FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1 **KOLOKVIJUM 1**

Prezime, ime, br. indeksa: ______________________________ **26.08.2020.**

PREDISPITNE OBAVEZE 1

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(n^2+1\right)}{n+1} =$ ____________ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2-4n+3}{n^2-9}} =$ ____________
- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x+2} =$ ____________ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2+1} =$ ____________
- Zaokružiti tačne iskaze, za proizvoljne realne funkcije f, g i h:

  1) $(f\circ g)'(x) = \left(f'\circ g'\right)(x)$ **2)** $(f\circ g)'(x) = \left(f'\circ g\right)(x)\cdot g'(x)$ **3)** $(xf(x))' = f'(x)$
  4) $f(x)\equiv a \;\Rightarrow\; f'(x)=0$ **5)** $\left(f\left(x^2\right)\right)' = f'\left(x^2\right)$ **6)** $\left(f\left(x^2\right)\right)' = 2xf'\left(x^2\right)$
- Napisati jednačinu tangente na grafik funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+10$ u tački 1:
- Napisati prvi diferencijal funkcije $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+1$ u tački 1:
- Funkcija $f(x)=\sin\dfrac{x-4}{x^2+Ax+1}$ je neprekidna u tački $x_0=1$ za $A\in$ ____________
- Napisati prve izvode datih funkcija

  $f(x)=\dfrac{1}{\sin\left(x^2+3\right)}$, $f'(x)=$ ______________________

  $g(x)=\dfrac{e^x}{\sin x}$, $g'(x)=$ ______________________
- Stacionarne tačke funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+4$ su: ____________
- Funkcija $f(x)$ je konveksna na intervalu (a,b) ako (izraziti pomoću izvoda):
- Napisati formulu za razvoj funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ u beskonačni Tejlorov red u okolini tačke $x_0=-1$:

  $f(x)=$
- Prvi parcijalni izvodi funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{\sin x}{x+y^2}$ su

  $f_x(x,y)=$ ____________ $f_y(x,y)=$ ____________

ZADACI 1

1. Neka je niz x_n, $n\in\mathbb{N}$ definisan sa
$$x_1=1,\qquad x_{n+1}=\frac{x_n}{1+x_n^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$
   Dokazati da je niz x_n, $n\in\mathbb{N}$ konvergentan i izračunati njegovu graničnu vrednost.
2. Ispitati funkciju $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ i nacrtati njen grafik.
3. Koliko članova u razvoju funkcije $f(x)=\ln(1+x)$ u Maklorenov red treba uzeti da bi vrednost $\ln(0.5)$ izračunali sa greškom manjom od 0.01?

FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1 **KOLOKVIJUM 2**

Prezime, ime, br. indeksa: ______________________________ **26.08.2020.**

PREDISPITNE OBAVEZE 2

- Zaokružiti osobine integrala (za proizvoljne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, i $\alpha\in\mathbb{R}$)

  1) $\int h(f(x))dx = h\left(\int f(x)dx\right)$ **2)** $\int f^{\alpha}(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}f^{\alpha+1}(x)+c$

  3) $\int f(x)\cdot g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ **4)** $\int f(x)\cdot g(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

  5) $\int f(x)\cdot g(x)dx = g(x)\int f(x)dx + f(x)\int g(x)dx$ **6)** $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)+c$

  7) $\int f(x)\cdot g(x)dx = g(x)\int f(x)dx - f(x)\int g(x)dx$ **8)** $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

- Izračunati:

  1) $\int \frac{1}{\sqrt{3x-1}}dx =$ ______________ **2)** $\int \frac{\ln(2x)}{3x}dx =$ ______________

  3) $\int x\,e^{x}dx =$ ______________ **4)** $\int \frac{2e^{x}}{e^{x}+1}dx =$ ______________

- Izračunati:

  1) $\int_0^1 (1-3x)^2dx =$ ______________ **2)** $\int_{-2}^{3} \left(x^2+1\right)dx =$ ______________

  3) $\int_{-1}^{2} 3\sqrt{x+2}dx =$ ______________ **4)** $\int_0^1 e^{-2x}dx =$ ______________

- Ako je $f'(x) = x - \frac{1}{x}$, tada je $f(x) =$ ______________

- Napisati formulu za dužinu luka parametarski zadane krive $(x(t), y(t))$, $t\in[1,2]$, gde je $x'(t)>0$:

  $\ell =$ ______________________________

- Zaokruži rešenja diferencijalne jednačine $\left(y'\right)^2 + y^2 = 5x^2$:

  1) $y(x)=x$ **2)** $y(x)=e^{2x}$ **3)** $y(x)=e^{x}$ **4)** $y(x)=x^2$ **5)** $y(x)=0$

- Rešenje diferencijalne jednačine oblika $y' + f(x)y = g(x)$ tražimo u obliku: $y(x) =$ ______________

- Karakteristični koreni diferencijalne jednačine $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$ su: ______________

ZADACI 2

1. Izračunati $I = \int \frac{x^2+1}{(x+2)^2(x-3)}dx$.

2. Izračunati dužinu krive $x(t) = \frac{1}{2}t^2$, $y(t) = t$, $t\in[2,5]$.

3. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy' - 4y = x^2y^2$.

