predmet: Matematička analiza 2

KRIVOLINIJSKI INTEGRAL

Primeri parametrizacije krive

Parametarski oblik jednačine krive: $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$.

1. Odrediti parametarski oblik jednačine duži $\overline{AB}$ zadate sa: $y = 2x + 1$, $0 \leq x \leq 1$.

   I Rešenje: Parametarski oblik jednačine duži $\overline{AB}$ je $x = t, y = 2t + 1, t \in [0, 1]$.

   II Rešenje: Jednačinu duži $\overline{AB}$ možemo zapisati u parametarskom obliku i na sledeći način: $x = t + 1, y = 2t + 3, t \in [-1, 0]$.

   III Rešenje: Jednačinu duži $\overline{AB}$ možemo zapisati u parametarskom obliku i na sledeći način: $y = t, x = \dfrac{t-1}{2}, t \in [1, 3]$.

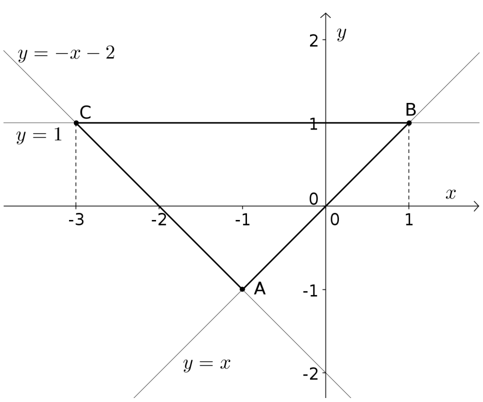
2. Odrediti parametarski oblik jednačine kružnice $k : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

   Rešenje: Parametarski oblik jednačine kružnice k je: $x = x_0 + r \cdot \cos t, y = y_0 + r \cdot \sin t, t \in [0, 2\pi]$.

Krivolinijski integral I vrste

1. Izračunati $\displaystyle\int\limits_L (xy + y^2)\, dl$, gde je L rub trougla sa temenima $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$ i $C(-3, 1)$.

   Rešenje: Kriva L je unija 3 duži, $L = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$.



Odavde sledi da je
$$\int\limits_L (xy+y^2)\, dl = \int\limits_{\overline{AB}} (xy+y^2)\, dl + \int\limits_{\overline{BC}} (xy+y^2)\, dl + \int\limits_{\overline{CA}} (xy+y^2)\, dl.$$
Ako je parametrizacija duži $\overline{AB}$,

$$\overline{AB} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = t, t \in [-1, 1]\}$$

onda je $x'(t) = 1$ i $y'(t) = 1$. Prema tome

$$\int\limits_{\overline{AB}} (xy + y^2)\, dl = \int\limits_{-1}^{1} (t^2 + t^2)\sqrt{1^2 + 1^2}\, dt = 2\sqrt{2} \int\limits_{-1}^{1} t^2\, dt = 2\sqrt{2}\, \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - (-1)) = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Ako je parametrizacija duži $\overline{BC}$, $\overline{BC} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 1, t \in [-3, 1]\}$, onda je $x'(t) = 1, y'(t) = 0$. Stoga,

$$\int\limits_{\overline{BC}} (xy + y^2)\, dl = \int\limits_{-3}^{1} (t + 1)\sqrt{1^2 + 0^2}\, dt = \int\limits_{-3}^{1} (t + 1)\, dt = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_{-3}^{1} = \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{9}{2} - 3\right) = 0$$

Ako duž $\overline{CA}$ parametrizujemo na sledeći način,
$\overline{CA} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = -t-2, t \in [-3,-1]\}$, onda je $x'(t) = 1, y'(t) = -1$. Stoga,

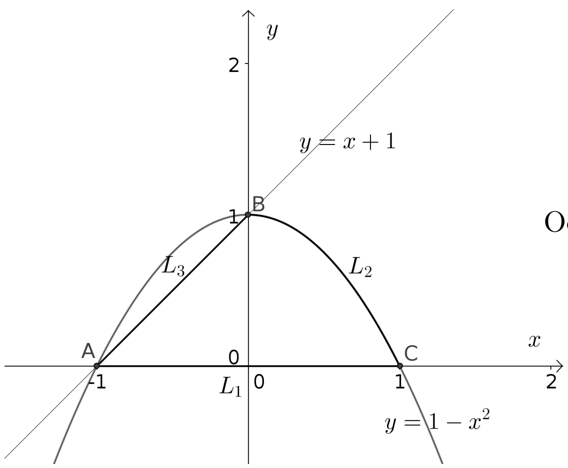
$$\int\limits_{\overline{CA}} (xy+y^2)\,dl = \int\limits_{-3}^{-1} (t(-t-2)+(-t-2)^2)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\int\limits_{-3}^{-1}(-t^2-2t+t^2+4t+4)\,dt = \sqrt{2}\int\limits_{-3}^{-1}(2t+4)\,dt$$

$$= \sqrt{2}\left(2\frac{t^2}{2}+4t\right)\Bigg|_{-3}^{-1} = \sqrt{2}(1-4-(9-12)) = 0$$

