Vektorski prostori

Definicija 1 *Uređena četvorka* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ *se naziva* **vektorski prostor nad poljem** $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ *ako je* $+ : V^2 \to V$ *(binarna operacija skupa* V*),* $\cdot : F \times V \to V$*, i važe sledeće aksiome:*

V_1 : $(V, +)$ *je komutativna grupa.*

V_2 : $\forall \alpha \in F, \forall x, y \in V, \ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$

V_3 : $\forall \alpha, \beta \in F, \forall x \in V, \ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$

V_4 : $\forall \alpha, \beta \in F, \forall x \in V, \ (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$

V_5 : $\forall x \in V, \ 1 \cdot x = x$*, gde je* 1 *neutralni element operacije* $\cdot$ *polja* $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$.

☞ Nula-vektor vektorskog prostora je i nula-vektor svakog njegovog potprostora.

Definicija 2 *Uređena četvorka* $\mathbf{V}_1 = (V_1, \mathbf{F}, +, \cdot)$ *je* **potprostor** *vektorskog prostora* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ *ako je* $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$*, operacije* $+$ *i* $\cdot$ *iz* $\mathbf{V}_1$ *su restrikcije operacija* $+$ *i* $\cdot$ *iz* $\mathbf{V}$*, i* $\mathbf{V}_1 = (V_1, \mathbf{F}, +, \cdot)$ *je vektorski prostor.*

Teorema 1 *Ako je* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$*, i ako je* $\emptyset \neq W \subseteq V$*, tada je* $\mathbf{W} = (W, \mathbf{F}, +, \cdot)$ *potprostor prostora* $\mathbf{V}$ *ako i samo ako za sve* $\alpha, \beta \in F$ *i sve* $x, y \in W$ *važi* $\alpha x + \beta y \in W$.

Definicija 3 *Skup svih linearnih kombinacija n-torke vektora* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *prostora* $\mathbf{V}$ *nad poljem* $\mathbf{F}$ *se naziva* **lineal** *n-torke vektora* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*, i označavamo ga sa* $\mathrm{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*. Dakle,*

$$\mathrm{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F\}.$$

Teorema 2 *Lineal* $\mathrm{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *vektora* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *iz vektorskog prostora* $\mathbf{V}$ *je potprostor prostora* $\mathbf{V}$.

Definicija 4 *Neka n-torka vektora* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *je* **linearno zavisna** *ako postoje skalari* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *takvi da je bar jedan od njih različit od nule i*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \mathbb{O}$$

Neka n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *je* **linearno nezavisna** *ako nije linearno zavisna.*

• Proizvoljna n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je linearno zavisna ako i samo ako je bar jedan od njenih vektora linearna kombinacija preostalih.
• Proizvoljna n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je linearno nezavisna ako i samo ako njena linearna kombinacija je nula vektor jedino kada su svi skalari jednaki nuli.
• Proizvoljna n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je linearno nezavisna ako i samo ako se nijedan od vektora te n-torke ne može izraziti kao linearna kombinacija preostalih.

Definicija 5 *Uređena n-torka vektora* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *iz vektorskog prostora* $\mathbf{V}$ **generiše** *prostor* $\mathbf{V}$*, tj.* **generatorna je za** $\mathbf{V}$ *ako se svaki vektor iz* V *može predstaviti kao linearna kombinacija n-torke vektora* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*, tj. ako je* $\mathrm{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = V$.

Definicija 6 *Za n-torku vektora $B = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ iz vektorskog prostora* $\mathbf{V}$ *kažemo da je* **baza** *prostora* $\mathbf{V}$ *ako je n-torka B linearno nezavisna i generiše prostor* $\mathbf{V}$.

Teorema 3 *Uređena n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorskog prostora* $\mathbf{V}$ *je baza prostora* $\mathbf{V}$ *ako i samo ako se svaki vektor prostora* $\mathbf{V}$ *na jedinstven način može predstaviti kao linearna kombinacija vektora $B = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ako i samo ako je ona maksimalna linearno nezavisna n-torka vektora u prostoru* $\mathbf{V}$ *ako i samo ako je ona minimalna generatorna n-torka vektora prostora* $\mathbf{V}$.

• Svaka linearno nezavisna n-torka vektora se može dopuniti do baze.
• Dimenzija vektorskog prostora je broj elemenata baze tog prostora.

