Kriterijumi za konvergenciju redova

Analiza 2

Marko Gordić - IN 37/2023

Oktobar 2024

1 Uporedni kriterijum prve vrste

Uporedni kriterijum prve vrste koristi se za ispitivanje konvergencije redova. Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dva reda sa pozitivnim članovima $a_n \geq 0$ i $b_n \geq 0$, za svaki n.

Pretpostavimo da postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi:

$$a_n \leq b_n.$$

Tada važe sledeći zaključci:

- Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira, tada i red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mora konvergirati.
- Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira, tada i red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mora divergirati.

Drugim rečima, ako jedan red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira i drugi red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je po članovima manji ili jednak odgovarajućim članovima prvog reda, tada i manji red mora konvergirati. Slično tome, ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira, a veći red je po članovima veći ili jednak, tada i on mora divergirati.

1.1 Primer

Razmotrimo redove:

$$a_n = \frac{1}{n^3}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Znamo da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira (poznat kao kvadratni red). Pošto je $\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$ za svaki $n \geq 1$, možemo zaključiti da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ takodje konvergira po uporednom kriterijumu prve vrste.

2 Uporedni kriterijum druge vrste

Uporedni kriterijum druge vrste koristi se za ispitivanje konvergencije redova na osnovu njihovog asimptotskog ponašanja. Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dva reda sa pozitivnim članovima $a_n \geq 0$ i $b_n \geq 0$.

Ako postoji konstanta $K \neq 0$ i $K \neq \infty$ tako da važi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K,$$

tada su oba reda ili istovremeno konvergentna ili istovremeno divergentna.

Drugim rečima, ako članovi redova a_n i b_n postaju proporcionalni kada $n \to \infty$, tada imaju isti ishod u pogledu konvergencije ili divergencije.

2.1 Primer

Posmatrajmo redove:

$$a_n = \frac{1}{2n+1}, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Izračunajmo odnos članova redova:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Pošto je konstanta konačna i različita od nule, oba reda imaju isti ishod u pogledu konvergencije. Pošto red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira (harmonijski red), i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ mora divergirati.

3 Dalamberov (količnički) kriterijum

Dalamberov kriterijum koristi se za odredjivanje konvergencije beskonačnih redova sa pozitivnim članovima. Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ brojni red sa pozitivnim članovima.

Ako postoji granica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

tada važi:

- Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **konvergentan** ako je $l < 1$.
- Ako je $l = 1$, kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji ili divergenciji reda.
- Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **divergentan** ako je $l > 1$.

Za $l = 1$, ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji ili divergenciji reda, i moraju se koristiti drugi kriterijumi za procenu.

Dalamberov kriterijum je koristan jer omogućava procenu konvergencije redova na osnovu odnosa susednih članova reda. Ako odnos izmedju dva uzastopna člana postane manji od 1 za velike n, red konvergira.

3.1 Primer

Razmotrimo red:

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Izračunajmo količnik susednih članova:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \div \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1}.$$

Zato što:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergira prema Dalamberovom kriterijumu.

4 Košijev (korenski) kriterijum

Košijev kriterijum koristi se za ispitivanje apsolutne konvergencije redova. Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ brojni red. Red je apsolutno konvergentan ako konvergira red $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, tj. red koji se sastoji od apsolutnih vrednosti članova reda.

Matematički, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je apsolutno konvergentan ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj N tako da za sve $m, n \geq N$ važi:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Apsolutna konvergencija povlači običnu konvergenciju, ali obrnuto ne mora važiti.

4.1 Primer

Razmotrimo red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Da bismo ispitali apsolutnu konvergenciju, posmatramo apsolutne vrednosti članova reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ovaj red je poznat kao kvadratni red i konvergira (poznato je da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$). Dakle, početni red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je apsolutno konvergentan prema Košijevom kriterijumu.

5 Lajbnicov kriterijum

Lajbnicov kriterijum koristi se za ispitivanje konvergencije naizmeničnih redova. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ naizmenični red, gde je svaki $a_n \geq 0$. Red konvergira ako su ispunjena dva uslova:

1. a_n je opadajući niz, tj. $a_{n+1} \leq a_n$ za svaki $n \geq N$, gde je N neki prirodan broj.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ako su oba uslova ispunjena, red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergira.

5.1 Primer

Razmotrimo naizmenični harmonijski red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Da bismo primenili Lajbnicov kriterijum, ispitujemo da li su ispunjena dva uslova:

1. Niz $a_n = \frac{1}{n}$ je opadajući jer za svako n, važi $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$.
2. Granica $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dakle drugi uslov je takodje ispunjen.

Po Lajbnicovom kriterijumu, ovaj red konvergira, iako nije apsolutno konvergentan. Zanimljivo je da suma ovog reda konvergira ka vrednosti ln(2).

Dakle, naizmenični harmonijski red je konvergentan prema Lajbnicovom kriterijumu.