Konačno, imamo $\displaystyle\int\limits_L (xy+y^2)\,dl = \frac{4\sqrt{2}}{3}+0+0 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

2. Izračunati $\displaystyle\int\limits_L x\,dl$, gde je L rub oblasti ograničene sa $y = x+1$, $y = 1-x^2$ i x-osom.

Rešenje: Zadata kriva L je unija tri krive $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$



Odavde sledi da je $\displaystyle\int\limits_L x\,dl = \int\limits_{L_1} x\,dl + \int\limits_{L_2} x\,dl + \int\limits_{L_3} x\,dl.$

Parametrizacijom krive $L_1 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 0, t \in [-1,1]\}$, gde je $x'(t) = 1, y'(t) = 0$, dobija se

$$\int\limits_{L_1} x\,dl = \int\limits_{-1}^{1} t\sqrt{1^2+0^2}\,dt = \int\limits_{-1}^{1} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0.$$

Ako krivu L_2 parametrizujemo na sledeći način $L_2 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 1-t^2, t \in [0,1]\}$, pri čemu je $x'(t) = 1, y'(t) = -2t$, dobija se

$$\int\limits_{L_2} x\,dl = \int\limits_{0}^{1} t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \left|\begin{array}{c}\text{integral rešavamo smenom}\\ s = 1+4t^2\end{array}\right| = \cdots = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

Krivu L_3 parametrizujemo na sledeći način $L_3 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = t+1, t \in [-1,0]\}$, pri čemu je $x'(t) = 1$ i $y'(t) = 1$, i dobijamo

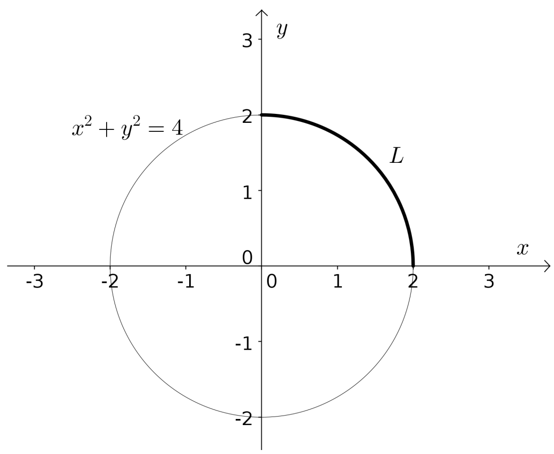
$$\int\limits_{L_3} x\,dl = \int\limits_{-1}^{0} t\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\,\frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Konačno, imamo da je $\displaystyle\int\limits_L x\,dl = \frac{5\sqrt{5}-1-6\sqrt{2}}{12}.$

Dužina luka krive

3. Izračunati dužinu luka kružnice $x^2 + y^2 = 4$ u prvom kvadrantu.

Rešenje:



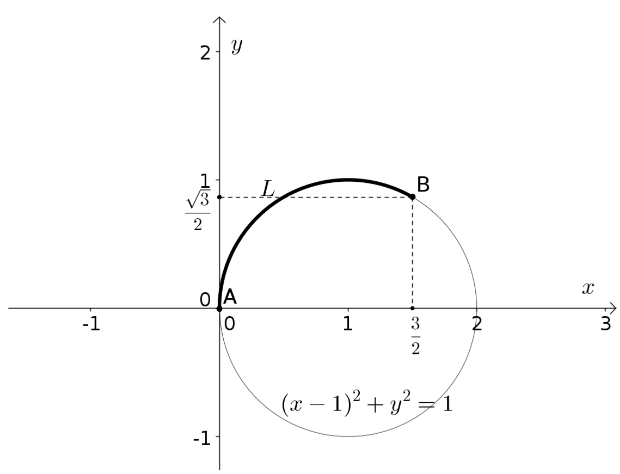
Ako krivu L parametrizujemo na sledeći način
$L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 2\cos t, y(t) = 2\sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\}$, onda je $x'(t) = -2\sin t, y'(t) = 2\cos t$. Prema tome

$$\Delta l = \int\limits_L dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\, dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\, dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4}\, dt = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 2\ t|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$

4. Izračunati dužinu kraćeg luka kružnice $x^2 + y^2 = 2x$ između tačaka $A(0,0)$ i $B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Rešenje: Zadata kriva L je deo kružnice čija je jednačina $(x-1)^2 + y^2 = 1$.



