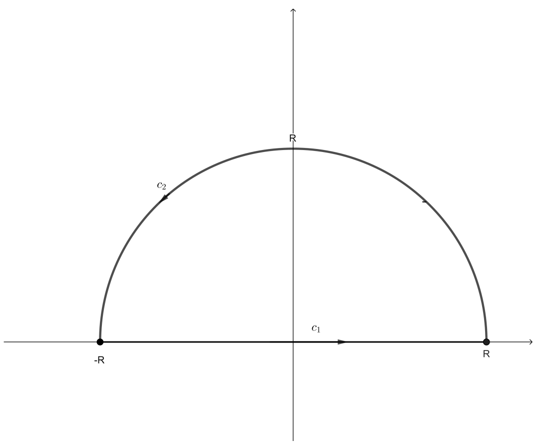
IZRAČUNAVANJE INTEGRALA REALNIH FUNKCIJA METODIMA KOMPLEKSNE ANALIZE

1. Izračunati $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

   Rešenje: Da bismo izračunali ovaj nesvojstveni integral, primetimo prvo da on konvergira i da je stoga dovoljno izračunati $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1}$

   Integralićemo funkciju $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ po oblasti C prikazanoj na slici.

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$$



Duž C_1 jednostavno parametrizujemo: $x = t, y = 0 \to z = t, dz = dt, t \in [-R, R]$ odakle $\int_{C_1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1}$ pa ćemo, u graničnom procesu $R \to \infty$, dobiti traženi integral. S druge strane, C_2 je luk kružnice poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku, čija je parametrizacija $x = R\cos t, y = R\sin t \to z = Re^{it}, dz = iRe^{it}dt, t \in [0, \pi]$ pa je $\int_{C_2} \frac{dz}{z^4+1} = \int_0^{\pi} \frac{iRe^{it}}{R^4e^{4it}+1}dt$. Procenimo dobijeni integral:

$$\Big|\int_{C_2} \frac{dz}{z^4+1}dt\Big| \leq \int_0^{\pi} \frac{|Rie^{it}|}{|R^4e^{4it}|-1}dt = \int_0^{\pi} \frac{R}{R^4-1}dt = \frac{R\pi}{R^4-1}$$

pa u graničnom procesu, kada $R \to \infty$, imamo da $\int_{C_2} \frac{dz}{z^4+1} \to 0$ odakle je

$$\lim_{R\to\infty} \int_C \frac{dz}{z^4+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \frac{dz}{z^4+1} + \lim_{R\to\infty} \int_{C_2} \frac{dz}{z^4+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

Ostaje još izračunati integral sa leve strane koristeći račun reziduuma. Sigulariteti podintegralne funkcije f su nule polinoma z^4+1, odnosno $z_k = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{i\pi}} = e^{\frac{(\pi+2k\pi)i}{4}}, k = 0, 1, 2, 3$. S obzirom da je $|z_k| = 1$ za svako $k = 0, 1, 2, 3$, imamo da za $R > 1$, z_0 i $z_1 \in \text{int } C$, dok $z_2, z_3 \notin \text{int } C$. Koristeći Košijevu teoremu o ostacima imamo:

$$\lim_{R\to\infty} \int_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i(\text{Res}(f(z), z_0) + \text{Res}(f(z), z_1)).$$

Četiri nule polinoma z^4+1 su sve različite pa su svi singulariteti funkcije f polovi reda 1. Koristeći formulu za reziduum funkcije, imamo:

$$\lim_{R\to\infty} \int_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i(\text{Res}(f(z), z_0) + \text{Res}(f(z), z_1)) = 2\pi i(\lim_{z\to e^{i\pi/4}} \frac{1}{4z^3} + \lim_{z\to e^{3\pi i/4}} \frac{1}{4z^3}) =$$

$$= \frac{2\pi i}{4}(e^{-3\pi i/4} + e^{-9\pi i/4}) = \frac{\pi i}{2}(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4) + \cos(-9\pi/4) + i\sin(-9\pi/4)) =$$

$$= \frac{\pi i}{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

pa je, najzad, traženi integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

2. Izračunati $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx$

Rešenje: Primetimo da je ovaj integral apsolutno konvergentan. Integralićemo funkciju $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}$ po konturi C iz prethodnog zadatka.

$$\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz = \int_{C_1} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz.$$

