Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet Tehničkih Nauka
Verovatnoća i slučajni procesi, letnji semestar akademske 2022/2023. godine

Slučajni procesi

Zadatak 1

Postavka: Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0,1)$ i neka je $X_t,\ t \in \mathbb{R}$ slučajni proces definisan sa $X_t = e^t U + t^2 V$. Naći sledeće karakteristike slučajnog procesa X_t:

(a) matematičko očekivanje,

(b) autokovarijansnu funkciju,

(c) disperziju.

Rešenje:
Pošto slučajne promenljive U i V imaju $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu, sledi da je $\mathsf{E}(U) = \mathsf{E}(V) = 0$ i $\mathsf{D}(U) = \mathsf{D}(V) = 1$, a iz $\mathsf{D}(U) = \mathsf{E}(U^2) - (\mathsf{E}(U))^2$ dobijamo da je $\mathsf{E}(U^2) = \mathsf{D}(U) + (\mathsf{E}(U))^2 = 1 + 0 = 1$ i analogno $\mathsf{E}(V^2) = 1$.

(a) $m_X(t) = \mathsf{E}(e^t U + t^2 V) \overset{[1]}{=} e^t \mathsf{E}(U) + t^2 \mathsf{E}(V) = e^t \cdot 0 + t^2 \cdot 0 = 0.$

(b) Autokovarijansnu funkciju nalazimo na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\mathsf{K}_X(t,s) &= \mathsf{E}\left(\left(X_t - m_X(t)\right)\left(X_s - m_X(s)\right)\right) = \mathsf{E}(X_t X_s) = \mathsf{E}\left(\left(e^t U + t^2 V\right)\left(e^s U + s^2 V\right)\right) \\
&= \mathsf{E}\left(e^{s+t} U^2 + \left(e^t s^2 + e^s t^2\right) UV + t^2 s^2 V^2\right) \overset{[1],[2]}{=} \\
&= e^{s+t} \mathsf{E}\left(U^2\right) + \left(e^t s^2 + e^s t^2\right) \mathsf{E}(U)\,\mathsf{E}(V) + t^2 s^2 \mathsf{E}\left(V^2\right) = \\
&= e^{s+t} \cdot 1 + 0 + (ts)^2 \cdot 1 = e^{s+t} + t^2 s^2
\end{aligned}$$

(c) $\mathsf{D}_X(t) = \mathsf{K}_X(t,t) = e^{t+t} + (tt)^2 = e^{2t} + t^4.$

[1] - Matematičko očekivanje je linearna transformacija.
[2] - Slučajne promenljive U i V nezavisne, te je $\mathsf{E}(UV) = \mathsf{E}(U)\,\mathsf{E}(V)$.

Zadatak 2

Postavka: Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive, U sa binomnom $\mathcal{B}\left(5,\frac{1}{5}\right)$ raspodelom, a V sa uniformnom $\mathcal{U}(1,3)$ raspodelom. Naći srednju vrednost, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa

$$X_t = (U+t)\ V^t,\ \ t\in[0,\infty)\,.$$

Rešenje:
Iz zadanih raspodela vidimo da je

$$\mathsf{E}(U) = 5\cdot\tfrac{1}{5} = 1,\quad \mathsf{D}(U) = 5\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{4}{5} = \tfrac{4}{5},\quad \mathsf{E}(U^2) = \mathsf{D}(U) + \mathsf{E}^2(U) = \tfrac{9}{5}.$$

Matematičko očekivanje procesa za sve $t\in[0,\infty)$ je

$$m_X(t) = \mathsf{E}\left((U+t)\,V^t\right) \overset{[1]}{=} \mathsf{E}(U+t)\,\mathsf{E}\left(V^t\right) = (\mathsf{E}(U)+t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} v^t\,\varphi_V(v)\,dv =$$

$$= (1+t)\int\limits_1^3 v^t\cdot\frac{1}{2}dv = \frac{1+t}{2}\frac{v^{t+1}}{t+1}\Big|_{v=1}^{v=3} = \frac{3^{t+1}-1}{2}$$

Autokorelaciona funkcija procesa: za sve $t,s\in[0,\infty)$ je

$$R_X(t,s) = \mathsf{E}\left((U+t)\,V^t\ (U+s)\,V^s\right) = \mathsf{E}\left(\left(U^2+(t+s)\,U+ts\right)V^{t+s}\right) \overset{[2]}{=}$$

$$= \mathsf{E}\left(U^2+(t+s)\,U+ts\right)\mathsf{E}\left(V^{t+s}\right) = \left(\mathsf{E}\left(U^2\right)+(t+s)\,\mathsf{E}(U)+ts\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty} v^{t+s}\varphi_V(v)\,dv =$$

$$= \left(\frac{9}{5}+(t+s)+ts\right)\int\limits_1^3 v^{t+s}\cdot\frac{1}{2}dv = \left(\frac{4+5ts}{10\,(t+s+1)}+\frac{1}{2}\right)\left(3^{t+s+1}-1\right)$$

Disperzija procesa: za sve $t\in[0,\infty)$ je $\mathsf{D}_X(t) = R_X(t,t) - m_X(t)^2 = \left(\dfrac{4+5t^2}{10\,(2t+1)}+\dfrac{1}{2}\right)\left(3^{2t+1}-1\right) - \left(\dfrac{3^{t+1}-1}{2}\right)^2.$

[1] - Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih U i V sledi nezavisnost slučajnih promenljivih $U+t$ i V^t za svako $t\in[0,\infty)$.
[2] - Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih U i V sledi nezavisnost slučajnih promenljivih $U^2+(t+s)\,U+ts$ i V^{t+s} za svako $t\in[0,\infty)$.

Zadatak 3

Postavka: Neprekidne i nezavisne slučajne promenljive X i Y su date svojim gustinama raspodele:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} x & ,\ x\in[0,1) \\ 2-x & ,\ x\in[1,2] \\ 0 & ,\ x\notin[0,2] \end{cases},\qquad \varphi_Y(y) = \begin{cases} y-3 & ,\ y\in[3,4) \\ 5-y & ,\ y\in[4,5] \\ 0 & ,\ y\notin[3,5] \end{cases},$$

i definisan je slučajni proces $U_t = atX + btY,\ t\in\mathbb{R}$, gde su a i b realni parametri.

(a) Odrediti srednju vrednost, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa U_t.

(b) Za koje vrednosti parametara a i b je proces stacionaran?

Rešenje:

$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \left(2x - x^2\right) dx = 1,$$

$$\mathsf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\varphi_X(x)\,dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx = \frac{7}{6},$$

$$\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}^2(X) = \frac{7}{6} - 1^2 = \frac{1}{6},$$

$$\mathsf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\,\varphi_Y(y)\,dy = \int_3^4 \left(y^2 - 3y\right) dy + \int_4^5 \left(5y - y^2\right) dy = 4,$$

$$\mathsf{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\,\varphi_Y(y)\,dy = \int_3^4 \left(y^3 - 3y^2\right) dy + \int_4^5 \left(5y^2 - y^3\right) dy = \frac{97}{6},$$

$$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{E}(Y^2) - \mathsf{E}^2(Y) = \frac{97}{6} - 4^2 = \frac{1}{6}.$$

(a) Srednja vrednost procesa:

$m_U(t) = \mathsf{E}(atX + btY) = at\mathsf{E}(X) + bt\mathsf{E}(Y) = at + 4bt = (a + 4b)\,t.$

Autokorelaciona funkcija:

$$\begin{aligned} \mathsf{R}_U(t,s) &= \mathsf{E}(U_t U_s) = \mathsf{E}\left((atX + btY)(asX + bsY)\right) = \mathsf{E}\left(a^2tsX^2 + b^2tsY^2 + 2abtsXY\right) \overset{[1]}{=} \\ &= a^2ts\mathsf{E}\left(X^2\right) + b^2ts\mathsf{E}\left(Y^2\right) + 2abts\mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(Y) = \\ &= \frac{7}{6}a^2ts + \frac{97}{6}b^2ts + 8abts = \frac{1}{6}\left(7a^2 + 48ab + 97b^2\right) ts \end{aligned}$$

Disperzija procesa:

$\mathsf{D}_U(t) = \mathsf{D}(atX + btY) = \mathsf{K}_U(t,t) = \mathsf{R}_U(t,t) - m_U^2(t) = \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2\right) t^2.$

[1]- Slučajne promenljive X i Y su nezavisne, te je $E(XY) = E(X)E(Y)$.

(b) Da bi slučajni proces U_t bio stacionaran, mora biti $m_U(t) \equiv const$ i $\mathsf{R}_U(t,s)$ mora da bude funkcija od $(t-s)$.

S jedne strane $m_U(t) = (a + 4b)\,t = const$ samo ako je $a = -4b$, i tada je
$U_t = bt(-4X + Y)$ -u tom slučaju je $m_U(t) \equiv 0,\ t \in R$;
S druge strane, za $a = -4b$ je $\mathsf{R}_U(t,s) = \frac{17}{6}b^2ts$ funkcija od $(t-s)$ samo za $b = 0$ -tada je $\mathsf{R}_U(t,s) = 0 \cdot (t-s)$.
Sledi da mora biti $a = b = 0$. Ali tada je $U_t \equiv 0$ i u tom slučaju, trivijalno, proces U_t jeste stacionaran.

