Lanci Markova.

Zadatak 1

Postavka: Lanac Markova X_n sa stanjima s_1, s_2 ima matricu prelaza $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Da li lanac Markova X_n ima finalne verovatnoće, i ako ima naći ih?

(b) Ako je početni vektor $\mathbf{p}(0) = [\frac{1}{3} \ \ \frac{2}{3}]$, izračunati $\mathbf{p}(2), p_2(2), p_{1,2}(3)$.

Rešenje:

(a) Posmatramo stepene matrice $\mathbf{P}$. Kako je:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

možemo zaključiti da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $\mathbf{P}(n_0) = \mathbf{P}^{n_0} > 0$ ($n_0 = 2$), te na osnovu teoreme 6.8a iz udžbenika lanac Markova X_n ima finalne verovatnoće.

Pošto finalne verovatnoće postoje, možemo ih izračunati pomoću sistema jednačina: $\begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* \end{bmatrix} \quad \wedge \quad p_1^* + p_2^* = 1$, gde je $\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* \end{bmatrix}$, vektor finalnih verovatnoća.

Kada raspišemo sistem jednačina, dobijamo:

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}p_1^* & + & p_2^* & = & p_1^* \\ \frac{1}{2}p_1^* & & & = & p_2^* \\ p_1^* & + & p_2^* & = & 1 \\ \hline \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}p_1^* & - & p_2^* & = & 0 \\ & & p_2^* & = & \frac{1}{3} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} p_1^* = \frac{2}{3} \\ p_2^* = \frac{1}{3} \end{array}.$$

Dakle, vektor finalnih verovatnoća je:

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right] \end{array}.$$

(b) Početni vektor je zadat sa: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right] \end{array}$.

Raspodelu nakon dva koraka dobijamo na sledeći način:

$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{array} \right] \end{array}$,

a onda je $p_2(2) = \frac{5}{12}$.

Kako bismo izračunali verovatnoću da će sistem za tri koraka preći iz stanja s_1 u stanje s_2, $p_{1,2}(3)$, potrebna nam je matrica prelaza za tri koraka, odnosno $\mathbf{P}(3) = \mathbf{P}^3$.

$$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right] \end{array}.$$

Vidimo da je $p_{1,2}(3) = \frac{3}{8}$.

Zadatak 2

Postavka: Ispitati da li postoje finalne verovatnoće lanaca Markova čije su matrice prelaza:

(a) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, (c) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

(a) Posmatramo stepene matrice $\mathbf{P}$.

$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, $\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}$.

Možemo uočiti da je $\mathbf{P}^4 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^2 = I$, $\mathbf{P}^5 = \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{P}^3 = \mathbf{P}$, odnosno $\mathbf{P}^{2k+1} = \mathbf{P}$, i $\mathbf{P}^{2k} = I, \ \ k = 0, 1, 2, ...$.

Ukoliko finalne verovatnoće postoje važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{P}^*$, gde je $\mathbf{P}^*$ matrica čije su sve vrste jednake $\mathbf{p}^*$. Kako u našem zadatku $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ ne postoji, ne postoje ni finalne verovatnoće (niz $\{\mathbf{P}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima dva podniza koji, kada n teži beskonačnosti, konvergiraju ka različitim matricama).

(b) Posmatramo stepene matrice $\mathbf{P}$.

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{P}.$$

Kako je $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, važi $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Očigledno, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ postoji i jednak je matrici $\mathbf{P}$. Međtim, pošto vrste matrice $\mathbf{P}$ nisu jednake, ne može biti $\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$. Prema tome, finalne verovatnoće ne postoje.

(c) Posmatramo stepene matrice $\mathbf{P}$.

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-(\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^2 & 0 \\ 1-(\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-(\frac{1}{2})^3 & (\frac{1}{2})^3 & 0 \\ 1-(\frac{1}{2})^3 & (\frac{1}{2})^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, možemo zaključiti da je:

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-(\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 1-(\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{2})^n & 0 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Niz matrica $\{\mathbf{P}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kada n teži beskonačnosti, konvergira ka matrici $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ čije vrste su iste, pa finalne verovatnoće postoje, i pri tome je $\mathbf{p}^* = [1, 0, 0]$.

