Univerzitet u Novom Sadu
Fakultet tehničkih nauka
Odsek za računarsku tehniku i
računarske komunikacije

Osnovi projektovanja kombinacionih mreža

Matematički aparat i osnovne definicije

Matematički aparat

- **Bulova algebra** (matematički) je matematički sistem definisan nad skupom S i dve operacije nad njegovim elementima

- **Bulova algebra** (inžinjerski) je matematički sistem definisan nad skupom S i dve binarne i jednom unarnom operacijom, i to:
  - S={0,1}
  - "-" negacije
  - "$\vee$" disjunkcije
  - "$\wedge$" konjukcije

–	0	1
	1	0

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Bulove (prekidačke) funkcije

- Bulova ili **prekidačka funkcija** od n-promenljivih $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, predstavlja preslikavanje skupa $B^n \rightarrow B$, gde je $B = (0,1)$, a B^n označava skup od 2^n binarnih n-torki ili slogova.
- Slog je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in (0,1)$
- Indeks sloga je $$i = \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j}$$
- Indeks sloga predstavlja numeričku vrednost pridruženu datom slogu ako koordinate sloga težinski ponderišemo
- Svaka prekidačka funkcija od n argumenata je definisana na 2^n slogova

Broj bulovih funkcija

- Broj različitih prekidačkih funkcija je 2^{2^n} jer je svaka prekidačka funkcija definisana na 2^n slogova a nad svakim slogom može dobiti vrednost (0,1)

$n = 0$	$N_{BF} = 2$
$n = 1$	$N_{BF} = 4$
$n = 2$	$N_{BF} = 16$
$n = 3$	$N_{BF} = 256$
$n = 4$	$N_{BF} = 65.536$
$n = 5$	$N_{BF} = 4.294.967.296$

Zadavanje bulovih funkcija

- Kombinaciona tablica (tablica istinitosti)

i	**x_1**	**x_2**	**...**	**x_{n-1}**	**x_n**	**f(i)**
0	0	0	...	0	0	f(0)
1	0	0	...	0	1	f(1)
...	...	...	...	...	...	...
2^n-1	1	1	...	1	1	f(2^n-1)

- Indeksom slogova

f^1 za skupove indeksa slogova na kojima f(i) ima vrednost 1

f^0 za skupove indeksa slogova na kojima f(i) ima vrednost 0

f^X za skupove indeksa slogova na kojima f(i) nije definisana

$$f^1 \vee f^0 \vee f^\times = (0, 1, \ldots, 2^n\text{-}1)$$

Karakteristične bulove funkcije

- **KONSTANTA NULA:** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$
- **KONSTANTA JEDINICA:** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$
- Primer funkcija jedne promenljive:

i	$\overline{x}$	**x**	**f(i)**	**naziv funkcije**
0	0	0	0	konstanta nula
1	0	1	x	promenljiva x
2	1	0	$\overline{x}$	negacija x
3	1	1	1	konstanta 1

Bulove funkcije dva argumenta

X_1	0011	naziv funkcije	oznaka	analitički izraz	osobina				
X_2	0101				a	b	c	d	e
f_0	0000	konstanta 0	0	$f_0 = 0$		×	×		
f_1	0001	konjukcija	$x_1 \cdot x_2$	$f_1 = x_1 x_2$			×		×
f_2	0010	zabrana po x_2	$x_1 \Diamond x_2$	$f_2 = x_1 \overline{x}_2$		×	×	×	×
f_3	0011	promenljiva x_1	x_1	$f_3 = x_1$					
f_4	0100	zabrana po x_1	$x_2 \Diamond x_1$	$f_4 = \overline{x}_1 x_2$		×	×	×	×
f_5	0101	promenljiva x_2	x_2	$f_5 = x_2$					
f_6	0110	suma po modulu 2 logička nejednakost	$x_1 \oplus x_2$	$f_6 = \overline{x}_1 x_2 + x_1 \overline{x}_2$		×	×	×	
f_7	0111	disjunkcija	$x_1 + x_2$	$f_7 = x_1 + x_2$			×		×
f_8	1000	Pirsova operacija	$x_1 \downarrow x_2$	$f_8 = \overline{x_1 + x_2}$	×	×	×	×	×
f_9	1001	logička jed.	$\overline{x_1 \oplus x_2}$	$f_9 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 + x_1 x_2$	×		×	×	
f_{10}	1010	negacija x_2	x_2	$f_{10} = \overline{x}_2$	×	×		×	
f_{11}	1011	implikacija x_2 ka x_1	$x_2 \rightarrow x_1$	$f_{11} = x_1 + \overline{x}_2$	×		×	×	×
f_{12}	1100	negacija x_1	x_1	$f_{12} = \overline{x}_1$	×	×		×	
f_{13}	1101	implikacija x_1 ka x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	$f_{13} = \overline{x}_1 + x_2$	×		×	×	×
f_{14}	1110	Šeferova operacija	x_1 / x_2	$f_{14} = \overline{x_1 x_2}$	×	×	×	×	×
f_{15}	1111	konstanta 1	1	$f_{15} = 1$	×		×		