Zadatak 4

Postavka: (**Slučajne harmonijske oscilacije**) Harmonijski oscilator generiše signal dat funkcijom $X_t = A\cos(wt + B)$, $t \in [0, \infty)$ gde je w neslučajna ciklična frekvencija, A slučajna amplituda sa gustinom $\varphi_A(a), a > 0$ a B slučajna oscilacija sa uniformnom $\mathcal{U}(-\pi, \pi)$ raspodelom. Amplituda i oscilacija su nezavisne slučajne promenljive.
Ispitati slabu stacionarnost slučajnog procesa X_t.

REŠENJE:
Treba ispitati da li važi da je $m_X(t) = E(X_t) = const, \forall t$ i da li je $R_X(t,s) = f(t-s)$.

Ispitujemo prvo da li je srednja vrednost konstantna.
$m_X(t) = E(A\cos(wt+B)) \overset{[1]}{=} E(A)E(\cos(wt+B)) \overset{[2]}{=} E(A)\cdot 0 = 0 \to m_X(t) = 0, \forall t$

[1]− Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih A i B sledi nezavisnost slučajnih promenljivih A i $\cos(wt+B)$.

[2] − $E(\cos(wt+B)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(wt+x)\varphi_B(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(wt+x)\frac{1}{2\pi}\,dx = 0.$

Sada ispitujemo da li je autokorelaciona funkcija funkcija od $t-s$.

$$\begin{aligned} R_X(t,s) &= E(X_tX_s) = E(A\cos(wt+B)A\cos(ws+B)) \overset{[3]}{=} \\ &= E(A^2)E(\cos(wt+B)\cos(ws+B)) \overset{[4]}{=} \\ &= E(A^2)E\Big(\frac{1}{2}[\cos(wt+B-ws-B)+\cos(wt+B+ws+B)]\Big) = \\ &= \frac{E(A^2)}{2}(E(\cos(w(t-s)))+E(\cos(wt+ws+2B))) = \\ &= \frac{E(A^2)}{2}\Big(\cos(w(t-s))+0\Big) = f(t-s) \end{aligned}$$

Pa zaključujemo da je X_t slabo stacionaran.

[3] - Sledi iz nezavisnosti slučajnih promenljivih A i B.
[4] - Koristimo $\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$.

Zadatak 5

POSTAVKA: Slučajne promenljive X i Y su nezavisne, pri čemu je gustina slučajne promenljive X
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} - x^2 & , \ x \in [0,1] \\ 0 & , \ x \notin [0,1] \end{cases},$$
a slučajna promenljiva Y ima uniformnu $\mathcal{U}(0,\pi)$ raspodelu. Odrediti matematičko očekivanje, autokorelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa $U_t = X\cos(t-Y)$, $t \in \mathbb{R}$.
REŠENJE:

- Matematičko očekivanje:

$$m_U(t) = \mathsf{E}(X\cos(t-Y)) \overset{[1]}{=} \mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}(\cos(t-Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t-y)\ \varphi_Y(y)\,dy =$$
$$= \int_0^1 x\left(\frac{4}{3}-x^2\right)dx \cdot \int_0^{\pi} \cos(t-y)\ \frac{1}{\pi}dy = \left(\frac{4}{3}\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^3dx\right)\cdot\frac{1}{\pi}\int_t^{t-\pi}(-\cos z)\,dz =$$
$$= \frac{5}{6\pi}\sin t$$

- Autokorelaciona funkcija:

$$\mathsf{R}_U(t,s) = \mathsf{E}(U_tU_s) = \mathsf{E}\left(X^2\cos(t-Y)\cos(s-Y)\right) \stackrel{[1]}{=} \mathsf{E}\left(X^2\right)\mathsf{E}\left(\cos(t-Y)\cos(s-Y)\right) =$$
$$= \int_0^1 x^2\left(\frac{4}{3}-x^2\right)dx \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t-y)\cos(s-y)\,dy = \frac{11}{90}\cos(s-t)$$

- Disperzija:
$$\mathsf{D}_U(t) = \mathsf{K}_U(t,t) = \mathsf{R}_U(t,t) - m^2(t) = \frac{11}{90}\cos 0 - \frac{25}{36\pi^2}\sin^2 t = \frac{11}{90} - \frac{25}{36\pi^2}\sin^2 t.$$

[1] - Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih X i Y sledi nezavisnost slučajnih promenljivih X i $\cos(t-Y)$.

Zadatak 6

Postavka: Neka je $U:\mathcal{E}(1)$ slučajna promenljiva i neka je $X_t, t\in\mathbb{R}$ slučajni proces definisan sa $X_t = e^tU$. Naći raspodele prvog i drugog reda slučajnog procesa X_t.

Rešenje:
$$U:\mathcal{E}(1) \to F_U(u) = \begin{cases} 1-e^{-u} & , \quad u>0 \\ 0 & , \quad u\leq 0. \end{cases}$$

Raspodele prvog reda nalazimo na sledeći način:

$$F_{X_t}(x) = P(X_t<x) = P(e^tU<x) = P(U<xe^{-t}) = F_U(xe^{-t}) =$$
$$= \begin{cases} 1-e^{-xe^{-t}} & , \quad xe^{-t}>0 \\ 0 & , \quad xe^{-t}\leq 0. \end{cases} = \begin{cases} 1-e^{-xe^{-t}} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x\leq 0. \end{cases}$$

Raspodele drugog reda nalazimo na sledeći način:

$$F_{X_t,X_s}(x,y) = P(X_t<x, X_s<y) = P(e^tU<x, e^sU<y) =$$
$$= P(U<xe^{-t}, U<ye^{-s}) = P\Big(U<min\{xe^{-t}, ye^{-s}\}\Big) =$$
$$= F_U\Big(min\{xe^{-t}, ye^{-s}\}\Big) = \begin{cases} 1-e^{-min\{xe^{-t},ye^{-s}\}} & , \quad min\{xe^{-t}, ye^{-s}\}>0 \\ 0 & , \quad min\{xe^{-t}, ye^{-s}\}\leq 0. \end{cases}$$

Ako dodatno primetimo da je $min\{xe^{-t}, ye^{-s}\}>0 \Leftrightarrow xe^{-t}>0 \wedge ye^{-s}>0 \Leftrightarrow x>0\wedge y>0$,

konačno dobijamo:
$$F_{X_t,X_s}(x,y) = \begin{cases} 1-e^{-min\{xe^{-t},ye^{-s}\}} & , \quad x>0\wedge y>0 \\ 0 & , \quad \text{inače}. \end{cases}$$

Zadatak 7

Postavka: Dat je slučajni proces $X_n = X+nY, n\in\mathbb{N}$, gde su X i Y nezavisne slučajne promenljive date raspodelama:

$$X: \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(a) Napisati skup stanja slučajnog procesa X_n.

(b) Naći raspodelu prvog reda za zasek X_2.

(c) Naći raspodelu drugog reda za par zaseka X_0 i X_2.

(d) Naći matematičko očekivanje $m_X(n)$ i korelacionu funkciju $R_X(n,k)$ procesa X_n.

Rešenje:

(a) Skup vrednosti slučajnog procesa X_n je $S = \{-2, -1, \cdots\}$.

(b) Kako je $X_2 = X + 2Y$, raspodelu prvog reda za X_2 dobijamo na sledeći način:

$$F_{X_2}(s) = P(X_2 < s) = P(X + 2Y < s) = F_{X+2Y}(s) = \begin{cases} 0, & s \le -2 \\ \frac{3}{8}, & -2 < s \le 0 \\ \frac{7}{8}, & 0 < s \le 2 \\ 1, & s > 2 \end{cases},$$

jer slučajna promenljiva $X_2 = X + 2Y$ ima zakon raspodele $X + 2Y : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Napomena: Kako nalazimo odgovarajuće verovatnoće iz zakona raspodele za slučajnu promenljivu $X + 2Y$ možemo videti na sledećem primeru:
$P(X + 2Y = -2) = P(X = -2, Y = 0) = P(X = -2)P(Y = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

(c) Funkcija raspodele slučajne promenljive X data je sa $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ \frac{1}{2}, & -2 < x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

a funkcija raspodele slučajne promenljive Y je data sa $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{3}{4}, & 0 < y \le 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$

Kako je $X_0 = X$ i $X_2 = X + 2Y$, raspodelu drugog reda za X_0 i X_2 nalazimo na sledeći način:

$$\begin{aligned} F_{X_0,X_2}(s,t) &= P(X_0 < s, X_2 < t) = P(X < s, X + 2Y < t) = \\ &= P(X < s)P(X + 2Y < t | X < s) = F_X(s)P(X + 2Y < t | X < s) = (*) \end{aligned}$$

Na osnovu funkcije raspodele slučajne promenljive X, $F_X(x)$, zaključujemo da za početak treba da razlikujemo tri slučaja: $s \le -2$, $-2 < s \le 0$ i $s > 0$.

