

Predispitne obaveze 1 – 20 poena

1. [3 poena] Napisati klasičnu (Laplasovu) definiciju verovatnoće.

— Ω kolekcija  
elem. događaja = kolekcija  
 $\{1, 2, \dots, 6\}$

Kockica za "Ne ljuti se čoveče" baca se jednom. Ispisati skup elementarnih događaja  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

Izračunati verovatnoću da prilikom bacanja kockice padne neparan broj tačaka  $P(A) = \frac{3}{6}$

- Ako je prilikom bacanja kockice pao neparan broj tačaka izračunati verovatnoću da je taj broj manji od 5.

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2/6}{3/6} = 2/3$$

$A = \{1, 3, 5\}$   
 $B = \{1, 2, 3, 4\}$   
 $AB = \{1, 3\}$

2. [3 poena] Napisati za koje slučajne promenljive važe navedene jednakosti

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$  .....  $UBEK$

•  $E(XY) = E(X)E(Y)$  .....  $nezavisne$

$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$  .....  $nezavisne$

Koristeći osobine matematičkog očekivanja i disperzije napisati jednakosti koje važe

$E(1 - X) = 1 - E(X)$

•  $D(1 - X) = D(-X) = (-1)^2 D(X) = D(X)$

$E(X^2) = \sum x_i^2 p(x_i)$  ..... (za diskretan ili neprekidan slučaj)

$\int x^2 f_X(x) dx$

$1 \in \Delta H$   $Haru...$

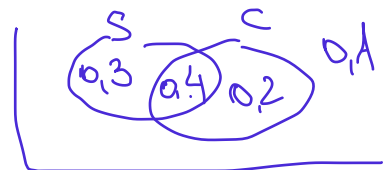
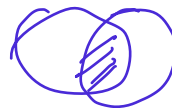
3. [3 poena] Verovatnoća da dete jede sladoled je 0.7, a verovatnoća da jede čokoladu je 0.6. Verovatnoća da jede bar jednu poslasticu je 0.9.

Izračunati verovatnoću da će dete jesti obe poslastice.

$$P(S \cup C) = P(S) + P(C) - P(SC)$$

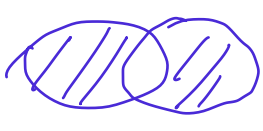
$$0.9 = 0.7 + 0.6 - P(SC)$$

$$P(SC) = 0.4$$



Izračunati verovatnoću da će dete jesti tačno jednu poslasticu.

$P(A) = 0.3 + 0.2$



Ako je dete jelo tačno jednu poslasticu izračunati verovatnoću da je jelo sladoled.

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 3/5$$



4. [1 poen] Slučajna promenljiva  $X$  ima binomnu  $B(30, \frac{1}{3})$  raspodelu. Napisati standardizovanu (normalizovanu) slučajnu promenljivu i njeno matematičko očekivanje i disperziju.

$E(X) = np = 30 \cdot \frac{1}{3} = 10$

$X^* = \frac{X - 10}{\sqrt{20/3}}$

$D(X) = npq = 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$

$E(X^*) = 0$

$D(X^*) = 1$

① Да ли су догађаји  $A$  и  $B$  независни?  
и да ли је  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ?

② — — — — —  
— — — — —  
Независни?

①  $P(S \cup \bar{C}) \stackrel{?}{=} P(S) + P(\bar{C})$   
 $0.9 \neq 0.7 + 0.6 \Rightarrow$  Није функција

②  $P(S \bar{C}) \stackrel{?}{=} P(S)P(\bar{C})$   
 $0.4 \neq 0.7 \cdot 0.6 \Rightarrow$  Није независно

5. [5 poen] Slučajna promenljiva  $X$  data je gustinom raspodele verovatnoća  $\varphi_X(x) = \begin{cases} ax^3, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases}$ .

Odrediti konstantu  $a$ . (Izračunati integral!)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x) dx = \int_0^1 ax^3 dx = a \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 4$$

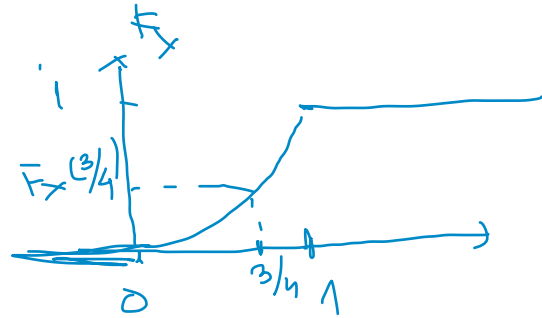
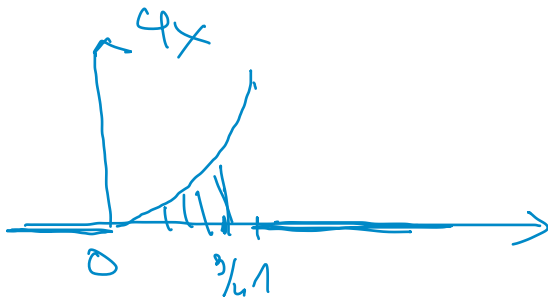
Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive  $X$ .