Teorema 4 *n-torka vektora u n-dimenzionalnom prostoru je nezavisna ako i samo ako je generatorna (i tada je baza).*

Zadatak 1 *U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, \cdot)$ su dati vektori*

$a = (1,-1,-1,1), \quad b = (1,1,0,0), \quad c = (1,0,1,0).$

(a) *Ispitati linearnu nezavisnost vektora a, b i c.*

(b) *Ispitati linearnu nezavisnost vektora a i b.*

Rešenje:

(a) Vektori a, b i c su linearno nezavisni ako i samo ako je linearna kombinacija $\alpha a + \beta b + \gamma c$ jednaka nula vektoru samo za $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tj. ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = 0$ jedino rešenje jednačine $\alpha a + \beta b + \gamma c = (0,0,0,0)$.

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = \alpha(1,-1,-1,1) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(1,0,1,0) = (0,0,0,0) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (\alpha + \beta + \gamma, -\alpha + \beta, -\alpha + \gamma, \alpha) = (0,0,0,0) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ -\alpha & + & \beta & & & = & 0 \\ -\alpha & & & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & & & & & = & 0 \end{array}} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0).$$

Prema tome, vektori a, b i c su linearno nezavisni.

(b) Svaki podskup linearno nezavisnog skupa vektora je linearno nezavisan, pa iz nezavisnosti vektora a, b i c sledi nezavisnost vektora a i b. □

Zadatak 2 *U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}[x], \mathbb{R}, +, \cdot)$ polinoma nad poljem realnih brojeva dati su vektori (polinomi) $a = x + 1$, $b = x$, $c = x^2$, $d = x^2 - x + 1$.*

(a) *Ispitati linearnu nezavisnost vektora a, b, c i d.*

(b) *Ispitati linearnu nezavisnost vektora a i b.*

Rešenje:

(a) $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0$

$\Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha(x+1) + \beta x + \gamma x^2 + \delta\left(x^2 - x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\gamma+\delta)x^2 + (\alpha+\beta-\delta)x + (\alpha+\delta) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcrcl} & & & & \gamma & + & \delta & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & & & - & \delta & = & 0 \\ \alpha & & & & & + & \delta & = & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcl} & & \gamma & = & -\delta \\ & \beta & & = & 2\delta \\ \alpha & & & = & -\delta \end{array}$$

$\Leftrightarrow\ (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \{\delta(-1,2,-1,1) \mid \delta \in \mathbb{R}\}.$

Prema tome, vektori a, b, c i d su linearno zavisni.

(b) Vektori a i b su linearno nezavisni jer im koordinate nisu proporcionalne tj. $(1,1,0) \neq \alpha(0,1,0)\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$. □

Zadatak 3 *Neka je W potprostor prostora $\left(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}, +, \cdot\right)$ generisan vektorima $a_1 = (1,0,\mathbb{i})$ i $a_2 = (1+\mathbb{i}, 1, -1)$, odnosno $W = \mathrm{L}(a_1, a_2)$.*

(a) *Dokazati da je $A = \{a_1, a_2\}$ baza potprostora W.*

(b) *Dokazati da $b_1 = (1,1,0) \in W$ i $b_2 = (1,\mathbb{i},1+\mathbb{i}) \in W$ i dokazati da je $B = \{b_1, b_2\}$ takođe baza potprostora W.*

(c) *Izraziti vektore a_1 i a_2 u bazi B, i izraziti vektore b_1 i b_2 u bazi A.*

Rešenje:

(a) Da bi skup A bio baza prostora W, treba da vektori a_1, a_2 budu linearno nezavisni (a dato je da generišu potprostor W). Kako je

$\alpha a_1 + \beta a_2 = 0,$
$\alpha(1,0,\mathbb{i}) + \beta(1+\mathbb{i},1,-1) = 0$
imamo
$\alpha + \beta(1+\mathbb{i}) = 0,$
$\beta = 0,$
$\alpha\mathbb{i} - \beta = 0,$
pa je $\alpha = \beta = 0$.
Dakle, vektori a_1, a_2 su linearno nezavisni, te A jeste baza.

(b) Da bi skup B bio baza potprostora W, mora biti zadovoljeno $b_1, b_2 \in W$, da B generiše W, i da su vektori iz B linearno nezavisni.

(b.1) Da važi $b_1, b_2 \in W$, dokazaćemo tako što ćemo dokazati da se ovi vektori mogu predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz baze A prostora W.