(i) Za $s \le -2$ $F_X(s) = 0$ pa dobijamo $(*) = 0 \cdot P(X + 2Y < t | X < s) = 0, \forall t$

(ii) Za $-2 < s \le 0$ $F_X(s) = \frac{1}{2}$ pa dobijamo

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2} \cdot P(X + 2Y < t | X < s) = \frac{1}{2} \cdot P(X + 2Y < t | X = -2) = \frac{1}{2} \cdot P(-2 + 2Y < t) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot P(2Y < t + 2) = \frac{1}{2} \cdot P\Big(Y < \frac{t+2}{2}\Big) = \frac{1}{2} \cdot F_Y\Big(\frac{t+2}{2}\Big) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} 0, & \frac{t+2}{2} \le 0 \\ \frac{3}{4}, & 0 < \frac{t+2}{2} \le 1 \\ 1, & \frac{t+2}{2} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \le -2 \\ \frac{3}{8}, & -2 < t \le 0 \\ \frac{1}{2}, & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(iii) Za $s > 0$ $F_X(s) = 1$ pa dobijamo

$$(*) = 1 \cdot P(X + 2Y < t | X < s) = P(X + 2Y < t | X < s) = \frac{P(X + 2Y < t, X < s)}{P(X < s)} \overset{[1]}{=}$$
$$= P(X + 2Y < t, X < s) = P(X + 2Y < t, X \in \{-2, 0\}) \overset{[2]}{=}$$
$$= P(X = -2) P(X + 2Y < t | X = -2) + P(X = 0) P(X + 2Y < t | X = 0) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot P(-2 + 2Y < t) + \frac{1}{2} \cdot P(0 + 2Y < t) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot P\Big(Y < \frac{t+2}{2}\Big) + \frac{1}{2} \cdot P\Big(Y < \frac{t}{2}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot F_Y\Big(\frac{t+2}{2}\Big) + \frac{1}{2} \cdot F_Y\Big(\frac{t}{2}\Big) = (**)$$

Kako je

$$F_Y\left(\tfrac{t+2}{2}\right) = \begin{cases} 0, & t \leq -2 \\ \frac{3}{4}, & -2 < t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$F_Y\left(\tfrac{t}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{t}{2} \leq 0 \\ \frac{3}{4}, & 0 < \frac{t}{2} \leq 1 \\ 1, & \frac{t}{2} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{3}{4}, & 0 < t \leq 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

konačno dobijamo

$$(**) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0, & s > 0 \wedge t \in (-\infty, -2] \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0, & s > 0 \wedge t \in (-2, 0] \\ \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}, & s > 0 \wedge t \in (0, 2] \\ \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1, & s > 0 \wedge t \in (2, \infty) \end{cases} = \begin{cases} 0, & s > 0 \wedge t \in (-\infty, -2] \\ \frac{3}{8}, & s > 0 \wedge t \in (-2, 0] \\ \frac{7}{8}, & s > 0 \wedge t \in (0, 2] \\ 1, & s > 0 \wedge t \in (2, \infty) \end{cases}$$

[1]- Za $s > 0$ $P(X < s) = F_X(s) = 1$

[2]- Primenom formule totalne verovatnoće.

(d) Nađimo najpre $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$ i $E(Y^2)$.

$E(X) = -2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = -1$
$E(Y) = 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
$E(X^2) = (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} = 2$
$E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Sada je:

$$m_X(n) = E(X_n) = E(X + nY) = E(X) + nE(Y) = -1 + n \cdot \frac{1}{4} = \frac{n-4}{4}$$

$$R_X(n,k) = E(X_n X_k) = E((X + nY)(X + kY)) = E(X^2 + (n+k)XY + nkY^2) =$$
$$= E(X^2) + (n+k)E(X)E(Y) + nkE(Y^2) = 2 - (n+k)\frac{1}{4} + nk\frac{1}{4}$$

Lanci Markova.

Zadatak 1

POSTAVKA: Lanac Markova X_n sa stanjima s_1, s_2 ima matricu prelaza $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Da li lanac Markova X_n ima finalne verovatnoće, i ako ima naći ih?

(b) Ako je početni vektor $\mathbf{p}(0) = [\frac{1}{3} \;\; \frac{2}{3}]$, izračunati $\mathbf{p}(2), p_2(2), p_{1,2}(3)$.

REŠENJE:

(a) Posmatramo stepene matrice $\mathbf{P}$. Kako je:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

možemo zaključiti da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $\mathbf{P}(n_0) = \mathbf{P}^{n_0} > 0$ $(n_0 = 2)$, te na osnovu teoreme 6.8a iz udžbenika lanac Markova X_n ima finalne verovatnoće.

Pošto finalne verovatnoće postoje, možemo ih izračunati pomoću sistema jednačina:
$\begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* \end{bmatrix} \quad \wedge \quad p_1^* + p_2^* = 1$, gde je $\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* \end{bmatrix}$, vektor finalnih verovatnoća.

Kada raspišemo sistem jednačina, dobijamo:

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}p_1^* & + & p_2^* & = & p_1^* \\ \frac{1}{2}p_1^* & & & = & p_2^* \\ p_1^* & + & p_2^* & = & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}p_1^* & - & p_2^* & = & 0 \\ & & p_2^* & = & \frac{1}{3} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} p_1^* = \frac{2}{3} \\ p_2^* = \frac{1}{3} \end{array}.$$

Dakle, vektor finalnih verovatnoća je:

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right] \end{array}.$$

(b) Početni vektor je zadat sa: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right] \end{array}$.

Raspodelu nakon dva koraka dobijamo na sledeći način:

$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{array} \right] \end{array}$,

a onda je $p_2(2) = \frac{5}{12}$.

Kako bismo izračunali verovatnoću da će sistem za tri koraka preći iz stanja s_1 u stanje s_2, $p_{1,2}(3)$, potrebna nam je matrica prelaza za tri koraka, odnosno $\mathbf{P}(3) = \mathbf{P}^3$.

$$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \left[\begin{array}{cc} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right] \end{array}.$$

Vidimo da je $p_{1,2}(3) = \frac{3}{8}$.

Zadatak 2

Postavka: Ispitati da li postoje finalne verovatnoće lanaca Markova čije su matrice prelaza:

(a) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, (c) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

(a) Posmatramo stepene matrice $\mathbf{P}$.

$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, $\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}$.

Možemo uočiti da je $\mathbf{P}^4 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^2 = I$, $\mathbf{P}^5 = \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{P}^3 = \mathbf{P}$, odnosno $\mathbf{P}^{2k+1} = \mathbf{P}$, i $\mathbf{P}^{2k} = I, \ \ k = 0, 1, 2, ...$

Ukoliko finalne verovatnoće postoje važi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{P}^*$, gde je $\mathbf{P}^*$ matrica čije su sve vrste jednake $\mathbf{p}^*$. Kako u našem zadatku $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ ne postoji, ne postoje ni finalne verovatnoće (niz $\{\mathbf{P}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima dva podniza koji, kada n teži beskonačnosti, konvergiraju ka različitim matricama).

(b) Posmatramo stepene matrice $\mathbf{P}$.

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{P}.$$

Kako je $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, važi $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Očigledno, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ postoji i jednak je matrici $\mathbf{P}$. Međtim, pošto vrste matrice $\mathbf{P}$ nisu jednake, ne može biti $\mathbf{P} = \mathbf{P}^*$. Prema tome, finalne verovatnoće ne postoje.

(c) Posmatramo stepene matrice $\mathbf{P}$.

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-(\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^2 & 0 \\ 1-(\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-(\frac{1}{2})^3 & (\frac{1}{2})^3 & 0 \\ 1-(\frac{1}{2})^3 & (\frac{1}{2})^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, možemo zaključiti da je:

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-(\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 1-(\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{2})^n & 0 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Niz matrica $\{\mathbf{P}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kada n teži beskonačnosti, konvergira ka matrici $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ čije vrste su iste, pa finalne verovatnoće postoje, i pri tome je $\mathbf{p}^* = [1, 0, 0]$.

Zadatak 3

Postavka: Luka na posao ide vozom, autobusom ili kolima. Ako na posao jednog dana ide kolima, onda sledećeg dana jednakoverovatno ide vozom, autobusom ili kolima. Vozom ne ide dva dana uzastopno, a ako ide vozom onda sutradan ide 2 puta verovatnije kolima nego autobusom. Ako jednog dana ide autobusom, onda sutra jednakoverovatno ide vozom ili kolima (a ne ide autobusom). Posmatramo sistem čija su stanja određna prevoznim sredstvom koje Luka koristi u toku dana za odlazak na posao.

(a) Sastaviti matricu prelaza za jedan dan.

(b) Ako je Luka početnog dana na posao išao kolima, naći verovatnoću da će kroz dva dana ići kolima.

(c) Ispitati da li postoje finalne verovatnoće, i ukoliko postoje naći ih.

(d) Izračunati $P(X_0 = k, X_2 = v, X_4 = a, X_5 = k, X_7 = v)$.

(e) Izračunati $P(X_1 = v, X_2 = v, X_4 = k | X_0 = k)$.

(f) Izračunati $P(X_4 = v, X_6 = k, X_7 = k, X_8 = v, X_{10} = k | X_1 = v, X_2 = k)$.

(g) Izračunati $P(X_2 = k, X_4 = k, X_6 = k, X_8 = k, X_{10} = k, \dots X_{2m} = k, \dots), \quad m > 0.$

Rešenje:

(a) Skup stanja sistema:
$v =$ "*ide vozom*", $a =$ "*ide autobusom*", $k =$ "*ide kolima*".

