Nieoznaczone krzywoliniowe całki zupełne i potrzeby całkowania

Def $\int_{L_1} Pdx + Qdy$ na mocy def. potrzeby całkowania

$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$ $\quad$ $L_1 \cup L_2$ - zamknięta

$L_1 \cup L_2$ - od startu do mety

T $\int_{L_1} Pdx + Qdy$ na zawsze od potrzeby całkowania, gdzie

$\oint_{L} Pdx + Qdy = 0$ $\quad$ L - dowolna potrzeba całkowania

Dowód Po definicji $\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$

$$\int_{L_1} Pdx + \int_{L_1} Qdy = \int_{L_2} Pdx + \int_{L_2} Qdy$$

$$\int_{L_1} Pdx - \int_{L_2} Pdx + \int_{L_1} Qdy - \int_{L_2} Qdy = 0$$

$$\int_{L_1} Pdx + \int_{-L_2} Pdx + \int_{L_1} Qdy + \int_{-L_2} Qdy = 0$$

$$\int_{L_1 \cup (-L_2)} Pdx + \int_{L_1 \cup (-L_2)} Qdy = 0$$

$$\int_{L_1 \cup (-L_2)} Pdx + Qdy = 0$$

$L_1 \cup (-L_2)$ - L_1 przeciwnie do L_2, $L_1 \cup (-L_2)$ - przeciwnie do wyjściowego kierunku krzywej

T Aby na funkcjach P, Q $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ niepodrzędne wod. dziedzinie $G \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie $\int Pdx + Qdy$ $\boxed{\text{na } G}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ na G

Pr Ispitati da li integral zavisi od putanje integracije

a) $\int_L 3x^2 dx + \frac{x^3}{y^2} dy$ $\quad$ $P(x,y) = 3x^2$, $Q(x,y) = \frac{x^3}{y^2}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ $\quad$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3x^2}{y^2}$ $\Rightarrow$ nie zależy od potrzeby całkowania

b) $\int_L x^2 \cos y\, dx - \frac{x^3}{4} \sin y\, dy$ $\quad$ $P(x,y) = x^2 \cos y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2 \sin y$

$Q(x,y) = -\frac{x^3}{4} \sin y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -x^2 \sin y$

$\Rightarrow$ nie zależy od $\frac{\partial P}{\partial x}$

Pr Izračunati integral $\int_{\overset{\frown}{PQ}} e^x dx + \frac{x}{y} e^x dy$

L $x^2 - y^2 = 1$ pozitivno orijentisana

$P_0 = 1 \cdot e^{-1} = P_{x=1} = 2 \cdot e^{-1} \Rightarrow$ nie zależy od potrzeby $\Rightarrow$

$\Rightarrow I = 0$, jeśli L zatvorena kriva

T $\int Pdx + Qdy$ NZOPT ako postoji funkcija $U = U(x,y)$ takva da $\boxed{dU = Pdx + Qdy}$

$\int_{L(AB)} Pdx + Qdy = \int_{L(AB)} dU = U(B) - U(A)$. $\quad$ $U_x = P$, $U_y = Q$

Pr Izračunati $I = \int_L y^2 e^x dx + y^2 e^x dy$ ako je L putanja od $A(0,1)$ do $B(1,1)$ na kružnici

$U_x = y^2 e^x$ / $\int dx$ $\Rightarrow U(x,y) = y^2 \int e^x dx = y^2 e^x + \varphi(y)$

$U_y = 2y e^x$ $\quad$ $2y e^x + \varphi'(y) = 2y e^x \Rightarrow \varphi'(y) = 0$

$U(x,y) = y^2 e^x \Rightarrow I = U(1,1) - U(0,1) = e - 0 = \boxed{e - 1}$

Gryninova formula

- daje vezu između krive L i uvode i dvostrukog integrala.

