UNIVERZITET U NOVOM SADU, FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
Verovatnoća i slučajni procesi, letnji semestar akademske 2022/2023. godine

Formula totalne verovatnoće. Bajesova formula.

Zadatak 1

POSTAVKA: Novčić se baca dva puta. Ako oba puta padne pismo, izvlače se odjednom dve kuglice iz kutije koja sadrži 2 bele i 3 zelene kuglice. U suprotnom, izvlači se dva puta po jedna kuglica, sa vraćanjem iz iste kutije.

(a) Izračunati verovatnoću da su izvučene kuglice različitih boja.

(b) Ako su izvučene kuglice različitih boja, izračunati verovatnoću da pismo nije palo dva puta.

REŠENJE:

(a) Hipoteze H_1 – oba puta je palo pismo (“PP”), i H_2 – nije oba puta palo pismo (“PG”, “GP”, “GG”), čine potpun sistem događaja. Važi da je:

$$P(H_1) = P(\text{“oba puta je palo pismo”}) = P(\text{“PP”}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$P(H_2) = P(\text{“nije oba puta je palo pismo”}) = P(\text{“PG”}) + P(\text{“GP”}) + P(\text{“GG”}) = \frac{3}{4}.$$

Posmatrajmo sada događaj A – izvučene su kuglice različitih boja. Ako se realizovao događaj H_1 (dvaput je palo pismo), onda je verovatnoća da će se realizovati i događaj A jednaka sa:

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

jer se odjednom izvlače dve kuglice iz kutije koja sadrži 2 bele i 3 zelene kuglice. Slično:

$$P(A|H_2) = P(\text{“BZ”}) + P(\text{“ZB”}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25},$$

zato što se izvlači dva puta po jedna kuglica (te je redosled izvučenih boja bitan) sa vraćanjem. Prema formuli totalne verovatnoće:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{25} = \frac{51}{100}.$$

(b) Verovatnoća traženog događaja, $P(H_2|A)$, može se izračunati direktno primenom Bajesove formule, na sledeći način:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{12}{25}}{\frac{51}{100}} = \frac{12}{17}.$$

Zadatak 2

Postavka: U kutiji se nalaze 3 ispravna novčića i jedan neispravan novčić koji ima grb sa obe strane. Na slučajan način se iz kutije bira jedan novčić i baca 2 puta.

(a) Izračunati verovatnoću da će oba puta pasti grb.

(b) Ako je oba puta pao grb, koliko iznosi verovatnoća da je iz kutije izabran ispravan novčić?

Rešenje:

(a) Događaji H_1 – izvučen je ispravan novčić, i H_2 – izvučen je neispravan novčić, predstavljaju hipoteze ovog zadatka. Njihove verovatnoće su očigledno $P(H_1) = \frac{3}{4}$ i $P(H_2) = \frac{1}{4}$, jer od ukupno 4 novčića imamo 3 ispravna i 1 neispravan.

Neka je dat događaj A – oba puta će pasti grb. Po postavci zadatka imamo da je:

$$P(A|H_1) = P(\text{“GG”}|H_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad \text{i} \quad P(A|H_2) = P(\text{“GG”}|H_2) = 1 \cdot 1,$$

jer se u prvom slučaju posmatraju ispravni novčići, a u drugom neispravan. Prema formuli totalne verovatnoće:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{7}{16}.$$

(b) Verovatnoća traženog događaja, $P(H_1|A)$, može se izračunati direktno primenom Bajesove formule, na sledeći način:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}.$$

Zadatak 3

Postavka: Prva kutija sadrži 5 crvenih i 6 belih kuglica, a druga kutija sadrži 4 crvene i 4 bele kuglice. Iz prve kutije se nasumice izvlači jedna kuglica i premešta u drugu kutiju. Zatim se iz druge kutije na slučajan način izvlači jedna kuglica.

(a) Izračunati verovatnoću da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica.

(b) Ako se zna da je iz druge kutije izvučena crvena kuglica, koliko iznosi verovatnoća da je iz prve u drugu kutiju premeštena crvena kuglica?

Rešenje:

(a) Primetimo da ne možemo znati kolika je verovatnoća da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica (nazovimo ovo događaj A) ako ne znamo najpre sadržaj druge kutije nakon prebacivanja, ili preciznije, ako ne znamo koje je boje prebačena kuglica.

To nam govori da događaji H_1 – iz prve kutije je prebačena crvena kuglica ("C"), i H_2 – iz prve kutije je prebačena bela kuglica ("B"), predstavljaju hipoteze ovog zadatka. Njihove verovatnoće su očigledno $P(H_1) = \frac{5}{11}$ i $P(H_2) = \frac{6}{11}$, jer od ukupno 11 kuglica imamo 5 crvenih i 6 belih.

