

Lanci Markova.

1. Lanac Markova X_n sa stanjima s_1, s_2 ima matricu prelaza $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
 - (a) Da li lanac Markova X_n ima finalne verovatnoće, i ako ima naći ih?
 - (b) Ako je početni vektor $\mathbf{p}(0) = [\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}]$, izračunati $\mathbf{p}(2), p_2(2), p_{1,2}(3)$.
2. Ispitati da li postoje finalne verovatnoće lanaca Markova čije su matrice prelaza:
$$(a) \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (b) \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (c) \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$
3. Luka na posao ide vozom, autobusom ili kolima. Ako na posao jednog dana ide kolima, onda sledećeg dana jednakoverovatno ide vozom, autobusom ili kolima. Vozom ne ide dva dana uzastopno, a ako ide vozom onda sutradan ide 2 puta verovatnije kolima nego autobusom. Ako jednog dana ide autobusom, onda sutra jednakoverovatno ide vozom ili kolima (a ne ide autobusom). Posmatramo sistem čija su stanja određena prevoznim sredstvom koje Luka koristi u toku dana za odlazak na posao.
 - (a) Sastaviti matricu prelaza za jedan dan.
 - (b) Ako je Luka početnog dana na posao išao kolima, naći verovatnoću da će kroz dva dana ići kolima.
 - (c) Ispitati da li postoje finalne verovatnoće, i ukoliko postoje naći ih.
 - (d) Izračunati $P(X_0 = k, X_2 = v, X_4 = a, X_5 = k, X_7 = v)$.
 - (e) Izračunati $P(X_1 = v, X_2 = v, X_4 = k | X_0 = k)$.
 - (f) Izračunati $P(X_0 = k, X_4 = v, X_6 = k, X_7 = k, X_8 = v, X_{10} = k | X_1 = v, X_2 = k)$.
 - (g) Izračunati $P(X_2 = k, X_4 = k, X_6 = k, X_8 = k, X_{10} = k, \dots, X_{2m} = k, \dots)$, $m > 0$.

4. Počevši od ponedeljka elektro distribucija svaki dan isključuje po jednu od 3 grupe potrošača po sledećem pravilu: ako određena grupa tokom jednog dana nema struje, tada se sutradan sa podjednakim verovatnoćama isključuje jedna od preostale dve grupe.
- Naći matricu prelaza lanca Markova X_n koji predstavlja redni broj isključene grupe u toku n - tog dana od početka primene restrikcija.
 - Ako neka grupa u sredu nema struje, koliko iznosi verovatnoća da će u nedelju imati struje?
 - Ispitati da li postoje finalne verovatnoće procesa X_n , i ukoliko postoje naći ih.
5. Čestica se kreće po čvorovima grafa sa slike pri čemu u svakom koraku iz nekog čvora sa jednakim verovatnoćama prelazi u bilo koji povezan čvor. Naći matricu prelaza kretanja čestice po čvorovima grafa (za jedan korak) i odrediti da li je verovatnije da se nakon drugog koraka čestica našla u čvoru 5 ako je na početku bila u čvoru 1 ili ako je na početku bila u čvoru 2.
-
6. Trgovački putnik prodaje robu u Somboru, Subotici i Novom Sadu. Nikad ne prodaje dva dana uzastopce u istom gradu. Ako jednog dana prodaje u Somboru, sutra sigurno prodaje u Subotici. Posle Subotice ili Novog Sada dva puta verovatnije prelazi u Sombor nego u onaj drugi grad. U ponedeljak trgovački putnik radi u Novom Sadu.
- Ispitati postojanje finalnih verovatnoća.
 - Ako posmatramo "dovoljno dug" vremenski period, koliko će prosečno vremena putnik provesti u pomenutim gradovima?
 - Izračunati verovatnoću da trgovački putnik u sredu neće raditi u Novom Sadu?
 - Ako je u sredu i petak trgovački putnik radio u Novom Sadu, kolika je verovatnoća da će u subotu i ponedeljak raditi u Somboru (subota i nedelja su radni dani).
7. U kutiji se nalaze tri kuglice koje mogu biti bele ili crne boje. Na slučajan način se izvlači jedna kuglica i zamenjuje se kuglicom one druge boje. Stanje sistema definišemo brojem belih kuglica u kutiji. Na početku eksperimenta u kutiji su bile 1 bela i 2 crne kuglice.
- Sastaviti matricu prelaza za jedan korak.
 - Naći verovatnoću da će nakon dve zamene stanje u kutiji biti nepromenjeno.
 - Ako je na početku i nakon dve izmene u kutiji bila jedna kuglica bele boje, naći verovatnoću da će nakon četiri, šest, osam, ... zamena stanje u kutiji biti nepromenjeno.
 - Pod pretpostavkom da finalne verovatnoće postoje, naći ih.
8. Devojčica drži belog miša u kutiji sa slike. U diskretnim trenucima miš izlazi iz prostorije kroz jedan, na slučajan način izabran otvor. Vreme prolaska kroz otvor je zanemarljivo malo.
-
- Ispitati postojanje finalnih verovatnoća.
 - Koliki deo "dovoljno dugog" vremenskog intervala će miš u proseku provoditi u pojedinim prostorijama?
 - Ako je na početku miš stavljen u prostoriju broj 1, kolika je verovatnoća da će posle četiri prolaska miš ponovo biti u prostoriji 1?