Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet Tehničkih Nauka
Verovatnoća i slučajni procesi, letnji semestar akademske 2022/2023. godine

Kombinatorika. σ-algebra događaja. Definicija verovatnoće.

Kombinatorika

Zadatak 1

Postavka: Na koliko načina se može razmestiti n ljudi duž jedne strane pravougaonog stola?

Rešenje:
Prilikom rešavanja koristimo pravilo proizvoda. Na prvo mesto možemo postaviti bilo koga od n ljudi, na drugo mesto bilo koga od preostalih $n-1$, na treće bilo koga od preostalih $n-2$ i tako dalje. Za poslednje mesto nam preostaje samo jedna osoba. Dakle, ukupno načina da rasporedimo n ljudi ima $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$.

Zadatak 2

Postavka: Koliko se može napisati različitih četvorocifrenih brojeva ako se cifre:

(a) mogu ponavljati,

(b) ne mogu ponavljati.

Rešenje:

(a) Koristimo pravilo proizvoda. Na raspolaganju su nam cifre $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Prvu cifru možemo izabrati na 9 načina (može bilo koja cifra sem nule), drugu cifru možemo izabrati na 10 načina (može i cifra koja je izabrana za prvu, jer se cifre mogu ponavljati), treću i četvrtu cifru takođe možemo izabrati na 10 načina. Prema tome, različitih četvorocifrenih brojeva kod kojih se cifre mogu ponavljati ima $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^3$.

(b) Ukoliko se cifre ne mogu ponavljati, prvu cifru možemo izabrati na 9 načina (može sve sem nule), drugu cifru možemo izabrati na 9 načina (može nula, ali ne može cifra koja je izabrana za prvu), treću cifru možemo izabrati na 8 načina (mogu sve sem prve dve cifre) i četvrtu cifru možemo izabrati na 7 načina (sve sem prve tri). Dakle, ukupno četvorocifrenih brojeva kod kojih se cifre ne mogu ponavljati ima $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

Zadatak 3

Postavka: Na koliko načina se može sastaviti tim od 11 igrača ako je na raspolaganju 14 igrača.

Rešenje:

Iz skupa od 14 igrača biramo podskup od 11 igrača (nije bitan redosled odabira igrača). Broj mogućih izbora je $C_{11}^{14} = \binom{14}{11} = 364$.

Zadatak 4

Postavka: Na koliko načina se grupa od 15 ljudi može podeliti na podgrupe tako da u prvoj bude 5, u drugoj 6, a u trećoj 4 ljudi?

Rešenje:

Na osnovu pravila proizvoda broj načina da podelimo grupu na tražene podgrupe je $m \cdot n \cdot k$, gde je m broj načina da odaberemo prvu podrgupu, n broj načina da izaberemo drugu, a k treću podgrupu. Prema tome je $m = C_5^{15} = \binom{15}{5}$, $n = C_6^{10} = \binom{10}{6}$, $k = C_4^4 = \binom{4}{4}$.

Zadatak 5

Postavka: Šest različitih knjiga iz algebre, četiri iz analize i dve iz verovatnoće slažu se na policu tako da sve knjige iz jedne oblasti stoje jedna do druge. Na koliko načina je moguće složiti knjige?

Rešenje:

Kako knjige iz iste oblasti moraju stajati jedna do druge, oblasti možemo rasporediti na 3! načina. Unutar svake oblasti još i knjige možemo rasporediti na različite načine. Knjige iz algebre možemo rasporediti na 6! načina, iz analize na 4! načina, a knjige iz verovatnoće na 2! načina. Dakle, ukupno rasporeda ima $3! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 2!$.

Zadatak 6

Postavka: Na koliko načina može biti ocenjen student ako ima 10 predmeta i ako:

(a) iz svakog predmeta može dobiti ocenu od 5 do 10,

(b) iz dva predmeta ne može dobiti ocenu veću od 7, a iz 3 manju od 9.

Rešenje:

(a) Student iz svakog predmeta može da dobije bilo koju ocenu od 5 do 10, što znači da iz svakog predmeta može biti ocenjen na 6 načina. Na osnovu pravila proizvoda, student može biti ocenjen na 6^{10} načina.

(b) Student iz dva predmeta ne može dobiti ocenu veću od 7, što znači da iz svakog od ta dva predmeta može biti ocenjen na 3 načina. Iz tri predmeta ne može dobiti ocenu manju od 9, pa iz svakog od ta tri predmeta može biti ocenjen na 2 načina. Iz preostalih predmeta može dobiti bilo koju ocenu, dakle iz svakog od njih može biti ocenjen na 6 načina. Na osnovu pravila proizvoda, student može biti ocenjen na $3^2 \cdot 2^3 \cdot 6^5$ načina.