Ako je u drugu kutiju prebačena crvena kuglica (realizovao se H_1), onda druga kutija nakon prebacivanja sadrži 4 bele i 5 crvenih, te je verovatnoća da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica jednaka $P(A|H_1) = \frac{5}{9}$.

Slično, ako je u drugu kutiju prebačena bela kuglica (realizovao se H_2), onda druga kutija nakon prebacivanja sadrži 5 belih i 4 crvene, te je verovatnoća da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica $P(A|H_2) = \frac{4}{9}$.

Znajući sve ovo, prema formuli totalne verovatnoće:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{11} \cdot \frac{4}{9} = \frac{49}{99}.$$

(b) Verovatnoća traženog događaja, $P(H_1|A)$, može se izračunati diretno primenom Bajesove formule, na sledeći način:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{11} \cdot \frac{5}{9}}{\frac{49}{99}} = \frac{25}{49}.$$

Zadatak 4

Postavka: Iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ na slučajan način se bira jedan broj, a zatim bez vraćanja još jedan.

(a) Naći verovatnoću da je drugi broj veći od prvog;

(b) Naći verovatnoću da je drugi broj za dva veći od prvog;

(c) Ako je drugi broj manji od prvog, izračunati verovatnoću da je u prvom izvlačenju izvučen broj 3.

Rešenje:

Mogu se uvesti hipoteze H_i — u prvom izvlačenju je izvučen broj i, gde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. One se sve realizuju sa verovatnoćama $\frac{1}{n}$, jer ima jedan povoljan broj (broj i) od n mogućih brojeva.

(a) Događaj koji nas zanima je A – drugi izvučeni broj je veći od prvog. Treba primetiti da je:

$$P(A|H_1) = \frac{n-1}{n-1}, \quad P(A|H_2) = \frac{n-2}{n-1}, \quad P(A|H_3) = \frac{n-3}{n-1}, \cdots$$
$$P(A|H_{n-2}) = \frac{2}{n-1}, \quad P(A|H_{n-1}) = \frac{1}{n-1}, \quad P(A|H_n) = 0,$$

zato što ako je prvi izvučeni broj $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, onda od preostalih $(n-1)$ brojeva koji mogu biti izvučeni u drugom izvlačenju ima samo $(n-k)$ onih koji su veći od k.

Primenom formule totalne verovatnoće imamo:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \cdot 0 =$$
$$= \frac{1}{n(n-1)}\left((n-1) + (n-2) + \cdots + 1\right) = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \frac{1}{2},$$

gde je korišćen sledeći izraz za zbir prvih k prirodnih brojeva:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

(b) Treba izračunati verovatnoću događaja B – drugi izvučeni broj je za dva veći od prvog. Imamo:

$$P(B|H_1) = \frac{1}{n-1}, \quad P(B|H_2) = \frac{1}{n-1}, \quad P(B|H_3) = \frac{1}{n-1}, \cdots$$
$$P(B|H_{n-2}) = \frac{1}{n-1}, \quad P(B|H_{n-1}) = 0, \quad P(B|H_n) = 0,$$

zato što ako je prvi izvučeni broj $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$, onda od preostalih $(n-1)$ brojeva koji mogu biti izvučeni u drugom izvlačenju ima samo jedan koji je za tačno dva veći od k (to je broj $k+2$). Ako su u prvom izvlačenju izvučeni $n-1$ ili n, očigledno među preostalim brojevima nema broj za dva veći.

Slično kao u prethodnom delu zadatka:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(B|H_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{1}{n} \cdot 0 =$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot (n-2) = \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

(c) U ovom delu zadatka se posmatra događaj $\bar{A}$ – drugi broj je manji od prvog, čija je verovatnoća data sa:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Prema postavci, traži se verovatnoća događaja $H_3|\bar{A}$, koja se može izračunati Bajesovom formulom:

$$P(H_3|\bar{A}) = \frac{P(H_3)P(\bar{A}|H_3)}{P(\bar{A})} = \frac{P(H_3)(1 - P(A|H_3))}{1 - P(A)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{n-3}{n-1}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{n-1-n+3}{n-1}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{n(n-1)}.$$

Zadatak 5

Postavka: U kutiji se nalaze 4 ispravna i 2 neispravna proizvoda. Na slučajan način se izvlači grupa od 3 proizvoda i ako među njima ima neispravnih, svi se vraćaju. Ako je grupa proizvoda vraćena, koliko iznosi verovatnoća da je vraćena zato što su u njoj bila tačno 2 neispravna proizvoda?

Rešenje:

Primetimo da ne možemo znati kolika je verovatnoća da će se grupa proizvoda vratiti (nazovimo ovo događaj A) ako ne znamo najpre sadržaj koja tri proizvoda su izvučena, ili preciznije, ako ne znamo koliko među tri izvučena proizvoda ima neispravnih.

