Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet Tehničkih Nauka
Verovatnoća i slučajni procesi, letnji semestar akademske 2022/2023. godine

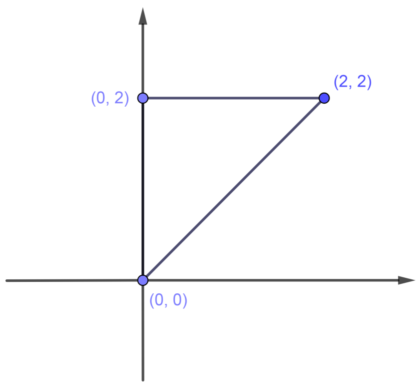
Neprekidna dvodimenzionalna slučajna promenljiva i njene transformacije.

Zadatak 1

Postavka: Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) data je gustinom:

$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a(x+y), & (x,y) \in T \\ 0, & (x,y) \notin T \end{cases},$$

gde je T trougao sa temenima $(0,0)$, $(2,2)$ i $(0,2)$.



(a) Odrediti konstantu a.

(b) Naći funkciju raspodele slučajne promenljive (X, Y).

(c) Ispitati nezavisnost X i Y.

(d) Naći $\varphi_{X|\{Y=y\}}(x)$.

(e) Naći $F_{X|\{Y=y\}}(x)$.

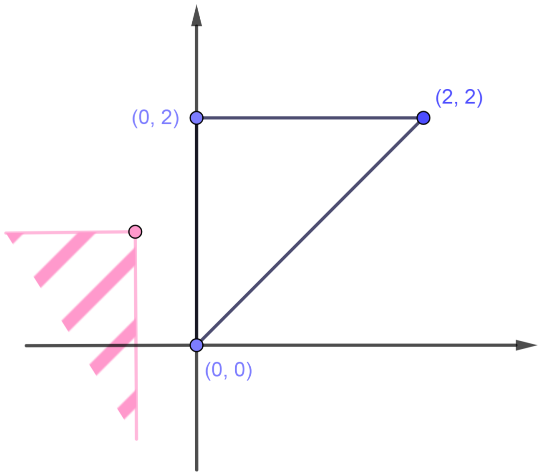
Rešenje:

(a) Da bi navedena funkcija stvarno bila funkcija gustine treba da važi:
$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{x}^{2} a(x+y)dydx = 4a$. Odakle sledi da je $a = \frac{1}{4}$.

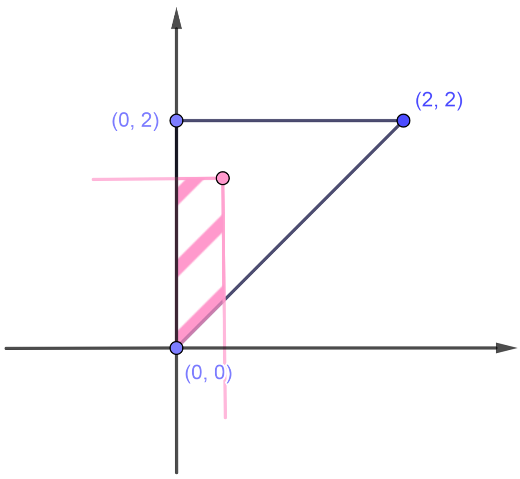
(b) $F_{X,Y}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} \varphi_{X,Y}(u,v)dvdu.$

Razlikujemo sledeće slučajeve:

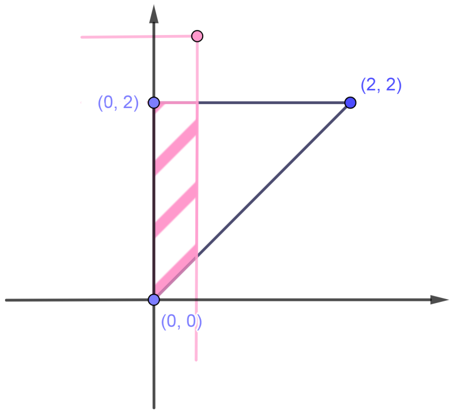
(1°) za $x \leq 0$ ili $y \leq 0$ $F_{X,Y}(x,y) = 0$



