

## Sumiranje stepenih redova

1. Odrediti oblast konvergencije sledećih stepenih redova:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (2x+1)^n; \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2n+1} (x+1)^n; \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)!} x^n.$$

**Rešenje:**

a) Neka je  $2x+1 = t$ . Poluprečnik konvergencije stepenog reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} t^n$  je

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{3}.$$

Rešavanjem  $|2x+1| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < 2x+1 < \frac{1}{3}$  dobijamo da za  $x \in \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$  red konvergira.

Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

- za  $x = -\frac{2}{3}$  dobija se red  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  koji konvergira (alternativni harmonijski red);
- za  $x = -\frac{1}{3}$  dobija se red  $\sum \frac{1}{n}$  koji divergira (harmonijski red,  $\alpha = 1$ ).

Stoga je oblast konvergencije datog reda interval  $\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ .

b) Neka je  $x+1 = t$ . Poluprečnik konvergencije stepenog reda  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2n+1} t^n$  je

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n!}{2n+1}}{\frac{(n+1)!}{2n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{(n+1)(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n^2+3n+1} = 0.$$

Stoga je oblast konvergencije datog reda samo tačka  $x_0 = -1$ .

c) Poluprečnik konvergencije stepenog reda  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)!} x^n$  je

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{(n+1)!}}{\frac{2n+2}{(n+2)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n+2)}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{n+1} = \infty.$$

Stoga je oblast konvergencije datog reda ceo skup  $\mathbb{R}$ .

2. Odrediti oblast konvergencije i sumirati sledeće stepene redove:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} x^n; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} nx^n; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2(2x-3)^n.$$

**Rešenje:**

a) Poluprečnik konvergencije datog stepenog reda je

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1}} = 1.$$

Rešavanjem  $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$  dobijamo da za  $x \in (-1, 1)$  red konvergira.

Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

- za  $x = -1$  dobija se red  $\sum (-1)^n$  koji divergira ( $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \neq 0$ );
- za  $x = 1$  dobija se red  $\sum 1$  koji divergira ( $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0$ ).

Stoga je oblast konvergencije interval  $(-1, 1)$ .

Suma datog stepenog reda za vrednosti  $x$  iz oblasti konvergencije je

(I način):

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1-1+x}{1-x} = \frac{x}{1-x};$$

(II način):

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

b) Poluprečnik konvergencije datog stepenog reda je

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

Rešavanjem  $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$  dobijamo da za  $x \in (-1, 1)$  red konvergira.

Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

- za  $x = -1$  dobija se red  $\sum n(-1)^n$  koji divergira ( $\lim_{n \rightarrow \infty} n(-1)^n \neq 0$ );
- za  $x = 1$  dobija se red  $\sum n$  koji divergira ( $\lim_{n \rightarrow \infty} n \neq 0$ ).

Stoga je oblast konvergencije interval  $(-1, 1)$ .

Suma datog stepenog reda za vrednosti  $x$  iz oblasti konvergencije je

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left( \frac{x}{1-x} \right)' = x \frac{1-x-x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

**Napomena:** Unutar oblasti konvergencije stepenih redova se može izvršiti zamena procesa sumiranja i diferenciranja, kao i zamena procesa sumiranja i integracije.

c) Poluprečnik konvergencije datog stepenog reda je

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1.$$

Rešavanjem  $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$  dobijamo da za  $x \in (-1, 1)$  red konvergira.

Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

- za  $x = -1$  dobija se red  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  koji konvergira (alternativni harmonijski red);
- za  $x = 1$  dobija se red  $\sum \frac{1}{n}$  koji divergira (harmonijski red,  $\alpha = 1$ ).

Stoga je oblast konvergencije interval  $[-1, 1)$ .

Suma datog stepenog reda za vrednosti  $x$  iz oblasti konvergencije je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln|1-t| \Big|_0^x = -\ln|1-x|.$$

d) Neka je  $t = 2x - 3$ . Poluprečnik konvergencije stepenog reda  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^n$  je

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2}} = 1.$$

Rešavanjem  $|2x - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x - 3 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$  dobijamo da za  $x \in (1, 2)$  red konvergira.

Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

- za  $x = 1$  dobija se red  $\sum n^2(-1)^n$  koji divergira ( $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(-1)^n \neq 0$ );
- za  $x = 2$  dobija se red  $\sum n^2$  koji divergira ( $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \neq 0$ ).

Stoga je oblast konvergencije interval  $(1, 2)$ .

