

Računarstvo i automatika

predmet: Verovatnoća i slučajni procesi

datum: 9.juli.2017.

PREZIME I IME: _____

BROJ INDEKSA: _____

BROJ BODOVA : _____

PREDISPITNE OBAVEZE - 25 poena

Na mesto označeno tačkicama upisati deo rečenice ili formule koji nedostaje.

1. [2 poena] Neka je Ω neki skup, $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$

a. Da li skup $\{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$ ima strukturu σ -polja? Obrazložiti.

b. Da li skup $\{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}, B, \bar{B}\}$ ima strukturu σ -polja? Obrazložiti.

2. [2 poena] Napisati i dokazati formulu totalne verovatnoće.

TEOREMA
POTPUNE

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{x+1}{3}, & -1 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

3. [4 poena] Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu $U(-1, 2)$.

a) Naći $E(X)$ i $D(X)$.

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2-(-1))^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

b) Standardizovana slučajna promenljiva $X^* = \dots$

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

c) Izračunati verovatnoću $P(X < \frac{1}{2})$

$$P(X < \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2} + 1}{3} = \frac{1.5}{3} = 0.5$$

d) Naći a tako da $P(X \geq a) = 0.2$.

$$1 - P(X < a) = 0.2$$

$$F_X(a) = 0.8$$

$$\frac{a+1}{3} = 0.8$$

$$a = 2.4 - 1$$

$$a = 1.4$$

4. [4 poena] Neka je zadata slučajna promenljiva neprekidnog tipa svojom raspodelom

$$F_X(x) = \begin{cases} a, & x \leq -1 \\ bx + c, & -1 < x \leq 4 \\ \frac{x^d}{\sqrt{x+1}}, & 4 < x \end{cases}$$

tada je $a = \dots$, $b = \dots$, $c = \dots$, $d = \dots$. Naći odgovarajuću gustinu raspodele.

$$F_X(-\infty) = 0 \Rightarrow \frac{0}{-1} + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$F_X(+\infty) = 1$$

$$1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^d}{\sqrt{x+1}}$$

$$d = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax^a}{Bx^b} = \begin{cases} \infty, & a > b \\ 0, & b > a \\ A/B, & a = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1) x \leq -1 & f'_x(x) = 0 \\ 2) -1 < x \leq 4 & f'_x(x) = \frac{2}{9}x - \frac{2}{9} \\ 3) x > 4 & f'_x(x) = \dots \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F_x(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F_x(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx+c)$$

$$\underline{0 = b+c}$$

$$b+c=0 \quad | -1$$

$$4b+c=2/3$$

$$3b=2/3$$

$$\underline{b=2/9}$$

$$c=-b$$

$$\underline{c=-2/9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} F_x(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} F_x(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} (bx+c) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

$$\underline{4b+c = \frac{2}{3}}$$

1477 → 11 20100.

5. [5 poena] Ako se zna da u proseku od devet plodova jabuke jedna propadne (protrune) u procesu transporta
- a) kolika je verovatnoća da će kupcu stići bar 70 kg zdravih plodova ako je utovareno za transport 89 kg jabuka?

- b) Koliko kilograma jabuka treba utovariti ukoliko želimo da sa verovatnoćom 0.9 stigne bar 100 kg zdravih plodova? (dovoljno je postaviti jednačinu iz koje se izračunava traženi broj)

6. [3 poena] Definicija i osobine funkcije raspodele F_{XY} dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) .

$$\Rightarrow F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$$

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$B_X = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

7. [2 poena] Ukoliko X i Y nezavisne slučajne promenljive, X ima Poasonovu raspodelu $P(1)$ a Y ima binomnu raspodelu $B(3, \frac{1}{3})$, izračunati $P(X = 1, Y = 2)$, $P(X < 2, Y < 1)$.

$$P(X=1, Y=2) \stackrel{u3}{=} P(X=1) \cdot P(Y=2) = \frac{1}{1!} e^{-1} \cdot \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$P(X < 2, Y < 1) \stackrel{u3}{=} P(X < 2) P(Y < 1) = [P(X=0) + P(X=1)] \cdot [P(Y=0) + P(Y=1)]$$

8. [3 poena]

- a) Ako je koeficijent korelacije $\rho_{XY} = -1$, to znači da su slučajne promenljive X i Y $\Rightarrow Y = aX + b, a < 0$
- b) Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je koeficijent korelacije $\rho_{XY} = 0$ Dokazati.

$$\rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\quad} \sqrt{\quad}} \stackrel{Hes}{=} \frac{E(X)E(Y) - E(X)E(Y)}{\sqrt{\quad} \sqrt{\quad}} = 0$$

- c) Ako je $\rho_{XY} = 0$, tada su slučajne promenljive X i Y nekorelirane