Matrica prelaza za jedan dan:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ v \\ a \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v & a & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Matrica prelaza za dva dana:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \\ v \\ a \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v & a & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{7}{18} & \frac{2}{9} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}.$$

(b) Ako pretpostavimo da je Luka početnog dana išao kolima, vektor početne raspodele je:

$$\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v & a & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Onda je raspodela verovatnoća nakon dva dana: $\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v & a & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$,
što znači da je verovatnoća da će i nakon dva dana Luka na posao ići kolima jednaka $\frac{1}{2}$.

(c) Kako su svi elementi matrice $\mathbf{P}^2$ pozitivni, postoje finalne verovatnoće, i nalazimo ih rešavajući sistem jednačina:

$$\begin{bmatrix} p_v^* & p_a^* & p_k^* \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_v^* & p_a^* & p_k^* \end{bmatrix} \quad \wedge \quad p_v^* + p_a^* + p_k^* = 1.$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{1}{2}p_a^* & + & \frac{1}{3}p_k^* & = & p_v^* \\ \frac{1}{3}p_v^* & & & + & \frac{1}{3}p_k^* & = & p_a^* \\ \frac{2}{3}p_v^* & + & \frac{1}{2}p_a^* & + & \frac{1}{3}p_k^* & = & p_k^* \\ p_v^* & + & p_a^* & + & p_k^* & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} -p_v^* & & \frac{1}{2}p_a^* & + & \frac{1}{3}p_k^* & = & 0 \\ \frac{1}{3}p_v^* & - & p_a^* & + & \frac{1}{3}p_k^* & = & 0 \\ \frac{2}{3}p_v^* & + & \frac{1}{2}p_a^* & - & \frac{2}{3}p_k^* & = & 0 \\ p_v^* & + & p_a^* & + & p_k^* & = & 1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccc} p_v^* & - & \frac{1}{2}p_a^* & - & \frac{1}{3}p_k^* & = & 0 \\ & & p_a^* & - & \frac{8}{15}p_k^* & = & 0 \\ & & & & p_k^* & = & \frac{15}{32} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} p_k^* = \frac{15}{32} \\ p_a^* = \frac{1}{4} \\ p_v^* = \frac{9}{32} \end{array}.$$

Dakle, vektor finalnih verovatnoća je:

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v & a & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{9}{32} & \frac{1}{4} & \frac{15}{32} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Dobijene finalne verovatnoće tumačimo na sledeći način: ako posmatramo dovoljno dug vremenski period, možemo reći da Luka najčešće na posao ide kolima (sa verovatnoćom $\frac{15}{32}$), a sa verovatnoćama $\frac{9}{32}$ i $\frac{1}{4}$ redom, ide vozom odnosno autobusom.

(d) Prilikom izračunavanja traženih verovatnoća u ovom i narednim primerima koritimo uslovnu verovatnoću i osobinu Markova:

$P(X_0 = k, X_2 = v, X_4 = a, X_5 = k, X_7 = v) =$

$= P(X_0 = k)P(X_2 = v|X_0 = k)P(X_4 = a|X_0 = k, X_2 = v)$

$P(X_5 = k|X_0 = k, X_2 = v, X_4 = a)P(X_7 = v|X_0 = k, X_2 = v, X_4 = a, X_5 = k) =$

$= P(X_0 = k)P(X_2 = v|X_0 = k)P(X_4 = a|X_2 = v)P(X_5 = k|X_4 = a)P(X_7 = v|X_5 = k) =$

$= p_k(0)p_{kv}(2)p_{va}(2)p_{ak}(1)p_{kv}(2) = 1 \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{18}.$

(e) Računamo:

$$P(X_1 = v, X_2 = v, X_4 = k|X_0 = k) = \frac{P(X_0 = k, X_1 = v, X_2 = v, X_4 = k)}{P(X_0 = k)} =$$

$$= \frac{P(X_0 = k)P(X_1 = v|X_0 = k)P(X_2 = v|X_1 = v)P(X_4 = k|X_2 = v)}{P(X_0 = k)} = \frac{p_k(0)p_{kv}(1)p_{vv}(1)p_{vk}(2)}{p_k(0)} =$$

$$= p_{kv}(1)p_{vv}(1)p_{vk}(2) = \tfrac{1}{3} \cdot 0 \cdot \tfrac{7}{18}.$$

(f) Računamo:

$$P(X_4 = v, X_6 = k, X_7 = k, X_8 = v, X_{10} = k|X_1 = v, X_2 = k) =$$

$$= P(X_4 = v, X_6 = k, X_7 = k, X_8 = v, X_{10} = k|X_2 = k) =$$

$$= \frac{P(X_2 = k, X_4 = v, X_6 = k, X_7 = k, X_8 = v, X_{10} = k)}{P(X_2 = k)} =$$

$$= \frac{P(X_2 = k)P(X_4 = v|X_2 = k)P(X_6 = k|X_4 = v)P(X_7 = k|X_6 = k)}{P(X_2 = k)}$$

$$\underline{P(X_8 = v|X_7 = k)P(X_{10} = k|X_8 = v)} =$$

$$= p_{kv}(2)p_{vk}(2)p_{kk}(1)p_{kv}(1)p_{vk}(2) = \frac{5}{18} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{18}.$$

(g) Za $m > 0$ je $P(X_2 = k, X_4 = k, X_6 = k, X_8 = k, X_{10} = k, \ldots X_{2k} = k, \ldots)$

$= P(X_2 = k)P(X_4 = k|X_2 = k)P(X_6 = k|X_4 = k)P(X_8 = k|X_6 = k)\ldots$

$= p_k(2)p_{kk}(2)p_{kk}(2)p_{kk}(2)\ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ldots = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0.$

Zadatak 4

Postavka: Počevši od ponedeljka elektrodistribucija svaki dan isključuje po jednu od 3 grupe potrošača po sledećem pravilu: ako određena grupa tokom jednog dana nema struje, tada se sutradan sa podjednakim verovatnoćama isključuje jedna od preostale dve grupe.

(a) Naći matricu prelaza lanca Markova X_n koji predstavlja redni broj isključene grupe u toku n - tog dana od početka primene restrikcija.

(b) Ako neka grupa u sredu nema struje, koliko iznosi verovatnoća da će u nedelju imati struje?

(c) Ispitati da li postoje finalne verovatnoće procesa X_n, i ukoliko postoje naći ih.

Rešenje:

Obeležimo grupe potrošača sa 1, 2 i 3.

(a) Na osnovu opisa nalazimo matricu prelaza $\mathbf{P}$ za jedan dan i izračunavamo matricu prelaza $\mathbf{P}(4) = \mathbf{P}^4 = (\mathbf{P}^2)^2$ za 4 dana (koristićemo je pod (b)):

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{P}(4) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \end{array}.$$

(b) Posmatrajmo npr. grupu 1, a ista je situacija (zbog simetričnih prelaznih verovatnoća) i sa grupama 2 i 3. Sreda je treći dan ($n = 3$), a nedelja sedmi dan ($n = 7$) sprovođenja restrikcija. Ako grupa 1 u sredu nema struje, to znači da raspodela verovatnoća lanca X_n za sredu glasi: $\mathbf{p}(3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$.

Raspodela verovatnoća lanca X_n za nedelju tada glasi:

$$\mathbf{p}(7) = \mathbf{p}(3) \cdot \mathbf{P}(4) = \mathbf{p}(3) \cdot \mathbf{P}^4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Dakle, grupa 1 će u nedelju imati struju sa verovatnoćom

$$1 - p_1(7) = 1 - \tfrac{3}{8} = \tfrac{5}{8}.$$

(c) Kako su svi elementi matrice $\mathbf{P}^4$ pozitivni, finalne verovatnoće postoje.

U nastavku, zbog preglednosti, finalne verovatnoće p_1^*, p_2^*, p_3^* označavamo redom sa x, y, z.

Vektor finalnih verovatnoća $\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \end{array}$ nalazimo rešavanjem sistema jednačina $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}^* \ \wedge \ x + y + z = 1$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & x \\ \frac{1}{2}x & & & + & \frac{1}{2}z & = & y \\ \frac{1}{2}x & + & \frac{1}{2}y & & & = & z \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ \hline \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

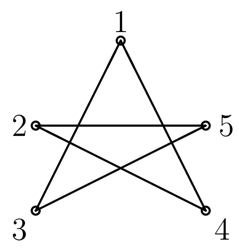
$$\begin{array}{ccccccc} x & - & \frac{1}{2}y & - & \frac{1}{2}z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & & & z & = & \frac{1}{3} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{3} \\ y & = & \frac{1}{3} \\ z & = & \frac{1}{3} \end{array}.$$

Dakle, vektor finalnih verovatnoća glasi: $\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}$.

Na osnovu dobijenih finalnih verovatnoća možemo zaključiti: ako isključenja struje traju "dovoljno dugo", sve grupe potrošača će podjednako biti bez struje.

Zadatak 5

Postavka:
Čestica se kreće po čvorovima grafa sa slike pri čemu u svakom koraku iz nekog čvora sa jednakim verovatnoćama prelazi u bilo koji povezan čvor. Naći matricu prelaza kretanja čestice po čvorovima grafa (za jedan korak) i odrediti da li je verovatnije da se nakon drugog koraka čestica našla u čvoru 5 ako je na početku bila u čvoru 1 ili ako je na početku bila u čvoru 2.



