Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 21. jun 2023.

PREZIME I IME: ______________________

BROJ INDEKSA: __________

Predispitne obaveze 2 – 10 poena

1. [1 poen] Homogeni lanac Markova u potpunosti je određen

1) $p(0)$ ← вектором почетн. вер.

2) P ← матрице прелаза за 1 корак

2. [2 poena] Dat je slučajni proces $X_t = X + t$, $t > 0$ i X je slučajna promenljiva čiji je skup vrednosti $\mathcal{R}_X = \{-1, 0, 1\}$ i X sa istom verovatnoćom uzima bilo koju vrednost iz skupa vrednosti. Odrediti funkciju raspodele prvog reda za slučajni proces X_t.

$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ $X_t = X + t$

1. начин

$X_t : \begin{pmatrix} -1+t & 0+t & 1+t \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ $x \in (-\infty, \ -1+t], (-1+t, \ 0+t], (0+t, \ 1+t], (1+t, \ \infty)$

$$F_{X_t}(x) = P(X_t < x) = \begin{cases} x \in (-\infty, -1+t] : & 0 \\ x \in (-1+t, 0+t] : & 1/3 \\ x \in (0+t, 1+t] : & 1/3 + 1/3 = 2/3 \\ x \in (1+t, \infty) : & 1 \end{cases}$$

2. начин

$x \in (-\infty, -1], (-1, 0], (0, 1], (1, \infty)$

$$F_X(x) = \begin{cases} x \in (-\infty, -1] : & 0 \\ x \in (-1, 0] : & 1/3 \\ x \in (0, 1] : & 1/3 + 1/3 = 2/3 \\ x \in (1, \infty) : & 1 \end{cases}$$

$$F_{X_t}(x) = P(X_t < x) = P(X + t < x) = P(X < x - t)$$

$$= \underbrace{F_X(x-t)}_{} = \begin{cases} 0, & x - t \le -1 \leftarrow x \le -1+t \\ 1/3, & -1 < x - t \le 0 \leftarrow -1+t < x \le t \\ 2/3, & 0 < x - t \le 1 \leftarrow t < x \le 1+t \\ 1, & x - t > 1 \leftarrow x > 1+t \end{cases}$$

3. [3 poen] Lanac Markova X_n, $n \in \mathbf{N}$, zadat je skupom stanja $S = \{s_1, s_2\}$ i matricom prelaza $\mathbf{P} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$, tj. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

Da li postoje finalne verovatnoće za dati lanac Markova? Odgovor obrazložiti! Ako postoje izračunati ih.

$P > 0 \Rightarrow$ фин. вер. постоје

$p^* \cdot P = p^*$, $p^* = [x \quad y]$

$\underline{x + y = 1}$

$[x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = [x \quad y]$

$\underline{x + y = 1}$

решити!

Ako je na početku sistem bio u stanju s_1 onda je $p(0) =$ $\begin{array}{cc} s_1 & s_2 \\ [1 & 0] \end{array}$ $\leftarrow$ $p_1(0) = 1$ i

$P(X_0 = s_1, X_1 = s_2, X_2 = s_1, X_3 = s_2, ..., X_{2n} = s_1, X_{2n+1} = s_2, ...) =$

$= p_1(0) \cdot p_{12}(1) \cdot p_{21}(1) \cdot p_{12}(1)\, p_{21}(1) \cdot \ldots$

$= 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots$

Odrediti, ako je to moguće vektor $p(0)$ tako da dati lanac Markova bude stacionaran.

$p(0) = p^* = [x \quad y]$

4. [4 poena] Neka je X_t, $t \in [0, \infty)$ proces sa stacionarnim nezavisnim priraštajima pri čemu je $X_0 = 0$ i $X_t - X_s$ ima uniformnu $\mathcal{U}(s-t, t-s)$ raspodelu, $t > s$. Izračunati očekivanje i korelacionu funkciju slučajnog procesa X_t.

$X_0 = 0 \quad \underline{X_t - X_s : \mathcal{U}(s-t, t-s)}, \; t > s \qquad X_t - X_0 : \mathcal{U}(-t, t)$

$m_X(t) = E(X_t) = E(X_t - \overset{0}{X_0}) = \frac{-t+t}{2} = 0$

$t > s$

$R_X(t,s) = E(X_t \cdot X_s) = E((\underbrace{X_t - X_s} + X_s) \cdot X_s)$

$= E((X_t - X_s) \cdot X_s + X_s^2)$

$= E((X_t - X_s) \cdot (X_s - X_0)) + E(X_s^2)$

$= E(X_t - X_s) \cdot E(X_s - X_0) + E(X_s^2)$

$= \frac{(s-t) + (t-s)}{2} \cdot \frac{-s+s}{2} + \frac{(t-s)^2}{3} = \frac{(t-s)^2}{3}$

$D(X_s) = E(X_s^2) - E(X_s)^2$

$E(X_s^2) = D(X_s) + E(X_s)^2$

$E(X_s^2) = \frac{(t-s)^2}{3} + 0^2$

$D(X_s) = D(X_s - \overset{0}{X_0})$

$= \frac{(t-s-(s-t))^2}{12} = \frac{4(t-s)^2}{12}$

Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 21. jun 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 2 – 20 poena

1. [6 poena] Za slučajni proces $X_t = X^t$, $t > 0$, izračunati srednju vrednost, disperziju, korelacionu i kovarijansnu funkciju ako je X slučajna promenljiva čija je funkcija gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & x \in (1,2) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$. Odrediti raspodele prvog reda procesa X_t.

2. [7 poena] Na stolu se nalaze dve kutije K_1 i K_2. U kutiji K_1 su dve crne kuglice, a u kutiji K_2 tri bele kuglice. Iz svake kutije se izvlači po jedna kuglica, a zatim im se zamenjuju mesta. Kuglica koja je izvučena iz K_1 premešta se u K_2 i obrnuto.

   a) Naći matricu prelaza za jedan korak lanca Markova X_n koji predstavlja broj belih kuglica u kutiji K_1 u n-tom koraku.
   b) Da li postoje finalne verovatnoće? (Odgovor obrazložiti.) Ukoliko postoje odrediti ih.
   c) Izračunati verovatnoću da nakon dve zamene u kutiji K_1 nema belih kuglica.
   d) Ako na početku i nakon dve zamene u kutiji K_1 nije bilo belih kuglica, izračunati verovatnoću da će nakon četiri, pet i šest zamena u kutiji K_1 biti po jedna bela kuglica.

3. [7 poena] U pekari rade dva prodavca. U toku sat vremena u pekaru prosečno dođe 60 mušterija, dok za sat vremena u pekari može da bude usluženo 180 mušterija. Red čekanja nije ograničen. Ukoliko se radi o procesu usluživanja $M : M : k : r$

   a) odrediti parametre k, r, λ i μ i matricu Λ;
   b) ispitati egzistenciju finalnih verovatnoća za opisani proces usluživanja i ako postoje izračunati ih;
   c) ukoliko pekara radi non-stop, izračunati očekivani broj mušterija u pekari;
   d) ako prodavci rade po 8h, izračunati koliko vremena će u proseku oba prodavca biti bez posla.