Informacioni inženjering
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
21.6.2021.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Predispitne obaveze 2
10 poena

$X : \mathcal{B}(n,p)$
$R_X = \{0,1,\dots,n\}$

$\{0,1,2\}$

1. [3 poena] Dat je slučajni proces $X_n = (n+1)U$, $n \in \mathbb{N}$, gde je U slučajna promenljiva sa binomnom $\mathcal{B}(2, \frac{1}{3})$ raspodelom.

   Skup stanja slučajnog procesa X_n je $S = \{(n+1)\cdot 0, (n+1)\cdot 1, (n+1)\cdot 2 ; n \in \mathbb{N}\}$

   $S = \{0, n+1, 2n+2 : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 3, 6, \dots\}$

   Matematičko očekivanje slučajnog procesa X_n je $m_X(n) = E(X_n) = E((n+1)U) = (n+1)E(U)$
   $= (n+1)2\cdot\frac{1}{3}$

   Korelaciona funkcija slučajnog procesa X_n je $R_X(n,k) = E(X_n \cdot X_k) = E((n+1)U\,(k+1)U)$
   $= (n+1)(k+1)E(U^2) = (n+1)(k+1)\cdot *$

   $D(U) = E(U^2) - E(U)^2$

   $E(U^2) = D(U) + E(U)^2$
   $= \underbrace{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2}_{*}$

$X_t : \mathcal{P}(\lambda t)$

2. [2 poena] Neka je X_t Poasonov proces i neka slučajna promenljiva T predstavlja vreme koje protekne do realizacije prvog događaja. Naći raspodelu slučajne promenljive T.

   сл. догађ

   $T \leftarrow$ време док 1-ви не уђе

   $F_T(t) = P(T < t)$

   $t \le 0 : F_T(t) = P(\emptyset) = 0$

   $t > 0 : 1 - P(T \ge t) = 1 - P(X_t = 0)$

   $= 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$

   t

   0

   $F_T(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$ $\quad T : \mathcal{E}(\lambda)$

3. [1 poen] Objasniti razliku između homogenog i stacionarnog procesa Markova.

   хом.

   стац.

   вероватноће прелаза инваријантне

   све коначнодим. расподеле инваријантне у односу на транслацију времена

4. [4 poena] Dat je lanac Markova čiji je skup stanja $S = \{s_1, s_2\}$ i čija je matrica prelaza $\mathbf{P} = \begin{array}{c|cc} & s_1 & s_2 \\ \hline s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$. $\not> 0$

Da li posttoje finalne verovatnoće za dati lanac Markova? Objasniti odgovor! Ako postoje finalne verovatnoće naći ih.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0^2 \\ 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 & \left(\frac{3}{4}\right)^2 \end{bmatrix} \not> 0$$

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0 & \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = P^*$$

постоје фин. вер
врсте у P^* су
једнаке

$$p^* = [1 \quad 0]$$

$p(1) = ?$

$$p(1) = p(0)\cdot P = [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \\ [1/4 & 3/4] \end{array} \quad p_2(1)$$

Odrediti početni vektor $\mathbf{p}(0)$ ako je sistem u početnom momentu bio u stanju s_2 : $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \\ [0 & 1] \end{array}$

Izračunati $P(X_1 = s_2, X_2 = s_1, X_3 = s_1) = \overset{?\ 1}{p_2(1)} \cdot p_{21}(1) \cdot p_{11}(1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1$

Odrediti, ako je to moguće, početni vektor $\mathbf{p}(0)$ tako da dati lanac Markova bude stacionaran. Objasniti odgovor!

$p(0) = p^*$ јер је p^* постоји

$p(0) = [1 \quad 0]$

Kako se naziva stanje s_1 datog lanca Markova?

Апсорбујуће $(p_{ii} = 1)$

Informacioni inženjering PREZIME I IME: ______________________________

predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**

21.6.2021. BROJ INDEKSA: __________

Deo završnog ispita 2
30 poena

Zadaci – Raditi u svesci!

1. [8 poena] Neprekidne i nezavisne slučajne promenljive X i Y su date svojim funkcijama raspodele:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \frac{x}{4} & , \ 0 \le x < 4 \\ 1 & , \ x \ge 4 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \ y < 0 \\ 1 - e^{-2y} & , \ y \ge 0 \end{cases} .$$

Definisan je slučajni proces $W_t = tX + t^2 Y, \ t \ge 0.$

(a) Odrediti srednju vrednost, korelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa W_t.

(b) Da li je ovaj proces slabo stacionaran? Objasniti odgovor!

