FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1, 05.09.2020. **ZADACI 1**

1. Ispitati za koje vrednosti $A, B \in \mathbb{R}$ je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} B + \dfrac{\sin x - x}{x} & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ A & , \quad x \in [0, 1] \\ \operatorname{arctg} \dfrac{2 - 2\sqrt{x}}{1 - x} & , \quad x \in (1, \infty) \end{cases}$$
neprekidna na $\mathbb{R}$.

2. Naći jednačinu tangente na krivu $e^y = \ln(x + y)$ u njenoj tački preseka sa x-osom.

3. Odrediti ekstreme funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $z = f(x, y) = x + 2ey - e^x - e^{2y}$.

FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1, 05.09.2020. **ZADACI 2**

1. Izračunati $I = \displaystyle\int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3} dx$.

2. Izračunati zatvorenu površinu između krivih (parabola) $y_1(x) = x^2 - 5x + 6$ i $y_2(x) = -x^2 + 3x$.

3. Dokazati da je $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ jednačina totalnog diferencijala i rešiti je.

REŠENJA ZADATAKA 1

1. *Ispitati za koje vrednosti* $A, B \in \mathbb{R}$ *je funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} B + \dfrac{\sin x - x}{x} & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ A & , \quad x \in [0, 1] \\ \operatorname{arctg} \dfrac{2 - 2\sqrt{x}}{1 - x} & , \quad x \in (1, \infty) \end{cases}$$

neprekidna na $\mathbb{R}$.

REŠENJE: Na intervalima $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, \infty)$ je funkcija f neprekidna kao kompozicija neprekidnih funkcija, te ostaje da se razmotri neprekidnost u tačkama 0 i 1. Kako je $f(0) = A$ i

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(B + \frac{\sin x - x}{x} \right) = \lim_{x \to 0^-} \left(B + \frac{\sin x}{x} - 1 \right)$$
$$= B + \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} - 1 = B + 1 - 1 = B,$$

sledi da je $A = B$. S druge strane je $f(1) = A$ i

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \operatorname{arctg} \frac{2 - 2\sqrt{x}}{1 - x} = \operatorname{arctg} \left(\lim_{x \to 1^+} \frac{2 - 2\sqrt{x}}{1 - x} \right)$$
$$= \operatorname{arctg} \left(2 \lim_{x \to 1^+} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} \right) = \operatorname{arctg} \left(2 \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right)$$
$$= \operatorname{arctg} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

odakle sledi $A = \frac{\pi}{4}$. Dakle, funkcija f je peprekidna za $A = B = \frac{\pi}{4}$.

2. *Naći jednačinu tangente na krivu* $e^y = \ln(x + y)$ *u njenoj tački preseka sa* x*-osom.*

REŠENJE: U tački (x_0, y_0) preseka sa x-osom, gde je $y_0 = y(x_0)$, imamo da je $y_0 = 0$ i $e^0 = \ln(x_0 + 0)$ odnosno $1 = \ln(x_0)$, dakle $x_0 = e$.

$$e^y = \ln(x + y) \quad \Rightarrow \quad e^y \cdot y' = \frac{1}{x + y} \cdot (1 + y')$$
$$\Rightarrow \quad e^{y_0} \cdot y'(x_0) = \frac{1}{x_0 + y_0} \cdot (1 + y'(x_0))$$
$$\Rightarrow \quad e^0 \cdot y'(e) = \frac{1}{e + 0} \cdot (1 + y'(e))$$
$$\Rightarrow \quad e \cdot y'(e) = 1 + y'(e)$$
$$\Rightarrow \quad e \cdot y'(e) = 1 + y'(e)$$
$$\Rightarrow \quad y'(x_0) = y'(e) = \frac{1}{e - 1}.$$

Tako za jednačinu tangente

$Y = y'(x_0) \cdot X + y(x_0) - y'(x_0) \cdot x_0$

dobijamo jednačinu $Y = \frac{1}{e - 1} \cdot X + 0 - \frac{1}{e - 1} \cdot e$ odnosno

$$Y = \frac{1}{e - 1} \cdot X - \frac{e}{e - 1}.$$

3. *Odrediti ekstreme funkcije* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $z = f(x, y) = x + 2ey - e^x - e^{2y}$.

