predmet: Matematička analiza 2

Klasifikacija singulariteta

1. Ispitati prirodu singulariteta sledećih funkcija i naći ostatke u njima:

   a) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$; b) $f(z) = \dfrac{1}{z^5 + z^3}$; c) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$; d) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$.

   Rešenje:

   a) Singularitet funkcije $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ je $z = 0$.

   <u>1. način</u>: Nula imenioca i brojioca funkcije $f(z)$ je $z = 0$ jednostruka nula,tako da dobijamo da je $z = 0$ prividan singularitet, a ostatak je $Res(f(z), 0) = 0$.

   <u>2. način</u>: Razvijemo funkciju u Loranov red u okolini te tačke:

   $$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \cdot e^z - \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!},$$

   odavde sledi da je $z = 0$ prividan singularitet i $Res(f(z), 0) = 0$.

   <u>3. način</u>: Kako je

   $$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

   sledi da je $z = 0$ prividan singularitet i $Res(f(z), 0) = 0$.

   b) Singulariteti funkcije $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z-i)(z+i)}$ su $z = 0$, $z = i$ i $z = -i$.

   Nule imenioca racionalne funkcije $f(z)$ su $z = 0$ trostruka nula, $z = i$ i $z = -i$ jednostruke nule, pa kako u ovim tačkama brojilac nije nula, dobijamo da je $z = 0$ pol trećeg reda, a $z = i$ i $z = -i$ polovi prvog reda.

   $Res(f(z), 0) = \dfrac{1}{2!} \cdot \lim\limits_{z\to 0} \left(z^3 \cdot \dfrac{1}{z^3(z^2+1)} \right)'' = \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{z\to 0} \left(\dfrac{1}{z^2+1} \right)'' \overset{(*)}{=} \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{2(3z^2-1)}{(z^2+1)^3} = -1$

   $Res(f(z), i) = \dfrac{1}{0!} \cdot \lim\limits_{z\to i} \left((z-i) \cdot \dfrac{1}{z^3(z-i)(z+i)} \right) = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{1}{z^3(z+i)} = \dfrac{1}{i^3 \cdot 2i} = \dfrac{1}{2}$

   $Res(f(z), -i) = \dfrac{1}{0!} \cdot \lim\limits_{z\to -i} \left((z+i) \cdot \dfrac{1}{z^3(z-i)(z+i)} \right) = \lim\limits_{z\to -i} \dfrac{1}{z^3(z-i)} = \dfrac{1}{(-i)^3 \cdot (-2i)} = \dfrac{1}{2}$

   $(*)$ $\left(\dfrac{1}{z^2+1} \right)' = \dfrac{-2z}{(z^2+1)^2}$

   $\left(\dfrac{1}{z^2+1} \right)'' = \left(\dfrac{-2z}{(z^2+1)^2} \right)' = \dfrac{-2(z^2+1)^2 + 2z \cdot 2(z^2+1) \cdot 2z}{(z^2+1)^4} = \dfrac{-2z^2 - 2 + 8z^2}{(z^2+1)^3} = \dfrac{2(3z^2-1)}{(z^2+1)^3}$

   c) Singularitet funkcije $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ je $z = 0$.

   Nula imenioca funkcije $f(z)$ je $z = 0$ dvostruka nula, a nula brojilaca je $z = 0$ jednostruka nula, tako da dobijamo da je $z = 0$ pol prvog reda.

   $Res(f(z), 0) = \dfrac{1}{0!} \cdot \lim\limits_{z\to 0} \left(z \cdot \dfrac{\sin z}{z^2} \right) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$

   d) Singularitet funkcije $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$ je $z = 0$.

   Nula imenioca i brojilaca funkcije $f(z)$ je $z = 0$ dvostruka nula,tako da dobijamo da je $z = 0$ prividan singularitet, a ostatak je $Res(f(z), 0) = 0$.

