Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala PREZIME I IME: ____________

Instrumentacija i merenje–stari studenti

Merenje i regulacija–stari studenti BROJ INDEKSA: ____________

predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi** datum: 14. septembar 2025.

Predispitne obaveze 1 — 20 poena

1. [2 poena] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće.

Za $A, B \in \mathcal{F}$ je $P(A|B) =$ $P(AB)/P(B)$ pod uslovom $P(B) > 0$

Za $A, B, C \in \mathcal{F}$ je $P(ABC) =$ $P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)$ услови: $P(A) \neq 0$, $P(AB) \neq 0$

2. [3 poena] U kutiji se nalaze tri kuglice plave boje i dve kuglice zelene boje. Na slučajan način se bira dva puta po jedna kuglica iz date kutije. са враћањем

Izračunati verovatnoću da će biti izvučene kuglice različitih boja. $= A$

3P, 2Z, 5

$A = \{PZ, ZP\}$

$P(A) = P(PZ) + P(ZP) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{12}{25}$

Ako su izvučene kuglice različitih boja izračunati verovatnoću da je izvučena kuglica zelene boje, a zatim kuglica plave boje. ZP

$P(ZP \mid A) = \frac{P(\{ZP\}\cdot A)}{P(A)} = \frac{P(ZP)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{12}{25}} = \frac{6}{12} = 1/2$

$\{ZP\} \cap A = \{ZP\} \cap \{PZ, ZP\} = \{ZP\}$

3. [4 poena] Data je funkcija $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{8}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{2}, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$. Da li je data funkcija funkcija raspodele neke slučajne promenljive? Objasniti odgovor!

$F_X(x) = P(X < x)$

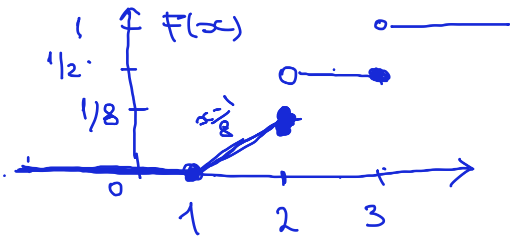
0) $0 \leq F(x) \leq 1$

1) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ ✓ $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ ✓

2) монотоно неопадајућа ✓

3) непрекидна са лева ✓

=> F(x) јесте ф-ја расподеле



Ako jeste, izračunati verovatnoću $P(1.5 < X < 2.5) = F(2.5) - F(1.5)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1.5-1}{8}$

Ako jeste, da li je slučajna promenljiva X čija je funkcija raspodele data gornjim izrazom, slučajna promenljiva neprekidnog tipa? Objasniti odgovor!

F(x) није непрекидна ф-ја што

X није сл. пром. непрекидног

типа

4. [2 poena] Slučajna promenljive X data je zakonom raspodele verovatnoća $X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0.1 & p & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$. Odrediiti konstantu p, funkciju raspodele, matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive $Y = X^2$.

$\Sigma p(x_i) = 1$

$p + 0.8 = 1$

$\boxed{p = 0.2}$

$Y : \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0.1+0.4 & 0.2+0.3 \end{pmatrix}$

$Y : \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

$F_Y(y) = P(Y<y), \ y \in R$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 1] \\ P(1) = 0.5, & y \in (1, 4] \\ P(1)+P(4) = 0.5+0.5 = 1, & y \in (4, \infty) \end{cases}$$

$E(Y) = 1 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.5 = 2.5$

$E(Y^2) = 1^2 \cdot 0.5 + 4^2 \cdot 0.5 = 8.5$

$D(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 8.5 - 2.5^2 =$

5. [9 poena] Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(0,2)$ raspodelu, a uslovna slučajna promenljiva $Y|X = x$, $x \in (0,2)$, ima uniformnu $\mathcal{U}(-x, 2x)$ raspodelu.

Odrediti gustinu raspodele slučajne promenljive (X, Y).