σ- algebra događaja

Zadatak 1

Postavka: Novčić se baca jednom, dva puta, tri puta. Napisati skup elementarnih događaja.

Rešenje:

Ako se nočić baca jednom, skup elementarnih ishoda je $\Omega = \{\omega_G, \omega_P\}$, pri čemu ω_G označava događaj "pri bacanju novčića je pao grb", a ω_P označava događaj "pri bacanju novčića je palo pismo".

Ako se nočić baca dva puta, skup elementarnih ishoda je $\Omega = \{\omega_{GG}, \omega_{GP}, \omega_{PG}, \omega_{PP}\}$, pri čemu ω_{XY} označava događaj "u prvom bacanju novčića je palo $X \in \{G, P\}$, a drugom bacanju je palo $Y \in \{G, P\}$".

Ako se nočić baca tri puta, skup elementarnih ishoda je

$$\Omega = \{\omega_{GGG}, \omega_{GGP}, \omega_{GPG}, \omega_{GPP}, \omega_{PPP}, \omega_{PPG}, \omega_{PGP}, \omega_{PGG}\},$$

uz analogne oznake kao u prethodnom slučaju.

Zadatak 2

Postavka: Dinar se baca dok se dva puta uzastopno ne pojavi ista strana. Napisati skup elementarnih događaja.

Rešenje:

Skup elementarnih događaja je $\Omega = \{\omega_{GG}, \omega_{PP}, \omega_{PGG}, \omega_{GPP}, \omega_{PGPP}, \omega_{GPGG}, \cdots\}$.

Zadatak 3

Postavka: U metu se gađa tri puta. Sa A_i je označen događaj ”meta je pogođena u i-tom gađanju”. Pomoću ovih događaja izraziti sledeće događaje:

(a) tri pogotka,

(b) tri promašaja,

(c) bar jedan pogodak,

(d) bar jedan promašaj,

(e) ne više od dva pogotka,

(f) do trećeg gađanja nije bilo pogotka.

Rešenje:

(a) $A = A_1A_2A_3$,

(b) $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,

(c) $C = \overline{B} = \{A_1A_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\}$,

(d) $D = \overline{A} = \{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3\}$,

(e) $E = D = \{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3\}$,

(f) $F = \overline{A}_1\overline{A}_2$.

Definicija verovatnoće - klasična, geometrijska, aksiomatska

Zadatak 1

Postavka: Na raspolaganju se nalazi 5 duži čije su dužine 3, 4, 5, 7, 9 cm. Na slučajan način se biraju tri duži. Izračunati verovatnoću da se od izabranih duži može konstruisati trougao.

Rešenje:

Skup svih elementarnih ishoda je $\Omega = \{(3,4,5),(3,4,7),(3,4,9),(3,5,7),(3,5,9),(3,7,9),(4,5,7),(4,5,9),$ $(4,7,9),(5,7,9)\}$. Očigledno je $|\Omega| = 10$.

Da bi tri duži obrazovale trougao neophodno je da svaka od te tri duži bude manja od zbira druge dve. Ako sa A označimo događaj da se od tri izabrane duži može konstruisati trougao, imamo $A = \{(3,4,5),(3,5,7),(3,7,9),(4,5,7),(4,7,9),(5,7,9)\}$. Dakle, $|A| = 6$. Iz klasične definicije verovatnoće imamo $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Zadatak 2

Postavka: U kutiji se nalaze 3 bele i 2 zelene kuglice. Na slučajan način se biraju dve kuglice odjednom. Izračunati verovatnoću sledećih događaja A-izvučene dve bele kuglice, B-izvučene dve zelene kuglice, C-izvučene kuglice različitih boja.

Rešenje:

Kako izvlačimo dve kuglice odjednom, nije bitan redosled izvučenih kuglica, pe je stoga $|\Omega| = C_2^5 = \binom{5}{2} = 10$. Događaj A se realizuje kada su izvučene dve bele kuglice, takvih izvlačenja ima $\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{0} = 3$. Dakle, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{10}$.

Događaj B se realizuje kada su izvučene dve zelene kuglice, takvih izvlačenja ima $\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{0} = 1$. Onda je $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{10}$.

