1.6 Binomni koeficijenti i binomna formula

Binomni koeficijenti predstavljaju koeficijente u razvoju stepena binoma u zbir, prema binomnoj teoremi. Istorijski, postoje tragovi da je Euclid poznavao binomnu teoremu još u 4. veku p.n.e, bar za razvoj kvadrata binoma, a indijski matematičar Pingala u 3. veku p.n.e. binomne koeficijente u formi trougla. U 17. veku, Blaise Pascal uvodi binomne koeficijente u algebarskom obliku i definiciju navodimo u nastavku.

Definicija 30 *Neka su m i n celi brojevi sa osobinom $0 \leq m \leq n$. Binomni koeficijent $\binom{n}{m}$ je funkcija koja takvim parovima vrednosti n i m dodeljuje pozitivne cele brojeve na sledeći način:*

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m(m-1)\dots 2\cdot 1}, m \geq 1.$$

Binomni koeficijent se kombinatorno može interpretirati kao

1. broj m-kombinacija skupa od n elemenata, odnosno kao
2. broj m-točlanih podskupova skupa od n elemenata.

Znači, kombinatorna interpretacija formalno se može opisati relacijom

$$\binom{n}{m} = C(n;m).$$

Lema 31 (faktorijelna reprezentacija) *Za cele brojeve n i m sa osobinom $0 \leq m \leq n$, važi*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Dokaz. Za $m \in \{0, n\}$ imamo

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1 = \binom{n}{0}.$$

Ako je $1 \leq m \leq n-1$ množenjem brojioca i imenioca sa $(n-m)!$ dobijamo:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)(n-m)!}{m(m-1)\dots 2\cdot 1\cdot (n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

□

Možemo primetiti da binomni koeficijent $\binom{n}{m}$ odgovara broju kombinacija bez ponavljanje klase m od n elemenata. Broj načina da se od n elemenata izabere m elemenata jednak je broju načina da se od n elemenata izabere (preostalih) $n-m$ elemenata. To je formalno zapisano u sledećoj lemi.

Lema 32 (simetričnost) *Za cele brojeve n i m sa osobinom $0 \leq m \leq n$, važi*

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Dokaz. Sledi direktno na osnovu prethodne leme:

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\\ \binom{n}{m} &= \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}\end{aligned}$$

□

Lema 33 (Paskalov identitet) *Za cele brojeve n i m, $1 \leq m \leq n-1$, važi*

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Dokaz. Dajemo dva dokaza, preko primene kombinatornih rezultata i direktno primenom definicije binomnog koeficijenta.

1. Posmatrajmo skup A sa $n \geq 1$ elemenata i izaberimo proizvoljno element $a \in A$. Neka je

$$\begin{aligned}S_m &= \{B : B \subseteq A, |B| = m\},\\ S_m^a &= \{B : B \subseteq A, a \in B, |B| = m\},\\ S_m^{\bar{a}} &= \{B : B \subseteq A \setminus \{a\}, |B| = m\}.\end{aligned}$$

Tada je

$$S_m = S_m^a \cup S_m^{\bar{a}} \quad \textbf{i} \quad S_m^a \cap S_m^{\bar{a}} = \emptyset.$$

i prema principu zbira

$$|S_m| = |S_m^a| + |S_m^{\bar{a}}|.$$

Kako je broj elemenata u prethodnim skupovima

$$\begin{aligned}
|S_m| &= \left|\binom{A}{m}\right| = \binom{n}{m},\\
|S_m^a| &= \left|\binom{A\setminus\{a\}}{m-1}\right| = \binom{n-1}{m-1},\\
|S_m^{\bar a}| &= \left|\binom{A\setminus\{a\}}{m}\right| = \binom{n-1}{m},
\end{aligned}$$

odakle sledi

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

2. Koristeći Lemu 31, dobijamo

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} &= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}\\
&= \frac{m\cdot(n-1)! + (n-m)\cdot(n-1)!}{m!(n-m)!}\\
&= \frac{(m+n-m)\cdot(n-1)!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m} \qquad \square
\end{aligned}$$

$\square$

Paskalov identitet se koristi za tabelarni prikaz binomnih koeficijenata, tzv. Paskalov trougao.

