Kompleksna analiza

1. **U kompleksnoj ravni predstaviti sledeće skupove tačaka:**

   a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r,\ z_0 \in \mathbb{C}, r > 0\}$,

   b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > \frac{1}{2}\}$,

   c) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| < 2\}$,

   d) $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$,

   e) $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \arg z < \beta,\ \alpha, \beta \in [0, 2\pi]\}$,

   f) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z - z_0) > 1,\ z_0 \in \mathbb{C}\}$,

   g) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z\}$,

   h) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 1\}$,

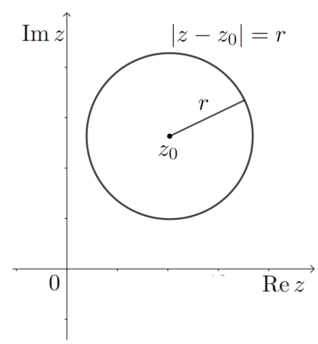
   i) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z < 2,\ \mathrm{Im}\, z > -2\}$.

Rešenje:

a) Neka je $z = x + iy$ i $z_0 = x_0 + iy_0$. Tada je

$$\begin{aligned} |z - z_0| = r \quad &\Leftrightarrow \quad |x - x_0 + i(y - y_0)| = r \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \\ &\Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \end{aligned}$$

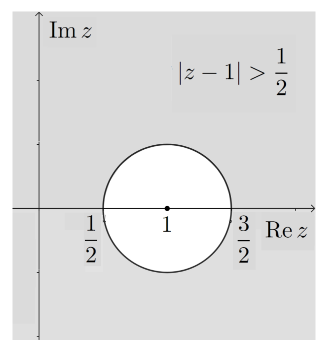
pa je traženi skup tačaka kružnica sa centrom u tački (x_o, y_o) i poluprečnikom r. Kako je u kompleksnoj ravni tačka (x_o, y_o) zapravo tačka z_0, sledi da je traženi skup tačaka kružnica sa centrom u tački z_0 i poluprečnikom r, što označavamo sa $K(z_0, r)$.



b) Slično kao u zadatku pod a) dobija se

$$|z - 1| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x - 1 + iy| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 > \frac{1}{4},$$

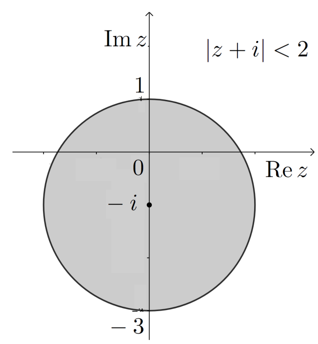
pa je traženi skup tačaka spoljašnjost kružnice sa centrom u tački $z_0 = 1$ i poluprečnikom $r = \dfrac{1}{2}$.



c)

$$|z + i| < 2 \Leftrightarrow |x + i(y + 1)| < 2 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 < 4,$$

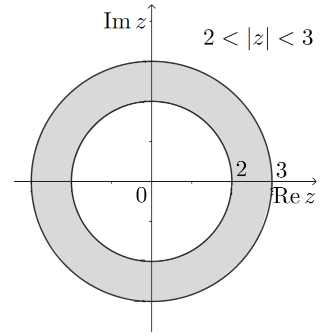
pa je traženi skup tačaka unutrašnjost kružnice sa centrom u tački $z_0 = -i$ i poluprečnikom $r = 2$.



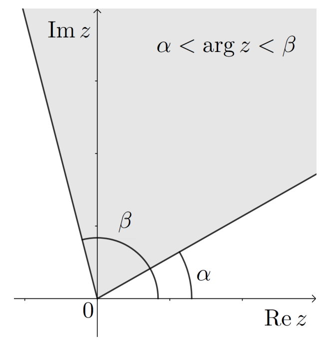
d)

$$2 < |z| < 3 \Leftrightarrow 2 < |z| \wedge |z| < 3.$$

$2 < |z|$ je spoljašnjost kružnice $K(0,2)$, a $|z| < 3$ je unutrašnjost kružnice $K(0,3)$, pa je traženi skup tačaka unutrašnjost kružnog prstena sa centrom u tački $z_0 = 0$ i poluprečnicima $r_1 = 2$ i $r_2 = 3$.



