Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 11. jul 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: __________

Predispitne obaveze 1 – 20 poena

1. [2 poena] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće.

   Za svaka dva događaja A i B je $P(A \cup B)$.............$P(A) + P(B)$ (Na mesto označeno tačkicama upisati jedan od znakova $<, >, =, \leq, \geq$)

   Za .... događaje A i B je $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

   Za .... događaje A i B je $P(AB) = P(A)P(B)$

   Za .... događaje A, B i C je $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)$.

2. [1 poen] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće. Ispitati nezavisnost sigurnog događaja Ω i nemogućeg događaja $\emptyset$.

3. [2 poena] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće.
   Da li događaji A i B mogu da budu disjunktni ako je $P(A) = 0,6$ i $P(B) = 0.7$? Odgovor obrazložiti!

   Da li događaji A i B mogu da budu nezavisni ako je $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0.7$ i $P(A \cup B) = 0,9$? Odgovor obrazložiti!

4. [5 poena] Diskretna slučajna promenljiva X data je funkcijom raspodele $F_X(x) = \begin{cases} a, & x \leq 2 \\ 0,3, & 2 < x \leq 4 \\ 0,5, & 4 < x \leq 6 \\ 0,8, & 6 < x \leq 10 \\ b, & x > 10 \end{cases}$. Odrediti konstante a i b. Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive X i izračunati njeno matematičko očekivanje i disperziju.

5. [2 poena] Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(-1, 1)$ raspodelu. Izračunati verovatnoću $P(X < \frac{1}{2})$ i predstaviti je na grafiku funkcije gustine i funkcije raspodele slučajne promenljive X. Napisati standardizovanu (normalizovanu) slučajnu promenljivu za slučajnu promenljivu X.

6. [2 poena] Nezavisne slučajne promenljive X i Y imaju eksponencijalnu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu.

   Funkcija gustine $\varphi_{X,Y}(x, y)$ slučajne promenljive (X, Y) je

   $P(X < 2, Y = 1) =$...

   $E(-X + Y) =$...

   $D(-X + Y) =$...

7. [4 poena] Slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(25, \frac{1}{5})$ raspodelu. Proceniti verovatnoću $P(|X - E(X)| < 3\sqrt{D(X)})$ pomoću

   nejednakosti Čebiševa;

   Muavr-Laplasove teoreme.

8. [2 poena] Dvodimenzionalna diskretna slučajna promenljiva (X, Y) data je skupom vrednosti $\mathcal{R}_{X,Y} = \{(x_i, y_j) : i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m\}$ i verovatnoćama $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$.

   Marginalna verovatnoća $p(x_i) =$..

   Uslovna verovatnoća $p(y_j|x_i) =$..

   Slučajne promenljive X i Y su nezavisne

   Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, izračunati $\rho_{X,Y}$, gde je $\rho_{X,Y}$ koeficijent koelacije slučajnih promenljivih X i Y.

Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 11. jul 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Predispitne obaveze 2 – 10 poena

1. [1 poen] Definisati Poasonov proces.

2. [4 poena] Ako je X_t, $t > 0$, Poasonov proces sa parametrom λt, $\lambda > 0$ izračunati njegovo matematičko očekivanje, disperziju i korelacionu funkciju.

3. [3 poen] Lanac Markova X_n, $n \in \mathbf{N}$, zadat je skupom stanja $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ i matricom prelaza $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\not> 0$

Da li postoje finalne verovatnoće za dati lanac Markova? Odgovor obrazložiti! Ako postoje izračunati ih.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3/4)^2 & 0 & 1-(3/4)^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \not> 0$$

$$P^n = \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \begin{bmatrix} (\cancel{\tfrac{3}{4}})^n & 0 & 1-(\tfrac{3}{4})^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\tfrac{3}{4})^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

финалне вер. не постоје јер редови нису исти

Ako je na početku sistem bio u stanju s_1 onda je $p(0) =$ $\begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \\ \end{array}$ $[1 \quad 0 \quad 0]$ i

$P(X_0 = s_1, X_1 = s_3, X_2 = s_3) =$ $p_1(0) \cdot p_{13}(1) p_{33}(1) = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1$

$$P(X_0 = s_1, X_{50} = s_3, X_{500} = s_3) = p_1(0) \cdot p_{13}(50) \cdot p_{33}(450) = 1 \cdot \left(1 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^{50}\right) \cdot 1$$

$n = 50$

Odrediti, ako je to moguće vektor $p(0)$ tako da dati lanac Markova bude stacionaran.

$p(0) \cdot P = p(0)$, $p(0) = [x \quad y \quad z]$

$$[x \quad y \quad z] \cdot \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z]$$

$x + y + z = 1$

$\frac{3}{4}x = x$
$y = y$
$\frac{1}{4}x + z = z$
$x + y + z = 1$

$x = 0$
$y = y$
$z = z$
$y + z = 1$

не може бити стац.

