predmet: Matematička analiza 2

Stepeni redovi

1. Razviti funkciju $f(x)$ u Maklorenov red i odrediti oblast konvergencije dobijenog razvoja ako je:

a) $f(x)=e^{-x}$; b) $f(x)=\sin^2 x$; c) $f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{2+x}}$; d) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$;

e) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$; f) $f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$; g) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{(1-x)^2(1+2x)}$; h) $f(x)=\operatorname{ch} x$.

Rešenje:

a) Traženi razvoj je

$$f(x)=e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

Oblast konvergencije dobijenog razvoja je $x\in\mathbb{R}$.

b) Traženi razvoj je

$$f(x)=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\Big(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}\Big)=\frac{1}{2}\Big(1-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}.$$

Oblast konvergencije dobijenog razvoja je $x\in\mathbb{R}$.

c) Traženi razvoj je

$$\begin{aligned}f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{1-x}{2+x}}&=\frac{1}{3}(\ln(1-x)-\ln(2+x))=\frac{1}{3}\Big(\ln(1+(-x))-\ln 2(1+\frac{x}{2})\Big)\\&=\frac{1}{3}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n}-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(\frac{x}{2})^n}{n}\Big)\\&=-\frac{\ln 2}{3}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big((-1)^n-\frac{1}{2^n}\Big)x^n.\end{aligned}$$

Oblast konvergencije datog razvoja dobijamo u preseku rešenja nejednačina:

$$\frac{1-x}{2+x}>0,\ 1-x>0,\ 1+\frac{x}{2}>0,\ -1<-x\le 1,\ -1<\frac{x}{2}\le 1,$$

odakle sledi $x\in[-1,1)$.

d) Traženi razvoj je

$$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{3}{2}}{n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n},$$

pri čemu je

$$\binom{-\frac{3}{2}}{n}=\frac{-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{5}{2})\cdot\ldots\cdot(-\frac{3}{2}-n+1)}{n!}=\frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^n\cdot n!}=\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{(2n)!!}.$$

Oblast konvergencije datog razvoja dobijamo rešavanjem $-1<x^2<1$, odakle sledi $x\in(-1,1)$.

e) **(I način)** Traženi razvoj je

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=(1+(-x))^{-2}=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,$$

pri čemu je

$$\binom{-2}{n} = \frac{-2\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-2-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{n!} = (-1)^n(n+1).$$

Oblast konvergencije datog razvoja dobijamo rešavanjem $-1 < -x < 1$, odakle sledi $x \in (-1,1)$.

(II način) Traženi razvoj je

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big)' = \Big(1+\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Oblast konvergencije datog razvoja dobijamo iz $-1 < x < 1$, tj. $x \in (-1,1)$.

f) Traženi razvoj je

$$f(x) = \frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.$$

Oblast konvergencije datog razvoja dobijamo iz $-1 < -2x < 1$, tj. $x \in \Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)$.

g) Kako je

$$\frac{x^2+2}{(1-x)^2(1+2x)} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+2x},$$

koristeći dobijene razvoje pod e) i f), dobijamo:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{(1-x)^2(1+2x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1+(-2)^n)x^n.$$

Oblast konvergencije dobijenog razvoja je $x \in \Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)$.

h) Traženi razvoj je

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}x^n.$$

Kako je $1+(-1)^n = \begin{cases} 2, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$, sledi da je

$$f(x) = \mathrm{ch}x = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k)!}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{0}{(2k+1)!}x^{2k+1}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Oblast konvergencije dobijenog razvoja je $x \in \mathbb{R}$.

2. Razviti funkciju $f(x)$ u Maklorenov red i odrediti oblast konvergencije dobijenog razvoja ako je:

a) $f(x) = \arccos x$; b) $f(x) = x\,\mathrm{arctg}\,x - x^2$.

Rešenje:

a) Najpre uradimo izvod funkcije $\arccos x$ i razvijemo ga u Maklorenov red:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n x^{2n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},$$

pri čemu je

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{3}{2})\cdot\ldots\cdot(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Zatim izvršimo integraciju:

$$\int_0^x(\arccos t)'dt = -\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}dt = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x,$$

odakle je

$$\arccos x - \arccos 0 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

tj.

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^{2n+1}.$$

Oblast konvergencije datog razvoja dobijamo iz $-1 < -x^2 < 1$, odakle je $x \in (-1, 1)$.

b) Najpre uradimo izvod funkcije $\operatorname{arctg} x$ i razvijemo ga u Maklorenov red:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Zatim izvršimo integraciju:

$$\int_0^x (\operatorname{arctg} t)' dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x,$$

odakle je

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

tj.

