1.5 Kombinatorika i funkcije

Klasični kombinatorni objekti mogu se predstaviti pomoću osobina preslikavanja.

1.5.1 Funkcije, injektivne i surjektivne

Funkcija skupa A u skup B je svaka binarna relacija, tj. podskup od $A \times B$ sa osobinom da se u njemu svaki element skupa A pojavljuje tačno jednom kao prva komponenta. Druge komponente su proizvoljni elementi skupa B i može biti više parova sa istom drugom komponentom. Skupu svih preslikavanja odgovaraju permutacije multiskupa i broj preslikavanja može se izračunati kao što je to formulisano sledećim tvrđenjem.

Teorema 23 *Neka je* $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ *i* $B = \{b_1, \dots, b_l\}$. *Broj svih preslikavanja skupa* A *u skup* B *jednak je*

$$|\{f : A \to B\}| = l^m.$$

Dokaz. Svako preslikavanje $f : A \to B$ može se prikazati kao skup parova

$$\{(a_1, f(a_1)), \dots, (a_m, f(a_m)\}.$$

Ako proizvoljno uredimo skup A, na primer $(a_1, \dots, a_m)$, onda funkciju možemo predstaviti kao l-torku vrednosti u tačkama domena (u skladu sa uređenjem), tj.

$$(f(a_1), \dots, f(a_m)) \in B \times \dots \times B.$$

Svaka takva m-torka je jedna m-permutacija multiskupa $M = [b_1, \dots, b_l]_{m,\dots,m}$. Broj takvih l-torki jednak je broju elemenata skupa $B \times \dots \times B$, tj.

$$|B^m| = |B|^m = l^m.$$

□

Neka je $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ i $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Preslikavanje $f : A \to B$ je injektivno ako zadovoljava sledeću osobinu:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, m\} \;\; i \neq j \Rightarrow f(a_i) \neq f(a_j).$$

Ako se preslikavanje posmatra kao podskup skupa $A \times B$, to znači da različitim prvim komponentama uvek odgovaraju različite druge komponente.

Teorema 24 *Neka je* $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ *i* $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, *gde je* $1 \leq m \leq n$. *Broj svih injektivnih preslikavanja skupa* A *u skup* B *jednak je*

$$|\{f : A \xrightarrow{1-1} B\}| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Dokaz. Ako je preslikavanje predstavljeno kao uređena m-torka vrednosti funkcije $(f(a_1), \ldots, f(a_m))$ u kojoj je svaki par komponenti različit, onda svakom preslikavanju odgovara jedna m-permutacija skupa B. Broj takvih m-permutacija jednak je $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$. $\square$

Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Preslikavanje $f : A \to B$ je surjektivno ako zadovoljava sledeću osobinu:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}\ \exists i \in \{1, \ldots, m\}\ f(a_i) = b_j.$$

Broj surjektivnih preslikavanja ćemo odrediti primenom principa uključenja-isključenja.

Teorema 25 *Neka su A i B skupovi sa osobinom $|A| = m$, $|B| = n$ i $1 \leq n \leq m$. Broj surjektivnih preslikavanja skupa A u skup B jednak je*

$$|\{f : A \xrightarrow{na} B\}| = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^m.$$

Dokaz. Neka je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Preslikavanje $f : A \to B$ koje nije surjektivno ima osobinu da postoji element skupa B koji nije u skupu slika elemenata iz skupa A (koji ćemo označiti sa $im(f)$), tj. f pripada jednom od sledećih skupova:

$$\begin{array}{rcl} B_1 & = & \{f : A \to B \mid b_1 \notin im(f)\} \\ B_2 & = & \{f : A \to B \mid b_2 \notin im(f)\} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_n & = & \{f : A \to B \mid b_n \notin im(f)\}. \end{array}$$

Skup svih preslikavanja skupa A u skup B možemo podeliti na skup svih preslikavanja koja su "na" i skup svih preslikavanja koja nisu "na". Tada je

$$\begin{array}{rcl} \{f : A \to B\} & = & \{f : A \to B : f \text{ je "na" }\} \cup \{f : A \to B : f \text{ nije "na" }\}, \text{ tj.} \\ \{f : A \to B\} & = & \{f : A \to B : f \text{ je "na" }\} \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n. \end{array}$$

Na osnovu principa sume sledi

$$|\{f : A \to B\}| = |\{f : A \xrightarrow{na} B\}| + |B_1 \cup \ldots \cup B_n|.$$

