Vremenska vrednost novca

Doc. dr Miroslav Ferenčak

Vremenska vrednost novca

- Jedna od osnovnih finansijskih odluka je na koji način upotrebiti novac danas
- Novac danas nema istu vrednost kao novac u budućnosti
- Novčani tokovi u različitim periodima imaju različitu vrednost za nas kao korisnika

Šta ćete danas čuti?

- Kamatne stope
- Buduća vrednost jednog novčanog toka
- Buduća vrednost serije novčanih tokova
- Sadašnja vrednost jednog novčanog toka
- Sadašnja vrednost serije novčanih tokova
- Izračunavanje kamatnih stopa, periodičnosti i visine anuiteta
- Princip aditivnost novčanih tokova

Kamatne stope

Šta su kamatne stope? Kako ih računamo?

Kamatne stope

- Da li biste više voleli da dobijete 100,000 RSD danas ili za godinu dana?
- Da li biste više voleli da danas dobijete 95,000 RSD ili 100,000 za godinu dana?
- Koliko danas tražite da ne biste sačekali da za dve godine dobijete 200,000 RSD?
- Prethodna tri pitanja uvode kamatnu stopu *(r)* u razgovor – odrednicu vremenske vrednosti novca

Kamatne stope

Očekivana stopa povrata

- Minimalna stopa po kojoj prihvatamo investiciju

Diskontna stopa

- Kolika bi bila vrednost nekog budućeg novčanog toka danas

Trošak oportuniteta

- Čega se odričemo ukoliko odaberemo određenu akciju

Kamatne stope

$$PV \xrightarrow{\text{Očekivana stopa povrata}} FV$$

$$PV \xleftarrow{\text{Diskontna stopa}} FV$$

PV – sadašnja vrednost (*Present value*)
FV – buduća vrednost (*Future value*)

Kamatne stope

- Kamatna stopa se određuje na tržištu koje ima puno učesnika
- Struktura kamatne stope:

	Realna bezrizična kamatna stopa (*Risk-free interest rate*)	Oslikava isključivo vremensku dimenziju, ne uključujući bilo kakav rizik za novčane tokove
+	**Premija za inflaciju (*Inflation premium*)**	Premija za gubitak kupovne moći novca tokom vremena – sa risk-free daje **Nominalnu kamatnu stopu**
+	**Premija za rizik difolta (*Default risk premium*)**	Premija za mogućnost da u budućnosti ne dobijemo novac nazad u očekivanoj količini
+	**Premija za likvidnost (*Liquidity premium*)**	Premija za nemogućnost dobijanja fer vrednosti ukoliko je potrebno brzo izaći iz investicije
+	**Premija za ročnost (*Maturity premium*)**	Premija za moguće promene na tržištu kamatnih stopa ukoliko je investicija na duži vremenski rok

Buduća vrednost jednog novčanog toka

Koliko će vredeti novac koji ćemo uložiti u jednom trenutuku u budućnosti? Kakvu ulogu igra periodičnost kamaćenja? Koja je razlika između nominalne i efektivne kamatne stope?

Prost i složen kamatni račun

- Kamata prikazuje cenu novca u određenom vremenskom periodu
- Ukoliko posmatramo samo jedan period, onda se buduća vrednost novca može odrediti na sledeći način:

$$FV = PV \times (1 + r)$$

- $(1 + r)$ – faktor buduće vrednosti (*Future value factor*)
- Ovakav način računanja buduće vrednosti novca se naziva prost kamatni račun (*Simple interest rate*)

Primer 1.

Koliko novca ćemo dobiti posle godinu dana na naš inicijalni polog od 1.000 RSD ukoliko je kamatna stopa 5%?

$$FV = 1{,}000\ RSD \times (1 + 0.05) = 1{,}050\ RSD$$

Prost i složen kamatni račun

- Ukoliko principal ostaje pozajmljen duže od jednog perioda, na njega će više puta biti primenjena kamatna stopa

$$FV_N = PV \times (1 + r)^N$$

- Ovakav način računanja buduće vrednosti novca se naziva složen kamatni račun (*Compound interest rate*)

Primer 2.