$\varphi_{Y|X} = \dfrac{\varphi_{X,Y}}{\varphi_X}$

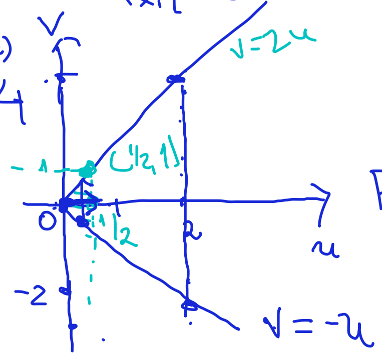
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}, & x \in (0,2) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\varphi_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2x-(-x)} = \frac{1}{3x}, & y \in (-x, 2x) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \varphi_X(x)\varphi_{Y|X}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{1}{6x}, & x \in (0,2), \ y \in (-x, 2x) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$F_{X,Y}(\frac{1}{2}, 1) =$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \varphi_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$



$$F_{X,Y}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \int_0^{1/2} du \int_{-u}^{2u} \frac{1}{6u}\,dv$$

Odrediti gustinu raspodele slučajne promenljive Y i njeno matematičko očekivanje.

$X : \mathcal{U}(a,b)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

→ Odrediti $F_{Y|X=x}(y)$, funkciju raspodele slučajne promenljive $Y|X = x$.

$Y|X=x : \mathcal{U}(\underbrace{-x}_{a}, \underbrace{2x}_{b}), \ x \in (0,2)$

$$F_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} 0, & y \le -x \\ \frac{y-(-x)}{2x-(-x)} = \frac{y+x}{3x}, & -x < y \le 2x \\ 1, & y > 2x \end{cases}$$

→ Izračunati $E(Y|X = x)$, matematičko očekivanje slučajne promenljive $Y|X = x$.

$X : \mathcal{U}(a,b) \quad E(X) = \frac{a+b}{2}$

$$E(Y|X=x) = \frac{(-x)+(2x)}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

y $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} F(x) = F(2)$$

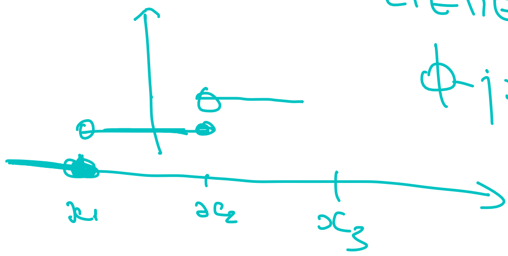
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{8} = \frac{2-1}{8}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

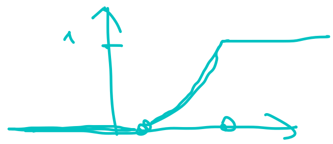
ДИСКРЕТНА ← Ф-ЈА РАСПОДЕЛБА

СТЕПЕНАСТА

Ф-ЈА

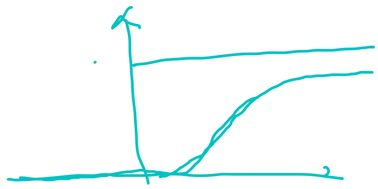


НЕПРЕКИДНА сл. пром. ← $F_X(x)$



НЕПРЕКИДНА

Ф-ЈА



$\varphi_Y(y) = ?$

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X,Y}(x,y)\,dx, \quad y \in \mathbb{R}$$

$x \in (0,2)$

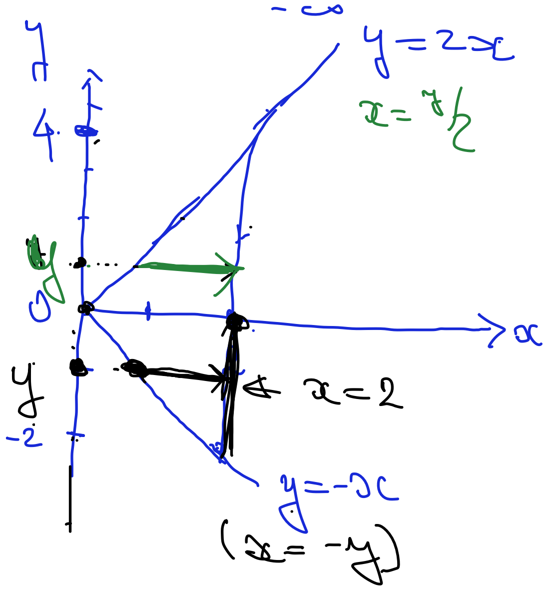
$y \in (-x, 2x)$

$\underbrace{-x < y < 2x}$.