Rešenje:

Matrice prelaza za jedan i dva koraka:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Posmatramo početne raspodele verovatnoća:

$$\mathbf{u}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0] \end{array} \quad \text{(čestica je na početku bila u čvoru 1),}$$

$$\mathbf{v}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0] \end{array} \quad \text{(čestica je na početku bila u čvoru 2).}$$

Za raspodele verovatnoća položaja čestice nakon dva koraka u ova dva slučaja dobijamo:

$$\mathbf{u}(2) = \mathbf{u}(0) \cdot \mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ [\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{4} \;\; 0 \;\; 0 \;\; \frac{1}{4}] \end{array},$$

$$\mathbf{v}(2) = \mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ [\frac{1}{4} \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{4} \;\; 0 \;\; 0] \end{array}.$$

Vidimo da je $u_5(2) = \frac{1}{4} > 0 = v_5(2)$ tj. verovatnije je da se nakon drugog koraka našla u čvoru 5 ako je na početku bila u čvoru 1 (ako je na početku bila u čvoru 2, tada se nakon 2 koraka sigurno ne nalazi u čvoru 5).

Zadatak 6

Postavka: Trgovački putnik prodaje robu u Somboru, Subotici i Novom Sadu. Nikad ne prodaje dva dana uzastopce u istom gradu. Ako jednog dana prodaje u Somboru, sutra sigurno prodaje u Subotici. Posle Subotice ili Novog Sada dva puta verovatnije prelazi u Sombor nego u onaj drugi grad. U ponedeljak trgovački putnik radi u Novom Sadu.

(a) Ispitati postojanje finalnih verovatnoća.

(b) Ako posmatramo "dovoljno dug" vremenski period, koliko će prosečno vremena putnik provesti u pomenutim gradovima?

(c) Izračunati verovatnoću da trgovački putnik u sredu neće raditi u Novom Sadu?

(d) Ako je u sredu i petak trgovački putnik radio u Novom Sadu, kolika je verovatnoća da će u subotu i ponedeljak raditi u Somboru (subota i nedelja su radni dani).

REŠENJE:

(a) Označimo redom sa S, B i N Sombor, Suboticu i Novi Sad. Matrica $\mathbf{P}$ prelaza tj. kretanja trgovačkog putnika glasi:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ S \\ B \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Onda je:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \\ S \\ B \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{P}^4 = (\mathbf{P}^2)^2 = \begin{array}{c} \\ S \\ B \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{14}{27} & \frac{2}{9} & \frac{7}{27} \\ \frac{26}{81} & \frac{49}{81} & \frac{2}{27} \\ \frac{26}{81} & \frac{16}{27} & \frac{7}{81} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Svi elementi matrice $\mathbf{P}^4$ su pozitivni, pa finalne verovatnoće postoje.

(b) Tražimo finalne verovatnoće $\mathbf{p}^* = [x \quad y \quad z]$ koje zadovoljavaju jednačinu $\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}^*$ uz uslov $x + y + z = 1$, što je ekvivalentno sa

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{2}{3}y & + & \frac{2}{3}z & = & x \\ x & & & + & \frac{1}{3}z & = & y \\ & & \frac{1}{3}y & & & = & z \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ \hline x & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{2}{3}z & = & 0 \\ & & y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & z & = & \frac{3}{20} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} z = \frac{3}{20} \\ y = \frac{9}{20} \\ x = \frac{8}{20} \end{array}.$$

Dakle:

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{9}{20} & \frac{3}{20} \end{bmatrix} \end{array},$$

što znači da prosečno $\frac{2}{5}$ vremena trgovački putnik provede u Somboru, prosečno $\frac{9}{20}$ vremena provede u Subotici i prosečno $\frac{3}{20}$ vremena provede u Novom Sadu.

(c) Početna raspodela, tj. raspodela za ponedeljak, odnosno vektor početnih verovatnoća:

$$\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Od ponedeljka do srede imamo dva prelaza, pa raspodelu verovatnoća za sredu dobijamo na sledeći način:

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^2 = [0\ \ 0\ \ 1] \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & B & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \end{array},$$

te verovatnoća da u sredu neće raditi u Novom Sadu iznosi

$$1 - p_N(1) = 1 - \tfrac{1}{9} = \tfrac{8}{9}.$$

(d) Tražena verovatnoća je

$$P(X_5 = S, X_7 = S | X_2 = N, X_4 = N) =$$

$$= \frac{P(X_2 = N, X_4 = N, X_5 = S, X_7 = S)}{P(X_2 = N, X_4 = N)} =$$

$$= \frac{P(X_2 = N)P(X_4 = N|X_2 = N)P(X_5 = S|X_4 = N)P(X_7 = S|X_5 = S)}{P(X_2 = N)P(X_4 = N|X_2 = N)} =$$

$$= P(X_5 = S|X_4 = N)P(X_7 = S|X_5 = S) =$$

$$= p_{N,S}(1)p_{S,S}(2) =$$

$$= \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{9}.$$

Zadatak 7

Postavka: U kutiji se nalaze tri kuglice koje mogu biti bele ili crne boje. Na slučajan način se izvlači jedna kuglica i zamenjuje se kuglicom one druge boje. Stanje sistema definišemo brojem belih kuglica u kutiji. Na početku eksperimenta u kutiji su bile 1 bela i 2 crne kuglice.

(a) Sastaviti matricu prelaza za jedan korak.

(b) Naći verovatnoću da će nakon dve zamene stanje u kutiji biti nepromenjeno.

(c) Ako je na početku i nakon dve izmene u kutiji bila jedna kuglica bele boje, naći verovatnoću da će nakon četiri, šest, osam, ... zamena stanje u kutiji biti nepromenjeno.

(d) Pod pretpostvakom da finalne verovatnoće postoje, naći ih.

Rešenje:

Moguće vrednosti slučajnog procesa su $0, 1, 2, 3$.

(a) Matrice prelaza za jedan i za dva koraka su:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{P}^2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{7}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{7}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array}.$$

(b) Vektor početne raspodele: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$

Vektor raspodele nakon dva koraka:

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(0) \cdot P^2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{9} & 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Prema tome, verovatnoća da stanje nakon dva koraka ostaje nepromenjeno iznosi $p_1(2) = \frac{7}{9}$.

(c) Tražena verovatnoća je

$$\begin{aligned}
&P(X_4 = 1, X_6 = 1, X_8 = 1, \dots | X_0 = 1, X_2 = 1) \\
&= \frac{P(X_0 = 1, X_2 = 1, X_4 = 1, X_6 = 1, X_8 = 1, \dots)}{P(X_0 = 1, X_2 = 1)} \\
&= \frac{P(X_0 = 1)P(X_2 = 1|X_0 = 1)P(X_4 = 1|X_0 = 1, X_2 = 1)\dots}{P(X_0 = 1)P(X_2 = 1|X_0 = 1)} \\
&= \frac{P(X_0 = 1)P(X_2 = 1|X_0 = 1)P(X_4 = 1|X_2 = 1)P(X_6 = 1|X_4 = 1)\dots}{P(X_0 = 1)P(X_2 = 1|X_0 = 1)} \\
&= P(X_4 = 1|X_2 = 1)P(X_6 = 1|X_4 = 1)\dots \\
&= p_{1,1}(2)p_{1,1}(2)p_{1,1}(2)\dots \\
&= \tfrac{7}{9} \cdot \tfrac{7}{9} \cdot \tfrac{7}{9} \cdots
\end{aligned}$$

(d) Finalne verovatnoće p_j^*, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ nalazimo rešavanjem sistema:

$[p_0^* \;\; p_1^* \;\; p_2^* \;\; p_3^*] \cdot \mathbf{P} = [p_0^* \;\; p_1^* \;\; p_2^* \;\; p_3^*] \quad \wedge \quad p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1.$

$$\begin{array}{ccccccccc}
p_0^* & + & p_1^* & + & p_2^* & + & p_3^* & = & 1 \\
 & & \frac{1}{3}p_1^* & & & & & = & p_0^* \\
p_0^* & & & + & \frac{2}{3}p_2^* & & & = & p_1^* \\
 & & \frac{2}{3}p_1^* & & & + & p_3^* & = & p_2^* \\
 & & & & \frac{1}{3}p_2^* & & & = & p_3^* \\
\hline
\end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
p_0^* & + & p_1^* & + & p_2^* & + & p_3^* & = & 1 \\
 & & p_1^* & + & \frac{3}{4}p_2^* & + & \frac{3}{4}p_3^* & = & \frac{3}{4} \\
 & & & & p_2^* & + & \frac{3}{7}p_3^* & = & \frac{3}{7} \\
 & & & & & & p_3^* & = & \frac{1}{8} \\
\hline
\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}
p_3^* = \frac{1}{8} \\
p_2^* = \frac{3}{8} \\
p_1^* = \frac{3}{8} \\
p_0^* = \frac{1}{8}
\end{array}$$

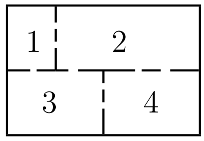
dobijamo

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Zadatak 8

Postavka:

Devojčica drži belog miša u kutiji sa slike. U diskretnim trenucima miš izlazi iz prostorije kroz jedan, na slučajan način izabran otvor. Vreme prolaska kroz otvor je zanemarljivo malo.