REŠENJA ZADATAKA KOLOKVIJUMA 1

1. *Neka je niz* x_n, $n \in \mathbb{N}$ *definisan sa*
$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Dokazati da je niz x_n, $n \in \mathbb{N}$ *konvergentan i izračunati njegovu graničnu vrednost.*

REŠENJE: Dokazaćemo da je niz x_n, $n \in \mathbb{N}$ ograničen i monotono opadajući, odakle će tada da sledi da je konvergentan. Iz definicije niza sledi da je $0 < x_n$, $n \in \mathbb{N}$, te je niz ograničen sa donje strane. Dokažimo matematičkom indukcijom da je $x_n \le 1$, $n \in \mathbb{N}$, tj. da je ograničen i odozgo. Imamo da je $x_1 = 1 \le 1$, a za $k+1$, $k \in \mathbb{N}$ je
$$x_{k+1} = \frac{x_k}{1+x_k^2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_k \le 1 + x_k^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x_k^2 - x_k + 1.$$
Kako su rešenja kvadratne jednačine $0 = t^2 - t + 1$ kompleksni brojevi $t_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ i pri tome je koeficijent uz t^2 pozitivan, sledi da je $0 \le t^2 - t + 1$ za sve $t \in \mathbb{R}$, dakle $x_{k+1} \le 1$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Dokažimo da je niz x_n, $n \in \mathbb{N}$ monotono opadajući. Imamo da je $1 = x_1 > x_2 = \dfrac{x_1}{1+x_1^2} = \dfrac{1}{2}$, a za $n \in \mathbb{N}$ je
$$x_{n+1} > x_{n+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_n}{1+x_n^2} > \frac{x_{n+1}}{1+x_{n+1}^2} = \frac{\frac{x_n}{1+x_n^2}}{1+\left(\frac{x_n}{1+x_n^2}\right)^2} = \frac{\frac{x_n}{1+x_n^2}}{\frac{(1+x_n^2)^2+x_n^2}{(1+x_n^2)^2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x_n}{1+x_n^2} > \frac{\frac{x_n}{1+x_n^2}}{\frac{(1+x_n^2)^2+x_n^2}{(1+x_n^2)^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_n}{1+x_n^2} > \frac{x_n}{\frac{(1+x_n^2)^2+x_n^2}{1+x_n^2}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+x_n^2} > \frac{1+x_n^2}{(1+x_n^2)^2+x_n^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \frac{(1+x_n^2)^2}{(1+x_n^2)^2+x_n^2}$$
što je tačno jer za svaka dva realna broja $a \ne 0$ i b važi $1 > \dfrac{a^2}{a^2+b^2}$. Dakle, niz x_n, $n \in \mathbb{N}$ je ograničen i monotono opadajući, te je konvergentan, tj. postoji $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Kako je
$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+x_n^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{1+\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^2},$$
dobijamo da je $A = \dfrac{A}{1+A^2}$ tj. $A\left(1+A^2\right) = A$. Jedino rešenje ove jednačine je $A = 0$ jer je za $A \ne 0$ ekvivalentna sa jednačinom $1 + A^2 = 1$ čije je jedino rešenje takođe $A = 0$. Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2. *Ispitati funkciju* $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ *i nacrtati njen grafik.*

REŠENJE:

(a) *Domen funkcije*: $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge \ln x \ne 0\} = (0,1) \cup (1,\infty)$.

(b) *Nule funkcije*: $\dfrac{x}{\ln x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \notin \mathcal{D}_f$;
dakle, ova funkcija nema nula.

(c) *Znak funkcije*: za $x \in \mathcal{D}_f$ je
$\dfrac{x}{\ln x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ((x > 0 \wedge \ln x > 0) \vee (x < 0 \wedge \ln x < 0)) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad ((x > 0 \wedge x > 1) \vee (x < 0 \wedge x < 1)) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (1,\infty)$;
dakle, funkcija f je pozitivna na intervalu $(1,\infty)$, a negativna na intervalu $(0,1)$.

(d) *Monotonost i ekstremi funkcije*: $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$;
kako je $\ln^2 x > 0$ za sve $x \in \mathcal{D}_f$, sledi

$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > e;$

dakle, funkcija f je monotono rastuća na skupu (e, ∞), a monotono opadajuća na skupu $(0,1) \cup (1,e)$, i pri tome ima lokalni minimum u tački $x = e$, gde je $f(e) = 1$.

