① Основни принципи пребројавања

- Основни принципи пребројавања се користе за анализу комбинаторних објеката. У те принципе спадају:

1) ПРИНЦИП ПРОИЗВОДА

- Користи се када се пребројавају елементи неког уређеног скупа.

④ Принцип производа за два скупа, са доказом

- Те1: Нека су A и B коначни скупови. Број елемената скупа $A \times B$ једнак је $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

доказ: Нека је $A = \{a_1, \dots, a_m\} \neq \emptyset$ и $B = \{b_1, \dots, b_n\} \neq 0$ (ако је $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$ тврђење директно следи. Тада је $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{a \in A} (\{a\} \in B)$.
Како за $a_i \neq a_j$ важи $|\{a_i\} \times B \cap \{a_j\} \times B| = \emptyset$ следи

$$|A \times B| = \sum_{a \in A} |\{a\} \times B| = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} |\{(a, b)\}| = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} 1 = |A| \cdot |B|$$

⑧ Принцип производа за два или више скупова, са доказом

- Те2: Нека је $n \geq 2$ и нека су $A_1, \dots, A_n$ коначни скупови. Тада је $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$

доказ: Индукцијом по n.

- база $n = 2$: следи на основу претходне теореме
- индуктивна претпоставка: претпоставимо да је $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$
- индуктивни корак: доказаћемо да тврђење важи за Декартов производ $n+1$ скупова; на основу претходне теореме имамо да је $|(A_1 \times \dots A_n) \times A_{n+1}| = |A_1 \times \dots \times A_n| \cdot |A_{n+1}|$; према индуктивој претпоставци, даље је $|A_1 \times \dots \times A_n \times A_{n+1}| = |A_1| \cdot \dots |A_n| \cdot |A_{n+1}|$

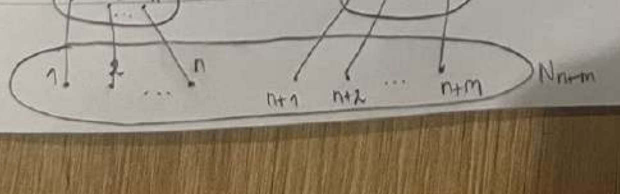
2) ПРИНЦИП СУМЕ

- Овај принцип користимо у случају када су свака два скупа међусобно дисјунктни.

③ Принцип суме за два скупа

- Те1: Ако су A и B дисјунктни коначни скупови ($A \cap B = \emptyset$) онда је $|A \cup B| = |A| + |B|$.

доказ: Нека је $A = \{a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ и $B = \{b_1, \dots, b_m\} \neq \emptyset$ (ако је $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$ тврђење директно следи). Тада је $A \cup B = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$. Како је $A \cap B = \emptyset$, можемо закључити да је $|A \cup B| = n + m$, зато што постоји бијективно пресликавање скупа $A \cup B$ у скуп $\{1, 2, \dots, n+m\}$:



⑨ Дирихлеов принцип са примером

-Те1: За $m,n \in N$, нека су $A_1,\dots,A_n$ коначни скупови и нека је $A_1 \cup \dots \cup A_n = \{a_1,\dots a_m\}$. Ако је $m>n$, онда постоји $j \in \{1,\dots,n\}$ са особином $|A_j| \geq 2$.

Доказ: претпоставимо супротно, да за свако $j \in \{1,\dots,n\}$ важи $|A_j| \leq 1$. Тада за број елемената у унији скупова важи:
$m = |A_1 \cup \dots \cup A_n| \leq |A_1| + \dots |A_n| \leq n$, што је у контрадикцији са претпоставком да је $m>n$; тиме закључујемо да претпоставка није била тачна.

-Те2: За $m,n \in N$, нека су $A_1,\dots,A_n$ коначни скупови и нека је $A_1 \cup \dots \cup A_n = \{a_1,\dots,a_m\}$. Ако је $m>n \cdot q$, за неко $q \in N$, онда постоји $j \in \{1,\dots,n\}$ са особином $|A_j| \geq q+1$.

Доказ: претпоставимо супротно, да за свако $j \in \{1,\dots,n\}$ важи $|A_j| \leq q$; Тада за број елемената у унији скупова важи:
$m = |A_1 \cup \dots \cup A_n| \leq |A_1| + \dots + |A_n| \leq n \cdot q$, што је у контрадикцији са претпоставком да је $m>n \cdot q$.

② Навести сличности и разлике између скупа, мултискупа и уређене торке. Образложити које елементе садрже мултискупови $M=[b_1,b_2,\dots,b_l]_{m,m,\dots,m}$ и $M=[b_1,b_2,\dots,b_l]_{m_1,m_2,\dots,m_l}$.

-Сличности: 1) сви садрже елементе
2) могу се записати помоћу угластих, витичастих или обичних заграда
3) могу имати исти број елемената, али различите структуре

-Разлике: 1) понављање елемената: у скупу није дозвољено, док у мултискупу и уређеној торки јесте
2) редослед елемената: у уређеној торки је битан, а у скупу и мултискупу није
3) запис: скуп - $\{a,b,c\}$, мултискуп - $[a,b,c]$, уређена торка - (a,b,c)

-Мултискупови су проширење обичног скупа, у којима елементи могу да се понављају. За разлику од скупа где је битно да ли је нешто присутно или не, у мултискупу је битна и учесталост (број појављивања) сваког елемента.

-први пример: M= [...
-ово је ...
је по тачн...
-укупан број...
-нпр. M = [a...
-други пример: M = [...
-овде се ...
-нпр. M = [a,b...

⑩ Класификација ...
-Разликујемо четир...
1) уређење m...
a) m - пе...
б) перму...
2) уређење m...
a) m - пе...
б) перму...
-m - пермутације ...
-пермутације мул...
-m - пермутације ...
-пермутације ску...
-варијације са п...
-пермутације са по...
-варијације без по...
-пермутације без ...

(4) Принцип суме за два или више скупова, са доказом

-Те 2: Нека је $n \geq 2$ и нека су $A_1, \dots, A_n$ коначни скупови са особином $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$ $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$. Тада је $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$.