$b_1 = (1,1,0) = \alpha a_1 + \beta a_2 = \alpha(1,0,\mathbb{i}) + \beta(1+\mathbb{i},1,-1) =$
$\quad = (\alpha + (1+\mathbb{i})\beta, \beta, \mathbb{i}\alpha - \beta)$
$\Leftrightarrow\ (\alpha + (1+\mathbb{i})\beta = 1\ \wedge\ \beta = 1\ \wedge\ \mathbb{i}\alpha - \beta = 0)$
$\Leftrightarrow\ (\alpha = -\mathbb{i}\ \wedge\ \beta = 1).$

Dakle $b_1 = -\mathbb{i}a_1 + a_2$, te $b_1 \in W$. Na isti način dobijamo $b_2 = (2-\mathbb{i})a_1 + \mathbb{i}a_2$, odakle sledi $b_2 \in W$.

(b.2) Linearna nezavisnost vektora b_1, b_2 sledi iz

$\beta_1(1,1,0)+\beta_2(1,\mathbb{i},1+\mathbb{i}) = (0,0,0)$,
$\beta_1+\beta_2 = 0$,
$\beta_1+\mathbb{i}\beta_2 = 0$,
$\beta_2(1+\mathbb{i}) = 0$.
Dakle, imamo: $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

(b.3) Pošto je B skup od 2 linearno nezavisna vektora koja pripadaju dvodimenzionalnom prostoru W, sledi da vektori iz W i generišu W, te skup B jeste baza potprostora W.

(c) $a_1 = (1,0,\mathbb{i}) = \alpha b_1+\beta b_2 = \alpha(1,1,0)+\beta(1,\mathbb{i},1+\mathbb{i}) = (\alpha+\beta, \alpha+\mathbb{i}\beta, (1+\mathbb{i})\beta)$
$\Leftrightarrow\ (\alpha+\beta = 1 \ \wedge\ \alpha+\mathbb{i}\beta = 0 \ \wedge\ (1+\mathbb{i})\beta = \mathbb{i})$
$\Leftrightarrow\ \left(\alpha = \dfrac{1-\mathbb{i}}{2} \ \wedge\ \beta = \dfrac{1+\mathbb{i}}{2}\right)$,
$a_2 = (1+\mathbb{i},1,-1) = \alpha b_1+\beta b_2 = \alpha(1,1,0)+\beta(1,\mathbb{i},1+\mathbb{i}) = (\alpha+\beta, \alpha+\mathbb{i}\beta, (1+\mathbb{i})\beta)$
$\Leftrightarrow\ (\alpha+\beta = 1+\mathbb{i} \ \wedge\ \alpha+\mathbb{i}\beta = 1 \ \wedge\ (1+\mathbb{i})\beta = -1)$
$\Leftrightarrow\ \left(\alpha = \dfrac{3+\mathbb{i}}{2} \ \wedge\ \beta = -\dfrac{1-\mathbb{i}}{2}\right)$.
Dakle, $a_1 = \dfrac{1-\mathbb{i}}{2}b_1 + \dfrac{1+\mathbb{i}}{2}b_2$ i $a_2 = \dfrac{3+\mathbb{i}}{2}b_1 - \dfrac{1-\mathbb{i}}{2}b_2$.
Vektore b_1 i b_2 smo u bazi A izrazili u (b.1). □

Primer 1 $W_1 = \{\alpha\overrightarrow{i} \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}, W_2 = \{\alpha\overrightarrow{i}+\beta\overrightarrow{j} \,|\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}, V$ *je skup svih slobodnih vektora. Važi: W_1 je potprostor od W_2, a W_2 od V.*

Teorema 5 *Skup svih rešenja homogenog sistema linearnih jednačina je uvek vektorski prostor.*

Primer 2 *Dat je sistem S:*

$$\begin{aligned} x-2y+3z &= 0 \\ 2x-y+z &= 0 \end{aligned}$$

Množenjem prve jednačine sa -2 dobijamo:

$$\begin{aligned} x-2y+3z &= 0, \\ 3y-5z &= 0. \end{aligned}$$

Odatle imamo $y = \frac{5}{3}z$, $x = \frac{1}{3}z$. Pošto je sistem jednostruko neodređen, skup svih rešenja je prava koja prolazi kroz koordinatni početak:
$p = \mathcal{R}_S = \{\left(\frac{1}{3}t, \frac{5}{3}t, t\right) : t \in \mathbb{R}\} = L\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 1\right) = L(1,5,3)$.
Primetimo da tačke $(0,0,0)$ i $(1,5,3)$ određuju pravu p.

