По/ПЗИ

$X : \mathcal{B}(n,p) \Rightarrow X^* = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} : \mathcal{N}(0,1)$

## MUAVR-LAPLASOVA TEOREMA – osnovni zadaci

$np = 25 \cdot 0{,}6 = 15$

$\sqrt{npq} = \sqrt{25 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = \sqrt{6}$

$X^* = \frac{X-15}{\sqrt{6}}$

---

[1] *Neka $X$ ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(25, 0.6)$. Izračunati verovatnoće* $\mathsf{P}(X \le 15)$, $\mathsf{P}(20 \le X)$ *i* $\mathsf{P}(10 \le X \le 22)$ *koristeći aproksimaciju binomne raspodele normalnom raspodelom.*

Rešenje:

$X : \mathcal{B}(25, 0.6) \quad n \cdot p = 25 \cdot 0.6 = 15,\ \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{25 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = \sqrt{6},$

$\to\ X^* = \frac{X-15}{\sqrt{6}} : \mathcal{N}(0,1).$

$\mathsf{P}(X \le 15) = \mathsf{P}(\frac{X-15}{\sqrt{6}} \le \frac{15-15}{\sqrt{6}}) = \mathsf{P}(X^* \le 0) = \Phi(0) = 0.5.$

$\mathsf{P}(20 \le X) = 1 - \mathsf{P}(X < 20) = 1 - \mathsf{P}(X^* < \frac{20-15}{\sqrt{6}}) = 1 - \mathsf{P}(X^* < 2.04124) =$

$= 1 - \Phi(2.04) = 1 - 0.9793 = 0.0207.$

$\mathsf{P}(10 \le X \le 22) = \mathsf{P}(\frac{10-15}{\sqrt{6}} \le X^* \le \frac{22-15}{\sqrt{6}}) = \mathsf{P}(-2.04124 \le X^* \le 2.8577) =$

$= \Phi(2.86) - \Phi(-2.04) = 0.9979 + 0.9793 - 1 = 0.9772.$

---

ЈЕСТЕЛНИЦЕ

Ф писмо

[illegible]

[2] *Dinar se baca 400 puta. Naći zakon raspodele slučajne promenljive $X$ koja predstavlja broj palih pisama. Koristeći aproksimaciju normalnom raspodelom izračunati verovatnoće*

$X : \mathcal{B}(400, \frac{1}{2})$

(a) *da će broj palih pisama biti veći od broja palih grbova,*

(b) *da će broj palih pisama biti najviše 185.*

$X^* = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} : \mathcal{N}(0,1)$

$X$ – писма бр.

$400 - X$ = бр. грбова

$P(X > 400 - X) = P(2X > 400) = P(X > 200)$

Rešenje: Slučajna promenljiva $X$ ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(400, \frac{1}{2})$, $n \cdot p = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$, $\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$, , tako da $X^* = \frac{X-200}{10} : \mathcal{N}(0,1)$.

(a) $\mathsf{P}(X > 200) = 1 - \mathsf{P}(X \le 200) = 1 - \mathsf{P}(X^* < \frac{200-200}{10}) = 1 - \mathsf{P}(X^* < 0) =$

$= 1 - \Phi(0) = 0.5,$

0,9332

(b) $\mathsf{P}(X \le 185) = \mathsf{P}(X^* \le \frac{185-200}{10}) = \mathsf{P}(X^* \le -1.5) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) =$

$= 0.0668.$

---

[3] *Prosečno 4 % proizvoda je škart. Neka slučajna promenljiva $X$ predstavlja broj ispravnih proizvoda od 150 posmatranih. Koristeći Moavr-Laplasovu teoremu izračunati verovatnoću*

(a) *da će više od 140 proizvoda biti ispravno,*

(b) *da će više od 5 proizvoda biti neispravno.*

Rešenje: Slučajna promenljiva $X$ koja predstavlja broj ispravnih proizvoda ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(150, 0.96)$, $p = 0.96$, $q = 0.04$, $n = 150$, pa je $np = 144$, $\sqrt{npq} = \sqrt{5.76} = 2.4$. Na osnovu Moavr-Laplasove teoreme $X^* = \frac{X-144}{2.4}$ ima standardizovanu normalnu raspodelu, tj. $\mathcal{N}(0,1)$.

