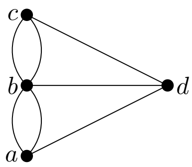
3.5 Ojlerov graf

Ako je graf moguće nacrtati u jednom potezu, tako da ne dižemo olovku sa papira, a da se na kraju vratimo u tačku iz koje smo krenuli, kažemo da je graf Ojlerov. Najpoznatiji problem koji se odnosi na ispitivanje postojanja takve konture u grafu, a smatra se ujedno i začetkom teorije grafova, jeste problem sedam mostova Kenigsberga.

Sedam mostova Kenigsberga (Kalinjingrada). Problem je rešio 1735. godine švajcarski matematičar Leonard Ojler. Kenigsberg (danas Kalinjingrad u Rusiji) je bio grad u Pruskoj, kroz koji prolazi reka Pregolja. U jednom delu grada reka obilazi dva ostrva. Tokom izgradnje grada, izgrađeno je ukupno sedam mostova koja povezuju ostrva sa levom i desnom obalom reke, ali i jedno sa drugim. Problem je bio odrediti šetnju po gradu, tako da se svaki most pređe tačno jednom i da se vratimo odakle smo krenuli.



Ključni doprinos u rešavanju ovog problema predstavljala je grafovska reprezentacija datog problema. Ojler je problem dalje rešio razmatranjem parnosti broja grana koje izlaze iz pojedinačnih čvorova. Tako je konstatovao da je nemoguće napraviti traženu šetnju kroz graf.

U nastavku dajemo formalnu definiciju Ojlerovog grafa, koja u opštem slučaju važi i za grafove sa paralelnim granama. U ovom delu ćemo podrazumevati da posmatramo grafove koji nemaju petlje, ali mogu imati paralelne grane.

Definicija 88 *Neka je G graf bez petlji. Ojlerov put (ili Ojlerov staza) je staza u grafu koja sadrži sve čvorove i grane tog grafa. Ojlerova tura je Ojlerova staza u kojoj su početni i krajnji čvor jednaki.*

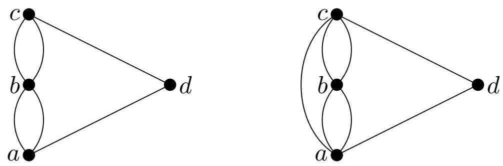
Znači, za šetnju u grafu ćemo reći da je Ojlerov put, ako zadovoljava sledeća dva uslova:

(i) šetnja sadrži sve čvorove grafa;

(ii) ne postoje dve jednake grane u šetnji;

(ii) svaka grana grafa se pojavljuje u šetnji.

Primer 13 *Posmatrajmo multigrafove G_1 i G_2 predstavljene na slici.*



Primer jednog Ojlerovog puta u G_1 je adcbabc dok je primer Ojlerove ture u G_2 staza adcbabca.

Definicija 89 *Graf je Ojlerov ako sadrži Ojlerovu turu. Graf je polu Ojlerov ako sadrži Ojlerov put.*

Primeri polu Ojlerovog i Ojlerovog grafa prikazani su u prethodnom primeru. U sledećem tvrđenju dajemo potreban i dovoljan uslov za postojanje Ojlerove ture u grafu.

Teorema 90 *Neka je G graf. Graf G je Ojlerov ako i samo ako je povezan i svaki čvor u G je parnog stepena.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Graf je povezan po definiciji Ojlerovog grafa. Neka je

$$u_1e_1u_2e_2\dots u_ne_nu_1$$

Ojlerova tura u G. Posmatrajmo sada proizvoljan čvor $v \in V(G)$. Ako se čvor v pojavljuje l puta u konturi u slučaju kada je $v \neq u_1$, odnosno $l+1$ ako je $v = u_1$, onda je stepen tog čvora $d_G(v) = 2l$.
($\Leftarrow$) Posmatrajmo u G stazu najveće dužine:

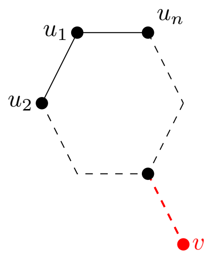
$$u_1e_1u_2e_2\dots u_ne_nu_{n+1}$$

Pokazaćemo da su prvi i poslednji čvor isti, kao i da se svi čvorovi i grane grafa pojavljuju u toj stazi.