Доказ: Индукцијом по n

- база $n=2$: следи на основу претходне теореме
- индуктивна претпоставка: претпоставимо да је $|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|$
- индуктивни корак: показаћемо да тврђење важи за $n+1$ скупова; на основу претходне теореме имамо $|(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}|$; на основу индуктивне претпоставке следи $|A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |A_1| + \dots + |A_n| + |A_{n+1}|$, што је и требало доказати

-Принцип суме се појављује код одређивања сложености алгоритма у којем постоје независне петље.

3) ПРИНЦИП УКЉУЧЕЊА-ИСКЉУЧЕЊА

-У случају када се пребројавају елементи уније произвољних скупова, може се десити да неки парови имају заједничке елементе. Тако када одређујемо број елемената уније два скупа, пребројавањем елемената једног, а затим другог, два пута се преброје елементи пресека тих скупова. Зато се они на крају морају одузети.

(5) Принцип укључења-искључења за два и три скупа, са доказом

-Те 1: Нека су A и B произвољни коначни скупови. Тада је:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Доказ: Скупови $A \cap B$ и $A \setminus B$ (као и парови $A \cap B$, $B \setminus A$ и $A \setminus B$, $B \setminus A$) су дисјунктни и важе следеће једнакости (што следи директно из дефиниција скуповних операција):

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$
$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

На основу принципа суме следи:

$$|A| = |(A \cap B) \cup (A \setminus B)| = |A \cap B| + |A \setminus B|$$
$$|B| = |(A \cap B) \cup (B \setminus A)| = |A \cap B| + |B \setminus A|$$
$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$$

Одатле је: $|A| + |B| = |A \cap B| + |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| = |A \cap B| + |A \cup B|$ тј.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

-Те 2: Нека су $A, \dots$

$|A \cup B \cup C| = \dots$

Доказ: Ако два ...

скупова, добија...

(5)

-Те 3: Нека је $n \geq$ ...

Тада је: $|\bigcup \dots$

Доказ: Индукцијом по ...

- база $n=2$: ...
- индуктивна ...

важи једнако...

- индуктивни ...

$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i \dots$

(6) Принцип укључења-искључења за четири скупа

4) ДИРИХЛЕОВ ПРИ...

-Назив овог при...

након његовог ...

да ако имамо ...

онда сигурно ...

голуба. Принцип ...

са неком особ...

кцију тих об...

(5)

- Те 2: Нека су A, B и C произвољни коначни скупови. Тада је:

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

доказ: Ако два пута применимо претходну теорему, уз коришћење особина скупова, добијамо: $|A\cup B\cup C| = |(A\cup B)\cup C| =$

$$= |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C| =$$

$$= |A|+|B| - |A\cap B| + |C| - |(A\cap C)\cup(B\cap C)| =$$

$$= |A|+|B| - |A\cap B| + |C| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

(6) Принцип укључења-искључења за четири скупа

- Те 3: Нека је $n\geq 2$ и нека су $A_1,\dots,A_n$ произвољни коначни скупови.
Тада је: $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$, где је $\bigcap A = A$.

доказ: Индукцијом по n.

- база $n=2$: следи на основу Те 1
- индуктивна претпоставка: за $n-1$ произвољних коначних скупова важи једнакост из тврђења
- индуктивни корак: применом Те 1 и индуктивне претпоставке добијамо:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|A_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n} A_i\right| = |A_1| + \left|\bigcup_{i=2}^{n} A_i\right| - \left|\bigcup_{i=2}^{n} (A_1\cap A_i)\right|$$

$$= |A_1| + \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| - \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} (A_1\cap A_i)\right|$$

$$= \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

4) ДИРИХЛЕОВ ПРИНЦИП

- Назив овог принципа се приписује немачком математичару Дирихлеу, након његовог разматрања овог принципа 1834. године. Принцип тврди да ако имамо више голубова него рупа у које би се они увукли, онда сигурно постоји бар једна рупа у којој се налазе бар два голуба. Принцип је егзистенцијалног карактера, што значи да објекти са неком особином постоје, али при томе не даје експлицитну конструкцију тих објеката.

-први пример: $M=[b_1, b_2, \ldots, b_l]_{m,m,\ldots,m}$

- ово је мултискуп у којем се сваки од елемената $b_1, b_2, \ldots, b_l$ појављује по тачно m пута (број појављивања сваког елемента је исти)
- укупан број елемената у мултискупу је $l \cdot m$
- нпр. $M=[a,b,c]_{2,2,2} \Rightarrow$ мултискуп је $M=[a,a,b,b,c,c]$

-други пример: $M=[b_1, b_2, \ldots, b_l]_{m_1,m_2,\ldots,m_l}$

- овде се сваки елемент b_i појављује по различитом броју пута m_i
- нпр. $M=[a,b,c]_{2,3,1} \Rightarrow$ мултискуп је $M=[a,a,b,b,b,c]$

(10) Класификација уређених избора елемената скупа и мултискупа

-Разликујемо четири категорије уређених избора:

1) уређење m елемената из мултискупа који има n елемената:
   а) m-пермутације мултискупа ($m \le n$, $M=[b_1,\ldots,b_l]_{m,\ldots,m}$)
   б) пермутације мултискупа ($m=n$, $M=[b_1,\ldots,b_l]_{m_1,\ldots,m_l}$)
2) уређење m елемената из скупа од n елемената:
   а) m-пермутације скупа ($m \le n$)
   б) пермутације скупа ($m=n$)

- m-пермутације мултискупа (варијације са понављањем): l^m
- пермутације мултискупа (пермутације са понављањем): $\frac{n!}{m_1! \ldots m_l!}$
- m-пермутације скупа (варијације без понављања): $\frac{n!}{(n-m)!}$
- пермутације скупа (пермутације без понављања): $n!$
- варијације са понављањем: дозвољено је понављање елемената, редослед је битан, користи се m елемената од l
- пермутације са понављањем: дозвољено понављање елемената, редослед је битан, користе се сви елементи
- варијације без понављања: нема понављања елемената, редослед је битан, користи се само m елемената од n
- пермутације без понављања: нема понављања елемената, редослед је битан, сви елементи се користе

(11) Шта је то m-пермутација елемената мултискупа $M=[b_1,\dots,b_l]_{m,m,\dots,m}$ и колико таквих m-пермутација постоји?

def m-пермутација елемената мултискупа $M=[b_1,\dots,b_l]_{m,m,\dots,m}$ је било која уређена m-торка елемената из M, тј. било која уређена m-торка у којој је свака компонента елемент из скупа $B=\{b_1,\dots,b_l\}$, $l\geq 1$ елемената.