Zadatak 3

Postavka: Luka na posao ide vozom, autobusom ili kolima. Ako na posao jednog dana ide kolima, onda sledećeg dana jednakoverovatno ide vozom, autobusom ili kolima. Vozom ne ide dva dana uzastopno, a ako ide vozom onda sutradan ide 2 puta verovatnije kolima nego autobusom. Ako jednog dana ide autobusom, onda sutra jednakoverovatno ide vozom ili kolima (a ne ide autobusom). Posmatramo sistem čija su stanja određna prevoznim sredstvom koje Luka koristi u toku dana za odlazak na posao.

(a) Sastaviti matricu prelaza za jedan dan.

(b) Ako je Luka početnog dana na posao išao kolima, naći verovatnoću da će kroz dva dana ići kolima.

(c) Ispitati da li postoje finalne verovatnoće, i ukoliko postoje naći ih.

(d) Izračunati $P(X_0 = k, X_2 = v, X_4 = a, X_5 = k, X_7 = v)$.

(e) Izračunati $P(X_1 = v, X_2 = v, X_4 = k | X_0 = k)$.

(f) Izračunati $P(X_4 = v, X_6 = k, X_7 = k, X_8 = v, X_{10} = k | X_1 = v, X_2 = k)$.

(g) Izračunati $P(X_2 = k, X_4 = k, X_6 = k, X_8 = k, X_{10} = k, \ldots X_{2m} = k, \ldots), \quad m > 0.$

Rešenje:

(a) Skup stanja sistema:
$v =$ "*ide vozom*", $a =$ "*ide autobusom*", $k =$ "*ide kolima*".

Matrica prelaza za jedan dan:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ v \\ a \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v & a & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Matrica prelaza za dva dana:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \\ v \\ a \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v & a & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{7}{18} & \frac{2}{9} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}.$$

(b) Ako pretpostavimo da je Luka početnog dana išao kolima, vektor početne raspodele je:

$$\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v & a & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Onda je raspodela verovatnoća nakon dva dana: $\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v & a & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$,
što znači da je verovatnoća da će i nakon dva dana Luka na posao ići kolima jednaka $\frac{1}{2}$.

(c) Kako su svi elementi matrice $\mathbf{P}^2$ pozitivni, postoje finalne verovatnoće, i nalazimo ih rešavajući sistem jednačina:

$$\begin{bmatrix} p_v^* & p_a^* & p_k^* \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_v^* & p_a^* & p_k^* \end{bmatrix} \quad \wedge \quad p_v^* + p_a^* + p_k^* = 1.$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & \frac{1}{2}p_a^* & + & \frac{1}{3}p_k^* & = & p_v^* \\ \frac{1}{3}p_v^* & & & + & \frac{1}{3}p_k^* & = & p_a^* \\ \frac{2}{3}p_v^* & + & \frac{1}{2}p_a^* & + & \frac{1}{3}p_k^* & = & p_k^* \\ p_v^* & + & p_a^* & + & p_k^* & = & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} -p_v^* & & \frac{1}{2}p_a^* & + & \frac{1}{3}p_k^* & = & 0 \\ \frac{1}{3}p_v^* & - & p_a^* & + & \frac{1}{3}p_k^* & = & 0 \\ \frac{2}{3}p_v^* & + & \frac{1}{2}p_a^* & - & \frac{2}{3}p_k^* & = & 0 \\ p_v^* & + & p_a^* & + & p_k^* & = & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} p_v^* & - & \frac{1}{2}p_a^* & - & \frac{1}{3}p_k^* & = & 0 \\ & & p_a^* & - & \frac{8}{15}p_k^* & = & 0 \\ & & & & p_k^* & = & \frac{15}{32} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} p_k^* = \frac{15}{32} \\ p_a^* = \frac{1}{4} \\ p_v^* = \frac{9}{32} \end{array}.$$