Primer 3 *Dat je sistem S:*

$$x-2y+3z = 0$$

Pošto je sistem dvostruko neodređen, skup svih rešenja je ravan koja prolazi kroz koordinatni početak:
$\mathcal{R}_S = \{(2t_1 - 3t_2, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} = \{t_1(2,1,0) + t_2(-3,0,1) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{L}((2,1,0),(-3,0,1)),$
Primetimo da tačke $(0,0,0),(2,1,0)$ *i* $(-3,0,1)$ *određuju ravan.*

Primer 4 *Ako je sistem trostruko neodređen, skup rešenja je ceo prostor.*

Primer 5 *Trojka vektora* (e_1,e_2,e_3) *je nezavisna i generatorna za* $\mathbb{R}^3$.
$\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(0,0,1)=0$ *implicira* $\alpha=\beta=\gamma=0$*, dakle* e_1,e_2 *i* e_3 *su nezavisni.*
$x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1)=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3$*, pa* e_1,e_2 *i* e_3 *generišu* $\mathbb{R}^3$.

• Ako je broj vektora veći od dimenzije prostora, oni su uvek zavisni.
• Ako su vektori generatorni, njihov broj je veći ili jednak od dimenzije prostora.
• Ako su vektori nezavisni, njihov broj je manji ili jednak od dimenzije prostora.
• Ako su vektori zavisni, njihov broj je neodređen u odnosu na dimenziju prostora.

Zadatak 4 *U vektorskom prostoru* $\mathbb{R}_2[x]=(\mathbb{R}_2[x],\mathbb{R},+,\cdot)$ *realnih polinoma stepena ne većeg od* 2 *nad poljem realnih brojeva*

(a) *dopuniti, ukoliko je moguće, do baze prostora* $\mathbb{R}_2[x]$ *skup* $A=\left\{x+1,x^2+x\right\}$,

(b) *u dopunjenoj bazi A predstaviti polinom (vektor)* $p(x)=-x^2+2x+1$,

(c) *ispitati da li je skup* $B=\left\{x+1,x^2+x,x^2+2x+1\right\}$ *baza prostora* $\mathbb{R}_2[x]$.

Rešenje:

(a) $\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha(x+1)+\beta\left(x^2+x\right)=0$
$\Rightarrow\ \ \forall x\in\mathbb{R},\ \beta x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha=0$
$\Rightarrow\ \ (\beta=0\ \wedge\ \alpha+\beta=0\ \wedge\ \alpha=0)$
$\Rightarrow\ \ (\alpha,\beta)\in\{(0,0)\}.$

Dakle, $\alpha=0,\beta=0$ je jedino rešenje jednačine $\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha(x+1)+\beta\left(x^2+x\right)=0$, odakle sledi da su vektori $x+1$ i x^2+x linearno nezavisni, pa se skup A može dopuniti do baze.

Lako se proverava da je $B=\left\{1,x,x^2\right\}$ jedna baza prostora $\mathbb{R}_2[x]$, odakle sledi da je prostor $\mathbb{R}_2[x]$ trodimenzionalan, te se dvočlani skup A može dopuniti do baze jednim elementom skupa B. Redom ćemo elementima skupa B pokušati da dopunimo skup A do baze. Za skup $A_1=A\cup\{1\}=\left\{x+1,x^2+x,1\right\}$ imamo

$\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha(x+1)+\beta\left(x^2+x\right)+\gamma\cdot 1=0$
$\Rightarrow\ \ \forall x\in\mathbb{R},\ \beta x^2+(\alpha+\beta)x+(\alpha+\gamma)=0$
$\Rightarrow\ \ (\beta=0\ \wedge\ \alpha+\beta=0\ \wedge\ \alpha+\gamma=0)$
$\Rightarrow\ \ (\alpha,\beta,\gamma)\in\{(0,0,0)\},$