(a) Ispitati postojanje finalnih verovatnoća.

(b) Koliki deo "dovoljno dugog" vremenskog intervala će miš u proseku provoditi u pojedinim prostorijama?

(c) Ako je na početku miš stavljen u prostoriju broj 1, kolika je verovatnoća da će posle četiri prolaska miš ponovo biti u prostoriji 1?

Rešenje:

(a) Na osnovu opisa dobijamo matricu prelaza za jedan korak, i zatim matricu prelaza za dva koraka čiji su svi elementi pozitivni, te finalne verovatnoće postoje. Nalazimo i matricu prelaza za četiri koraka koja će nam trebati pod (c) (izračunavamo samo one elemente koji će nam biti zaista potrebni):

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{12} & \frac{2}{15} & \frac{13}{30} \\ \frac{1}{2} & \frac{31}{60} & \frac{1}{3} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{5}{12} & \frac{23}{60} & \frac{1}{10} \\ \frac{13}{40} & \frac{1}{8} & \frac{1}{10} & \frac{9}{20} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} \frac{337}{1200} & \frac{131}{720} & \frac{38}{225} & \frac{221}{600} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

(b) Za navedenu matricu prelaza $\mathbf{P}$ tražimo vektor finalnih verovatnoća $\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} x & y & z & u \end{bmatrix} \end{array}$ gde je $u = 1 - x - y - z$, odnosno rešavamo po x, y, z, u sistem jednačina:

$$\underline{\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{p}^* \ \wedge \ u = 1 - x - y - z} \ \Leftrightarrow$$

$$\underline{\begin{bmatrix} x & y & z & 1-x-y-z \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1-x-y-z \end{bmatrix}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{lllllllll} & & \frac{2}{5}y & + & \frac{1}{4}z & & & = & x \\ \frac{2}{3}x & & & + & \frac{1}{4}z & + & \frac{1}{2}(1-x-y-z) & = & y \\ \frac{1}{3}x & + & \frac{1}{5}y & & & + & \frac{1}{2}(1-x-y-z) & = & z \\ & & \frac{2}{5}y & + & \frac{1}{2}z & & & = & 1-x-y-z \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & \frac{2}{5}y & - & \frac{1}{4}z & = & 0 \\ & & y & + & \frac{25}{172}z & = & \frac{15}{43} \\ & & & & z & = & \frac{1}{4} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x = \frac{3}{16} \\ y = \frac{5}{16} \\ z = \frac{1}{4} \\ u = \frac{1}{4} \end{array}$$

Dakle, finalna raspodela je:

$$\mathbf{p}^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right] \end{array}.$$

Dobijene finalne verovatnoće imaju sledeće značenje: ako se posmatra "dovoljno dug" vremenski period, $\frac{3}{16}$ vremena miš provede u prostoriji broj 1, $\frac{5}{16}$ vremena provede u prostoriji broj 2, a po $\frac{1}{4}$ vremena provodi u prostorijama broj 3 i 4.

(b) Početna raspodela: $\mathbf{p}(0) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}.$

Raspodela nakon 4 koraka:

$$\mathbf{p}(4) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}(4) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \frac{337}{1200} & \frac{131}{720} & \frac{38}{225} & \frac{221}{600} \end{array} \right] \end{array},$$

tako da je tražena verovatnoća $p_1(4) = \frac{337}{1200}$.

Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet Tehničkih Nauka
Verovatnoća i slučajni procesi, letnji semestar akademske 2022/2023. godine

Redovi čekanja

Zadatak 1

Postavka: Restoran za kupovinu iz automobila ima jedan prozor za posluživanje. Red čekanja nema ograničenja, ali prva tri automobila u redu su u dvorištu restorana, a ostali su na ulici. Ukoliko prosečno dolaze dvoje kola na svakih 5 minuta (Poasonov protok trebovanja) i ako usluživanje prosečno traje 90 sekundi (eksponencijalna dužina usluživanja), naći:

(a) λ, μ, Λ i finalne verovatnoće.

(b) Očekivani broj kupaca u sistemu.

(c) Ako prva tri automobila čekaju u dvorištu a ostali na ulici, i ako gazda odluči da svakom kupcu koji mora da čeka u redu na ulici pokloni sladoled koji košta 30 dinara, koliki je očekivani gazdin trošak za takvu odluku tokom 12-časovnog radnog vremena?

Rešenje:

Ovaj sistem masovnog usluživanja je tipa $M|M|1|\infty$. Neka je vremenska jedinica 1 sat.

(a) Vremenska jedinica je jedan sat, vreme usluživanja jedne mušterije ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\mu)$ raspodelu sa paremetrom $\mu = 40$. Broj automobila koji pristižu u restoran tokom jednog sata ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu gde $\lambda = 24$. Stanja sistema su $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Matrica koja određuje opisani sistem opsluživanja je data sa:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \ldots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 24 & 0 & 0 & \ldots \\ 40 & -64 & 24 & 0 & \ldots \\ 0 & 40 & -64 & 24 & \ldots \\ 0 & 0 & 40 & -64 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Finalne verovatnoće p_k^*, za $k = 0, 1, 2, \ldots$, postoje jer je $\dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{3}{5} < 1$. Dobijamo ih iz sistema jednačina $p^* \cdot \Lambda = 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k^* = 1$:

$$\begin{cases} [p_0^* \quad p_1^* \quad p_2^* \quad p_3^* \cdots] \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots] \\ p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* + \cdots = 1, \end{cases}$$

odnosno:

$$\begin{cases} -\lambda p_0^* + \mu p_1^* = 0 \\ \lambda p_0^* + (-\lambda - \mu) p_1^* + \mu p_2^* = 0 \\ \lambda p_1^* + (-\lambda - \mu) p_2^* + \mu p_3^* = 0 \\ \lambda p_2^* + (-\lambda - \mu) p_3^* + \mu p_4^* = 0 \\ \vdots \\ p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* + \cdots = 1. \end{cases}$$

Izražavanjem iz prve jednačine p_1^* preko p_0^*, iz druge p_2^* preko p_0^*, itd. dobija se: $p_1^* = \frac{\lambda}{\mu} p_0^*$, $p_2^* = \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0^*$, $p_3^* = \frac{\lambda^3}{\mu^3} p_0^*$, ..., tj. u opštem slučaju $p_k^* = \frac{\lambda^k}{\mu^k} p_0^*, k \in \{1, 2, 3...\}$. Uvrštavanjem dobijenih rezultata u poslednju jednačinu imamo:

$p_0^* + \frac{\lambda}{\mu} p_0^* + \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0^* + \frac{\lambda^3}{\mu^3} p_0^* + ... = p_0^* (1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \frac{\lambda^3}{\mu^3} + ...) = 1.$

Dobijamo $A = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \frac{\lambda^3}{\mu^3} + ... = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$.

Odatle sledi da je $p_0^* = \frac{1}{A} = \frac{\mu - \lambda}{\mu} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Ostale finalne verovatnoće iznose:

$$p_k^* = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(b) Nakon „beskonačno mnogo" vremena, broj mušterija (odnosno automobila) u sistemu je slučajna promenljiva X_∞ sa zakonom raspodele $\mathsf{P}(X_\infty = k) = p_k^* = \dfrac{2}{5} \left(\dfrac{3}{5}\right)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, odnosno:

$$X_\infty : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5}\dfrac{3}{5} & \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 & \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 & \ldots \end{pmatrix}.$$

Njeno matematičko očekivanje je:

$$\mathsf{E}(X_\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{2} = 1.5,$$

gde smo koristili poznatu formulu za sumu reda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \text{za } |x| < 1.$$

Zanimljivo je videti da se očekivanje može izračunati i na drugi način, ako se najpre primeti da je da je $X_\infty = Y - 1$ gde je Y slučajna promenljiva sa geometrijskom $\mathcal{G}\left(\frac{2}{5}\right)$ raspodelom. Naime, tada je $\mathsf{E}(X_\infty) = \mathsf{E}(Y-1) = \mathsf{E}(Y) - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$.

(c) Nakon „dovoljno dugo" vremena, neka je p_U verovatnoća da je bar jedna mušterija na ulici, tj. da je dvorište popunjeno i da gazda svakom kupcu na ulici poklanja sladoled (odnosno, više od 3 mušterije je u sistemu). Ta verovatnoća iznosi:

$$\begin{aligned} p_U &= \sum_{k=4}^{\infty} p_k^* = p_4^* + p_5^* + p_6^* + \cdots \\ &= 1 - (p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^*) = \frac{81}{625}. \end{aligned}$$

Kako tokom jednog sata u proseku u sistem pristiže 24 mušterije, sledi da tokom 12-časovnog radnog vremena pristigne $12h \cdot \frac{24}{1h} = 288$ mušterija. Od tog ukupnog broja mušterija, kupac će morati da pokloni sladoled samo onima koji su na ulici, kojih ima u proseku $288 \cdot p_U = 37.32$. Svakom od njih se poklanja sladoled u vrednosti od 30 dinara, te je konačno očekivana cena poklonjenih sladoleda tokom 12-časovnog radnog vremena:

$$12h \cdot \frac{24}{1h} \cdot p_U \cdot 30\, din = 288 \cdot \frac{81}{625} \cdot 30\, din \approx 37.32 \cdot 30\, din = 1119.74\, din.$$

Zadatak 2

Postavka: U prodavnici palačinki rade dva prodavca. U prodavnicu tokom jednog sata dođe prosečno 15 kupaca, pri čemu broj kupaca koji dođu u prodavnicu ima Poasonovu raspodelu. Vreme usluživanja jednog kupca ima eksponencijalnu raspodelu i prosečno traje 5 minuta. Red čekanja nije ograničen.

