LPRS1 Bulova algebra v04 – oktobar 2024

Bulova algebra, inicirana 1854. godine od strane Džordža Bula u njegovoj knjizi "Istraživanje zakona mišljenja", predstavlja varijaciju elementarne algebre koja se razlikuje po vrednostima, operacijama i zakonima. Umesto algebre brojeva, Bulova algebra se odnosi na istinitosne vrednosti 0 i 1, ili ekvivalentno, na elemente skupa. Operacije koje se najčešće koriste su konjunkcija (·), disjunkcija (+) i negacija (- ili ‘), sa konstantama 0 i 1. Zakoni se definišu kao jednačine koje važe za sve vrednosti njihovih promenljivih, na primer, $x+(y\cdot x)=x$.

Primene Bulove algebre uključuju matematičku logiku, digitalnu logiku, teoriju skupova i statistiku.

Bulova algebra je inicirala razvojne tokove u apstraktnoj algebri i matematičkoj logici. U apstraktnom kontekstu, Bulova algebra je usavršena krajem 19. veka kada se ustalila njena interpretacija kakvu proučavamo i danas.

Tridesetih godina prošlog veka, proučavajući prekidačka kola, Klod Šenon je primetio da se pravila Bulove algebre mogu primeniti i u ovom kontekstu, uvodi prekidačku algebru kao način analize i projektovanja kola. Šenon je već imao na raspolaganju apstraktnu matematičku aparaturu, te je svoj prekidački sistem oblikovao kao dvoelementnu Bulovu algebru. Danas, u inženjerskoj praksi se pojmovi "prekidačka algebra" i "Bulova algebra" koriste podjednako. Efikasna implementacija Bulovih funkcija jedan je od osnovnih problema u projektovanju kombinacionih logičkih mreža. Moderni alati za automatski dizajn VLSI kola često se oslanjaju na efikasne prikaze Bulovih funkcija, poznatih kao (redukovani uređeni) binarni dijagrami odlučivanja (Binary Decision Diagrams - BDD) za sintezu logike i formalnu verifikaciju.

Logičke rečenice koje se mogu izraziti u klasičnom propozicionom računu imaju ekvivalentan izraz u Bulovoj algebri. Stoga se Bulova logika ponekad koristi kao termin za propozicioni račun. Bulova algebra nije dovoljna za iskazivanje logičkih formula sa kvantifikatorima. Iako razvoj matematičke logike nije sledio Bulov kocept, veza između njegove algebre i logike je kasnije čvrsto uspostavljena u okviru algebarske logike, koja takođe proučava algebarske sisteme mnogih drugih logika. Problem određivanja da li se promenljive date Bulove (iskazne) formule mogu postaviti na takav način da formula postane istinita naziva se problem zadovoljenja (Satisfiability Problem - SAT) Buleove logike i od velikog je značaja za teorijsku računarsku nauku, budući da je to prvi problem za koji je dokazano da je nedeterministički polinomijalno potpun (Nondeterministic Polynomial Complete NP-complete) NP-potpun. Ukratko to znači da rešenje može biti provereno, odnosno sračunato u polinomijalnom vremenu.

Osnovna svojstva i teoreme Bulove algebre

Aksiome Bulove algebre

r.br.	naziv	disjunkcija +	konjunkcija ·
1	Asocijativni zakon	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
2	Komutativni zakon	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
3	Distributivni zakon + prema · odnosno · prema +	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

4	Zakon neutralnog elementa	$x + 0 = x$	$x \cdot 1$
5	Zakon komplementarne dopune	$x + x' = 1$	$x \cdot x' = 0$
6	Različitost konstanti	0 /= 1	

Identiteti Bulove algebre

r.b.	naziv	disjunkcija +	konjunkcija ·
1	Zakoni idempotencije	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
2	Zakoni anihilacije	$x + 1 = 1, 1 + x = 1$	$x \cdot 0 = 0, 0 \cdot x = 0$
3	Zakoni apsorpcije	$x + (x \cdot y) = x$	$x \cdot (x + y) = x$
4	Jedinstvenost komplementa	$x \cdot y = 0$ i $x + y = 1$, tada $y = x'$	
5	Zakon involucije	$x'' = x$	
6	Komplement	$0' = 1, 1' = 0$	
7	De Morganove teoreme	$(x + y)' = x' \cdot y'$	$(x \cdot y)' = x' + y'$

Princip dualnosti

Svaki algebarski izraz izveden iz postulata Bulove algebre ostaje validan ako se operatori i elementi identiteta zamene. Ovo znači da se jedan izraz može dobiti iz drugog zamenom svakog elementa, tj. zamenom svake 0 sa 1, svake 1 sa 0, kao i zamenom operatora, tj. zamena (+) sa (·) i (·) sa (+). Ova važna osobina Bulove algebre naziva se princip dualnosti.

U inženjerskoj praksi poseban značaj imaju Bulove funkcije više promenljivih. Promenjlijve u njima uobičajeno indeksiramo x_1, x_2,...,x_n, odnosno posmatramo kao višedimenzione vektore. Ovakve funkcije još nazivamo kombinacionim mrežama.

Osnovni problem koji se postavlja pri projektovanju kombinacionih mreža je hardverska realizacija Bulovih funkcija. Da bi se realizovale proizvoljne Bulove funkcije koriste se elementarne fizičke komponente, logički elementi, koji realizuju elementarne Bulove funkcije.

Bulova ili prekidačka funkcija od n-promenljivih $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, predstavlja preslikavanje skupa Bn → B, gde je B= (0,1), a Bn označava skup od 2^n binarnih n-torki ili slogova. Očigledno je da je oblast definisanosti bilo koje prekidačke funkcije konačna. To omogućava da se svaka prekidačka funkcija može zadati u obliku tablice njenih vrednosti za svaku vrednost argumenata.

Skup vrednosti argumenata nazvaće se slogom i označiti sa $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i \in (0,1)$. Svakom slogu se pridružuje indeks sloga

$$i = \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \qquad x_j \in B$$

a znak sume predstavlja obično sabiranje. Indeks sloga predstavlja ekvivalentnu neoznačenu vrednost koju kodira dati slog.

Svaka prekidačka funkcija od n argumenata je definisana na 2^n slogova, jer se svakom slogu pridružuje binarni broj sa n cifarskih mesta, a takvih brojeva ima 2^n. Primera radi za n=2, prekidačka funkcija je definisana sa četiri sloga (0,0), (0,1), (1,0), (1,1).

Broj različitih prekidačkih funkcija je 2^{2^n} jer je svaka prekidačka funkcija definisana na 2^n slogova a nad svakim slogom može dobiti vrednost (0,1). To znači da se svakoj funkciji može pridružiti binarni broj sa 2^n cifarskih mesta, odnosno, takvih brojeva ima 2^{2^n} .