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Stoga je

$$f(x) = x \operatorname{arctg} x - x^2 = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1} - x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1}.$$

Oblast konvergencije dobijenog razvoja dobijamo iz $-1 < -x^2 < 1$, odakle je $x \in (-1, 1)$.

3. Razviti funkciju $f(x)$ u Tejlorov red u okolini tačke $x_0 \in \mathbb{R}$ i odrediti oblast konvergencije dobijenog razvoja ako je:

a) $f(x) = e^{3x},\ x_0 = 2;$ b) $f(x) = \sin 2x,\ x_0 = \frac{\pi}{2};$ c) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 1;$ d) $f(x) = \frac{1}{x-2},\ x_0 = 1;$

e) $f(x) = \frac{2(x-1)}{x^2-2x},\ x_0 = 1;$ f) $f(x) = \ln(x^2+7x+12),\ x_0 = -2;$ g) $f(x) = \ln(x^2+4x+5),\ x_0 = -2.$

Rešenje:

a) Traženi razvoj je

$$f(x) = e^{3x} = e^{3(x-2)+6} = e^6 \cdot e^{3(x-2)} = e^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n!}.$$

Oblast konvergencije dobijenog razvoja je $x \in \mathbb{R}$.

b) Traženi razvoj je

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 2x = \sin\Big(2(x-\frac{\pi}{2}) + \pi\Big) = \sin 2(x-\frac{\pi}{2}) \cdot \cos\pi + \cos 2(x-\frac{\pi}{2}) \cdot \sin\pi = -\sin 2(x-\frac{\pi}{2}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n+1} (x-\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Oblast konvergencije dobijenog razvoja je $x \in \mathbb{R}$.

c) Traženi razvoj je

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{1-(-(x-1))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n.$$

Oblast konvergencije datog razvoja dobijamo rešavanjem $-1 < -(x-1) < 1$ odakle sledi $x \in (0, 2)$.

d) Traženi razvoj je

$$f(x) = \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-1+(x-1)} = -\frac{1}{1-(x-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n.$$

Oblast konvergencije datog razvoja dobijamo rešavanjem $-1 < x-1 < 1$, odakle sledi $x \in (0,2)$.

e) Kako je

$$f(x) = \frac{2(x-1)}{x^2-2x} = \frac{2x-2}{x(x-2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2},$$

koristeći razvoje u primerima c) i d) dobijamo da je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}((-1)^n - 1)(x-1)^n.$$

Kako je $(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -2, & n = 2k+1 \end{cases}$, sledi da je

$$f(x) = -2\sum_{k=0}^{\infty}(x-1)^{2k+1}.$$

Oblast konvergencije je $x \in (0,2)$.

f) Traženi razvoj je

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2+7x+12) = \ln(x+3)(x+4) = \ln(1+(x+2)) + \ln(2+(x+2)) \\ &= \ln(1+(x+2)) + \ln 2 + \ln\Big(1+\frac{x+2}{2}\Big) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+2)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{(x+2)^n}{2^n} \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(1+\frac{1}{2^n}\Big)(x+2)^n. \end{aligned}$$

Oblast konvergencije datog razvoja dobijamo u preseku rešenja nejednačina:

$$x^2+7x+12 > 0,\ x+3 > 0,\ x+4 > 0,\ -1 < x+2 \le 1,\ -1 < \frac{x+2}{2} \le 1,$$

odakle sledi $x \in (-3,-1]$.

g) Traženi razvoj je

$$f(x) = \ln(x^2+4x+5) = \ln(1+(x+2)^2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+2)^{2n}.$$

Oblast konvergencije dobijamo rešavanjem $-1 < (x+2)^2 \le 1$, odlakle sledi $x \in [-3,-1]$.

4. Sumirati sledeće brojne redove:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{9^n(2n)!}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{3^{n-1}}$; d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n+1}}{(n-1)!}$.

Rešenje:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} - 1 = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1.$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{9^n(2n)!} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{2n}(2n)!} = -\cos\frac{1}{3}.$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{3^{n-1}} = (-1)^2\cdot 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(-\frac{2}{3}\Big)^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{2}{3}\Big)^n = 2\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{3}} = 2\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{5}.$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n+1}}{(n-1)!} = 2^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{(n-1)!} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!} = 4\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!} - 1\Big) = 4\Big(\frac{1}{e^2} - 1\Big).$