Dakle, vektor finalnih verovatnoća je:

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v & a & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{9}{32} & \frac{1}{4} & \frac{15}{32} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Dobijene finalne verovatnoće tumačimo na sledeći način: ako posmatramo dovoljno dug vremenski period, možemo reći da Luka najčešće na posao ide kolima (sa verovatnoćom $\frac{15}{32}$), a sa verovatnoćama $\frac{9}{32}$ i $\frac{1}{4}$ redom, ide vozom odnosno autobusom.

(d) Prilikom izračunavanja traženih verovatnoća u ovom i narednim primerima koritimo uslovnu verovatnoću i osobinu Markova:

$P(X_0 = k, X_2 = v, X_4 = a, X_5 = k, X_7 = v) =$
$= P(X_0 = k)P(X_2 = v|X_0 = k)P(X_4 = a|X_0 = k, X_2 = v)$
$P(X_5 = k|X_0 = k, X_2 = v, X_4 = a)P(X_7 = v|X_0 = k, X_2 = v, X_4 = a, X_5 = k) =$
$= P(X_0 = k)P(X_2 = v|X_0 = k)P(X_4 = a|X_2 = v)P(X_5 = k|X_4 = a)P(X_7 = v|X_5 = k) =$
$= p_k(0)p_{kv}(2)p_{va}(2)p_{ak}(1)p_{kv}(2) = 1 \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{18}.$

(e) Računamo:

$$P(X_1 = v, X_2 = v, X_4 = k|X_0 = k) = \frac{P(X_0 = k, X_1 = v, X_2 = v, X_4 = k)}{P(X_0 = k)} =$$

$$= \frac{P(X_0 = k)P(X_1 = v|X_0 = k)P(X_2 = v|X_1 = v)P(X_4 = k|X_2 = v)}{P(X_0 = k)} = \frac{p_k(0)p_{kv}(1)p_{vv}(1)p_{vk}(2)}{p_k(0)} =$$

$$= p_{kv}(1)p_{vv}(1)p_{vk}(2) = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \frac{7}{18}.$$

(f) Računamo:

$$P(X_4 = v, X_6 = k, X_7 = k, X_8 = v, X_{10} = k|X_1 = v, X_2 = k) =$$

$$= P(X_4 = v, X_6 = k, X_7 = k, X_8 = v, X_{10} = k|X_2 = k) =$$

$$= \frac{P(X_2 = k, X_4 = v, X_6 = k, X_7 = k, X_8 = v, X_{10} = k)}{P(X_2 = k)} =$$

$$= \frac{P(X_2 = k)P(X_4 = v|X_2 = k)P(X_6 = k|X_4 = v)P(X_7 = k|X_6 = k)}{P(X_2 = k)}$$

$$\frac{P(X_8 = v|X_7 = k)P(X_{10} = k|X_8 = v)}{} =$$

$$= p_{kv}(2)p_{vk}(2)p_{kk}(1)p_{kv}(1)p_{vk}(2) = \frac{5}{18} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{18}.$$

(g) Za $m > 0$ je $P(X_2 = k, X_4 = k, X_6 = k, X_8 = k, X_{10} = k, \ldots X_{2k} = k, \ldots)$
$= P(X_2 = k)P(X_4 = k|X_2 = k)P(X_6 = k|X_4 = k)P(X_8 = k|X_6 = k) \ldots$
$= p_k(2)p_{kk}(2)p_{kk}(2)p_{kk}(2) \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ldots = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0.$

Zadatak 4

POSTAVKA: Počevši od ponedeljka elektrodistribucija svaki dan isključuje po jednu od 3 grupe potrošača po sledećem pravilu: ako određena grupa tokom jednog dana nema struje, tada se sutradan sa podjednakim verovatnoćama isključuje jedna od preostale dve grupe.