Iz gornjeg je očigledno da broj Bulovih funkcija brzo raste sa brojem nezavisno promenljivih. Primera radi:

n = 0	NBF = 2
n = 1	NBF = 4
n = 2	NBF = 16
n = 3	NBF = 256
n = 4	NBF = 65.536
n = 5	NBF = 4.294.967.296

gde je sa NBF predstavljen broj Bulovih funkcija.
Ukoliko je Bulova funkcija potpuno definisana $f(i) \in (0,1)$, u protivnom $f(i) \in (0,1,\times)$, što označava da data funkcija nije definisana u potpunosti, odnosno postoje slogovi nad kojima vrednost funkcije nije definisana, označava se sa x. U ovom slučaju se radi o nepotpuno definisanoj Bulovoj funkciji.
Usvaja se oznaka f^1 za skupove indeksa slogova na kojima f(i) ima vrednost 1, vrednost nula sa f^0, a $f^\times$ za skupove indeksa sa nedefinisanom vrednošću funkcije. Iz kombinacione tablice je očigledno da važi:

$$f1 \vee f0 \vee f\times = (0, 1, ..., 2^n-1)$$

Drugim rečima, kombinaciona tablica se može formirati zadavanjem vrednosti indeksa slogova i odgovarajućih vrednosti funkcija f(i) nad njima. U slučaju nepotpuno definisane funkcije neophodno je definisati bar dva skupa indeksa sa vrednošću f^1, f^0, $f^\times$, dok je za potpuno definisane funkcije dovoljan samo jedan skup indeksa (f^1 ili f^0).

Od interesa je posmatrati neke karakteristične Bulove funkcije.

Funkcija koja je identički jednaka nuli nad proizvoljnim slogom naziva se KONSTANTA NULA.
$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$

KONSTANTA JEDINICA je Bulova funkcija koja je identički jednaka jedinici za sve vrednosti argumenata.

$f(x_1, x_2,..., x_n) = 1$

Za hardversku realizaciju Bulovih funkcija od značaja su sledeće osobine, pomoću kojih se definiše svojstvo funkcionalne kompletnosti:
Očuvanje nule, podrazumeva vrednost funkcije nula, ukoliko su svi argumenti jednaki nuli $f(0, 0,...,0) = 0$.
Očuvanje jedinice, podrazumeva vrednost funkcije 1, ukoliko su svi argumenti jednaki 1 $f(1,1,...,1) = 1$.
Samodulanost, podrazumeva $f(x,y,z) = -f(-x,-y,-z)$.
Monotonost, podrazumeva da promena svakog argumenta sa 0 na 1 može uzrokovati promenu izlaza sa 0 na 1, ili ostanak izlaza u pređašnjem stanju, a nikad promenu sa 1 na 0.
Linearnost, podrazumeva ukoliko je vrednost funkcije 1, broj argumenata čija vrednost je 1 je paran; ukoliko je vrednost funkcije 0, broj argumenata čija vrednost je 1 je neparan.

Svaka Bulova funkcija dve promenljive može se napisati pomoću tih promenljivih i operacija konjunkcije, disjunkcije i negacije.

X_1	0011	naziv funkcije	analitički izraz	osobina				
X_2	0101			a	b	c	d	e
f0	0000	konstanta 0	0		×	×		
f1	0001	konjunkcija (I)	x_1x_2			×		×
f2	0010	zabrana po x_2	$x_1\overline{x_2}$		×	×	×	×
f3	0011	promenljiva x_1	x_1					
f4	0100	zabrana po x_1	$\overline{x_1}x_2$		×	×	×	×
f5	0101	promenljiva x_2	x_2					
f6	0110	logička nejednakost suma mod 2 (XOR) ekskluzivno ILI	$\overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}$		×	×	×	
f7	0111	Disjunkcija (ILI)	$x_1 + x_2$			×		×
f8	1000	Pirsova operacija (NILI)	$\overline{x_1 + x_2}$	×	×	×	×	×
f9	1001	logička jednakost	$\overline{x_1}\,\overline{x_2} + x_1x_2$	×		×	×	
f10	1010	negacija x_2	$\overline{x_2}$	×	×		×	
f11	1011	implikacija x_2 ka x_1	$x_1 + \overline{x_2}$	×		×	×	×
f12	1100	negacija x_1	$\overline{x_1}$	×	×		×	
f13	1101	implikacija x_1 ka x_2	$\overline{x_1} + x_2$	×		×	×	×
f14	1110	Šeferova operacija (NI)	$\overline{x_1x_2}$	×	×	×	×	×
f15	1111	konstanta 1	1	×		×		

Tabela 2.4: Bulove funkcije dva argumenta

Osobine bulovih funkcija predstavljenih u tabeli su sledeće:

a – $f(0, 0,...,0) \neq 0$
b – $f(1,1,...,1) \neq 1$
c – nesamodualna
d – nemonotona
e – nelinearna

Bulova funkcija ili skup Bulovih funkcija je funkcionalno kompletan ukoliko njegove funkcije zadovoljavaju svojstva neočuvanje nule, neočuvanje jedinice, nesamodulanost, nemonotonost i nelinearnost. Na primer skupovi {I, ILI, NE}, {I, NE}, {ILI, NE} su funkcionalno kompletni. Pomoću funkcija iz funkcionalno kompletnog skupa moguće je realizovati bilo koju proizvoljnu Bulovu funkciju.
Iz navedene tabele sagledavamo da samo dve funkcije, a to su logičko NI i logičko NILI zadovoljavaju: neočuvanje nule, neočuvanje jedinice, nesamodulanost, nemonotonost i nelinearnost. Skupovi {NI} i {NILI} jesu funkcionalno kompletni. Ovo te dve funkcije čini univerzalnim, odnosno pomoću bilo koje od njih kao gradivne funkcije moguće je realizovati bilo koju Bulovu funkciju. Ova činjenica motiviše osnovne gradivne komponente u realnim logičkim familijama, a to su dominantno logičko NI i logičko NILI.

Prekidačka funkcija od n argumenata koja dobija vrednost jedan samo na jednom slogu argumenta naziva se KONSTITUENTA JEDINICE. Iz definicije proizilazi da je broj različitih konstituenti jedinica jednak broju mogućih slogova, odnosno 2^n. Konstituente jedinice se obično označavaju slovom K_j^1 sa gornjim indeksom 1 radi oznake konstituente jedinice na slogu j, i predstavljaju se u obliku proizvoda svih argumenata, pri čemu, svaki argument ulazi u proizvod sa oznakom negacije ili bez njega.
Prekidačka funkcija od n argumenata koja dobija vrednost jednaku nuli samo na jednom slogu argumenata naziva se KONSTITUENTA NULA. Pošto je broj različitih slogova argumenata 2^n, broj različitih konstituenata nule je jednak 2^n. Konstituente nule se obično označavaju slovom K_i^0, gde je gornji indeks označava da se radi o konstituenti nule nad slogom sa indeksom i. Predstavljaju se u obliku zbira (disjunkcije) svih argumenata, pri čemu se svaki argument pojavljuje sa ili bez znaka negacije.