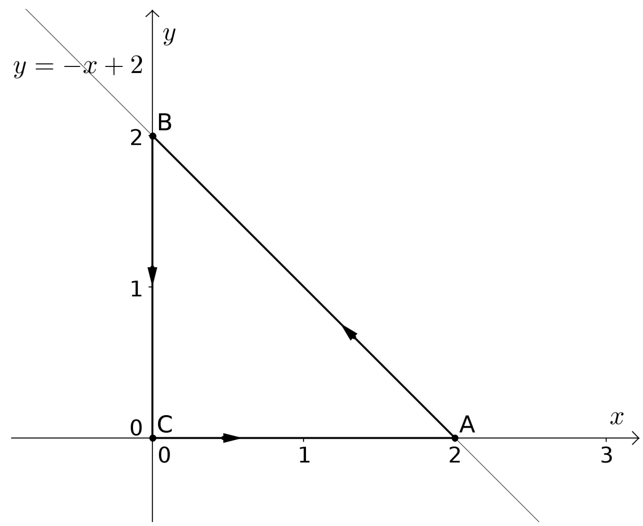
Krivu možemo parametrizovati na sledeći način $L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 1 + \cos t, y(t) = \sin t, t \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]\}$, pri čemu je $x'(t) = -\sin t, y'(t) = \cos t$. Dužinu luka krive računamo na sledeći način

$$\Delta l = \int\limits_L dl = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 1\, dt = t|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{2\pi}{3}.$$

Krivolinijski integral II vrste

1. Izračunati $\int\limits_L x\,dy$, gde je L pozitivno orijentisan rub trougla sa temenima $A(2,0)$, $B(0,2)$ i $C(0,0)$.

Rešenje:



Kriva L je unija tri duži,

$$L = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$$

odakle je

$$\int\limits_L x\,dy = \int\limits_{\overline{AB}} x\,dy + \int\limits_{\overline{BC}} x\,dy + \int\limits_{\overline{CA}} x\,dy$$

Duž $\overline{AB}$ parametrizujemo na sledeći način $\overline{AB} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = -t + 2, t \in \overleftarrow{[0,2]}$. Stoga je

$$\int\limits_{\overline{AB}} x\,dy = \int\limits_2^0 t \cdot (-1)\,dt = -\left.\frac{t^2}{2}\right|_2^0 = 2.$$

Duž $\overline{BC}$ parametrizujemo na sledeći način $\overline{BC} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 0, y(t) = t, t \in \overleftarrow{[0,2]}\}$. Stoga je

$$\int\limits_{\overline{BC}} x\,dy = \int\limits_2^0 0 \cdot 1\,dt = 0.$$

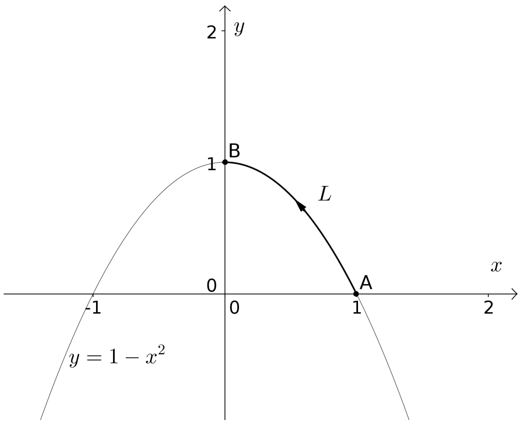
Duž $\overline{CA}$ parametrizujemo na sledeći način $\overline{CA} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 0, t \in [0,2]\}$. Stoga je

$$\int\limits_{\overline{CA}} x\,dy = \int\limits_0^2 t \cdot 0\,dt = 0.$$

Zaključujemo, $\int\limits_L x\,dy = 2 + 0 + 0 = 2.$

2. Izračunati integral $\int\limits_L (y+3)\,dx + (2x-1)\,dy$ duž krive $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2,\ 0 \le x \le 1\}$ orijentisane od tačke $A(1,0)$ do tačke $B(0,1)$.