(n,m)	0	1	2	3	4	5	$\dots$	$m'-1$	m'	$\dots$
0	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	1	1	$-$	$-$	$-$	$-$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
2	1	2	1	$-$	$-$	$-$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
3	1	3	3	1	$-$	$-$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
4	1	4	6	4	1	$-$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
5	1	5	10	10	5	1	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$			
$n'-1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\binom{n'-1}{m'-1}$	$\binom{n'-1}{m'}$	$\dots$
n'	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\binom{n'}{m'}$	$\dots$

Prethodna tabela često se prikazuje u obliku jednakokrakog trougla, na čijim kracima su jedinice.

Teorema 34 (binomna formula) *Neka je $x, y \in \mathbb{R}$ i neka je* $\mathbb{N}$.. *Tada važi*

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m.$$

Dokaz. Dajemo ponovo dva dokaza, primenom kombinatorne analize i primenom matematičke indukcije.

1. Imajući u vidu da je

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n \text{ puta}},$$

desnu stranu možemo zapisati kao sumu proizvoda (monoma) koje dobijamo kada za činioce izaberemo iz svake zagrade x ili y. Znači, ako iz m $(m \geq 0)$ zagrada izaberemo y, a iz $n-m$ zagrada izaberemo x dobijamo

$$x^{n-m}y^m.$$

Broj načina da izaberemo m zagrada iz kojih ćemo izabrati y jednak je $\binom{n}{m}$ (iz preostalih biramo x).

2. Indukcijom po n.

<u>Baza $n = 1$:</u> $(x+y)^1 = x+y$

<u>Induktivna pretpostavka (T_n):</u>

$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + nxy^{n-1} + y^n$

<u>Induktivni korak ($T_n \Rightarrow T_{n+1}$) :</u> Treba pokazati da je

$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + (n+1)x^n y + \ldots + (n+1)xy^n + y^{n+1}.$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) \\
&= \left(x^n + nx^{n-1}y + \tbinom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + nxy^{n-1} + y^n\right)(x+y) \\
&= \begin{cases} x^{n+1} + nx^n y & +\binom{n}{2}x^{n-1}y^2 + \quad \ldots \quad +\binom{n}{n-1}x^2y^{n-1} \quad +xy^n \\ \quad\;\; + \;\; x^n y & +\binom{n}{1}x^{n-1}y^2 + \quad \ldots \quad +\binom{n}{n-2}x^2y^{n-1} \quad +nxy^n + y^{n+1}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Koristeći Paskalov indentitet, dobijamo

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + (n+1)x^n y + \left(\tbinom{n}{1} + \tbinom{n}{2}\right)x^{n-1}y^2 + \ldots \\
&\quad + \left(\tbinom{n}{n-1} + \tbinom{n}{n-2}\right)x^2y^{n-1} + (n+1)xy^n + y^{n+1},
\end{aligned}$$

što se primenom Leme 33 svodi na

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} x^{n+1-m}y^m.$$

□

1.6.1 Polinomni koeficijenti i polinomna formula

Ako binomne koeficijente posmatramo sa stanovišta binomne formule, tj. kao koeficijente u razvijenom obliku stepena binoma, prirodno se postavlja pitanje da li bi oni analogno mogli biti uopšteni na koeficijente u razvoju stepena trinoma ili nekog drugog polinoma. Naredna definicija predstavlja jedno uopštenje binomnih koeficijenta za koje ćemo kasnije pokazati da odgovaraju koeficijentima u razvoju stepena polinoma.

Definicija 35 *Neka su dati brojevi* $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}_0$ *i neka je* $n = m_1 + \ldots + m_l$. *Tada polinomni koeficijent definišemo na sledeći način:*

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \frac{n!}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_l!}$$

Polinomni koeficijent kombinatorno se može interpretirati kao:

(i) broj permutacija multiskupa $M = [a_1, \ldots, a_l]_{m_1, \ldots, m_l}$;

(ii) broj uredenih l-torki $(B_1, \ldots, B_l)$ skupa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ sa osobinom da je, za date vrednosti $(m_1, \ldots, m_l)$,

- $A = B_1 \cup \ldots \cup B_l$,
- $|B_1| = m_1, \ldots, |B_l| = m_l$,
- $m_1 + \ldots + m_l = n$.