Kanonički i standardni oblici

Proizvoljna logička funkcija, kao što je prethodno rečeno, može se izraziti u oblicima zbira proizvoda, odnosno proizvod zbirova.

Član proizvod

U Bulovoj algebri, logički proizvod nekoliko promenljivih od kojih zavisi funkcija smatra se članom proizvodom. Drugim rečima, “I” funkcija ulazunih promenljivih se naziva član proizvod ili standardni proizvod. Promenljive u članu proizvodu mogu biti u direktnom ili komplementarnom obliku. Na primer, ABC′ je član proizvod.

Elementarni proizvod $(\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3...\hat{x}_n)$ u koji ulaze sve promenljive, naziva se potpunim proizvodom (minterm).

Zbir proizvoda

Logički zbir dva ili više članova logičkih proizvoda naziva se zbir proizvoda. To je u osnovi “ILI” operacija nad promenljivama koje su već povezane “I” operacijom. Na primer, Y=AB+BC+AC ili Y=A’B+BC+AC’ su izrazi zbira proizvoda. U nastavku teksta uvodi se za zbir proizvoda termin Disjunktivna Normalna Forma (DNF).

Član zbir

Logičko “ILI” nad promenljivima Bulove funkcije se naziva član zbir. Logički zbir nekoliko promenljivih od kojih zavisi funkcija smatra se članom zbirom. Promenljive u članu zbiru takođe mogu biti u direktnom ili komplementarnom obliku. Na primer, A+B+C′ je član zbir.
Elementarna suma u koju ulaze svih n-promenljivih Bulove funkcije naziva se potpunom sumom (maksterm).

Proizvod zbirova

Slično tome, logički proizvod dva ili više logičkih članova zbirova naziva se proizvod zbirova. To je “I” operacija nad promenljivama koje su već povezane “ILI” operacijom. Na primer, Y=(A+B+C)(A+B′+C)(A+B+C′) ili Y=(A+B+C)(A′+B′+C′) su izrazi proizvoda zbirova. U nastavku teksta uvodi se za proizvod zbirova termin Konjuktivna Normalna Forma (KNF).

Ukoliko se vratimo definiciji konstituente jedinice i nule, vidi se da one predstavljaju potpun proizvod, odnosno, potpunu sumu (respektivno). Bulova funkcija se može predstaviti u obliku Savršene Disjunktivne Normalne Forme (SDNF) ili forme u kojoj se ne pojavljuju dva identična potpuna proizvoda. Posmatranjem kombinacione tablice Bulove funkcije i imajući u vidu definiciju konstituente jedinice, Bulova funkcija od n argumenata može se predstaviti u obliku

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i K_i^1 = f_0 K_0^1 + f_1 K_1^1 + ... + f_{2^n-1} K_{2^n-1}^1$$

gde je f_i – vrednost funkcije na slogu i K_i^1 – konstituenta jedinice na datom slogu.

Funkcija fi i konstituenta K_i^1 su jednake jedinici na istim slogovima. Unese li se vrednost za f_i dobija se disjunkcija konstituenti koje su jednake jedinici na istim slogovima na kojima i funkcija f_i, a pošto je $0 \cdot x = 0$, $0 + x = x$, $1 \cdot x = x$ može se iz prethodnog izraza izostaviti f = 1. Dobija se:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} f_i K_i^1 = K_{k1}^1 + K_{k2}^1 + ... + K_{km}^1$$

Savršena disjunktivna normalna forma (SDNF) predstavlja disjunkciju (sumu) konstituenti jedinice, odnosno disjunkciju potpunih proizvoda onih slogova na kojima funkcija ima vrednost jedan.

Konstanta nula je jedina prekidačka funkcija koja nema savršenu disjunktivnu normalnu formu, iako se i ona može predstaviti pomoću operacije disjunkcije, konjunkcije i negacije. (Npr. $0 = x \cdot x'$).

Savršena Konjuktivna Normalna Forma (SKNF) predstavlja konjunkciju (proizvod) konstituenti nula (potpunih suma), koje su jednake nuli na istim slogovima na kojima i zadata funkcija. Posmatrajući kombinacionu tablicu i na osnovu definicije konstituente nula Bulova funkcija n-argumenata može se predstaviti na sledeći način:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \Pi_{i=0}^{2^n-1}(f_i + K_i^0) = (f_o + K_0^0)(f_1 + K_1^0)...(f_{2^n-1} + K_{2^n-1}^0)$$

Pošto je 1+x=1, 0+x =x, zamenom vrednosti f_i u gornji izraz mogu se izostaviti činioci kod kojih je f_i = 1, pa se ima

$$\Pi_{i=0}^{2^n-1}(f_i + K_i^0) = K_{k1}^0 K_{k2}^0 ... K_{km}^0$$

Savršena konjuktivna normalna forma je pogodna u slučajevima kad je broj promenljivih i broj indeksa na kojima ima vrednost 1 veliki tako da SDNF postaje suviše glomazna.

Pored SDNF, SKNF postoje i druge analitičke forme predstavljanja Bulovih funkcija. Tako, ako se umesto promenljivih (x_{j1}, x_{j2},..., x_{jk}) u elementarnoj sumi stavi proizvoljno izabrani elementarni proizvod, odnosno u elementarnom proizvodu proizvoljno izabrana elementarne suma, doći će do sledećih oblika:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = P_1+P_2+...+P_k$$

Ovo je Disjunktivna Forma (DNF) odnosno zbir proizvoda. Ukoliko P_1,..., P_n predstavlja potpune proizvode važi DNF = SDNF

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = S_1S_2...S_k$$

Ovo predstavlja Konjuktivnu Formu (KNF) odnosno proizvod suma. Ukoliko S_1,..., S_n predstavlja potpune sume, KNF = SKNF.

Standardni oblik

Standardni oblik predstave Bulove funkcije je zbir proizvoda DNF ili proizvod zbirova KNF. Primera radi, izrazi poput Y=AB+BC+AC ili Y=(A+B+C)(A+B'+C)(A+B+C') su standardni oblici.

Međutim, Bulove funkcije su ponekad izražene i u nestandardnim oblicima, kao što je F=(AB+CD)(A'B'+C'D'), što nije ni zbir proizvoda niti proizvod zbirova. Ipak, isti izraz se može konvertovati u standardni oblik koristeći različita svojstva Bulove algebre, na primer:

F=(AB+CD)(A'B'+C'D')=A'B'CD+ABC'D'

Praktičan značaj upotrebe minterma

Kao što je prethodno navedeno član proizvod koji sadrži svih n promenljivih funkcije, bilo u direktnom ili komplementarnom obliku, naziva se minterm. Svaki minterm se dobija "I" operacijom promenljivih u njihovom direktnom ili komplementarnom obliku. Za funkciju sa dve promenljive, moguće su četiri različite kombinacije, kao što su A'B', A'B, AB', i AB. Ovi članovi proizvodi nazivaju se osnovnim proizvodima ili standardnim proizvodima ili mintermima. U mintermu, promenljiva ima vrednost 1 ako je u direktnom ili nekomplementarnom obliku, dok ima vrednost 0 ako je u komplementarnom obliku.