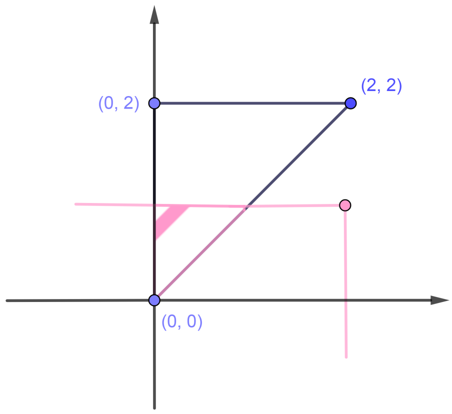
(2°) za $x \in (0,2)$ i $y \in (x,2]$ $F_{X,Y}(x,y) = \int\limits_{0}^{x}\int\limits_{u}^{y} \frac{1}{4}(u+v)dvdu$



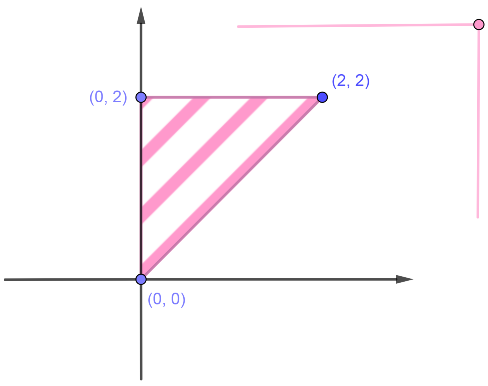
(3°) za $x \in (0,2]$ i $y > 2$ $F_{X,Y}(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_u^2 \frac{1}{4}(u+v)dvdu$



(4°) za $y \in (0,2]$ i $x > y$ $F_{X,Y}(x,y) = \int\limits_0^y \int\limits_u^y \frac{1}{4}(u+v)dvdu$



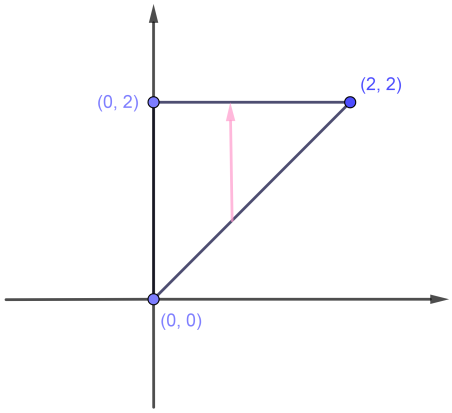
(5°) za $x > 2$ i $y > 2$ $F_{X,Y}(x,y) = 1$



(c) Treba ispitati da li važi $\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y)$.

Prvo nalazimo $\varphi_X(x)$ kao $\varphi_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)\, dy,\ x \in \mathbb{R}$.

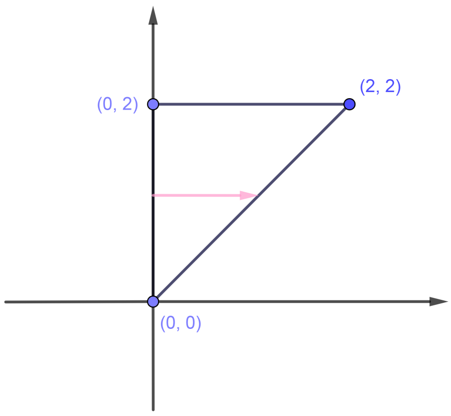
Razlikujemo dva slučaja $x \in (0,2)$ i $x \notin (0,2)$, što vidimo sa slike:



$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \int\limits_x^2 \frac{1}{4}(x+y)\, dy & ,\quad x \in (0,2) \\ 0 & ,\quad x \notin (0,2) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(2 + 2x - \frac{3x^2}{2}\right) & ,\quad x \in (0,2) \\ 0 & ,\quad x \notin (0,2) \end{cases} .$$

Sada nalazimo $\varphi_Y(y)$ kao $\varphi_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)\, dx,\ y \in \mathbb{R}$.

Razlikujemo dva slučaja $y \in (0,2)$ i $y \notin (0,2)$, što vidimo sa slike:



$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \int\limits_0^y \frac{1}{4}(x+y)\, dx & ,\quad y \in (0,2) \\ 0 & ,\quad y \notin (0,2) \end{cases} = \begin{cases} \frac{3y^2}{8} & ,\quad y \in (0,2) \\ 0 & ,\quad y \notin (0,2) \end{cases} .$$

Očigledno je $\varphi_{X,Y}(x,y) \neq \varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y)$ tako da X i Y nisu nezavisne.

