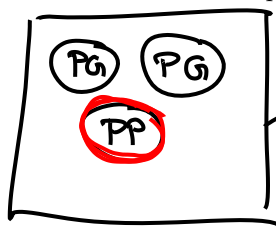


Z A D A C I - K1

1. [xx poena] U kutiji se nalaze tri homogena novčića, od kojih jedan ima sa obe strane pismo. Na slučajan način se bira novčić i baca tri puta. Ako je sva tri puta palo pismo, kolika je verovatnoća da je neispravan novčić izabran?



A - TRIPUT PALO PISMO

H_1 - IZABRAN ISPRAVAN NOVČIĆ, $P(H_1) = 2/3$

H_2 - —||— NEISPRAVAN NOVČIĆ, $P(H_2) = 1/3$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$$

$$= 2/3 \cdot 1/4 + 1/3 \cdot 1 = \frac{2}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{1/3 \cdot 1}{1/2} = \frac{1}{6}$$

2. [xx poena] Kockica za jamb se baca dva puta. Ako je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj pojavljivanja broja deljivog sa tri, a Y slučajna promenljiva koja predstavlja broj pojavljivanja broja tri:

- napisati zakon raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) .
- napisati marginalne zakone raspodela za X i Y i obrazložiti da li su slučajne promenljive X i Y nezavisne.
- naći zakon raspodele za $Y|X=2$ i izračunati $P(Y \leq 1 | X=2)$.
- izračunati $E(XY)$ i $E(X^2Y^2)$.

X - BR. POJAVLJIVANJA BR. DELJ SA 3 (3 ili 6), $R_X = \{0, 1, 2\}$
 Y - BR. POJAVLJIVANJA BROJA 3, $R_Y = \{0, 1, 2\}$

12)

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{16}{36}$	0	0
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$	0
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

JEK. NPR.:

$$P(X=1, Y=0) = P("16" + "26" + "46" + "56") + P("61" + "62" + "64" + "65") = \frac{8}{36}$$

$$P(X=2, Y=0) = P("66") = \frac{1}{36}$$

$$P(X=2, Y=1) = \frac{2}{36} \quad \text{ITD.}$$

$$b) \quad X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{16}{36} & \frac{8}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}, \quad Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{25}{36} & \frac{10}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

nisu nez. jer npr. $P(X=0, Y=1) \neq P(X=0)P(Y=1)$

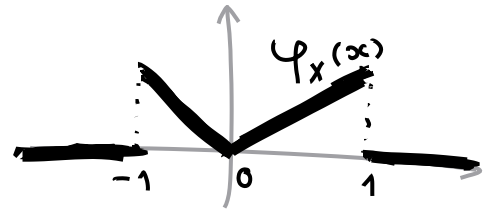
$$c) \quad X|Y=2: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P(Y \leq 1 | X=2) = P(Y=0 | X=2) + P(Y=1 | X=2) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{36}} + \frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{36}} = \frac{3}{4}$$

$$d) \quad E(XY) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{8}{36} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{36} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{16}{36}$$

$$E(X^2Y^2) = 1^2 \cdot 1^2 \cdot \frac{8}{36} + 2^2 \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{36} + 2^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{32}{36}$$

3. [xx poena] Slučajna promenljiva X ima funkciju gustine datu sa:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} a|x|, & x \in (-a, a], \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$



gde je a neki realni parametar. Odrediti:

- konkretnu vrednost parametra a za koju je $\varphi_X(x)$ funkcija gustine.
- odgovarajuću funkciju raspodele F_X i vrednosti $F_X(-1)$, $F_X(0)$, $F_X(1)$, $P(-2 \leq X \leq e)$.
- očekivanje i disperziju slučajnih promenljivih X i Y , gde je $Y = 1 - X$.

a) $a = 1$

b) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1-x^2), & -1 < x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

...

$$P(-2 \leq x \leq e) = F_X(e) - F_X(-2)$$

c) $F_Y(y) = P(Y < y) = P(1 - X < y) = P(X > 1 - y) = 1 - F_X(1 - y)$

$$= 1 - \begin{cases} 0, & 1-y \leq -1 \\ -\frac{1}{2}(y-2)y, & -1 < 1-y \leq 0 \\ \frac{1}{2}(y^2-2y+2), & 0 < 1-y \leq 1 \\ 1, & 1-y > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y - \frac{y^2}{2}, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2}(y^2-2y+2), & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

$$\left(= \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y - \frac{y^2}{2}, & 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{2}(y^2-2y+2), & 1 < y \leq 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases} \right), \text{ PRIMETI}$$

4. [xx poena] Odrediti funkciju gustine slučajne promenljive $V = X + Y$, gde su X i Y nezavisne slučajne promenljive koje imaju uniformnu $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodelu.

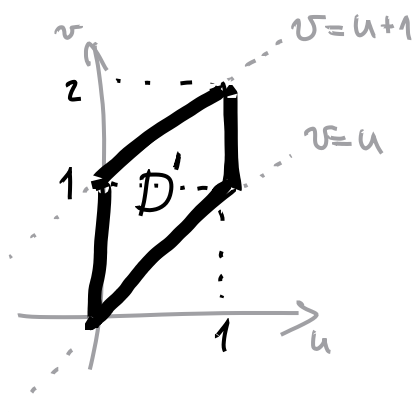
$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1] \text{ i } y \in (0,1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v - u \end{cases} \Rightarrow |J_{f^{-1}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u \leq 1, u \leq v \leq u+1\}$$

$$\Rightarrow \varphi_{u,v}(u,v) = \varphi_{x,y}(u, v-u) \cdot |J| = \begin{cases} 1, & (u,v) \in D' \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi_v(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{u,v}(u,v) du = \begin{cases} \int_{u=0}^{u=v} 1 du, & v \in (0,1] \\ \int_{u=v-1}^{u=1} 1 du, & v \in (1,2] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



$$= \begin{cases} v, & v \in (0,1] \\ 2-v, & v \in (1,2] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

