predmet: Matematička analiza 2

LAPLASOVA TRANSFORMACIJA

Laplasova transformacija funkcije $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ koja je neprekidna po delovima je funkcija

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(x)\}=\int\limits_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx,$$

za one $s\in\mathbb{R}$ za koje dati nesvojstveni integral konvergira.

1. Izračunati po definiciji Laplasovu transformaciju sledećih funkcija:

   a) $f(x)=e^{2x},\ x\geq 0$;

   b) $f(x)=x^{\alpha},\ x>0,\ \alpha>-1$.

   Rešenje:

   a) Laplasova transformacija date funkcije je:
   $$\mathcal{L}\{e^{2x}\}=\int\limits_0^\infty e^{-sx}e^{2x}\,dx=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T e^{(2-s)x}\,dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2-s}e^{(2-s)x}\Big|_0^T=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2-s}\left(e^{(2-s)T}-e^0\right)$$
   $=\dfrac{1}{2-s}(0-1)=\dfrac{1}{s-2}$, pri čemu je zbog konvergencije $2-s<0$, tj. $s>2$.

   b) Laplasova transformacija date funkcije je:
   $\mathcal{L}\{x^\alpha\}=\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-sx}x^\alpha\,dx=(smena\ t=sx)=\int\limits_0^\infty e^{-t}\frac{t^\alpha}{s^\alpha}\frac{dt}{s}=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-t}\,dt=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, pri čemu je $s>0$.

   Napomena: $\Gamma(x)=\displaystyle\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ za $x>0$ i važi da je:

   $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ \Gamma(1)=1$ i $\Gamma(n+1)=n!,\ n\in\mathbb{N}$.

2. Koristeći osobine Laplasove transformacije, izračunati Laplasovu transformaciju sledećih funkcija:

   a) $f(x)=\operatorname{ch}(2x)$;

   b) $f(x)=\sin(2x)$;

   c) $f(x)=e^{2x}\cos(3x)$;

   d) $f(x)=\cos^2(ax),\ a\in\mathbb{R}$;

   e) $f(x)=x\cos(ax),\ a\in\mathbb{R}$.

   Rešenje:

   a) Koristeći formulu $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ i osobinu linearnosti dobijamo:
   $$\mathcal{L}\{\operatorname{ch}(2x)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{2x}\}+\frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-2x}\}=\frac{1}{2}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+2}=\frac{s+2+s-2}{2(s^2-4)}$$
   $=\dfrac{s}{s^2-4}$, $s>2$.

b) Koristeći formulu $\sin x = \dfrac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$ i osobinu linearnosti dobijamo:

$\mathcal{L}\{\sin(2x)\} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{2xi} - e^{-2xi}}{2i}\right\} = \dfrac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{2xi}\} - \dfrac{1}{2i}\mathcal{L}\{e^{-2xi}\} = \dfrac{1}{2i}\cdot\dfrac{1}{s-2i} - \dfrac{1}{2i}\cdot\dfrac{1}{s+2i} = \dfrac{s+2i-s+2i}{2i(s^2-4i^2)} = \dfrac{2}{s^2+4}, \quad s > 0.$

c) Laplasova transformacija funkcije $\cos(3x)$ je $F(s) = \dfrac{s}{s^2+9}$. Koristeći osobinu prigušivanja za $a = 2$ dobijamo:

$\mathcal{L}\{e^{2x}\cos(3x)\} = F(s-2) = \dfrac{s-2}{(s-2)^2+9}.$

d) Koristeći trigonometrijski identitet $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, kao i osobinu linearnosti, dobijamo:

$\mathcal{L}\{\cos^2(ax)\} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{1+\cos(2ax)}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} + \dfrac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos(2ax)\}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s}{s^2+4a^2} = \dfrac{s^2+4a^2+s^2}{2s(s^2+4a^2)} = \dfrac{2s^2+4a^2}{2s(s^2+4a^2)} = \dfrac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}.$

e) Laplasova transformacija funkcije $\cos(ax)$ je $F(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$.

Kako je $F'(s) = \dfrac{s^2+a^2-s\cdot 2s}{(s^2+a^2)^2} = \dfrac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}$, koristeći osobinu Laplasove transformacije $\mathcal{L}\{-xf(x)\} = F'(s)$, tj. $\mathcal{L}\{xf(x)\} = -F'(s)$, dobijamo:

$\mathcal{L}\{x\cos(ax)\} = \dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}.$

Inverzna Laplasova transformacija

Ako je $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$, tada je $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ inverzna Laplasova transformacija funkcije $F(s)$.

3. Naći inverzne Laplasove transformacije sledećih funkcija:

a) $F(s) = \dfrac{s+5}{s^2+2s+5}$;

b) $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3-s^2-2s}$;

c) $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s-2)^2}$.