Rešenje:

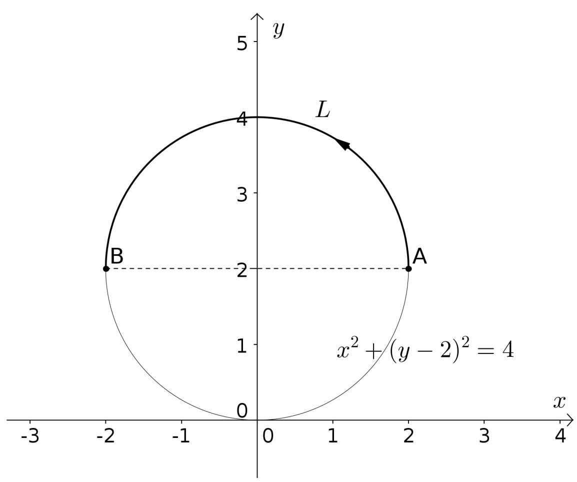


Ako krivu parametrizujemo na sledeći način $L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 1-t^2, t \in \overleftarrow{[0,1]}\}$, onda je $x'(t) = 1, y'(t) = -2t$.

$$\int\limits_L (y+3)\,dx + (2x-1)\,dy = \int\limits_1^0 ((1-t^2+3)\cdot 1 + (2t-1)(-2t))\,dt = \int\limits_1^0 (4 - 5t^2 + 2t)\,dt$$
$$= \left(4t - 5\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^0 = 0 - \left(4 - \frac{5}{3} + 1\right) = -\frac{10}{3}.$$

3. Izračunati $\int\limits_L y\,dx - x\,dy$ duž krive $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4y, y \ge 2\}$ orijentisane od tačke $A(2,2)$ do tačke $B(-2,2)$.

Rešenje: Kriva L je deo kružnice $x^2 + (y-2)^2 = 2^2$.



Parametrizacijom krive $L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 2\cos t, y(t) = 2 + 2\sin t, t \in [0,\pi]\}$, dobija se $x'(t) = -2\sin t$ i $y'(t) = 2\cos t$. Vrednost traženog integrala je

$$\int\limits_L y\,dx - x\,dy = \int\limits_0^\pi ((2+2\sin t)\cdot(-2\sin t) - (2\cos t)\cdot 2\cos t)\,dt = \int\limits_0^\pi (-4\sin t - 4\sin^2 t - 4\cos^2 t)\,dt$$
$$= \int\limits_0^\pi (-4\sin t - 4)\,dt = (4\cos t - 4t)|_0^\pi = 4\cos\pi - 4\pi - (4\cos 0 - 0) = -8 - 4\pi.$$

Nezavisnost integracije od putanje

4. Odrediti realan parametar a tako da integral $\int\limits_{L(AB)} ay\,dx + 3x\,dy$ ne zavisi od putanje integracije.

Zatim, izračunati integral od tačke $A(-3,-1)$ do tačke $B(1,3)$

(a) duž krive $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1, -3 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, -1 \leq y \leq 3\}$;

(b) duž krive L, gde je L je duž koja spaja tačke A i B;

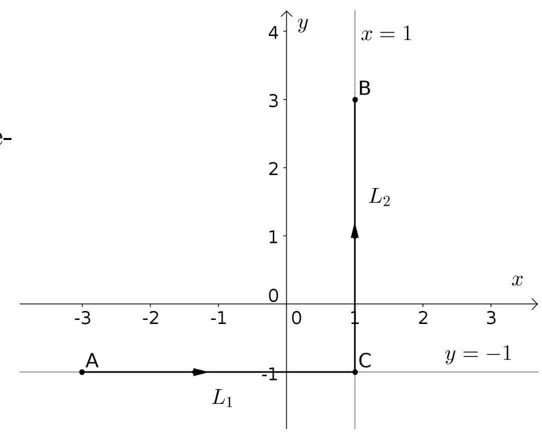
(c) pomoću totalnog diferencijala.

Rešenje: Neka je $P = ay$ i $Q = 3x$. Tada je $P_y = a$ i $Q_x = 3$. Vrednost integrala ne zavisi od putanje integracije ako i samo ako $P_y = Q_x$, što u ovom slučaju važi za $a = 3$. Integral $\int\limits_{L(AB)} 3y\,dx + 3x\,dy$ ne zavisi od putanje integracije i računamo vrednost ovog integrala.

(a)

Kriva L je unije dve krive $L = L_1 \cup L_2$, koje parametrizujemo na sledeći način

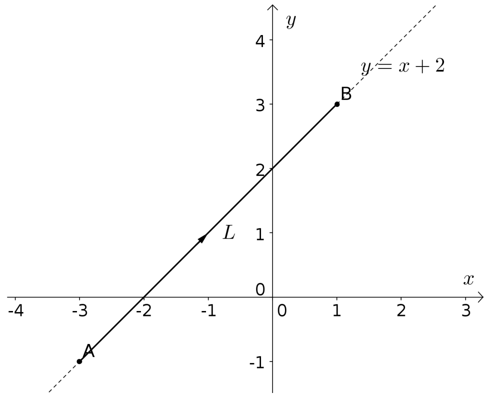
$$L_1 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = -1, t \in [-3,1]\}$$
$$L_2 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 1, y(t) = t, t \in [-1,3]\}$$