Za funkciju sa tri promenljive, moguće je osam minterma, kao što je prikazano u sledećoj tabeli:

A	B	C	Minterm
0	0	0	A′B′C′
0	0	1	A′B′C
0	1	0	A′BC′
0	1	1	A′BC
1	0	0	AB′C′
1	0	1	AB′C
1	1	0	ABC′
1	1	1	ABC

Slika 1 Mintermi nad slogovima logičke funkcije

Ako funkcija ima n promenljivih, tada postoji 2^n mogućih minterma. Osnovna osobenost minterma je da ima vrednost 1 za samo jednu kombinaciju n ulaznih promenljivih, dok sve preostale 2^n-1 kombinacije imaju vrednost 0. Na primer, za funkciju sa tri promenljive, ako je A=0, B=1, C=1 (tj. ulazna kombinacija je 011), postoji samo jedan minterm A'BC koji ima vrednost 1, dok preostalih sedam kombinacija imaju vrednost 0.

Kanonički izraz zbira proizvoda

Kada se Bulova funkcija izrazi kao logički zbir svih minterma iz istinitosne tabele za koje je vrednost funkcije 1, to se naziva kanonički izraz zbira proizvoda. Isti izraz se može napisati u skraćenom obliku tako što se navedu odgovarajući kodovi minterma koji imaju vrednost 1, odnosno indeksi sloga 1. Na primer, ako kanonički izraz zbira proizvoda za funkciju sa tri promenljive F ima minterme A'BC, AB'C, i ABC', ovo se može izraziti kao zbir minterma čije indekse slogova 1 mapiramo u zagradu:

F(A,B,C)=Σ(3,5,6)

=m3+m5+m6

=A'BC+AB'C+ABC'

gde Σ(3,5,6) predstavlja sumu minterma koji odgovaraju indeksima sloga 3, 5 i 6.

Kanonički izraz zbira proizvoda Bulove funkcije može se dobiti sledećim postupkom:

1. Proveriti svaki član u datoj logičkoj funkciji. Zadržati ga ako je minterm, i nastaviti ispitivanje sledećeg člana na isti način.
2. Proveriti koje promenljive nedostaju u svakom proizvodu koji nije minterm. Ako u mintermu nedostaje promenljiva X, pomnožiti taj minterm sa (X+X').
3. Pomnožiti sve proizvode i odbaciti redundantne članove.

Slede primeri koji ilustruju gornji postupak.

Primer 1. Izraziti funkciju F(A,B) kao kanonički izraz proizvoda zbirova:

F(A,B)=A+B

Rešenje.

Proveriti koji makstermi nedostaju u izrazu.

Prvi član A zavisi od A, ali ne sadrži B. Dakle, dodati B+B':

A=A(B+B')=AB+AB'

Drugi član B zavisi samo od B, treba dodati A+A':

B=B(A+A')=AB+A'B

Širenjem dobijamo:

F(A,B)=AB+AB'+A'B

Primer 2. Izvesti kanonički oblik zbira proizvoda za sledeću funkciju.

F(A,B,C)=A+BC

Rešenje. Ovde nijedan od članova nije minterm. Data funkcija sadrži tri promenljive A, B i C. Promenljive B i C nedostaju u prvom članu izraza, dok promenljiva A nedostaje u drugom članu izraza. Stoga, prvi član treba pomnožiti sa (B+B') i (C+C'). Drugi član treba pomnožiti sa (A+A'). Ovo je prikazano u nastavku.

F(A,B,C)=A+BC

=A(B+B')(C+C')+BC(A+A')

=(AB+AB')(C+C')+ABC+A'BC

=ABC+AB'C+ABC'+AB'C'+ABC+A'BC

=ABC+AB'C+ABC'+AB'C'+A'BC(jer ABC+ABC=ABC)

Dakle, kanonički izraz zbira proizvoda za datu funkciju je

F(A,B,C)=ABC+AB'C+ABC'+AB'C'+A'BC.

Praktičan značaj upotrebe maksterma

Kao što je prethodno navedeno član zbir koji sadrži svih n promenljivih funkcije u direktnom ili komplementarnom obliku naziva se maksterm. Svaki maksterm se dobija “ILI” operacijom promenljivih u njihovom direktnom ili komplementarnom obliku. Četiri različite kombinacije su moguće za funkciju sa dve promenljive, kao što su A′+B′, A′+B, A+B′ i A+B. Ovi članovi se nazivaju standardni zbirovi ili makstermi. Treba imati na umu da će u makstermu promenljiva imati vrednost 0 ako je u direktnom obliku, dok sadrži vrednost 1 ako je u komplementarnom obliku. Na ovaj način korespondencija makstema i indeksa sloga 0 ostaje konzistentna.

Kao i mintermi, za funkciju sa tri promenljive, takođe je moguće osam maksterma, kao što je prikazano u sledećoj tabeli.

A	B	C	Maxterm
0	0	0	$A + B + C$
0	0	1	$A + B + C'$
0	1	0	$A + B' + C$
0	1	1	$A + B' + C'$
1	0	0	$A' + B + C$
1	0	1	$A' + B + C'$
1	1	0	$A' + B' + C$
1	1	1	$A' + B' + C'$

Slika 2 Makstermi nad slogovima logičke funkcije

Dakle, ako je broj promenljivih n, tada je mogući broj maksterma 2^n. Osnovna osobenost maksterma je da ima vrednost 0 za samo jednu kombinaciju n ulaznih promenljivih, dok za sve preostale 2^n-1 kombinacije imaju vrednost 1. To znači, za primer sa tri promenljive, ako je A=1, B=1, C=0 (tj. za ulaznu kombinaciju 110), postoji samo jedna kombinacija A′+B′+C koja ima vrednost 0, dok ostalih sedam kombinacija imaju vrednost 1.

Kanonički izraz proizvoda zbirova

Kada se Bulova funkcija izrazi kao logički proizvod svih maksterma iz istinitosne tabele za koje je vrednost funkcije 0, to se naziva kanonički izraz proizvoda zbirova. Isti izraz se može izraziti u skraćenom obliku tako što se navedu odgovarajući indeksi sloga 0 za maksterme koji imaju vrednost 0. Na primer, ako kanonički izraz proizvoda zbirova za funkciju sa tri promenljive FF ima maksterme A+B+C, A+B′+C, i A′+B+C′, ovo se može izraziti kao proizvod decimalnih kodova koji odgovaraju ovim makstermima:

F(A,B,C)=Π(0,2,5)

=M0M2M5

=(A+B+C)(A+B′+C)(A′+B+C′)

gde Π(0,2,5) predstavlja proizvod maksterma koji odgovaraju indeksima sloga 0 kodovima 0, 2 i 5.

