Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje–stari studenti
Merenje i regulacija–stari studenti
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 23. decembar 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Predispitne obaveze 1 – 20 poena

1. [1 poen] Napisati aksiomatsku definiciju verovatnoće. $\Omega \neq 0$, $\mathcal{F}$ - σ-algebra $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

   1) $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$
   2) $P(\Omega) = 1$
   3) σ-aditivn. $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, $A_i A_j = \emptyset$, $i \neq j$

   P назива се вероб

2. [2 poena] Novčić se baca dva puta. Ispisati skup elementarnih događaja $\Omega =$ {PP, PG, GP, GG}

   A

   Izračunati verovatnoću da će prilikom bacanja novčića grb pasti bar jednom $P(A) = 3/4$

   Ako je prilikom bacanja novčića pao bar jedan grb izračunati verovatnoću da je grb pao dva puta

   $P(\{GG\}|A) = \frac{P(\{GG\} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(GG)}{3/4} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$

3. [3 poena] Koristeći osobine matematičkog očekivanja i disperzije napisati jednakosti koje važe

   $E(2 - X) =$ $E(2) - E(X) = \underline{2 - E(X)}$

   $D(2 - X) =$ $D(-X) = (-1)^2 D(X) = D(X)$

   $E(X^\alpha) =$ $\sum_i x_i^\alpha \cdot p(x_i)$ [или $\int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha \cdot \varphi_X(x)\, dx$] дискр. (za diskretan ili neprekidan slučaj)

   Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, 4\}$. Matematičko očekivanje slučajne promenljive X uzima vrednosti iz intervala $[1, 4]$ Pokazati!

   $E(X) = \sum x_i \cdot p(x_i)$ $\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x_i \leq 4 \,/\cdot p(x_i) \ \forall i \quad x_i = 1, 2, 3, 4 \\ 1 \cdot p(x_i) \leq x_i \cdot p(x_i) \leq 4 \cdot p(x_i) \end{array} \right\}$ $\sum 1 \cdot p(x_i) \leq \sum x_i p(x_i) \leq \sum 4\, p(x_i)$

   $1 \leq E(X) \leq 4 \cdot 1$

4. [2 poena] Verovatnoća da dete uči matematiku je 0.7, a verovatnoća da uči fiziku je 0.6. Verovatnoća da uči matematiku ili fiziku je 0.9. $P(M) = 0.7$ $P(F) = 0.6$ $P(M \cup F) = 0.9$

   унија

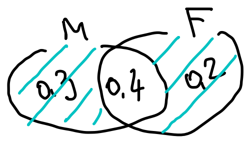
   Izračunati verovatnoću da će dete učiti i matematiku i fiziku.

   $P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(MF)$

   $0.9 = 0.7 + 0.6 - P(MF)$

   $P(MF) = 0.4$

   Izračunati verovatnoću da će dete učiti tačno jedan od dva navedena predmeta.

   0.1

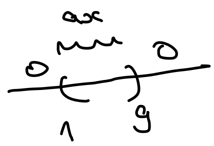
   $p = 0.3 + 0.2 = 0.5$

5. [1 poen] $P(A|B) =$ $\frac{P(AB)}{P(B)}$ pod uslovom $P(B) \neq 0$

   Ako su događaji A i B nezavisni $P(A|B) =$ $\frac{P(AB)}{P(B)} \overset{\text{нез.}}{=} \frac{P(A)\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$ pod uslovom $P(B) \neq 0$

6. [1 poen] Izračunati karakterističnu funkciju slučajne promenljive sa uniformnom $\mathcal{U}(-2, 2)$ raspodelom.

7. [5 poen] Slučajna promenljiva X data je gustinom raspodele verovatnoća $\varphi_X(x) = \begin{cases} ax, & x \in (1,9) \\ 0, & x \notin (1,9) \end{cases}$.



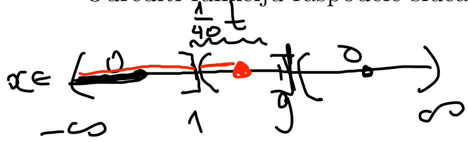
Odrediti konstantu a. **(Izračunati integral!)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\,dx = 1 \; : \quad \int_1^9 ax\,dx = a\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^9 = \frac{a}{2}(81-1) = 40a = 1$$

$$\underline{a = 1/40}$$

Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt$$



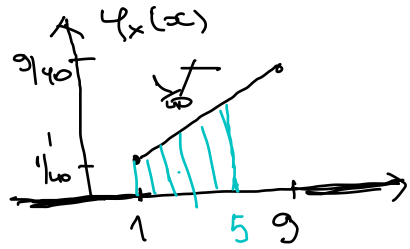
$x \le 1: \quad F_X(x) = 0$

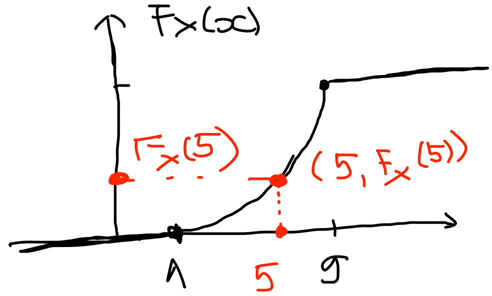
$1 < x \le 9: \quad F_X(x) = \cancel{\int_{-\infty}^{1} 0\,dt} + \int_1^x \frac{1}{40}t = \frac{1}{40}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_1^x = \frac{x^2-1}{80}$