(e) *Konveksnost i konkavnost funkcije*:

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x'1) 2\ln x \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{1}{x\ln^4 x}\ln x(2 - \ln x) = \frac{2-\ln x}{x\ln^3 x};$$

kako je $x > 0$ za sve $x \in \mathcal{D}_f$, sledi

$$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2-\ln x}{\ln^3 x} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \big((2-\ln x > 0 \wedge \ln^3 x > 0\big) \vee \big(2 - \ln x < 0 \wedge \ln^3 x < 0)\big) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \big((e^2 > x \wedge x > 1\big) \vee \big(e^2 < x \wedge x < 1)\big) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(1, e^2\right);$$

dakle, funkcija f je konveksna na skupu $\left(1, e^2\right)$, a konkavna na skupu $(0,1) \cup \left(e^2, \infty\right)$.

(f) *Vertikalne asimptote funkcije*: vertikalne asimptote tražimo u tačkama 0 i 1;

kako je $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{+0}{-\infty} = -0$, funkcija f u tački 0 nema vertikalnu asimptotu;

kako je $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{-0} = -\infty$, funkcija f u tački 1 ima vertikalnu asimptotu s leve strane;

kako je $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{+0} = +\infty$, funkcija f u tački 1 ima vertikalnu asimptotu i s leve strane.

(g) *Horizontalna / kosa asimptota funkcije*:

kako je (koristeći Lopitalovo pravilo [*], jer je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty}$)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty,$$

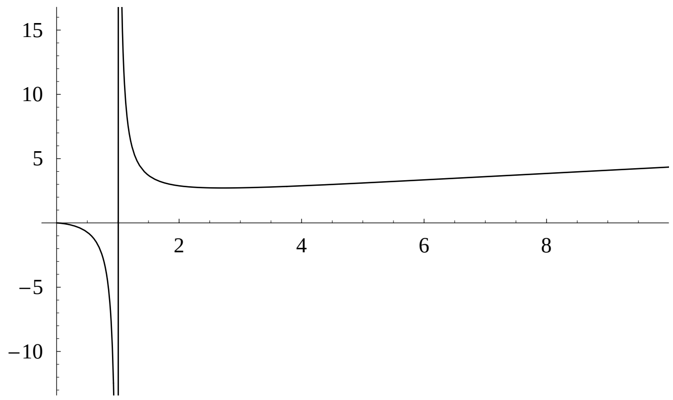
funkcija f sa desne strane nema horizontalnu asimptotu;

kako je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = 0,$$

funkcija f sa desne strane nema ni kosu asimptotu.

(h) *Grafik funkcije*:



3. *Koliko članova u razvoju funkcije $f(x) = \ln(1+x)$ u Maklorenov red treba uzeti da bi vrednost $\ln(0.5)$ izračunali sa greškom manjom od 0.01?*

REŠENJE: Imamo da je $\ln(0.5) = \ln(1 + (-0.5)) = f(-0.5)$, te posmatramo razvoj funkcije $f(x) = \ln(1+x)$ u tački $x = -0.5$. Kako je

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \qquad x \in (-1, 1],$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ za neko } \xi \in (x, 0),$$

to za $x = -0.5$ treba da bude

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < 0.01,$$

pri čemu za $f(x) = \ln(1+x)$ induktivno dobijamo

$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4},$
$f^{(5)}(x) = \frac{4!}{(1+x)^5}, \quad f^{(6)}(x) = -\frac{5!}{(1+x)^6}, \ldots$

odnosno

$$f^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(1+x)^{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$f^{(2n)}(x) = -\frac{(2n-1)!}{(1+x)^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

Tako, za $\xi \in (-0.5, 0)$, za sve $x \in \mathbb{R}$ dobijamo

$$|r_n(-0.5)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(-0.5)^{n+1}\right| = \left|\frac{\pm\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}}{(n+1)!}(-0.5)^{n+1}\right| =$$
$$= \left|\frac{0.5^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}\right| < \frac{0.5^{n+1}}{(n+1)0.5^{n+1}} = \frac{1}{n+1} < 0.01,$$

pri čemu je

$$\frac{1}{n+1} < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad 100 < n+1 \quad \Leftrightarrow \quad 99 < n.$$

Dakle, za traženu aproksimaciju je dovoljno uzeti $n = 100$, odnosno polinom 100-tog stepena.