Odlučili smo da na dve godine oročimo 50.000 RSD na štednom računu u banci uz kamatnu stopu od 3% godišnje. Koliko ćemo dobiti novca posle isteka druge godine?

$$FV_2 = 50{,}000\ RSD \times (1 + 0.03)^2 = 53{,}045\ RSD$$

Period		
0	Inicijalan investicija	$50{,}000\ RSD$
1	Kamatna za prvi period ($50.000\ RSD \times 1.03$)	$1{,}500\ RSD$
2	Kamata za drugi period po osnovu principala ($50.000\ RSD \times 1.03$)	$1{,}500\ RSD$
2	Kamata za drugi period po osnovu kamate iz prvog perioda ($1.500\ RSD \times 1.03$)	$45\ RSD$

Vremenska linija

- Kamatna stopa i period moraju biti u istoj vremenskoj jedinici!!!!
- Kad god imate problem – pozovite vremensku liniju (*Timeline*)

$$FV_N = PV \times (1 + r)^N$$

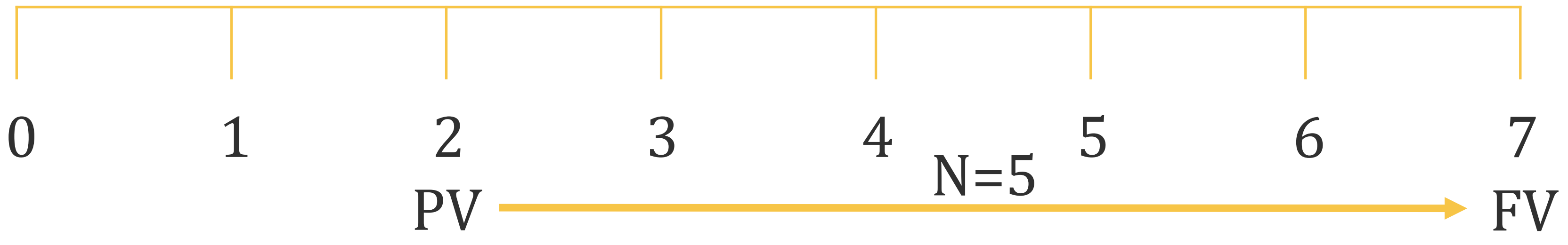
- Trostruki značaj vremenskog razmaka:
  1. Vrednosti možemo sabirati samo ako su indeksirane u istoj vremenskoj tački
  2. Ukoliko je kamatna stopa fiksna, buduća vrednost novčanog toka se povećava sa povećanjem broja perioda
  3. Ukoliko je broj perioda fiksan, buduća vrednost novčanog toka se povećava sa povećanjem kamatne stope

Vremenska linija

Primer 3.

Dobili ste obećanje tetke iz Kanade da će vam za dve godine uplatiti na račun CA$1m. Vi sredstva planirate da uložite u nekretnine na različitim lokacijama, uz očekivanu stopu povrata od 6% godišnje. Koliko će iznositi vrednost vaše investicije nakon 7 godina?

Rešenje



$$FV_5 = 1{,}000{,}000 \times (1 + 0.06)^5 = 1{,}338{,}225.58\ CA\$$$

Periodičnost kamaćenja

- Period kamaćenja ne mora da bude godinu dana:
  - Polugodišnje, kvartalno, mesečno, dnevno, kontinutalno
- Iako period kamaćenja ne mora da bude godinu dana, sama istaknuta kamatna stopa (*Quoted interest rate*) se uglavnom odnosi na period od godinu dana
- Buduća vrednost jednog novčanog toka kada je periodičnost kamaćenja češća od istaknute kamatne stope:

$$FV_N = PV \times (1 + \frac{r_s}{m})^{m \times N}$$

r_s - istaknuta kamatna stopa

m – broj perioda u kojima se vrši okamaćivanje

Periodičnost kamaćenja

Primer 4.

Banka vam je ponudila da kupite dvogodišnju potvrdu o depozitu (*Certificate of deposit – CD*) sa kamatnom stopom od 8% i kvartalnim okamaćivanjem za 10,000 CHF. Kolika je buduća vrednost novčanog toka?

Rešenje

$$FV = 10{,}000\ CHF \times \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{4\times 2} = 11{,}716.59\ CHF$$

Kontinualno kamaćenje

- Kontinualno kamaćenje se razlikuje u odnosu na diskretno kamaćenje jer imamo beskonačan broj perioda u posmatranom vremenskom period

$$FV_N = PV e^{r_s N}$$

Primer 5.