(d) Uslovnu gustinu $\varphi_{X|\{Y=y\}}(x)$ nalazimo za $y \in (0,2)$ na sledeći način:

$$\varphi_{X|\{Y=y\}}(x) = \frac{\varphi_{X,Y}(x,y)}{\varphi_Y(y)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{4}(x+y)}{\frac{3}{8}y^2} & , \ x \in (0,y) \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{x+y}{y^2} & , \ x \in (0,y) \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}.$$

(e) $F_{X|\{Y=y\}}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_{X|\{Y=y\}}(t)\,dt.$

Razlikovaćemo tri slučaja:

1° za $x \leq 0$ $F_{X|\{Y=y\}}(x) = 0$,

2° za $0 < x \leq y$ $F_{X|\{Y=y\}}(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{2}{3} \cdot \frac{t+y}{y^2} dt = \frac{2}{3y^2}(\frac{x^2}{2} + yx)$,

3° za $x > y$ $F_{X|\{Y=y\}}(x) = 1$.

Konačno $F_{X|\{Y=y\}}(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0 \\ \dfrac{2}{3y^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + yx\right) & , \ 0 < x \leq y \\ 1 & , \ x > y \end{cases}$.

Zadatak 2

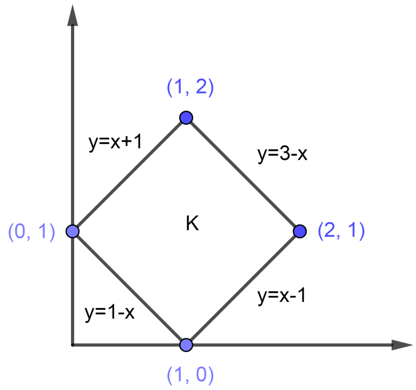
Postavka: Iz kvadrata sa temenima $(1,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$ i $(0,1)$ na slučajan način se bira tačka (X,Y).

(a) Naći gustinu slučajne promenljive (X,Y).

(b) Ispitati nezavisnost X i Y.

Rešenje:

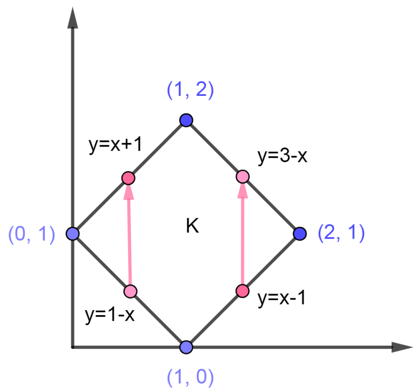
(a) $\varphi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m(K)} & , \ (x,y) \in K \\ 0 & , \ (x,y) \notin K \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \ (x,y) \in K \\ 0 & , \ (x,y) \notin K \end{cases}$, gde je K kvadrat sa slike:



(b) Treba ispitati da li važi $\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y)$.

Prvo nalazimo $\varphi_X(x)$ kao $\varphi_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)\, dy$, $x \in \mathbb{R}$.

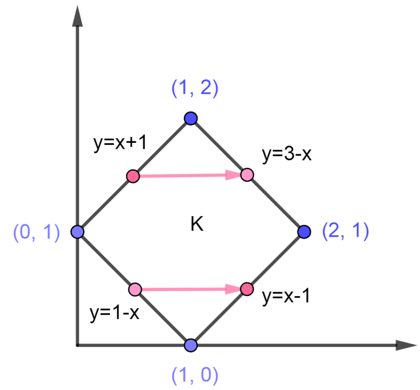
Razlikujemo tri slučaja $x \in (0,1]$, $x \in (1,2)$ i $x \notin (0,2)$, što vidimo sa slike:



$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \int\limits_{1-x}^{x+1} \frac{1}{2}\, dy & , \quad x \in (0,1] \\ \int\limits_{x-1}^{3-x} \frac{1}{2}\, dy & , \quad x \in (1,2) \\ 0 & , \quad x \notin (0,2) \end{cases} = \begin{cases} x & , \quad x \in (0,1] \\ 2-x & , \quad x \in (1,2) \\ 0 & , \quad x \notin (0,2) \end{cases} .$$

Sada nalazimo $\varphi_Y(y)$ kao $\varphi_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)\, dx$, $y \in \mathbb{R}$.