Zadatak 36 *(i) Kreirati sve permutacije multiskupa* $M = \{\{a, a, b, b, b\}\}$.

(ii) Kreirati sve uredene parove (B_1, B_2) *sa osobinom* $B_1 \cup B_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $|B_1| = 2$, *i* $|B_2| = 3$.

Rešenje.

(i)

$aabbb$	$ababb$	$abbab$	$abbba$
$baabb$	$babab$	$babba$	$bbaab$
$bbaba$	$bbbaa$		

(ii)

$(\{1,2\},\{3,4,5\})$	$(\{1,3\},\{2,4,5\})$	$(\{1,4\},\{2,3,5\})$	$(\{1,5\},\{2,3,4\})$
$(\{2,3\},\{1,4,5\})$	$(\{2,4\},\{1,3,5\})$	$(\{2,5\},\{1,3,4\})$	$(\{3,4\},\{1,2,5\})$
$(\{3,5\},\{1,2,4\})$	$(\{4,5\},\{1,2,3\})$		

□
Na osnovu Definicije 35 direktno slede sledeće osobine.

Teorema 37 *Neka su dati brojevi* $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}_0$ *i neka je* $n = m_1 + \ldots + m_l$. *Tada je*

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-(m_1+m_2)}{m_3}\cdots\binom{m_l}{m_l}.$$

Dokaz. Ako se primeni definicija binomnih koeficijenata na desnu stranu, po jedan činilac iz imenioca se uvek skrati sa brojiocem iz narednog razlomka.

$$\begin{aligned}\binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\cdots\binom{m_l}{m_l} &= \frac{n!}{m_1!(n-m_1)!}\,\frac{(n-m_1)!}{m_2!(n-m_1-m_2)!}\cdots\frac{m_l!}{m_l!0!}\\ &= \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l}\end{aligned}$$

□
Prethodno tvrđenje daje vezu između permutacija multiskupa i kombinacija bez ponavljanja.

Teorema 38 *Neka su dati brojevi* $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}_0$ *i neka je* $n = m_1 + \ldots + m_l$. *Ako je* $\{\{m_1, m_2, \ldots, m_l\}\} = \{\{k_1, k_2, \ldots, k_l\}\}$, *onda je*

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_l}.$$

Dokaz. Iz uslova $\{\{m_1, m_2, \ldots, m_l\}\} = \{\{k_1, k_2, \ldots, k_l\}\}$, direktno sledi da je

$$m_1!m_2!\ldots m_l! = k_1!k_2!\ldots k_l!,$$

a odatle i da su posmatrani polinomni koeficijenti jednaki. □

Primer 2

$$\binom{7}{3,2,2} = \binom{7}{2,3,2} = \binom{7}{2,2,3} = \frac{7!}{3!2!2!}$$

Teorema 39 *Neka su dati brojevi* $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}_0$ *i neka je* $n = m_1 + \ldots + m_l$. *Ako je* $0 < m_1, \ldots, m_l < n$, *onda važi*

$$\begin{aligned}\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} &= \binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} + \binom{n-1}{m_1, m_2-1, \ldots, m_l} + \ldots \\ &\quad + \binom{n-1}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1}.\end{aligned}$$

Dokaz. Dajemo dva dokaza, direktno primenom definicije i kombinatornim rezonovanjem.

1. Primenom Definicije 35,

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} &= \frac{(n-1)!}{(m_1-1)!m_2!\ldots m_l!} = \frac{m_1(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} \\ \binom{n-1}{m_1, m_2-1, \ldots, m_l} &= \frac{(n-1)!}{m_1!(m_2-1)!\ldots m_l!} = \frac{m_2(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} \\ &\ldots \\ \binom{n-1}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1} &= \frac{(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots(m_l-1)!} = \frac{m_l(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}\end{aligned}$$

   Tako dobijamo da je suma

$$\binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} + \binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} + \ldots + \binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l}$$

   jednaka

$$\frac{m_1(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} + \frac{m_2(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} + \ldots + \frac{m_l(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!},$$

   što nakon svođenja na zajednički imenilac daje

$$\frac{(m_1 + \ldots + m_l)(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}.$$