(a) Naći matricu prelaza lanca Markova X_n koji predstavlja redni broj isključene grupe u toku n - tog dana od početka primene restrikcija.

(b) Ako neka grupa u sredu nema struje, koliko iznosi verovatnoća da će u nedelju imati struje?

(c) Ispitati da li postoje finalne verovatnoće procesa X_n, i ukoliko postoje naći ih.

Rešenje:

Obeležimo grupe potrošača sa 1, 2 i 3.

(a) Na osnovu opisa nalazimo matricu prelaza $\mathbf{P}$ za jedan dan i izračunavamo matricu prelaza $\mathbf{P}(4) = \mathbf{P}^4 = (\mathbf{P}^2)^2$ za 4 dana (koristićemo je pod (b)):

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{P}(4) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \end{array}.$$

(b) Posmatrajmo npr. grupu 1, a ista je situacija (zbog simetričnih prelaznih verovatnoća) i sa grupama 2 i 3. Sreda je treći dan ($n = 3$), a nedelja sedmi dan ($n = 7$) sprovođenja restrikcija. Ako grupa 1 u sredu nema struje, to znači da raspodela verovatnoća lanca X_n za sredu glasi: $\mathbf{p}(3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$.

Raspodela verovatnoća lanca X_n za nedelju tada glasi:

$$\mathbf{p}(7) = \mathbf{p}(3) \cdot \mathbf{P}(4) = \mathbf{p}(3) \cdot \mathbf{P}^4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Dakle, grupa 1 će u nedelju imati struju sa verovatnoćom

$$1 - p_1(7) = 1 - \tfrac{3}{8} = \tfrac{5}{8}.$$

(c) Kako su svi elementi matrice $\mathbf{P}^4$ pozitivni, finalne verovatnoće postoje.

U nastavku, zbog preglednosti, finalne verovatnoće p_1^*, p_2^*, p_3^* označavamo redom sa x, y, z.

Vektor finalnih verovatnoća $\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \end{array}$ nalazimo rešavanjem sistema jednačina $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}^* \ \wedge \ x + y + z = 1$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & x \\ \frac{1}{2}x & & & + & \frac{1}{2}z & = & y \\ \frac{1}{2}x & + & \frac{1}{2}y & & & = & z \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

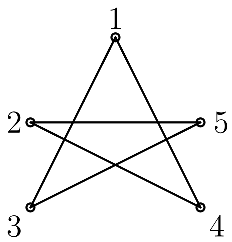
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & \frac{1}{2}y & - & \frac{1}{2}z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & & & z & = & \frac{1}{3} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{3} \\ y & = & \frac{1}{3} \\ z & = & \frac{1}{3} \end{array}.$$

Dakle, vektor finalnih verovatnoća glasi: $\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}$.

Na osnovu dobijenih finalnih verovatnoća možemo zaključiti: ako isključenja struje traju "dovoljno dugo", sve grupe potrošača će podjednako biti bez struje.

Zadatak 5

Postavka:
Čestica se kreće po čvorovima grafa sa slike pri čemu u svakom koraku iz nekog čvora sa jednakim verovatnoćama prelazi u bilo koji povezan čvor. Naći matricu prelaza kretanja čestice po čvorovima grafa (za jedan korak) i odrediti da li je verovatnije da se nakon drugog koraka čestica našla u čvoru 5 ako je na početku bila u čvoru 1 ili ako je na početku bila u čvoru 2.



Rešenje:

Matrice prelaza za jedan i dva koraka:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{P}^2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Posmatramo početne raspodele verovatnoća:

$$\mathbf{u}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad \text{(čestica je na početku bila u čvoru 1)},$$

$$\mathbf{v}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad \text{(čestica je na početku bila u čvoru 2)}.$$

Za raspodele verovatnoća položaja čestice nakon dva koraka u ova dva slučaja dobijamo:

$$\mathbf{u}(2) = \mathbf{u}(0) \cdot \mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right] \end{array},$$

$$\mathbf{v}(2) = \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Vidimo da je $u_5(2) = \frac{1}{4} > 0 = v_5(2)$ tj. verovatnije je da se nakon drugog koraka našla u čvoru 5 ako je na početku bila u čvoru 1 (ako je na početku bila u čvoru 2, tada se nakon 2 koraka sigurno ne nalazi u čvoru 5).

