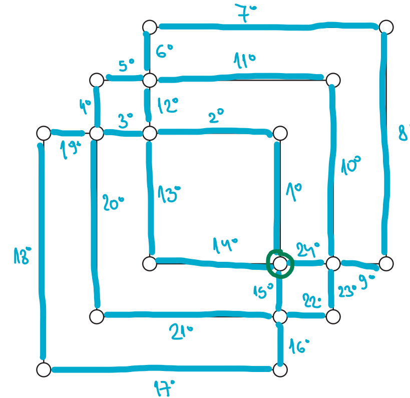
⇒ полуојлеров граф

Нека су прве 4 гране на Ојлеровом путу

v_4v_6, v_6v_7, v_7v_3 и v_3v_6

Сада за 5. грану не можемо бирати грану v_6v_5.

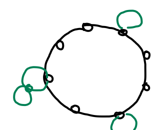
Бирамо грану v_6v_{10}. Даље водимо рачуна да мост у подграфу који чине преостале гране узимамо само ако је то једини избор.



Сви чворови су парног степена

⇒ Ојлеров граф

Флеријев алгоритам



2. За које n су следећи графови Ојлерови (полуојлерови)

а) комплетан граф K_n, $n \geq 3$

K_n је $(n-1)$-регуларан граф

$\forall v \in V(K_n) \quad d(v) = n-1$

- n непарно $\Rightarrow$ $n-1$ парно

$\Rightarrow$ Ојлеров граф

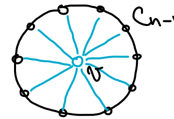
- n парно $\Rightarrow$ $n-1$ непарно

Граф има $n \geq 4$ чворова непарног степена

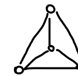
$\Rightarrow$ Граф није ни Ојлеров, ни полуојлеров

* K_2 је једини полуојлеров комплетан граф

б) точак W_n, $n \geq 4$



Најмањи точак



$W_4 \cong K_4$

$V(W_n) = V(C_{n-1}) \cup \{v\}$

$E(W_n) = E(C_{n-1}) \cup \{uv \mid u \in V(C_{n-1})\}$

Сви чворови са контуре имају степен 3

$\Rightarrow$ Точак није Ојлеров граф

Увек имамо бар 3 чвора степена 3, па точак није ни полуојлеров.

в) комплетан бипартитан граф $K_{m,n}$ $(m, n \geq 1)$? (домаћи)

3. Да ли постоји регуларан Ојлеров граф са парним бројем чворова и непарним бројем грана?

ПОСТОЈИ → ПРИМЕР

НЕ ПОСТОЈИ → ДОКАЗ

Претпоставимо да је G граф који испуњава тражене услове

регуларан: $d(v)=r, \forall v \in V$

Ојлеров: $d(v)=r=2k$

e - број грана

паран број чворова: $|V|=2n$

Основна теорема теорије графова:

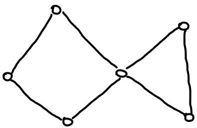
$$2e=\sum_{v\in V} d(v)=\sum_{v\in V} 2k=2n\cdot 2k=4kn$$

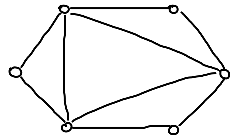
$e=2kn$ паран број $\lightning$ (Претпоставили смо да је број грана непаран)

$\Rightarrow$ Не постоји граф који задовољава све услове задатка.

4. Да ли постоји Ојлеров граф са парним бројем чворова и непарним бројем грана?

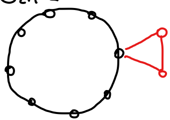
Дајемо пример 2 различита графа са 6 чворова који испуњавају услове.

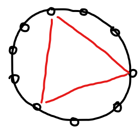




Примери оваквих графова са уопштеним бројем чворова $2n$ би били:

C_{2n-2}





C_{2n}

5. Ако стабло T има бар један чвор степена 2 тада његов комплемент $\overline{T}$ није Ојлеров.

