

Slučajni procesi

1. Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0, 1)$ i neka je X_t , $t \in \mathbb{R}$ slučajni proces definisan sa $X_t = e^t U + t^2 V$. Naći sledeće karakteristike slučajnog procesa X_t :

- (a) matematičko očekivanje,
- (b) autokovarijansnu funkciju,
- (c) disperziju.

2. Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive, U sa binomnom $\mathcal{B}(5, \frac{1}{5})$ raspodelom, a V sa uniformnom $\mathcal{U}(1, 3)$ raspodelom. Naći srednju vrednost, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa

$$X_t = U + t V^t, \quad t \in 0\infty.$$

3. Neka su $U : \mathcal{N}(1, 2)$ i $V : \mathcal{P}(3)$ nezavisne slučajne promenljive i neka je X_t , $t \in [0, \infty]$ slučajni proces definisan sa:

$$X_t = e^t U + t^2 V.$$

- (a) Naći srednju vrednost, autokovarijansnu funkciju i disperziju slučajnog procesa X_t .

- (b) Naći srednju vrednost slučajnog procesa $Y_t = \int_0^t X_s ds$.

4. Nепrekidne i nezavisne slučajne promenljive X i Y su date svojim gustinama raspodele:

$${}_X x = \begin{cases} x & , \quad x \in (0, 1] \\ 2 - x & , \quad x \in (1, 2] \\ 0 & , \quad x \notin (0, 2] \end{cases}, \quad {}_Y y = \begin{cases} y - 3 & , \quad y \in (3, 4] \\ 5 - y & , \quad y \in (4, 5] \\ 0 & , \quad y \notin (3, 5] \end{cases},$$

i definisan je slučajni proces $U_t = atX + btY$, $t \in \mathbb{R}$, gde su a i b realni parametri.

- (a) Odrediti srednju vrednost, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa U_t .
- (b) Za koje vrednosti parametara a i b je proces stacionaran?

5. (**Slučajne harmonijske oscilacije**) Harmonijski oscilator generiše signal dat funkcijom $X_t = A \cos(wt + B)$, $t \in [0, \infty)$ gde je w neslučajna ciklična frekvencija, A slučajna amplituda sa gustinom $\varphi_A(a)$, $a > 0$ a B slučajna oscilacija sa uniformnom $\mathcal{U}(-\pi, \pi)$ raspodelom. Amplituda i oscilacija su nezavisne slučajne promenljive.

- (a) Ispitati slabu stacionarnost slučajnog procesa X_t .
- (b) Ispitati ergodičnost po matematičkom očekivanju.

6. Slučajne promenljive X i Y su nezavisne, pri čemu je gustina slučajne promenljive X

$$\varphi_X x = \begin{cases} \frac{4}{3} - x^2 & , \quad x \in (0, 1] \\ 0 & , \quad x \notin (0, 1] \end{cases} ,$$

a slučajna promenljiva Y ima uniformnu $\mathcal{U}(0, \pi)$ raspodelu. Odrediti matematičko očekivanje, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa $U_t = X \cos(t - Y)$, $t \in \mathbb{R}$.

7. Neka je $U : \mathcal{E}(1)$ slučajna promenljiva i neka je $X_t, t \in \mathbb{R}$ slučajni proces definisan sa $X_t = e^t U$. Naći raspodele prvog i drugog reda slučajnog procesa X_t .

8. Dat je slučajni proces $X_n = X + nY, n \in \mathbb{N}$, gde su X i Y nezavisne slučajne promenljive date raspodelama:

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} .$$

- (a) Napisati skup stanja slučajnog procesa X_n .
- (b) Naći raspodelu prvog reda za zasek X_2 .
- (c) Naći raspodelu drugog reda za par zaseka X_0 i X_2 .
- (d) Naći matematičko očekivanje $m_X(n)$ i korelacionu funkciju $R_X(n, k)$ procesa X_n .