

Predispitne obaveze 1 – 20 poena

1. [3 poena] Napisati geometrijsku definiciju verovatnoće.

$\Omega = \mathbb{R}^m$ *оцінюється в межах координатного простору*
 $A \subseteq \Omega$ *об'єкт*
 $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$ *вероватність*
 R^2 : площина
 R^3 : простір
 A : подія
 $\Omega = \square$
 $m(\Omega) = a^2$

Iz kvadrata stranice a na slučajan način bira se tačka. Izračunati verovatnoću događaja A – "slučajno izabrana tačka je teme kvadrata".

$P(A) = \frac{b}{a^2} = 0$

Događaj A se naziva *случайно выбранная точка*

2. [3 poena] Za bilo koja dva događaja A i B je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (1)

$A \cap B = \emptyset$
 Za disjunktne događaje A i B je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\emptyset) = P(A) + P(B)$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$
 Za nezavisne događaje A i B je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

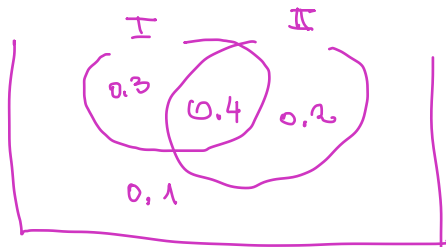
3. [3 poena] Verovatnoća da student položi prvi kolokvijum je 0.7, a verovatnoća da položi drugi kolokvijum je 0.6. Verovatnoća da položi bar jedan kolokvijum je 0.9.

Izračunati verovatnoću da student položi oba kolokvijuma.

$$P(I \cup II) = P(I) + P(II) - P(I \cdot II)$$

$$0.9 = 0.7 + 0.6 - P(I \cdot II)$$

$$P(I \cdot II) = 0.4$$

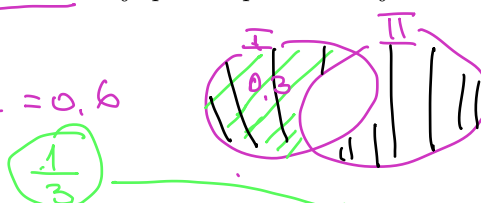


Izračunati verovatnoću da student položi tačno jedan kolokvijum.

$$P = 0.3 + 0.2 = 0.5 = P(B)$$

Ako je student položio tačno jedan kolokvijum izračunati verovatnoću da je položio prvi kolokvijum.

$$P(I | B) = \frac{P(I \cdot B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5} = 0.6$$



4. [2 poena] Na kolokvijum je izašlo 90 studenata koji polažu kolokvijum nezavisno jedan od drugog. Poznato je da svaki treći student položi kolokvijum. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj studenata koji će položiti kolokvijum. Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X . Napisati standardizovanu slučajnu promenljivu X^* .

X *вероятность успеха*
 $X: B(90, \frac{1}{3})$
 n p

$$E(X) = np$$

$$D(X) = npq$$

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

$$E(X) = 90 \cdot \frac{1}{3} = 30$$

$$D(X) = 90 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 20$$

$$X^* = \frac{X - 30}{\sqrt{20}}$$

5. [4 poen] Slučajna promenljiva X data je gustinom raspodele verovatnoća $\varphi_X(x) = \begin{cases} ax, & x \in (0, 2) \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases}$.

Odrediti konstantu a . (Izračunati integral!)

$$1 = \int_0^2 ax \, dx = a \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{a}{2} \cdot (4 - 0) = \frac{4a}{2} = 2a$$

$$2a = 1 \quad a = 1/2$$

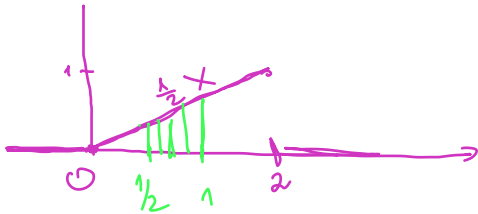
$$D(1 - X) = D(-X + 1) = D(-X) = D(-1 \cdot X) = (-1)^2 \cdot D(X) = D(X)$$

$$D(X \pm c) = D(X) \quad D(c \cdot X) = c^2 D(X) \quad \xi = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} x \, dx \quad E(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} x \, dx$$

$$P(X = 0) = 0 \quad (X \text{ never na nuli})$$

Na grafiku funkcije gustine slučajne promenljive X predstaviti verovatnoću $P(\frac{1}{2} < X \leq 1)$ i izračunati je.