2. Ispitati prirodu singulariteta sledećih funkcija u proširenoj kompleksnoj ravni i naći ostatke u njima:

   a) $f(z) = \dfrac{z^2 + 2z + 5}{z}$; b) $f(z) = e^{\frac{2z-1}{2-z}}$.

   Rešenje:

a) Funkcija $f(z) = \dfrac{z^2+2z+5}{z} = z+2+\dfrac{5}{z}$ ima pol prvog reda u tački $z=0$ i njen ostatak je $Res(f(z),0) = 5$.

Tačka $z=\infty$ je singularna, jer funkcija $f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u} + 2 + 5u$ ima pol prvog reda u tački $u=0$, samim tim funkcija $f(z)$ ima pol prvog reda u $z=\infty$ i njen ostatak je $Res(f(z),\infty) = -Res(f(z),0) = -5$.

b) Funkcija $f(z) = e^{\frac{2z-1}{2-z}}$ ima esencijalni singularitet u tački $z=2$ što se vidi iz njenog razvoja u Loranov red u okolini te tačke:

$$f(z) = e^{\frac{2z-1}{2-z}} = e^{\frac{-2(2-z)+3}{2-z}} = e^{-2}\cdot e^{\frac{3}{2-z}} = e^{-2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{(-3)^n}{(z-2)^n},$$

i njen ostatak je $Res(f(z),2) = a_{-1} = -\dfrac{3}{e^2}$.

Tačka $z=\infty$ je regularna, jer je $f\left(\frac{1}{u}\right) = e^{\frac{\frac{2}{u}-1}{2-\frac{1}{u}}} = e^{\frac{2-u}{2u-1}}$ analitička funkcija u tački $u=0$ i njen ostatak je $Res(f(z),\infty) = -Res(f(z),2) = \frac{3}{e^2}$.

3. Ispitati prirodu singulariteta funkcije $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z-1)}$ i naći ostatke u njima.

Rešenje: Funkcija $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z-1)}$ ima singularitet u tačkama gde je $z(e^z-1)=0$, odnosno kada je $z=0$ ili $e^z-1=0$. Tako dobijamo u tački $z=0$ pol drugog reda, i u tačkama $z=2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ polovi prvog reda. Njihovi ostaci su:

$$\begin{aligned} Res(f(z),0) &= \frac{1}{1!}\cdot\lim_{z\to0}\left(z^2\cdot\frac{1}{z(e^z-1)}\right)' = \lim_{z\to0}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)' = \lim_{z\to0}\frac{e^z-1-z\cdot e^z}{(e^z-1)^2} \\ &\overset{LP}{=} \lim_{z\to0}\frac{e^z-e^z-z\cdot e^z}{2(e^z-1)\cdot e^z} = \lim_{z\to0}\frac{-z}{2(e^z-1)} \overset{LP}{=} \lim_{z\to0}\frac{-1}{2e^z} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Res(f(z),2k\pi i) &= \frac{1}{0!}\cdot\lim_{z\to2k\pi i}\left((z-2k\pi i)\cdot\frac{1}{z(e^z-1)}\right) = \lim_{z\to2k\pi i}\frac{z-2k\pi i}{z(e^z-1)} \overset{LP}{=} \lim_{z\to2k\pi i}\frac{1}{e^z+ze^z-1} \\ &= \frac{1}{2k\pi i\cdot e^{2k\pi i}} = -\frac{i}{2k\pi}. \end{aligned}$$

4. Izračunati $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z\cdot(z^2+16)}\,dz$, ako je $C = \{z\in\mathbb{C}:\ |z-3| = r, r>0, r\neq3, r\neq5\}$ pozitivno orijentisana.