2. Leva strana jednakosti odgovara permutacijama multiskupa

$$\{\{a_1, \ldots, a_1, \ldots, a_l, \ldots, a_l\}\}$$

   Ako posmatramo desnu stranu, kombinatorna interpretacija je sledeća. Skup svih uređenja možemo podeliti na l podskupova, tako da svaki podksup sadži n-torke sa fiksiranom prvom komponentom. Kako su ti podskupovi po parovima disjunktni, možemo primeniti princip zbira. Dalje samo treba zaključiti da je broj načina da se urede elementi tako da je na prvom mestu a_1 jednak broju načina da se uredi preostalih $n-1$ elemenata, pri čemu će biti jedan manje a_1 na raspolaganju, a to je

$$P(m_1 - 1, m_2, \ldots, m_l).$$

Slično se rezonuje o ostalim elementima koji se mogu pojaviti na prvom mestu.

□

Teorema 40 *Neka su dati celi brojevi $m_1, \ldots, m_l \geq 0$ i neka je $n = m_1 + \ldots + m_l$. Tada je*

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}, 0} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}}.$$

Dokaz. Na osnovu definicije polinomnog koeficijenta i definicije faktorijela, dobijamo

$$\begin{aligned}\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}, 0} &= \frac{n!}{m_1! \ldots m_{l-1}! 0!} \\ &= \frac{n!}{m_1! \ldots m_{l-1}!} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}}\end{aligned}$$

□

Teorema 41 (polinomna formula) *Neka su $x_1, \ldots, x_l$ $(l \geq 2)$ proizvoljni realni brojevi i neka je $n \geq 1$. Tada je*

$$(x_1 + \ldots + x_l)^n = \sum_{\substack{m_1 + \ldots + m_l = n \\ m_1 \geq 0 \ldots m_l \geq 0}} \binom{n}{m_1, \ldots, m_l} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_l^{m_l}$$

Dokaz. Ostavljamo čitaocu za vežbu. □

1.6.2 Zadaci za vežbu

1. **Dokazati da za svaki pozitivan ceo broj** $n \geq 2$ **važi**

$$\binom{2n}{2} = 2 \cdot \binom{n}{2} + n^2.$$

Rešenje. Polazeći od izraza sa desne strane jednakosti, koristeći definiciju binomnog koeficijenta, dobijamo elvu stranu jednakosti:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \binom{n}{2} + n^2 =& 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = n^2 - n + n^2 \\ =& 2n^2 - n = n \cdot (2n-1) = \frac{2n(2n-1)}{2} = \binom{2n}{2}. \end{aligned}$$

□

2. **Neka su** $n, m, k \in \mathbb{N}_0$. **Dokazati da važi**

$$k \cdot \binom{n+1}{k} = (n+1) \cdot \binom{n}{k-1}.$$

Rešenje. Prema definiciji binomnog koeficijenta, dobijamo sledeći niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned} k \cdot \tbinom{n+1}{k} = (n+1) \cdot \tbinom{n}{k-1} \quad & \Leftrightarrow \quad k \cdot \tfrac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!} = (n+1) \cdot \tfrac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \\ & \Leftrightarrow \quad \tfrac{(n+1)!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} = \tfrac{(n+1)!}{(n-k+1)!(k-1)!}. \end{aligned}$$

□

3. **Dati kombinatornu interpretaciju identiteta**

$$\binom{5}{3} = \binom{2}{2}\binom{3}{3} + \binom{2}{1}\binom{3}{2} + \binom{2}{0}\binom{3}{1}.$$

Rešenje. Posmatraćemo petočlani skup $A = \{a, b, c, d, e\}$ i njegovu particiju na proizvoljan dvočlani podskup i njegov komplement:

$$B = \{a, b\} \qquad C = \{c, d, e\}.$$

Svaki tročlani podskup skupa A sastoji se od $i \in \{0, 1, 2\}$ elemenata iz skupa B i $3-i$ elemenata skupa C, što je prikazano u sledećoj tabeli.

