

Pregled prebrojavanja u kombinatorici

Marko Gordić - IN 37/2023

Osnovni principi prebrojavanja

Princip bijekcije

Ako između konačnih skupova A i B postoji bijektivno preslikavanje (svakom elementu A odgovara tačno jedan element B i obrnuto), tada skupovi imaju isti broj elemenata:

$$|A| = |B|$$

Princip zbira

Ako su A_1, A_2, \dots, A_n međusobno disjunktne konačne skupove, tada je ukupan broj elemenata njihovog unije jednak zbiru brojeva elemenata svakog skupa:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

Princip proizvoda

Ako se bira po jedan element iz svakog od n konačnih skupova A_1, A_2, \dots, A_n , tada je ukupan broj načina izbora jednak proizvodu brojeva elemenata svakog skupa:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

Permutacije

Permutacija bez ponavljanja

Redosled svih n elemenata iz skupa sa n elemenata. Broj permutacija je:

$$P(n) = n!$$

Ako biramo redosled za 3 osobe, imamo $3! = 6$ mogućnosti.

Permutacija sa ponavljanjem

Za n elemenata, od kojih se neki ponavljaju k_1, k_2, \dots, k_r puta, broj permutacija je:

$$P(n; k_1, k_2, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

Ako imamo 3 slova "AAB", broj permutacija je $\frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$.

Varijacije

Varijacije bez ponavljanja

Redosled uredjenog izbora k elemenata od n elemenata (bez ponavljanja). Broj varijacija je:

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ako biramo 2 osobe od 5 za predsednika i potpredsednika, imamo $V(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ mogućnosti.

Varijacije sa ponavljanjem

Redosled uredjenog izbora k elemenata od n elemenata (sa ponavljanjem). Broj varijacija je:

$$V'(n, k) = n^k$$

Ako biramo 2 kuglice od 3 boje (sa ponavljanjem), imamo $3^2 = 9$ mogućnosti.

Kombinacije

Kombinacije bez ponavljanja

Neuredjen izbor k elemenata od n elemenata (bez ponavljanja). Broj kombinacija je:

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Ako biramo 2 osobe od 5 za tim, imamo $\binom{5}{2} = 10$ mogućnosti.

Kombinacije sa ponavljanjem

Neuredjen izbor k elemenata od n elemenata (sa ponavljanjem). Broj kombinacija je:

$$C'(n, k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Ako biramo 2 slatkiša od 3 vrste (sa ponavljanjem), imamo $\binom{3+2-1}{2} = 6$ mogućnosti.

Polinomski koeficijenti i raspodela elemenata

Polinomski koeficijent

Broj načina da se n elemenata raspodeli u k grupa od po n_1, n_2, \dots, n_k elemenata:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Ako raspodeljujemo 5 kuglica u grupe od 2, 2 i 1, imamo $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$ mogućnosti.

Kombinacije sa raspodelom

Broj načina da se n identičnih elemenata rasporedi u k različitih kutija:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n! \cdot (k-1)!}$$

Ako raspodeljujemo 4 kuglice u 2 kutije, imamo $\binom{4+2-1}{2-1} = 5$ mogućnosti.