Разликујемо 2 случаја

1° n парно

Нека је u чвор степена 2 стабла T, $d_T(u) = 2$

Сада је $d_{\overline{T}}(u) = n-1-d_T(u) = n-1-2 = n-3$ непарно

$\overline{T}$ има чвор непарног степена $\Rightarrow \overline{T}$ није Ојлеров

2° n непарно

T је стабло $\Rightarrow T$ има бар 2 висећа чвора v и w

Сада је $d_{\overline{T}}(v) = n-1-d_T(v) = n-1-1 = n-2$ непарно

У овом случају имамо бар 2 чвора непарног степена у $\overline{T}$, па $\overline{T}$ није Ојлеров

-Хамилтонови графови-

Граф G је Хамилтонов $\Leftrightarrow$ $\exists$ контура C таква да је $V(C)=V(G)$

Хамилтонова контура = покривајућа контура графа

Граф G је полухамилтонов $\Leftrightarrow$ $\exists$ пут P такав да је $V(P)=V(G)$ $\leftarrow$ Хамилтонов пут

Очигледно је сваки Хамилтонов граф и полухамилтонов (избришемо једну грану са контуре)

Отворен проблем: проналажење потребног и довољног услова да је граф Хамилтонов

Потребни услови:

Тривијални услови да граф буде Хамилтонов: G је повезан, $\delta(G)\geq 2$

Т: Ако је G Хамилтонов граф, тада за сваки скуп $S\neq\emptyset, S\subseteq V(G)$ важи $\omega(G-S)\leq|S|$

(полухамилтонов: $\omega(G-S)\leq|S|+1$)

Довољни услови:

Т: (ОРЕ) Ако је у графу G са n чворова $(n\geq 3)$ испуњено да за свака 2 несуседна чвора u и v важи $d(u)+d(v)\geq n$, тада је G Хамилтонов граф. (полухамилтонов: $d(u)+d(v)\geq n-1$)

Т: (ДИРАК) Ако је у графу G са n чворова $(n\geq 3)$ испуњено $d(v)\geq \frac{n}{2}, \forall v\in V$, онда је G Хамилтонов.

(полухамилтонов: $d(v)\geq \frac{n-1}{2}$)

Рецепт :)

Јесте Хамилтонов

1° Пронађемо тражену Хамилтонову контуру

2° Оре / Дирак

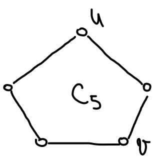
Није Хамилтонов

1° Свођењем на контрадикцију

2° Избацивање чворова (контрапозиција потребног услова)

Орева и Диракова теорема су довољни услови, али нису и потребни услови.

Граф C_5 је Хамилтонов граф.



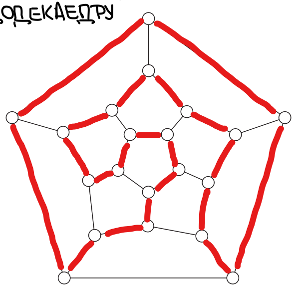
Чворови u и v су несуседни чворове за које важи

$d(u)+d(v) = 2+2 = 4 < 5 = |V(C_5)|$

Видимо да постоје графови који су Хамилтонови, за које не важи Оре или Дираков услов.

1. Који од графова на слици су Хамилтонови, а који полухамилтонови?

Граф који одговара додекаедру

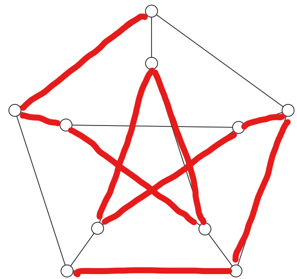


Хамилтонов граф

На слици је дат пример једне Хамилтонове контуре

Игра на додекаедру „Пут око света"

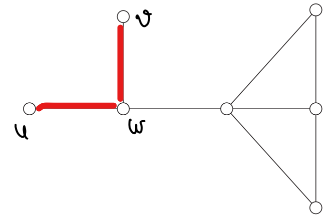
Петерсенов граф



Петерсенов граф није Хамилтонов!

(За доказ погледати додатну литературу)

Јесте полухамилтонов



Чворови u и v су степена 1 ⇒ Сигурно није Хамилтонов

Због грана uw и vw које би морале бити на Хамилтоновом путу, у чвору w смо већ искористили 2 гране, па граф није ни полухамилтонов

2. Доказати да бипартитан граф чије су класе различите кардиналности није Хамилтонов.

$G(X,Y)$ бипартитан граф, $|X| \neq |Y|$

Претпоставимо да граф има Хамилтонову контуру $C = v_1 v_2 v_3 \dots v_n v_1$

Нека је б.у.о. $v_1 \in X$. Чвор v_2 је сусед чвора v_1 у бипартитном графу, па $v_2 \in Y$.

Сада је $v_3 \in X, v_4 \in Y, \dots, v_n \in Y$ ($v_1 \in X$ је сусед чвора v_n)

Добијамо да је $|X| = |Y|$ ↯ (услов $|X| \neq |Y|$)

$\Rightarrow G(X,Y)$, $|X| \neq |Y|$ не садржи Хамилтонову контуру

II начин:

$|X| \neq |Y| \Rightarrow |X| < |Y|$ или $|X| > |Y|$

Нека је, б.у.о., $|X| < |Y|$.

