Nejednakost Čebiševa i centralne granične teoreme.

Zadatak 1

Postavka: Elektrostanica opslužuje mrežu sa 10000 sijalica. Verovatnoća uključenja svake od sijalica uveče iznosi 0.9. Izračunati verovatnoću da apsolutno odstupanje broja uključenih sijalica od matematičkog očekivanja bude najviše 200 koristeći

(a) nejednakost Čebiševa,

(b) teoremu Moavr - Laplasa.

Rešenje:
Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj uključenih sijalica ima binomnu raspodelu.
$X : \mathcal{B}(10000, 0.9)$, pri čemu je $\mathsf{E}(X) = 10000 \cdot 0.9 = 9000$ i $\mathsf{D}(X) = 10000 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 900$.

(a) Na osnovu nejednakosti Čebiševa $\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{D}(X)}{\varepsilon^2}$ (za sve $\varepsilon > 0$) dobijamo

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| \leq 200) = 1 - \mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| > 200) =$$
$$= 1 - \mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| \geq 201) \geq 1 - \frac{\mathsf{D}(X)}{201^2} \approx 0.9777.$$

(b) Primenom teoreme Moavr-Laplasa dobijamo

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| \leq 200) = \mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| < 201) =$$
$$= \mathsf{P}(-201 < X - \mathsf{E}(X) < 201) = \mathsf{P}\left(\frac{-201}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} < \frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} < \frac{201}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(-\frac{201}{\sqrt{900}} < \frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} < \frac{201}{\sqrt{900}}\right) = \mathsf{P}(-6.7 < X^* < 6.7) =$$
$$\approx \phi(6.7) - (1 - \phi(6.7)) = 2\phi(6.7) - 1 \approx 1.$$

Zadatak 2

Postavka: Poznato je da se u prometu nalazi 20% belih automobila. Beleži se boja 1000 automobila koji sukcesivno prođu kroz raskrsnicu. Oceniti verovatnoću da relativna učestanost prolaska belih automobila odstupa od odgovarajuće verovatnoće za manje od 0.02:

(a) pomoću nejednakosti Čebiševa,

(b) pomoću teoreme Moavr - Laplasa.

Rešenje:
Slučajna promenljiva S_{1000} koja predstavlja broj belih od ukupno 1000 automobila koji prođu kroz raskrsnicu ima binomnu $\mathcal{B}\left(1000, \frac{1}{5}\right)$ raspodelu. Pri tome je $\mathsf{E}\left(S_{1000}\right) = 1000 \cdot \frac{1}{5} = 200$ i $\mathsf{D}\left(S_{1000}\right) = 1000 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 160$. Ispitujemo odstupanje $\left|\frac{S_{1000}}{1000} - \frac{1}{5}\right|$ relativne učestanosti $\frac{S_{1000}}{1000}$ broja belih automobila od verovatnoće $\frac{1}{5}$ prolaska belog automobila:

(a) $\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}}{1000} - \frac{1}{5}\right| < 0.02\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}}{1000} - \frac{1}{5}\right| \geq 0.02\right) =$

$= 1 - \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000} - 1000 \cdot \frac{1}{5}}{1000}\right| \geq 0.02\right) =$

$= 1 - \mathsf{P}\left(\left|S_{1000} - 1000 \cdot \frac{1}{5}\right| \geq 1000 \cdot 0.02\right) \overset{[1]}{\geq} 1 - \frac{1000 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{(1000 \cdot 0.02)^2} =$

$= 1 - \frac{160}{400} = \frac{240}{400} = \frac{3}{5}.$

[1] - Primena nejednakosti Čebiševa:

$$\mathsf{P}\left(\left|S_{1000} - \mathsf{E}\left(S_{1000}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{D}(S_{1000})}{\varepsilon^2}.$$

(b) $\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}}{1000} - \frac{1}{5}\right| < 0.02\right) = \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000} - 1000 \cdot \frac{1}{5}}{1000}\right| < 0.02\right) =$

$= \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000} - 1000 \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}} \sqrt{\frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{1000}}\right| < 0.02\right) =$

$= \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000} - 1000 \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}}\right| < 0.02 \sqrt{\frac{1000}{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}}\right) \approx \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000} - 200}{\sqrt{160}}\right| < 1.58114\right) =$

$= \mathsf{P}\left(-1.58114 < \frac{S_{1000} - 200}{\sqrt{160}} < 1.58114\right) \approx$

$\overset{[2]}{\approx} \phi\left(1.58114\right) - \phi\left(-1.58114\right) = 2\phi\left(1.58114\right) - 1 \approx 2\phi\left(1.58\right) - 1 \approx$

$\approx 2 \cdot 0.9429 - 1 \approx 0.8858.$

[2] - Primena Moavr - Laplasove teoreme:

$$\mathsf{P}\left(a < \frac{S_{1000} - \mathsf{E}(S_{1000})}{\mathsf{D}(S_{1000})} < b\right) \approx \phi\left(b\right) - \phi\left(a\right).$$

Zadatak 3

Postavka: Prosečno 80% vozača koristi sigurnosni pojas. Saobraćajna policija je u toku dana zaustavila 500 vozača.

