Predispitne obaveze 2 – Matematička analiza 2

Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Marko Gordić & Kolega GPT

1 Krivolinijski integral II vrste

Definicija

Parametrizovana kriva u $\mathbb{R}^n$ je preslikavanje $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ sa neprekidno diferencijabilnim koordinatnim funkcijama. Kriva je glatka ako $\gamma'(t) \neq 0$ za svaki $t \in [a, b]$.

Definicija

Krivolinijski integral II vrste (rad/cirkulacija) vektorskog polja $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ duž krive γ definisan je

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, \mathrm{d}t.$$

U ravni, za $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ piše se $\displaystyle\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$.

Napomena

Ako je kriva zatvorena ($\gamma(a) = \gamma(b)$), koristi se oznaka $\displaystyle\oint$.

2 Nezavisnost integracije od putanje

Definicija

Vektorsko polje $\boldsymbol{F}$ je konzervativno ako postoji skalarni potencijal Φ takav da $\boldsymbol{F} = \nabla\Phi$.

Teorema

Ako je $\boldsymbol{F}$ konzervativno na prosto povezanoj oblasti D, integral zavisi samo od krajnjih tačaka:

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

za svaku dve krive sa istim početkom i krajem. Posebno, $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ za svaki zatvoren $C \subset D$.

Napomena

U ravni je uslov $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0$ (tj. $Q_x - P_y = 0$) dovoljan za konzervativnost ako je oblast prosto povezana.

3 Grinova formula

Teorema

Ako L pozitivno orijentiše oblast $D \subset \mathbb{R}^2$ i P, Q imaju kontinuirane parcijalne izvode, tada

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

4 Kompleksni brojevi

Definicija

Kompleksan broj je $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{i}^2 = -1$. Konjugovano je $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$, modul $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definicija

Argument $\varphi = \arg z$ je ugao vektora z sa pozitivnom realnom osom. Glavna vrednost je $z \in (-\pi, \pi]$, opšti argument $\arg z = z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definicija

Trigonometrijski i eksponencijalni oblik:

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \qquad z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Teorema

Za $n \in \mathbb{N}$ važi $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = |z|^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$.

Definicija

n-ti koreni iz $z \neq 0$ su

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

5 Elementarne funkcije

- Stepena funkcija: $\omega = z^n$, $n \in \mathbb{N}$.
- Polinom: $P_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$.
- Prava racionalna funkcija: $\omega = P_n(z)/Q_m(z)$, $n < m$.
- Eksponencijalna funkcija: $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$.
- Trigonometrijske funkcije:

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},\ z \neq k\pi.$$

- Hiperboličke funkcije:

$$\sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2},$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z},\ z \neq \frac{\pi}{2}\mathrm{i} + k\pi\mathrm{i}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},\ z \neq k\pi\mathrm{i}.$$

6 Višeznačne elementarne funkcije

Korena funkcija

$$\omega = \sqrt[n]{z} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Logaritamska funkcija

$$z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad z \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Glavna vrednost: $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}z$.

Inverzne trigonometrijske funkcije

$$z = -\mathrm{i}\big(\mathrm{i}z + \sqrt{1-z^2}\big),$$

$$z = -\mathrm{i}\big(z + \sqrt{z^2-1}\big),$$

$$z = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\mathrm{i}+z}{\mathrm{i}-z}\right),\ z \neq \pm\mathrm{i},$$

$$z = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right),\ z \neq \pm\mathrm{i}.$$

7 Opšte funkcije

- Opšta stepena funkcija: $z^\lambda = \mathrm{e}^{\lambda z}$, $z \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
- Opšta eksponencijalna funkcija: $a^z = \mathrm{e}^{za}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

8 Analitička funkcija

Definicija

$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je diferencijabilna u z_0 ako postoji

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Analitična je u z_0 ako je diferencijabilna u nekoj okolini z_0.

Definicija

Ako je $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, Koši–Rimanovi uslovi glase

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Uz kontinuitet parcijalnih izvoda oni su dovoljni za diferencijabilnost.