Zadatak 6

Postavka: Trgovački putnik prodaje robu u Somboru, Subotici i Novom Sadu. Nikad ne prodaje dva dana uzastopce u istom gradu. Ako jednog dana prodaje u Somboru, sutra sigurno prodaje u Subotici. Posle Subotice ili Novog Sada dva puta verovatnije prelazi u Sombor nego u onaj drugi grad. U ponedeljak trgovački putnik radi u Novom Sadu.

(a) Ispitati postojanje finalnih verovatnoća.

(b) Ako posmatramo "dovoljno dug" vremenski period, koliko će prosečno vremena putnik provesti u pomenutim gradovima?

(c) Izračunati verovatnoću da trgovački putnik u sredu neće raditi u Novom Sadu?

(d) Ako je u sredu i petak trgovački putnik radio u Novom Sadu, kolika je verovatnoća da će u subotu i ponedeljak raditi u Somboru (subota i nedelja su radni dani).

REŠENJE:

(a) Označimo redom sa S, B i N Sombor, Suboticu i Novi Sad. Matrica $\mathbf{P}$ prelaza tj. kretanja trgovačkog putnika glasi:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ S \\ B \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Onda je:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \\ S \\ B \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{P}^4 = (\mathbf{P}^2)^2 = \begin{array}{c} \\ S \\ B \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{14}{27} & \frac{2}{9} & \frac{7}{27} \\ \frac{26}{81} & \frac{49}{81} & \frac{2}{27} \\ \frac{26}{81} & \frac{16}{27} & \frac{7}{81} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Svi elementi matrice $\mathbf{P}^4$ su pozitivni, pa finalne verovatnoće postoje.

(b) Tražimo finalne verovatnoće $\mathbf{p}^* = [x \quad y \quad z]$ koje zadovoljavaju jednačinu $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}^*$ uz uslov $x + y + z = 1$, što je ekvivalentno sa

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{2}{3}y & + & \frac{2}{3}z & = & x \\ x & & & + & \frac{1}{3}z & = & y \\ & & \frac{1}{3}y & & & = & z \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{2}{3}z & = & 0 \\ & & y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & z & = & \frac{3}{20} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} z = \frac{3}{20} \\ y = \frac{9}{20} \\ x = \frac{8}{20} \end{array}.$$

Dakle:

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{9}{20} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} \end{array},$$

što znači da prosečno $\frac{2}{5}$ vremena trgovački putnik provede u Somboru, prosečno $\frac{9}{20}$ vremena provede u Subotici i prosečno $\frac{3}{20}$ vremena provede u Novom Sadu.

(c) Početna raspodela, tj. raspodela za ponedeljak, odnosno vektor početnih verovatnoća:

$$\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Od ponedeljka do srede imamo dva prelaza, pa raspodelu verovatnoća za sredu dobijamo na sledeći način:

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^2 = [0\;\;0\;\;1] \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \end{array},$$

te verovatnoća da u sredu neće raditi u Novom Sadu iznosi

$$1 - p_N(1) = 1 - \tfrac{1}{9} = \tfrac{8}{9}.$$

(d) Tražena verovatnoća je

$$P(X_5 = S, X_7 = S | X_2 = N, X_4 = N) =$$

$$= \frac{P(X_2 = N, X_4 = N, X_5 = S, X_7 = S)}{P(X_2 = N, X_4 = N)} =$$

$$= \frac{P(X_2 = N)P(X_4 = N|X_2 = N)P(X_5 = S|X_4 = N)P(X_7 = S|X_5 = S)}{P(X_2 = N)P(X_4 = N|X_2 = N)} =$$

$$= P(X_5 = S|X_4 = N)P(X_7 = S|X_5 = S) =$$

$$= p_{N,S}(1)p_{S,S}(2) =$$

$$= \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{9}.$$

Zadatak 7

Postavka: U kutiji se nalaze tri kuglice koje mogu biti bele ili crne boje. Na slučajan način se izvlači jedna kuglica i zamenjuje se kuglicom one druge boje. Stanje sistema definišemo brojem belih kuglica u kutiji. Na početku eksperimenta u kutiji su bile 1 bela i 2 crne kuglice.

