

$$① \models B \Leftrightarrow (C \vee D)$$

$$\models D \Rightarrow (E \Rightarrow \neg A)$$

$$\models (D \wedge \neg E) \Rightarrow \neg B$$

$$\text{poz: } \models (A \Leftrightarrow C) \vee (A \Rightarrow \neg B)$$

Pretp. da formula  $(A \Leftrightarrow C) \vee (A \Rightarrow \neg B)$  nije tautologija.

Tada postoji valvacija  $v$  takva da važi  $I_v((A \Leftrightarrow C) \vee (A \Rightarrow \neg B)) = 0$

$$\text{Otuda je } I_v(A \Leftrightarrow C) = I_v(A \Rightarrow \neg B) = 0$$

Posto je  $I_v(A \Rightarrow \neg B) = 0$ , imamo  $I_v(A) = 1$  i  $I_v(\neg B) = 0$ , tj.  $I_v(B) = 1$

Kako je  $I_v(A \Leftrightarrow C) = 0$  i  $I_v(A) = 1$ , sledi  $I_v(C) = 0$

Posto je  $B \Leftrightarrow (C \vee D)$  tautologija, mora biti  $I_v(B \Leftrightarrow (C \vee D)) = 1$ , pa iz  $I_v(B) = 1$  sledi  $I_v(C \vee D) = 1$ , a kako je  $I_v(C) = 0$ , mora biti  $I_v(D) = 1$ .

Posto je  $D \Rightarrow (E \Rightarrow \neg A)$  taut. imamo  $I_v(D \Rightarrow (E \Rightarrow \neg A)) = 1$  i zbog  $I_v(D) = 1$  je  $I_v(E \Rightarrow \neg A) = 1$ , pa kako je  $I_v(\neg A) = 0$ , mora biti  $I_v(E) = 0$ .

Sada je  $I_v(D \wedge \neg E) = 1$  i  $I_v(\neg B) = 0$ , pa je

$I_v((D \wedge \neg E) \Rightarrow \neg B) = 0$ , što je u suprotnosti sa pretp. da je  $(D \wedge \neg E) \Rightarrow \neg B$  tautologija.

Znači da je pretp. da  $(A \Leftrightarrow C) \vee (A \Rightarrow \neg B)$  nije taut. bila pogrešna.

$$\textcircled{2} \quad F = ((r \Rightarrow A) \vee p) \vee ((A \Rightarrow q) \wedge p)$$

P	q	r	$\neg r$	$\neg r \Rightarrow A$	$((\neg r \Rightarrow A) \vee p)$	$A \Rightarrow q$	$(A \Rightarrow q) \wedge p$	F	A
0	0	0	1	A	A	$\neg A$	0	A	1
0	0	1	0	$\neg A$	$\neg A$	$\neg A$	0	$\neg A$	0
0	1	0	1	A	A	1	0	A	1
0	1	1	0	$\neg A$	$\neg A$	1	0	$\neg A$	0
1	0	0	1	A	1	$\neg A$	$\neg A$	1	0
1	0	1	0	$\neg A$	1	$\neg A$	$\neg A$	1	0
1	1	0	1	A	1	1	1	1	0
1	1	1	0	$\neg A$	1	1	1	1	0

$$\text{KDNF} : (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \equiv \neg p \wedge \neg r$$

$$\textcircled{3} \quad F = (p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg s)) \Rightarrow ((q \vee \neg p) \Rightarrow (s \Rightarrow \neg p))$$

$$\neg F = \neg ((p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg s)) \Rightarrow ((q \vee \neg p) \Rightarrow (s \Rightarrow \neg p)))$$

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee B$$

$$\equiv \neg (\neg (p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg s)) \vee ((q \vee \neg p) \Rightarrow (s \Rightarrow \neg p)))$$

$$\equiv \neg (\neg (\neg p \vee (q \vee \neg s)) \vee (\neg (q \vee \neg p) \vee (s \vee \neg p)))$$

$$\equiv \neg (\neg (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge \neg (\neg q \vee \neg p) \wedge \neg (s \vee \neg p))$$

$$\equiv (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg s \wedge \neg p$$

$$\equiv \underbrace{(\neg p \vee \neg q \vee \neg s)} \wedge \underbrace{(\neg p \vee q)} \wedge \underbrace{\neg s} \wedge \underbrace{\neg p}$$

