Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 2022.

Deo završnog ispita 2

1. Homogena kockica za jamb se baca 1000 puta. Koristeći Moavr-Laplaceovu teoremu, oceniti verovatnoću da će zbir na kockicama biti veći ili jednak 3500.

X_i - PALI BROJ NA i-toj KOCKICI, $X_i : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$$E(X_i) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$

$$E(X_i^2) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6}$$

$$D(X_i) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i \geq 3500\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i < 3500\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - E\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right)}} < \frac{3500 - E\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right)}}\right)$$

$$= 1 - P\left(X^* < \frac{3500 - 1000 \cdot \frac{7}{2}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{35}{12}}}\right) = 1 - P(X^* < 0)$$

$$\approx 1 - \Phi(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. [7 poena] Dat je slučajni proces $X_t = tX + t^2 e^Y$, $t > 0$, gde su X i Y nezavisne slučajne promenljive. Slučajna promenljiva X ima normalnu $\mathcal{N}(0,2)$ raspodelu, a Y uniformnu $\mathcal{U}(1,3)$ raspodelu. Odrediti matematičko očekivanje, (auto)korelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa X_t.

$$X: \mathcal{N}(0,2) \quad \begin{matrix} \nearrow E(X) = 0 \\ \searrow D(X) = 2^2 = 4 \end{matrix} \Big\} \; E(X^2) = D(X) + E^2(X) = 4$$

$$Y: \mathcal{U}(1,3) \quad \begin{matrix} \nearrow E(Y) = 2 \\ \searrow D(Y) = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3} \end{matrix} \Big\} \; E(Y^2) = D(Y) + E^2(Y) = \frac{13}{3},$$

$$\boxed{\varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 < y \leq 3 \\ 0, & \text{INAČE} \end{cases}}$$

- $m_X(t) = E(tX + t^2 e^Y) = tE(X) + t^2 E(e^Y) = t^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^y \varphi_Y(y)\,dy =$
$$= t^2 \int_1^3 e^y \cdot \frac{1}{2}\,dy = \frac{t^2}{2}(e^3 - e), \quad t > 0$$

- $R_X(t,s) = E(X_t X_s) = E\big((tX + t^2 e^Y)\cdot(sX + s^2 e^Y)\big) =$
$$= E(tsX^2 + (t^2 s + s^2 t)Xe^Y + t^2 s^2 e^{2Y}) =$$
$$= tsE(X^2) + (t^2 s + s^2 t)\cancel{E(X)}E(e^Y) + t^2 s^2 E(e^{2Y})$$
$$= 4ts + 0 + t^2 s^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{2y} \varphi_Y(y)\,dy =$$
$$= 4ts + t^2 s^2 \int_1^3 e^{2y} \cdot \frac{1}{2}\,dy = 4ts + \frac{t^2 s^2}{2} \cdot \frac{1}{2}(e^6 - e^2)$$

- $D_X(t) = R_X(t,t) - (m_X(t))^2 = 4t^2 + \frac{t^4}{4}(e^6 - e^2) - \left(\frac{t^2}{2}(e^3 - e)\right)^2$

3. [6 poena] Peca svake godine odlazi na letovanje u Budvu, Split ili Antaliju. Poznato je da ne ide dve godine zaredom u isto letovalište. Ukoliko jedne godine letuje u Budvi ili Splitu, naredne godine sa istim verovatnoćama bira jedno od preostala dva letovališta, a ukoliko jedne godine ide u Antaliju, naredne godine duplo verovatnije letuje u Budvi nego u Splitu. Peca je 2021. godine letovao u Splitu.

   a) Odrediti matricu prelaza za jedan korak.

   b) Da li postoje finalne verovatnoće za opisani lanac Markova? Odgovor obrazložiti i ako postoje izračunati ih.

   c) Izračunati verovatnoću da će Peca 2023. godine letovati u Antaliji.

   d) Izračunati verovatnoću da će Peca 2025. i 2027. godine letovati u Antaliji i 2029. godine letovati u Splitu, ako je 2022. i 2024. letovao u Budvi.

a)
$$P = \begin{array}{c} \\ B \\ S \\ A \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & S & A \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$
, A TREBAĆE NAM I $P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{7}{16} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) POSTOJE, JER POSTOJI STEPEN MATRICE P (KONKRETNO DRUGI, VIDI) ČIJI SU SVI ELEMENTI POZITIVNI (>0).

TEK SAD MOŽEMO/SMEMO REŠAVATI SISTEM
$$\begin{cases} p^* P = p^* \\ p_B^* + p_S^* + p_A^* = 1 \end{cases}, \text{ TJ:}$$

$$\begin{cases} [p_B^* \ \ p_S^* \ \ p_A^*] \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} = [p_B^* \ \ p_S^* \ \ p_A^*] \\ p_B^* + p_S^* + p_A^* = 1 \end{cases}, \text{ TJ.} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} p_S^* + \frac{2}{3} p_A^* = p_B^* \\ \frac{1}{2} p_B^* + \frac{1}{3} p_A^* = p_S^* \\ \frac{1}{2} p_B^* + \frac{1}{2} p_S^* = p_A^* \\ p_B^* + p_S^* + p_A^* = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p^* = [p_B^* \ \ p_S^* \ \ p_A^*] = \left[\frac{8}{27} \ \ \frac{10}{27} \ \ \frac{1}{3}\right]$$

c) 2021 → 0, 2022 → 1, 2023 → 2, 2024 → 3, 2025 → 4, 2026 → 5, 2027 → 6, 2028 → 7, 2029 → 8

ZNANO $p(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B & S & A \end{array} \\ [0 \ \ 1 \ \ 0] \end{array} \Rightarrow p(2) = [0 \ \ 1 \ \ 0] \cdot P^2 = \left[\frac{1}{3} \ \ \frac{5}{12} \ \ \overset{A}{\frac{1}{4}}\right]$

$p_A(2) = \frac{1}{4}$

d) $P(X_4 = A, X_6 = A, X_8 = S \mid \cancel{X_1 = B}, X_3 = B) =$
$$= \frac{P(X_3 = B, X_4 = A, X_6 = A, X_8 = S)}{P(X_3 = B)} =$$
$$= \frac{\cancel{P(X_3 = B)} P(X_4 = A \mid X_3 = B) \cdot P(X_6 = A \mid X_3 = B, X_4 = A) \cdot P(X_8 = S \mid X_3 = B, X_4 = A, X_6 = A)}{\cancel{P(X_3 = B)}}$$
$$= P(X_4 = A \mid X_3 = B) P(X_6 = A \mid X_4 = A) P(X_8 = S \mid X_6 = A)$$
$$= \underset{\text{iz } P}{p_{BA}(1)} \cdot \underset{\text{iz } P^2}{p_{AA}(2)} \cdot \underset{\text{iz } P^2}{p_{AS}(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$