-ознака за број m-пермутација мултискупа $M=[b_1,\dots,b_l]_{m,m,\dots,m}$: $\bar{P}(l;m)$

-Те: Број m-пермутација елемената мултискупа $M=[b_1,\dots,b_l]_{m,m,\dots,m}$: $\bar{P}(l;m)=l^m$

доказ: из дефиниције следи да сваки елемент скупа $B\times\dots\times B$ представља једну m-пермутацију мултискупа M; број таквих m-торки елемената из B је на основу принципа производа $|B\times\dots\times B|=|B|^m=l^m$

(12) Шта је то m-пермутација елемената скупа $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ и колико таквих m-пермутација постоји $(1\leq m\leq n)$?

def m-пермутација елемената скупа $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ $(1\leq m\leq n)$ је било која m-торка елемената скупа B у којој су свака два елемента међусобно различита.

-ознака за број m-пермутација скупа од n-елемената: $P(n;m)$

-Те: Број m-пермутација скупа $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ једнак је: $P(n;m)=n(n-1)\dots(n-m+1)$

доказ: Индукцијом по m

- база $m=1$: уређена торка са једном компонентом је сам тај елемент; број начина да изаберемо тај један елемент једнак је $n(\forall n\in\mathbb{N})$
- индуктивна претпоставка (T_m): тврђење важи за $P(n';m)$ за свако $n'\geq m$
- индуктивни корак $(T_m\Rightarrow T_{m+1})$: показаћемо да тврђење важи за $P(n;m+1)$, за свако $n\geq m+1$; треба показати да је број уређених торки дужине $m+1$ скупа B са особином да је сваки пар компоненти међусобно различит једнак $P(n;m+1)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m+1)+1)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m)$

свака уређена торка са датом особином припада скупу $B_1\cup\dots\cup B_n$

где је: $B_1=\{(b_1,c_2,\dots,c_{m+1}):(c_2,\dots,c_{m+1})$ је m-пермутација скупа $B\setminus\{b_1\}\}$

$\dots$

$B_n=\{(b_n,c_2,\dots,c_{m+1}):(c_2,\dots,c_{m+1})$ је m-пермутација скупа $B\setminus\{b_n\}\}$

према индуктивној претпоставци, за свако $i \in \{1, \dots, n\}$, број елемената у B_i једнак је броју m-пермутација елемената скупа $B \setminus \{b_i\}$, тј.

$P(n-1;m) = (n-1) \cdot \ldots \cdot ((n-1)-m+1) = (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m) \quad (n-1 \geq m)$;

према принципу суме, број $(m+1)$-пермутација је:

$$\begin{aligned} P(n;m+1) &= |B_1 \cup \ldots \cup B_n| = |B_1| + \ldots + |B_n| \\ &= (P(n-1;m)) + \ldots + (P(n-1;m)) \\ &= n \cdot P(n-1;m) \\ &= n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m) \end{aligned}$$

што је и требало доказати

⑬ Шта је то n-пермутација елемената скупа $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ и колико таквих n-пермутација постоји?

- Нека је $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. У случају када је $m = n$, за m-пермутацију скупа B се каже да је пермутација. Број пермутација скупа B означава се са $P(n)$ и једнак је $P(n) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$. Ово тврђење је специјалан случај m-пермутација елемената скупа када је $m = n$.

⑭ Шта је то n-пермутација елемената мултискупа $M = [b_1, b_2, \dots, b_l]_{m_1, m_2, \dots, m_l}$ и колико таквих n-пермутација постоји, ако је $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_l$?

def - Пермутација мултискупа M је произвољна n-торка у којој се b_1 појављује m_1 пута, b_2 се појављује m_2 пута, ..., b_l се појављује m_l пута.

- ознака са број пермутација мултискупа $M = [b_1, \dots, b_l]_{m_1, \dots, m_l}$: $\overline{P}(m_1, m_2, \dots, m_l)$

- Те: Број пермутација мултискупа M једнак је $P(m_1, m_2, \dots, m_l) = \dfrac{(m_1 + \dots + m_l)!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_l!}$

доказ: ако би сви елементи скупа M били различити, број пермутација тог скупа био би једнак $(m_1 + \ldots + m_l)!$; међутим; због понављања одређених елемената, имамо $m_1! \cdot \ldots \cdot m_l!$ истих пермутација

⑮ Класификација неуређених избора елемената

- Неуређени избори елемената обухватају:
  1) комбинације m елемената из скупа, тј. m-точлане подскупове скупа
  2) комбинације m елемената из мултискупа, тј. m-точлане подмултискупове мултискупа

⑯ Шта је то m-комбинација елемената мултискупа $M=[b_1,\dots,b_\ell]_{m,m,\dots,m}$ и колико таквих m-комбинација постоји?

def. m-комбинација елемената мултискупа M (или комбинација класе m са понављањем елемената скупа B) је m-точлани мултискуп у којем је сваки елемент из B (и може се појављивати више пута.