Banka vam je ponudila da kupite dvogodišnju potvrdu o depozitu (*Certificate of deposit – CD*) sa kamatnom stopom od 8% i kontinualnim okamaćivanjem za 10,000 CHF. Kolika je buduća vrednost novčanog toka?

Rešenje

$$FV = 10{,}000\ CHF \times e^{0.08\times 2} = 11{,}735.11\ CHF$$

Nominalna i efektivna stopa očekivanog povrata

- Nominalna stopa očekivanog povrata je istaknuta godišnja kamatna stopa koja se odnosi na investiciju – ona sama ne govori koliko ćemo tačno zaraditi ukoliko je period okamaćivanja drugačiji od jedne godine
- Efektivna godišnja stopa očekivanog povrata (*Effective annual rate* – *EAR*) predstavlja godišnju stopu po kojoj će naša investicija da raste

$$EAR = (1 + \frac{r_s}{m})^m - 1$$

$$EAR = e^{r_s} - 1$$

Nominalna i efektivna stopa očekivanog povrata

Primer 6.

Izračunati efektivnu godišnju stopu očekivanog povrata ukoliko je godišnja kamatna stopa 6%, a okamaćivanje se vrši:

a) Polugodišnje
b) Kvartalno
c) Mesečno
d) Dnevno
e) Kontinualno

Nominalna i efektivna stopa očekivanog povrata

Rešenje

Period	EAR
Polugodišnje	$(1+\frac{0.06}{2})^2-1=6.09\%$
Kvartalno	$(1+\frac{0.06}{4})^4-1=6.136\%$
Mesečno	$(1+\frac{0.06}{12})^{12}-1=6.168\%$
Dnevno	$(1+\frac{0.06}{365})^{365}-1=6.183\%$
Kontinualno	$e^{0.06}-1=6.184\%$

Buduća vrednost serije novčanih tokova

Kako ćemo odrediti buduću vrednost serije novčanih tokova? Kako računamo buduću vrednost ukoliko su novčani tokovi jednake vrednosti?

Buduća vrednost serije novčanih tokova

- Serije novčanih tokova možemo posmatrati kao zbir odvojenih budućih vrednosti jedne uplate

Primer 7.

Odlučili ste se da novac polažete na štedni račun u naredne tri godine i to sledećim tempom: na kraju ove godine ćete uložiti 100,000 RSD, na kraju druge godine 150,000 RSD a na kraju treće godine 200,000 RSD. Ukoliko je kamatna stopa 5%, kolika je buduća vrednost zbira ovih novčanih tokova?

Rešenje

0 1 2 3

100,000 RSD → $100{,}000 \times (1 + 0{,}05)^2 = 110{,}250$

150,000 RSD → $150{,}000 \times (1 + 0{,}05) = 157{,}500$

200,000 RSD → $200{,}000 \times 1 = 200{,}000$

$= 467{,}750\ RSD$

Buduća vrednost serije jednakih novčanih tokova

Anuitet (*Annuity*)

- Konačan broj novčanih tokova iste veličine

Običan anuitet (*Ordinary annuity*)

- Anuitet koji počinje u sledećem periodu

Dospeli anuitet (*Annuity due*)

- Anuitet koji je dospeo

Perpetuitet (*Perpetuity*)

- Beskonačan broj novčanih tokova iste veličine

Buduća vrednost serije jednakih novčanih tokova

- Buduće novčane tokove možemo izračunati isto kao i seriju različitih novčanih tokova

$$FV_N = PV \times (1+r)^{N-1} + PV \times (1+r)^{N-2} + \cdots + PV \times (1+r)^1 + PV \times (1+r)^0$$

- Međutim, kako će novčani tokovi biti uvek isti, imamo anuitet

$$FV_N = A \times [(1+r)^{N-1} + (1+r)^{N-2} + \cdots + (1+r)^1 + (1+r)^0]$$

A – anuitet

- Daljom tranformacijom dolazimo do jednačine za računanje buduće vrednosti anuiteta

$$FV_N = A \times \left[\frac{(1+r)^N - 1}{r}\right]$$

Faktor buduće vrednosti za anuitet

Buduća vrednost serije jednakih novčanih tokova

Primer 8.

