# Binomni Koeficijenti

Marko Gordić - IN 37/2023

## Osnovni principi binomnih koeficijenata

### Definicija binomnog koeficijenta

Binomni koeficijent označava broj načina izbora $k$ elemenata iz skupa sa $n$ elemenata:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

**Primer:** Koliko načina možemo izabrati 2 elementa iz skupa od 5 elemenata?

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

### Svojstvo simetrije

Za svaki $n$ i $k$ važi:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

**Primer:** $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$, jer $10 = 10$.

### Pascalov identitet

Binomni koeficijenti ispunjavaju sledeću rekurzivnu formulu:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

**Primer:** $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$:

$$\binom{5}{2} = 4 + 6 = 10$$

### Zbir svih binomnih koeficijenata

Suma svih binomnih koeficijenata za zadati $n$ iznosi:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

**Primer:** Za $n = 3$:

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

### Zbir sa koeficijentima

Zbir binomnih koeficijenata pomnoženih sa $k$ je:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

**Primer:** Za $n = 3$:

$$1 \cdot \binom{3}{1} + 2 \cdot \binom{3}{2} + 3 \cdot \binom{3}{3} = 3 + 6 + 3 = 12 = 3 \cdot 2^2$$

## Binomna teorema

### Osnovna formula binomne teoreme

Za svaki $n$ i $x, y$, proširenje binoma glasi:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

**Primer:** Proširite $(x+y)^2$:

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^2 + \binom{2}{1} xy + \binom{2}{2} y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

### Specijalni slučaj binomne teoreme

Ako je $x = 1$ i $y = 1$:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

## Newtonova teorema

### Proširenje za negativne eksponente

Za $|x| < 1$ i svaki realan $r$:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k, \quad \text{gde je} \quad \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$$

**Primer:** Za $(1+x)^{-1}$, proširenje je:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

## Identiteti sa binomnim koeficijentima

### Vandermondova formula

Za sve $m$ i $n$:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

**Primer:** Za $m = 2, n = 3, r = 2$:

$$\binom{2}{0}\binom{3}{2} + \binom{2}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{2}\binom{3}{0} = 3 + 6 + 1 = 10$$

### Identitet sa produktom

Produkt uzastopnih binomnih koeficijenata:

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \cdot \binom{n-m}{k-m}$$

**Primer:** Za $n = 5, k = 3, m = 2$:

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{3}{2} = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \implies 10 \cdot 3 = 10 \cdot 3$$

# Polinomni koeficijenti i formula

## Definicija polinomnog koeficijenta

Polinomni koeficijent generalizuje binomni koeficijent na slučaj višestrukih izbora iz skupa. Za $n$ elemenata raspoređenih u $k$ grupa sa veličinama $n_1, n_2, \ldots, n_k$, polinomni koeficijent se definiše kao:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!},$$

gde važi:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

**Primer:** Ako $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$:

$$\binom{5}{2, 2, 1} = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{120}{2 \cdot 2 \cdot 1} = 30.$$

## Polinomna formula

Proširenje izraza $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ koristi polinomne koeficijente:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}.$$

**Primer:** Proširimo $(x + y + z)^3$:

$$(x+y+z)^3 = \binom{3}{3, 0, 0} x^3 + \binom{3}{2, 1, 0} x^2 y + \binom{3}{1, 1, 1} xyz + \ldots$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3x^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz + z^3.$$

## Primene polinomnih koeficijenata

### Permutacije sa ponavljanjem

Polinomni koeficijent odredjuje broj permutacija $n$ objekata kada se odredjeni elementi ponavljaju $n_1, n_2, \ldots, n_k$ puta:

$$\text{Broj permutacija} = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

**Primer:** Koliko različitih redjanja ima reč "AABBC"? Slova $A$, $B$, $C$ se ponavljaju $2, 2, 1$ puta:

$$\binom{5}{2, 2, 1} = 30.$$

### Generalizacija kombinacija

Polinomni koeficijenti generalizuju binomni koeficijent za situacije sa više od dve grupe. Na primer, u kombinatorici raspodele elemenata u više grupa:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

**Primer:** Na koliko načina možemo raspodeliti 7 kuglica u grupe od 3, 2 i 2 kuglice?

$$\binom{7}{3, 2, 2} = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{5040}{6 \cdot 2 \cdot 2} = 210.$$