4. [4 poena] Neka je $X_n = X + n$, $n \in \mathbf{N}$, slučajni proces, gde je X slučajna promenljiva sa binomnom $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$ raspodelom. Odrediti skup stanja sistem slučajnog procesa X_n i raspodelu prvog reda (zakon raspodele verovatnoća i funkciju raspodele) zaseka X_n.

$X_n = X + n$, $X : \mathcal{B}(2, 1/2)$ $n = 1, 2, 3.$

$\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2\}$

$S = \{0 + n, 1 + n, 2 + n : n \in \mathbb{N}\}$

$S = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}$

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ (\frac{1}{2})^2 & \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 \end{pmatrix}$$

$$X + n : \begin{pmatrix} 0+n & 1+n & 2+n \\ (\frac{1}{2})^2 & \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 \end{pmatrix}$$

$$F_{X+n}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq n \\ 1/4, & n < x \leq 1+n \\ 3/4, & 1+n < x \leq 2+n \\ 1, & x > 2+n \end{cases}$$

Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 11. jul 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 1 – 40 poena

1. [5 poena] U kutiji se nalazi 10 kuglica bele boje i 10 kuglica plave boje. Pera na slučajan način bira 10 puta po dve kuglice (odjednom) iz kutije **bez vraćanja** izvučenih kuglica u kutiju. Izračunati verovatnoću da će u svakom izvlačenju izvući kuglice različitih boja.

2. [5 poena] U kutiji se nalazi 10 kuglica bele boje i 10 kuglica plave boje. Pera na slučajan način bira jednu po jednu kuglicu iz date kutije, **sa vraćanjem** izvučene kuglice u kutiju, dok ne izvuče kuglicu plave boje, ali najviše 5 puta. Odrediti očekivani broj izvlačenja.

3. [10 poena] Neprekidna slučajna promenljiva X data je funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} 4ax, & x \in [0,1] \\ \dfrac{a}{\sqrt{x}}, & x \in (1,4) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$. Izračunati konstantu a. Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X i raspodelu slučajne promenljive $Y = -X + 3$.

4. [10 poena] U dve kutije se nalaze kuglice označene brojevima. U prvoj kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem 3, dve kuglice označene brojem 6 i dve kuglice označene brojem 9. U drugoj kutiji se nalaze tri kuglice označene brojem 6 i tri kuglice označene brojem 9. Iz svake kutije se na slučajan način bira po jedna kuglica. Slučajna promenljiva X predstavlja broj kojim je označena kuglica izvučena is prve kutije, a Y broj kojim je označena izvučena kuglica iz druge kutije. Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive (U, V), gde je $U = \max\{X, Y\}$ i $V = \min\{X, Y\}$. Da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive?

5. [10 poena] Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu i uslovna slučajna promenljiva $Y|X = x$, $x > 0$, ima uniformnu $\mathcal{U}(x, x + 1)$ raspodelu. Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = X - Y$.

Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 11. jul 2023.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 2 – 20 poena

1. [5 poena] Za slučajni proces $X_t = \sin(tX)$, $t > 0$, izračunati srednju vrednost, disperziju, korelacionu i kovarijansnu funkciju ako je X slučajna promenljiva čija je funkcija gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & x \in (1,2) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.

2. [8 poena] Marko svakog dana ide da igra fudbal, košarku ili tenis. Ujutro baca kockicu za "Ne ljuti se čoveče" i na osnovu ishoda bacanja donosi odluku na koji sport odlazi (bez obzira na kom sportu je bio prethodnog dana).

   Ako prilikom bacanja kockice padne manje od 3 tačkice sa podjednakom verovatnoćom odlazi na fudbali ili košarku, a ne odlazi na tenis. Ako prilikom bacanja kockice padnu bar 3 tačkice, odlazi da igra tenis.

   Stanje sistema je definisano sportom na koji Marko odlazi u toku dana.

   a) Napraviti matricu prelaza za jedan korak (za opisani lanac Markova).
   b) Odrediti početni vektor $p(0)$.
   d) Odrediti matrice prelaza za dva i tri koraka i verovatnoće prelaza $p_{TT}(2)$ i $p_{TT}(3)$, gde je sa T označeno stanje "Marko igra tenis".
   d) Da li postoje finalne verovatnoće za dati lanac Markova? Obrazložiti odgovor i ako postoje napisati sistem iz kojeg se one mogu odrediti (ne rešavati sistem).
   e) Da li je dati lanac Markova strogo stacionaran? Obrazložiti odgovor!

3. [7 poena] U pekari rade tri prodavca. U toku sat vremena u pekaru prosečno dođe 60 mušterija, dok za sat vremena u pekari može da bude usluženo 180 mušterija. Red čekanja nije ograničen. Ukoliko se radi o procesu usluživanja $M : M : k : r$

   a) odrediti parametre k, r, λ i μ i matricu Λ;
   b) ispitati egzistenciju finalnih verovatnoća za opisani proces usluživanja i ako postoje izračunati ih;
   c) ukoliko pekara radi non-stop, izračunati očekivani broj mušterija u pekari;
   d) ako prodavci rade po 8h, izračunati koliko vremena će u proseku sva tri prodavca biti bez posla.

NAPOMENA: $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$