$\binom{A}{3}$	$\binom{B}{i}$	$\binom{C}{3-i}$	$(i,3-i)$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{c\}$	$(2,1)$
$\{a,b,d\}$	$\{a,b\}$	$\{d\}$	$(2,1)$
$\{a,b,e\}$	$\{a,b\}$	$\{e\}$	$(2,1)$
$\{a,c,d\}$	$\{a\}$	$\{c,d\}$	$(1,2)$
$\{a,c,e\}$	$\{a\}$	$\{c,e\}$	$(1,2)$
$\{a,d,e\}$	$\{a\}$	$\{d,e\}$	$(1,2)$
$\{b,c,d\}$	$\{b\}$	$\{c,d\}$	$(1,2)$
$\{b,c,e\}$	$\{b\}$	$\{c,e\}$	$(1,2)$
$\{b,d,e\}$	$\{b\}$	$\{d,e\}$	$(1,2)$
$\{c,d,e\}$	$\{\}$	$\{c,d,e\}$	$(0,3)$

Time smo kreirali jedni bijektivno preslikavanje skupa svih tročlanih podskupova skupa A na skup svih parova u kojima prvu komponentu čine elementi iz skupa B, a drugu komponentu elementi iz skupa C:

$$f : \binom{A}{3} \to \binom{B}{2} \times \binom{C}{1} \cup \binom{B}{1} \times \binom{C}{2} \cup \binom{B}{0} \times \binom{C}{3}.$$

Na osnovu principa sume i proizvoda dobijamo zadati identitet. $\square$

4. **Neka su** $n, m, k \in \mathbb{N}$ **sa osobinom** $k \leq n$ **i** $k \leq m$. **Dokazati da važi**

$$\binom{n+m}{k} - \binom{m}{k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

Rešenje. Primetimo prvo da važi sledeći niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned} \tbinom{n+m}{k} - \tbinom{m}{k} = \sum_{i=1}^{k} \tbinom{n}{i}\tbinom{m}{k-i} \quad &\Leftrightarrow \quad \tbinom{n+m}{k} = \sum_{i=1}^{k} \tbinom{n}{i}\tbinom{m}{k-i} + \tbinom{m}{k} \\ &\Leftrightarrow \quad \tbinom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \tbinom{n}{i}\tbinom{m}{k-i}. \end{aligned}$$

Tačnost poslednje jednakosti, koja se naziva Vandermondov identitet, interpretiraćemo kombinatorno.

Neka je

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\} \\ B &= \{a_1, \ldots, a_n\} \\ C &= \{a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\}. \end{aligned}$$

Svaki k-točlani podskup skupa A sastoji se od i elemenata iz skupa B i $k-i$ elemenata iz skupa C, gde je i neka vrednost iz skupa $\{0, 1, \ldots, k\}$. Tako skup svih k točlanih podskupova možemo bijektivno preslikati na skup svih parova u kojima je prva komponenta i-točlani podskup skupa B, druga komponenta $(k-i)$-točlani podskup skupa C. Odatle je

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \sum_{i=0}^{k}\left|\binom{B}{i}\times\binom{C}{k-i}\right|.$$

□

5. **Neka su n i m nenegativni celi brojevi. Dokazati da važi**

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m+1}{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}\binom{m}{n-i}.$$

Rešenje. Ako primenimo Vandermondov identitet redom na levu i desnu stranu jednakosti, dobijamo iste vrednosti:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\tbinom{n}{i}\tbinom{m+1}{n-i} &= \tbinom{n+(m+1)}{n}\\ \sum_{i=0}^{n}\tbinom{n+1}{i}\tbinom{m}{n-i} &= \tbinom{(n+1)+m)}{n}.\end{aligned}$$

□

6. **Neka su $n, m \in \mathbb{N}_0$. Dokazati da važi**

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{m+i}{i} = \binom{n+m+1}{n}.$$

Rešenje. Dokaz ćemo izvesti indukcijom po n.
Baza $n=0$: $\binom{m+0}{0} = \binom{m+1}{0} = 1$
Induktivna pretpostavka (T_n): $\sum_{i=0}^{n}\binom{m+i}{i} = \binom{n+m+1}{n}$
Induktivni korak $(T_n \Rightarrow T_{n+1})$: Koristeći induktivnu pretpostavku i Paskalov identitet, dobijamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{m+i}{i} &= \sum_{i=0}^{n}\binom{m+i}{i} + \binom{m+n+1}{n+1}\\ &= \binom{n+m+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1}\\ &= \binom{n+m+2}{n+1}.\end{aligned}$$

□

7. **Odrediti koeficijent uz $x^3y^2z^4$ u razvoju trinoma** $(x+y+z)^9$.