Koristeći navedenu parametrizaciju računamo traženi integral

$$\begin{aligned}
\int\limits_{L(AB)} 3y\,dx + 3x\,dy &= \int\limits_{L_1(AC)} 3y\,dx + 3x\,dy + \int\limits_{L_2(CB)} 3y\,dx + 3x\,dy \\
&= \int_{-3}^{1} (3 \cdot (-1) \cdot 1 + 3t \cdot 0)\,dt + \int_{-1}^{3} (3t \cdot 0 + 3 \cdot 1)\,dt \\
&= -3 \int_{-3}^{1} dt + 3 \int_{-1}^{3} dt \\
&= -3\, t\big|_{-3}^{1} + 3\, t\big|_{-1}^{3} = -3(1-(-3)) + 3(3-(-1)) = 0.
\end{aligned}$$

(b)



Duž $\overline{AB}$ je deo prave $y = x + 2$, te je možemo parametrizovati na sledeći način
$L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = t + 2, t \in [-3, 1]\}$.

Na osnovu date parametrizacije, računamo integral

$$\int\limits_{L(AB)} 3y\,dx + 3x\,dy = \int\limits_{-3}^{1} (3(t+2)\cdot 1 + 3t \cdot 1)\,dt = \int\limits_{-3}^{1} (6t+6)\,dt = \left(6\frac{t^2}{2} + 6t\right)\Big|_{-3}^{1}$$
$$= 3 + 6 - (27 - 18) = 0.$$

(c) Kako dati integral ne zavisi od putanje integracije, možemo ga izračunati pomoću funkcije V takve da je $dV = 3y\,dx + 3x\,dy$. Dakle, tražimo funkciju V takvu da je $V_x = 3y$ i $V_y = 3x$. Stoga

$$V = \int V_x\,dx = \int 3y\,dx = 3xy + \varphi(y)$$

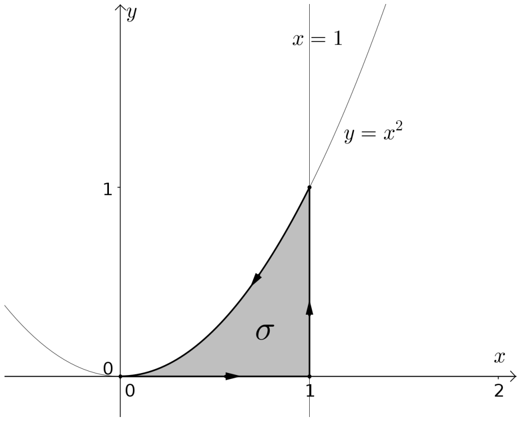
Odakle je $V_y = 3x + \varphi'(y)$. Kako tražimo funkciju V takvu da je $V_y = 3x$, dobijamo da mora da važi $\varphi'(y) = 0$, odakle je $\varphi(y) = \int \varphi'(y)\,dy = \int 0\,dy = 0 + C = C$. Tražena funkcija je $V = 3xy + C$, te je vrednost integrala

$$\int\limits_{L(AB)} 3y\,dx + 3x\,dy = V(B) - V(A) = 3 \cdot 1 \cdot 3 + C - (3 \cdot (-1) \cdot (-3) + C) = 0.$$

Formula Grina

5. Primenom formule Grina, izračunati vrednost krivolinijskog integrala $\oint\limits_L xy\,dx + (x+y)\,dy$ ako je kriva $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \leq x \leq 1\}$ pozitivno orijentisana.

Rešenje:



Neka je $P = xy$ i $Q = x + y$. Tada je $P_y = x$ i $Q_x = 1$. Kriva L je zatvorena pozitivno orijentisana kriva. Kako je oblast

$$\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

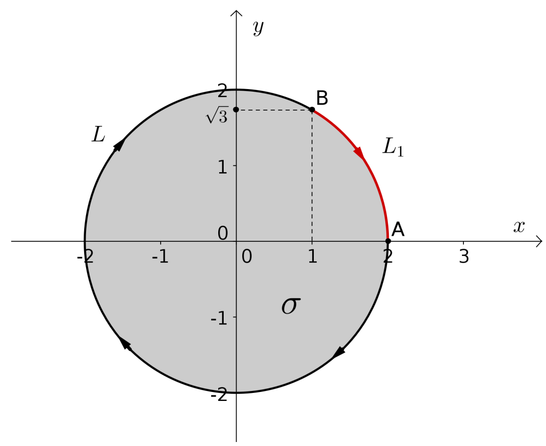
ograničena krivom L i funkcije P, Q, P_y i Q_x neprekidne nad $\sigma \subset \mathbb{R}^2$, ispunjeni su uslovi teoreme Grina i sledi

$$\oint_L xy\,dx + (x+y)\,dy = \iint_\sigma (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint_\sigma (1-x)\,dx\,dy = \int_0^1 dx = \int_0^{x^2} (1-x)\,dy$$
$$= \int_0^1 (1-x)\, y\big|_0^{x^2}\; dx \int_0^1 (1-x)x^2\,dx = \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

6. Primenom formule Grina, izračunati vrednost krivolinijskog integrala $\int\limits_L -y^3\,dx + x^3\,dy$, ako je kriva L duži luk kružnice $x^2+y^2=2^2$ od tačke $A(2,0)$ do tačke $B(1,\sqrt{3})$.