Kao vašu buduću investiciju, opredelili ste se da narednih 20 godina ulažete €1,000 godišnje u životno osiguranje koje donosi 3% godišnje. Koliko će vam biti dostupno novca po isteku polise?

Rešenje

$$FV = €1{,}000 \times \left[\frac{(1+0.03)^{20}-1}{0.03}\right] = €26{,}870.37$$

Sadašnja vrednost jednog novčanog toka

Kako računamo sadašnju vrednost kada nam je poznata buduća vrednost novčanog toka?

Određivanje sadašnje vrednosti novčanog toka

- Kako nam je poznato da je buduća vrednost:

$$FV_N = PV \times (1+r)^N$$

- Dobijamo da je sadašnja vrednost (*Present value*) jednog novčanog toka:

$$PV = FV_N \times \left[\frac{1}{(1+r)^N}\right] = \frac{FV_N}{(1+r)^N}$$

Gde je $\frac{1}{(1+r)}$ faktor sadašnje vrednosti (*Present value factor*), poznat kao i diskontni faktor (*Discount factor*)

Određivanje sadašnje vrednosti novčanog toka

Primer 9.

Želite da za 3 godine dobijete 1,000,000 RSD po osnovu štednje koja godišnje donosi 2.5%. Koliko novca bi trebalo da položite danas kako biste ostvarili vaš plan?

Rešenje

$$PV = \frac{1{,}000{,}000\ RSD}{(1 + 0.025)^3} = 928{,}599.41\ RSD$$

Određivanje sadašnje vrednosti novčanog toka – složeno kamaćenje

- Kako nam je poznato da je buduća vrednost:

$$FV_N = PV \times (1 + \frac{r_s}{m})^{m \times N}$$

- Dobijamo da je buduća vrednost jednog novčanog toka:

$$PV = FV_N \times \left[\frac{1}{(1 + \frac{r_s}{m})^{m \times N}}\right] = \frac{FV_N}{(1 + \frac{r_s}{m})^{m \times N}}$$

Određivanje sadašnje vrednosti novčanog toka – složeno kamaćenje

Primer 10.

U nasledstvo ste dobili HoV koja vam garantuje isplatu €100,000 za 7 godina. Sa druge strane, prijatelj vam nudi učešće u projektu koji bi vam za 5 godina doneo €95,000. Ukoliko je oportunitetni trošak 3% sa polugodišnjim kamaćenjem, koja od dve ponuđene opcije vam je bolja?

Rešenje

$$\text{HoV: } PV = \frac{€100{,}000}{(1+\frac{0.03}{2})^{14}} = €81{,}184.93$$

$$\text{Projekat: } PV = \frac{€95.000}{(1+\frac{0.03}{2})^{10}} = €81{,}858.39$$

Sadašnja vrednost serije novčanih tokova

Kako ćemo odrediti sadašnju vrednost serije novčanih tokova? Kako računamo sadašnju vrednost ukoliko su novčani tokovi jednake vrednosti? Kolika je vrednost beskonačne serije identičnih novčanih tokova?

Sadašnja vrednost serije nejednakih novčanih tokova

- Ukoliko su novčani tokovi nejednaki, svaki novčani tok posmatramo i diskontujemo posebno

Primer 11.

Čestitamo! Dobili ste na Loto-u €1,000,000! Ipak, nije vam dozvoljeno da sve odmah podignete, već ćete u prvoj godini dobiti €150,000; u drugoj €350,000 a u trećoj €500,000. Ukoliko danas postoji opcija da možete da uložite novac uz kamatnu stopu od 3.5% sa kontinualnim kamaćenjem, koliko zapravo taj vaš dobitak na loto-u vredi danas?