(a) Napisati brzine rađanja i umiranja opisanog sistema opsluživanja i izračunati njegove finalne verovatnoće.

(b) Odrediti očekivani broj kupaca u prodavnici.

(c) Ukoliko pada kiša a nadstrešnica koja porkriva put sa prodajnim mestima može da zaštiti od kiše najviše pet ljudi, izračunati verovatnoću da upravo pristigli kupac neće pokisnuti dok bude kupovao palačinke.

Rešenje:

Prema postavci zadatka, posmatrani sistem masovnog usluživanja je tipa $M|M|2|\infty$, gde je $k = 2$ broj mesta za usluživanje (broj prodavaca). Skrenimo pažnju na to da jedan prodavac uslužuje isključivo jednog kupca. Neka je vremenska jedinica 1 sat.

(a) Vreme usluživanja V jedne mušterije ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\mu)$ raspodelu, gde je prosečno vreme usluživanja jedne mušterije (u satima) $\mathsf{E}(V) = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{12}$, odakle sledi da je $\mu = 12$. Broj kupaca W koji pristižu u prodavnicu tokom jednog sata ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu, gde je prosečan broj kupaca koji pristižu tokom jednog sata $\mathsf{E}(W) = \lambda = 15$. Stanja sistema su $0, 1, 2, 3, \ldots$. Matrica Λ koja određuje opisani sistem opsluživanja je data sa:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 12 & -27 & 15 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 24 & -39 & 15 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 24 & -39 & 15 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 24 & -39 & 15 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Finalne verovatnoće $p^* = [p_0^* \quad p_1^* \quad p_2^* \cdots]$ postoje jer je $\frac{\lambda}{k\mu} = \frac{5}{8} < 1$, i dobijamo ih standardnim rešavanjem sistema jednačina $p^* \cdot \Lambda = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k^* = 1$, to jest rešavanjem sistema:

$$\begin{cases} [p_0^* \quad p_1^* \quad p_2^* \quad p_3^* \cdots] \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots] \\ p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* + \cdots = 1, \end{cases}$$

koji se još može eksplicitnije zapisati i kao:

$$\begin{cases} -\lambda p_0^* + \mu p_1^* = 0 \\ \lambda p_0^* + (-\lambda - \mu) p_1^* + 2\mu p_2^* = 0 \\ \lambda p_1^* + (-\lambda - 2\mu) p_2^* + 2\mu p_3^* = 0 \\ \lambda p_2^* + (-\lambda - 2\mu) p_3^* + 2\mu p_4^* = 0 \\ \lambda p_3^* + (-\lambda - 2\mu) p_4^* + 2\mu p_5^* = 0 \\ \vdots \\ p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* + \cdots = 1. \end{cases}$$

Ovaj sistem se može lako rešiti tako što se iz prve jednačine izrazi p_1^* preko p_0^*, iz druge p_2^* preko p_0^*, iz treće p_3^* preko p_0^* i tako dalje. Uvrštavanjem tako izraženih vrednosti u poslednju jednačinu (zbira finalnih verovatnoća), može se lako dobiti vrednost p_0^*, a otuda i izrazi za sve ostale finalne verovatnoće. Kao što je očekivano, dobijaju se jednačine jednake jednačinama (6.7) i (6.8) iz udžbenika. Zato je:

$$A = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2^2\mu^3} + \frac{\lambda^4}{2^3\mu^4} + \cdots = 1 + \frac{\lambda}{\mu}\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} + \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^3 + \cdots\right) = \frac{2\mu + \lambda}{2\mu - \lambda},$$

$$p_0^* = \frac{1}{A} = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda} = \frac{3}{13},$$

$$p_n^* = p_0^* \cdot \frac{1}{k^{n-1}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(\frac{15}{12}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Nakon „beskonačno mnogo” vremena, broj kupaca u sistemu je slučajna promenljiva X_∞ sa zakonom raspodele $\mathsf{P}(X_\infty = n) = p_n^*,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Očekivani broj kupaca u sistemu je (u proseku) njeno matematičko očekivanje

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(X_\infty) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(\frac{15}{12}\right)^n = \frac{3}{13} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{5^n}{2^{3n-1}} = \frac{6}{13} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{5^n}{2^{3n}} = \frac{6}{13} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{8}\right)^n \\ &= \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{8} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = \frac{6}{13} \cdot \frac{5}{8} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} = \frac{15}{52} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{8}\right)^2} = \frac{80}{39} \approx 2.05, \end{aligned}$$

gde je slično kao i ranije korišćena formula za sumu reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ za $|x| < 1$.

(c) Upravo pristigli kupac neće pokisnuti ako i samo ako se u tom trenutku u sistemu nalazi (strogo) manje od 5 ljudi, što se događa sa verovatnoćom:

$$\begin{aligned} p &= \sum_{n=0}^{5} p_n^* = p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* + p_4^* \\ &= \frac{3}{13} + \frac{3}{13} \cdot \left(\frac{15}{12}\right) + \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{2^1} \cdot \left(\frac{15}{12}\right)^2 + \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \left(\frac{15}{12}\right)^3 + \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \left(\frac{15}{12}\right)^4 \approx 0.3812. \end{aligned}$$

Zadatak 3

Postavka: U frizerskom salonu rade dva frizera i salon ima dva mesta za čekanje. Vreme friziranja jedne mušterije ima eksponencijalnu raspodelu i prosečno traje 45 minuta, a broj mušterija koje pristižu u salon ima Poasonovu raspodelu, pri čemu u proseku na 15 minuta u salon dođe po jedna nova mušterija.

(a) Napisati brzine rađanja i umiranja opisanog sistema opsluživanja i izračunati njegove finalne verovatnoće.

(b) Ukoliko se posmatra duži vremenski period, koliko će mušterija u proseku biti odbijeno tokom jedne smene od 8 časova?

(c) Ukoliko dva frizera rade 8 časova, koliko vremena će u proseku biti oba besposlena?

Rešenje:

Ovaj sistem masovnog usluživanja je tipa $M|M|2|2$, gde je $k = 2$ broj mesta za usluživanje, a $r = 2$ je broj mesta za čekanje u sistemu. Skrenimo pažnju na to da jedan frizer uslužuje isključivo jednu mušteriju. Neka je vremenska jedinica 1 sat.

(a) Vreme friziranja V jedne mušterije ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\mu)$ raspodelu. Prosečno vreme friziranja jedne mušterije je $\frac{3}{4}$ sata, te iz $\mathsf{E}(V) = \frac{1}{\mu}$ sledi da je $\mu = \frac{4}{3}$. Broj mušterija W koji pristižu u salon tokom jednog sata ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu. U salon uđe nova mušterija prosečno na svakih 15 minuta, tj. u toku jednog sata prosečno dođu 4 nove mušterije te je $\mathsf{E}(W) = \lambda = 4$. Matrica koja određuje opisani sistem opsluživanja je dimenzije 5×5 jer je $k + r + 1 = 5$ i ona je data sa:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{16}{3} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{20}{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{20}{3} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}.$$

Finalne verovatnoće $p^* = [\, p_0^* \;\; p_1^* \;\; p_2^* \;\; p_3^* \;\; p_4^* \,]$ dobijamo rešavanjem sistema $p^* \cdot \Lambda = 0$, $\sum_{k=0}^{4} p_k^* = 1$, koji je ovoga puta sistem šest jednačina sa pet nepoznate:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} -4p_0^* & + & \frac{4}{3}p_1^* & & & & & & & = & 0 \\ 4p_0^* & - & \frac{16}{3}p_1^* & + & \frac{8}{3}p_2^* & & & & & = & 0 \\ & & 4p_1^* & - & \frac{20}{3}p_2^* & + & \frac{8}{3}p_3^* & & & = & 0 \\ & & & & 4p_2^* & - & \frac{20}{3}p_3^* & + & \frac{8}{3}p_4^* & = & 0 \\ & & & & & & 4p_3^* & - & \frac{8}{3}p_4^* & = & 0 \\ p_0^* & + & p_1^* & + & p_2^* & + & p_3^* & + & p_4^* & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} -4p_0^* & + & \frac{4}{3}p_1^* & & & & & & & = & 0 \\ & - & 4p_1^* & + & \frac{8}{3}p_2^* & & & & & = & 0 \\ & & & - & 4p_2^* & + & \frac{8}{3}p_3^* & & & = & 0 \\ & & & & & - & 4p_3^* & + & \frac{8}{3}p_4^* & = & 0 \\ & & & & & & & & \frac{203}{81}p_4^* & = & 1 \end{array} \right. .$$