- Ознака за број m-комбинација мултискупа M: $\bar{C}(\ell;m)$
- Те: Број m-комбинација мултискупа $M=[b_1,\dots,b_\ell]_{m,m,\dots,m}$ једнак је $\bar{C}(\ell,m)=\frac{(m+\ell-1)!}{m!(\ell-1)!}$

доказ: Нека је $\binom{M}{m}=\{M_1 : |M_1|=m \wedge M_1\subseteq M\}$

$$A=\{(a_1,\dots,a_{m+\ell-1})\in\{0,1\}^{m+\ell-1} : \{\{a_1,\dots,a_{m+\ell-1}\}\}=[0,1]_{\ell-1,m}\}$$

Значи, $\binom{M}{m}$ је скуп свих m-точланих подмултискупова од M, а A је скуп свих уређених торки дужине $m+\ell-1$ које имају тачно m компоненти једнаких 1 и преосталих $\ell-1$ компоненти једнаких 0.
Пресликавање $\varphi(b_1,\dots,b_\ell):\binom{M}{m}\to A$ дефинишемо на следећи начин:

$$\varphi(b_1,\dots,b_\ell)(M_1)=(c_1,\dots,c_{m+\ell-1}),$$

где је $M_1=[b_1,\dots,b_\ell]_{m_1,\dots,m_\ell}$ и за свако $i\in\{1,\dots,\ell-1\}$

$$c_{(i-1)+(m_i+1)}=0 \qquad c_{(i-1)+j}=1 \qquad ,0<j\le m_i.$$

Како је $\varphi(b_1,\dots,b_\ell)$ бијективно пресликавање, $\bar{C}(\ell;m)=\left|\binom{M}{m}\right|=|A|$.
Број начина да од $m+\ell-1$ места изаберемо m за 1 и преосталих $\ell-1$ за 0 једнак је $\bar{P}(m,\ell-1)=\frac{(m+\ell-1)!}{m!(\ell-1)!}$

⑰ Шта је то m-комбинација елемената скупа $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ и колико таквих m-комбинација постоји $(1\le m\le n)$?

def. m-комбинација (или комбинација класе m без понављања) елемената скупа B је било који подскуп од m елемената скупа B.

-ознака за број
-Те: број m-ко
доказ: Нека ј
елеменат
је $m!$.
помножен
$P(n$

⑱ Дефиниција и
-Биномни коефициј
у збир, према б
def. Нека су m и
јент $\binom{n}{m}$ је фун
позитивне целе
$\binom{n}{0}=$
-Комбинаторна и
-Те1: Факторијелна
$0\le m\le n$, важи
доказ: За $m\in$
множењем
$\binom{n}{m}=$
-Те2: Симетричност
доказ: $\binom{n}{m}=$
$\binom{n}{m}=$
-још неке од
теорема

-ознака за број m-комбинација елемената скупа $B=\{b_1,\dots,b_n\}$: $C(n;m)$

-Te: број m-комбинација елемената скупа B једнак је $C(n;m)=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$

доказ: Нека је $n=|B|\geq 1$. Ако изаберемо произвољан подскуп од m елемената скупа B, број начина да уредимо тај подскуп једнак је $m!$. Одатле је број m-пермутација једнак броју m-комбинација помножених са $m!$. Значи,:

$$P(n;m) = m!\cdot C(n;m) \Leftrightarrow n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = m!\cdot C(n;m)$$

$$\Leftrightarrow C(n;m) = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$$

(18) Дефиниција и особине биномног коефицијента

-Биномни коефицијенти представљају коефицијенте у развоју степена бинома у збир, према биномној теореми.

деф. Нека су m и n цели бројеви са особином $0\leq m\leq n$. Биномни коефицијент $\binom{n}{m}$ је функција која таквим паровима вредности n и m додељује позитивне целе бројеве на следећи начин:

$$\binom{n}{0}=1 \qquad \binom{n}{m}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m(m-1)\ldots 2\cdot 1}, \quad m\geq 1$$

-Комбинаторна интерпретација формално се може описати релацијом $\binom{n}{m}=C(n;m)$

-Te1: Факторијелна репрезентација - За целе бројеве n и m са особином $0\leq m\leq n$, важи: $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$.

доказ: За $m\in\{0,n\}$ имамо $\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!}=1=\binom{n}{0}$. Ако је $1\leq m\leq n-1$ множењем бројиоца и имениоца са $(n-m)!$ добијамо:

$$\binom{n}{m}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)!}{m(m-1)\ldots 2\cdot 1\cdot(n-m)!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

-Te2: Симетричност - За целе бројеве n и m са особином $0\leq m\leq n$, важи:

$$\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$$

доказ: $\binom{n}{m}=\frac{n!}{(n-m)!}$

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{(n-m)!\,(n-(n-m))!}=\frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

-још неке од особина биномног коефицијента: Паскалово правило, биномна теорема

19 Паскалов идентитет, са доказом

-Те: За целе бројеве n и m, $1 \le m \le n-1$ важи:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Доказ: Посматрајмо скуп A са $n \ge 1$ елемената и изаберимо произвољно елемент $a \in A$. Нека је $S_m = \{B : B \subseteq A, |B| = m\}$

$$S_m^{a} = \{B : B \subseteq A, a \in B, |B| = m\}$$

$$S_m^{\bar{a}} = \{B : B \subseteq A \setminus \{a\}, |B| = m\}.$$

Тада је $S_m = S_m^{a} \cup S_m^{\bar{a}}$ и $S_m^{a} \cap S_m^{\bar{a}} = \emptyset$. Према принципу збира $|S_m| = |S_m^{a}| + |S_m^{\bar{a}}|$. Како је број елемената у претходним скуповима $|S_m| = \left|\binom{A}{m}\right| = \binom{n}{m}$,

$$|S_m^{a}| = \left|\binom{A \setminus \{a\}}{m-1}\right| = \binom{n-1}{m-1},$$

$$|S_m^{\bar{a}}| = \left|\binom{A \setminus \{a\}}{m}\right| = \binom{n-1}{m},$$

одакле следи $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$.

20 Паскалов троугао, за $0 \le m \le 7$. Навести особине које се користе за његово формирање.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

-Особине које се користе за његово формирање:

1) граничне вредности: сваки ред почиње и завршава бројем 1: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) Паскалово правило: сваки број унутар троугла је збир два броја из претходног реда: $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$

3) симетрија: сваки ред је симетричан: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(21) Биномна формула

-Те: Нека је $x, y \in \mathbb{R}$ и нека је $\mathbb{N}$. Тада важи: $(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m$.