Primenom principa uključenja-isključenja,

$$|B_1 \cup \ldots \cup B_n| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \ldots, n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} B_i \right|.$$

Može se zaključiti da za sve $i, j, i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}$ važi

$$\begin{array}{lcl} |B_i| & = & |\{f : A \to B \setminus \{b_i\}\}| = (n-1)^m \\ |B_i \cap B_j| & = & |\{f : A \to B \setminus \{b_i, b_j\}\}| = (n-2)^m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ |B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_{n-1}}| & = & |\{f : A \to B \setminus \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_{n-1}}\}\}| = 1 \\ |B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_n}| & = & |\{f : A \to B \setminus B\}| = 0. \end{array}$$

Tako dobijamo

$$|B_1 \cup \ldots \cup B_n| = n(n-1)^m - \binom{n}{2}(n-1)^m + \ldots + (-1)^{n-2}.$$

Kako je broj preslikavanja skupa A u skup B jednak n^m, dobijamo

$$\begin{aligned} |\{f : A \xrightarrow{na} B\}| =& |\{f : A \to B\}| - |B_1 \cup \ldots \cup B_n| \\ =& n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

□

1.5.2 Stirlingovi brojevi druge vrste

U ovom delu ćemo se baviti prebrojavanjem još jedne vrste kombinatornih raspoređivanja objekata koje do sada nismo razmatrali. U pitanju je problem određivanja broja načina da se m različitih objekata rasporedi u n jednakih kutija, tako da nijedna kutija ne bude prazna. Takva raspoređivanja nazivamo particijama.

Definicija 26 *Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Kažemo da je $\{B_1, \ldots, B_n\}$ particija skupa A na n podskupova ako važi:*

(1) $A = B_1 \cup \ldots \cup B_n$,

(2) $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \ B_i \neq \emptyset$ *i*

(3) $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \ \ i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$.

Za broj svih particija skupa uvodimo posebnu oznaku, definisanu sledećom definicijom.

Definicija 27 *Neka je $1 \leq n \leq m$. Broj particija skupa od m elemenata na n podskupova, u oznaci $S(m, n)$, naziva se Stirlingov broj druge vrste.*

Primer 1 *Neka je $A = \{a, b, c\}$. Napisati sve particije skupa A na dva (neprazna) podskupa.*

Rešenje. Skup A možemo napisati kao kao uniju 1,2 ili 3 neprazna (po parovima) disjunktna skupa na sledeće načine:

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c\}, \\ A &= \{a\} \cup \{b, c\}, \\ A &= \{b\} \cup \{a, c\}, \\ A &= \{c\} \cup \{a, b\} \\ A &= \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}. \end{aligned}$$

□

Stirlingove brojeve druge vrste zgodno je izračunati koristeći odgovarajuću tablicu koja se kreira na osnovu osobina koje su formulisane sledećim tvrđenjem.

Teorema 28 *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i neka je $n \leq m$. Tada je*

(1) $S(m, m) = 1$,

(2) $S(m, 1) = 1$,

(3) $S(m, n) = S(m-1, n-1) + nS(m-1, n),\ 0 < n < m.$

Dokaz.

(i) Ako posmatramo skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, onda je jedino moguće razbijanje tog skupa na m nepraznih podskupova oblika

$$\{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_m\}\}.$$

(ii) Ako posmatramo skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, onda je jedino moguće razbijanje tog skupa na 1 neprazan podskup oblika

$$\{A\}.$$

(iii) Posmatrajmo skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ i fiksirajmo a_1. Pretpostavimo da je skup A razbijen na podskupove $B_1, \ldots, B_n$. Imamo dve opcije:

- ako je a_1 jedini element nekog podskupa, onda je broj takvih razbijanja jednak broju razbijanja skupa $A \setminus \{a_1\}$ na $n-1$ podskupova. Takvih razbijanja ima $S(m-1, n-1)$.

– ako podskup koji sadrži a_1 sadrži bar još jedan element. U ovom slučaju, broj načina da razbijemo preostalih $m-1$ elemenata na n skupova jednak je $S(m-1,n)$ i za svako takvo razbijanje imamo n različitih načina da izaberemo podskup kojem ćemo dodati element a_1. Znači, broj takvih razbijanja jednak je $nS(m-1,n)$.

□

Koristeći osobine iz prethodnog tvrđenja, možemo formirati tablicu Stirlingovih brojeva druge vrste.