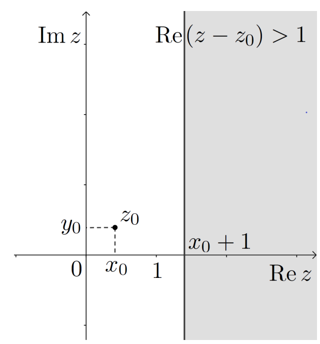
e) Traženi skup tačaka čine sve tačke kompleksne ravni koje se nalaze između poluprave sa početkom u koordinatnom početku, koja zaklapa ugao α sa pozitivnim delom realne ose i poluprave sa početkom u koordinatnom početku, koja zaklapa ugao β sa pozitivnim delom realne ose, posmatrano u pozitivnoj orijentaciji.



f) Neka je $z = x + iy$ i $z_0 = x_0 + iy_0$. Tada je

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z - z_0) > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(x - x_0 + i(y - y_0)) > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x - x_0 > 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x > x_0 + 1, \end{aligned}$$

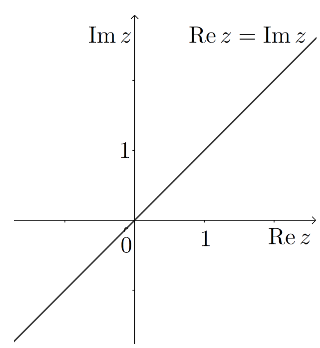
pa je traženi skup tačaka poluravan kojoj pripadaju kompleksni brojevi sa realnim delom većim od $x_0 + 1$.



g) Neka je $z = x + iy$. Tada je

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z \Leftrightarrow x = y,$$

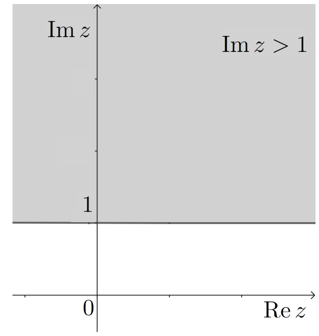
pa je traženi skup tačaka prava koja sadrži koordinatni početak i predstavlja simetralu prvog i trećeg kvadranta.



h) Neka je $z = x + iy$. Tada je

$$\operatorname{Im} z > 1 \Leftrightarrow y > 1,$$

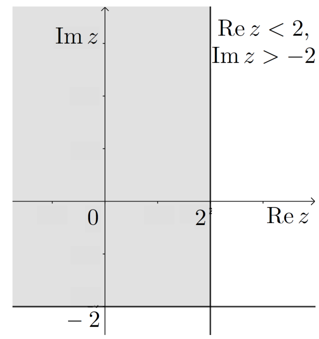
pa je traženi skup tačaka poluravan kojoj pripadaju kompleksni brojevi sa imaginarnim delom većim od 1.



i) Neka je $z = x + iy$. Tada je

$$\operatorname{Re} z < 2 \wedge \operatorname{Im} z > -2 \Leftrightarrow x < 2 \wedge y > -2,$$

pa traženi skup tačaka čine sve tačke kompleksne ravni kod kojih je realni deo manji od 2, a imaginarni deo veći od -2.

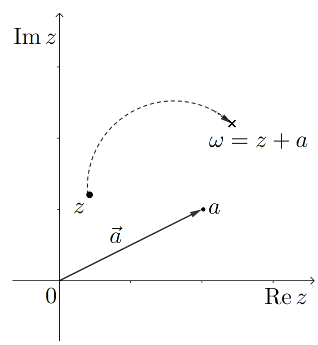


Konformna preslikavanja

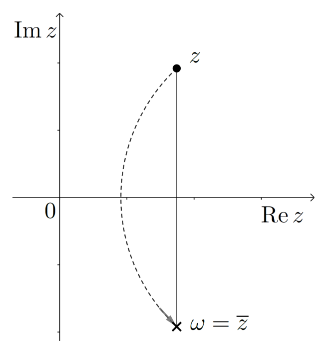
Neka je $\omega = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ analitička funkcija. $\omega = f(z)$ je **konformno preslikavanje** ako je $f'(z) \neq 0$.

Transformacije podudarnosti:

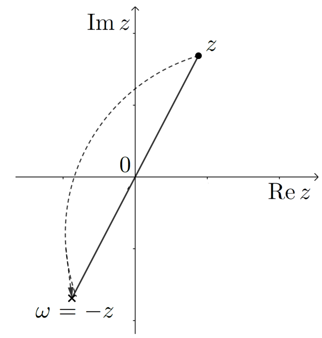
1. Preslikavanje $\omega = z + a$, $a \in \mathbb{C}$ je **translacija** za vektor $\vec{a}$ koji odgovara kompleksnom broju a.