Razlikujemo tri slučaja $y \in (0,1]$, $y \in (1,2)$ i $y \notin (0,2)$, što vidimo sa slike:



$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \int\limits_{1-y}^{y+1} \frac{1}{2}\,dx & , \quad y \in (0,1] \\ \int\limits_{y-1}^{3-y} \frac{1}{2}\,dx & , \quad y \in (1,2) \\ 0 & , \quad x \notin (0,2) \end{cases} = \begin{cases} y & , \quad y \in (0,1] \\ 2-y & , \quad y \in (1,2) \\ 0 & , \quad y \notin (0,2) \end{cases}.$$

Očigledno je $\varphi_{X,Y}(x,y) \neq \varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y)$ tako da X i Y nisu nezavisne.

Zadatak 3

POSTAVKA: Tačka X se na slučajan način bira iz intervala $(0,1)$, a tačka Y iz intervala $(X,1)$. Naći raspodelu slučajne promenljive Y.

REŠENJE:
Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelu. Slučajna promenljiva Y pri $X = x$ ima $\mathcal{U}(x,1)$ raspodelu. Njihove gustine su redom:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases},$$

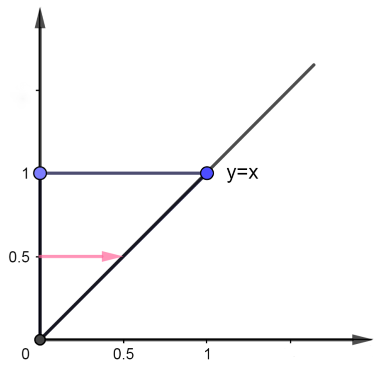
$$\varphi_{Y|\{X=x\}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & y \in (x,1) \\ 0, & y \notin (x,1) \end{cases}.$$

Na osnovu zadatih gustina dobijamo $\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x) \cdot \varphi_{Y|\{X=x\}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$,

gde je $D = \{(x,y) \mid x \in (0,1) \ \wedge \ y \in (x,1)\}$.

Sada nalazimo $\varphi_Y(y)$ kao $\varphi_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dx,\ y \in \mathbb{R}$.

Razlikujemo dva slučaja $y \in (0,1)$ i $y \notin (0,1)$, što vidimo sa slike:



- $y \in (0,1) : \varphi_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{1-x}\, dx = ... = \ln\left(\frac{1}{1-y}\right)$,
- $y \notin (0,1) : \varphi_Y(y) = 0$.

Zadatak 4

Postavka: Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X,Y) ima raspodelu datu gustinom:

$$\varphi_{X,Y}(x,y) = A(x+y), \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < x^2.$$

(a) Izračunati konstantu A.

(b) Naći gustinu slučajne promenljive $Z = XY$.

Rešenje:

Označimo sa $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \ \wedge\ 0 < y < x^2\}$

$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} A(x+y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}.$$

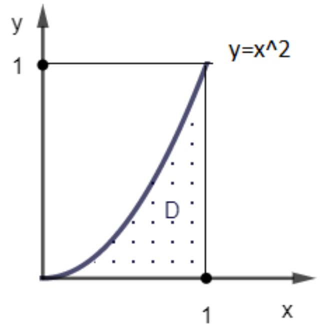
(a) $1 = \int\limits_D\int \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{x^2} A(x+y)\,dy\right) dx =$

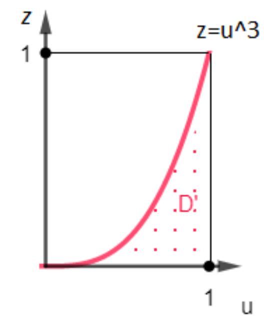
$= A\int\limits_0^1 \left(xy\Big|_0^{x^2} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2}\right) dx = A\int\limits_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{7}{20}A,$

pa sledi da je $A = \frac{20}{7}$.

(b) Prvi način:

Dodefinišemo $U = X$ i posmatramo transformaciju $f : (X,Y) \to (U,Z)$ datu sa $U = X$, $Z = XY$. Transformacija f je neprekidna i monotona po obe komponente, i slika oblast D u oblast $D' = f(D) = \{(u,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 1 \ \wedge\ 0 < z < u^3\}$, što se vidi na slici:





Funkcija f je bijektivna pa postoji inverzna funkcija $f^{-1} : (U,Z) \to (X,Y)$ data sa $X = U,\ Y = \frac{Z}{U}$ (tj. $f^{-1}(u,z) = \left(u, \frac{z}{u}\right)$) i $\mathcal{J}_{f^{-1}}(u,z) = \begin{vmatrix} x_u & x_z \\ y_u & y_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}$.

