

Princip uključenja i isključenja sa Primenama

Marko Gordić - IN 37/2023

Princip uključenja i isključenja

Osnovna ideja

Princip uključenja i isključenja (PUI) omogućava računanje kardinalnosti unije više skupova. Kardinalnost unije $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ data je formulom:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &- \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Primer 1: Preklapanje skupova

Koliko brojeva od 1 do 100 su deljivi sa 2, 3 ili 5?

Rešenje:

- A : brojevi deljivi sa 2, $|A| = \lfloor 100/2 \rfloor = 50$,
- B : brojevi deljivi sa 3, $|B| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$,
- C : brojevi deljivi sa 5, $|C| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$.

Preklapanja:

$$|A \cap B| = \lfloor 100/6 \rfloor = 16, |A \cap C| = \lfloor 100/10 \rfloor = 10,$$

$$|B \cap C| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6, |A \cap B \cap C| = \lfloor 100/30 \rfloor = 3.$$

Koristeći PUI:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &+ |A \cap B \cap C|, \end{aligned}$$

$$|A \cup B \cup C| = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74.$$

Dakle, 74 broja su deljiva sa 2, 3 ili 5.

Primer 2: Bez zajedničkih elemenata

Koliko brojeva od 1 do 100 nisu deljivi ni sa 2, ni sa 3, ni sa 5?

Koristimo ukupni broj elemenata 100 i oduzmemo $|A \cup B \cup C|$:

$$100 - |A \cup B \cup C| = 100 - 74 = 26.$$

Dakle, 26 brojeva nisu deljivi ni sa jednim od ovih brojeva.

Razlaganje broja na proste činioce

Definicija

Svaki ceo broj $n > 1$ može se jedinstveno zapisati kao proizvod prostih činilaca:

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k},$$

gde su p_1, p_2, \dots, p_k prosti brojevi, a e_1, e_2, \dots, e_k njihovi eksponenti.

Faktorizacija broja koristeći koren

Za optimizovanu faktorizaciju broja n , potrebno je proveriti deljivost broja samo prostim brojevima manjim ili jednakim \sqrt{n} . Ovo štedi vreme i resurse.

Algoritam: 1. Računamo kvadratni koren \sqrt{n} i uzimamo njegove cele delove. 2. Iterativno proveravamo deljivost broja n prostim brojevima do \sqrt{n} . 3. Ako je broj deljiv, delimo ga sve dok se ne dobije ostatak, beležeći proste činioce i njihove stepene. 4. Ako nakon \sqrt{n} ostane broj veći od 1, on je prost i dodaje se kao činilac.

Primer: Razložimo broj $n = 180$:

1. Izračunamo $\sqrt{180} \approx 13.4$, pa proveravamo proste brojeve 2, 3, 5, 7, 11, 13.

2. Broj je deljiv sa 2:

$$180 \div 2 = 90, \quad 90 \div 2 = 45.$$

Beležimo 2^2 .

3. Broj 45 je deljiv sa 3:

$$45 \div 3 = 15, \quad 15 \div 3 = 5.$$

Beležimo 3^2 .

4. Ostaje broj 5, koji je prost:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1.$$

Primena razlaganja

Razlaganje na proste činioce koristi se za:

- Pronalaženje najvećeg zajedničkog delioca (NZD) i najmanjeg zajedničkog sadržaoca (NZS).
- Brojanje svih delilaca broja n :

$$d(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \dots (e_k + 1),$$

gde su e_1, e_2, \dots, e_k eksponenti prostih činilaca.