доказ: Имајући у виду да је $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)}_{n\text{-пута}}$, десну страну можемо записати као суму производа (монома) које добијамо када за чиниоце изаберемо из сваке заграде x или y. Значи, ако из $m\ (m \geq 0)$ заграда изаберемо y, а из $n-m$ заграда изаберемо x, добијамо $x^{n-m}y^m$.

(22) Дефиниција и особине полиномног коефицијента

деф. Нека су дати бројеви $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}$ и нека је $n = m_1 + \ldots + m_l$. Тада полиномни коефицијент дефинишемо на следећи начин:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_l!}$$

-Особине:

-Те 1: Нека су дати бројеви $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}_0$ и нека је $n = m_1 + \ldots + m_l$. Тада је $\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-(m_1+m_2)}{m_3} \ldots \binom{m_l}{m_l}$

-Те 2: Нека су дати бројеви $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}_0$ и нека је $n = m_1 + \ldots + m_l$. Ако је $\{\{m_1, m_2, \ldots, m_l\}\} = \{\{k_1, k_2, \ldots, k_l\}\}$ онда је $\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_l}$.

-Те 3: Нека су дати бројеви $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}_0$ и нека је $n = m_1 + \ldots + m_l$. Ако је $0 < m_1, \ldots, m_l < n$, онда важи:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} + \binom{n-1}{m_1, m_2-1, \ldots, m_l} + \ldots + \binom{n-1}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1}$$

-Те 4: Нека су дати цели бројеви $m_1, \ldots, m_l \geq 0$ и нека је $n = m_1 + \ldots + m_l$. Тада је: $\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1, 0} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1}$

-Те 5: Полиномна формула

(23) Полиномна формула, у општем облику или на примеру

-Те: Нека су $x_1,\dots,x_\ell$ $(\ell\geq 2)$ произвољни реални бројеви и нека је $n\geq 1$.

Тада је: $$(x_1+\dots+x_\ell)^n=\sum_{\substack{m_1+\dots+m_\ell=n\\ m_1\geq 0\dots m_\ell\geq 0}}\binom{n}{m_1,\dots,m_\ell}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_\ell^{m_\ell}$$

-општи облик: $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$, $a_0,a_1,\dots,a_n$ - коефицијенти

x - променљива

$a_n\neq 0$ - водећи коефицијент

-пример: $P(x)=2x^3-5x^2+3x-7$ - полином трећег степена

$a_3=2$ - водећи коефицијент

$a_0=-7$ - слободан члан

(24) Написати општи облик и један пример хомогене линеарне рекурентне релације са константним коефицијентима.

- Рекурентна релација низа $\{a_n\}_{n\in N_0}$ је хомогена линеарна рекурентна релација реда k са константним коефицијентима ако је облика $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\dots+c_ka_{n-k}$, где су $c_1,\dots,c_k$ константе, $k\geq 1$ и $c_k\neq 0$.

-пример: Фибоначијев низ: $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

-почетни услови су $F_0=0$ и $F_1=1$

-може се написати у облику $F_n-F_{n-1}-F_{n-2}=0$

-Фибоначијев низ је класичан пример зато што има најједноставнији облик реда 2 и користи коефицијенте 1 и 1, што је најлакши облик за разумевање и анализу.

(25) Написати општи облик и један пример нехомогене линеарне рекурентне релације са константним коефицијентима.

- Ове релације су облика $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\dots+c_ka_{n-k}+f(n)$, где су $c_1,\dots,c_k$ константе, $k\geq 1$, $c_k\neq 0$, а f функција скупа N_0.

- Довољно је наћи једно решење нехомогене једначине да бисмо одредили решење полазне нехомогене рекурентне релације.

-пример: Аритметички низ: $a_n = a_{n-1} + d$ $\quad (a_n - a_{n-1} = d)$

-Ово је нехомогена рекурентна релација првог реда са константним коефицијентима.

(26) Решити рекурентну релацију $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$, ако је $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0$$

-уместо f_n уврстимо t_n

$$t^n - t^{n-1} - t^{n-2} = 0 \quad / : t^{n-2}$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$f_n = A t_1^n + B t_2^n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$f_0 = 0 \Rightarrow 0 = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$0 = A + B \Rightarrow A = -B$$

$$f_1 = 1 \Rightarrow 1 = A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$1 = A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - A\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$1 = A\left(\frac{\cancel{1}+\sqrt{5}-\cancel{1}+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1 = \sqrt{5}\,A$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Downarrow$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

(27) Решити рекурентну релацију $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n \geq 2$, ако је $a_0 = 2$ и $a_1 = 1$.

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$$

$$a_n \to t^n$$

$$t^n - 4t^{n-1} + 4t^{n-2} = 0 \quad /: t^{n-2}$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$t = 2$ је двојни корен

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n$$

$$a_0 = 2 \Rightarrow 2 = A \cdot 2^0 + B \cdot 0 \cdot 2^0 \Rightarrow A = 2$$

$$a_1 = 1 \Rightarrow 1 = 2 \cdot 2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1$$

$$1 = 4 + 2B$$

$$2B = -3$$

$$B = -\frac{3}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = 2 \cdot 2^n - \frac{3}{2} \cdot n \cdot 2^n = 2^n\left(2 - \frac{3}{2}n\right)$$

(28) Дефиниција и пример простог графа

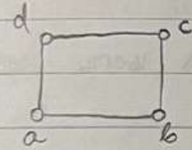
деф. Прост (неусмерен) граф је уређен пар $G=(V,E)$, где је:

1) $V \neq 0$ коначан скуп чворова

2) $E \subseteq \binom{V}{2}$ је скуп грана

деф. Прост граф је граф без петљи и паралелних грана. То значи да ни један чвор није повезан са самим собом и између два чвора може постојати највише једна грана.

- пример:



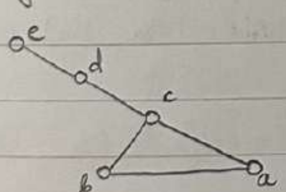
$V = \{a, b, c, d\}$

$E = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{a,d\}\}$

(29) Шта је то степен чвора у простом графу? Креирати произвољан граф и одредити мултискуп степена његових чворова.