(a) Kolika je verovatnoća da više od 100 vozača ne koristi pojas?

(b) Kolika je verovatnoća da bar 300 vozača koristi pojas?

(c) Kolika je verovatnoća da je broj vozača koji ne koriste pojas između 100 i 150?

Rešenje:
Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj vozača koji koriste sigurnosni pojas ima binomnu raspodelu sa parametrima $n = 500$ i $p = 0.8$. Kako je $np = 400$, $\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = \sqrt{80} = 8.944$ i $X : \mathcal{B}(500, 0.8)$ sledi $X^* = \frac{X - 400}{8.944} : \mathcal{N}(0, 1)$.

(a) $\mathsf{P}(500 - X > 100) = \mathsf{P}(X < 400) = \mathsf{P}(X^* < \frac{400-400}{8.944}) = \mathsf{P}(X^* < 0) = \Phi(0) = 0.5.$

(b) $\mathsf{P}(X \geq 300) = 1 - \mathsf{P}(X < 300) = 1 - \mathsf{P}(X^* \leq \frac{300-400}{8.944}) = 1 - \mathsf{P}(X^* \leq -11.18) =$
$= 1 - \Phi(-11.18) = \Phi(11.18) \approx 1.$

(c) $\mathsf{P}(100 \leq 500 - X \leq 150) = \mathsf{P}(350 < X < 400) = \mathsf{P}(\frac{350-400}{8.944} < X^* < \frac{400-400}{8.944}) =$
$= \mathsf{P}(-5.59 < X < 0) = \Phi(0) - \Phi(-5.59) \approx 0.5.$

Zadatak 4

Postavka: Slučajna promenljiva X predstavlja broj automobila koji prolaze kroz neku posmatranu raskrsnicu tokom jednog minuta ima (u svakoj minuti) Poasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda = 30$.

(a) Naći verovatnoću da tokom 20 minuta kroz raskrsnicu prođe najmanje 200 automobila.

(b) Odrediti maksimalnu vrednost broja m takvog da sa verovatnoćom većom od 0.9 broj automobila koji za 20 minuta prolaze kroz raskrsnicu bude bar m.

Rešenje:
Znamo: $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathsf{P}(X = i) = \frac{30^i}{i!} e^{-30}$, $i \in \mathcal{R}_X$, kao i $\mathsf{E}(X) = 30$, $\mathsf{D}(X) = 30$.
Posmatrajmo slučajne promenljive X_k koje predstavljaju broj automobila koji prolaze kroz raskrsnicu tokom k - tog posmatranog minuta. Slučajne promenljive X_k su međusobno nezavisne i imaju iste raspodele (samim tim i matematička očekivanja i disperzije) kao slučajna promenljiva X. Slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ predstavlja broj automobila koji prolaze kroz raskrsnicu tokom n minuta, pri čemu za nju važi $\mathsf{E}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{E}(X_k) = 30n$ i $\mathsf{D}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{D}(X_k) = 30n$.
Posmatrajmo i normalizovanu slučajnu promenljivu $S_n^* = \frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} = \frac{S_n - 30n}{\sqrt{30n}}$.

(a) Primenom centralne granične teoreme na S_{20}^* dobijamo

$\mathsf{P}(S_{20} \geq 200) = 1 - \mathsf{P}(S_{20} < 200) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{20}-600}{\sqrt{600}} < \frac{200-600}{\sqrt{600}}\right) =$

$= 1 - \mathsf{P}\left(S_{20}^* < \frac{-400}{10\sqrt{6}}\right) \approx 1 - \mathsf{P}(S_{20}^* < -16.33) \approx 1 - \phi(-16.33) =$

$= 1 - 1 + \phi(16.33) \approx 1.$

(b) Tražimo maksimalno $m \in \mathbb{N}$ za koje važi $\mathsf{P}(S_{20} \geq m) > 0.9$? Imamo

$\mathsf{P}(S_{20} \geq m) = 1 - \mathsf{P}(S_{20} < m) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{20}-600}{\sqrt{600}} < \frac{m-600}{\sqrt{600}}\right) =$

$= 1 - \mathsf{P}\left(S_{20}^* < \frac{m-600}{10\sqrt{6}}\right) \approx 1 - \phi\left(\frac{m-600}{10\sqrt{6}}\right).$

Dakle:

$$\mathsf{P}(S_{20} \geq m) > 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \phi\left(\frac{m-600}{10\sqrt{6}}\right) \succ 0.9 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{m-600}{10\sqrt{6}}\right) \prec 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m-600}{10\sqrt{6}} \prec \phi^{-1}(0.1) \approx -1.28 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad m \prec 568.647$$

pa je traženo rešenje $m = 568$.

Zadatak 5

Postavka: Količina praška u jednoj kesi ima očekivanu vrednost $a = 3.6\ kg$ sa standardnim odstupanjem $\sigma = 0.05\ kg$. Količina praška u jednoj kesi u sanduku je nezavisna od količine praška u ostalim kesama. Koliko najviše može biti kesa u sanduku pa da ukupna količina praška bude manja od $400\ kg$ sa verovatnoćom 0.9?