Događaj C se realizuje kada su izvučene kuglice različitih boja, tj. jedna bela i jedna zelena kuglica. Takvih izvlačenja ima $\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 6$. Onda je $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Zadatak 3

Postavka: Iz špila od 32 karte na slučajan način se biraju 4 karte. Izračunati verovatnoću sledećih događaja A-izvučena 4 pika, B-izvučene 4 dame, C-izvučeno po tačno 1 kralj, 1 dama i 1 sedmica.

Rešenje:

Kako u zadatku nije ništa naglašeno, redosled izvučenih karata nije bitan, stoga je $|\Omega| = C_4^{32} = \binom{32}{4}$. Događaj A se realizuje kada iz skupa od 8 pikova izvučemo 4 karte, a iz skupa od preostale 24 karte 0 karata, pa je:

$$P(A) = \frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{24}{0}}{\binom{32}{4}}.$$

Događaj B se realizuje kada iz skupa od 4 dame izvučemo 4 karte, a iz skupa od preostalih 28 karata 0 karata, tj.:

$$P(B) = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{28}{0}}{\binom{32}{4}}.$$

Događaj C se realizuje kada iz skupa od 4 kralja izvučemo 1 kartu, iz skupa od 4 dame 1 kartu, iz skupa od 4 sedmice 1 kartu, i iz skupa od preostalih 20 karata 1 kartu. Dakle:

$$P(C) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{20}{1}}{\binom{32}{4}}.$$

Zadatak 4

Postavka: U igri loto 7/39 igrač je popunio jednu kolonu. Naći verovatnoće događaja A-igrač ima svih 7 pogodaka, B-igrač ima bar 6 pogodaka.

Rešenje:

Ukupno načina da igrač popuni kolonu ima $|\Omega| = \binom{39}{7}$.
Skup od 39 brojeva možemo da podelimo na skup od 7 odgovarajućih brojeva koji čine dobitnu kombinaciju, i skup od ostala 32 broja. Događaj A će se realizovati ako je igrač izabrao 7 brojeva iz skupa od odgovarajućih 7, i nula brojeva iz skupa od preostala 32 broja, odnosno:

$$P(A) = \frac{\binom{7}{7} \cdot \binom{32}{0}}{\binom{39}{7}}.$$

Događaj B će se realizovati ako je igrač izabrao 6 brojeva iz skupa od 7 odgovarajućih, i 1 od preostala 32 broja, ili ako je izabrao 7 brojeva iz skupa od 7 odgovarajućih i nula brojeva iz skupa od preostala 32 broja.

$$P(B) = \frac{\binom{7}{6} \cdot \binom{32}{1} + \binom{7}{7} \cdot \binom{32}{0}}{\binom{39}{7}}.$$

Zadatak 5

Postavka: Igrač je popunio jedan tiket sportske prognoze sa 12 utakmica. Naći verovatnoću da će igrač imati svih 12 pogodaka ako:

(a) ne zna ništa ni o jednoj utakmici,

(b) zna da se sedam utakmica neće završiti nerešeno,

(c) zna rezultat pet utakmica.

Rešenje:

(a) Kako igrač ne zna ništa ni o jednoj utakmici, za svaku utakmicu bira po jedan broj iz skupa $\{0, 1, 2\}$. Na osnovu pravila proizvoda takvih izbora ukupno ima 3^{12}. Treba izračunati verovatnoću da će igrač imati svih 12 pogodaka, dakle odgovarajuća je samo jedna dobitna kombinacija. Prema tome verovatnoća iznosi $\frac{1}{3^{12}}$.

(b) Igrač za 7 utakmica zna da neće završiti nerešeno, pa za tih sedam utakmica bira po jedan broj iz skupa $\{1, 2\}$, dok za preostale utakmice bira po jedan broj iz skupa $\{0, 1, 2\}$. Takvih izbora ima $2^7 \cdot 3^5$. Ponovo je odgovarajuća samo jedna dobitna kombinacija, pa tražena verovatnoća iznosi $\frac{1}{2^7 \cdot 3^5}$.

(c) Igrač zna rezultat za pet utakmica, pa bira samo za preostale utakmice po jedan broj iz skupa $\{0, 1, 2\}$. Takvih izbora ima 3^7. Verovatnoća iznosi $\frac{1}{3^7}$.

Zadatak 6

Postavka: U grupi od n osoba nalaze se A i B. Osobe na slučajan način sedaju na n stolica poređanih u jedan red. Naći verovatnoću da A i B neće sedeti jedna do druge.