$x > 9: \quad F_X(x) = 1$

$\boxed{P(X = \tfrac{7}{2}) = 0}$

Na grafiku funkcije gustine i na grafiku funkcije raspodele slučajne promenljive X predstaviti verovatnoću $P(X < 5)$ i izračunati je.





$$P(X<5) = F_X(5) = \frac{5^2-1}{80}$$

$$P(X<5) = \int_1^5 \frac{1}{40}x\,dx$$

8. [6 poena] Slučajna promenljiva (X,Y) data je zakonom raspodele verovatnoća

X/Y	-1	1	2	
1	0.1	0.3	0.1	0,5
2	0.2	$\boxed{0.3}$	0	0,5
			0,1	

Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive X.

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.

$$p(x_i, y_j) \stackrel{?}{=} p(x_i)\,p(y_j)$$

$$P(X=2, Y=2) \stackrel{?}{=} P(X=2)\,P(Y=2)$$

$$0 \neq 0.5\cdot 0.1 \implies X \text{ и } Y \text{ нису независне}$$

Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive $Y|X=2$. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}$

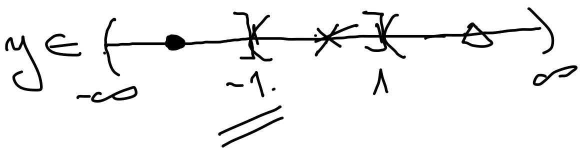
$$P(Y=-1 \mid X=2) = \frac{P(X=2, Y=-1)}{P(X=2)} = \frac{0.2}{0.5} = 2/5$$

$$P(Y=1 \mid X=2) = \frac{P(X=2, Y=1)}{P(X=2)} = \frac{0.3}{0.5}$$

$$Y|X=2 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive $Y|X=2$.

$$F_{Y|X=2}(y) = P(Y<y \mid X=2),\; y\in\mathbb{R}$$



$$F_{Y|X=2}(y) = \begin{cases} y \le -1 : & 0 \\ -1 < y \le 1 : & p(-1) = 2/5 \\ y > 1 : & 2/5 + 3/5 = 1 \end{cases}$$

Izračunati matematičko očekivanje slučajne promenljive $Y|X=2$.

$$E(Y|X=2) = -1\cdot\frac{2}{5} + 1\cdot\frac{3}{5} = 1/5$$

Informaciono-komunikacione tehnologije i obrada signala
Instrumentacija i merenje–stari studenti
Merenje i regulacija–stari studenti
predmet: **Verovatnoća, statistika i slučajni procesi**
datum: 23. decembar 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 1 – 35 poena

1. [8 poena] Na stolu se nalaze tri kutije. U prvoj kutiji su dve kuglice bele boje i jedna kuglica plave boje, u drugoj kutiji jedna kuglica bele boje i dve kuglice plave boje, a u trećoj kutiji su po jedna kuglica bele i plave boje. Emica na slučajan način uzima jednu kuglicu iz prve kutije i jednu kuglicu iz druge kutije i prebacuje ih u treću kutiju. Nakon prebacivanja kuglica, iz treće kutije Emica na slučajan način uzima **odjednom** tri kuglice. Izračunati verovatnoću da će Emica izvući kuglice istih boja. Ako je Emica iz treće kutije izvukala dve bele i jednu plavu kuglicu, izračunati verovatnoću da su u treću kutiju prebačene dve kuglice bele boje.

2. [9 poena] Na stolu se nalazi jedna kartica sa brojem 1, dve kartice sa brojem 2, jedna kartica sa brojem 3 i dve kartice sa brojem 4. Emica uzima dve kartice **odjednom**. Slučajna promenljiva X uzima vrednost 0 ako je zbir brojeva na uzetim karticama 4, a vrednost 1 ako zbir nije 4. Slučajna promenljiva Y predstavlja broj uzetih kartica sa brojem 4.

   a) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive (X, Y).
   b) Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.
   c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = \min\{X, Y\}$.
   d) Koristeći karakterističnu funkciju izračunati matematičko očekivanje slučajne promenljive Y.

3. [9 poena] Slučajna promenljiva X je data funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

   a) Izračunati konstantu a.
   b) Izračunati matematičko očekivanje slučajne promenljive X.
   c) Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = X - 1$.

4. [9 poena] Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive, pri čemu X ima uniformnu $\mathcal{U}(1,2)$ raspodelu, a Y eksponencijalnu $\mathcal{E}(1)$ raspodelu. Odrediti raspodelu (funkciju gustine ili funkciju raspodele) slučajne promenljive $Z = X + Y$.