Kanonički izraz proizvoda zbirova Bulove funkcije može se dobiti sledećim postupkom:

1. Proveriti svaki član u datoj logičkoj funkciji. Zadržati ga ako je maksterm, i nastaviti ispitivanje sledećeg člana na isti način.
2. Proveriti koje promenljive nedostaju u svakom članu zbiru koji nije maksterm. Ako u makstermu nedostaje promenljiva X, dodati taj maksterm sa (X+X′).
3. Proširiti izraz koristeći svojstva i postulate kao što je ranije opisano i odbaciti redundantne članove.

Slede primeri koji ilustruju gornji postupak.

Primer 3. Realizovati kanonički oblik proizvoda zbirova za sledeću funkciju.

F(A,B,C)=(A+B′)(B+C)(A+C′)

Rešenje. U gornjem izrazu sa tri promenljive, C nedostaje u prvom članu, A nedostaje u drugom članu, a B nedostaje u trećem članu. Stoga, treba dodati CC′ prvom članu, AA′ drugom članu, i BB′ trećem članu. Ovo je prikazano u nastavku.

F(A,B,C)=(A+B′)(B+C)(A+C′)

=(A+B′+0)(B+C+0)(A+C′+0)

=(A+B′+CC′)(B+C+AA′)(A+C′+BB′)

=(A+B′+C)(A+B′+C′)(A+B+C)(A′+B+C)(A+B+C′)(A+B′+C′) (koristeći distributivno svojstvo, pošto X+YZ=(X+Y)(X+Z))

=(A+B′+C)(A+B′+C′)(A+B+C)(A′+B+C)(A+B+C′) (jer (A+B′+C′)(A+B′+C′)=A+B′+C′)

Dakle, kanonički izraz proizvoda zbirova za data funkciju je:

F(A,B,C)=(A+B′+C)(A+B′+C′)(A+B+C)(A′+B+C)(A+B+C′)

Primer 4. Izvesti kanonički oblik proizvoda zbirova za sledeću funkciju.

F(A,B,C)=A+B′C

Rešenje. U gornjem izrazu sa tri promenljive, funkcija je data u obliku zbira proizvoda. Prvo, funkcija treba da se izmeni u oblik proizvoda zbirova primenom distributivnog zakona, kao što je prikazano u nastavku.

F(A,B,C)=A+B′C

=(A+B′)(A+C)

Sada, u gornjem izrazu, C nedostaje u prvom članu, a B nedostaje u drugom članu. Stoga, treba dodati CC′ prvom članu i BB′ drugom članu, kao što je prikazano u nastavku.

F(A,B,C)=(A+B′)(A+C)

=(A+B′+CC′)(A+C+BB′)

=(A+B′+C)(A+B′+C′)(A+B+C)(A+B′+C)(koristec´i distributivno svojstvo, posˇto X+YZ=(X+Y)(X+Z))

=(A+B′+C)(A+B′+C′)(A+B+C) (jer (A+B′+C)(A+B′+C)=A+B′+C)

Dakle, kanonički izraz proizvoda zbirova za datu funkciju je:

F(A,B,C)=(A+B′+C)(A+B′+C′)(A+B+C).

Izvođenje izraza zbira proizvoda (DNF) iz istinitosne tabele

Izraz zbira proizvoda (DNF) Bulove funkcije može se dobiti iz njene istinitosne tabele sabiranjem ili izvođenjem "ILI" operacije nad članovima proizvodima koji odgovaraju kombinacijama koje sadrže vrednost funkcije 1, odnosno indeksima sloga 1. U proizvodnim članovima ulazne promenljive se pojavljuju ili u direktnom (nekomplementarnom) obliku ako sadrže vrednost 1, ili u komplementarnom obliku ako imaju vrednost 0.

Sledi primer istinitosne tabele, za funkciju Y sa tri ulaza. Ovde je izlazna vrednost Y jednaka 1 za ulazne kombinacije 010, 100, 101 i 110, a njihovi odgovarajući članovi proizvodi su A′BC′, AB′C′, AB′C, i ABC′ redom.

Inputs			*Output*	*Minterm*	*Maksterm*
A	*B*	*C*	*Y*		
0	0	0	0		A + B + C
0	0	1	0		A + B + C′
0	1	0	1	A′BC′	
0	1	1	0		A + B′ + C′
1	0	0	1	AB′C′	
1	0	1	1	AB′C	
1	1	0	1	ABC′	
1	1	1	0		A′ + B′ + C′

Slika 3 Bulova funkcija sa odgovarajućim minterm i maksterm vrednostima

Konačni izraz zbira proizvoda (DNF) za izlaz Y dobijen je sabiranjem ili izvođenjem "ILI" operacije na četiri člana proizvoda, kao što je prikazano u nastavku:

Y=A′BC′+AB′C′+AB′C+ABC′

Postupak izvođenja izlaznog izraza u obliku DNF iz istinitosne tabele može se sažeti na sledeći način:

1. Formirati član proizvod za svaku kombinaciju ulaza u tabeli, koja sadrži izlaznu vrednost 1 (odnosno odgovara indeku sloga 1).
2. Svaki član proizvod se sastoji od ulaznih promenljivih u direktnom ili komplementarnom obliku. Ako je ulazna promenljiva 0, pojavljuje se u komplementarnom obliku, a ako je ulazna promenljiva 1, pojavljuje se u direktnom obliku.
3. Za konačni DNF izraz izlaza, svi članovi proizvodi se povezuju “ILI” operacijom.

Izvođenje izraza proizvoda zbirova (KNF) iz istinitosne tabele

Kao što je objašnjeno gore, izraz proizvoda zbirova (KNF) Bulove funkcije može se dobiti iz njene istinitosne tabele sličnim postupkom. Ovde se izvodi “I” operacija na članovima zbirovima koji odgovaraju indeksima sloga 0. U članovima zbirovima ulazne promenljive se pojavljuju ili u direktnom (nekomplementarnom) obliku ako sadrže vrednost 0, ili u komplementarnom obliku ako imaju vrednost 1.

Analizirati istu istinitosnu tabelu kao što je prikazana na Slici 3, za funkciju Y sa tri ulaza. Izlazna vrednost Y jednaka je 0 za vrednosti ulaza 000, 001, 011 i 111, a njihovi odgovarajući zbirni članovi su A+B+C, A+B+C′, A+B′+C′ i A′+B′+C′ redom.