Dobijamo:

$$\varphi_{U,Z}(u,z) = \varphi_{X,Y}\left(f^{-1}(u,z)\right) \cdot \left|\mathcal{J}_{f^{-1}}(u,z)\right| =$$

$$= \varphi_{X,Y}\left(u, \tfrac{z}{u}\right) \cdot \tfrac{1}{u} = \begin{cases} \frac{20}{7}\left(1 + \frac{z}{u^2}\right) & , \ (u,z) \in D' \\ 0 & , \ (u,z) \notin D' \end{cases}.$$

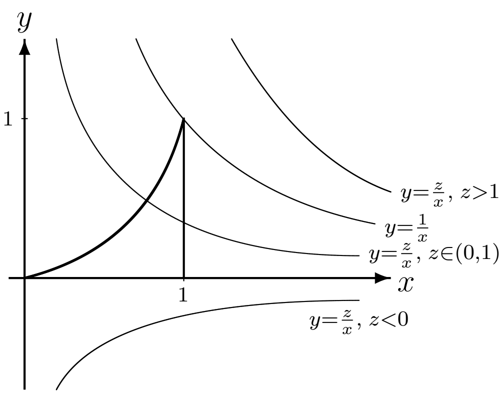
Gustinu slučajne promenljive Z nalazimo kao marginalnu gustinu slučajnog vektora (U,Z).
Za $z \in (0,1)$ je: $\varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{U,Z}(u,z)\,du = \int\limits_{\sqrt[3]{z}}^{1} \frac{20}{7}\left(1 + \frac{z}{u^2}\right) du = \frac{20}{7}\frac{\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{z^2} - \sqrt[3]{z^4} + z}{\sqrt[3]{z}}$. Dakle:

$$\varphi_Z(z) = \begin{cases} \frac{20}{7}\left(1 - z + z^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{1}{3}}\right) & , \ z \in (0,1) \\ 0 & , \ z \notin (0,1) \end{cases}.$$

Drugi način:

$$F_Z(z) = \mathsf{P}(Z < z) = \mathsf{P}(XY < z) \overset{X \geq 0}{=} \mathsf{P}\left(Y < \tfrac{z}{X}\right) = \iint\limits_{S_z} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

gde je $S_z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \frac{z}{x}\right\} \cap D$ (vidi sliku ispod).



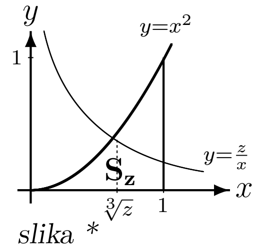
Za $z \leq 0$ je očigledno $S_z = \emptyset$, pa je $F_Z(z) = 0$.

Za $0 < z \leq 1$ (vidi sliku *) je:

$$F_Z(z) = \int\limits_0^{\sqrt[3]{z}} \left(\int\limits_0^{x^2} \frac{20}{7}(x+y)\,dy \right) dx + \int\limits_{\sqrt[3]{z}}^{1} \left(\int\limits_0^{\frac{z}{x}} \frac{20}{7}(x+y)\,dy \right) dx =$$

$= \frac{1}{7}\sqrt[3]{z^4}\left(5 + 2\sqrt[3]{z}\right) + \frac{10}{7}z\left(2 - 2\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{z^2} - z\right) =$

$= \frac{1}{7}z\left(20 - 15\sqrt[3]{z} + 12\sqrt[3]{z^2} - 10z\right).$



slika *

Za $1 < z$ je očigledno $S_z = D$, pa je $F_Z(z) = 1$.

Koristeći da je $\varphi_Z(z) = F_Z'(z)$, dobijamo

$$\varphi_Z(z) = \begin{cases} \frac{20}{7}\left(1 - z + z^{\frac{2}{3}} - z^{\frac{1}{3}}\right) & , \quad z \in (0,1) \\ 0 & , \quad z \notin (0,1) \end{cases}.$$

Zadatak 5

$\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y)$

$\varphi_X(z)$

Postavka: Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive pri čemu X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(1)$ raspodelu, a Y ima uniformnu $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelu. Naći raspodelu slučajne promenljive $Z = X + Y$.

$\varphi_Y(y)$

Rešenje:

$X : \mathcal{E}(1) \to \varphi_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$ $\quad Y : \mathcal{U}(0,1) \to \varphi_Y(y) = \begin{cases} 1 & , \quad y \in (0,1) \\ 0 & , \quad y \notin (0,1) \end{cases}$

X i Y nezavisne $\to \boxed{\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad (x,y) \in D \\ 0 & , \quad (x,y) \notin D \end{cases}}$.