odakle sledi da je skup A_1 baza prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Polinom $p(x)$ ćemo predstaviti u bazi $A_1=\left\{x+1,x^2+x,1\right\}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ -x^2+2x+1=\alpha(x+1)+\beta\left(x^2+x\right)+\gamma\cdot 1$
$\Rightarrow\ \ \forall x\in\mathbb{R},\ -x^2+2x+1=\beta x^2+(\alpha+\beta)x+(\alpha+\gamma)$
$\Rightarrow\ \ (\beta=-1\ \wedge\ \alpha+\beta=2\ \wedge\ \alpha+\gamma=1)$
$\Rightarrow\ \ (\beta=-1\ \wedge\ \alpha=3\ \wedge\ \gamma=-2),$

dakle $p(x)=3(x+1)-\left(x^2+x\right)-2\cdot 1$.

(c) Skup $\left\{x+1, x^2+x, x^2+2x+1\right\}$ nije baza prostora $\mathbb{R}_2[x]$ jer je npr.

$x^2+2x+1 = 1\cdot(x+1)+1\cdot(x^2+x)$, tj. vektori skupa $\left\{x+1, x^2+x, x^2+2x+1\right\}$ su linearno zavisni.

$\square$

Zadatak 5 *Neka je* $\mathbf{V} = (V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *vektorski prostor nad poljem realnih brojeva, generisan vektorima a, b, c, d, e, pri čemu su* sve *linearne zavisnosti ovih vektora date sledećim jednakostima i njihovim linearnim kombinacijama:*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & - & 2b & + & c & - & d & + & 4e & = & 0\\ a & - & 3b & + & 3c & + & d & + & 5e & = & 0\\ -a & + & 2b & & & + & 2d & - & 2e & = & 0\\ 2a & - & 4b & + & 2c & - & d & + & 8e & = & 0 \end{array}.$$

Naći sve podskupove skupa $A = \{a, b, c, d, e\}$ *koji su baze prostora* V.

Rešenje: Transformacijama ekvivalencije svodimo dati sistem na dijagonalni oblik.

$$\boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & - & 2b & + & c & - & d & + & 4e & = & 0\\ a & - & 3b & + & 3c & + & d & + & 5e & = & 0\\ -a & + & 2b & & & + & 2d & - & 2e & = & 0\\ 2a & - & 4b & + & 2c & - & d & + & 8e & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & - & 2b & + & c & - & d & + & 4e & = & 0\\ & - & b & + & 2c & & & + & e & = & 0\\ & & & & c & + & d & + & 2e & = & 0\\ & & & & & & d & & & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{d = 0 \quad \wedge \quad \begin{array}{rcrcrcrcl} a & - & 2b & + & c & + & 4e & = & 0\\ & - & b & + & 2c & + & e & = & 0\\ & & & & c & + & 2e & = & 0 \end{array}}.$$

[1] - Prvu jednačinu oduzmemo od druge, dodamo na treću, i pomnoženu sa -2 dodamo na četvrtu.

Pošto je $d = 0$, vektor d možemo izbaciti iz razmatranja jer skup koji sadrži nula-vektor ne može biti linearno nezavisan, i ne može biti baza. Homogen sistem linearnih jednakosti možemo skraćeno zapisati pomoću matrice sistema, tj. matrice čiji su elementi koeficijenti sistema, pri čemu svaka kolona te matrice odgovara koeficijentima uz odgovarajući vektor. Neka je M matrica koja odgovara poslednjem ekvivalentnom obliku datog sistema.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a: & b: & c: & e: \end{array}\\ M = & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Ova matrica ispod glavne dijagonale ima nule, odakle vidimo da se vektori a, b i c mogu izraziti preko vektora e, (trivijalno, i nula-vektor d se može izraziti preko e kao $d = 0\cdot e$), odakle sledi da vektor e može da izgeneriše ceo prostor $\mathbf{V}$. Pri tome e nije nula-vektor jer su sa date četiri jednakosti opisane *sve* linearne veze između posmatranih vektora, a iz trougaonog oblika vidimo da te veze ne mogu kao posledicu dati jednakost $e = 0$, što znači da je $\{e\}$ jedna baza prostora $\mathbf{V}$. To znači da je $\dim\mathbf{V} = 1$, i sve baze moraju biti jednočlani skupovi. Prema tome, pored skupa $\{e\}$, kandidati za baze koje su podskupovi skupa A su $\{a\}$, $\{b\}$ i $\{c\}$, i za svaki od ovih skupova treba da ispitamo da li jeste ili nije baza. Pitanje da li je $\{a\}$ baza je ekvivalentno pitanju da li se svi ostali vektori iz A mogu izraziti preko a. Nula-vektor se uvek može izraziti preko bilo kojih vektora, pa ostaje pitanje da li se vektori b, c i e mogu izraziti preko a, a to je ekvivalentno pitanju da li se dati sistem jednakosti transformacijama ekvivalencije može svesti na takav dijagonalni oblik gde se na glavnoj dijagonali nalaze vektori b, c i e, a to je opet ekvivalentno sa pitanjem da li je determinanta sastavljena on onih kolona matrice sistema koji odgovaraju vektorima b, c i e različita od nule. Prema tome, iz $\begin{array}{ccc} b: & c: & e: \end{array}$ $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ sledi da se b, c i e mogu izraziti preko a, pa skup $\{a\}$ jeste baza prostora $\mathbf{V}$. Analogno, iz $\begin{array}{ccc} a: & c: & e: \end{array}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ i $\begin{array}{ccc} a: & b: & e: \end{array}$ $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ sledi da su i $\{b\}$ i $\{c\}$ takođe baze prostora $\mathbf{V}$. □