Konačni izraz proizvoda zbirova (KNF) za izlaz Y dobijen je izvođenjem “I” operacije na četiri zbira članova:

Y=(A+B+C)(A+B+C′)(A+B′+C′)(A′+B′+C′)

Uopšteno, postupak izvođenja izlaznog izraza u obliku KNF iz istinitosne tabele svodi se na sledeće:

Formirati zbir za svaku kombinaciju ulaza u tabeli, koja daje izlaznu vrednost 0.

Svaka promenlijiva koja učestvuje u ovakvom zbiru, pojavljuje se u direktnom ili komplementarnom obliku. Ako je vrednost ulazne promenljive 1, pojavljuje se u komplementarnom obliku, a ako je ulazna promenljiva 0, pojavljuje se u diretknom obliku.

Konačni KNF izraz, sačinjavaju svi članovi zbirovi povezani “I” operacijom.

Konverzija između kanoničkih oblika

Iz gornjeg primera može se primetiti da je komplement funkcije izražene kao zbir proizvoda (DNF) jednak zbiru proizvoda ili zbiru minterma koji nedostaju iz izvorne funkcije. To je zato što je izvorna funkcija izražena onim mintermima koji čine da funkcija bude jednaka 1, dok je njen komplement 1 za one minterme čije su vrednosti 0. Prema istinitosnoj tabeli datoj u Slici 3:

$F(A,B,C)=\Sigma(2,4,5,6)$
$=m2+m4+m5+m6$
$=A'BC'+AB'C'+AB'C+ABC'$.

Ova funkcija ima komplement koji se može izraziti kao:

$F'(A,B,C)$
$=(0,1,3,7)$
$=m0+m1+m3+m7$.

Sada, ako uzmemo komplement F' koristeći De Morganovu teoremu, dobijamo F kao:

$F(A,B,C)=(m0+m1+m3+m7)'$
$=m0'm1'm3'm'7$
$=M0M1M3M7$
$=\Pi(0,1,3,7)$
$=(A+B+C)(A+B+C')(A+B'+C')(A'+B'+C')$.

Poslednja konverzija proizlazi iz definicije minterma i maksterma, kao što je prikazano u tabelama sa Slika 1 i 2. Jasno se može primetiti da važi odnos $m'j=Mj$.

To jest, maksterm sa indeksom j je komplement minterma sa istim indeksom j, i obrnuto. Ovaj primer ilustruje konverziju između funkcije izražene u obliku zbira proizvoda (DNF) i njenog ekvivalentnog izraza u obliku proizvoda zbirova (maksterma). Sličan primer može pokazati konverziju između proizvoda zbirova (KNF) i njegovog ekvivalentnog zbira minterma.

Uopšteno, za konverziju iz jednog kanoničkog oblika u drugi, potrebno je zameniti simbole Σ i Π, i navesti indekse slogova koji nedostaju iz izvorne forme.

Pojednostavljenje Bulovih izraza

Kada se Bulov izraz implementira pomoću logičkih kola, svaka promenljiva u funkciji označena je kao ulaz u kolo. Promenljiva može biti direktno uvedena ili inverzno, odnosno komplementirano. Minimizacija broja promenljivih i broja članova vodi ka manje složenim kolima, kao i manjem broju kola, što bi trebalo biti cilj inženjera. Postoji nekoliko metoda za minimizaciju Bulovih funkcija. Sledi pojednostavljenje ili minimizacija složenih algebarskih izraza uz pomoć postulata i teorema Bulove algebre.

Primer 5. Pojednostaviti Bulovu funkciju $F=AB+BC+B'C$.

Rešenje.

$F=AB+BC+B'CF$

$=AB+C(B+B')$

$=AB+C$

Primer 6. Pojednostaviti Bulovu funkciju $F=A+A'B$.

Rešenje.

$F=A+A'B$F

$=(A+A')(A+B)$

$=A+B$

Primer 7. Pojednostaviti Bulovu funkciju $F=A'B'C+A'BC+AB'$.

Rešenje.

$F=A'B'C+A'BC+AB'$F

$=A'C(B'+B)+AB'$

$=A'C+AB'$

Primer 8. Pojednostaviti Bulovu funkciju $F=AB+(AC)'+AB'C(AB+C)$.

Rešenje.

$F=AB+(AC)'+AB'C(AB+C)$F

$=AB+A'+C'+AB'C\cdot AB+AB'C\cdot C$

$=AB+A'+C'+0+AB'C$

$=ABC+ABC'+A'+C'+AB'C$

$=AC(B+B')+C'(AB+1)+A'$

$=AC+C'+A'$($B+B'=1$ i $AB+1=1$)

$=AC+(AC)'$

$=1$

Metoda Karnoovih mapa (1953.) je opisana u ppt dokumentu i obrađena detaljno na predavanjima.

Metoda Quine McCluskey objavljena 1952, odnosno 1956. dominirala je u praktičnim problemima minimizacije sve do kraja 80-ih godina dvadesetog veka.

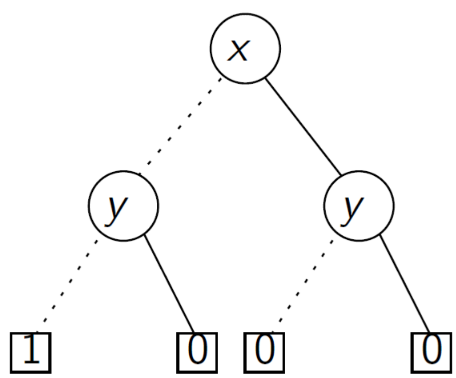
Binarno stablo odlučivanja BDD

Nakon objavljivanja rezultata istraživanja pod naslovom "Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation" u časopisu IEEE Transactions on Computers 1986. godine, metoda pod nazivom Binarno stablo odlučivanja, odnosno na engleskom Binary Decision Diagram – BDD postaje najčešća tehnika minimizacije Bulovih funkcija u računarskim implementacijama. Većina savremenih alata za sintezu i verifikaicju digitalnih sistema, kao što je i IntelFPGA Quartus / Modelsim / Questa koristi neke od naprednih varijacija BDD metode.

Formira se graf sa korenom postavljenim na vrhu koji se grana naniže.

Iz svakog čvora grafa vode se dve grane, uobičajeno puna linija označava granu koja odgovara vrednosti 1 promenljivoj iz datog čvora i usmerena je ako je moguće udesno. Isprekidana linija označava granu koja odgovara vrednosti 0 iste promenljive i usmerena je po mogućstvu ulevo. Vrednost funkcije odgovara vrednosti terminalnog čvora (terminala) na kraju stabla, obično označen u četvrtastom polju. Iz njega nema izlaznih grana.

Za funkciju $f = \overline{x} \cdot \overline{y}$ binarno stablo odlučivanja ilustrovano je na slici niže.