(a) Sastaviti matricu prelaza za jedan korak.

(b) Naći verovatnoću da će nakon dve zamene stanje u kutiji biti nepromenjeno.

(c) Ako je na početku i nakon dve izmene u kutiji bila jedna kuglica bele boje, naći verovatnoću da će nakon četiri, šest, osam, ... zamena stanje u kutiji biti nepromenjeno.

(d) Pod pretpostvakom da finalne verovatnoće postoje, naći ih.

Rešenje:

Moguće vrednosti slučajnog procesa su $0, 1, 2, 3$.

(a) Matrice prelaza za jedan i za dva koraka su:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{P}^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{7}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}.$$

(b) Vektor početne raspodele: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}.$

Vektor raspodele nakon dva koraka:

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot P^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & \frac{7}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{array} \right] \end{array}.$$

Prema tome, verovatnoća da stanje nakon dva koraka ostaje nepromenjeno iznosi $p_1(2) = \frac{7}{9}$.

(c) Tražena verovatnoća je

$$\begin{aligned}
&P(X_4 = 1, X_6 = 1, X_8 = 1, \ldots | X_0 = 1, X_2 = 1) \\
&= \frac{P(X_0 = 1, X_2 = 1, X_4 = 1, X_6 = 1, X_8 = 1, \ldots)}{P(X_0 = 1, X_2 = 1)} \\
&= \frac{P(X_0 = 1)P(X_2 = 1|X_0 = 1)P(X_4 = 1|X_0 = 1, X_2 = 1)\ldots}{P(X_0 = 1)P(X_2 = 1|X_0 = 1)} \\
&= \frac{P(X_0 = 1)P(X_2 = 1|X_0 = 1)P(X_4 = 1|X_2 = 1)P(X_6 = 1|X_4 = 1)...}{P(X_0 = 1)P(X_2 = 1|X_0 = 1)} \\
&= P(X_4 = 1|X_2 = 1)P(X_6 = 1|X_4 = 1)\ldots \\
&= p_{1,1}(2)p_{1,1}(2)p_{1,1}(2)\ldots \\
&= \tfrac{7}{9} \cdot \tfrac{7}{9} \cdot \tfrac{7}{9} \cdots
\end{aligned}$$

(d) Finalne verovatnoće p_j^*, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ nalazimo rešavanjem sistema:

$[p_0^* \;\; p_1^* \;\; p_2^* \;\; p_3^*] \cdot \mathbf{P} = [p_0^* \;\; p_1^* \;\; p_2^* \;\; p_3^*] \quad \wedge \quad p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1.$

$$\begin{array}{ccccccccc}
p_0^* & + & p_1^* & + & p_2^* & + & p_3^* & = & 1 \\
 & & \frac{1}{3}p_1^* & & & & & = & p_0^* \\
p_0^* & & & + & \frac{2}{3}p_2^* & & & = & p_1^* \\
 & & \frac{2}{3}p_1^* & & & + & p_3^* & = & p_2^* \\
 & & & & \frac{1}{3}p_2^* & & & = & p_3^* \\
\hline
\end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
p_0^* & + & p_1^* & + & p_2^* & + & p_3^* & = & 1 \\
 & & p_1^* & + & \frac{3}{4}p_2^* & + & \frac{3}{4}p_3^* & = & \frac{3}{4} \\
 & & & & p_2^* & + & \frac{3}{7}p_3^* & = & \frac{3}{7} \\
 & & & & & & p_3^* & = & \frac{1}{8} \\
\hline
\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}
p_3^* = \frac{1}{8} \\
p_2^* = \frac{3}{8} \\
p_1^* = \frac{3}{8} \\
p_0^* = \frac{1}{8}
\end{array}$$