(a) $\mathsf{P}(X > 140) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 140) = 1 - \mathsf{P}(\frac{X-144}{2.4} \leq \frac{140-144}{2.4}) \approx 1 - \mathsf{P}(X^* \leq -1.67) =$
$= 1 - \Phi(-1.67) = \Phi(1.67) = 0.9525.$

(b) Primetimo da ako je $X$ broj ispravnih proizvoda tada je $150 - X$ broj neispravnih proizvoda i obrnuto. Zaključujemo da je događaj $A$ – „ više od 5 proizvoda je neispravno" jednak događaju $B$ – „ manje od 145 proizvoda je ispravno", tj. $A = B$. Dakle,
$\mathsf{P}(150 - X > 5) = \mathsf{P}(X < 145) = \mathsf{P}(X^* < \frac{145-144}{2.4}) \approx \mathsf{P}(X^* < 0.42) = \Phi(0.42) = 0.6628.$

---

[4] *Prosečno 95% prodatih Fiatovih automobila je tipa „Fiat 500L". Koristeći Moavr-Laplasovu teoremu izračunati verovatnoću da će od 100 prodatih Fiatovih automobila*

(a) *između 82 i 95 biti tipa „Fiat 500L";*

(b) *više od 80 biti tipa „Fiat 500L".*

Rešenje: Slučajna promenljiva $X$ koja predstavlja broj prodatih „Fiat 500L"automobila od posmatranih 100 ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(100; 0.95)$, parametri raspodele su $p = 0.95$, $n = 100$, te je $q = 0.05$, $np = 95$, $\sqrt{npq} = \sqrt{4.75} \approx 2.18$. Na osnovu Moavr-Laplasove teoreme, slučajna promenljiva $X^* = \frac{X-95}{2.18}$ ima standardizovanu normalnu raspodelu.

(a) $\mathsf{P}(82 \leq X \leq 95) = \mathsf{P}(\frac{82-95}{2.18} \leq \frac{X-95}{2.18} \leq \frac{95-95}{2.18}) \approx \mathsf{P}(-5.96 \leq X^* \leq 0) = \Phi(0) - \Phi(-5.96) \approx 0.5.$

(b) $\mathsf{P}(X > 80) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 80) = 1 - \mathsf{P}(X^* \leq \frac{80-95}{2.18}) \approx 1 - \mathsf{P}(X^* \leq -6.88) = 1 - \Phi(-6.88) \approx 1.$

---

[5] *U proseku, svakom dvadesetom prvaku se ne sviđa torba koju su mu roditelji kupili za polazak u školu.*

(a) *Odrediti tačnu i približnu raspodelu slučajne promenljive koja predstavlja broj prvaka, od 100 posmatranih, kojima se ne dopada kupljena torba.*

(b) *Primenom Moavr-Laplasove teoreme izračunati verovatnoću da najmanje 7 prvaka nije zadovoljno kupljenom torbom.*

(c) *Primenom Moavr-Laplasove teoreme izračunati verovatnoću da je najmanje 70 prvaka zadovoljno kupljenom torbom.*

Rešenje:
(a) Kako je $n = 100$, $p = \frac{1}{20} = 0.05$ i $\lambda = np = 5$, tačna raspodela broja prvaka kojima se torba ne sviđa je binomna raspodela $X : \mathcal{B}(100; 0.05)$, a približna Poasonova $Y : \mathcal{P}(5)$.
(b) Slučajna promenljiva $X^* = \frac{X-5}{2.18}$ ima standardizovanu normalnu raspodelu.
$\mathsf{P}(X \geq 7) = 1 - \mathsf{P}(X < 7) = 1 - \mathsf{P}(X^* < \frac{7-5}{2.18}) \approx 1 - \mathsf{P}(X^* < 0.92) = 0.8212.$
(c) $\mathsf{P}(100 - X \geq 70) = \mathsf{P}(X \leq 30) = \mathsf{P}(X^* \leq \frac{30-5}{2.18}) \approx \mathsf{P}(X^* \leq 11.47) \approx 1.$

---

[6] *Prosečno sedamdeset posto studenata traži konsultacije za vreme rada u računskom centru. Neka je u toku dana 100 studenata radilo u računskom centru.*

(a) *Kolika je verovatnoća da će više od polovine broja studenata tražiti konsultacije?*

(b) *Kolika je verovatnoća da će broj studenata sa pitanjima biti manji od 72?*

(c) *Kolika je verovatnoća da će broj studenata sa pitanjima biti između 70 i 80?*

Rešenje:

$p = 0.7,\ n = 100,\ np = 70,\ \sqrt{npq} = \sqrt{21},\ X : \mathcal{B}(100, 0.7) \ \Rightarrow\ X^* = \frac{X-70}{4.58} : \mathcal{N}(0,1).$

(a) $\mathsf{P}(X > 50) = 1 - \mathsf{P}(X \le 50) = 1 - \mathsf{P}(\frac{X-70}{4.58} \le \frac{50-70}{4.58}) = 1 - \mathsf{P}(X^* \le -4.3668) =$
$= 1 - \Phi(-4.3668) = \Phi(4.3668) \approx 1.$