Koristeći rezultat zadatka pod b), dobijamo da je suma datog stepenog reda unutar oblasti konvergencije

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^n &= t \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n t^{n-1} = t \sum_{n=1}^{\infty} n(t^n)' = t \sum_{n=1}^{\infty} (n t^n)' = t \left( \sum_{n=1}^{\infty} n t^n \right)' = t \left( \frac{t}{(1-t)^2} \right)' \\ &= t \frac{(1-t)^2 - t \cdot 2 \cdot (1-t) \cdot (-1)}{(1-t)^4} = t \frac{(1-t)(1+t)}{(1-t)^4} = \frac{t^2 + t}{(1-t)^3}. \end{aligned}$$

Vraćanjem smene  $t = 2x - 3$  dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (2x-3)^n = \frac{(2x-3)^2 + 2x-3}{(1-2x+3)^3} = \frac{4x^2 - 10x + 6}{(4-2x)^3} = \frac{2x^2 - 5x + 3}{4(2-x)^3}.$$

3. Dat je stepeni red  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{n} (x+2)^n$ .

a) Odrediti oblast konvergencije i sumirati dati red.

b) Koristeći dobijeni rezultat, izračunati  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{2^n n}$ .

**Rešenje:**

a) Neka je  $t = x + 2$ . Poluprečnik konvergencije stepenog reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{n} t^n$  je

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2-2}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2-2}}{\sqrt[n]{n}}} = 1.$$

Rešavanjem  $|x+2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$  dobijamo da za  $x \in (-3, -1)$  red konvergira. Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

- za  $x = -3$  dobija se red  $\sum \frac{n^2-2}{n} (-1)^n$  koji divergira ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2}{n} (-1)^n \neq 0$ );
- za  $x = -1$  dobija se red  $\sum \frac{n^2-2}{n}$  koji divergira ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2}{n} \neq 0$ ).

Stoga je oblast konvergencije interval  $(-3, -1)$ .

Koristeći rezultate prethodnog zadatka pod b) i c), dobijamo da je suma datog stepenog reda unutar oblasti konvergencije

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{n} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n t^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \frac{t}{(1-t)^2} + 2 \ln |1-t|.$$

Vraćanjem smene  $t = x + 2$  dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{n} (x+2)^n = \frac{x+2}{(x+1)^2} + 2 \ln |x+1|.$$

b) Tražena suma se dobija za  $t = \frac{1}{2}$  (tj.  $x = -\frac{3}{2}$ ) i iznosi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{2^n n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + 2 \ln \frac{1}{2} = 2 - 2 \ln 2.$$

4. Odrediti oblast konvergencije i sumirati sledeće stepene redove:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 5n - 1}{n - 1} (x + 1)^{2n}; \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 5}{n^2 + 5n + 6} \sin^n x; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n + 2)} \cdot \left(\frac{x}{x - 1}\right)^n.$$

**Rešenje:**

a) Neka je  $t = (x + 1)^2$ . Poluprečnik konvergencije stepenog reda  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 5n - 1}{n - 1} t^n$  je

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 + 5n - 1}{n - 1}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2 + 5n - 1}}{\sqrt[n]{n - 1}}} = 1.$$

Rešavanjem  $|(x + 1)^2| < 1 \Leftrightarrow (x + 1)^2 > -1 \wedge (x + 1)^2 < 1$  dobijamo da za  $x \in (-2, 0)$  red konvergira. Proveravamo konvergenciju u krajevima intervala:

- za  $x = -2$  dobija se red  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 5n - 1}{n - 1}$  koji divergira ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n - 1}{n - 1} \neq 0$ );
- za  $x = 0$  dobija se red  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 5n - 1}{n - 1}$  koji divergira ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n - 1}{n - 1} \neq 0$ ).

Stoga je oblast konvergencije interval  $(-2, 0)$ .

Suma datog reda unutar oblasti konvergencije je

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 5n - 1}{n - 1} t^n &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(n + 6 + \frac{5}{n - 1}\right) t^n = \sum_{n=2}^{\infty} n t^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} t^n + 5 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^n}{n - 1} \\ &= t \sum_{n=2}^{\infty} n t^{n-1} + 6 \sum_{n=2}^{\infty} t^n + 5t \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n - 1} \\ &= t \sum_{n=2}^{\infty} (t^n)' + 6 \frac{t^2}{1 - t} + 5t \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t s^{n-2} ds \\ &= t \left(\sum_{n=2}^{\infty} t^n\right)' + \frac{6t^2}{1 - t} + 5t \int_0^t \sum_{n=2}^{\infty} s^{n-2} ds \\ &= t \left(\frac{t^2}{1 - t}\right)' + \frac{6t^2}{1 - t} + 5t \int_0^t \frac{1}{1 - s} ds \\ &= t \frac{2t(1 - t) - t^2(-1)}{(1 - t)^2} + \frac{6t^2}{1 - t} - 5t \ln |1 - s| \Big|_0^t \\ &= \frac{-t^3 + 2t^2}{(1 - t)^2} + \frac{6t^2}{1 - t} - 5t \ln |1 - t| = \\ &= \frac{-7t^3 + 8t^2}{(1 - t)^2} - 5t \ln |1 - t|. \end{aligned}$$