$$P(\frac{1}{2} < X \leq 1) = \int_{1/2}^1 \frac{1}{2} x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{1/2}^1 = \dots$$

6. [1 poen] Definirati matematičko očekivanje slučajne promenljive i napisati dve osobine.

$$E(X) = \begin{cases} \sum x_i p(x_i), & X \text{ - disk.} \\ \int x f_X(x) \, dx, & X \text{ - nep.} \end{cases}$$

ПОД УСЛОВИЈА ДА РЕД / УПРЕД
АНГАЖОВА КОЛИБ

7. [5 poena] Slučajna promenljiva (X, Y) data je zakonom raspodele verovatnoća
- | X/Y | 1 | 2 | 3 | |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 0.1 | 0.3 | 0.4 | 0.6 |
| 3 | 0.2 | 0.3 | 0.1 | |
| | 0.1 | | | |

Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive X .

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y . [$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j)$, $\forall x_i, y_j$]

$$P(X=1, Y=3) \stackrel{?}{=} P(X=1) \cdot P(Y=3)$$

$$0 = 0.4 \cdot 0.1 \quad (1) \Rightarrow \text{Нису независне}$$

Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive $Y|X=3$.

$$Y|X=3: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2/6 & 3/6 & 1/6 \end{pmatrix} \quad P(Y=1|X=3) = \frac{P(Y=1, X=3)}{P(X=3)} = \frac{0.2}{0.6} = 1/3$$

$$P(Y=2|X=3) = \frac{P(Y=2, X=3)}{P(X=3)} = \frac{0.3}{0.6} = 1/2$$

Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive $Y|X=3$.

$$F_{Y|X=3}(y) = P(Y \leq y | X=3)$$



$$F_{Y|X=3}(y) = \begin{cases} y \in (-\infty, 1]: & P(\emptyset) = 0 \\ y \in (1, 2]: & P(1) = 2/6 \\ y \in (2, 3]: & P(1) + P(2) = 2/6 + 3/6 = 5/6 \\ y \in (3, \infty): & P(1) + P(2) + P(3) = 1 \end{cases}$$

Izračunati matematičko očekivanje slučajne promenljive $Y|X=3$.

$$Y|X=3: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2/6 & 3/6 & 1/6 \end{pmatrix} \quad E(Y|X=3) = 1 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{3}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2+6+3}{6} = \frac{11}{6}$$

Deo završnog ispita 1 – 35 poena

1. [8 poena] Na stolu se nalaze dve kutije. U prvoj kutiji su dve kuglice zelene boje i tri kuglice crvene boje, a u drugoj kutiji jedna kuglica zelene boje i dve kuglice crvene boje. Peca na slučajan način bira jednu kutiju i iz nje bira odjednom dve kuglice. Izračunati verovatnoću da će Peca izvući kuglice različitih boja.
2. [10 poena] Novčić se baca dva puta i ako oba puta padne ista strana izvodi se još jedno bacanje novčića. Slučajna promenljiva X predstavlja broj palih pisama, a slučajna promenljiva Y broj izvedenih bacanja novčića.
 - a) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive (X, Y) .
 - b) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive X i njenu funkciju raspodele.
 - c) Odrediti matematičko očekivanje slučajne promenljive $Z = X + Y$.
3. [10 poena] Slučajna promenljiva X je data funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.
 - a) Izračunati konstantu a .
 - b) Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X .
 - c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = X + 2$.
4. [10 poena] Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive, pri čemu X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu, a Y uniformnu $\mathcal{U}(1, 2)$ raspodelu. Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = 2X + Y$.
5. [7 poena] Peca baca kockicu za "Ne ljuti se čoveče". Slučajna promenljiva X predstavlja broj na gornjoj stranici kockice. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X i njenu karakterističnu funkciju.

Ako Peca baca kockicu 50 puta, odrediti očekivani zbir palih brojeva.