Rešenje:

Kriva L nije zatvorena. Ako na krivu L dodamo krivu L_1 dobijamo novu krivu $L^\star = L \cup L_1$, koja je zatvorena i negativno orijentisana, te je kriva $-L^\star$ zatvorena, pozitivno orijentisana kriva.



Ako je $P=-y^3$ i $Q=x^3$, onda je $P_y=-3y^2$ i $Q_x=3x^2$. Kako je oblast $\sigma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=2^2\}$ ograničena krivom $-L^\star$ i funkcije P,Q,P_y,Q_x su neprekidne nad σ, kriva $-L^\star$, funkcije P,Q,P_y,Q_x i oblast σ zadovoljavaju uslove teoreme Grina i važi
$\int\limits_{-L^\star} -y^3\,dx + x^3\,dy = \iint\limits_\sigma (Q_x-P_y)\,dx\,dy = \iint\limits_\sigma (3x^2+3y^2)\,dx\,dy$. Odakle je
$\int\limits_{L^\star} -y^3\,dx + x^3\,dy = -\iint\limits_\sigma (3x^2+3y^2)\,dx\,dy$. Dalje, kako je $L^\star = L\cup L_1$, sledi

$$\int_L -y^3\,dx + x^3\,dy = -\iint_\sigma (3x^2+3y^2)\,dx\,dy - \int_{L_1} -y^3\,dx + x^3\,dy.$$

Dvostruki integral nad σ računamo uvodeći smenu polarnim koordinatama $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ \rho\in[0,2],\ \varphi\in[0,2\pi]$, odakle sledi

$$\iint_\sigma (3x^2+3y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 3\rho^2\cdot\rho\,d\rho = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3\,d\rho = 3\int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^2 d\varphi = 3\int_0^{2\pi} 4\,d\varphi = 12\int_0^{2\pi} d\varphi = 24\pi.$$

Ako krivu L_1 parametrizujemo na sledeći način $L_1=\{(x(t),y(t))\in\mathbb{R}^2 : x(t)=2\cos t, y(t)=2\sin t, t\in \overleftarrow{\left[0,\frac{\pi}{3}\right]}\}$, onda je

$$\int\limits_{L_1} -y^3\,dx + x^3\,dy = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} (-(2\sin t)^3 \cdot (-2\sin t) + (2\cos t)^3 \cdot (2\cos t))\,dt = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} (16\sin^4 t + 16\cos^4 t)\,dt$$

$$= 16\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} \left((\sin^2 t)^2 + (\cos^2 t)^2\right)\,dt = 16\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\right)\,dt$$

$$= 16\cdot\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t + 1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t)\,dt = 4\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} (2 + 2\cos^2 2t)\,dt$$

$$= 8\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} (1+\cos^2 2t)\,dt = 8\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} \left(1 + \frac{1+\cos 4t}{2}\right)\,dt = 8\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 4t\right)\,dt$$

$$= 12\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} dt + 4\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} \cos 4t\,dt = 12\,t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{0} + 4\cdot\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{0}$$

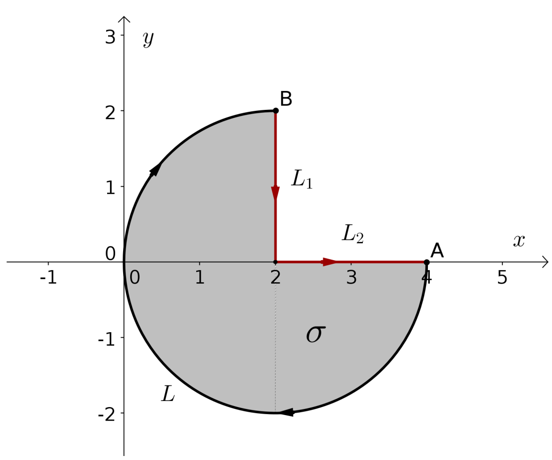
$$= 12\left(0 - \frac{\pi}{3}\right) + \sin 0 - \sin\frac{4\pi}{3} = -4\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Prema tome,

$$\int\limits_{L} -y^3\,dx + x^3\,dy = -\iint\limits_{\sigma} (3x^2+3y^2)\,dx\,dy - \int\limits_{L_1} -y^3\,dx + x^3\,dy = -24\pi - \left(-4\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -20\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7. Primenom formule Grina, izračunati vrednost krivolinijskog integrala $\int\limits_{L} -2y\,dx + x\,dy$ ako je kriva L duži luk kružnice $x^2+y^2=4x$ od tačke $A(4,0)$ do tačke $B(2,2)$.