Konstituente jedinice

- Prekidačka funkcija od n argumenata koja dobija vrednost jedan samo na jednom slogu argumenta naziva se **KONSTITUENTA JEDINICE**.

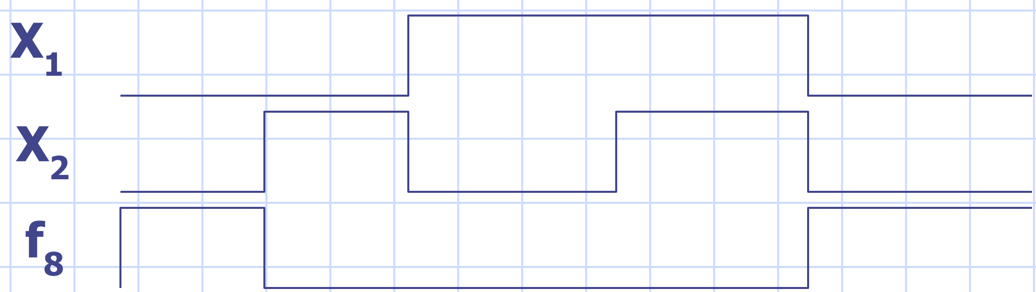
- Primer:

$$f_8 = \overline{x_1 + x_2} = K_0^1(x_1, x_2) \quad \text{NILI funkcija;} \quad \text{za } x_1 = x_2 = 0$$

$$f_4 = \overline{x_1} x_2 = K_1^1(x_1, x_2) \quad \text{zabrana po } x_1; \quad \text{za } x_1 = 0, x_2 = 1$$

$$f_2 = x_1 \overline{x_2} = K_2^1(x_1, x_2) \quad \text{zabrana po } x_2; \quad \text{za } x_1 = 1, x_2 = 0$$

$$f_1 = x_1 x_2 = K_3^1(x_1, x_2) \quad \text{konjukcija;} \quad \text{za } x_1 = x_2 = 1$$



Konstituente nule

- Prekidačka funkcija od n argumenata koja dobija vrednost jednaku nuli samo na jednom slogu argumenata naziva se **KONSTITUENTA NULA**.

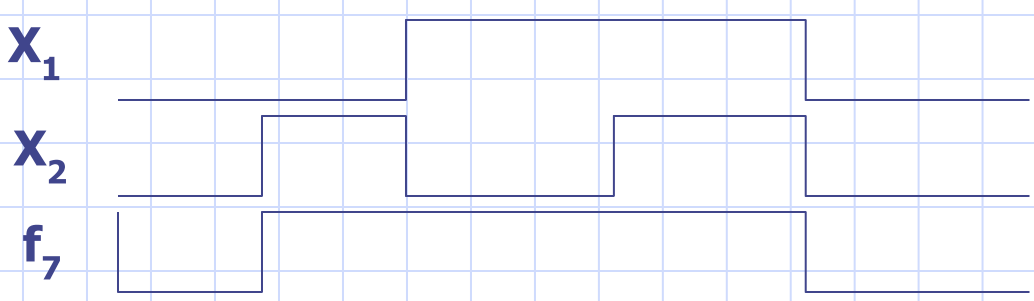
- Primer:

$$f_7 = x_1 + x_2 = K_0^0(x_1, x_2) \quad \text{disjunkcija;} \quad \text{za } x_1 = x_2 = 0$$

$$f_{11} = x_1 + \overline{x_2} = K_1^0(x_1, x_2) \quad \text{implikacija od } x_2 \text{ ka } x_1; \quad \text{za } x_1 = 0, x_2 = 1$$

$$f_{13} = \overline{x_1} + x_2 = K_2^0(x_1, x_2) \quad \text{implikacija od } x_1 \text{ ka } x_2; \quad \text{za } x_1 = 1, x_2 = 0$$

$$f_{14} = \overline{x_1 x_2} = K_3^0(x_1, x_2) \quad \text{NI funkcija;} \quad \text{za } x_1 = 1, x_2 = 1$$



Implikante i implicente

- Prekidačka funkcija od n argumenata $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ predstavlja **"implikantu"** prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ako $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ima vrednost nulu na svim slogovima na kojima vrednost nulu ima i funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
  Za funkciju y se kaže da je uključena u f.
- Primer: $g = xyz$ je implikanta $f = xy$, jer $xy = xyz + xy\overline{z}$
- Prekidačka funkcija $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, naziva se **"implicentom"** prekidačke funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ako $y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ima vrednost jedan na svim slogovima na kojima vrednost jedan ima i funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Proste implikante i implicente

- **Prosta implikanta** funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ predstavlja elementarni proizvod promenljivih

  $j_1, j_2 \ldots j_k \in (1, 2, \ldots, n)$

takav da predstavlja implikantu funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uz uslov da ako se iz njega udalji jedna promenljiva x_{ji} preostali proizvod promenljivih prestaje biti implikanta funkcije f.

Primer: $g = xy$ je prosta implikanta od $f = xy + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

- **Prosta implicenta** funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ predstavlja elementarnu sumu promenljivih

  $j1, j2, \ldots, jk \in (1, 2, \ldots, n)$

takvu da predstavlja implicentu funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, uz uslov da, ako se iz sume izostavi proizvoljna promenljiva x_{ji}, preostala suma promenljivih prestaje biti implicenta funkcija f.

Složene bulove funkcije

- Dobijaju se od elementarnih funkcija matematičkim operacijama superpozicije, odnosno, operacijom zamene jednog argumenta funkcije drugom funkcijom.
- Elementarne Bulove funkcije realizuju elementarni fizički elementi koji se nazivaju logičkim elementima.
- Sistem prekidačkih funkcija se naziva **funkcionalno potpunim**, ako se pomoću funkcija, koje ulaze u njega, primenom operacija superpozicije može dobiti bilo koja složena Bulova funkcija.

Proizvod i suma

- elementarni proizvod (konjukcija) promenljivih,

$$\hat{x}_{k1}\hat{x}_{k2}\ldots\hat{x}_{kp}$$

- elementarna suma (disjunkcija) promenljivih

$$\hat{x}_{k1}+\hat{x}_{k2}+\ldots+\hat{x}_{kp}$$

- U elementarnom proizvodu (sumi) promenljiva se pojavljuje samo jednom, bilo u obliku x_i ili $\bar{x}_i$
- Elementarni proizvod u koji ulaze sve promenljive, naziva se **potpunim proizvodom (*minterm*)**.
- Elementarna suma u koju ulaze svih n-promenljivih Bulove funkcije naziva se **potpunom sumom (*maxterm*)**

Savršene normalne forme

- **Savršena Disjunktivna Normalna Forma** (SDNF) jeste suma potpunih proizvoda slogova nad kojima funkcija ima vrednost 1

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i K_i^1 = f_0 K_0^1 + f_1 K_1^1 + \ldots + f_{2^n-1} K_{2^n-1}^1$$

- **Savršena Konjuktivna Normalna Forma** (SKNF) jeste proizvod potpunih suma onih slogova nad kojima funkcija ima vrednost 0

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Pi_{i=0}^{2^n-1}(f_i + K_i^0) = (f_o + K_0^0)(f_1 + K_1^0)\ldots(f_{2^n-1} + K_{2^n-1}^0)$$