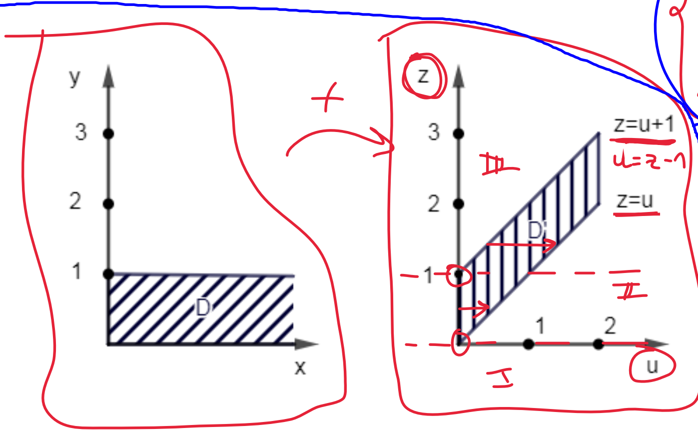
gde je oblast D data sa $\boxed{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y \in (0,1)\right\}$.

$f : (X,Y) \to (U,Z) : U = X, Z = X + Y$

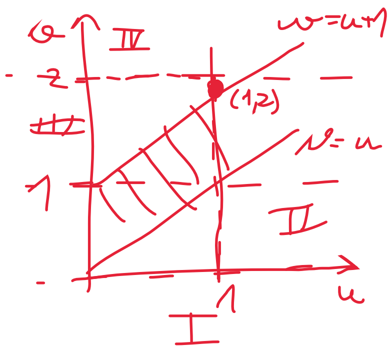
$\exists f^{-1} : (U,Z) \to (X,Y) : \boxed{X = U, Y = Z - X = Z - U}$

Prvi način:
Dodefinišemo $U = X$ i posmatramo transformaciju $f : (X,Y) \to (U,Z)$ datu sa $U = X$, $Z = X + Y$. Transformacija f je neprekidna i monotona po obe komponente, i slika oblast D u oblast $D' = f(D) = \{(u,z) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0 \wedge u < z < u + 1\}$, što se vidi na slici:

$\left\{\begin{array}{l} \cancel{x=0} \\ x>0 \\ y=0 \\ y=1 \end{array}\right. \xrightarrow{f} \begin{array}{l} x=u \\ y=z-u \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} \cancel{u=0} \\ u>0 \\ z-u=0 \\ z-u=1 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} \cancel{u=0} \\ u>0 \\ z=u \\ z=1+u \end{array}\right.$



Primer:



$\boxed{\varphi_{U,Z}(u,z) = \varphi_{X,Y}(f^{-1}(u,z))\cdot\left|J_{f^{-1}}(u,z)\right|}$

$= \varphi_{X,Y}(u, z-u)\cdot\left|J_{f^{-1}}(u,z)\right|$

Funkcija f je bijektivna pa postoji inverzna funkcija $f^{-1} : (U, Z) \to (X, Y)$ data sa $X = U$, $Y = Z - U$ (tj. $f^{-1}(u, z) = (u, z - u)$) i $\mathcal{J}_{f^{-1}}(u, z) = \begin{vmatrix} x_u & x_z \\ y_u & y_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Dobijamo: $\varphi_{U,Z}(u, z) = \varphi_{X,Y}(u, z - u) \cdot |1| = \begin{cases} e^{-u} & , \ (u, z) \in D' \\ 0 & , \ (u, z) \notin D' \end{cases}$.

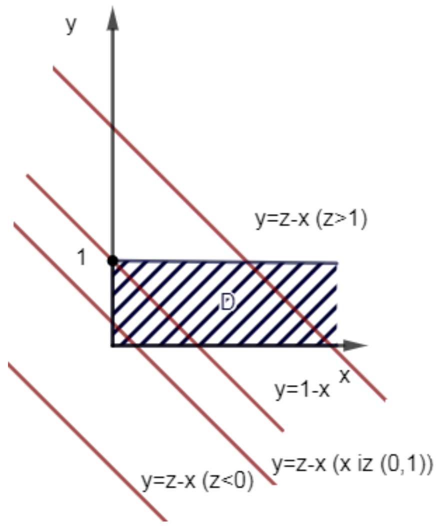
$\varphi_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{U,Z}(u,z)\, du$