$y = -x$

$y = 2x$

$x \in (0,2)$



① $y \in (-2, 0]$

$$\varphi_Y(y) = \int_{-y}^{2} \frac{1}{6x}\,dx = \frac{1}{6} \cdot \ln|x| \Big|_{-y}^{2}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\ln 2 - \ln|-y|\right)$$

② $y \in (0, 4)$

$$\varphi_Y(y) = \int_{y/2}^{2} \frac{1}{6x}\,dx = \frac{1}{6} \cdot \ln|x| \Big|_{y/2}^{2} = \frac{1}{6}\left(\ln 2 - \ln \frac{y}{2}\right)$$

③ $y \notin (-2, 4)$ $\quad \varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dy = 0$

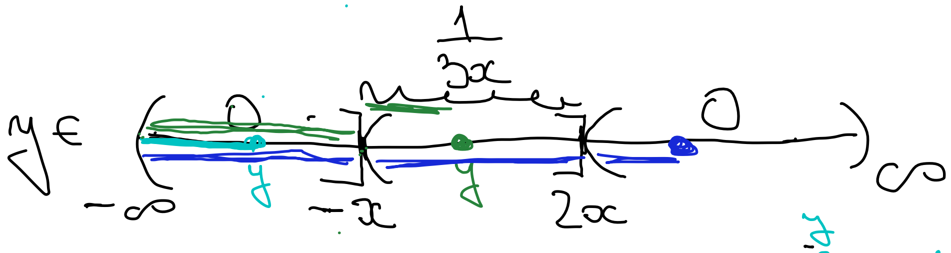
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \varphi_Y(y)\,dy = \int_{-2}^{0} y\,\frac{1}{6}\left(\ln 2 - \ln|-y|\right)dy$$

$$+ \int_{0}^{4} y \cdot \frac{1}{6}\left(\ln 2 - \ln \frac{y}{2}\right)dy$$

$$\varphi_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{1}{3x}, & y \in (-x, 2x) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad x \in (0, 2)$$

$$F_{\check{S}}(\check{s}) = \int_{-\infty}^{\check{s}} \varphi_{\check{S}}(t)\,dt$$

$$F_{Y|X=x}(y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi_{Y|X=x}(t)\,dt$$



1) $y \in (-\infty, -x]$: $\quad F_{Y|X=x}(y) = \int_{-\infty}^{y} 0\,dt = 0$

2) $y \in (-x, 2x]$ $\quad F_{Y|X=x}(y) = \int_{-\infty}^{-x} 0\,dt + \int_{-x}^{y} \frac{1}{3x}\,dt$

3) $y \in (2x, \infty)$ $\quad F_{Y|X=x}(y) = \int_{-\infty}^{-x} 0\,dt + \int_{-x}^{2x} \frac{1}{3x}\,dt + \int_{2x}^{y} 0\,dt = 1$

$$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \varphi_{Y|X=x}(y)\,dy = \int_{-x}^{2x} y \cdot \frac{1}{3x}\,dy$$

$$E(\check{S}) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{s} \cdot \varphi_{\check{S}}(\check{s})\,d\check{s}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$$

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala PREZIME I IME: ______________________

Instrumentacija i merenje–stari studenti

Merenje i regulacija–stari studenti BROJ INDEKSA: ____________

predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi** datum: 14. septembar 2025.

Predispitne obaveze 2 — 10 poena

1. [4 poena] Neka je $X_t = tU$, $t > 0$, gde je U slučajna promenljiva sa uniformnom $\mathcal{U}(-2, 2)$ raspodelom. Izračunati očekivanje i korelacionu funkciju slučajnog procesa X_t. Odrediti njegove raspodele prvog reda.

2. [6 poena] Lanac Markova dat je skupom stanja $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ i matricom prelaza za jedan korak $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Da li postoje finalne verovatnoće za dati lanac Markova? Obrazložiti odgovor! Ako postoje izračunati ih.

Ako je na početku sistem u stanju s_1 onda je početni vektor verovatnoća $p(0) =$

Izračunati verovatnoću da se sistem kroz dva koraka nađe u stanju s_2 ako je na početku bio u stanju s_1.

$P(X_0 = s_1, X_1 = s_1, X_2 = s_3, X_4 = s_3) =$

$P(X_0 = s_1, X_3 = s_1, X_5 = s_1, X_7 = s_1, ...) =$

Kako se nazivaju stanja s_2 i s_3 datog lanca Markova?