- Нека је $G=(V,E)$ прост граф и нека је $v \in V$. Број грана које су инцидентне са чвором v називамо степеном чвора v у графу G и означавамо $\deg_G(v)$.

- пример:



- чворови: $V = \{a, b, c, d, e\}$
- гране: $E = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}\}$
- степени чворова: $\deg(a)=2$

$\deg(b)=2$

$\deg(c)=3$

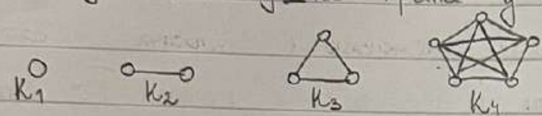
$\deg(d)=2$

$\deg(e)=1$

- мултискуп степена чворова: $\{1, 2, 2, 2, 3\}$

30) Када је прост граф комплетан? Написати примере.

- Комплетан граф K_n је прост граф у којем је $E = \binom{V}{2}$, тј. за свака два чвора постоји тачно једна грана у графу која им је инцидентна



K_1	K_2	K_3	K_4
$V=1$	$V=2$	$V=3$	$V=5$
$E=0$	$E=1$	$E=3$	$E=10$

$|V(K_n)| = n$

$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

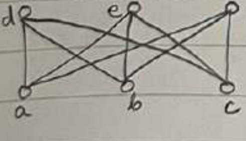
$(n-1)$ - регуларан граф

31) Шта је то бипартитан граф? Скицирати $K_{3,3}$ и за њега написати скуп чворова и скуп грана.

- Бипартитан граф је граф $G = (V_1 \cup V_2, E)$ са особинама:
    1) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
    2) $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$.

То значи да се скуп чворова може разделити на два дисјунктна подскупа, тако да је свака грана инцидентна са једним чвором из једног скупа и другим из другог.

- Ако E садржи све такве гране, онда кажемо да је граф комплетан бипартитан и означавамо га са $K_{m,n}$, ако је $|V_1| = m$ и $|V_2| = n$.

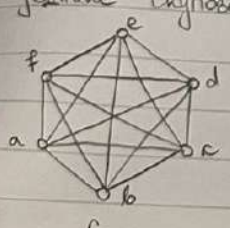


$V = \{a, b, c, d, e, f\}$

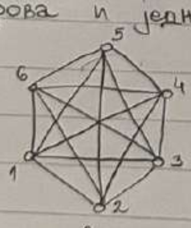
$E = \{\{a,d\}, \{a,e\}, \{a,f\}, \{b,d\}, \{b,e\}, \{b,f\}, \{c,d\}, \{c,e\}, \{c,f\}$

32) Када за два проста графа кажемо да су једнаки?

- Из дефиниције графа директно следи да су два графа једнака акко имају једнаке скупове чворова и једнаке скупове грана.



G_1 $\neq$



G_2

$V(G_1) = \{a, b, c, d, e, f\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = V(G_2)$

-разликују се ознаке чворова

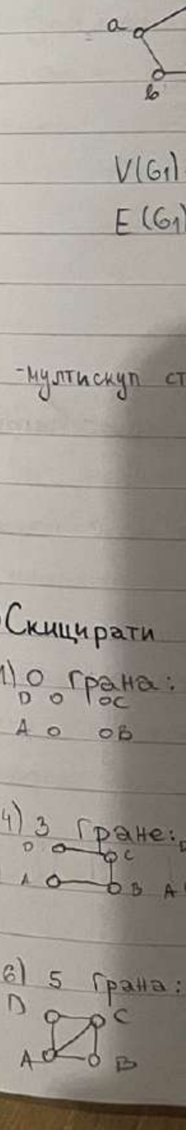
---

33) Дефиниција ...
једнаким бројем ...
степена чвор...
- За графове ...
једнаки кажем...
Нека су ...
изоморфан са ...
особином $\{u, v$...
да је изоморф...

$V(G_1)$
$E(G_1)$

-мултискуп ст...

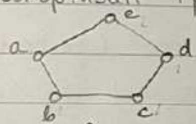
34) Скицирати ...
1) 0 грана:
4) 3 гране:
6) 5 грана:



(33) Дефиниција изоморфизма за графове. Креирати два неизоморфна графа са једнаким бројем чворова, једнаким бројем грана и једнаким мултискуповима степена чворова.

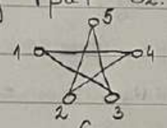
- За графове који имају особину да преименовањем чворова постају једнаки кажемо да су изоморфни.

Деф. Нека су $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ прости графови. Кажемо да је G_1 изоморфан са G_2 ако постоји бијективно пресликавање $h : V_1 \to V_2$ са особином $\{u, v\} \in E_1$ акко $\{h(u), h(v)\} \in E_2$. За такву функцију h кажемо да је изоморфизам графа G_1 у граф G_2.



G_1

$G_1 \cong G_2$



G_2

$V(G_1) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G_1) = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{d,e\}, \{a,e\}\}$

$V(G_2) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E(G_2) = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{2,4\}, \{3,5\}\}$

-мултискуп степена чворова $G_2 : \{2, 2, 2, 2, 2\}$

-мултискуп степена чворова $G_1 : \{2, 2, 2, 2, 2\}$

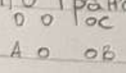
$$|V(G_1)| = |V(G_2)|$$

$$|E(G_1)| = |E(G_2)|$$

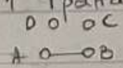
$$h = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(34) Скицирати све (по паровима) неизоморфне графове са 4 чвора.

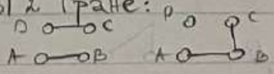
1) 0 грана:



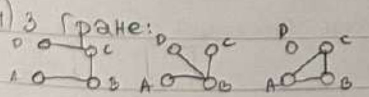
2) 1 грана:



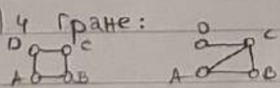
3) 2 гране:



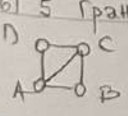
4) 3 гране:



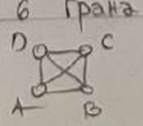
5) 4 гране:



6) 5 грана:



7) 6 грана:



=> 11 неизоморфних чворова

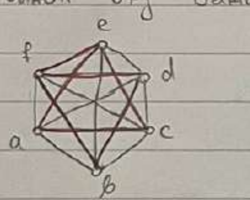
35. Дефиниција шетње, пута и стазе. Креирати један граф и дати примере за све три дефиниције.

