

Deduktivni sistemi

★ HIBERTOV (AKSIOMATSKI) SISTEM ★

1. Dokazati da za proizvoljne formule A i B važi

$$\vdash (\forall x)(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((\forall x) A \Leftrightarrow (\forall x) B).$$

Rešenje:

$$(\forall x)(A \Leftrightarrow B) \vdash (\forall x) A \Leftrightarrow (\forall x) B$$

$$\text{poz: } (\forall x)(A \Leftrightarrow B) \vdash (\forall x) A \Rightarrow (\forall x) B \quad (1) \text{ i}$$

$$(\forall x)(A \Leftrightarrow B) \vdash (\forall x) B \Rightarrow (\forall x) A \quad (2)$$

$$(1) \text{ dokazati: } (\forall x)(A \Leftrightarrow B), (\forall x) A \vdash (\forall x) B$$

$$1. (\forall x)(A \Leftrightarrow B)$$

Hyp

$$2. (\forall x) A$$

Hyp

$$3. A \Leftrightarrow B$$

pravilo A (1)

$$4. A$$

pravilo A (2)

$$5. B$$

$F, F \Leftrightarrow G \vdash G$ (4,3)

$$6. (\forall x) B$$

Gen (5)

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$A \Leftrightarrow B \vdash A \Rightarrow B$$

$$A, A \Leftrightarrow B \vdash B$$

(2) pokazuje se analogno slučaju (1)

$(1)+(2) \Rightarrow (\forall x)(A \Leftrightarrow B) \vdash ((\forall x) A \Leftrightarrow (\forall x) B)$ pa je prema tui o dedukciji pokazana formula teorema.

2. Dokazati da za proizvoljne formule A i B važi

$$\vdash (\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\exists x) A \Rightarrow (\exists x) B).$$

Rešenje:

Pokazujemo $(\forall x)(A \Rightarrow B), (\exists x)A \vdash (\exists x)B$

1. $(\forall x)(A \Rightarrow B)$ Hyp
2. $(\exists x)A$ Hyp
3. $A(c)$ pravilo C (2) $[x \mapsto c]$
4. $A(c) \Rightarrow B(c)$ pravilo A (1)
5. $B(c)$ MP (3,4)
6. $(\exists x)B$ pravilo E (5)

Na osnovu teoreme o dedukciji sledi da je polazna formula teorema.

3. Dokazati:

$$(\forall x)(\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)), (\exists x)P(x), (\forall x)(P(x) \Rightarrow R(x)) \vdash (\exists x)(Q(x) \wedge R(x)).$$

Rešenje:

1. $(\forall x)(\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x))$
 2. $(\exists x)P(x)$
 3. $(\forall x)(P(x) \Rightarrow R(x))$
 4. $P(c)$
 5. $\neg Q(c) \Rightarrow \neg P(c)$
 6. $P(c) \Rightarrow R(c)$
 7. $R(c)$
 8. $(\neg Q(c) \Rightarrow \neg P(c)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(c))$
 9. $P(c) \Rightarrow Q(c)$
 10. $Q(c)$
 11. $Q(c) \wedge R(c)$
 12. $(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$
- $\left. \begin{array}{l} \text{pravilo C (2)} \\ \text{pravilo A (1)} \\ \text{pravilo A (3)} \end{array} \right\} [x \mapsto c]$
 $MP(4,6)$
 $\vdash (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
 $MP(5,8)$
 $MP(4,9)$
 $A, B \vdash A \wedge B \text{ (7.110)}$
 pravilo E (11)