★ Svođenje na kontradikciju ★

1. **Ispitati da li je formula** $((r \wedge (s \Rightarrow q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \vee \neg r)) \vee (p \Rightarrow (\neg s \vee r)) = A$ **tautologija.**

pretp. da A nije tautologija, tj. postoji valuacija v tako da $I_v(A)=0$

$\Rightarrow I_v((r \wedge (s \Rightarrow q)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \vee \neg r)) = 0$ i $I_v(p \Rightarrow (\neg s \vee r)) = 0$

$\Downarrow$

$I_v(r \wedge (s \Rightarrow q)) = 1$ i $I_v((p \Rightarrow q) \vee \neg r) = 0$ i $I_v(p) = 1$ i $I_v(\neg s \vee r) = 0$

$\Downarrow$

$I_v(r) = 1$ i $I(s \Rightarrow q) = 1$ i $I_v(p \Rightarrow q) = 0$ i $I_v(\neg r) = 0$ i $v(p) = 1$ i $I_v(\neg s) = 0$ i $I_v(r) = 0$

$\Rightarrow$ A jeste tautologija!

2. **Ispitati da li je formula** $(p \wedge (q \vee s)) \Rightarrow (s \vee \neg p)$ **tautologija.**

pretp. da $(p \wedge (q \vee s)) \Rightarrow (s \vee \neg p)$ nije tautologija, tj. postoji valuacija v tako da $I_v((p \wedge (q \vee s)) \Rightarrow (s \vee \neg p)) = 0$

$\Rightarrow I_v(p \wedge (q \vee s)) = 1$ i $I_v(s \vee \neg p) = 0$

$\Rightarrow I_v(p) = 1$ i $I_v(q \vee s) = 1$ i $I_v(s) = 0$ i $I_v(\neg p) = 0$

$\Downarrow$ $I_v(q) = 1$ $\quad$ $\Downarrow$ $I_v(p) = 1$

Za valuaciju $v = \begin{pmatrix} p & q & s \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ data formula nije tačna, pa nije tautologija.

★ Diskusija po iskaznom slovu ★

3. **Metodom** *diskusija po slovu* **ispitati da li je formula** $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \neg r)$ **tautologija.**

Diskutujemo po slovu p. Neka je v proizvoljna valuacija.

1° $v(p)=1 \Rightarrow I_v(\overset{1}{p} \vee \neg r) = 1 \Rightarrow I_v((p \wedge q) \Rightarrow \overset{1}{(p \vee \neg r)}) = 1$

2° $v(p)=0 \Rightarrow I_v(\overset{0}{p} \wedge q) = 0 \Rightarrow I_v(\overset{0}{(p \wedge q)} \Rightarrow (p \vee \neg r)) = 1$

$\Rightarrow \quad \models (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \neg r)$

4. **Metodom diskusija po slovu ispitati da li je formula** $(\neg q \Rightarrow p) \vee (\neg p \wedge (q \vee s))$ **tautologija.**

Neka je v proizv. valuacija.

1° $v(p)=1 \Rightarrow I(\neg q \Rightarrow \overset{1}{p}) = 1 \Rightarrow I_v(\overset{1}{(\neg q \Rightarrow p)} \vee (\neg p \wedge (q \vee s))) = 1$

2° $\boxed{v(p)=0}$ $\rightarrow$ ne možemo reći ništa o vrednosti formule bez diskusije po nekom drugom slovu

2.1° $v(q)=1 \Rightarrow I_v(\neg q) = 0 \Rightarrow I_v(\overset{0}{\neg q} \Rightarrow \overset{0}{p}) = 1$

$\Rightarrow I_v(\overset{1}{(\neg q \Rightarrow p)} \vee (\neg p \wedge (q \vee s))) = 1$

2.2° $\boxed{v(q)=0} \Rightarrow I_v(\overset{1}{\neg p} \wedge (\overset{0}{q} \vee s)) = v(s)$

$2.2.1^\circ$ $v(s)=1 \Rightarrow I_v(\overset{1}{\neg p} \wedge \underbrace{(\overset{0}{q} \vee \overset{1}{s})}_{1})) = 1$

$\Rightarrow I_v((\neg q \Rightarrow p) \vee \underbrace{(\neg p \wedge (q \vee s))}_{1}) = 1$

$2.2.2^\circ$ $\boxed{v(s)=0} \Rightarrow I_v(\overset{1}{\neg p} \wedge \underbrace{(\overset{0}{q} \vee \overset{0}{s})}_{0}) = 0 \qquad I_v(\overset{1}{\neg q} \Rightarrow \overset{0}{p}) = 0$

$\Rightarrow I_v(\underbrace{(\neg q \Rightarrow p)}_{0} \vee \underbrace{(\neg p \wedge (q \vee s))}_{0}) = 0$

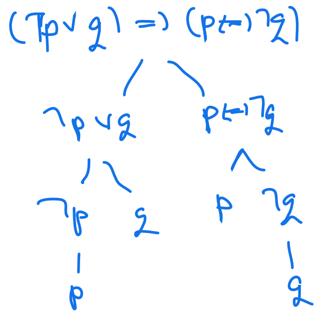
Valuacija $v = \begin{pmatrix} p & q & s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nije model za datu formulu, pa formula nije tautologija.