Slika 4 Primer BDD-a (binarnog stabla odlučivanja)

Formalno je bitno uvesti i termin binarni dijagram odlučivanja, koji za razliku od prethodno opisanog stabla može u čvorovima imati više od jedne ulazne grane. Binarni dijagram odlučivanja zapravo je usmereni aciklični graf. U inženjerskoj praksi oba termina, dijagram i stablo najčešće referenciraju dijagram.

Svojstva binarnog dijagrama odlučivanja slede:

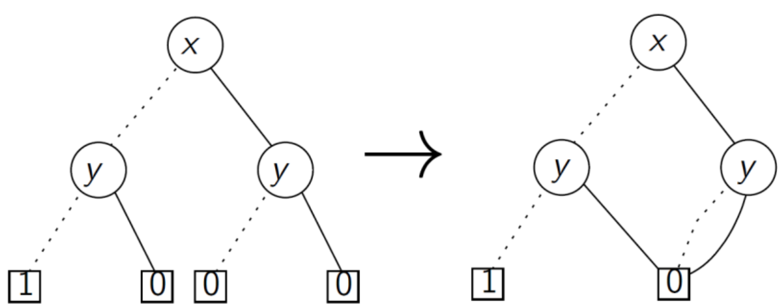
- Inicijalni čvor (koren) je jedinstven.
- Svi neterminalni čvorovi označavaju Bulove promenljive.

- Svi terminali označeni su kao 0 ili 1. Ovde podrazumevamo da su analizirane funkcije definisane nad svim indeksima sloga. I nepotpuno definisane funkcije mogu se predstavljati BDD-om, ali to izlazi iz okvira ovog kursa.
- Sve grane koje odgovaraju vrednosti 0 čvora iz kog izlaze označavaju se isprekidanom linijom. Grane koje odgovaraju vrednosti 1 označavaju se punom linijom.
- Svi neterminalni čvorovi imaju jedan izlaz koji odgovara vrednosti 0 i jedan koji odgovara vrednosti 1.

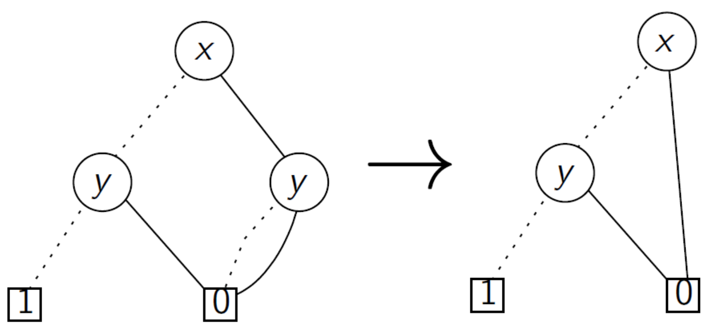
Minimizacija (redukcija) BDD

- Uklanjanje višestrukih terminala:
  Ako BDD sadrži više od jednog terminalnog čvora sa vrednošću 0, preusmeriti sve grane koje vode ka 0-terminalima na samo jedan od njih. Na isti način postupiti i sa 1-terminalima.
- Uklanjanje suvišnih testova:
  Ako obe izlazne grane čvora n vode ka istom čvoru m, ukloniti čvor n i preusmeriti sve ulazne grane koje vode ka njemu direktno na čvor m.
- Uklanjanje duplikata neterminalnih čvorova:
  Ako dva različita čvora n i m predstavljaju korene istovetnih podstruktura (pod-BDD-ova), ukloniti jedan od njih, recimo čvor m, i preusmeriti sve njegove ulazne grane na preostali čvor n.

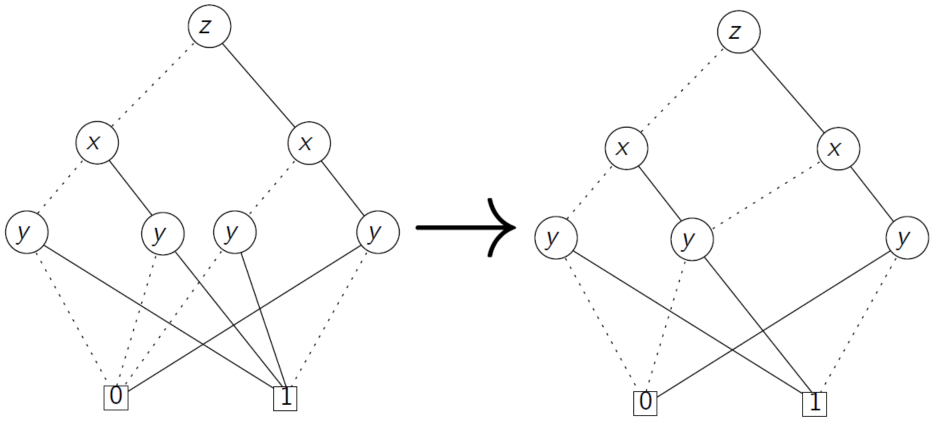
BDD je minimizovam (redukovan) ukoliko korišćenjem navedenih operacija redukcije nije moguće dalje uprošćavanje.



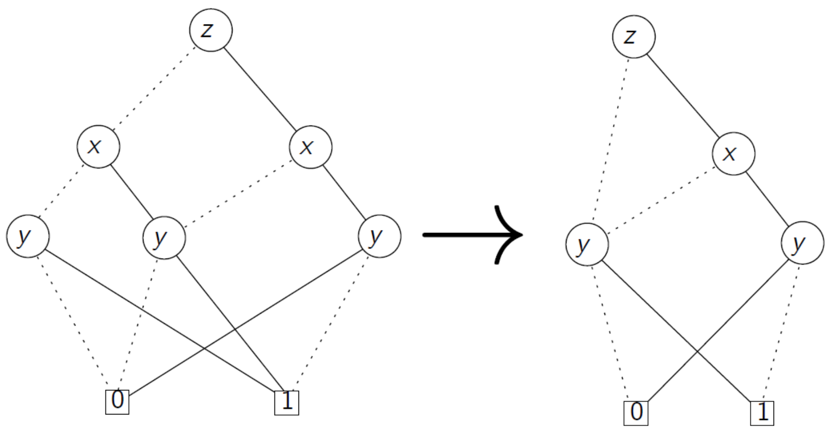
Slika 5 Uklanjanje višestrukih terminala