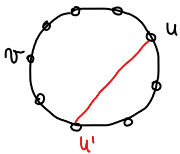
Брисањем свих чворова класе X, добијамо граф са $|Y|$ изолованих чворова. Избрисали смо $|X|$ чворова, а добили граф са $|Y|$ компоненти повезаности. Како је $|Y| = \omega(G - X) > |X|$, закључујемо да граф није Хамилтонов.

3. Два несуседна чвора графа G су степена 3, док су сви остали чворови степена највише 2. Доказати да G није Хамилтонов граф.

Нека су u и v несуседни чворови степена 3.

Претпоставимо да је C Хамилтонова контура графа G.

$\Rightarrow$ На контури C су сви чворови графа G, укључујући чворове u и v.



$d(u)=3 \Rightarrow \exists u' \in V(C),\ u' \neq v$ који је сусед чвора u, тј. $uu' \in E(G)$

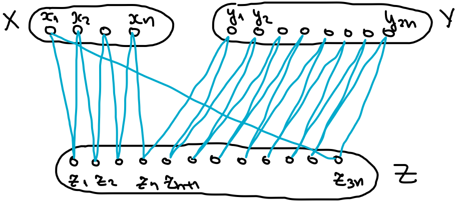
Посматрајмо сада чвор u'

$d(u') \geq 3$ ↯ (сви чворови сем u и v су степена ≤ 2)

$\Rightarrow$ G није Хамилтонов граф

4. Доказати да је за $n \geq 1$ граф $K_{n,2n,3n}$ Хамилтонов, док $K_{n,2n,3n+1}$ није Хамилтонов.

комплетан 3-партитан граф $K_{n,2n,3n}$



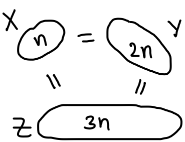
Хамилтонова контура:

$x_1 z_1 x_2 z_2 x_3 z_3 \dots x_n z_n y_1 z_{n+1} y_2 z_{n+2} y_3 z_{n+3} \dots y_{2n} z_{3n} x_1$

II начин:

$|V(K_{n,2n,3n})| = n+2n+3n = 6n$

$$d(v) = \begin{cases} 2n+3n, & v \in X \\ n+3n, & v \in Y \\ n+2n, & v \in Z \end{cases} = \begin{cases} 5n, & v \in X \\ 4n, & v \in Y \\ 3n, & v \in Z \end{cases}$$



Несуседни чворови у графу $K_{n,2n,3n}$ су чворови који се налазе у истој класи.

Нека су u и v несуседни чворови

$$d(u)+d(v) = \begin{cases} 5n+5n, & u,v \in X \\ 4n+4n, & u,v \in Y \\ 3n+3n, & u,v \in Z \end{cases} = \begin{cases} 10n, & u,v \in X \\ 8n, & u,v \in Y \\ 6n, & u,v \in Z \end{cases} \geq 6n = |V(K_{n,2n,3n})|$$

Испуњен је услов Орове теореме, па је граф $K_{n,2n,3n}$ Хамилтонов.

Показаћемо да $K_{n,2n,3n+1}$ није Хамилтонов.

Уколико би $K_{n,2n,3n+1}$ био Хамилтонов, граф би имао Хамилтонову контуру C на којој су сви чворови графа. То међутим није могуће, пошто је $|Z| = 3n+1$, а $|X \cup Y| = 3n$.
(Комплетан бипартитан граф $K_{3n,3n+1}$ је покривајући подграф графа $K_{n,2n,3n+1}$. Знамо да граф $K_{3n,3n+1}$ није Хамилтонов, па ни $K_{n,2n,3n+1}$ не може бити Хамилтонов)

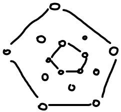
<u>II начин:</u>

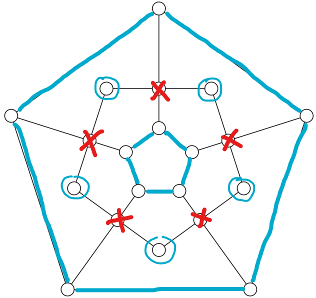
Уклонимо $3n$ чворова из $X \cup Y$. Избацивањем скупа чворова $X \cup Y$, добијамо граф са $3n+1$ изолованих чворова класе Z. Како је

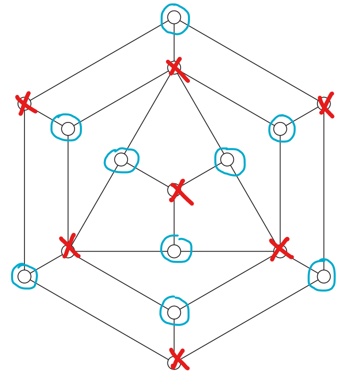
$$3n+1 = \omega(K_{n,2n,3n+1} - X \cup Y) > |X \cup Y| = 3n,$$

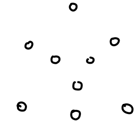
знамо да граф $K_{n,2n,3n+1}$ није Хамилтонов.

