★ Svođenje na konjunktivni oblik ★

1. **Svođenjem na KNF ispitati da li su sledeće formule tautologije**

   a) $(p \Rightarrow q \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$

   b) $p \wedge (q \vee \neg p) \wedge \big((q \Rightarrow \neg p) \vee \neg q\big)$

a) $(p \Rightarrow q \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p \equiv (\neg p \vee (q \wedge \neg q)) \Rightarrow \neg p$

$\equiv \neg(\neg p \vee (q \wedge \neg q)) \vee \neg p$

$\equiv (\neg\neg p \wedge \neg(q \wedge \neg q)) \vee \neg p$

$\equiv (\neg\neg p \wedge (\neg q \vee \neg\neg q)) \vee \neg p$

$\equiv (p \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg p$

$\equiv \underbrace{\underbrace{(p \vee \neg p)}_{\top} \wedge \underbrace{(\underbrace{\neg q \vee q}_{\top} \vee \neg p)}_{\top}}_{\top}$ KNF

jeste tautologija!

b) $p \wedge (q \vee \neg p) \wedge ((q \Rightarrow \neg p) \vee \neg q) \equiv p \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee \neg q)$

$\equiv p \wedge \underbrace{(q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)}$ KNF

$\equiv p \wedge (\underbrace{(q \wedge \neg q)}_{\perp} \vee \neg p)$

$\equiv p \wedge (\perp \vee \neg p)$

$\equiv p \wedge \neg p$

$\equiv \perp$

formula je kontradikcija!

★ Ekvivalencijske transformacije ★

2. **Ekvivalencijskim transformacijama dokazati da su sledeće formule tautologije:**

   a) $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow p$

   b) $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

a)
$$
\begin{aligned}
(\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q) &\equiv (\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q) \\
&\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \\
&\equiv p \vee (q \wedge \neg q) \\
&\equiv p \vee \bot \\
&\equiv p
\end{aligned}
$$

$$(\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q) \equiv p \quad \rightarrow \quad \models (\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow p$$

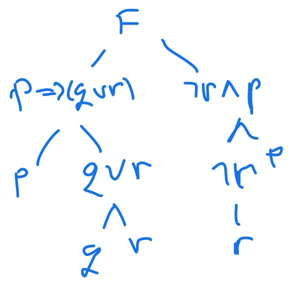
b)
$$
\begin{aligned}
((p \vee q) \Rightarrow r) &\equiv \neg(p \vee q) \vee r \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\
&\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \\
&\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \models \big((p \vee q) \Rightarrow r\big) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)\big)$$

★ Kanoničke forme ★

3. **Odrediti KKNF i KDNF za formulu**

$$F: \ (p \Rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow (\neg r \wedge p).$$



p	q	r	$\neg r$	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$\neg r \wedge p$	F
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	$\boxed{1}$
1	1	1	0	1	1	0	0

KDNF: $\Phi_1 = p \wedge q \wedge \neg r$

KKNF: $\Phi_2 = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge$

$\wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

4. **Odrediti formulu A tako da je formula**

$$F : ((A \wedge q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow A)$$

tautologija.

$A \wedge \top \equiv A$, $A \wedge \bot \equiv \bot$

$A \Rightarrow \top \equiv \top$, $A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$

$\top \Rightarrow A \equiv A$, $\bot \Rightarrow A \equiv \top$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$A \wedge q$	$(A \wedge q) \Rightarrow \neg p$	$p \Rightarrow \neg q$	$(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow A$	F	A
0	0	1	1	0	1	1	A	A	1
0	1	1	0	A	1	1	A	A	1
1	0	0	1	0	1	1	A	A	1
1	1	0	0	A	$\neg A$	0	1	1*	0

Kada je $I_v(F) = I_v(A)$, s obzirom da F treba da bude tautologija, formula A mora biti tačna

* Vrednost formule F je 1 nezavisno od A, pa formula A može uzeti proizvoljnu vrednost. Neka je u toj valuaciji vrednost formule A jednaka 0.

Možemo odrediti KKNF ili KDNF za A

KKNF: $\neg p \vee \neg q$

KDNF: $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

5. **Ukoliko je moguće, odrediti formulu A tako da je formula**

$$F : ((p \Rightarrow (\neg q \wedge r)) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \wedge ((r \Rightarrow q) \wedge p))$$

tautologija.

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \wedge r$	$p \Rightarrow (\neg q \wedge r)$	$(p \Rightarrow (\neg q \wedge r)) \Rightarrow A$	$r \Rightarrow q$	$(r \Rightarrow q) \wedge p$	$A \wedge (r \Rightarrow q) \wedge p$	F	A
0	0	0	1	0	1	A	1	0	0	$\neg A$	0
0	0	1	1	1	1	A	0	0	0	$\neg A$	0
0	1	0	0	0	1	A	1	0	0	$\neg A$	0
0	1	1	0	0	1	A	1	0	0	$\neg A$	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	A	A	1
1	0	1	1	1	1	A	0	0	0	$\neg A$	0
1	1	0	0	0	0	1	1	1	A	A	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	A	A	1

KDNF : $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

★ POtpuni skupovi veznika ★

6. Skup $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ nije potpun.

Pokazaćemo da svaka formula $A(p_1,\dots,p_n)$ u kojoj se pojavljuju samo veznici $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ čuva tačnost, tj. u svakoj valuaciji v u kojoj je $v(p_1)=\dots=v(p_n)=1$ važi: $I_v(A)=1$.