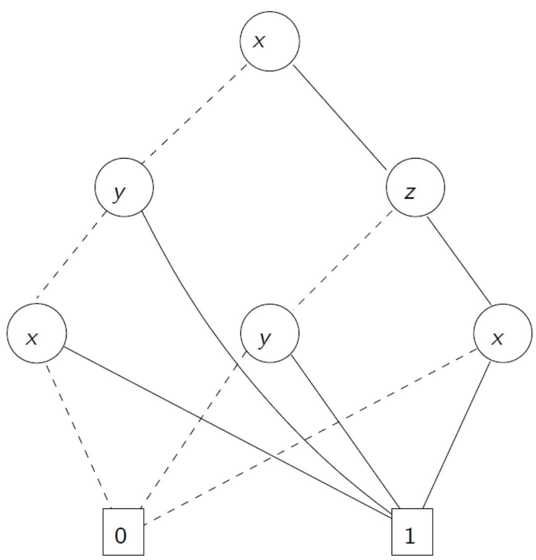
Slika 6 Uklanjanje suvišnih testova



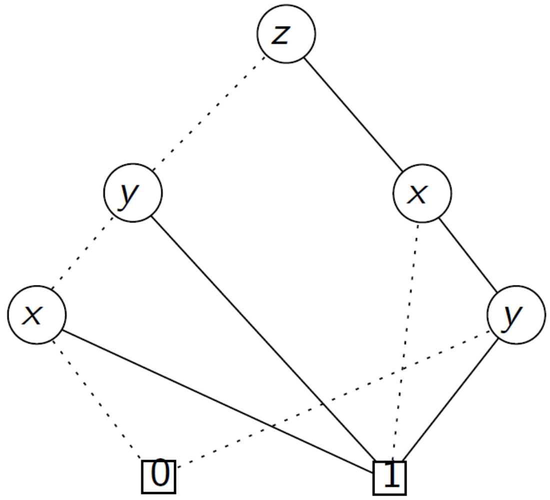
Slika 7 Uklanjanje čvorova neterminala duplikata



Slika 8 Uklanjanje čvorova duplikata i suvišnih testova



Slika 9 Promenljiva se može pojaviti nanekoj putanji više puta



Slika 10 Redosled pojave promenljivih na nekoj putanji kroz BDD ne mora biti fiksan

Uređeni BDD

Neka je [x_1, x_2…,x_n] uređena lista promenljivih bez ponavljanja.

Binarno stablo odlučivanja “**B**“ ima uređenje [x_1, x_2…,x_n] ukoliko:

Sve promenljive označene u stablu “**B**“ postoje u listi [x_1, x_2…,x_n] i

Ako se čvor x_j nalazi nakon čvora x_i na nekoj putanji u stablu “**B**“, tada je j>i.

Uređeni BDD (Ordered Binary Decision Diagram - OBDD) je BDD koji ima neko uređenje liste promenljivih.

Uređenja dva stabla “**B**“ i “**B’**“ su kompatibilna ako ne postoje promenljive x i y takve da:

x dolazi pre y u uređenju za “**B**“, i

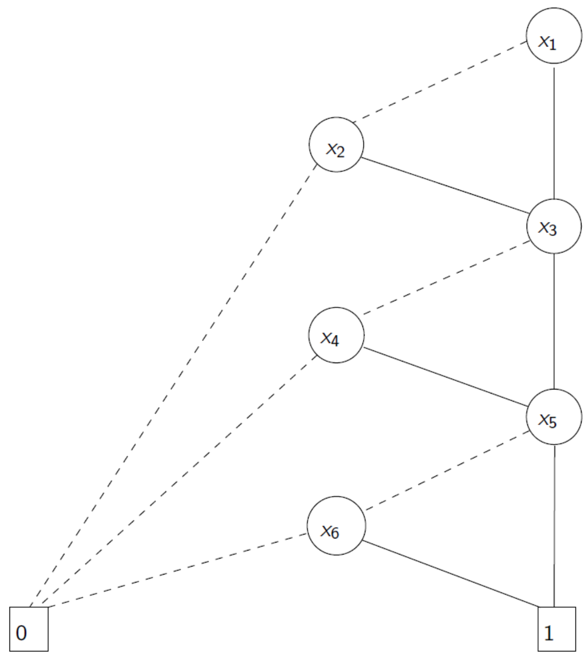
y dolazi pre x u uređenju za “**B’**“.

Teorema: Minimizovani OBDD (Reduced Order Binary Decision Diagram - ROBDD) koji predstavlja datu funkciju f je jedinstven.
Drugim rečima ista teorema glasi: Ako su “**B**“ i “**B’**“ dva ROBDD-a sa kompatibilnim uređenjima promenljivih, koji predstavljaju istu Bulovu funkciju, tada imaju identičnu strukturu.

Ovde treba imati na umu da drugačije uređenje implicira drugačiju ROBDD strukturu.

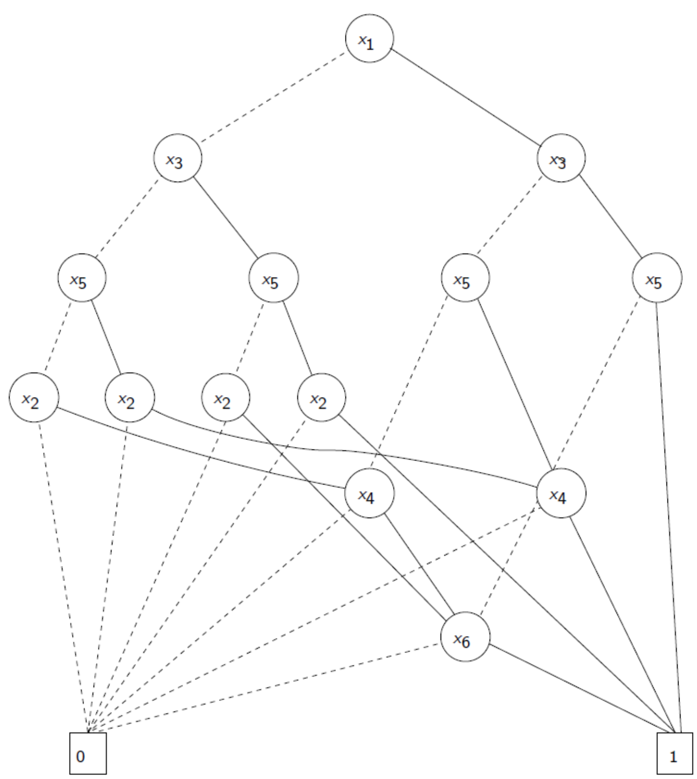
Uticaj uređenja promenlijivih na veličinu ROBDD-a

Posmatrajmo Bulovu funkciju f =$(x_1+x_2)\cdot(x_3+x_4)\cdots(x_{2n-1}+x_{2n})$
Za n=3 sa uređenjem [x_1, x_2, x_3, x_4 , x_5, x_6] dobija se ROBDD sa 2n+2 čvora.



Slika 11 Uticaj uređenja na veličinu BDD-a

Ukoliko uredimo listu promenlijivih tako da prvo u rastućem nizu postavimo neparne indekse, a zatim parne [x_1, x_2, x_5, x_2 , x_4, x_6] dobija se ROBDD sa $2^{(n+1)}$ čvorova.



Slika 12 Nepovoljno uređenje formira BDD sa više čvrova