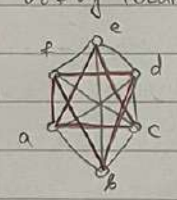
- Нека је $G=(V,E,\psi)$ мултиграф. Нека су $e_1,\dots,e_n\in E$ и $v_0,\dots,v_n\in V$ произвољне гране и чворови са особином $\psi(e_i)=\{v_{i-1},v_i\}$, за свако $i\in\{1,\dots,n\}$.

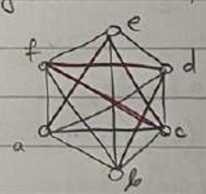
деф. Тада за низ $v_0e_1v_1e_2,\dots e_nv_n$ кажемо да је v_0v_n-шетња дужине n у графу G између чворова v_0 и v_n. За чворове v_0 и v_n кажемо да су крајњи чворови шетње.

деф. Стаза - ако нема понављања грана тј. ако за све $i,j\in\{1,\dots,n\}$ са особином $i\neq j$ важи $e_i\neq e_j$.

деф. Пут - ако нема понављања чворова, тј. ако за све $i,j\in\{0,1,\dots,n\}$ са особином $i\neq j$ важи $v_i\neq v_j$ (осим евентуално $v_0=v_n$)



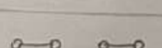




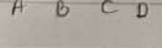
шетња: aecacfdbf ; стаза: aecafdbf ; пут: aecfdb

36. Када је граф повезан? Дати пример једног повезаног и једног неповезаног графа.

- Нека је $G=(V,E,\psi)$ мултиграф. Кажемо да су чворови u и v повезани ако је $u=v$ или $u\neq v$ и постоји uv-пут у G. Кажемо да је G повезан акко $|V|=1$ или за свако $u,v\in V$ важи да су u и v повезани.

- повезан граф: 

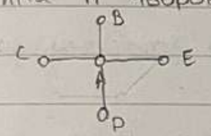
- сваки чвор је повезан директно или индиректно са сваким другим чвором

- неповезан граф: 

- граф је неповезан јер постоји пар чворова који нису повезани никаквим путем

37) Да ли је сваки граф са n чворова и n-1 грана повезан? Одговор илустровати примером

- Ако граф има n чворова и n-1 грана => ПОВЕЗАН ЈЕ
- пример:



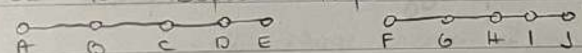
$n = 5$

$e = n-1 = 4$

- повезан граф (дрво)

38) Да ли граф може имати 10 чворова и 8 грана?

- Граф може да има 10 чворова и 8 грана, али онда није повезан. Да би граф са n чворова био повезан, мора имати n-1 грану, што значи да граф са 10 чворова мора имати најмање 9 грана да би био повезан
- пример:



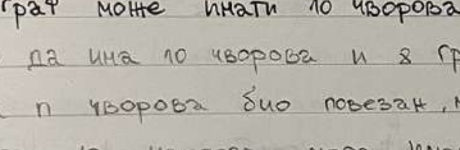
- две стазе од којих свака има 5 чворова и 4 гране
- укупно: 10 чворова
  8 грана
  2 компоненте -> граф није повезан

39) Дефиниција и пример стабла

деф: За прост граф $G=(V,E)$ кажемо да је стабло ако важи:

1) G је повезан граф
2) G је ацикличан граф.

- пример:

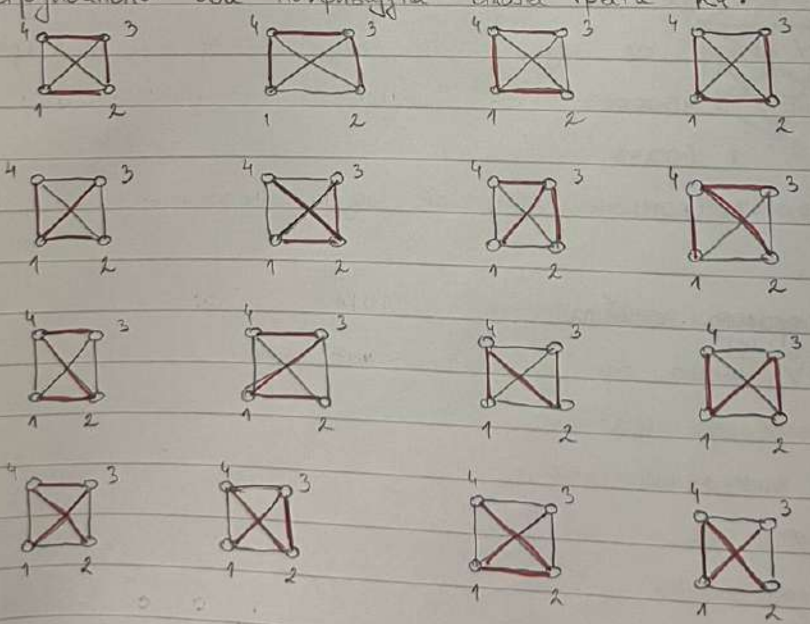


(40) Карактеризација стабла - написати неке особине

- Нека је $G=(V,E)$ прост граф. Следећа тврђења су еквивалентна:
  1) G је стабло.
  2) За свака два чвора $u,v \in V(G)$ постоји јединствен пут од u до v.
  3) G је повезан и $|E(G)| = |V(G)| - 1$.
  4) G је повезан и брисањем произвољне гране добија се неповезан граф (тј. G је минималан повезан граф).
  5) G је ацикличан и додавањем гране се добија граф који садржи контуру (тј. G је максималан ацикличан граф).

(41) Колико има различитих покривајућих стабала графа K_4?