T Neka su P, Q $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ neprekidne nad oblasti G. Ako je L zatvorena pozitivno orijentisana kriva u G koja ograničava oblast D. Tada

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Pr Izračunati $\int_L (xcos y dx - (x-y) dy$, L $|x| + |y| = 1$

a) direktno $\quad$ b) Gryninova formulom

Rješ:

I $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$

II $-x-y=1 \Rightarrow y=-1-x$

III $x-y=1 \Rightarrow y=x-1$

IV $-x+y=1 \Rightarrow y=x+1$

b) $P(x,y) = x\cos y$ $\quad$ $Q(x,y) = y - x$ $\quad$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$ $\quad$ $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$

$$\int_L (x\cos y dx - (x-y) dy = \iint_D (-1-1) dxdy = -2 \iint_D dxdy$$

$$= -2 \cdot |D| = \boxed{-4}$$

D - powierzchnia trokuta

a) L: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}$ $t \in [-1, 1]$ $\quad$ $\begin{cases} x(-1) = 1 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$

$$\int_{L_1} (x\cos y dx - (x-y) dy = \int_{-1}^{1} ((t\cos(1-t)) - (1-t-t)(-1)) dt$$

stavimo $\quad = \int_{-1}^{1} (t\cos(1-t) - 1) dt = -\int_{-1}^{1} \frac{t}{2} \Big|_{-1}^{1} = -1$

i za L_2, L_3, L_4!

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = -1 - 1 - 1 - 1 = -4$.

Pr Ako je G: $(x-3)^2 + (y+3)^2 \leq 9$ i L rub od G pozitivno orijentisane izračunati:

$$\oint_L (x-3) dx + (2x(y+3) - 4x) dy$$

$$\Rightarrow \iint_G (4+3) dxdy = -\iint_G dxdy = -\frac{1}{4} 9\pi = -9\pi$$

G - powierzchnia kruga πr^2

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ako $D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\quad$ · Ako $f(z)$ je kompleksna funkcija jedne kompleksne promenljive

· $D = D_f$ domen funkcije f

Pr $f(z) = z^2$, $\quad$ $f(z) = \sqrt{z}$

· Svaka (jednačina) funkcije $f = f(z)$ se može napisati u obliku $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, $z = x + iy$ pri čemu je $P = Re f$ i $Q = Im f$.

Pr Odrediti $Re f$ i $Im f$ za date f:

a) $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + i2xy$

$P(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad$ $Q(x,y) = 2xy$

b) $f(z) = i(\overline{x+iy}) = i(\overline{x+iy}) = i(x - iy) =$

$= (-iy) + ix = y + ix$ $\quad$ $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = x$

c) $f(z) = e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix} \cdot e^{-y}$ $\quad$ ← Eulerova formula

$= e^{-y}(\cos y + i \sin y) = e^{-y} \cos y + i e^{-y} \sin y$

$P(x,y) = e^{-y} \cos y$ $\quad$ $Q(x,y) = e^{-y} \sin y$

d) $f(z) = |z+i|^2 = |x+iy+i|^2 = |x+i(y+1)|^2 =$

$= x^2 + (y+1)^2$ $\quad$ $P(x,y) = x^2 + (y+1)^2$, $Q(x,y) = 0$

· Beskonačnost u $\mathbb{C}$

S se naziva Riemanova sfera

Nek je S jedinična sfera. Ako je z u $\mathbb{C}$ tangentna na S u tački O. Nek je $A = Sup(A \cap z)$ za $A \in \mathbb{C}$ i $A \neq Sup(A \cap z)$

NES, $\quad$ OKLE $\quad$; $A \in \mathbb{C}$

Projektujemo $A \to A'$ sa ljubičaste. Najbliže tačke $\in \mathbb{C}$ $\quad$ Prava koja $A, (N)$ se nalazi u N.

E $\quad$ SFERI $\quad$ (SEC)

Tačka N je beskonačnost u ravnini $\mathbb{C}$.

· Napomena: Postoje ∞ tačke, važi:

$$\boxed{0 = \infty}$$

· Gornjina vrednost u $\mathbb{C}$

$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in D_f)(|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon)$

· Napomena: Ako $\lim_{z \to z_0} f(z)$ postoji ona se nalazi od z_0 pomoću kružnog tvorenja ka z_0.

Pr Izračunati sledeće limesa

a) $\lim_{z \to -i} \frac{z+i}{z^2+1} = \lim_{z \to -i} \frac{\cancel{z+i}}{(z-i)\cancel{(z+i)}} = \frac{1}{-2i}$

b) $\lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z^2+z+1} = \lim_{z \to 1} \frac{\cancel{z-1}}{(z-1)^2} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{0} = \infty$