Zadatak 6 *U vektorskom prostoru* $\mathbf{V} = (V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *naći sve linearno nezavisne podskupove skupa* $A = \{a, b, c, d, e, f\}$*, ako su* sve *linearne zavisnosti vektora iz tog skupa opisane linearnim jednakostima*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} a & + & 2b & + & 4c & - & d & & & - & f & = & 0 \\ 2a & + & 3b & + & c & + & 5d & + & 2e & - & 5f & = & 0 \\ a & + & 2b & & & + & 3d & & & - & 3f & = & 0 \\ a & + & 2b & + & 2c & + & 2d & & & - & 2f & = & 0 \end{array}$$

i njihovim posledicama (linearnim kombinacijama).

Rešenje: Neka je $\mathbf{W}$ potprostor generisan vektorima $\{a, b, c, d, e, f\}$ tj. $L(a, b, c, d, e, f) = \mathbf{W}$. Nađimo $dim\mathbf{W}$ jer nezavisnih ima manje ili jednako od $dim\mathbf{W}$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} a & + & 2b & + & 4c & - & d & & & - & f & = & 0 \\ 2a & + & 3b & + & c & + & 5d & + & 2e & - & 5f & = & 0 \\ a & + & 2b & & & + & 3d & & & - & 3f & = & 0 \\ a & + & 2b & + & 2c & + & 2d & & & - & 2f & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[1]}{\Leftrightarrow} \begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} a & + & 2b & + & 4c & - & d & & & - & f & = & 0 \\ & - & b & - & 7c & + & 7d & + & 2e & - & 3f & = & 0 \\ & & & - & 4c & + & 4d & & & - & 2f & = & 0 \\ & & & - & 2c & + & 3d & & & - & f & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} a & + & 2b & + & 4c & - & d & & & - & f & = & 0 \\ & - & b & - & 7c & + & 7d & + & 2e & - & 3f & = & 0 \\ & & & - & 4c & + & 4d & & & - & 2f & = & 0 \\ & & & & & & d & & & & & = & 0 \end{array}.$$

[1] Prvu vrstu pomnoženu sa -2 dodajemo drugoj, i oduzimamo je od treće i četvrte.

[2] Treću vrstu pomnoženu sa $-\frac{1}{2}$ dodajemo četvrtoj.

Opet vidimo da je $d = 0$, te vektor d možemo izbaciti iz razmatranja, tako da je dovoljno posmatrati odgovarajuće linearne veze.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & + & 2b & + & 4c & & & - & f & = & 0 \\ & - & b & - & 7c & + & 2e & - & 3f & = & 0 \\ & & & - & 4c & & & - & 2f & = & 0 \end{array}$$

