Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 27. januar 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Predispitne obaveze 2
10 poena

1. [1 poen] Obeležje X ima uniformnu $\mathcal{U}(1, b)$ raspodelu ($b > 1$). Na osnovu uzorka $2,3$; $1,7$; $3,6$; $2,5$; $1,5$; $2,4$ metodom momenata oceniti parametar b.

2. [4 poena] Dat je lanac Markova čiji je skup stanja $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ i čija je matrica prelaza $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a & 2a & 3a \\ \frac{1}{4} & b & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

$6a = 1$

$b + \frac{2}{4} = 1$

a) $a =$ ....1/6.... i $b =$ ....1/2....

b) Ako je sistem u početnom momentu bio u stanju s_2 odrediti vektor početnih verovatnoća $\mathbf{p}(0) =$

$$\begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array}$$
$$[0 \quad 1 \quad 0]$$

c) Odrediti vektor verovatnoća $\mathbf{p}(1) =$ .... i verovatnoću $p_2(1) =$ $\boxed{}$ ....

$$p(1) = p(0) \cdot \mathbb{P} = \ldots = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ [\quad \boxed{} \quad] \end{array}$$

d) Da li postoje finalne verovatnoće? Odgovor objasniti! Ako postoje, odrediti ih.

DA, $\mathbb{P} > 0$, решим систем

$$p^* \cdot \mathbb{P} = p^*$$
$$\sum p_i^* = 1$$

e) Odrediti, ako je to moguće, početni vektor verovatnoća $p(0)$ tako da dati lanac Markova bude stacionaran.

$$p(0) = p^*$$

3. [5 poena] Neka je X_t, $t \in [0, \infty)$, slučajni proces sa stacionarnim nezavisnim priraštajima, $X_0 = 0$ i $X_t - X_s$ ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(a(t-s))$ raspodelu za $t > s$ i $a > 0$. Izračunati očekivanje, disperziju, korelacionu funkciju i kovarijansnu funciju slučajnog procesa X_t.

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 27. januar 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 2
25 poena

Zadaci – Raditi u svesci!

1. [7 poena] Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive, gde U ima zakon raspodele $U : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, a slučajna promenljiva V je data funkcijom gustine $\varphi_V(v) = \begin{cases} \frac{2}{3}v, & v \in (1,2) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$. Neka je $X_t,\ t \in \mathbb{R}$, slučajni proces definisan sa $X_t = e^{2t}U + tV$. Odrediti matematičko očekivanje, korelacionu funkciju i disperziju datog slučajnog procesa.

2. [9 poena] Veca svakog dana odlazi na grupne treninge aerobika, pilatesa ili joge. Ne ide dva dana uzastopno na isti trening. Ukoliko jednog dana ode na aerobik, narednog dana tri puta verovatnije ide na pilates nego na jogu. Ukoliko jednog dana ode na pilates, narednog dana duplo verovatnije ide na aerobik nego na jogu, a ukoliko jednog dana ode na jogu, narednog dana sa istim verovatnoćama bira aerobik i pilates.
   a) Naći matricu prelaza za jedan korak.
   b) Da li postoje finalne verovatnoće opisanog sistema? Odgovor obrazložiti i ako postoje naći ih.
   c) Ako je Veca u ponedeljak bila na pilatesu, koliko iznosi verovatnoća da će u sredu ići na jogu?
   d) Ako je Veca u ponedeljak i u sredu bila na jogi, koliko iznosi verovatnoća da će u petak i subotu ići na pilates?

3. [9 poena] U poslastičarnici radi jedna prodavačica. Kupci pristižu po Poasonovoj raspodeli, u proseku 10 kupaca u toku sata. Usluživanje jednog kupca ima eksponencijalnu raspodelu, i traje u proseku 4 minute.
   a) Opisati dati sistem masovnog opsluživanja i naći λ, μ i Λ.
   b) Da li postoje finalne verovatnoće opisanog sistema? Odgovor obrazložiti i ako postoje naći ih.
   c) Izračunati očekivani broj kupaca.
   d) Koliko vremena u toku smene od 8h ima više od 2 kupca u poslastičarnici?

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 27. januar 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 1
35 poena

Zadaci – Raditi u svesci!

1. [6 poena] Brojevi a i b biraju se na slučajan način iz intervala $[2,3]$. Izračunati verovatnoću da kvadratna jednačina $x^2+ax+b=0$ nema realna rešenja.

2. [7 poena] Slučajna promenljiva X data je funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} ax, & x \in (0,\sqrt{2}) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

    a) Izračunati konstantu a i naći funkciju raspodele slučajne promenljive X.

    b) Naći raspodelu slučajne promenljive $Y=\max\{X,1\}$. Da li je Y slučajna promenljiva neprekidnog tipa?

