Granične teoreme

13. jun 2025.

Nejednakost Čebiševa

$x_i \geq 0$ $\quad$ $\varphi_X(x) \neq 0$ $\quad$ $(a,b) \subset [0,\infty)$

Teorema

Neka je X nenegativna slučajna promenljiva, tj. $X(\omega) \geq 0$, *za svako* $\omega \in \Omega$, *za koju postoji* $E(X^2)$. *Za svako* $\epsilon > 0$ *važi*

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X^2)}{\epsilon^2}.$$

Sledeći oblik nejednakosti Čebiševa, koji važi za svaku slučajnu promenljivu X za koju postoji $D(X)$, ima veliku primenu u praktičnim problemima

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2},$$

$\epsilon > 0$.

Nejednakost Čebiševa

Ako je X diskretnog tipa, imamo

$$\epsilon^2 P(X \geq \epsilon) = \epsilon^2 \sum_{i:x_i \geq \epsilon} p(x_i) = \sum_{i:x_i \geq \epsilon} \epsilon^2 p(x_i)$$

$$\leq \sum_{i:x_i \geq \epsilon} x_i^2 p(x_i) + \sum_{i:x_i < \epsilon} x_i^2 p(x_i) = \sum_i x_i^2 p(x_i) = E(X^2).$$

Ako je X neprekidnog tipa, tada

$$\epsilon^2 P(X \geq \epsilon) = \epsilon^2 \int_{x \geq \epsilon} \varphi_X(x)dx = \int_{x \geq \epsilon} \epsilon^2 \varphi_X(x)dx$$

$$\leq \int_{x \geq \epsilon} x^2 \varphi_X(x)dx + \int_{x < \epsilon} x^2 \varphi_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_X(x)dx = E(X^2).$$

$\square$

$X : B(n, p)$

$R_X = \{0, 1, \ldots, n\}$

$k \in R_X$ $\qquad p(k) = P(X = k)$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

T $\quad n \to \infty$

$\quad p \to 0$

$\quad n \cdot p \to \lambda$

Бин. сл. пром.

апрокс. Пуасонова сл. пр

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$\overline{\quad}$

$np < 10$

Normalna raspodela je "granična forma" mnogih raspodela.

Prva od teorema iz ove klase daje aproksimaciju binomne slučajne promenljive normalnom.

Teorema (Muavr-Laplasova teorema)

Neka je X binomna $\mathcal{B}(n,p)$ slučajna promenljiva. Za svako $x \in \mathbb{R}$ kad $n \to \infty$ je

$$P\left(\frac{X-np}{\sqrt{npq}} < x\right) \to \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}^{\Phi(x)} \text{ kad } n \to \infty.$$

$E(X) = np$

$D(X) = npq$

$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$

Centralne granične teoreme

Teorema

Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom za koju postoji disperzija. Tada za svako $x \in \mathbb{R}$ je

$$P\left(\frac{\sum\limits_{r=1}^{n} X_r - E(\sum\limits_{r=1}^{n} X_r)}{\sqrt{D(\sum\limits_{r=1}^{n} X_r)}} < x\right) \to \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\Phi(x)}, \quad \textit{kad} \;\; n \to \infty.$$

Obratiti pažnju da imamo nezavisnost slučajnih promenljivih i one imaju istu raspodelu!

Muavr-Laplasova teorema je specijalan slučaj navedene teoreme jer se binomna $\mathcal{B}(n, p)$ raspodela može napisati kao zbir Bernulijevih raspodela sa istim parametrom p.