Informacioni inženjering
Pismeni ispit iz Analize 2
4. 4. 2022.

1. (12 poena) Odrediti oblast konvergencije i naći sumu reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n-1}(1-x)^n$.

2. (10 poena) Razviti u Tejlorov red u okolini tačke $x_0 = 1$ funkciju $f(x) = \ln \sqrt[3]{x^2+4x}$ i odrediti oblast konvergencije dobijenog razvoja.

3. (8 poena) Izračunati dužinu luka krive koja je zadata na sledeći način: $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in [0, 2\pi]$.

4. (9 poena) Izračunati vrednost krivolinijskog integrala $\int\limits_L (-1+x+y)\,dx + 2y\,dy$ po krivoj $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1,\ 0 \le y \le 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 = 0, 0 \le x \le 1, y \ge 0\}$, koja je orijentisana od tačke $A(1,0)$ ka tački $B(0,0)$:
   (a) direktno;
   (b) primenom Grinove formule.

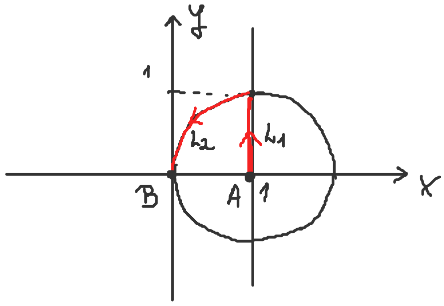
5. (7 poena) Odrediti analitičku funkciju $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, ako je $v(x,y) = 2xy + e^x \cos y$ i $f(0) = i$.

6. (10 poena) Ispitati prirodu singulariteta funkcije $f(z) = \frac{1-\cos(z-1)}{(z-1)^2(z+3)}$ i izračunati $\int\limits_L f(z)dz$, ako je kriva $L = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\}$ pozitivno orijentisana.

7. (10 poena) Izračunati zapreminu tela $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 + x^2 + y^2 \le z \le 4 - \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \ge 1\}$.

Prvi deo: zadaci 1, 2, 3
Drugi deo: zadaci 4, 5, 6
Studenti, koji nemaju pravo polaganja po delovima, rade zadatke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

4.



$x^2 - 2x + y^2 = 0$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$
$(x-1)^2 + y^2 = 1$

a) $L = L_1 \cup L_2$

ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА:

L_1: $x(t) = 1$, $y(t) = t$, $t \in [0,1]$
$dx = 0 \cdot dt$, $dy = 1 \cdot dt$

L_2: $x(t) = 1 + 1\cdot\cos t$
$y(t) = 1 \cdot \sin t$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$dx = -\sin t\,dt$
$dy = \cos t\,dt$

$\int\limits_L = \int\limits_{L_1} + \int\limits_{L_2}$

$\int\limits_{L_1} (-1+x+y)dx + 2y\,dy = \int\limits_0^1 (-1+1+t)\cdot 0 \cdot dt + \int\limits_0^1 2\cdot t \cdot dt = \cancel{2}\cdot\frac{t^2}{\cancel{2}}\Big|_0^1 = 1$

$\int\limits_{L_2} (-1+x+y)\,dx + 2y\,dy = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cancel{-1}\cancel{+1}+\cos t + \sin t)(-\sin t\,dt) + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cdot\sin t\cdot\cos t\,dt =$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t\cos t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 t\,dt + 2\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t\cos t\,dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t\cos t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$

$\sin t = m$
$\cos t\,dt = dm$

$$= \int_{1}^{0} m\,dm - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2t\,dt$$

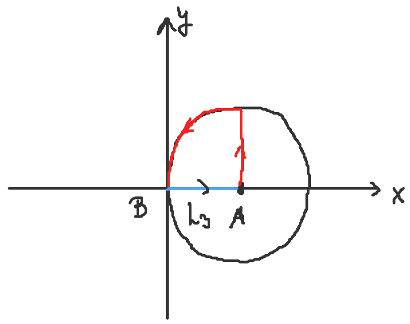
$2t = k$
$2dt = dk \Rightarrow dt = \frac{1}{2}dk$

$$= \frac{m^2}{2}\Big|_{1}^{0} - \frac{1}{2}t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{4}\int_{\pi}^{2\pi}\cos k\,dk$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin k\Big|_{\pi}^{2\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\underbrace{\left(\sin 2\pi - \sin\pi\right)}_{=0} = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\int_L (-1+x+y)\,dx + 2y\,dy = 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

b)



$$\int_L (-1+x+y)\,dx + 2y\,dy$$

$L^* = L \cup L_3$ — ЗАТВОРЕНА, ПОЗ. ОР. КРИВА

$$\int_{L^*} (-1+x+y)\,dx + 2y\,dy = \iint_{\sigma} (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

$P = -1+x+y$ $\quad$ $Q = 2y$

$P_y = 1$ $\quad$ $Q_x = 0$

$$\int_{L^*} (-1+x+y)\,dx + 2y\,dy = -\iint_{\sigma} dx\,dy = -P(\sigma) = -\frac{1}{4}\cdot 1^2\pi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{L} = \int_{L^*} - \int_{L_3}$$

L_3: $x(t) = t$, $y(t) = 0$, $t \in [0,1]$

$dx = dt$, $dy = 0\cdot dt$

$$\int_{L_3} (-1+x+y)\,dx + 2y\,dy = \int_0^1 (-1+t+0)\,dt + \int_0^1 2\cdot 0\,dt = \left(-t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_L (-1+x+y)\,dx + 2y\,dy = -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Klasifikacija singulariteta prema razvoju u red u okolini tačke z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \Rightarrow z_0$ ЈЕ ПРИВИДАН СИНГУЛАРИТЕТ

2) $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \Rightarrow z_0$ ЈЕ ПОЛ РЕДА k

$\rightarrow$ КОНАЧНО МНОГО НЕГ.

3) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \Rightarrow z_0$ ЈЕ ЕСЕНЦИЈАЛНИ СИНГ.

$\rightarrow$ БЕСК. МНОГО НЕГ. СТЕПЕНА

Klasifikacija singulariteta prema limesu $z \to z_0$

$\lim_{z \to z_0} f(z)$:

- const. $\Rightarrow z_0$ ЈЕ ПРИВИДАН СИНГ.
- ∞, $\Rightarrow z_0$ ЈЕ ПОЛ
- НЕ ПОСТОЈИ $\Rightarrow z_0$ ЈЕ ЕСЕНЦИЈАЛНИ СИНГ.

$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}$

$\hookrightarrow$ КОЕФИЦИЈЕНТ УЗ $\frac{1}{z-z_0}$

z_0 ЈЕ ПРИВ. СИНГ. $\Rightarrow \mathrm{Res}(f, z_0) = 0$

z_0 ЈЕ ПОЛ РЕДА $k \Rightarrow \mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \left((z-z_0)^k \cdot f(z) \right)^{(k-1)}$ ← ИЗВОД

- $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$

$g(z) \leftarrow z_0$ ЈЕ НУЛА m-ПУТА

$h(z) \leftarrow z_0$ ЈЕ НУЛА k-ПУТА

$k > m \rightarrow z_0$ ЈЕ ПОЛ РЕДА $k-m$

$m \geq k \rightarrow z_0$ ЈЕ ПРИВИДАН СИНГ.

$z = \infty$ ЈЕ СИНГУЛАРИТЕТ ЗА ФЈУ $f(z)$ АКО ЈЕ $u = \frac{1}{z}$, $u = 0$ СИНГУЛАРИТЕТ ЗА ФЈУ $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$

$\Rightarrow$ ОСТАТАК У ∞ ЈЕ УВЕК $\mathrm{Res}(f, \infty) = -\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_i)$

6. $f(z) = \dfrac{1-\cos(z-1)}{(z-1)^2(z+3)}$ $\quad \rightarrow g(z)$, $\rightarrow h(z)$

СИНГУЛАРИТЕТИ: $z=1$ И $z=-3$

$z=1$

$z=1$ ЈЕ ДВОСТРУКА НУЛА ФЈЕ $h(z)$

$$g(z) = 1-\cos(z-1)\Big|_{z=1} = 1-\cos 0 = 0$$

$$g'(z) = \sin(z-1)\Big|_{z=1} = \sin 0 = 0$$

$$g''(z) = \cos(z-1)\Big|_{z=1} = \cos 0 = 1 \neq 0$$ $\Rightarrow$ $z=1$ ЈЕ ДВОСТРУКА НУЛА ФЈЕ $g(z)$

$\Rightarrow$ $z=1$ ЈЕ ПРИВИДАН СИНГ. $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}(f,1)=0$

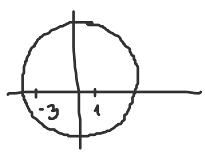
Т z_0 ЈЕ НУЛА К-ПУТА ФЈЕ $f(z)$ АКО ЈЕ

$$f(z)=0$$
$$f'(z)=0$$
$$\vdots$$
$$f^{(k-1)}(z)=0$$
$$f^{(k)}(z)\neq 0$$

$z=-3$ $\Rightarrow$ ПОЛ ПРВОГ РЕДА

$$\mathrm{Res}(f,-3) = \frac{1}{0!}\cdot\lim_{z\to -3}\left(\cancel{(z+3)}\cdot\frac{1-\cos(z-1)}{(z-1)^2\cdot\cancel{(z+3)}}\right) = \frac{1-\cos(-4)}{16} = \frac{1-\cos 4}{16}$$

$$\oint_L f(z)\,dz \qquad L=\{z\in\mathbb{C} : |z|=4\}$$



$$\oint_L f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\left(\mathrm{Res}(f,1)+\mathrm{Res}(f,-3)\right) = 2\pi i\cdot\frac{1-\cos 4}{16} = \frac{1-\cos 4}{8}\pi i$$

5. $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$, $z = x + yi$

$v(x,y) = 2xy + e^x \cos y$, $f(0) = i$

$v_x = 2y + e^x \cos y$, $v_y = 2x - e^x \sin y$

Koši - Rimanovi uslovi : $u_x = v_y$ i $\underline{u_y = -v_x}$

$u_x = 2x - e^x \sin y$

$u(x,y) = \int (2x - e^x \sin y)\,dx = \cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}} - e^x \sin y + \varphi(y)$

$= x^2 - e^x \sin y + \varphi(y)$, $\varphi(y) = ?$

$u_y = -v_x$

$-\cancel{e^x \cos y} + \varphi'(y) = -2y - \cancel{e^x \cos y}$

$\varphi'(y) = -2y$

$\varphi = \int -2y\,dy = -2\frac{y^2}{2} + C = -y^2 + C$

$u(x,y) = x^2 - e^x \sin y - y^2 + C$

$f(z) = x^2 - e^x \sin y - y^2 + C + 2xyi + ie^x \cos y$

$= (x + yi)^2 + i\cdot e^x(\cos y + i\cdot \sin y) + C = z^2 + i\cdot e^z + C$

$f(0) = i \Rightarrow 0^2 + \cancel{i\cdot e^0} + C = \cancel{i} \Rightarrow C = 0$

$f(z) = z^2 + i\cdot e^z$