2. [8 poena] Jovica svaki dan odlazi u jednu od tri čitaonice, $\check{C}_1$, $\check{C}_2$ i $\check{C}_3$. Ako jednog dana ide u čitaonicu $\check{C}_1$, onda sutra sigurno ne ide u čitaonicu $\check{C}_3$, a podjednako verovatno odlazi u čitaonice $\check{C}_1$ i $\check{C}_2$. Ako jedan dan ide u čitaonicu $\check{C}_2$, sutra sa istom verovatnoćom odlazi u sve tri čitaonice. Ako jedan dan ide u čitaonicu $\check{C}_3$, sutra ne odlazi u čitaonicu $\check{C}_1$, a sa istom verovatnoćom posećuje jednu od preostale dve čitaonice. Jovica u ponedeljak odlazi u čitaonicu $\check{C}_1$ sa tri puta veom verovatnoćom nego u čitaonicu $\check{C}_3$, dok u čitaonicu $\check{C}_2$ odlazi sa dva puta većom verovatnoom nego u čitaonicu $\check{C}_3$.

(a) U koju od navedenih čitaonica Jovica odlazi najverovatnije u sredu?

(b) Izračunati verovatnoću da Jovica u ponedeljak odlazi u čitaonicu $\check{C}_1$, a utorak i sredu u čitaonicu $\check{C}_2$.

(c) Izračunati verovatnoću da Jovica odlazi u sredu u čitaonicu $\check{C}_1$ i u četvrtak u čitaonicu $\check{C}_2$, ako se zna da je i u ponedeljak i u utorak bio u čitaonici $\check{C}_1$.

(d) Ispitati postojanje finalnih verovatnoća, i odrediti ih, ako postoje.

3. [9 poena] U prodavnici igračaka rade dva prodavca. U prodavnicu tokom jednog sata u proseku dođe 15 kupaca i potok trebovanja je Poasonov proces. Vreme usluživanja jednog kupca koji dođe u prodavnicu ima eksponencijalnu raspodelu i traje u proseku 5 minuta. Red čekanja nema ograničenja.

a) Odrediti brzine rađanja i umiranja ovog sistema usluživanja. Ispitati postojanje finalnih verovatnoća, i odrediti ih, ako postoje.

b) Odrediti očekivani broj kupaca u prodavnici nakon dovoljno dugo vremena.

c) Vlasnik prodavnice svakom kupcu koji zatekne četiri ili više kupaca u prodavnici poklanja šareni privezak. Koliko privezaka će pokloniti tokom osmočasovnog radnog vremena?

d) Koliko vremena u proseku oba prodavca provedu bez posla tokom osmočasovnog radnog vremena?

Teorijska pitanja – Raditi na ovom papiru!

1. [5 poena] Stacionarni slučajni procesi (definisati strogu i slabu stacionarnost procesa; za strogo stacionarni proces izračunati matematičko očekivanje i korelacionu funkciju).

Informacioni inženjering
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 21. jun 2021.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 1 –40 poena

Zadaci

1. [6 poena] Brojevi a i b biraju se na slučajan način iz intervala $[0,1]$. Izračunati verovatnoću da kvadratna jednačina $x^2+ax+b=0$ nema realna rešenja.

2. [8 poena] Na stolu se nalaze tri kutije sa kuglicama. U prvoj kutiji su dve crne i jedna bela kuglica, u drugoj dve bele i jedna crna kuglica, a u trećoj jedna crna i jedna bela kuglica. Na slučajan način se iz prve i druge kutije uzima po jedna kuglica i prebacuje u treću kutiju, a zatim se iz treće kutije biraju tri kuglice odjednom. Naći raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvučeni crnih kuglica iz treće kutije.

3. [8 poena] Slučajna promenljiva X data je funkcijom gustine $\varphi_X(x)=\begin{cases} ax, & x\in(0,\sqrt{2}) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

   a) Izračunati konstantu a i naći funkciju raspodele slučajne promenljive X.

   b) Naći raspodelu slučajne promenljive $Y=\max\{X,1\}$. Da li je Y slučajna promenljiva neprekidnog tipa?

4. [8 poena] Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(1,3)$ raspodelu, a uslovna slučajna promenljiva $Y|X=x$, $x\in(1,3)$, ima uniformnu $\mathcal{U}(x,x+1)$ raspodelu. Naći raspodelu slučajne promenljive $Z=XY$.

Teorijska pitanja – pisati na ovom papiru

1. [5 poena] Jednodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa.

2. [5 poena] Uslovna slučajna promenljiva i njeno očekivanje (funkcija raspodele, diskretna i neprekidna).