3. [8 poena] Veca gađa metu tri puta. Verovatnoća pogotka u svakom nezavisnom gađanju je $\frac{1}{3}$. Slučajna promenljiva X predstavlja broj promašaja, a slučajna promenljiva Y uzima vrednost -1 ako je broj pogodaka paran, a vrednost 1 ako je broj pogodaka neparan.

    a) Naći zakon raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y).

    b) Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y, i izračunati koeficijent korelacije ρ_{XY}.

    c) Naći zakon raspodele slučajne promenljive $Z=\dfrac{X}{Y+2}$.

4. [8 poena] Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(2,4)$ raspodelu, a uslovna slučajna promenljiva $Y|X=x$, $x\in(2,4)$, ima uniformnu $\mathcal{U}(x,x+2)$ raspodelu. Naći raspodelu slučajne promenljive $Z=XY$.

5. [6 poena] Odrediti:

    a) zakon raspodele slučajne promenljive X čija je karakteristična funkcija $k_X(t)=\sum\limits_{k=0}^{10}\frac{k+1}{66}\cos(kt)$;

    b) karakterističnu funkciju i raspodelu slučajne promenljive $Y=X_1+X_2+...+X_{100}$, ako su $X_1,X_2,...,X_{100}$ nezavisne slučajne promenljive i sve imaju normalnu $\mathcal{N}(1,2)$ raspodelu.

Komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje
Merenje i regulacija
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 27. januar 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita – 60 poena

Zadaci – raditi u svesci

1. [10 poena]Brojevi a i b biraju se na slučajan način iz intervala $[2, 3]$. Izračunati verovatnoću da kvadratna jednačina $x^2 + ax + b = 0$ nema realna rešenja.

2. [10 poena] Slučajna promenljiva X data je funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} ax, & x \in (0, \sqrt{2}) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

   a) Izračunati konstantu a i naći funkciju raspodele slučajne promenljive X.

   b) Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = \max\{X, 1\}$. Da li je Y slučajna promenljiva neprekidnog tipa?

3. [10 poena] Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(2, 4)$ raspodelu, a uslovna slučajna promenljiva $Y|X = x$, $x \in (2, 4)$, ima uniformnu $\mathcal{U}(x, x + 2)$ raspodelu. Naći raspodelu slučajne promenljive $Z = XY$.

4. [10 poena] Odrediti:

   a) zakon raspodele slučajne promenljive X čija je karakteristična funkcija $k_X(t) = \sum\limits_{k=0}^{10} \frac{k+1}{66} \cos(kt)$;

   b) karakterističnu funkciju i raspodelu slučajne promenljive $Y = X_1 + X_2 + ... + X_{100}$, ako su $X_1, X_2, ..., X_{100}$ nezavisne slučajne promenljive i sve imaju normalnu $\mathcal{N}(1, 2)$ raspodelu.

5. [10 poena] Veca svakog dana odlazi na grupne treninge aerobika, pilatesa ili joge. Ne ide dva dana uzastopno na isti trening. Ukoliko jednog dana ode na aerobik, narednog dana tri puta verovatnije ide na pilates nego na jogu. Ukoliko jednog dana ode na pilates, narednog dana duplo verovatnije ide na aerobik nego na jogu, a ukoliko jednog dana ode na jogu, narednog dana sa istim verovatnoćama bira aerobik i pilates.

   a) Naći matricu prelaza za jedan korak.

   b) Da li postoje finalne verovatnoće opisanog sistema? Odgovor obrazložiti i ako postoje naći ih.

   c) Ako je Veca u ponedeljak bila na pilatesu, koliko iznosi verovatnoća da će u sredu ići na jogu?

   d) Ako je Veca u ponedeljak i u sredu bila na jogi, koliko iznosi verovatnoća da će u petak i subotu ići na pilates?

6. [10 poena] U poslastičarnici radi jedna prodavačica. Kupci pristižu po Poasonovoj raspodeli, u proseku 10 kupaca u toku sata. Usluživanje jednog kupca ima eksponencijalnu raspodelu, i traje u proseku 4 minute.

   a) Opisati dati sistem masovnog opsluživanja i naći λ, μ i Λ.

   b) Da li postoje finalne verovatnoće opisanog sistema? Odgovor obrazložiti i ako postoje naći ih.

   c) Izračunati očekivani broj kupaca.

   d) Koliko vremena u toku smene od 8h ima više od 2 kupca u poslastičarnici?