Rešenje:
Neka je X_i količina praška u i - toj kesi (jedinica merenja je kilogram), a $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ ukupna količina praška koji se nalazi u sanduku, upakovana u n kesa $(n \in \mathbb{N})$. Slučajna promenljiva X_i ima numeričke karakteristike $\mathsf{E}(X_i) = 3.6$ i $\mathsf{D}(X_i) = 0.05^2 = 0.0025$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Odatle dobijamo:

$$\mathsf{E}(S_n) = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = 3.6n,$$
$$\mathsf{D}(S_n) = \mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = 0.0025n$$

(slučajne promenljive X_i su nezavisne).

Treba po n rešiti jednačinu $\mathsf{P}(S_n < 400) = 0.9$.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(S_n < 400) = 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\tfrac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} < \tfrac{400 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) = 0.9 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \phi\left(\tfrac{400 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) \approx 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{400 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} \approx \phi^{-1}(0.9) \approx 1.28 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \tfrac{400 - 3.6n}{0.05\sqrt{n}} \approx 1.28 \quad \Leftrightarrow \quad 3.6n + 0.064\sqrt{n} - 400 \approx 0 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & (3.6t^2 + 0.064t - 400 \approx 0 \ \wedge\ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & ((t \approx -10.532 \ \vee\ t \approx 10.5498) \ \wedge\ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{n} \approx 10.5498 \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 10.5498^2 \approx 111.2983,
\end{aligned}$$

što znači da se sa najviše 111 kesa u sanduku nalazi manje od $400kg$ sa verovatnoćom 0.9.

Zadatak 6

Postavka: U jednoj igri igrač osvaja 50 poena sa verovatnoćom 0.5, 10 poena sa verovatnoćom 0.3 i -100 poena sa verovatnoćom 0.2 (dakle, gubi 100 poena sa verovatnoćom 0.2).

(a) Ako je igrač odigrao 100 igara, koliko iznosi verovatnoća da je osvojio bar 900 poena?

(b) Koliko igara treba da odigra, pa da sa verovatnoćom 0.95 osvoji bar 1000 poena?

Rešenje:
Neka je X_i slučajna promenljiva koja predstavlja broj poena koji igrač dobija (ili gubi) u i - toj igri. Slučajne promenljive X_i su nezavisne i imaju isti zakon raspodele i numeričke karakteristike:

$$X_i : \begin{pmatrix} -100 & 10 & 50 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{E}(X_i) = -100 \cdot 0.2 + 10 \cdot 0.3 + 50 \cdot 0.5 = 8,$$
$$\mathsf{E}(X_i^2) = (-100)^2 \cdot 0.2 + 10^2 \cdot 0.3 + 50^2 \cdot 0.5 = 3280,$$

$\mathsf{D}(X_i) = \mathsf{E}(X_i^2) - \mathsf{E}(X_i) = 3280 - 8^2 = 3216.$

Slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja ukupan broj dobijenih ili izgubljenih poena tokom odigranih n igara. Pri tome je:

$\mathsf{E}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = 8n$ i

$\mathsf{D}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = 3216n$

(zbog nezavisnosti slučajnih promenljivih X_i). Na osnovu centralne granične teoreme ([$*$]), slučajna promenljiva $S_n^* = \frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}$ ima (za "dovoljno" veliko n) približno $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu.

(a) $\mathsf{P}(S_{100} \geq 900) = 1 - \mathsf{P}(S_{100} < 900) =$

$= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{100} - \mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}} < \frac{900 - \mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}}\right) = 1 - \mathsf{P}\left(S_{100}^* < \frac{900-800}{\sqrt{321600}}\right) \approx$

$\approx 1 - \mathsf{P}(S_{100}^* < 0.18) \overset{[*]}{\approx} 1 - \phi(0.18) \approx 1 - 0.5676 \approx 0.4324.$

(b) Rešavamo po n jednačinu $\mathsf{P}(S_n \geq 1000) = 0.95$:

$\mathsf{P}(S_n \geq 1000) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(S_n < 1000) = 0.95 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(S_n < 1000) = 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(S_n^* < \frac{1000 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) = 0.05 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(S_n^* < \frac{1000-8n}{\sqrt{3216n}}\right) = 0.05 \quad \overset{[*]}{\Leftrightarrow} \quad \phi\left(\frac{1000-8n}{\sqrt{3216n}}\right) \approx 0.05 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1000-8n}{\sqrt{3216n}} \approx \phi^{-1}(0.05) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1000-8n}{\sqrt{3216n}} \approx -1.65 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 1000 - 8n \approx -1.65\sqrt{3216n} \quad \Leftrightarrow \quad 8n - 93.57\sqrt{n} - 1000 \approx 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (8t^2 - 93.57t - 1000 \approx 0 \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad ((t \approx -6.76935 \ \vee \ t \approx 18.4656) \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (t \approx 18.4656 \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 18.4656^2 \approx 340.978.$

Dakle, treba da odigra 341 igru.