Sadašnja vrednost serije nejednakih novčanih tokova

Rešenje

Period	Iznos	Formula	Sadašnja vrednost u periodu 0
1	€150,000	$\frac{€150{,}000}{e^{0.035\times 1}}$	€144,840.81
2	€350,000	$\frac{€350{,}000}{e^{0.035\times 2}}$	€326,337.84
3	€500,000	$\frac{€500{,}000}{e^{0.035\times 3}}$	€450,162.26
		Ukupno	**€921,340.91**

Da li je buduća vrednost ovog novčanog toka €1,000,000?

$$€921{,}340.91 \times e^{0.035\times 3} = €1{,}023{,}343.12$$

Sadašnja vrednost serije jednakih novčanih tokova

- Ukoliko imamo novčani tok jednake vrednosti tokom perioda – imamo anuitet

$$PV = \frac{A}{(1+r)} + \frac{A}{(1+r)^2} + \frac{A}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{A}{(1+r)^{N-1}} + \frac{A}{(1+r)^N}$$

$$PV = A \times \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^N}}{r}\right]$$

Faktor anuiteta sadašnje vrednosti (*Present value annuity factor*)

Sadašnja vrednost serije jednakih novčanih tokova

Primer 12.

Potpisali ste ugovor o najmu stana (kao najmodavac) za €500 mesečno. Ukoliko je mesečni oportunitetni trošak 0.5%, kolika je sadašnja vrednost novčanih tokova koje očekujete?

Rešenje

$$PV = €500 \times \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^{12}}}{0.005}\right] = €5{,}809.47$$

Sadašnja vrednost serije jednakih novčanih tokova

Primer 13.

Penzioni fond će za 5 godina morati da počne da isplaćuje po 500,000 RSD godišnje narednih 15 godina. Ukoliko je standardna godišnja kamatna stopa za penzioni fond 5%, kolika je sadašnja vrednost novčanog toka?

Rešenje

$$\text{Korak 1: } PV = 500{,}000\ RSD \times \left[\frac{1-\frac{1}{(1+0.05)^{15}}}{0.05}\right] = 5{,}189{,}829.02\ RSD$$

$$\text{Korak 2: } FV_4 = 5{,}189{,}892.02\ RSD$$

$$\text{Korak 3: } PV = \frac{5{,}189{,}892.02\ RSD}{(1+0.05)^4} = 4{,}269{,}737.01\ RSD$$

Sadašnja vrednost beskonačne serije identičnih novčanih tokova

- Poseban slučaj anuiteta je kada imamo beskonačnu seriju anuiteta – perpetuitet (*Perpetuity*)

$$PV = A\sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+r)^t}\right]$$

$$PV = \frac{A}{r}$$

Primer 14.

Koliko biste trebali platiti konzolu koja će isplaćivati 1,000 RSD beskonačno ako je oportunitetni trošak 4,5%?

Rešenje

$$PV = \frac{1{,}000\ RSD}{0.045} = 22{,}222.22\ RSD$$

Izračunavanje kamatnih stopa, periodičnosti i visine anuiteta

Kako možemo naći trenutne kamatne stope? Kako možemo da odredimo broj perioda u kojima se javlja novčani tok? Kako možemo odrediti visinu anuiteta?

Računanje kamatne stope/Stope rasta

- Ukoliko je poznata *FV*, *PV*, *N* (i *m*), možemo lako izračunati *r*, odnosno stopu rasta *g* (*Growth rate*)

$$g = \sqrt[N]{\left(\frac{FV_N}{PV}\right)} - 1$$

Primer 15.

U tabeli su vam dati podaci o bruto domaćem proizvodu po glavi stanovnika (u 000 $) za 2013. i 2022. za zemlje u okruženju. Rangirajte zemlje po godišnjoj stopi rasta (*Compound annual growth rate* – CAGR) u datom periodu.

Država	**2013.**	**2022.**	**Država**	**2013.**	**2022.**
Albanija	3,780.7	5,155.29	Mađarska	11,705.01	16,336.24
BiH	4,297.49	6,623.7	Rumunija	8,287.25	12,188.64
Bugarska	6,700.54	9,550.94	S. Makedonija	4,530.68	5,500.4
Crna Gora	6,202.51	7,889.24	Slovenija	19,922.47	25,349.76
Hrvatska	11,706.22	16,610.32	Srbija	5,529.97	7,493.16

Računanje kamatne stope/Stope rasta

Rešenje

Mesto	Država	CAGR
10.	Severna Makedonija	2,19%
9.	Crna Gora	2,709%
8.	Slovenija	2,713%
7.	Srbija	3,43%
6.	Albanija	3,51%
5.	Mađarska	3,77%
4.	Hrvatska	3,96%
3.	Bugarska	4,02%
2.	Rumunija	4,38%
1.	BiH	4,92%

Računanje broja perioda kamaćenja

- Ukoliko znamo buduću i sadašnju vrednost, kao i kamatnu stopu, možemo izračunati broj perioda u kojima se dešava kamaćenje

$$N = \frac{\ln \frac{FV_N}{PV}}{\ln(1+r)}$$

Primer 16.