Gustinu slučajne promenljive Z nalazimo kao marginalnu gustinu slučajnog vektora (U, Z).
Za $z \in (-\infty, 0]$ je $\varphi_Z(z) = 0$
Za $z \in (0, 1]$ je: $\varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{U,Z}(u, z)\, du = \int\limits_{0}^{z} e^{-u} du = 1 - e^{-z}$.
Za $z \in (1, \infty)$ je $\varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{U,Z}(u, z)\, du = \int\limits_{z-1}^{z} e^{-u} du = e^{-(z-1)} - e^{-z}$.

Dakle: $\varphi_Z(z) = \begin{cases} 0 & , \ z \in (-\infty, 0] \\ 1 - e^{-z} & , \ z \in (0, 1] \\ e^{-(z-1)} - e^{-z} & , \ z \in (1, \infty) \end{cases}$.

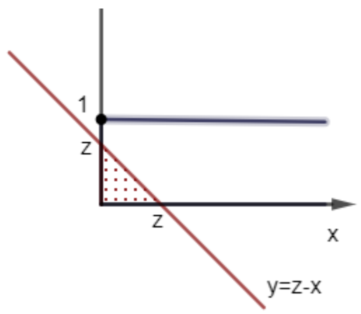
Drugi način:

$F_Z(z) = \mathsf{P}(Z < z) = \mathsf{P}(X + Y < z) = \mathsf{P}(Y < z - X) = \iint\limits_{S_z} \varphi_{X,Y}(x, y)\, dxdy$
gde je $S_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < z - x\} \cap D$ (vidi sliku ispod).



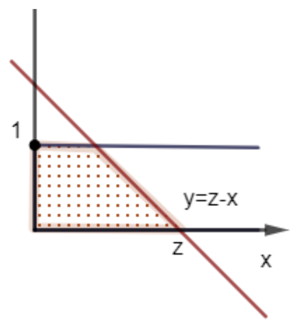
Za $z \le 0$ je očigledno $S_z = \emptyset$, pa je $F_Z(z) = 0$.
Za $0 < z \le 1$ je:

$F_Z(z) = \int\limits_0^z \int\limits_0^{z-x} e^{-x} dydx = ... = z + e^{-z} - 1$, što se vidi sa slike:



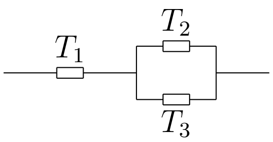
Za $z > 1$ je:

$F_Z(z) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{z-y} e^{-x} dx dy = ... = 1 - e^{-z+1} + e^{-z}$, što se vidi sa slike:



Zadatak 6

Postavka: Dato je strujno kolo na slici, u kome prekidači rade nezavisno jedan od drugog i imaju vreme rada sa eksponencijalnom raspodelom $\mathcal{E}(2)$. Naći raspodelu slučajne promenljive koja predstavlja vreme rada celog strujnog kola.



Rešenje:
Neka su T_1, T_2, T_3 slučajne promenljive koje predstavljaju vremena rada odgovarajućih prekidača, pri čemu sve tri imaju istu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu sa gustinom i funkcijom raspodele:

$$\varphi_T(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ 2e^{-2t} & , \ t \geq 0 \end{cases}, \qquad F_T(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ 1 - e^{-2t} & , \ t \geq 0 \end{cases}.$$

Neka je K slučajna promenljiva koja predstavlja vreme rada celog strujnog kola. Na osnovu opisanih veza između prekidača zaključujemo da je $K = \min\{T_1, \max\{T_2, T_3\}\}$. Uvedimo pomoćnu slučajnu promenljivu $S = \max\{T_2, T_3\}$ čiju ćemo raspodelu najpre naći:

$$F_S(s) = \mathsf{P}(S < s) = \mathsf{P}(\max\{T_2, T_3\} < s) = \mathsf{P}(T_2 < s, T_3 < s) =$$
$$\mathsf{P}(T_2 < s)\,\mathsf{P}(T_3 < s) = F_T(s)\,F_T(s) = \begin{cases} 0 & , \ s < 0 \\ (1 - e^{-2s})^2 & , \ s \geq 0 \end{cases},$$

$$\varphi_S(s) = (F_S(s))' = \begin{cases} 0 & , \quad s < 0 \\ 4e^{-2s}\left(1 - e^{-2s}\right) & , \quad s \geq 0 \end{cases}.$$