Rešenje:



Kriva L nije zatvorena. Ako na krivu L, dodamo krive L_1 i L_2 dobijamo krivu $L^\star = L \cup L_1 \cup L_2$, koja je zatvorena, negativno orijentisana kriva. Stoga, kriva $-L^\star$ je zatvorena, pozitivno orijentisana kriva i oblast σ je ograničena krivom $-L^\star$.

Funkcije $P=-2y$, $Q=x$, $P_y=-2$ i $Q_x=1$ su neprekidne nad σ, te su zadovoljeni uslovi Grinove teoreme i važi

$$\int\limits_{-L^\star} -2y\,dx + x\,dy = \iint\limits_{\sigma} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma} (1-(-2))\,dx\,dy = 3\iint\limits_{\sigma} dx\,dy$$

$$= 3\cdot P(\sigma) = 3\cdot\frac{3}{4}\cdot 2^2\pi = 9\pi.$$

Odakle je $\int\limits_{L^\star} -2y\,dx + x\,dy = -9\pi$. Kako je $L^\star = L \cup L_1 \cup L_2$, važi

$$\int\limits_{L} -2y\,dx + x\,dy = -9\pi - \int\limits_{L_1} -2y\,dx + x\,dy - \int\limits_{L_2} -2y\,dx + x\,dy$$

Krivu L_1 parametrizujemo na sledeći način $L_1 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 2, y(t) = t, t \in \overleftarrow{[0,2]}\}$ i dobijamo

$$\int\limits_{L_1} -2y\,dx + x\,dy = \int\limits_{2}^{0} (-2t \cdot 0 + 2 \cdot 1)\,dt = 2\int\limits_{2}^{0} dt = 2\,t|_2^0 = -4.$$

Krivu L_2 parametrizujemo na sledeći način $L_2 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 0, t \in [2,4]\}$ i dobijamo

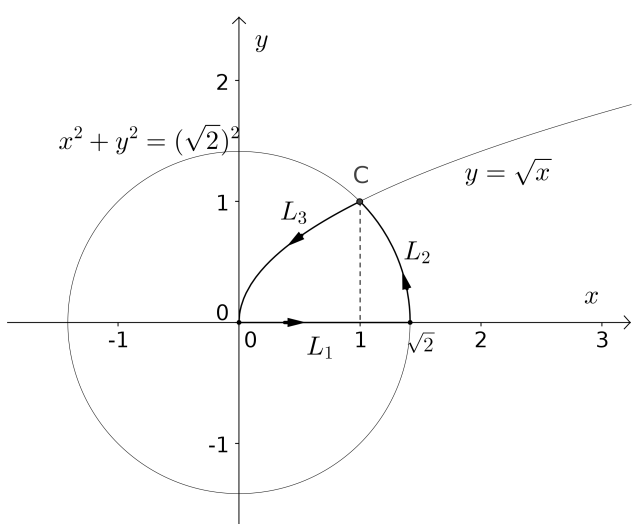
$$\int\limits_{L_2} -2y\,dx + x\,dy = \int\limits_{2}^{4} (0 + 0)\,dt = 0.$$

Konačno, vrednost traženog integrala je $\int\limits_{L} -2y\,dx + x\,dy = -9\pi - (-4) - 0 = 4 - 9\pi$.

Dodatni zadaci za vežbu:

1. Izračunati integral $\int\limits_{L} dx + y\,dy$ duž pozitivno orijentisane krive $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \le x \le \sqrt{2}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2, 1 \le x \le \sqrt{2}, y \ge 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{x}, 0 \le x \le 1\}$.

Rešenje: Kriva L je unija tri krive $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$.



$$\int\limits_{L} dx + y\,dy = \int\limits_{L_1} dx + y\,dy + \int\limits_{L_2} dx + y\,dy + \int\limits_{L_3} dx + y\,dy$$

Krivu L_1 možemo parametrizovati na sledeći način
$L_1 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 0, t \in [0, \sqrt{2}]$, pri čemu je $x'(t) = 1, y'(t) = 0$. Stoga,

$$\int\limits_{L_1} dx + y\,dy = \int\limits_0^{\sqrt{2}} (1 \cdot 1 + 0 \cdot 0)\,dt = \int\limits_0^{\sqrt{2}} 1\,dt = \sqrt{2}.$$

