

## Slučajni procesi

---

1. Neka su  $U$  i  $V$  nezavisne slučajne promenljive sa normalnom raspodelom  $\mathcal{N}(0, 1)$  i neka je  $X_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  slučajni proces definisan sa  $X_t = e^t U + t^2 V$ . Naći sledeće karakteristike slučajnog procesa  $X_t$ :
  - (a) matematičko očekivanje,
  - (b) autokovariansnu funkciju,
  - (c) disperziju.
2. Neka su  $U$  i  $V$  nezavisne slučajne promenljive,  $U$  sa binomnom  $\mathcal{B}(5, \frac{1}{5})$  raspodelom, a  $V$  sa uniformnom  $\mathcal{U}(1, 3)$  raspodelom. Naći srednju vrednost, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa

$$X_t = U + t V^t, \quad t \in [0, \infty).$$

3. Neka su  $U : \mathcal{N}(1, 2)$  i  $V : \mathcal{P}(3)$  nezavisne slučajne promenljive i neka je  $X_t$ ,  $t \in [0, \infty]$  slučajni proces definisan sa:

$$X_t = e^t U + t^2 V.$$

- (a) Naći srednju vrednost, autokovariansnu funkciju i disperziju slučajnog procesa  $X_t$ .
  - (b) Naći srednju vrednost slučajnog procesa  $Y_t = \int_0^t X_s ds$ .
4. Neprekidne i nezavisne slučajne promenljive  $X$  i  $Y$  su date svojim gustinama raspodele:

$${}_X x = \begin{cases} x & , \quad x \in (0, 1] \\ 2 - x & , \quad x \in (1, 2] \\ 0 & , \quad x \notin (0, 2] \end{cases} \quad {}_Y y = \begin{cases} y - 3 & , \quad y \in (3, 4] \\ 5 - y & , \quad y \in (4, 5] \\ 0 & , \quad y \notin (3, 5] \end{cases},$$

i definisan je slučajni proces  $U_t = atX + btY$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , gde su  $a$  i  $b$  realni parametri.

- (a) Odrediti srednju vrednost, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa  $U_t$ .
- (b) Za koje vrednosti parametara  $a$  i  $b$  je proces stacionaran?

5. (**Slučajne harmonijske oscilacije**) Harmonijski oscilator generiše signal dat funkcijom  $X_t = A \cos(wt + B)$ ,  $t \in [0, \infty)$  gde je  $w$  neslučajna ciklična frekvencija,  $A$  slučajna amplituda sa gustinom  $\varphi_A(a)$ ,  $a > 0$  a  $B$  slučajna oscilacija sa uniformnom  $\mathcal{U}(-\pi, \pi)$  raspodelom. Amplituda i oscilacija su nezavisne slučajne promenljive.
- (a) Ispitati slabu stacionarnost slučajnog procesa  $X_t$ .
  - (b) Ispitati ergodičnost po matematičkom očekivanju.
6. Slučajne promenljive  $X$  i  $Y$  su nezavisne, pri čemu je gustina slučajne promenljive  $X$
- $$\varphi_X x = \begin{cases} \frac{4}{3} - x^2 & , \quad x \in (0, 1] \\ 0 & , \quad x \notin (0, 1] \end{cases},$$
- a slučajna promenljiva  $Y$  ima uniformnu  $\mathcal{U}(0, \pi)$  raspodelu. Odrediti matematičko očekivanje, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa  $U_t = X \cos(t - Y)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
7. Neka je  $U : \mathcal{E}(1)$  slučajna promenljiva i neka je  $X_t, t \in \mathbb{R}$  slučajni proces definisan sa  $X_t = e^t U$ . Naći raspodele prvog i drugog reda slučajnog procesa  $X_t$ .
8. Dat je slučajni proces  $X_n = X + nY, n \in \mathbb{N}$ , gde su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne promenljive date raspodelama:
- $$X : \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$
- (a) Napisati skup stanja slučajnog procesa  $X_n$ .
  - (b) Naći raspodelu prvog reda za zasek  $X_2$ .
  - (c) Naći raspodelu drugog reda za par zaseka  $X_0$  i  $X_2$ .
  - (d) Naći matematičko očekivanje  $m_X(n)$  i korelacionu funkciju  $R_X(n, k)$  procesa  $X_n$ .