To nam govori da događaji H_i – izvučeno je i neispravnih proizvoda, $i = 0, 1, 2$, predstavljaju hipoteze ovog zadatka. Njihove verovatnoće su očigledno redom:

$$P(H_0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{12}{20}, \quad \text{i} \quad P(H_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20}.$$

Uslovne verovatnoće $P(A|H_0)$, $P(A|H_1)$ i $P(A|H_2)$ je lako odrediti jer po postavci zadatka ako se među tri izvučena proizvoda nalazi makar jedan neispravan, grupa je sigurno vraćena:

$$P(A|H_0) = 0, \quad P(A|H_1) = 1, \quad \text{i} \quad P(A|H_2) = 1.$$

Primenom formule totalne verovatnoće imamo:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i) = P(H_0)P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$$
$$= \frac{4}{20} \cdot 0 + \frac{12}{20} \cdot 1 + \frac{4}{20} \cdot 1 = \frac{16}{20},$$

pa je konačno:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{20} \cdot 1}{\frac{16}{20}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Napomena: Zadatak se može kraće rešiti ako se primeti da je A disjunktna unija događaja H_1 i H_2. Naime, A će se realizovati ako se realizuje ili H_1 (1 neispravan) ili H_2 (2 neispravna), a nije moguće da se u istoj grupi nalaze i 1 i 2 neistravna proizvoda (realizuju i H_1 i H_2, tj. njihov presek).

Onda je direktno:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2A)}{P(A)} = \frac{P(H_2(H_1 + H_2))}{P(H_1 + H_2)} = \frac{P(H_2)}{P(H_1) + P(H_2)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{4},$$

gde smo koristili skupovnu jednakost $H_2(H_1 + H_2) = H_2$ zato što je presek podskupa i njegovog nadskupa jednak podskupu. Takođe, $P(H_1 + H_2) = P(H_1) + P(H_2)$ po definiciji verovatnoće.

Zadatak 6

Postavka: Crvenkapa ide kod bake jednim od dva puta: p_1 ili p_2, i to dvostruko verovatnije putem p_1, nego putem p_2. Ako krene putem p_i, $i \in \{1,2\}$, verovatnoća da će sresti vuka je $\frac{1}{i+1}$, i pri tome će je on pojesti sa verovatnoćom $\frac{i+1}{i+2}$. Ako je vuk ne pojede, tada sigurno stiže kod bake. Izračunati verovatnoću da je Crvenkapa stigla kod bake.

Rešenje:

Najpre primetimo da su hipoteze koje će se koristiti događaji H_i – Crvenkapa je krenula putem i, za $i \in \{1,2\}$. Hipoteze H_1 i H_2 čine potpun sistem događaja (jer Crvenkapa mora ići tačno jednim putem do bake), te je suma njihovih verovatnoća jednaka jedinici. Otuda je:

$$\left.\begin{array}{r} P(H_1)+P(H_2)=1, \\ P(H_1):P(H_2)=2:1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} P(H_1)=\frac{2}{3}, \\ P(H_2)=\frac{1}{3}. \end{array}$$

Uvodi se oznaka V za događaj “Crvenkapa je srela vuka”. To znači da su sve mogućnosti (dešavanja) koja su se Crvenkapi mogle desiti opisane sistemom događaja $\{H_1V, H_1\bar{V}, H_2V, H_2\bar{V}\}$, čije su pojedinačne verovatnoće date sa:

$$\begin{aligned}
P(H_1V) &= P(H_1)\cdot P(V|H_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3};\\
P(H_1\bar{V}) &= P(H_1)\cdot P(\bar{V}|H_1) = \frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{1+1}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3};\\
P(H_2V) &= P(H_2)\cdot P(V|H_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9};\\
P(H_2\bar{V}) &= P(H_2)\cdot P(\bar{V}|H_2) = \frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2+1}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

To znači da ćemo verovatnoću događaja S – Crvenkapa je stigla kod bake računati kao:

$$P(S) = P(H_1V)P(S|H_1V) + P(H_1\bar{V})P(S|H_1\bar{V}) + P(H_2V)P(S|H_2V) + P(H_2\bar{V})P(S|H_2\bar{V}).$$

U zadatku su date verovatnoće da vuk pojede Crvenkapu $\left(\frac{i+1}{i+2}\right)$, što znači da je vuk nije pojeo sa verovatnoćom $1-\frac{i+1}{i+2}=\frac{1}{i+2}$. Pritom, Crvenkapa stiže kod bake samo ako je vuk nije pojeo. Zato:

$$\begin{aligned}
P(S|H_1V) &= \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3},\\
P(S|H_2V) &= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4},\\
P(S|H_1\bar{V}) &= 1,\\
P(S|H_2\bar{V}) &= 1,
\end{aligned}$$

te uvrštavanjem ovih vrednosti u formulu totalne verovatnoće dobijamo:

$$P(S) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{9}\cdot 1 = \frac{25}{36}.$$