Napomena

Ako je f holomorfna, u i v su harmonične funkcije: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

9 Kompleksni integral

Definicija

Za $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ definisano na $[a,b]$ važi

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Definicija

Ako je kontura C data sa $z = z(t)$, $t \in [a,b]$, linijski integral kompleksne funkcije je

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Teorema

Integral $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ zavisi samo od krajnjih tačaka u oblasti G ako i samo ako

$$\oint_{\widetilde{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

za svaku zatvorenu konturu $\widetilde{C} \subset G$.

Teorema

Ako je f analitička u jednostruko povezanoj oblasti G, tada za svaku zatvorenu, komadno glatku konturu $\widetilde{C} \subset G$ važi

$$\oint_{\widetilde{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Definicija

F je primitivna funkcije f u G ako $F'(z) = f(z)$ za svako $z \in G$.

Teorema

Ako F postoji i C spaja A i B u G, tada

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(B) - F(A).$$

10 Košijeve integralne formule

Teorema

Ako je f analitička na i unutar pozitivno orijentisane zatvorene krive C, a z_0 je u unutrašnjosti C, tada

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Teorema

Za $n \in \mathbb{N}_0$ važi

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Napomena

f mora biti analitička na C i u njenoj unutrašnjosti; C je zatvorena, komadno glatka i pozitivno orijentisana.

11 Loranov red

Definicija

Ako je f analitička u prstenu $P = \{z :\ r < |z - z_0| < R\}$, postoji razvoj

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,$$

gde je C pozitivno orijentisana kontura u P koja obuhvata z_0.

Napomena

Loranov red se piše kao zbir glavnog dela (negativni stepeni) i analitičkog dela (nenegativni stepeni). Ako je glavni deo nula, red se svodi na Tejlorov.

12 Klasifikacija singulariteta

Definicija

Tačka z_0 je singularnost funkcije f ako f nije analitična u z_0. Izolovana je ako postoji $R > 0$ takav da je f analitična za $0 < |z - z_0| < R$.

Definicija

Za izolovanu singularnost z_0, Loranov razvoj u $0 < |z - z_0| < R$ glasi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Definicija

Klasifikacija izolovanih singularnosti podleže sledećem:

1. Uklonjiva: $a_{-n} = 0$ za sva $n \geq 1$. Ekvivalentno, $\lim_{z\to z_0} f(z)$ postoji i konačan je, f je ograničena u okolini z_0 ili postoji holomorfna g na disku sa $g(z) = f(z)$ za $z \neq z_0$.
2. Pol reda $m \in \mathbb{N}$: $a_{-m} \neq 0$, a $a_{-n} = 0$ za $n > m$. Ekvivalentno, $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z) = L \neq 0$, ili $\frac{1}{f}$ ima uklonjivu singularnost i nulu reda m u z_0.
3. Esencijalna: beskonačno mnogo $a_{-n} \neq 0$. Slika funkcije je gusta u $\mathbb{C}$ u svakoj okolini z_0 (Casorati–Weierstrass), i funkcija poprima sve kompleksne vrednosti sa najviše jednim izuzetkom beskonačno puta (Velika Picardova teorema).

Napomena

Brz test: konačan limit $\Rightarrow$ uklonjiva; beskonačan limit $\Rightarrow$ pol; ni jedno ni drugo $\Rightarrow$ esencijalna.

Definicija

Ako su f i g holomorfne u z_0, $g(z_0) \neq 0$, a f ima nulu reda m, tada $\frac{f}{g}$ ima nulu reda m. Ako g ima nulu reda n, a $f(z_0) \neq 0$, tada $\frac{f}{g}$ ima pol reda n.

13 Singularitet u beskonačnosti

Definicija

f ima singularitet u ∞ ako $g(u) = f(1/u)$ ima singularitet u $u = 0$ iste vrste.

Definicija

Reziduum u beskonačnosti je

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_i),$$

gde $z_1, \ldots, z_k$ obuhvataju sve izolovane singularnosti u konačnom delu ravni.

Napomena

$\lim_{z\to\infty} f(z)$ konačan $\Rightarrow$ uklonjiva u ∞, $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Rightarrow$ pol u ∞, inače esencijalna u ∞.

14 Računanje kompleksnih integrala preko reziduuma

Teorema

Ako C pozitivno orijentiše jednostruko povezanu oblast i $z_1, \ldots, z_k$ su izolovane singularnosti f unutar C, tada

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_i).$$