(b) $\mathsf{P}(X < 72) = \mathsf{P}(X^* < \frac{72-70}{4.58}) = \mathsf{P}(X^* < 0.436681) = \Phi(0.436681) = 0.668.$

(c) $\mathsf{P}(70 \le X^* \le 80) = \mathsf{P}(\frac{70-70}{4.58} \le \frac{X-70}{4.58} \le \frac{80-70}{4.58}) = \mathsf{P}(0 \le X^* \le 2.18341) =$
$= \Phi(2.18341) - \Phi(0) = 0.9854 - 0.5 = 0.4854.$

---

[7] *Prosečno* 80% *vozača koristi sigurnosni pojas. Saobraćajna policija je u toku dana zaustavila 500 vozača.*

(a) *Kolika je verovatnoća da više od 100 vozača ne koristi pojas?*

(b) *Kolika je verovatnoća da bar 300 vozača koristi pojas?*

(c) *Kolika je verovatnoća da je broj vozača koji ne koriste pojas između 100 i 150?*

Rešenje:

Slučajna promenljiva $X$ koja predstavlja broj vozača koji koriste sigurnosni pojas ima binomnu raspodelu sa parametrima $n = 500$ i $p = 0.8$. Kako je $np = 400$, $\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = \sqrt{80} = 8.944$ i $X : \mathcal{B}(500, 0.8)$ sledi $X^* = \frac{X-400}{8.944} : \mathcal{N}(0,1)$.

(a) $\mathsf{P}(500 - X > 100) = \mathsf{P}(X < 400) = \mathsf{P}(X^* < \frac{400-400}{8.944}) = \mathsf{P}(X^* < 0) = \Phi(0) = 0.5.$

(b) $\mathsf{P}(X \ge 300) = 1 - \mathsf{P}(X < 300) = 1 - \mathsf{P}(X^* \le \frac{300-400}{8.944}) = 1 - \mathsf{P}(X^* \le -11.18) =$
$= 1 - \Phi(-11.18) = \Phi(11.18) \approx 1.$

(c) $\mathsf{P}(100 \le 500 - X \le 150) = \mathsf{P}(350 < X < 400) = \mathsf{P}(\frac{350-400}{8.944} < X^* < \frac{400-400}{8.944}) =$
$= \mathsf{P}(-5.59 < X < 0) = \Phi(0) - \Phi(-5.59) \approx 0.5.$

[1] $P(X \le 15) = P\Big(\frac{X-15}{\underbrace{\sqrt{6}}} \le \frac{15-15}{\sqrt{6}}\Big) = P(X^* \le 0)$

$X^*$: $\underline{N(0,1)} \leftarrow \underbrace{\phi}$

$\phi$-ја расподеле $N(0,1)$

$\Big[ = P(X^* < 0) \Big] = \phi(0) = 0.5$

$P(20 \le X) = P(X \ge 20) = 1 - P(X < 20)$

$= 1 - P\Big(\underbrace{\frac{X-15}{\sqrt{6}}} < \frac{20-15}{\sqrt{6}}\Big) = 1 - P(X^* < 2.04)$

$= 1 - \phi(2.04) = 0.9788$

$\Big\{ \underline{X^* = \frac{X-15}{\sqrt{6}}}$

$P(10 \le X \le 22) = P\Big(\frac{10-15}{\sqrt{6}} \le \frac{X-15}{\sqrt{6}} \le \frac{22-15}{\sqrt{6}}\Big)$

$= P(-2.04 \le X^* \le 2.86) = \phi(2.86) - \phi(-2.04)$

$= \phi(2.86) - (1 - \phi(2.04))$

$= 0.9978 - 1 + 0.9788 = \dots$

0.06

## 0.1 Gausova normalna raspodela $\mathcal{N}(0,1)$

$\phi(0) = 0,5$

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$

$\phi(x) \approx 1, \ x > 3,5$

| $z$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| .1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| .2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| .3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| .4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| .5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| .6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| .7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7703 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| .8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8079 | .8106 | .8133 |
| .9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9237 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9485 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9762 | .9767 |
| 2.0 | .9773 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9980 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9983 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 | .9998 |

| $z$ | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.090 | 3.291 | 3.891 | 4.417 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\phi(z)$ | .9 | .95 | .975 | .99 | .995 | .999 | .9995 | .99995 | .999995 |
| $2(1-\phi(z))$ | .20 | .10 | .05 | .02 | .01 | .002 | .001 | .0001 | .00001 |