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala PREZIME I IME: ______________________

Instrumentacija i merenje–stari studenti

Merenje i regulacija–stari studenti BROJ INDEKSA: ____________

predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi** datum: 14. septembar 2025.

Deo završnog ispita — Zadaci 1 — 35 poena

1. [5 poena] U kutiji se nalaze tri homogena novčića, dva ispravna i jedan neispravan koji ima sa obe strane pismo. Na slučajan način se bira novčić i baca tri puta. Ako je sva tri puta palo pismo, izračunati verovatnoću da je izabran neispravni novčić.

2. [7 poena] Baca se homogena kockica za jamb. Ukoliko padne broj manji od tri, onda se iz kutije koja ima 2 crvene, 3 zelene i 5 plavih kuglica odjednom biraju dve kuglice, a u suprotnom se iz iste kutije bira dve puta po jedna kuglica sa vraćanjem izvučene kuglice u kutiju. Ako je X slučajna promenljiva koja predstavlja ukupan broj izvučenih crvenih kuglica, odrediti njen zakon raspodele i matematičko očekivanje.

3. [8 poena] U kutiji se nalazi 6 kartica na kojima je napisan broj i to: jedna kartica sa brojem 0, dve kartice sa brojem 1, jedna kartica sa brojem 2 i dve kartice sa brojem 3. Veca na slučajan način uzima dve kartice iz kutije. Slučajna promenljiva X uzima vrednost 1 ako je zbir na izvučenim karticama 3, a vrednost 0 ako zbir nije 3. Slučajna promenljiva Y predstavlja broj izvučenih kartica sa brojem 3.

   (a) Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive (X, Y) i marginalne raspodele.

   (b) Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y, odrediti uslovnu raspodelu slučajne promenljive $Y|X = 0$, i raspodelu slučajne promenljive $Z = XY$.

4. [7 poena] Slučajna promenljiva X data je funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} x - a, & x \in (1,2] \\ 3 - x, & x \in (2,3] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

   a) Izračunati konstantu a.

   b) Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X.

   c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = X^2$.

5. [8 poena] Slučajna promenljiva X data je gustinom $\varphi_X(x) = \begin{cases} 0.5x, & x \in (0,2] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$, a slučajna promenljiva Y ima uniformnu $\mathcal{U}(0, 2)$, raspodelu. Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = 2(X - Y)$, ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala PREZIME I IME: ____________________
Instrumentacija i merenje–stari studenti
Merenje i regulacija–stari studenti BROJ INDEKSA: ____________
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi** datum: 14. septembar 2025.

Deo završnog ispita — Zadaci 2 — 30 poena

1. [5 poena] Istovremeno je bačeno 100 kockica za jamb. Pomoću centralne granične teoreme izračunati verovatnoću da je zbir svih palih brojeva na kockicama veći od 410.

2. [8 poena] Obeležje X ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1-\frac{2\theta}{3} & \frac{\theta}{3} & \frac{\theta}{3} \end{pmatrix}$. Na osnovu uzorka obima n, metodom maksimalne verodostojnosti oceniti nepoznati parametar θ. Ispitati centriranost i postojanost dobijene ocene.

3. [8 poena] Dat je slučajni proces $X_t = X\cos(t+\pi Y)$, $t \in \mathbb{R}$, gde su X i Y nezavisne slučajne promenljive. Slučajne promenljive X i Y imaju uniformnu $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelu. Ispitati slabu stacionarnost datog slučajnog procesa X_t.

4. [9 poena] Trgovački putnik pokriva Suboticu, Sombor i Novi Sad. Ako je tokom nekog dana u Subotici, sutra sigurno radi u Somboru. Ukoliko je neki dan u Somboru, sutradan sigurno ide u Novi Sad, a ako je tokom nekog dana u Novom Sadu, sutradan se tamo sigurno ne vraća, a jednako verovatno može biti u ostala dva grada.

   (a) Odrediti matricu prelaza za jedan korak (dan).

   (b) Da li postoje finalne verovatnoće za opisani lanac Markova? Odgovor obrazložiti i, ako postoje, izračunati ih.

   (c) Ako se zna da je on u ponedeljak bio u Somboru, izračunati verovatnoću da svakog utorka, četvrtka i nedelje radi u Novom Sadu.