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt = \begin{cases} x \leq 0: & 0 \\ 0 < x \leq 1: & \int_0^x 4t^3 dt = t^4 \Big|_0^x = x^4 \\ x > 1: & 1 \end{cases}$$

$F_X(3/4) = (3/4)^4$

$$P(X = \frac{1}{2}) = 0$$

Na grafiku funkcije gustine i na grafiku funkcije raspodele slučajne promenljive  $X$  predstaviti verovatnoću  $P(X < \frac{3}{4})$  i izračunati je.



6. [6 poena] Slučajna promenljiva  $(X, Y)$  data je zakonom raspodele verovatnoća

$X/Y$	0	1	2	
1	0.1	0.3	0.4	0.4
2	0.2	0.3	0.1	0.6
	0.1			

Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive  $X$ .

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih  $X$  i  $Y$ .

$$P(x_i, y_j) \stackrel{?}{=} P(x_i)P(y_j)$$

$$P(X=1, Y=2) \stackrel{?}{=} P(X=1)P(Y=2)$$

$$0 \neq 0.4 \cdot 0.1 \quad \text{tako je nezav.}$$

Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive  $Y|X=2$ .

$$Y|X=2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2/6 & 3/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$P(Y=0|X=2) = \frac{P(X=2, Y=0)}{P(X=2)} = \frac{0.2}{0.6} = 2/6$$

$$P(Y=1|X=2) = \frac{P(X=2, Y=1)}{P(X=2)} = \frac{0.3}{0.6} = 3/6$$

Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive  $Y|X=2$ .

$$F_{Y|X=2}(y) = \begin{cases} y \leq 0: & 0 \\ 0 < y \leq 1: & 2/6 \\ 1 < y \leq 2: & 5/6 \quad (= 2/6 + 3/6) \\ y > 2: & 1 \end{cases}$$

Izračunati matematičko očekivanje slučajne promenljive  $Y|X=2$ .

$$E(Y|X=2) = 0 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6}$$

**Deo završnog ispita 1 – 40 poena**

1. [10 poena] Na stolu se nalaze dve kutije. U prvoj kutiji su dve kuglice zelene boje i tri kuglice crvene boje, a u drugoj kutiji jedna kuglica zelene boje i dve kuglice crvene boje. Peca na slučajan način bira jednu kuglicu iz prve kutije i prebacuje je u drugu kutiju. Nakon prebacivanja kuglice, iz druge kutije Peca na slučajan način bira **odjednom** dve kuglice. Izračunati verovatnoću da će Peca izvući kuglice različitih boja. Ako je Peca iz druge kutije izvukao kuglice istih boja izračunati verovatnoću da je iz prve u drugu kutiju prebacio kuglicu zelene boje.
2. [10 poena] Novčić se baca tri puta i ako sva tri puta padne ista strana izvodi se još jedno bacanje novčića. Slučajna promenljiva  $X$  predstavlja broj palih pisama, a slučajna promenljiva  $Y$  broj izvedenih bacanja novčića.
  - a) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive  $(X, Y)$ .
  - b) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive  $X$  i njenu funkciju raspodele.
  - c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive  $Z = \min\{X, Y\}$ .
3. [10 poena] Slučajna promenljiva  $X$  je data funkcijom gustine  $\varphi_X(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ .
  - a) Izračunati konstantu  $a$ .
  - b) Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive  $X$ .
  - c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive  $Y = \max\{X, \frac{1}{2}\}$ . Da li je  $Y$  slučajna promenljiva neprekidnog tipa?
4. [10 poena] Neka su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne promenljive, pri čemu  $X$  ima eksponencijalnu  $\mathcal{E}(2)$  raspodelu, a  $Y$  uniformnu  $\mathcal{U}(1, 3)$  raspodelu. Odrediti raspodelu (funkciju gustine ili funkciju raspodele) slučajne promenljive  $Z = X - Y$ .