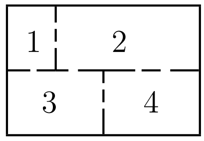
dobijamo

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \right] \end{array}.$$

Zadatak 8

Postavka:

Devojčica drži belog miša u kutiji sa slike. U diskretnim trenucima miš izlazi iz prostorije kroz jedan, na slučajan način izabran otvor. Vreme prolaska kroz otvor je zanemarljivo malo.



(a) Ispitati postojanje finalnih verovatnoća.

(b) Koliki deo "dovoljno dugog" vremenskog intervala će miš u proseku provoditi u pojedinim prostorijama?

(c) Ako je na početku miš stavljen u prostoriju broj 1, kolika je verovatnoća da će posle četiri prolaska miš ponovo biti u prostoriji 1?

Rešenje:

(a) Na osnovu opisa dobijamo matricu prelaza za jedan korak, i zatim matricu prelaza za dva koraka čiji su svi elementi pozitivni, te finalne verovatnoće postoje. Nalazimo i matricu prelaza za četiri koraka koja će nam trebati pod (c) (izračunavamo samo one elemente koji će nam biti zaista potrebni):

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{12} & \frac{2}{15} & \frac{13}{30} \\ \frac{1}{2} & \frac{31}{60} & \frac{1}{3} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{5}{12} & \frac{23}{60} & \frac{1}{10} \\ \frac{13}{40} & \frac{1}{8} & \frac{1}{10} & \frac{9}{20} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} \frac{337}{1200} & \frac{131}{720} & \frac{38}{225} & \frac{221}{600} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

(b) Za navedenu matricu prelaza $\mathbf{P}$ tražimo vektor finalnih verovatnoća $\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} x & y & z & u \end{bmatrix} \end{array}$ gde je $u = 1 - x - y - z$, odnosno rešavamo po x, y, z, u sistem jednačina:

$$\underline{\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}^* \ \wedge \ u = 1 - x - y - z} \ \Leftrightarrow$$

$$\underline{\begin{bmatrix} x & y & z & 1-x-y-z \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1-x-y-z \end{bmatrix}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccl} & & \frac{2}{5}y & + & \frac{1}{4}z & & & = & x \\ \frac{2}{3}x & & & + & \frac{1}{4}z & + & \frac{1}{2}(1-x-y-z) & = & y \\ \frac{1}{3}x & + & \frac{1}{5}y & & & + & \frac{1}{2}(1-x-y-z) & = & z \\ & & \frac{2}{5}y & + & \frac{1}{2}z & & & = & 1-x-y-z \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & \frac{2}{5}y & - & \frac{1}{4}z & = & 0 \\ & & y & + & \frac{25}{172}z & = & \frac{15}{43} \\ & & & & z & = & \frac{1}{4} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = \frac{3}{16} \\ y = \frac{5}{16} \\ z = \frac{1}{4} \\ u = \frac{1}{4} \end{array}$$

Dakle, finalna raspodela je:

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right] \end{array}.$$

Dobijene finalne verovatnoće imaju sledeće značenje: ako se posmatra "dovoljno dug" vremenski period, $\frac{3}{16}$ vremena miš provede u prostoriji broj 1, $\frac{5}{16}$ vremena provede u prostoriji broj 2, a po $\frac{1}{4}$ vremena provodi u prostorijama broj 3 i 4.

(b) Početna raspodela: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}.$

Raspodela nakon 4 koraka:

$$\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}(4) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{337}{1200} & \frac{131}{720} & \frac{38}{225} & \frac{221}{600} \end{array} \right] \end{array},$$

tako da je tražena verovatnoća $p_1(4) = \frac{337}{1200}$.