Rešenje:

a) Kako je

$F(s) = \dfrac{s+5}{s^2+2s+5} = \dfrac{s+5}{(s+1)^2+4} = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+4} + \dfrac{4}{(s+1)^2+4},$

primenom osobine linearnosti dobijamo:

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^2+4}\right\} = e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x}\sin(2x) =$

$= e^{-x}(\cos(2x) + 2\sin(2x)).$

b) Rastavimo funkciju $F(s)$ na sumu parcijalnih razlomaka:

$F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3-s^2-2s} = \dfrac{s^2+1}{s(s+1)(s-2)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1} + \dfrac{C}{s-2}.$

Izračunavanjem dobijamo da je $A = -\dfrac{1}{2}, B = \dfrac{2}{3}, C = \dfrac{5}{6}$, tj. $F(s) = -\dfrac{\frac{1}{2}}{s} + \dfrac{\frac{2}{3}}{s+1} + \dfrac{\frac{5}{6}}{s-2}$.

Stoga, koristeći osobinu linearnosti dobijamo da je:

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\dfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} + \dfrac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\} + \dfrac{5}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}e^{-x} + \dfrac{5}{6}e^{2x}.$

c) Rastavimo funkciju $F(s)$ na sumu parcijalnih razlomaka:
$F(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2}$.
Izjednačavanjem izraza dobija se da je $A = 1, B = -1, C = 1$, tj.
$F(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{-1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}$.
Konačno, koristeći osobinu linearnosti dobijamo:
$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = e^x - e^{2x} + xe^{2x} = e^x + e^{2x}(x-1)$.

Primena Laplasove transformacije

Rešavanje običnih diferencijalnih jednačina

4. Rešiti početni problem: $y'' - 3y' + 2y = 4x + 12e^{-x}$, $y(0) = 6$, $y'(0) = -1$.

Rešenje:

Želimo da rešimo datu diferencijalnu jednačinu primenom Laplasove transformacije. Primenom Laplasove transformacije na levu i desnu stranu zadate jednačine i koristeći osobinu linearnosti dobijamo:

$\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = 4\mathcal{L}\{x\} + 12\mathcal{L}\{e^{-x}\}$.

Neka je $\mathcal{L}\{y\} = Y$. Koristeći osobinu Laplasove transformacije (izvod originala)

$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0), \quad \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0)$, tj.
$\mathcal{L}\{y'\} = sY - 6, \quad \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - 6s + 1$,

i Laplasove transformacije $\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$ i $\mathcal{L}\{e^{-x}\} = \frac{1}{s+1}$ dobijamo jednačinu

$s^2Y - 6s + 1 - 3sY + 18 + 2Y = \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1}$.

Dobili smo algebarsku jednačinu u kojoj ćemo izraziti Y:

$Y(s^2 - 3s + 2) = \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1} + 6s - 19 = \frac{4s + 4 + 12s^2 + 6s^3(s+1) - 19s^2(s+1)}{s^2(s+1)}$

$Y = \frac{6s^4 - 13s^3 - 7s^2 + 4s + 4}{s^2(s+1)(s-1)(s-2)}$

Rastavljanjem racionalne funkcije na zbir parcijalnih razlomaka dobijamo:

$$Y = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s-1} + \frac{-2}{s-2}.$$

Zatim, primenjujući inverznu Laplasovu transformaciju na rešenje Y, dobijamo funkciju $y(x)$, koja je rešenje zadatka:

$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} =$
$= 3 + 2x + 2e^{-x} + 3e^x - 2e^{2x}$.

Rešavanje sistema diferencijalnih jednačina

5. Primenom Laplasove transformacije rešiti sistem diferencijalnih jednačina:

$$x' = -7x + y$$

$$y' = -2x - 5y$$

.

uz početne uslove $x(0) = 3$ i $y(0) = -5$.

Rešenje:

Svešćemo dati sistem na sistem algebarskih jednačina, koji potom možemo rešavati na bilo koji poznat način. Primenom Laplasove transformacije na date jednačine i koristeći osobinu liearnosti dobijamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x'\} &= -7\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{y\}\\ \mathcal{L}\{y'\} &= -2\mathcal{L}\{x\} - 5\mathcal{L}\{y\}.\end{aligned}$$

Uvodimo oznake $\mathcal{L}\{x\} = X$ i $\mathcal{L}\{y\} = Y$. Koristeći osobinu Laplasove transformacije (izvod originala)

$$\mathcal{L}\{x'\} = sX - 3 \qquad\qquad \mathcal{L}\{y'\} = sY + 5$$

početni sistem se svodi na sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}sX - 3 &= -7X + Y\\ sY + 5 &= -2X - 5Y\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}(s+7)X - Y &= 3\\ 2X + (s+5)Y &= -5\end{aligned}$$