★ Istinitosne tablice ★

5. **Koristeći istinitosnu tablicu, ispitati da li je formula**

$$A = (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow \neg q)$$

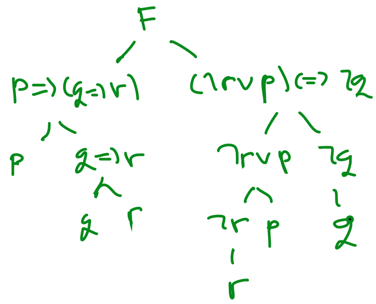
zadovoljiva. Da li je zadata formula tautologija?



p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee q$	$p \Leftrightarrow \neg q$	$(\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow \neg q)$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Za valuaciju $v_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je $I_{v_1}(A) = 1$, pa je formula A zadovoljiva.

Za valuaciju $v_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ formula nije tačna, pa nije tautologija.



6. **Metodom istinitosnih tablica ispitati da je formula**

$$F : (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \wedge ((\neg r \vee p) \Leftrightarrow \neg q)$$

zadovoljiva. Da li je formula F tautologija?

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$\neg r \vee p$	$\neg r \vee p \Leftrightarrow \neg q$	F
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1	0	0

Za valuaciju $v_1 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ formula je tačna, pa je zadovoljiva.

Za valuaciju $v_2 = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ formula nije tačna, pa nije tautologija.

7. **Metodom istinitosnih tablica ispitati da li je formula**

$$F: \ \big((p \vee \neg r) \Rightarrow q\big) \vee (q \Rightarrow r)$$

tautologija.

$((p$	$\vee$	$\neg$	$r)$	$\Rightarrow$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)$
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

Pošto je formula tačna u svakoj valuaciji, onda je tautologija.

8. **Koristeći metodu istinitosnih tablica, naći jedan model i jedan kontra-model (ako postoje) za formulu**

$$F: \ \big(p \Rightarrow (r \vee s)\big) \wedge \big(\neg r \vee (s \Leftrightarrow \neg p)\big).$$

p	r	s	$\neg p$	$\neg r$	$r \vee s$	$p \Rightarrow (r \vee s)$	$s \Leftrightarrow \neg p$	$\neg r \vee (s \Leftrightarrow \neg p)$	F
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0

Model za formulu F je valuacija $v_1 = \begin{pmatrix} p & r & s \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Kontra-model za F je valuacija $v_2 = \begin{pmatrix} p & r & s \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

★ Logičke posledice ★

9. **Pokazati da važi $\neg p \wedge q, p \vee q \models q$.**

Treba pok. da je u svim valuacijama u kojima su formule $\neg p \wedge q$ i $p \vee q$ tačne, tačno i q.

Koristićemo istinitosnu tablicu

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \vee q$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

U valuaciji $v = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ važi

$I_v(\neg p \wedge q) = I_v(p \vee q) = I_v(q) = 1$

pa q jeste logička posledica formula $\neg p \wedge q$ i $p \vee q$.

10. **Dokazati da važi**

$$\Gamma, A \models B \text{ ako i samo ako } \Gamma \models A \Rightarrow B$$

($\Rightarrow$) Pokazujemo da ako važi $\Gamma, A \models B$, onda je $\Gamma \models A \Rightarrow B$

Pretp. suprotno, tj. da nije $\Gamma \models A \Rightarrow B$, što znači da postoji valuacija v u kojoj su tačne sve formule iz Γ, ali $I_v(A \Rightarrow B) = 0$

Otuda je $I_v(A) = 1$ i $I_v(B) = 0$. Dakle, valuacija v je model za Γ i A, ali nije model za B što je u suprotnosti sa pretp. da važi $\Gamma, A \models B$ ↯

($\Leftarrow$) Pokazujemo da ako važi $\Gamma \models A \Rightarrow B$, onda je $\Gamma, A \models B$.

Pretp. suprotno, tj. da nije $\Gamma, A \models B$, pa postoji valuacija v u kojoj su tačne sve formule iz Γ i $\underbrace{I_v(A) = 1, \text{ ali } I_v(B) = 0}$.

$\Downarrow$

$I_v(A \Rightarrow B) = 0$ ↯

jer važi $\Gamma \models A \Rightarrow B$