Rešenje:

Označimo sa C događaj "osobe A i B neće sedeti jedna do druge". Verovatnoću ovog događaja možemo izračunati kao $P(C) = 1 - P(\overline{C})$, gde je $\overline{C}$ suprotan događaj događaju C-"osobe A i B će sedeti jedna do druge". Mogućih rasporeda n osoba na n stolica ima $n!$, a rasporeda u kojima A i B sede jedna do druge ima $2(n-1)!$ (A i B mogu sedeti u sledećem redosledu "AB"i "BA"i možemo ih posmatrati kao jednu osobu tako da ukupno imamo $n-1$ osobu), pa je $P(\overline{C}) = \frac{2(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n}$. Tražena verovatnoća je onda $P(C) = 1 - \frac{2}{n}$.

Zadatak 7

Postavka: U grupi od $2n$ dece je n devojčica i n dečaka. Oni sedaju na $2n$ stolica poređanih u jedan red. Naći verovatnoću da dve osobe istog pola neće sedeti jedna do druge.

Rešenje:

Najpre, $2n$ osoba se može razmestiti na $(2n)!$ načina, a rasporeda u kojima dve osobe istog pola neće sedeti jedna do druge ima $2 \cdot n! \cdot n! = 2(n!)^2$(na prvom mestu može sedeti ili devojčica ili dečak). Ako sa $P(A)$ označimo verovatnoću traženog događaja, onda je $P(A) = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$.

Zadatak 8

Postavka: Dinar se baca dok prvi put ne padne pismo. Naći verovatnoću da će pismo prvi put pasti u k-tom bacanju. Naći verovatnoću da će pismo prvi put pasti u parnom po redu bacanju.

Rešenje:

Neka je A_k-"pismo je prvi put palo u k-tom bacanju". Tada je $P(A_k) = (\frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.

Neka je A-"pismo je prvi put palo u parnom po redu bacanju". Tada je $A = A_2 + A_4 + A_6 + \cdots$ i

$$P(A) = P(A_2)+P(A_4)+P(A_6)+\cdots = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots = \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

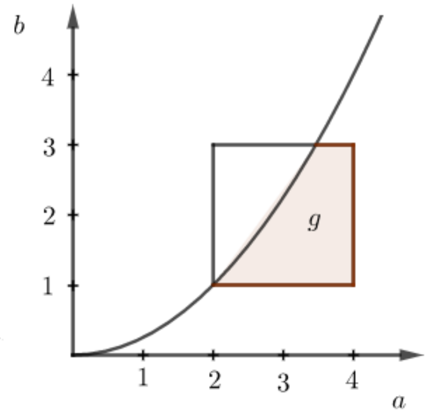
Zadatak 9

Postavka: Broj a se na slučajan način bira iz intervala $[2,4]$, abroj b iz inntervala $[1,3]$. Naći verovatnoću događaja da kvadratna jednačina $x^2 + ax + b = 0$ ima realne korene.

Rešenje:

Označimo sa A događaj "kvadratna jednačina ima realne korene". Da bi data kvadratna jednačina imala realne korene, treba da važi

$$D \geq 0 \iff a^2 - 4b \geq 0 \iff a^2 \geq 4b.$$



Kako se brojevi a i b biraju redom iz intervala $[2,4]$ i $[1,3]$, skup tačaka koji odgovara skupu svih mogućih ishoda je kvadrat $G = \{(x,y) : x \in [2,4], y \in [1,3]\}$ i $m(G) = P(G) = 2 \cdot 2 = 4$. Skup tačaka koji odgovara događaju A možemo označiti sa g a njegovu meru možemo izračunati na sledeći način:

$$m(g) = \int_1^3 (4 - 2\sqrt{b})\, db = \cdots = 8 - \frac{4}{3}\Big(3\sqrt{3} - 1\Big) = 8 - 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}.$$

Konačno, verovatnoća događaja A je

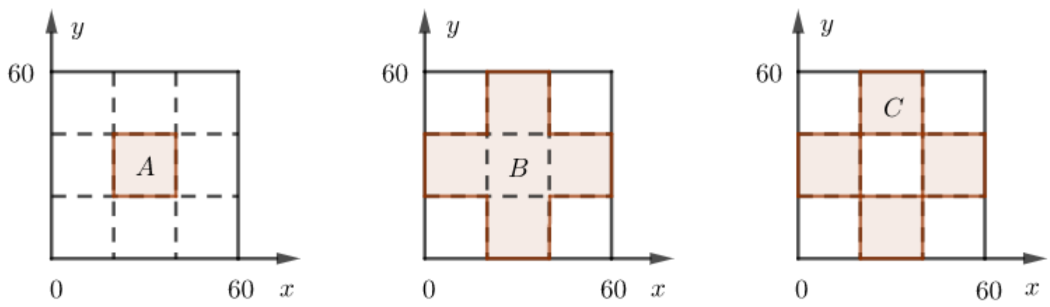
$$P(A) = \frac{m(g)}{m(G)} = \frac{8 - 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}}{4}.$$