(m,n)	1	2	3	4	5	6	...
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
...							...

Sledeće tvrđenje daje vezu između Stirlingovih brojeva druge vrste i surjektivnih preslikavanja.

Veza između broja surjektivnih preslikavanja i Stirlingovih brojeva druge vrste data je u sledećem tvrđenju.

Teorema 29 *Neka je $0 < n \leq m$. Tada je*

$$\{f : A \to B : f \text{ je "na"}\} = n! \cdot S(m,n).$$

Dokaz. Ako je m elemenata raspoređeno u n jednakih (nepraznih) kutija, onda bismo te kutije mogli da označimo na $n!$ različitih načna. Svako označavanje odgovara jednom bijektivnom preslikavanju skupa elemenata na skup oznaka kutija. Tako je

$$n! \cdot S(m,n) = |\{f : A \to B : f \text{ je "na" preslikavanje }\}|.$$

□

1.5.3 Zadaci za vežbu

1. **Odrediti broj particija skupa $\{1,2,3,4,5\}$ na tri (neprazna) podskupa.**

   Rešenje. Broj particija skupa $\{1,2,3,4,5\}$ na tri (neprazna) podskupa jednak je Stirlingovom broju $S(5,3)=25$. $\square$

2. **Neka je $A=\{a,b,c\}$ i $B=\{1,2\}$.**

   (i) Napisati sve particije skupa A na dva neprazna podskupa.

   (ii) Napisati sva surjektivna preslikavanja $f:A\to B$.

   Rešenje.

particije (neoznačene kutije)	"na" preslikavanja (označene kutije)
$\{\{a,b\},\{c\}\}$	$\{(a,1),(b,1),(c,2)\}$
	$\{(a,2),(b,2),(c,1)\}$
$\{\{a,c\},\{b\}\}$	$\{(a,1),(b,2),(c,1)\}$
	$\{(a,2),(b,1),(c,2)\}$
$\{\{a\},\{b,c\}\}$	$\{(a,1),(b,2),(c,2)\}$
	$\{(a,2),(b,1),(c,1)\}$

   $\square$

3. **Pokazati da je** $S(m,m-1)=\binom{m}{2}$.

   Rešenje. Primetimo prvo da particija skupa od m elemenata na $m-1$ podskupova sadrži jedan dvočlani podskup i sve ostale jednočlane podskupove. Tako je broj načina da se skup od m elemenata razbije na $m-1$ nepraznih podskupova jednak broju načina da se od m elemenata izaberu dva za taj jedan dvčlani podskup tj. $\binom{m}{2}$. $\square$

4. **Izraziti $S(m,m-2)$ kao funkciju koja zavisi od m.**

   Rešenje. Ako je skup od m elemenata razdeljen na $m-2$ podskupa, postoje sledeće mogućnosti:

   (a) jedan podskup ima 3 elementa, svi ostali imaju po jedan - takvih izbora ima onoliko koliko ima načina da od m elemenata izaberemo 3 za taj jedan podskup, a to je $\binom{m}{3}$;

   (b) dva podskupa imaju po dva elementa - takvih izbora ima onoliko koliko ima načina da od m elemenata izaberemo 4 elementa (to je $\binom{m}{4}$) i da svaki takav izbor podelimo na dva podskupa od po 2 elementa (to je 3), što daje $3\cdot\binom{m}{4}$.

   Znači,
$$S(m,m-2)=\binom{m}{3}+3\binom{m}{4}.$$

Napomena. Treba primetiti da zadatak ima više rešenja. Ostavljamo čitaocu za vežbu, na primer, kombinatornu interpretaciju rešenja

$$S(m, m-2) = \binom{m}{3} + \frac{1}{2}\binom{m}{2}\binom{m-2}{2}.$$

□

5. **Pokazati da je** $S(m, 2) = 2^{m-1} - 1$.

Rešenje. Ako je skup od m elemenata razdeljen na dva podskupa, onda jedan od ta dva podskupa ima 1 ili 2 ili … ili $m-1$ elemenata, a taj broj je

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m-1} = (1+1)^m - 2 = 2^m - 2.$$

Treba primetiti da smo na ovaj način svaku podelu skupa od m elemenata na dva podskupa uračunali dva puta. Odatle zaključujemo da je

$$S(m, 2) = \frac{2^m - 2}{2} = 2^{m-1} - 1.$$

□