REŠENJE: Prvi i drugi parcijalni izvodi funkcije f su redom

$f_x(x, y) = 1 - e^x, \qquad f_y(x, y) = 2e - 2e^{2y},$

$f_{xx}(x, y) = -e^x, \qquad f_{yy}(x, y) = -4e^{2y}, \qquad f_{xy}(x, y) = 0.$

Nalazimo stacionarne tačke.

$$\begin{array}{l} f_x(x,y) = 1 - e^x = 0 \\ f_y(x,y) = 2e - 2e^{2y} = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} e^x = 1 \\ e^{2y} = e \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ 2y = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{array}.$$

Dakle, jedina stacionarna tačka je $T\big(0, \frac{1}{2}\big)$. Za nju je

$$r = f_{xx}\left(0, \frac{1}{2}\right) = -1, \quad t = f_{yy}\left(0, \frac{1}{2}\right) = -4e, \quad s = f_{xy}\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0,$$

te je $rt - s^2 = 4e > 0$, pri čemu je $t = -1 < 0$, što znači da funkcija f u tački T ima lokalni maksimum, i ta maksimalna vrednost funkcije iznosi

$$z_{max} = f\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0 + 2e\frac{1}{2} - e^0 - e^{2\frac{1}{2}} = f\left(0, \frac{1}{2}\right) = e - 1 - e = -1.$$

REŠENJA ZADATAKA 2

1. *Izračunati* $I = \int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3} dx.$

REŠENJE: Uvođenjem smene $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ dobijamo

$$I = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + 2\frac{1-t^2}{1+t^2} - 3}{\frac{2t}{1+t^2} - 2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{\frac{-5t^2+2t-1}{1+t^2}}{\frac{5t^2+2t+1}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= 2\int \frac{-5t^2 + 2t - 1}{(5t^2 + 2t + 1)(t^2 + 1)} dt.$$

Kako je $5t^2 + 2t + 1 = 0$ za $t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{10} \notin \mathbb{R}$ (i polinom $t^2 + 1$ nema realnih korena), sledi

$$I = \frac{2}{5}\int \frac{-5t^2 + 2t - 1}{\big(t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}\big)(t^2 + 1)} dt = \frac{2}{5}\int \left(\frac{At + B}{t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1}\right) dt =$$
$$= \frac{2}{5}\int \frac{(At + B)\big(t^2 + 1\big) + (Ct + D)\big(t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}\big)}{\big(t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}\big)(t^2 + 1)} dt =$$
$$= \frac{2}{5}\int \frac{(A + C)t^3 + \big(B + \frac{2}{5}C + D\big)t^2 + \big(A + \frac{1}{5}C + \frac{2}{5}D\big)t + \big(B + \frac{1}{5}D\big)}{\big(t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}\big)(t^2 + 1)} dt,$$

pri čemu je

$$\begin{array}{ccccccccc} A & & & + & C & & & = & 0 \\ & & B & + & \frac{2}{5}C & + & D & = & -5 \\ A & & & + & \frac{1}{5}C & + & \frac{2}{5}D & = & 2 \\ & & B & & & + & \frac{1}{5}D & = & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccccccc} A & & & + & C & & & = & 0 \\ & & B & + & \frac{2}{5}C & + & D & = & -5 \\ & & & & 2C & - & D & = & -5 \\ & & & & & & D & = & -3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 4 \\ B = -\frac{12}{5} \\ C = -4 \\ D = -3 \end{array}.$$

$$I = \frac{2}{5}\int \left(\frac{4t - \frac{12}{5}}{t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}} + \frac{-4t - 3}{t^2 + 1}\right) dt = \frac{4}{5}\int \frac{2t - \frac{6}{5}}{t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}} dt + \frac{2}{5}\int \frac{-4t - 3}{t^2 + 1} dt =$$
$$= \frac{4}{5}\int \frac{2t + \frac{2}{5} - \frac{8}{5}}{t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}} dt - \frac{4}{5}\int \frac{2t}{t^2 + 1} dt - \frac{6}{5}\int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \dots$$

Treći integral je tablični, u drugi uvodimo smenu $t^2 + 1 = z$, $2tdt = dz$, a prvi rastavljamo na zbir dva integrala:

$$I = \frac{4}{5}\int \frac{2t + \frac{2}{5}}{t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}} dt - \frac{32}{25}\int \frac{1}{t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}} dt - \frac{4}{5}\int \frac{1}{z} dz - \frac{6}{5} \operatorname{arctg} t = \dots$$