③ (nastavak)

$$D = \{\neg p \vee \neg q \vee \neg s, \neg p \vee q, p, s\}$$

DPLL

1-5. x

$$6. D[p \mapsto T] = \{\neg T \vee \neg q \vee \neg s, \neg T \vee q, T, s\}$$

1. x

$$2. \{\perp \vee \neg q \vee \neg s, \perp \vee q, T, s\}$$

$$3. \{\neg q \vee \neg s, q, T, s\}$$

4. x

$$5. \{\neg q \vee \neg s, q, s\}$$

$$6. D[p \mapsto T, q \mapsto T] = \{\neg T \vee \neg s, T, s\}$$

1. x

$$2. \{\perp \vee \neg s, T, s\}$$

$$3. \{\neg s, T, s\}$$

4. x

$$5. \{\neg s, s\}$$

$$6. D[p \mapsto T, q \mapsto T, \underline{s \mapsto T}] = \{\neg T, T\}$$

1. x

$$2. \{\perp, T\}$$

$$3. \{\perp, T\}$$

4. NE

~~~~~

$$6. D[p \mapsto T, q \mapsto T, \underline{s \mapsto \perp}] = \{\neg \perp, \perp\}$$

1. x

$$2. \{T, \perp\}$$

$$3. \{T, \perp\}$$

4. NE

$$6. D[p \rightarrow T, q \rightarrow \perp] = \{\neg \perp \vee \neg s, \perp, s\}$$

1.  $\times$

$$2. \{T \vee \neg s, \perp, s\}$$

$$3. \{T \vee \neg s, \neg s, s\}$$

4. NE

$$6. D[p \rightarrow \perp] = \{\neg \perp \vee \neg q \vee \neg s, \neg \perp \vee q, \perp, s\}$$

1.  $\times$

$$2. \{T \vee \neg q \vee \neg s, T \vee q, \perp, s\}$$

$$3. \{T \vee \neg q \vee \neg s, T \vee q, \neg s, s\}$$

4. NE

$\Rightarrow$  Skup D je nezadovoljiv

$\Rightarrow \neg F$  nije zadovoljiva

$\Rightarrow F$  je tautologija!

Rezolucija

$$S = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$$

$$C_1 = \{\neg p, \neg q, \neg s\}$$

$$C_2 = \{\neg p, q\}$$

$$C_3 = \{p, s\}$$

$$C_4 = \{s\}$$

$$C_5 = \{\neg q, \neg s\} \quad (C_1, C_3)$$

$$C_6 = \{q\} \quad (C_2, C_3)$$

$$C_7 = \{\neg s\} \quad (C_5, C_6)$$

$$C_8 = \square \quad (C_4, C_7)$$

$\Rightarrow S$  nije zadovoljiv

ti.  $\neg F$  nije zadovoljiva

$\Rightarrow F$  je tautologija

$$(4) (B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow \neg B)$$

Hilbertov sistem

Na osnovu tuz o dedukciji data formula je tačna  
ako važi

$$B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C), \neg A, B \Rightarrow \neg C \vdash \neg B$$

- |                                                                                                                |             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| 1. $B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C)$                                                                      | Hyp         |
| 2. $\neg A$                                                                                                    | Hyp         |
| 3. $B \Rightarrow \neg C$                                                                                      | Hyp         |
| 4. $(B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C)) \Rightarrow ((B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ | Ax 2        |
| 5. $(B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$                                                      | MP (1, 4)   |
| 6. $\neg A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$                                                                 | Ax 1        |
| 7. $B \Rightarrow \neg A$                                                                                      | MP (2, 6)   |
| 8. $B \Rightarrow C$                                                                                           | MP (7, 5)   |
| 9. $\neg \neg B \Rightarrow B$                                                                                 | Th 1        |
| 10. $\neg \neg B \Rightarrow \neg C$                                                                           | Th 2 (9, 3) |
| 11. $\neg \neg B \Rightarrow C$                                                                                | Th 2 (9, 8) |
| 12. $(\neg \neg B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow ((\neg \neg B \Rightarrow C) \Rightarrow \neg B)$            | Ax 3        |
| 13. $(\neg \neg B \Rightarrow C) \Rightarrow \neg B$                                                           | MP (10, 12) |
| 14. $\neg B$                                                                                                   | MP (11, 13) |

Th 2:  $A \Rightarrow B, B \Rightarrow X \vdash A \Rightarrow X$

# Prirodna dedukcija

1.  $B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C)$  pretp

2.  $\neg A$  pretp

3.  $B \Rightarrow \neg C$  pretp

4.  $B$  pretp

5.  $\neg C$   $\Rightarrow E (4,3)$

6.  $\neg A \Rightarrow C$   $\Rightarrow E (4,1)$

7.  $C$   $\Rightarrow E (2,6)$

8.  $\perp$   $\neg E (5,7)$

9.  $\neg B$   $\neg I (4-8)$

10.  $(B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow \neg B$   $\Rightarrow I (3-9)$

11.  $\neg A \Rightarrow ((B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow \neg B)$   $\Rightarrow I (2-10)$

12.  $(B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow ((B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow \neg B))$   $\Rightarrow I (1-11)$