Zadatak 10

Postavka: Autobus ulazi u stanicu u 12^{20}, a iz nje izlazi u 12^{40}. Dva putnika nezavisno jedan od drugog ulaze u stanicu u slučajnom trenutku između 12 i 13 časova. Ako je autobus u stanici ulaze u njega, a u suprotnom napuštaju stanicu. Izračunati verovatnoće događaja A-oba putnika će ući u autobus, B-bar jedan putnik će ući u autobus, C-tačno jedan putnik će ući u autobus.

Rešenje:

Označimo sa x vreme dolaska prvog putnika, a sa y vreme dolaska drugog putnika. Oba putnika dolaze u slučajnom trenutku između 12 i 13 časova, tj. i x i y pripadaju intervalu $[0,60]$ ako posmatramo u minutama. Dakle, skup tačaka koji odgovara skupu svih mogućih ishoda je kvadrat $G = \{(x,y) : x \in [0,60], y \in [0,60]\}$.



Ukoliko skiciramo skupove tačaka koji odgovaraju događajima A, B i C vrlo lako možemo uočiti da površina oblasti koja odgovara događaju A čini $\frac{1}{9}$ ukupne površine, površina oblasti koja odgovara događaju B čini $\frac{5}{9}$ ukupne površine, i površina oblasti koja odgovara događaju C čini $\frac{4}{9}$ ukupne površine. Dakle, tražene verovatnoće su $P(A) = \frac{1}{9}$, $P(B) = \frac{5}{9}$, i $P(C) = \frac{4}{9}$.

Zadatak 11

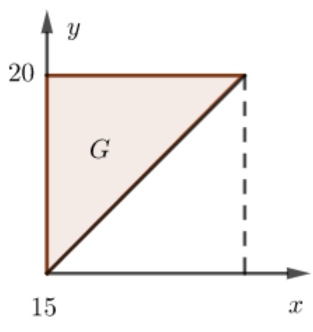
Postavka: Prodavnica je otvorena od 15 do 20 časova. Kupac posećuje prodavnicu. Vreme njegovog ulaska i zadržavanja u prodavnici je slučajno.

(a) Naći verovatnoću da se kupac zadržao u prodavnici duže od pola sata.

(b) Izračunati verovatnoću da je kupac ušao u prodavnicu pre 16 časova, a izašao posle 19 časova.

Rešenje:

Označimo sa x vreme ulaska kupca u prodavnicu, a sa y vreme izlaska kupca iz prodavnice. Skup tačaka koji odgovara skupu svih mogućih ishoda je trougao $G = \{(x, y) : x \in [15, 20], y \in [15, 20], x \leq y\}$ i njegova mera je $m(G) = \dfrac{5 \cdot 5}{2} = \dfrac{25}{2}$.

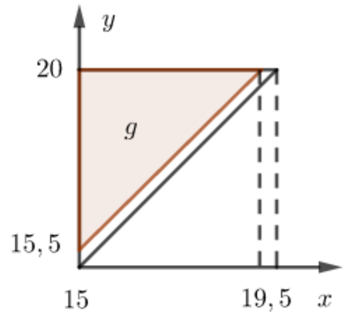


(a) Označimo sa A događaj "kupac se zadržao u prodavnici duže od pola sata". Skup tačaka koji odgovara događaju A je $g_1 = \{(x, y) : x \in [15, 20], y \in [15, 20], y - x \geq \frac{1}{2}\}$ a njegovu meru možemo izračunati na sledeći način:

$$m(g_1) = \frac{4.5 \cdot 4.5}{2} = \frac{4.5^2}{2}.$$

Konačno, verovatnoća događaja A je

$$P(A) = \frac{m(g_1)}{m(G)} = \frac{\frac{4.5^2}{2}}{\frac{25}{2}} = 0.81.$$



(b) Označimo sa B događaj "kupac je ušao u prodavnici pre 16h, a izašao posle 19h". Skup tačaka koji odgovara događaju B je $g_2 = \{(x, y) : x \in [15, 20], y \in [15, 20], x < 16 \wedge y > 19\}$ a njegova mera je $m(g_2) = 1 \cdot 1 = 1$.

Konačno, verovatnoća događaja B je

$$P(B) = \frac{m(g_2)}{m(G)} = \frac{1}{\frac{25}{2}} = 0.08.$$