Krivu L_2 parametrizujemo na sledeći način
$L_2 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = \sqrt{2}\cos t, y(t) = \sqrt{2}\sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\}$, pri čemu je $x'(t) = -\sqrt{2}\sin t, y'(t) = \sqrt{2}\cos t$. Prema tome

$$\int\limits_{L_2} dx + y\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 \cdot (-\sqrt{2}\sin t) + \sqrt{2}\sin t \cdot \sqrt{2}\cos t)\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sqrt{2}\sin t + \sin 2t)\,dt$$

$$= \sqrt{2}\,\cos t|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\cos 2t|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

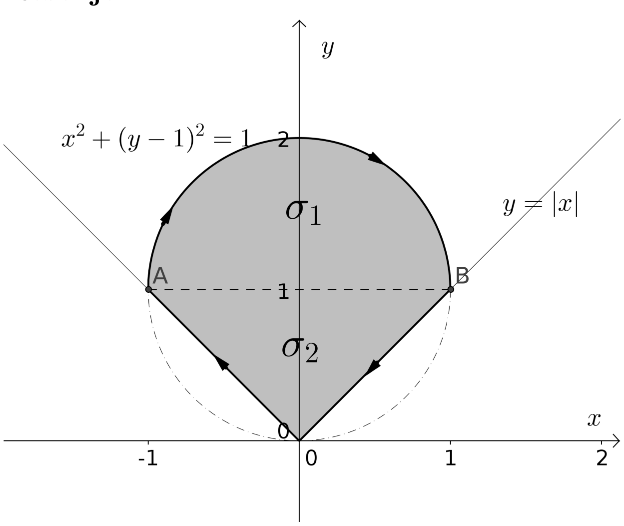
Parametrizujmo krivu L_3 na sledeći način $L_3 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = \sqrt{t}, t \in \overleftarrow{[0,1]}\}$, pri čemu je $x'(t) = 1, y'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$. Tada je

$$\int\limits_{L_3} dx + y\,dy = \int\limits_1^0 (1 + \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}})\,dt = \int\limits_1^0 (1 + \frac{1}{2})\,dt = \frac{3}{2}\,t|_1^0 = -\frac{3}{2}.$$

Konačno, $\displaystyle\int\limits_L dx + y\,dy = \sqrt{2} + \frac{3}{2} - \sqrt{2} - \frac{3}{2} = 0.$

2. Primenom formule Grina, izračunati vrednost krivolinijskog integrala $\displaystyle\int\limits_L x^2\,dy$ ako je kriva $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2y, y \geq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|, -1 \leq x \leq 1\}$ negativno orijentisana.

Rešenje:



Kriva L je zatvorena, negativno orijentisana kriva, te je $-L$ zatvorena, pozitivno orijentisana kriva. Kako je oblast σ ograničena krivom $-L$ i funkcije $P = 0$, $Q = x^2$, $P_y = 0$ i $Q_x = 2x$ neprekidne nad σ, zadovoljeni su uslovi Grinove teoreme i važi $\displaystyle\int\limits_{-L} x^2\,dy = \iint\limits_{\sigma} 2x\,dx\,dy$, odakle je

$\int\limits_L x^2\,dy = -2\iint\limits_\sigma x\,dx\,dy$. Oblast σ možemo posmatrati kao uniju dve oblasti $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, odakle je $\iint\limits_\sigma x\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma_1} x\,dx\,dy + \iint\limits_{\sigma_2} x\,dx\,dy$. Vrednost dvostrukog integrala nad σ_1 računamo uvodeći smenu polarnim koordinatama, $x = \rho\cos\varphi, y = 1 + \rho\sin\varphi, \rho \in [0,1], \varphi \in [0,\pi]$, i dobijamo

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\sigma_1} x\,dx\,dy &= \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^1 \rho\cos\varphi\cdot\rho\,d\rho = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^1 \cos\varphi\rho^2\,d\rho = \int\limits_0^\pi \cos\varphi\,\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1\,d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^\pi \cos\varphi\,d\varphi\\ &= \frac{1}{3}\sin\varphi\Big|_0^\pi = 0.\end{aligned}$$

Vrednost dvostrukog integrala nad σ_2 računamo na sledeći način

$$\iint\limits_{\sigma_2} x\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{y} x\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}\Big|_{-y}^{y}\,dy = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}(y^2 - (-y)^2)\,dy = 0.$$

Zaključujemo da je $\int\limits_L x^2\,dy = -2\cdot\iint\limits_\sigma x\,dx\,dy = -2\cdot\left(\iint\limits_{\sigma_1} x\,dx\,dy + \iint\limits_{\sigma_2} x\,dx\,dy\right) = -2\cdot(0+0) = 0.$