REŠENJA ZADATAKA KOLOKVIJUMA 2

1. *Izračunati* $I = \int \frac{x^2+1}{(x+2)^2(x-3)}dx.$

REŠENJE: U ovom zadatku, polinom u brojiocu je već rastavljen na proizvod nesvodljivih polinoma. Sledi

$$\frac{x^2+1}{(x+2)^2(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-3} =$$
$$= \frac{A(x+2)(x+3) + B(x+3) + C(x+2)^2}{(x+2)^2(x-3)} =$$
$$= \frac{A\left(x^2+5x+6\right) + B(x+3) + C\left(x^2+4x+4\right)}{(x+2)^2(x-3)} =$$
$$= \frac{(A+C)x^2 + (5A+B+4C)x + (6A+3B+4C)}{(x+2)^2(x-3)},$$

te izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata polinoma u imeniocima x^2+1 i $(A+C)x^2 + (5A+B+4C)x + (6A+3B+4C)$ dobijamo

$$\begin{array}{rcrcrcl} A & + & & & C & = & 1 \\ 5A & + & B & + & 4C & = & 0 \\ 6A & + & 3B & + & 4C & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcl} A & + & & & C & = & 1 \\ 5A & + & B & + & 4C & = & 0 \\ -9A & & & - & 8C & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcl} A & + & & & C & = & 1 \\ 5A & + & B & + & 4C & = & 0 \\ & & & & C & = & 10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcr} A & = & -9 \\ B & = & -14 \\ C & = & 10 \end{array},$$

te je

$$I = \int \frac{x^2+1}{(x+2)^2(x-3)}dx = \int \left(\frac{-9}{x+2} + \frac{-14}{(x+2)^2} + \frac{10}{x-3}\right)dx =$$
$$= -9\int \frac{1}{x+2}dx - 14\int \frac{1}{(x+2)^2}dx + 10\int \frac{1}{x-3}dx = \ldots$$

kod prva dva integrala uvodimo smenu $x+2=t$, $dx=dt$, a kod trećeg smenu $x-3=z$, $dx=dz$

$$I = -9\int \frac{1}{t}dt - 14\int \frac{1}{t^2}dt + 10\int \frac{1}{z}dz = -9\int \frac{1}{t}dt - 14\int t^{-2}dt + 10\int \frac{1}{z}dz =$$

$$= -9\ln t + 14\frac{1}{t} + 10\ln z + c = -9\ln(x+2) + 14\frac{1}{x+2} + 10\ln(x-3) + c.$$

2. *Izračunati dužinu krive* $x(t) = \frac{1}{2}t^2,\ y(t) = t,\ t \in [2,5].$

   REŠENJE: Kako je $x'(t) = t$ i $y'(t) = 1$, dobijamo

   $$\ell = \int_2^5 \sqrt{t^2+1}dt = \int_2^5 \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}}dt.$$

   Kako je

   $$I = \int \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}}dt = (at+b)\sqrt{t^2+1} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

   $$\Rightarrow \quad \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1}} = a\sqrt{t^2+1} + \frac{at^2+bt}{\sqrt{t^2+1}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

   $$\Rightarrow \quad t^2+1 = a\big(t^2+1\big) + at^2 + bt + \lambda = 2at^2 + bt + a + \lambda$$

   $$\Rightarrow \quad (2a = 1 \ \wedge \ b = 0 \ \wedge \ a + \lambda = 1)$$

   $$\Rightarrow \quad \left(a = \frac{1}{2} \ \wedge \ b = 0 \ \wedge \ \lambda = \frac{1}{2}\right),$$

   te je

   $$I = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c.$$

   Tako dobijamo

   $$\ell = \left(\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right)\Big|_2^5 = \frac{5}{2}\sqrt{26} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 5 - \sqrt{5} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2.$$

3. *Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine* $xy' - 4y = x^2y^2$.

   REŠENJE:

   $$xy' - 4y = x^2y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y' - 4\frac{1}{x}y = xy^2,$$

   smenom $z = y^{1-2} = y^{-1}$, pri čemu je $z' = -y^{-2}y'$, $y' = -y^2z'$ dobijamo dalje

   $$-y^2z' - 4\frac{1}{x}y = xy^2 \quad \Leftrightarrow \quad z' + 4\frac{1}{x}y^{-1} = -x \quad \Leftrightarrow \quad z' + 4\frac{1}{x}z = -x,$$

   te dalje smenom $z = uv$, $z' = u'v + uv'$ dobijamo

   $$u'v + uv' + 4\frac{1}{x}uv = -x \quad \Leftrightarrow \quad u'v + u(v' + 4\frac{1}{x}v) = -x,$$

   gde je

   $$v' + 4\frac{1}{x}v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -4\int \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln v = -4\ln x \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{x^4},$$

   $$u'\frac{1}{x^4} = -x \quad \Leftrightarrow \quad \int du = -\int x^5dx \quad \Leftrightarrow \quad u = -\frac{1}{6}x^6 + c,$$

   te je

   $$z = uv = \frac{1}{x^4}(c - \frac{1}{6}x^6) \quad \Rightarrow \quad z = y^{-1} = \frac{1}{x^4}(c - \frac{1}{6}x^6) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^4}{c - \frac{1}{6}x^6}.$$