Sada nalazimo raspodelu slučajne promenljive $K = \min\{T_1, S\}$:

$F_K(k) = \mathsf{P}(K < k) = \mathsf{P}(\min\{T_1, S\} < k) = 1 - \mathsf{P}(\min\{T_1, S\} \geq k) =$

$= 1 - \mathsf{P}(T_1 \geq k, S \geq k) = 1 - \mathsf{P}(T_1 \geq k)\,\mathsf{P}(S \geq k) =$

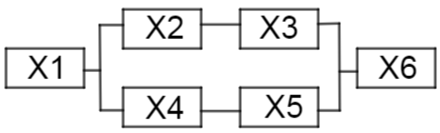
$= 1 - (1 - \mathsf{P}(T_1 < k))(1 - \mathsf{P}(S < k)) =$

$$1 - (1 - F_T(k))(1 - F_S(k)) = \begin{cases} 0 & , \quad k < 0 \\ 1 + e^{-6k} - 2e^{-4k} & , \quad k \geq 0 \end{cases},$$

$$\varphi_K(k) = (F_K(k))' = \begin{cases} 0 & , \quad k < 0 \\ 8e^{-4k} - 6e^{-6k} & , \quad k \geq 0 \end{cases}.$$

Zadatak 7

Postavka: Dato je strujno kolo na slici, u kome prekidači rade nezavisno jedan od drugog i imaju vreme rada sa eksponencijalnom raspodelom $\mathcal{E}(1)$. Naći raspodelu slučajne promenljive Y koja predstavlja vreme rada celog strujnog kola.



Rešenje:

Neka su X_1, X_2, X_3 , X_4 , X_5 , X_6 slučajne promenljive koje predstavljaju vremena rada odgovarajućih prekidača, pri čemu svih šest ima istu $\mathcal{E}(1)$ raspodelu sa gustinom i funkcijom raspodele:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ e^{-x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

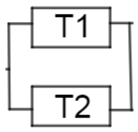
Nađimo prvo raspodelu slučajne promenljive T koja predstavlja deo strujnog kola koji je dat na sledećoj slici:

$T = min\{X_2, X_3\}$ pa je:

za $t \geq 0$:
$F_T(t) = P(T < t) = P(min\{X_2, X_3\} < t) = 1 - P(min\{X_2, X_3\} \geq t) =$
$1 - P(X_2 \geq t, X_3 \geq t) = 1 - P(X_2 \geq t) \cdot P(X_3 \geq t) = 1 - (1 - P(X_2 < t)) \cdot (1 - P(X_3 < t)) =$
$1 - (1 - F_X(t)) \cdot (1 - F_X(t)) = 1 - e^{-2t}$,

za $t < 0$: $F_T(t) = 0$.

Nađimo sada raspodelu slučajne promenljive S koja predstavlja deo strujnog kola koji je dat na sledećoj slici:

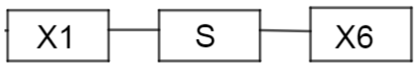


$S = max\{T_1, T_2\}$ pri čemu T_1 i T_2 imaju istu raspodelu kao i T i važi:

za $s \geq 0$:
$F_S(s) = P(S < s) = P(max\{T_1, T_2\} < s) = P(T_1 < s, T_2 < s) = P(T_1 < s)P(T_2 < s) = F_T(s) \cdot F_T(s) = (1 - e^{-2s})^2$,

za $s < 0$: $F_S(s) = 0$.

I konačno nalazimo raspodelu slučajne promenljive Y koja se sada može predstaviti kao $Y = min\{X_1, S, X_6\}$:



Dobijamo
za $y \geq 0$:
$F_Y(y) = P(Y < y) = P(min\{X_1, S, X_6\} < y) = 1 - P(min\{X_1, S, X_6\} \geq y) =$
$1 - P(X_1 \geq y, S \geq y, X_6 \geq y) = 1 - P(X_1 \geq y) \cdot P(S \geq y) \cdot P(X_6 \geq y)$
$= 1-(1-P(X_2 < y)) \cdot (1-P(S < y))(1-P(X_6 < y)) = 1-(1-F_X(y)) \cdot (1-F_S(y))(1-F_X(y)) =$
$1 - e^{-2y}(1 - (1 - e^{-2y})^2)$,

za $y < 0$: $F_Y(y) = 0$.