5. Доказати да следећи графови нису полухамилтонови.









Уколико уклонимо 5 чворова степена 4, добијамо граф са 7 компоненти повезаности (велика и мала контура + 5 изолованих чворова)

$|S| = 5$

$\omega(G-S) = 7$ $\quad 7 = \omega(G-S) > |S|+1 = 5+1 = 6$

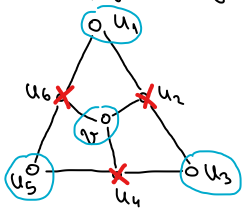
За уочени скуп S са 5 чворова степена 4 не важи услов $\omega(G-S) \leq |S|+1$, па граф није полухамилтонов (па није ни хамилтонов)

Уколико уклонимо 7 означених чворова, добијамо граф са 9 изолованих чворова

$9 = \omega(G-S) > |S|+1 = 7+1 = 8$

$\Rightarrow$ граф није полухамилтонов

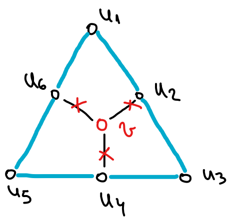
Посматрајмо следећи граф



Брисањем скупа чворова $S=\{u_2, u_4, u_6\}$, добијамо граф са 4 компоненте повезаности (изоловани чворови v, u_1, u_3, u_5)

Добили смо већи број компоненти повезаности од броја избачених чворова, па граф није Хамилтонов.

II начин:



Уколико граф садржи Хамилтонову контуру, на њој се налазе обе гране у чворовима степена 2.

$d(u_1)=2 \Rightarrow$ гране u_1u_2 и u_1u_6 су на Хамилтоновој контури

Аналогно због чворова u_3 и u_5 на Хамилтоновој контури су и гране: u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5 и u_5u_6

Затворили смо контуру, али нисмо покупили чвор v

(Гране vu_2, vu_4 и vu_6 нису на располагању, пошто смо у сваком од чворова u_2, u_4 и u_6 већ искористили по 2 гране)

* SV, IN: Обавезно погледати решење задатка 9.10. из збирке!

6. Нека је G граф са $n \geq 3$ чворова и бар $\binom{n-1}{2} + 2$ грана. Доказати да је G Хамилтонов.

Уместо да докажемо да је граф Хамилтонов, показаћемо да важи услов Орeове теореме, тј. да за свака два несуседна чвора x и y важи $d(x)+d(y) \geq n$.

Претпоставимо супротно, да постоје несуседни чворови u и v за које важи $d(u)+d(v) < n$.

Посматрајмо граф $G-u-v$

$$|E(G-u-v)| \underset{\substack{u,v \text{ несуседни} \\ \text{чворови}}}{=} |E(G)| - d(u) - d(v) = \underbrace{|E(G)|}_{\geq \binom{n-1}{2}+2} - \underbrace{(d(u)+d(v))}_{<n} > \binom{n-1}{2} + 2 - n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-2)$$

$$= (n-2)\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \binom{n-2}{2}$$

Граф $G-u-v$ има $n-2$ чворова, па је $|E(G-u-v)| \leq \binom{n-2}{2}$ ↯ (Добили смо $|E(G-u-v)| > \binom{n-2}{2}$)

Сада на основу Орeове теореме знамо да је граф Хамилтонов.

7. Да ли постоји граф са 8 чворова и 23 гране који није Хамилтонов?

Ставимо $n=8$ у претходном задатку

$$e \geqslant \binom{n-1}{2}+2=\binom{8-1}{2}+2=\binom{7}{2}+2=21+2=23$$

На основу задатка 6. знамо да сваки граф који има 8 чворова и најмање 23 гране мора бити Хамилтонов.

$\Rightarrow$ Не постоји граф који има 8 чворова и 23 гране који није Хамилтонов.

8. Доказати да је k-регуларан граф са $2k-1$ чворова Хамилтонов. (домаћи)