Ovaj sistem ćemo dalje rešavati metodom determinante. Kako je
$D = \begin{vmatrix} s+7 & -1 \\ 2 & s+5 \end{vmatrix} = s^2 + 12s + 37$, $D_X = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & s+5 \end{vmatrix} = 3s + 10$ i $D_Y = \begin{vmatrix} s+7 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -5s - 41$
dobijamo da je rešenje sistema:

$$X = \frac{D_x}{D} = \frac{3s+10}{s^2+12s+37} = \frac{3(s+6)-8}{(s+6)^2+1} = 3\frac{s+6}{(s+6)^2+1} - 8\frac{1}{(s+6)^2+1},$$

$$Y = \frac{D_y}{D} = \frac{-5s-41}{s^2+12s+37} = \frac{-5(s+6)-11}{(s+6)^2+1} = -5\frac{s+6}{(s+6)^2+1} - 11\frac{1}{(s+6)^2+1}.$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije dobijamo rešenje polaznog sistema:
$x = \mathcal{L}^{-1}\{X\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+6}{(s+6)^2+1}\right\} - 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+6)^2+1}\right\} = 3e^{-6t}\cos t - 8e^{-6t}\sin t =$
$= e^{-6t}(3\cos t - 8\sin t)$,
$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = -5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+6}{(s+6)^2+1}\right\} - 11\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+6)^2+1}\right\} = -5e^{-6t}\cos t - 11e^{-6t}\sin t =$
$= e^{-6t}(-5\cos t - 11\sin t)$.

Rešavanje integralnih jednačina

6. Rešiti integralnu jednačinu: $y(x) = x^2 + \sin(3x) + \int\limits_0^x (x-t)y(t)\,dt$.

Rešenje:

Data integralna jednačina je oblika: $y(x) = f(x) + \int\limits_0^x k(x-t)y(t)\,dt$.

Pošto je u datom zadatku $k(x-t) = x-t$, onda je $k(x) = x$. Koristeći osobinu Laplasove transformacije (proizvod slika), dobijamo da je:
$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x (x-t)y(t)\,dt\right\} = \mathcal{L}\{x\}\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2}Y.$
Dalje, primenjujemo Laplasovu transformaciju na obe strane date jednačine, dobijamo

$\mathcal{L}\{y(x)\} = \mathcal{L}\left\{x^2\right\} + \mathcal{L}\{\sin(3x)\} + \mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x (x-t)y(t)\,dt\right\}$, odakle je

$Y = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2+9} + \frac{Y}{s^2}.$

Iz poslednje jednačine, imamo da je $Y\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{2s^2+18+3s^3}{s^3(s^2+9)}$, pa je $Y = \frac{3s^3+2s^2+18}{s(s-1)(s+1)(s^2+9)}$

Rastavljajući racionalnu funkciju na zbir parcijalnih razlomaka, dobijamo:

$$Y = \frac{-2}{s} + \frac{23}{20}\frac{1}{s-1} + \frac{17}{20}\frac{1}{s+1} + \frac{27}{10}\frac{1}{s^2+9}.$$

Primenjujući inverznu Laplasovu transformaciju dobijamo rešenje zadatka:
$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{23}{20}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{17}{20}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{27}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} =$
$= -2 + \frac{23}{20}e^x + \frac{17}{20}e^{-x} + \frac{9}{10}\sin(3x).$

7. Rešiti integralnu jednačinu: $\int\limits_0^x e^{2(x-t)}y(t)\,dt - y(x) = (x-1)e^{2x}$.

Rešenje:

Ponovo imamo integralnu jednačinu oblika: $y(x) = f(x) + \int\limits_0^x k(x-t)y(t)\,dt$.

Pošto je u datom zadatku $k(x-t) = e^{2(x-t)}$, sledi da je $k(x) = e^{2x}$. Koristeći ovo i osobinu Laplasove transformacije (proizvod slika), znamo da je:

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x e^{2(x-t)}y(t)\,dt\right\} = \mathcal{L}\{e^{2x}\}\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s-2}Y.$$

Dalje, primenom Laplasove transformacije na obe strane zadate jednačine dobijamo

$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x e^{2(x-t)}y(t)\,dt\right\} - \mathcal{L}\{y(x)\} = \mathcal{L}\left\{xe^{2x}\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{2x}\right\}$, odakle je

$$\frac{Y}{s-2} - Y = \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{s-2}.$$

Zatim, rešavamo jednačinu po Y:

$$Y(s-2-s^2+4s-4)=1-s+2$$
$$Y(s-2)(3-s)=3-s$$
$$Y=\frac{1}{s-2}.$$

Primenjujući inverznu Laplasovu transformaciju dobijamo rešenje zadatka:

$$y=\mathcal{L}^{-1}\{Y\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=e^{2x}.$$