Ukoliko je godišnja kamatna stopa 6%, za koliko vremena ćemo utrostručiti ulog od RSD 1m?

Rešenje

$$N = \frac{\ln 3}{\ln(1+0.06)} = 18{,}54\ godina$$

Računanje visine anuiteta

- Ukoliko su nam poznati period kamaćenja, sadašnja vrednost i kamatna stopa, možemo izračunati anuitet perioda

$$A = \frac{PV}{Faktor\ anuiteta\ sadašnje\ vrednosti}$$

Primer 17.

Želite da kupite stan po ceni od €150,000. Planirate da date polog od 20% a da se za ostatak zadužite kod banke na 25 godina pri fiksnoj kamatnoj stopi od 7% sa mesečnim okamaćivanjem. Koliko će iznositi mesečna rata za vaš kredit?

Računanje visine anuiteta

Rešenje

$$Faktor\ anuiteta\ sadašnje\ vrednosti = \frac{1 - \frac{1}{(1+\frac{0.07}{12})^{12\times 25}}}{\frac{0.07}{12}} = 141.49$$

$$A = \frac{€120,000}{141.49} = €848.12$$

Računanje visine anuiteta

Primer 18.

Planirate da se zaposlite na početku 2027. i da u narednih 40 godina na kraju svake godine uplaćujete određenu fiksnu mesečnu sumu koja će vam početkom svakog meseca garantovati isplatu u visini od €2,500 evra u periodu od 20 godina kada odete u penziju početkom 2067. Ukoliko je kamatna stopa tokom perioda isplate anuiteta 3,5%, a tokom uplaćivanja anuiteta 3,25%, koliko iznosi anuitet koji moramo da uplaćujemo tokom radnog veka?

Računanje visine anuiteta

Rešenje

- Korak 1. – tražimo PV pre početka isplate anuiteta u 2067. godini

$$PV = €2{,}500 \times \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+\frac{0.035}{12})^{12\times 20}}}{\frac{0.035}{12}}\right] \times \left(1 + \frac{0.035}{12}\right) = €432{,}321.69$$

- Korak 2. – Tražimo anuitet koji moramo da uplaćujemo od 2027. do 2067.

$$A = \frac{€432{,}321.69}{\frac{(1+\frac{0.0325}{12})^{12\times 40} - 1}{\frac{0.0325}{12}}} = €439.71$$