Vidimo da se vektori a, b i c mogu izraziti preko 2 vektora e i f, i da između samih vektora e i f ne postoji linearna povezanost, jer su datim jednakostima opisane sve linearne veze između posmatranih vektora, a iz njih se ne može dobiti linearna veza između vektora e i f. Sledi da je skup $\{e, f\}$ baza prostora $\mathbf{W}$, pa samim tim i linearno nezavisan skup. Pri tome je $\dim \mathbf{W} = 2$, što znači da u datom skupu vektora postoje najviše 2-člani linearno nezavisni skupovi, te treba da ispitamo linearnu zavisnost svih 2-članih i svih 1-članih podskupova skupa A.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} c: & e: & f: \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -7 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = -24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a, b\} \text{ je linearno nezavisan;}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} b: & e: & f: \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = -8 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a, c\} \text{ je linearno nezavisan;}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} b: & c: & f: \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -7 & -3 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} \end{array} = -8 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a, e\} \text{ je linearno nezavisan;}$$

Analogno se pokazuje da su skupovi $\{a, f\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, e\}$ linearno nezavisni.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} a: & b: & e: \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{c, f\} \text{ je linearno zavisan.}$$

Dakle, skupovi $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, e\}$, $\{a, f\}$, $\{b, c\}$, $\{b, e\}$, $\{b, f\}$, $\{c, e\}$ i $\{e, f\}$,su linearno nezavisni, a skup $\{c, f\}$ je linearno zavisan. Jednočlani skupovi $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{e\}$, $\{f\}$ su svi linearno nezavisni, jer je svaki od njih podskup nekog dvočlanog linearno nezavisnog skupa. □

Zadatak 7 *Neka je* $\mathbf{V}$ *potprostor vektorskog prostora* $\mathbb{R}^4$*, generisan skupom vektora* $A = \{a, b, c, d, e\}$*. Naći sve linearne zavisnosti skupa vektora A, kao i sve podskupove skupa A koji su baze prostora* $\mathbf{V}$*, ako je* $a = (2, -1, 3, 1)$*,* $b = (1, 0, -1, 2)$*,* $c = (0, 1, -5, 3)$*,* $d = (1, 1, -6, 5)$*,* $e = (-1, -2, 12, -10)$*.*

Rešenje: Neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$ proizvoljni skalari.

$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \epsilon e = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & (2\alpha + \beta + \delta - \varepsilon, \\ & -\alpha + \gamma + \delta - 2\varepsilon, \\ & 3\alpha - \beta - 5\gamma - 6\delta + 12\varepsilon, \\ & \alpha + 2\beta + 3\gamma + 5\delta - 10\varepsilon) = (0, 0, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2\alpha & + & \beta & & & + & \delta & - & \varepsilon & = & 0 \\ -\alpha & & & + & \gamma & + & \delta & - & 2\varepsilon & = & 0 \\ 3\alpha & - & \beta & - & 5\gamma & - & 6\delta & + & 12\varepsilon & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & + & 3\gamma & + & 5\delta & - & 10\varepsilon & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \beta & + & 2\alpha & & & + & \delta & - & \varepsilon & = & 0 \\ & - & \alpha & + & \gamma & + & \delta & - & 2\varepsilon & = & 0 \\ & & 5\alpha & - & 5\gamma & - & 5\delta & + & 11\varepsilon & = & 0 \\ & - & 3\alpha & + & 3\gamma & + & 3\delta & - & 8\varepsilon & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \beta & + & 2\alpha & & & + & \delta & - & \varepsilon & = & 0 \\ & - & \alpha & + & \gamma & + & \delta & - & 2\varepsilon & = & 0 \\ & & & & & & & & \varepsilon & = & 0 \\ & & & & & & & - & 2\varepsilon & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon = 0 \ \wedge \ \begin{array}{rcrcrcrcl} \beta & + & 2\alpha & & & + & \delta & = & 0 \\ & - & \alpha & + & \gamma & + & \delta & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon = 0 \ \wedge \ \begin{array}{l} \alpha = \gamma + \delta \\ \beta = -2\gamma - 3\delta \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\gamma+\delta)a + (-2\gamma-3\delta)b + \gamma c + \delta d + 0 \cdot e = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-2b+c)\gamma + (a-3b+d)\delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & - & 2b & + & c & & & = & 0 \\ a & - & 3b & & & + & d & = & 0 \end{array}} \quad [\star].$$

[1] - Zamenimo prve dve kolone, prvu jednačinu dodamo na treću, i prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo na četvrtu.

[2] - Drugu jednačinu pomnoženu sa 5 dodamo na treću, i pomnoženu sa -3 dodamo na četvrtu.