- Конструисаћемо сва покривајућа стабла графа K_4:



$\Rightarrow$ 16 покривајућих стабала графа K_4 (4 неизоморфна стабла)

(42) Колико и

- Број разл

је n^{n-2}. С

графа K_5

(43) Колико и

- Број чвор

- Дакле, има

(44) Колико и

- Постоји

(45) Шта с

деф. Нека је

у графу к

Тура је

пример:

(46) Дефини

деф. Граф

ако садр

(42) Колико има различитих покривајућих стабала графа K_5?

- Број различитих означених стабала са чворовима $\{1,2,\dots,n\}$ једнак је n^{n-2}. Одатле следи да је број различитих покривајућих стабала графа K_5 125 ($5^{5-2} = 5^3 = 125$).

(43) Колико има различитих стабала чији скуп чворова је $V=\{1,2,3,4\}$?

- Број чворова је 4, па по формули n^{n-2} добијамо 16.
- Дакле, има тачно 16 различитих стабала чији је скуп чворова $\{1,2,3,4\}$.

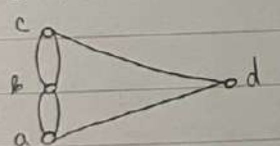
(44) Колико има различитих стабала чији скуп чворова је $V=\{1,2,3,4,5\}$

- Постоји 125 различитих стабала над скупом чворова $\{1,2,3,4,5\}$.

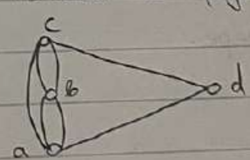
(45) Шта су то Ојлеров пут и Ојлерова тура у графу? Креирати примере.

Деф. Нека је G граф без петљи. Ојлеров пут (или Ојлерова стаза) је стаза у графу која садржи све чворове и гране тог графа. Ојлерова тура је Ојлерова стаза у којој су почетни и крајњи чвор једнаки.

Пример:



G_1 - Ојлеров пут
adcbabc



G_2 - Ојлерова тура
adcbabca

(46) Дефиниција Ојлеров и полу-Ојлеровог графа.

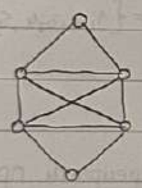
Деф. Граф је Ојлеров ако садржи Ојлерову туру. Граф је полу-Ојлеров ако садржи Ојлеров пут.

(47) Написати потребан и довољан услов да граф буде Ојлеров.

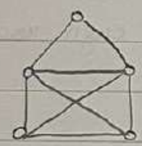
-Те: Нека је G граф. Граф G је Ојлеров акко је повезан и сваки чвор у G је парног степена.

(48) Написати потребан и довољан услов да граф који није Ојлеров буде полу-Ојлеров. Дати један пример графа који јесте Ојлеров и један пример графа који није Ојлеров.

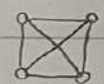
-Те: Нека је G=(V,E) граф који није Ојлеров. Граф G је полу-Ојлеров акко је G повезан и има тачно два чвора непарног степена.



Ојлеров граф



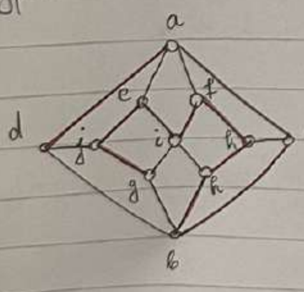
полу Ојлеров (није Ојлеров)



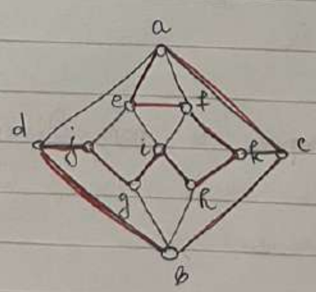
није ни Ојлеров, ни полу-Ојлеров

(49) Шта су то Хамилтонов пут и Хамилтонова контура у графу? Креирати примере.

-Нека је G граф. Хамилтонов пут у G је пут који садржи све чворове тог графа. Хамилтонова контура је Хамилтонов пут који је уједно и контура.



G_1 - Хамилтонов пут је dacbhkfiejg (полу-Хамилтонов)



G_2 - Хамилтонова контура је dbcaefkhigjd (Хамилтонов)

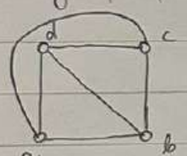
(50) Да ли је комплетан граф са n чворова Хамилтонов? Образложити.

-Комплетан граф K_n је Хамилтонов граф за свако $n \geq 3$. У комплетном графу K_n сваки чвор је повезан са свих $n-1$ осталих чворова. То значи да увек можемо конструисати пут који иде кроз све чворове без понављања и враћа се у почетак - управо оно што Хамилтонова контура захтева. За $n=1$ и $n=2$ нема смисла говорити о Хамилтоновој контури јер није могуће направити затворен циклус.

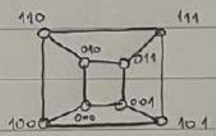
(51) Дефиниција и пример планарног графа.

деф. Граф је планаран ако се може нацртати у равни тако да не постоје гране које се секу (осим евентуално заједничких чворова). За такву графичку репрезентацију ћемо рећи да је планарна.

-примери:



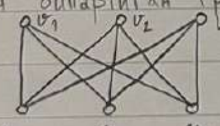
K_4



Q_3

(52) Дати два примера графова који нису планарни.

-пример 1: Комплетан бипартитан граф $K_{3,3}$ није планаран.



$|V(K_{3,3})| = 6$

$|E(K_{3,3})| = 3 \cdot 3 = 9$

$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 8$ ↯ $\Rightarrow$ граф није планаран

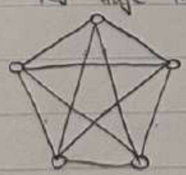
P.S. $|E| \leq 2|V| - 4$

-Ово важи за повезан планаран прост граф без контура дужине 3

-пример 2: Комплетан граф K_5 није планаран.

P.S. $|E| \leq 3|V| - 6$

-важи за повезане планарне просте графове



$|V(K_5)| = 5$

$|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10$

$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \Leftrightarrow 10 \leq 9$ ↯ $\Rightarrow$ граф није планаран