(i) $u_1 = u_{n+1}$: Ako pretpostavimo suprotno, da je $u_1 \neq u_{n+1}$, onda je u toj konturi neparan broj grana incidentan sa u_1 u toj stazi. Kako je stepen čvora u_1 paran, postoji grana $e \in E(G)$ koja nije sadržana u posmatranoj stazi. U tom slučaju bismo mogli kreirati dužu stazu od posmatrane, što dovodi do kontradikcije.

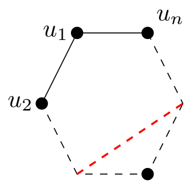
(ii) $\{u_1, \ldots, u_n\} = V(G)$:

Pretpostavimo suprotno, da postoje čvorovi koji nisu na posmatranoj stazi. Kako je G povezan, postoji grana $\{u_i, v\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, sa osobinom $v \notin \{u_1, \ldots, u_n\}$. U tom slučaju možemo konstruisati stazu veće dužine od posmatrane.



(iii) $\{e_1, \ldots, e_n\} = E(G)$:

Sada kada znamo da je posmatrana staza u stvari kontura koja sadrži sve čvorove grafa, pokazaćemo da su sve grane grafa na toj konturi. Ako pretpostavimo suprotno, da postoji grana koja nije na toj konturi, onda bismo ponovo mogli konstruisati dužu stazu od posmatrane.



□

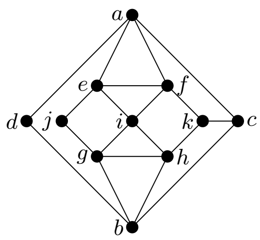
Kako je svaki Ojlerov graf isovremeno i polu Ojlerov graf, u sledeće tvrđenje izdvaja potreba i dovoljan uslov za postojanje Ojelrovog puta u grafu koji nema Ojlerovu turu.

Teorema 91 *Neka je $G = (V, E)$ graf koji nije Ojlerov. Graf G je polu Ojlerov ako i samo ako je G povezan i ima tačno dva čvora neparnog stepena.*

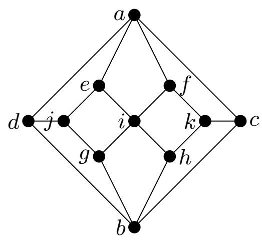
Dokaz. ($\Rightarrow$) Sličnim rezonovanjem kao u prethodnom dokazu, za svaki čvor grafa koji nije na krajevim Ojlerovog puta, na tom putu se pojavljuje paran broj grana koje su incidentne sa tim čvorom. Za dva čvora na kraju puta imamo, osim eventualnog parnog broja grana unutar staze, još po jednu granu koja im je incidentna, odakle dobijamo da ta dva čvora imaju neparne stepene.
($\Leftarrow$) Neka su u i v jedini čvorovi grafa neparnog stepena. Posmatrajmo sada graf G' koji dobijamo od grafa G dodavanjem nove grane e koja je incidentna sa čvorovima u i v (ona može biti paralelna nekim već postojećime granama). U grafu G' su sada svi čvorovi parnog stepena. Prema Teoremi 90, G' sadrži Ojleorvu turu. Po definiciji, ta tura sadrži granu G. Oduzimanjem grane e iz Ojlerove ture grafa G' dobijamo Ojlerov put u grafu G.

3.5.1 Zadaci za vežbu

1. Napisati pseudokod i napisati proceduru u proizvoljnom programskom jeziku koja implementira algoritam za određivanje Ojlerove ture.
2. Ispitati da li je graf G_1 Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerovu turu. Ako nije, da li je moguće svesti ga na Ojlerov graf brisanjem jedne grane?
3. Ispitati da li je graf G_1 polu Ojlerov. Ako jeste, napisati Ojlerov put.
4. Ispitati da li je graf G_2 Ojlerov. Ako nije, dodati mu najviše 4 grane, tako da novi graf bude prost i Ojlerov.
5. Za koje vrednosti n i m grafovi K_n, $K_{n,m}$ i Q_n imaju Ojlerovu turu?
6. Za koje vrednosti n i m grafovi $K_{n,m}$ ima Ojlerov put (koji nije Ojlerova tura)?



G_1



G_2