Iz poslednje jednačine se lako vidi da je $p_4^* = \frac{81}{203}$, a otuda i:

$$p_3^* = \frac{54}{203}, \quad p_2^* = \frac{36}{203}, \quad p_1^* = \frac{24}{203}, \quad p_0^* = \frac{8}{203}.$$

(b) Nakon „beskonačno mnogo” vremena, verovatnoća da će neka mušterija biti odbijena je jednaka verovatnoći da su popunjena i mesta za usluživanje i mesta za čekanje, a to je p_4^*. U toku jednog sata u proseku dođe 4 mušterije, tako da očekivani broj odbijenih mušterija u toku 8 sati iznosi:

$$8h \cdot \frac{4}{1h} \cdot p_4^* = 8h \cdot \frac{4}{1h} \cdot \frac{81}{203} = 32 \cdot \frac{81}{203} \approx 13.$$

(c) Oba frizera su besposlena kada nema ni jedne mušterije u sistemu, a to se dešava sa verovatnoćom p_0^*. Sledi da u toku 8 sati oba besposlena, u isto vreme, u proseku:

$$8h \cdot p_0^* = 8h \cdot \frac{8}{203} = \frac{64}{203}h \approx 20\,min.$$

domaći: *Za finalne verovatnoće konkretne vrednosti λ i μ su jednako važne kao i njihov količnik. Uraditi ovaj isti zadatak uzevši da je $\lambda = 3$ i $\mu = 1$. Da li se dobijaju iste finalne verovatnoće?*

Zadatak 4

Postavka: U borbama na frontu svakog dana (tokom 24 časa) bude prosečno ranjeno 6 vojnika i broj ranjenih vojnika tokom dana ima Poasonovu raspodelu. Vreme zbrinjavanja svakog vojnika ima eksponencijalnu raspodelu i traje prosečno 2 sata. Na zbrinjavanju rade tri medicinske ekipe.

(a) Napisati brzine rađanja i umiranja opisanog sistema opsluživanja i izračunati finalne verovatnoće, ukoliko postoje.

(b) Koliko iznosi verovatnoća da će ranjeni vojnik čekati na medicinsku pomoć?

Rešenje:

Posmatrani sistem masovnog usluživanja je tipa $M|M|3|\infty$. Neka je vremenska jedinica 1 sat.

(a) Vreme V zbrinjavanja jednog ranjenika ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\mu)$ raspodelu, pri čemu je prosečno vreme zbrinjavanja jednog ranjenika $\mathsf{E}(V) = \frac{1}{\mu} = 2$, odakle sledi da je $\mu = \frac{1}{2}$. Broj ranjenih W tokom jednog sata ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu, gde je prosečan broj novih ranjenika tokom jednog sata $\mathsf{E}(W) = \lambda = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$. Stanja sistema su $0, 1, 2, 3, \ldots$. Matrica koja određuje opisani sistem opsluživanja Λ je data sa:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3\mu & -\lambda-3\mu & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3\mu & -\lambda-3\mu & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Finalne verovatnoće $p^* = [p_0^* \quad p_1^* \quad p_2^* \cdots]$ postoje jer je $\dfrac{\lambda}{k\mu} = \dfrac{1}{6} < 1$, i dobijamo ih standardnim rešavanjem sistema jednačina $p^* \cdot \Lambda = 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k^* = 1$. Uz oznaku:

$$A = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{9}{2}\left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{9}{2}\left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^n$$
$$= \frac{13}{8} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{216}\frac{1}{1-\frac{\lambda}{3\mu}} = \frac{13}{8} + \frac{1}{48} \cdot \frac{6}{5} = \frac{33}{20},$$

dobija se da su finalne verovatnoće opisanog procesa rađanja i umiranja:

$$p_0^* = \frac{1}{A} = \frac{20}{33}, \qquad p_1^* = \frac{\lambda}{\mu}\, p_0^* = \frac{10}{33}, \qquad p_2^* = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\, p_0^* = \frac{5}{66},$$
$$p_n^* = \frac{\lambda^n}{2\mu^n 3^{n-2}}\, p_0^* = \frac{9}{2}\left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^n p_0^*, \quad n \geq 3.$$

(b) Ranjeni vojnik će morati da čeka na pomoć onda kada je u „sistemu" 3 ili više ranjenika, a nakon „dovoljno dugo" vremena se to događa sa verovatnoćom:

$$p = \sum_{n=3}^{\infty} p_n^* = p_3^* + p_4^* + p_5^* + p_6^* + \cdots = 1 - (p_0^* + p_1^* + p_2^*) = \frac{1}{66}.$$

domaći: *Za finalne verovatnoće konkretne vrednosti λ i μ su jednako važne kao i njihov količnik. Uraditi ovaj isti zadatak uzevši da je $\lambda = 1$ i $\mu = 2$. Da li se dobijaju iste finalne verovatnoće?*

Zadatak 5

POSTAVKA: U salonu rade tri krojačice. Tokom jedne nedelje (pet radnih dana) sašiju prosečno 30 odevnih predmeta. Salon ne prima nove narudžbine ukoliko su sve tri krojačice zauzete. Prosečno, tokom radnog dana, imaju 10 novih porudžbina. Pod pretpostavkom da se radi o $M|M|k|r$ sistemu:

(a) odrediti k, r, λ, μ, Λ,

(b) naći finalne verovatnoće,

(c) Naći očekivani broj odbijenih porudžbina tokom jedne nedelje (5 radnih dana),

(d) Koliko prosečno vremena tokom 10-časovnog radnog dana krojačice mogu da utroše na zajedničko pijenje kafe na kojem su prisutne bar dve krojačice?

REŠENJE:

(a) Posmatrani sistem masovnog usluživanja je tipa $M|M|3|0$, jer ima tri krojačice, a nijedno mesto u redu čekanja („Salon ne prima nove narudžbine ukoliko su sve tri krojačice zauzete"). Zato je $k = 3$ i $r = 0$.

Što se tiče parametra λ i μ, odaberimo najpre vremensku jedinicu od jednog dana. Tokom jednog dana krojačice (sistem) dobiju 10 narudžbina, te je $\lambda = 10$. Takođe, ako njih tri završe u proseku 30 odevnih predmeta za pet dana, to znači da u proseku završe 6 odevnih predmeta na dan. Međutim, primetimo da μ nije 6, kao što možda deluje na prvi pogled.

Naime, u svim zadacima dosad bilo je rečeno koliko se osoba u sistemu usluži na jednom mestu usluživanja (jedan prodavac, jedan frizer, jedna medicinska ekipa), a ovde je po prvi put dat podatak o usluženju na tri mesta usluživanja (tri krojačice). Parametar μ se odnosi na to koliko se osoba u sistemu usluži na jednom mestu usluživanja (u toku posmatranog vremena), tako da je ovde zapravo $\mu = 6/3 = 2$.

Budući da je $k + r + 1 = 4$, Λ je matrica dimenzije 4×4 i to konkretno:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 & 0 \\ 2 & -12 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & -14 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

(b) Finalne verovatnoće $p^* = [\, p_0^* \;\; p_1^* \;\; p_2^* \;\; p_3^* \,]$ za sistem tipa $M|M|3|0$ uvek postoje. Kao i dosad, dobijamo ih rešavanjem sistema $p^* \cdot \Lambda = 0$, $p_0^* + \cdots + p_3^* = 1$, koji je ovoga puta sistem pet jednačina sa četiri nepoznate:

$$\begin{cases} -10p_0^* + 2p_1^* = 0 \\ 10p_0^* - 12p_1^* + 4p_2^* = 0 \\ 10p_1^* - 14p_2^* + 4p_3^* = 0 \\ 10p_2^* - 6p_3^* = 0 \\ p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1 \end{cases}.$$

Iz prve jednačine sledi da je $p_1^* = 5\ p_0^*$, iz druge $p_2^* = \frac{25}{2}\ p_0^*$, iz treće $p_3^* = \frac{125}{6}\ p_0^*$, te uvrštavanjem ovih izraza u poslednu jednačinu (zbira finalnih verovatnoća) dobijamo:

$$1 = p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^* = p_0^* + 5p_0^* + \frac{25}{2}p_0^* + \frac{125}{6}p_0^* = \frac{236}{6}p_0^*,$$

odakle je očigledno $p_0^* = \dfrac{6}{236}$, a time posledično:

$$p_1^* = \frac{30}{236}, \qquad p_2^* = \frac{75}{236}, \qquad p_3^* = \frac{125}{236}.$$

(c) Tokom pet dana krojačice prime $5 \cdot 10 = 50$ porudžbina, ali od tog ukupnog broja one će morati da odbiju sve porudžbine koje im pristignu dok su sve zauzete (što se dešava sa verovatnoćom p_3^*), a takvih u toku pet dana ima u proseku $50 \cdot p_3^* = 50 \cdot \frac{125}{236} \approx 26.48$.

(d) Ako su bar dve prisutne, to znači da ima ili jedna ili nijedna uposlena krojačica, a to se dešava sa verovatnoćom $p_0^* + p_1^*$. U proseku, udeo od $10h$ koje provedu sa jednom ili nijednom uposlenom krojačicom jednako je $10h(p_0^* + p_1^*) \approx 1.525h$. Toliko vremena mogu da utroše na zajedničko ispijanje kafe.