Vraćanjem smene  $t = (x + 1)^2$  dobija se

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 5n - 1}{n - 1} (x + 1)^{2n} = \frac{-7(x + 1)^6 + 8(x + 1)^4}{(x^2 + 2x)^2} - 5(x + 1)^2 \ln |x^2 + 2x|.$$

b) Neka je  $t = \sin x$ . Poluprečnik konvergencije stepenog reda  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 5}{n^2 + 5n + 6} t^n$  je

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n + 5}{n^2 + 5n + 6}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2n + 5}}{\sqrt[n]{n^2 + 5n + 6}}} = 1.$$

Rešavanjem  $|\sin x| < 1$  dobijamo da za  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$  red konvergira.

Proveravamo konvergenciju u tačkama za koje je  $t = \pm 1$  :

- za  $t = 1$  (tj.  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) dobija se red  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6}$  koji divergira ( $\frac{2n+5}{n^2+5n+6} \sim \frac{2}{n}$ , a red  $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergira, harmonijski red pomnožen sa 2);
- za  $t = -1$  (tj.  $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) dobija se red  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6} (-1)^n$  koji konvergira na osnovu

Lajbnicovog kriterijuma:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6} = 0$ ,
- 2)  $\frac{2(n+1)+5}{(n+1)^2+5(n+1)+6} \leq \frac{2n+5}{n^2+5n+6} \Leftrightarrow (2n+7)(n^2+5n+6) \leq (2n+5)(n^2+7n+12)$   
 $\Leftrightarrow 2n^3+17n^2+47n+42 \leq 2n^3+19n^2+59n+60 \Leftrightarrow 0 \leq 2n^2+12n+18 \checkmark, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Stoga je oblast konvergencije skup  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Suma datog reda unutar oblasti konvergencije za  $t \neq 0$  je

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+3} = \frac{1}{t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+2}}{n+2} + \frac{1}{t^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+3}}{n+3} \\ &= \frac{1}{t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t s^{n+1} ds + \frac{1}{t^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t s^{n+2} ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} ds + \frac{1}{t^3} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+2} ds \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{s}{1-s} ds + \frac{1}{t^3} \int_0^t \frac{s^2}{1-s} ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{(s-1)+1}{1-s} ds + \frac{1}{t^3} \int_0^t \frac{(s^2-1)+1}{1-s} ds \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^t \left( -1 + \frac{1}{1-s} \right) ds + \frac{1}{t^3} \int_0^t \left( -s-1 + \frac{1}{1-s} \right) ds \\ &= \frac{1}{t^2} \left( -s - \ln|1-s| \right) \Big|_0^t + \frac{1}{t^3} \left( -\frac{s^2}{2} - s - \ln|1-s| \right) \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{t^2} (-t - \ln|1-t|) + \frac{1}{t^3} \left( -\frac{t^2}{2} - t - \ln|1-t| \right) \\ &= -\frac{3}{2t} - \frac{1}{t^2} - \left( \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) \ln|1-t|. \end{aligned}$$

Vraćanjem smene  $t = \sin x$  dobija se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6} \sin^n x = -\frac{3}{2 \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} - \left( \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^3 x} \right) \ln|1 - \sin x|.$$

Za  $t = 0$  (tj.  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) dobija se suma  $s = \frac{5}{6}$ .

c) Neka je  $t = \frac{-x}{x-1} = \frac{x}{1-x}$ . Poluprečnik konvergencije stepenog reda  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!(n+2)}$  je

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!(n+2)}}{\frac{1}{(n+1)!(n+3)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n+2} = \frac{n^2+4n+3}{n+2} = \infty.$$

Stoga je oblast konvergencije skup  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Suma datog reda unutar oblasti konvergencije za  $t \neq 0$  je

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!(n+2)} &= \frac{1}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{t^{n+2}}{n+2} = \frac{1}{t^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t s^{n+1} ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} s^{n+1} ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n!} ds \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^t s(e^s - 1) ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t s e^s ds - \frac{1}{t^2} \int_0^t s ds \\ &= \frac{1}{t^2} \left( (s-1)e^s \Big|_0^t - \frac{s^2}{2} \Big|_0^t \right) = \frac{1}{t^2} \left( (t-1)e^t + 1 - \frac{t^2}{2} \right) = \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) e^t + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vraćanjem smene  $t = \frac{x}{1-x}$  dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+2)} \cdot \left(\frac{x}{x-1}\right)^n = \frac{-2x^2+3x-1}{x^2} e^{\frac{x}{1-x}} + \frac{(1-x)^2}{x^2} - \frac{1}{2}.$$

Za  $t = 0$  (tj.  $x = 0$ ) dobija se suma  $s = 0$ .