B.I. Ako u formuli nema veznika onda je $A=p$ pa važi $v(p)=1 \Rightarrow I_v(A)=v(p)=1$

I.H. Pretp. da tvrđenje važi za sve formule sa manje od k veznika $(\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$

I.K. Neka je A formula sa k veznika. Onda ona može biti oblika $B\wedge C$, $B\vee C$, $B\Rightarrow C$ ili $B\Leftrightarrow C$. Podformule B i C imaju manje od k veznika, pa za njih važi ind. pretp, tj ako je $v(p_1)=\dots=v(p_n)=1$, onda je $I_v(B)=I_v(C)=1$. Tada je i

$$I_v(B\wedge C)=I_v(B\vee C)=I_v(B\Rightarrow C)=I_v(B\Leftrightarrow C)=1$$

Pretp. da je moguće izraziti $\neg$ preko veznika $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, tj $\neg p \equiv B(p)$, pri čemu su u $B(p)$ samo veznici

Ako je $v(p)=1 \to I_v(\neg p)=0$

$\downarrow$

$I_v(B(p))=1$ ↯

★ DPLL PROCEDURA ★

7. **Primenom DPLL procedure ispitati zadovoljivost formule:**

$$(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge p \wedge \neg q.$$

$C_1 = \neg p \vee q \vee r$

$C_2 = \neg q \vee \neg r$

$C_3 = p$

$C_4 = \neg q$

$D = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$

1. D nije prazan ✗
2. U klauzama se ne pojavljuju $\top \bot$ i $\neg\top$ ✗
3. Ni u jednoj klauzi se ne pojavljuje $\bot$ ✗
4. Nemamo praznu klauzu ✗
5. Ni u jednoj klauzi nema $\top$ niti literal i njegova negacija ✗
6. C_3 i C_4 su jedinične klauze

$D[p \mapsto \top] = \{\neg\top \vee q \vee r, \neg q \vee \neg r, \top, \neg q\}$

1. $D[p \mapsto \top]$ nije prazan ✗
2. $\{\bot \vee q \vee r, \neg q \vee \neg r, \top, \neg q\}$
3. $\{q \vee r, \neg q \vee \neg r, \top, \neg q\}$
4. ✗
5. $\{q \vee r, \neg q \vee \neg r, \neg q\}$

1, 2, 3, 4, 5 ✗

6. $D[p \mapsto \top, q \mapsto \bot] = \{\bot \vee r, \neg\bot \vee \neg r, \neg\bot\}$

1. ✗
2. $\{\bot \vee r, \top \vee \neg r, \top\}$
3. $\{r, \top \vee \neg r, \top\}$
4. ✗
5. $\{r\}$

1–5 ✗

6. $D[p \mapsto \top, q \mapsto \bot, r \mapsto \top) = \{\top\}$

1–4 ✗

5. $\{\}$

1. skup klauza je prazan $\rightarrow$ DA

8. **Primenom DPLL algoritma ispitati da li je formula tautologija**

$$F\text{:}\ (p \vee \neg r) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

Posmatramo negaciju date formule i ako je ona zadovoljiva, polazna formula je porecива, odnosno nije tautologija

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

$$\neg F = \neg((p \vee \neg r) \Rightarrow (q \Rightarrow p))$$
$$\equiv \neg((p \vee \neg r) \Rightarrow (\neg q \vee p))$$
$$\equiv \neg(\neg(p \vee \neg r) \vee (\neg q \vee p))$$
$$\equiv \neg\neg(p \vee \neg r) \wedge \neg(\neg q \vee p)$$
$$\equiv (p \vee \neg r) \wedge (\neg\neg q \wedge \neg p)$$
$$\equiv (p \vee \neg r) \wedge q \wedge \neg p \qquad \text{KNF}$$

$D = \{p \vee \neg r, q, \neg p\}$

1–5 ×

6. $D[q \mapsto \top] = \{p \vee \neg r, \top, \neg p\}$

1–4 ×

5. $\{p \vee \neg r, \neg p\}$

1–5 ×

6. $D[q \mapsto \top, p \mapsto \bot] = \{\bot \vee \neg r, \neg \bot\}$

1. ×
2. $\{\bot \vee \neg r, \top\}$
3. $\{\neg r, \top\}$
4. ×
5. $\{\neg r\}$

1–5 ×

6. $D[q \mapsto \top, p \mapsto \bot, r \mapsto \bot] = \{\neg \bot\}$

1. ×

2. $\{\top\}$

3, 4 ×

5. $\{\}$

1. prazan skup klauza $\longrightarrow$ DA

skup D je zadovoljiv

$\Downarrow$

polazna formula nije tautologija

item[9.] **Primenom DPLL algoritma ispitati zadovoljivost formule**

$$\neg(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$$

Određujemo KNF

$$\neg(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \equiv (\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$$
$$\equiv p \wedge \neg q \wedge (\neg p \vee q)$$

$D = \{p, \neg q, \neg p \vee q\}$

1-5 ✗

6. $D[p \mapsto \top] = \{\top, \neg q, \neg\top \vee q\}$

1. ×
2. $\{\top, \neg q, \bot \vee q\}$
3. $\{\top, \neg q, q\}$
4. ×
5. $\{\neg q, q\}$

1-5 ×

6. $D[p \mapsto \top, q \mapsto \top] = \{\neg\top, \top\}$

1. ×
2. $\{\bot, \top\}$
3. $\{\{\}, \top\}$
4. NE

$D[p \mapsto \top, q \mapsto \bot] = \{\neg\bot, \bot\}$

1. ×
2. $\{\top, \bot\}$
3. $\{\top, \{\}\}$
4. NE !

$D[p \mapsto \bot] = \{\bot, \neg q, \neg\bot \vee q\}$

1. ✗
2. $\{\bot, \neg q, \top \vee q\}$

3. $\{\{\}, \neg q, \top \vee q\}$

4. NE!

$\Rightarrow$ formula nije zadovoljiva!