1. vežbe

1. **Neka su A, B, C i D iskazne formule, takve da su formule $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ i $(A \wedge C) \Rightarrow \neg D$ tautologije. Dokazati da je i formula $(D \wedge A) \Rightarrow \neg B$ tautologija.**

   Rešenje:

Pretp. suprotno da $(D \wedge A) \Rightarrow \neg B$ nije tautologija

$\Rightarrow$ postoji valuacija v takva da je $I_v((D \wedge A) \Rightarrow \neg B) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{I_v(D \wedge A) = 1}_{\Downarrow \atop I_v(D) = 1 \text{ i } I_v(A) = 1} \quad \text{i} \quad \underbrace{I_v(\neg B) = 0}_{\Downarrow \atop I_v(B) = 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_v(A) = 1 \\ I_v(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} I_v(B \Rightarrow C) = 1 \\ I_v(B) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow I_v(C) = 1$$

$I_v((A \wedge C) \Rightarrow \neg D) = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} I_v(A) = 1 \\ I_v(C) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow I_v(A \wedge C) = 1 \\ I_v(\neg D) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow I_v((A \wedge C) \Rightarrow \neg D) = 0 \quad \lightning$$

$\Rightarrow \models (D \wedge A) \Rightarrow \neg B$

2. **Dokazati da važi: Ako su formule $A \vee B$ i $\neg A \vee C$ tautologije, onda je i formula $B \vee C$ tautologija.**

Rešenje:

Pretp. suprotno, $\models A \vee B$ i $\models \neg A \vee C$, ali $\not\models B \vee C$

$\Rightarrow$ postoji valuacija v $I_v(B \vee C) = 0$

$\Rightarrow$ $I_v(B) = I_v(C) = 0$

$$\left.\begin{matrix} I_v(A \vee B) = 1 \\ I_v(B) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_v(A) = 1$$

$$\left.\begin{matrix} I_v(\neg A) = 0 \\ I_v(C) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_v(\neg A \vee C) = 0 \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ $\models B \vee C$

3. **Dokazati da važi: Ako su formule $A \vee B$, $A \Rightarrow C$ i $B \Rightarrow D$ tautologije, onda je i formula $C \vee D$ tautologija.**

Rešenje:

Pretp. suprotno, $\models A \vee B$, $\models A \Rightarrow C$, $\models B \Rightarrow D$, ali $\not\models C \vee D$

$\Rightarrow$ postoji valuacija v ~~tako~~ da je $I_v(C \vee D) = 0$

$$\Rightarrow \quad I_v(C) = I_v(D) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} I_v(A \Rightarrow C) = 1 \\ I_v(C) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow I_v(A) = 0 \\[2ex] \left.\begin{array}{l} I_v(B \Rightarrow D) = 1 \\ I_v(D) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow I_v(B) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow I_v(A \vee B) = 0 \ \lightning$$

$$\Rightarrow \quad \models C \vee D$$

4. **Ispitati da li je formula $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ tautologija.**

Rešenje:

Pretp. suprotno, $\not\models (\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

$\Rightarrow$ postoji valuacija v tako da važi

$$I_v((\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)) = 0$$

$\Rightarrow I_v(\neg q \Rightarrow \neg p) = 1$ i $I_v(p \Rightarrow q) = 0$

$$\Downarrow$$

$I_v(p) = 1$ i $I_v(q) = 0$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\underbrace{I_v(\neg p) = 0 \qquad I_v(\neg q) = 1}$

$$\Downarrow$$

$I_v(\neg q \Rightarrow \neg p) = 0$ ↯

$\Rightarrow \quad \models (\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$