Princip aditivnosti novčanih tokova

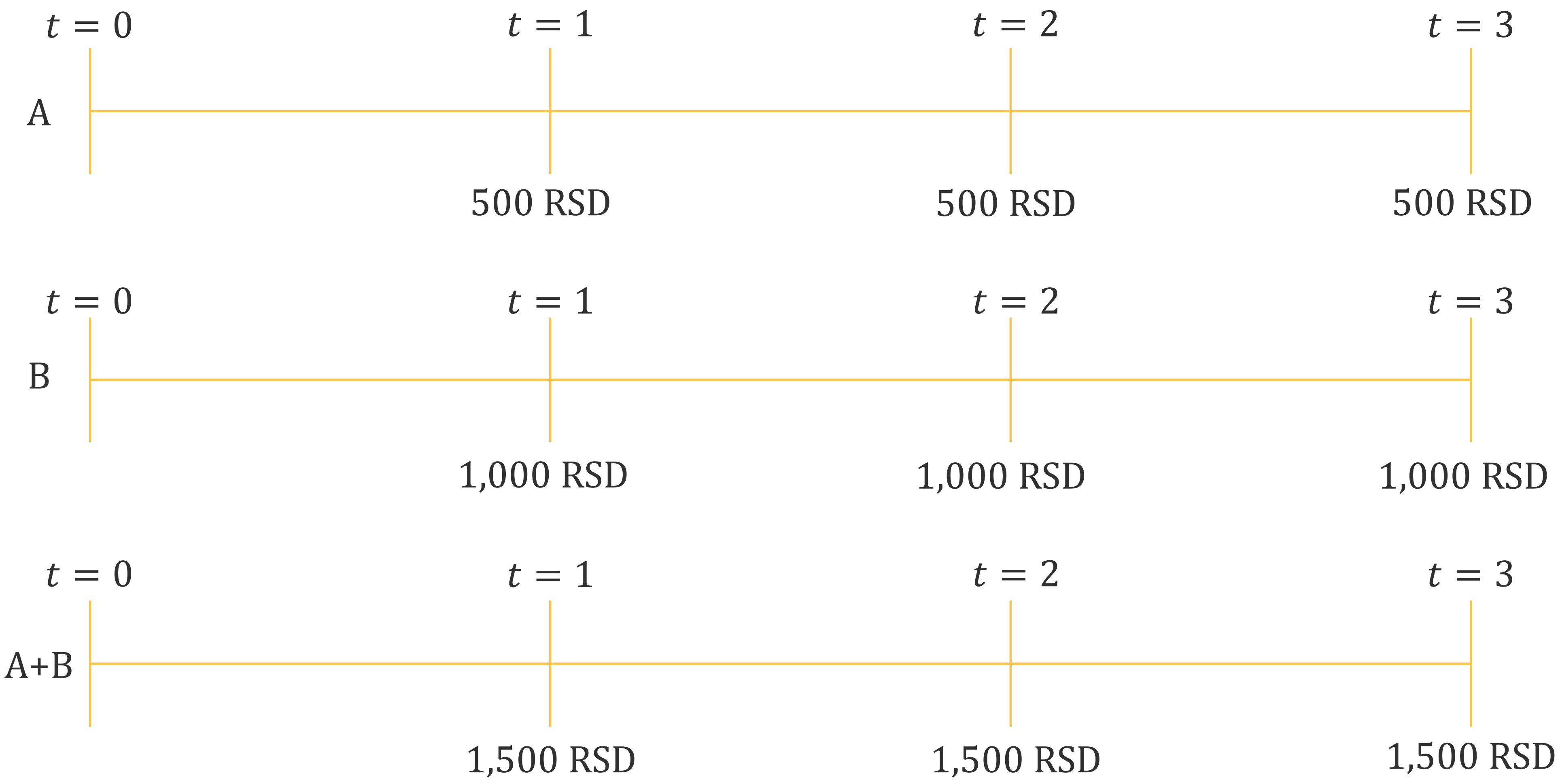
Kada i kako možemo da sabiramo novčane tokove?

Aditivnost novčanih tokova

- Osnovni postulat vremenske vrednosti novca glasi – novac u istom trenutku u vremenu je moguće sabirati
- Ukoliko oba novčana toka imaju istu kamatnu stopu, umesto da primenimo kamatnu stopu nad dva različita novčana toka, možemo to uraditi nad jednim novčanim tokom
- Ukoliko je kamatna stopa različita, možemo pronaći ponderisanu sredinu (*Weighted average*) kamatnih stopa u odnosu na visinu novčanih tokova

$$r_w = r_1\left(\frac{CF_1}{CF_1 + CF_2}\right) + r_2\left(\frac{CF_2}{CF_1 + CF_2}\right)$$

Aditivnost novčanih tokova



Aditivnost novčanih tokova

Primer 19.

Plan je da u naredne 4 godine ulažete po €2,000 na račun koji će vam donositi po 4% godišnje. Takođe, uložićete €500 u prvoj godini u projekat koji će trajati 4 godine, a za koji očekujete prinos od 6% godišnje, ali ćete svake naredne godine morati da ulažete dodatnih €500. Koliko ćete zaraditi po osnovu oba ulaganja na kraju 4. godine?

Rešenje

Godina	CF_1	CF_2	r		CF_{1+2}
0	€2,000	€500	4.4%	$€2{,}500 \times (1 + 0.044)^4$	€2,969.9
1	€2,000	€1,000	4.67%	$€3{,}000 \times (1 + 0.0467)^3$	€3,440.23
2	€2,000	€1,500	4.86%	$€3{,}500 \times (1 + 0.0486)^2$	€3,848.47
3	€2,000	€2,000	5%	$€4{,}000 \times (1 + 0.05)^1$	€4,200
					€14,458.6

Hvala na pažnji!

?