Rešenje: Neka je $f(z) = \dfrac{e^z}{z\cdot(z^2+16)}$. Singulariteti funkcije $f(z)$ su $z_1=0$, $z_2=4i$ i $z_3=-4i$. Sva tri singulariteta su polovi prvog reda (jednostruka nula imenioca funkcije $f(z)$ i nije nula brojioca funkcije $f(z)$). Odgovarajući reziduumi u singularitetima su:

$Res(f(z),0) = \dfrac{1}{0!}\cdot\lim\limits_{z\to0}\left(z\cdot\dfrac{e^z}{z(z^2+16)}\right) = \lim\limits_{z\to0}\dfrac{e^z}{z^2+16} = \dfrac{1}{16}$;

$Res(f(z),4i) = \dfrac{1}{0!}\cdot\lim\limits_{z\to4i}\left((z-4i)\cdot\dfrac{e^z}{z(z-4i)(z+4i)}\right) = \lim\limits_{z\to4i}\dfrac{e^z}{z(z+4i)} = \dfrac{e^{4i}}{4i\cdot8i} = -\dfrac{e^{4i}}{32}$;

$Res(f(z),-4i) = \dfrac{1}{0!}\cdot\lim\limits_{z\to-4i}\left((z+4i)\cdot\dfrac{e^z}{z(z-4i)(z+4i)}\right) = \lim\limits_{z\to-4i}\dfrac{e^z}{z(z-4i)} = \dfrac{e^{-4i}}{-4i\cdot(-8i)} = -\dfrac{e^{-4i}}{32}$.

U zavisnosti od vrednosti za r razlikujemo sledeće slučajeve.

Za $0<r<3$:

$$\int_C f(z)dz = 0 \ \ (f(z) \text{ je analitička u oblasti } C\cup\operatorname{int}(C));$$

za $3<r<5$:

$$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i Res(f(z),0) = \frac{2\pi i}{16} = \frac{\pi i}{8};$$

za $r > 5$:

$$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i(Res(f(z),0) + Res(f(z),4i) + Res(f(z),-4i)) = 2\pi i\left(\frac{1}{16} - \frac{e^{4i}}{32} - \frac{e^{-4i}}{32}\right)$$

$$= \pi i \cdot \frac{2 - e^{4i} - e^{-4i}}{16} = \frac{\pi i(1-\cos 4)}{8}.$$

5. Izračunati $\displaystyle\int_C \frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)^2}\,dz$, ako je $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ pozitivno orijentisana.

Rešenje: Neka je $f(z) = \dfrac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)^2}$. Singulariteti funkcije $f(z)$ su $z_1 = 1$ i $z_2 = 0$. Tačka $z_1 = 1$ je pol drugog reda (dvostruka nula imenioca funkcije $f(z)$ i nije nula brojioca funkcije $f(z)$). Tačka $z_2 = 0$ je esencijalni singularitet. Odgovarajući reziduumi u singularitetima su:

$$Res(f(z),1) = \frac{1}{1!}\cdot\lim_{z\to 1}\left((z-1)^2\cdot\frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)^2}\right)' = \lim_{z\to 1}\left(\sin\frac{1}{z}\right)' = -\lim_{z\to 1}\frac{\cos\frac{1}{z}}{z^2} = -\cos 1;$$

Da bi našli $Res(f(z),0)$ moramo naći koeficijent a_{-1} uz $\dfrac{1}{z}$ u Loranovom razvoju. Stoga imamo

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot z^n,$$

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{2n+1}},$$

$$f(z) = (1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + ...)\cdot\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\cdot z^3} + \frac{1}{5!\cdot z^5} - \frac{1}{7!\cdot z^7} + ...\right).$$

Odavde dobijamo da je:

$$Res(f(z),0) = a_{-1} = 1 - \frac{3}{3!} + \frac{5}{5!} - \frac{7}{7!} + ... = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!} = \cos 1.$$

Tako da je

$$\int_C \frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)^2}\,dz = 2\pi i(Res(f(z),1) + Res(f(z),0)) = 2\pi i(-\cos 1 + \cos 1) = 0.$$