Sve linearne zavisnosti vektora a, b, c, d i e su date jednačinama [$\star$], i njihovim linearnim kombinacijama. Uočimo da u [$\star$], pa onda ni u linearnim kombinacijama ove dve jednakosti, ne figuriše vektor e. To znači da on nije povezan sa vektorima a, b, c i d, odnosno da je nezavisan u odnosu na njih. Stoga je on element svake baze potprostora $\mathbf{V}$. Iz sistema jednačina [$\star$] sledi da se c i d mogu izraziti preko a i b, što znači da su vektori a, b i e generatori prostora $\mathbf{V}$.

Kako je $\dim \mathbf{V}$ jednaka razlici broja polaznih vektora (generatora) i stepena neodređenosti sistema imamo: $\dim \mathbf{V} = 5 - 2 = 3$

Za neke $x, y \in \{a, b, c, d\}$ je skup $\{x, y, e\}$ baza potprostora $\mathbf{V}$ ako i samo ako je determinanta koeficijenata iz [$\star$] koji odgovaraju vektorima x i y različita od 0. Tako dobijamo

$$\begin{array}{cc} a: & b: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{c, d, e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{cc} a: & c: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{b, d, e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{cc} a: & d: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{b, c, e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{cc} b: & c: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a, d, e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{cc} b: & d: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a, c, e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{cc} c: & d: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a, b, e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V}.$$

□

Zadatak 8 *Diskutovati i rešiti dati sistem jednačina za sve vrednosti realnog parametra a. Da li je skup svih rešenja ovog sistema vektorski prostor nad poljem realnih brojeva za sve vrednosti parametra a? Ako jeste naći baze tih vektorskih prostora nad* $\mathbb{R}$.

Rešenje: $\boxed{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 3y & + & z & - & u & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 2z & + & u & = & 0 \\ 7x & + & ay & + & 8z & + & u & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$

$\overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & 2z & + & u & = & 0 \\ & & 7y & - & 3z & - & 3u & = & 0 \\ & & (14+a)y & - & 6z & - & 6u & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$

$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & 2z & + & u & = & 0 \\ & & 7y & - & 3z & - & 3u & = & 0 \\ & & ay & & & & & = & 0 \end{array}}.$

[1] - Drugu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo na prvu i drugu jednačinu pomnožimo sa -7 i dodamo na treću.
[1] - Drugu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo na treću.
• $a \neq 0 \Rightarrow y = 0, z = -u, x = u$
$R_S = \{(u, 0, -u, u) | u \in \mathbb{R}\} = \{u(1, 0, -1, 1) | u \in \mathbb{R}\} = L((1, 0, -1, 1))$
Sistem je jednostruko neodređen i $dimV = 1$.
• $a = 0 \Rightarrow R_S = \{(-\frac{8}{3}y + u, y, \frac{7}{3}y - u, u) | y, u \in \mathbb{R}\} = \{(-\frac{8}{3}, 1, \frac{7}{3}, 0)y + (1, 0, -1, 1)u | y, u \in \mathbb{R}\}$
$= L((-\frac{8}{3}, 1, \frac{7}{3}, 0), (1, 0, -1, 1))$
Sistem je dvostruko neodređen i $dimV = 2$. $\square$

1. Operacije $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ su definisane na sledeći način:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d), \qquad \lambda \odot (a,b) = (\lambda a, b).$$

za sve $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ i svako $\lambda \in \mathbb{R}$. Na uređenoj četvorci $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot)$ ispitati sve aksiome vektorskog prostora.

2. Odrediti vrednosti realnih parametara a i b tako da vektori $\vec{a} = (2,0,a)$ i $\vec{b} = (1,b,1)$ budu ortogonalni na pravu $p : \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$. Dokazati da se svaki vektor koji je ortogonalan na pravu p može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Dokazati da skup svih vektora ortogonalnih na pravu p čini potprostor prostora $\mathbb{R}^3$, i odrediti jednu njegovu bazu.

3. Neka je $\vec{a} = (1,2,3)$, i neka je $X = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{a} \cdot \vec{x} = 0\}$ i $Y = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{a} \times \vec{y} = \vec{0}\}$. **(a)** Dokazati da je $\mathcal{X} = (X, \mathbb{R}, +, \cdot)$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i naći jednu njegovu bazu. **(b)** Dokazati da je $\mathcal{Y} = (Y, \mathbb{R}, +, \cdot)$ potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ i naći jednu njegovu bazu. **(c)** Naći $X \cap Y$.