Rešenje. Koeficijent uz $x^3y^2z^4$ jednak je

$$\binom{9}{3,2,4} = \frac{9!}{3!2!4!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3!2!} = 1260.$$

□

8. **Odrediti broj sabiraka u razvoju trinoma** $(x+y+z)^{2020}$.

Rešenje. Broj sabiraka u razvoju datog stepena trinoma jednak je broju rešenja jednačine

$$i+j+k=2020, \quad i,j,k\in\mathbb{N}_0,$$

a to je

$$\binom{2022}{2} = 1011\cdot 2021 = 2043231.$$

□

9. **Koliko sabiraka ima u razvijenom obliku** $(x_1+\ldots+x_l)^n$**?**

Rešenje. Broj sabiraka je jednak broju rešenja jednačine $m_1+\ldots+m_l=n$ sa osobinom $m_1,\ldots,m_l\in\mathbb{N}_0$, a taj broj je

$$\binom{n+l-1}{l-1}.$$

□

10. **Izračunati** $$\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_l=n\\ m_1\geq 0\ldots m_l\geq 0}} \binom{n}{m_1,\ldots,m_l}.$$

Rešenje. Ako je u polinmnoj formuli $x_1=x_2=\ldots=x_l=1$, onda dobijamo

$$\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_l=n\\ m_1\geq 0\ldots m_l\geq 0}} \binom{n}{m_1,\ldots,m_l} = (1+\ldots+1)^n = l^n$$

□

11. **Napisati u razvijenom obliku** $(x+y+z)^3$.

Rešenje. Ns osnovu polinomne formule sledi

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= \binom{3}{3,0,0}x^3y^0z^0+\binom{3}{0,3,0}x^0y^3z^0+\binom{3}{0,0,3}x^0y^0z^3\\ &+\binom{3}{0,1,2}x^0y^1z^2+\binom{3}{0,2,1}x^0y^2z^1+\binom{3}{1,0,2}x^1y^0z^2\\ &+\binom{3}{1,2,0}x^1y^2z^0+\binom{3}{2,0,1}x^2y^0z^1+\binom{3}{2,1,0}x^2y^1z^0\\ &+\binom{3}{1,1,1}x^1y^1z^1\\ &= x^3+y^3+z^3+3yz^2+3y^2z+3xz^2+3xy^2+3x^2z+3x^2y+6xyz.\end{aligned}$$

□

12. **Odrediti koeficijent uz $x^2y^3z^5$ u razvoju stepena trinoma**

$$(x+2y-z)^{10}.$$

Rešenje. Koeficijent uz $x^2y^3z^5$ je sadržan u sabirku

$$\binom{10}{2,3,5}x^2(2y)^3(-z)^5=\frac{10!}{2!3!5!}x^22^3y^3(-1)^5z^5=-20160x^2y^3z^5$$

□

13. **Odrediti koeficijent uz x u razvoju stepena trinoma**

$$(1+x-x^2)^{1749}.$$

Rešenje. Član koji odgovara stepenima (i,j,k) sabiraka trinoma $(1+x-x^2)$ je oblika

$$T_{i,j,k}=\binom{1749}{i,j,k}x^j(-x^2)^k=\binom{1749}{i,j,k}(-1)^kx^{j+2k}.$$

Za $j,k\geq 0$ jednčina $j+2k=1$ ima samo jedno rešenje $(j,k)=(1,0)$, odakle je $T_{1748,1,0}=\binom{1749}{1748,1,0}$ i traženi koeficijent je 1749. □

14. **Odrediti koeficijent uz x u razvoju stepena trinoma**

$$(2x^3-x+1)^4.$$

Rešenje. Član koji odgovara (i,j,k) je oblika

$$T_{i,j,k}=\binom{4}{i,j,k}(2x^3)^i(-x)^j=-\binom{4}{i,j,k}2^i(-1)^jx^{3i+j}$$

Znači,

$$\begin{array}{rcrcrcr} i & + & j & + & k & = & 4 \\ 3i & + & j & + & & = & 1, \end{array}$$

odakle je $(i, j, k) \in \{(0, 1, 3)\}$ i traženi koeficijent je $\binom{4}{0,1,3} = 4$. $\square$