Integracija po C_1 daje

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{(t^2+4)^2}dt = \int_{-R}^{R} \frac{\cos t}{(t^2+4)^2}dt + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{(t^2+4)^2}dt$$

pa imamo

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\cos t}{(t^2+4)^2}dt + i\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{(t^2+4)^2}dt.$$

S obzirom da su $\frac{\cos t}{(t^2+4)^2}$ i $\frac{\sin t}{(t^2+4)^2}$ parna i neparna funkcija, respektivno, imamo dalje

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz = 2\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} \frac{\cos t}{(t^2+4)^2}dt = 2\int_0^\infty \frac{\cos t}{(t^2+4)^2}dt.$$

Parametrizacija polukružnice daje

$$\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}Rie^{it}}{(R^2e^{2it}+4)^2}dt.$$

Procenićemo ovaj integral

$$\Big|\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz\Big| \le \int \frac{|e^{iR(\cos t + i\sin t)}|}{(|R^2e^{2it}|-4)^2}|Rie^{it}|dt$$

$$= \int_0^\pi \frac{R|e^{iR\cos t}|\cdot|e^{-R\sin t}|}{(R^2-4)^2}dt \le \frac{R\pi}{(R^2-4)^2}$$

gde smo koristili činjenicu da je $|e^{i\alpha}| = 1$ za svako realno α kao i to za $t \in [0,\pi]$ imamo $\sin t \ge 0$ odakle je $e^{-R\sin t} \le 1$ na pomenutom intervalu. Dakle, $\lim_{R\to\infty}\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz = 0$. Kada sve ovo uzmemo u obzir:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz + \lim_{R\to\infty}\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz = 2\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx.$$

Izračunaćemo integral sa leve strane koristeći račun reziduuma. Podintegralna funkcija f ima singularitete $z_{1,2} = \pm 2i$ koji su polovi drugog reda, pri čemu je $z_1 = 2i \in \operatorname{int} C \not\ni z_2 = -2i$, za $R > 2$.

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C} \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}dz = 2\pi i \text{Res }(f(z),2i) = 2\pi i\cdot\lim_{z\to 2i}\Big((z-2i)^2\frac{e^{iz}}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\Big)' =$$

$$= 2\pi i\cdot\lim_{z\to 2i}\frac{ie^{iz}(z+2i)^2 - 2e^{iz}(z+2i)}{(z+2i)^4} = 2\pi i\cdot\lim_{z\to 2i}\frac{e^{iz}(iz-4)}{(z+2i)^3} = 2\pi i\cdot\frac{-6e^{-2}}{-64i}.$$

Odavde je $2\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx = \frac{3\pi}{16}$ pa je $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx = \frac{3\pi}{32}$.

3. Izračunati $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(13-5\cos x)^2}dx.$

Rešenje: Ovo je određeni integral koji se takođe može rešiti svođenjem na integral kompleksne funkcije. Naime, ako je f racionalna funkcija po x i y, tada se integral $\int_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x)$ rešava uvođenjem smene $z = e^{it}, dz = ie^{it} = iz$, slika intervala $[0, 2\pi)$ je jedinična kružnica sa centrom u koordinatnom početku, i dalje imamo $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}, \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}$. Dakle,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(13-5\cos x)^2}dx = \oint_{|z|=1} \frac{1+\frac{z+z^{-1}}{2}}{(13-5\frac{z+z^{-1}}{2})^2}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+2z+1}{2z}}{\frac{(5z^2-26z+5)^2}{4z^2}}\frac{dz}{iz} =$$

$$= \frac{2}{i}\oint_{|z|=1} \Big(\frac{z+1}{(5z-1)(z-5)}\Big)^2 dz.$$

Podintegralna funkcija dva pola drugog reda, $z_1 = 1/5$ i $z_2 = 5$ od kojih samo z_1 pripada unutrašnjosti konture.

$$\mathrm{Res}(f(z), \frac{1}{5}) = \lim_{z\to 1/5}\Big((z-1/5)^2\frac{(z+1)^2}{(5z-1)^2(z-5)^2}\Big)' = \frac{1}{25}\lim_{z\to 1/5}\frac{2(z+1)(z-5)-2(z+1)^2}{(z-5)^3} = \frac{1}{192}$$

Odakle je naš integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{(13-5\cos x)^2}dx = \frac{2}{i}2\pi i\ \mathrm{Res}(f(z), \frac{1}{5}) = \frac{\pi}{48}.$$