U prvi integral uvodimo smenu $t^2+\frac{2}{5}t+\frac{1}{5}=u$, $\left(2t+\frac{2}{5}\right)dt=du$; u drugom integralu iz $t^2+\frac{2}{5}t+\frac{1}{5}=(t+\alpha)^2+\beta=t^2+2\alpha t+\alpha^2+\beta$ sledi da je $2\alpha=\frac{2}{5}$ i $\alpha^2+\beta=\frac{1}{5}$, odakle je $\alpha=\frac{1}{5}$ i $\beta=\frac{4}{25}=\left(\frac{2}{5}\right)^2$; treći je tablični integral:

$$I=\frac{4}{5}\int\frac{1}{u}du-\frac{32}{25}\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}dt-\frac{4}{5}\ln|z|-\frac{6}{5}\operatorname{arctg}t=\ldots$$

Prvi integral je tablični; u drugi uvodimo smenu $t+\frac{1}{5}=v$, $dt=dv$:

$$I=\frac{4}{5}\ln|u|-\frac{32}{25}\int\frac{1}{v^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}dt-\frac{4}{5}\ln\left|t^2+1\right|-\frac{6}{5}\operatorname{arctg}t=\ldots$$

Preostali integral je tablični:

$$\begin{aligned}I&=\frac{4}{5}\ln\left|t^2+\frac{2}{5}t+\frac{1}{5}\right|-\frac{16}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{2}v\right)-\frac{4}{5}\ln\left|t^2+1\right|-\frac{6}{5}\operatorname{arctg}t=\\&=\frac{4}{5}\ln\left|t^2+\frac{2}{5}t+\frac{1}{5}\right|-\frac{16}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{2}t+\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{5}\ln\left|t^2+1\right|-\frac{6}{5}\operatorname{arctg}t=\\&=\frac{4}{5}\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{2}{5}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{5}\right|-\frac{16}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\\&\quad-\frac{4}{5}\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-\frac{3}{5}x+c.\end{aligned}$$

2. *Izračunati zatvorenu površinu između krivih (parabola)* $y_1(x)=x^2-5x+6$ *i* $y_2(x)=-x^2+3x$.

REŠENJE: Nalazimo najpre tačke preseka datih krivih.

$$y_1(x)=y_2(x)\quad\Leftrightarrow\quad x^2-5x+6=-x^2+3x\quad\Leftrightarrow\quad 2x^2-8x+6=0\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad x^2-4x+3=0\quad\Leftrightarrow\quad x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\{1,3\}.$$

Kako je je $y_1(x)$ konveksna, a $y_2(x)$ konkavna parabola, između presečnih tačaka krivih je površina zatvorena odozgo sa krivom $y_1(x)$, a odozdo sa krivom $y_1(x)$, te je tražena površina

$$\begin{aligned}P&=\int_1^3(y_2(x)-y_1(x))dx=\int_1^3\left(-2x^2+8x-6\right)dx=\\&=-2\int_1^3x^2dx+8\int_1^3xdx-6\int_1^3dx=-\frac{2}{3}x^3\Big|_1^3+4x^2\Big|_1^3-6x\Big|_1^3=\\&=-\frac{2}{3}(27-1)+4(9-1)-6(3-1)=-\frac{52}{3}+32-12=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

3. *Dokazati da je* $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$ *jednačina totalnog diferencijala i rešiti je.*

REŠENJE: Kako je $\frac{\partial}{\partial y}e^y=\frac{\partial}{\partial x}(xe^y-2y)=e^y$, sledi da u pitanju jeste jednačina totalnog diferencijala. Stoga je

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=e^y\quad\Rightarrow\quad F(x,y)=\int e^ydx=xe^y+S(y).$$

Dalje je

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=xe^y-2y=xe^y+S'(y),$$

te dobijamo

$$S'(y)=-2y,\text{ odnosno } S(y)=\int-2ydy=-y^2+c,$$

te je $F(x,y)=xe^y-y^2+c$.

Dakle, rešenje posmatrane diferencijalne jednačine glasi $xe^y-y^2=c$.