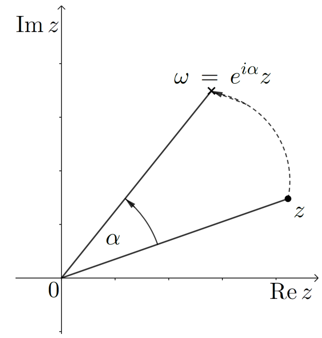
2. Preslikavanje $\omega = \overline{z}$, je **osna simetrija** u odnosu na realnu osu kao osu simetrije.



3. Preslikavanje $\omega = -z$, je **centralna simetrija** u odnosu na koordinatni početak kao centar simetrije.

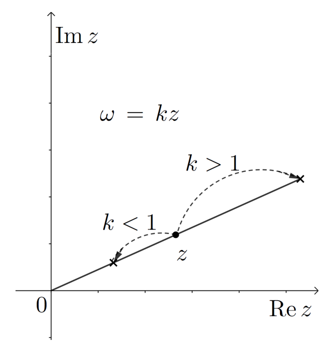


4. Preslikavanje $\omega = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ je **rotacija** oko koordinatnog početka za ugao α u pozitivnom smeru.



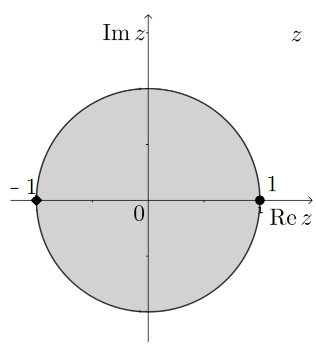
Transformacija sličnosti:

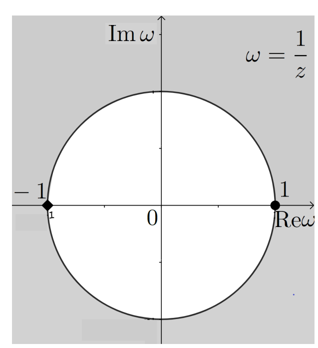
1. Preslikavanje $\omega = kz$, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ je **homotetija** sa koeficijentom k sa centrom u koordinatnom početku.



Inverzija:

Preslikavanje $\omega = \dfrac{1}{z}$ je **inverzija** u odnosu na centralnu jediničnu kružnicu $K(0,1)$ kao kružnicu inverzije.





Za inverziju važi:

- Unutrašnjost kružnice $K(0,1)$ se slika u spoljašnjost kružnice $K(0,1)$ i obrnuto.
- Fiksne tačke inverzije su tačke 1 i -1.

- Prava koja prolazi kroz koordinatni početak se slika u pravu koja prolazi kroz koordinatni početak.
- Kružnica koja ne prolazi kroz koordinatni početak se slika u kružnicu koja ne prolazi kroz koordinatni početak.
- Prava koja ne prolazi kroz koordinatni početak se slika u kružnicu koja prolazi kroz koordinatni početak.
- Kružnica koja prolazi kroz koordinatni početak se slika u pravu koja ne prolazi kroz koordinatni početak.

Eksponencijalno preslikavanje:
Preslikavanje $\omega = e^z$ je **eksponencijalno preslikavanje** kojim se tačka $z = x + iy$ slika u tačku $\omega = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \widetilde{\rho} e^{i\widetilde{\varphi}}$, tj. tačka sa realnim delom x i imaginarnim delom y se slika u tačku da modulom $\widetilde{\rho} = e^x$ i argumentom $\widetilde{\varphi} = y$.

Stepeno preslikavanje:
Preslikavanje $\omega = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ je **stepeno preslikavanje** kojim se tačka $z = \rho e^{i\varphi}$ slika u tačku $\omega = z^n = \rho^n e^{in\varphi} = \widetilde{\rho} e^{i\widetilde{\varphi}}$, tj. tačka sa modulom ρ i argumentom φ se slika u tačku da modulom $\widetilde{\rho} = \rho^n$ i argumentom $\widetilde{\varphi} = n\varphi$.

Zadaci:

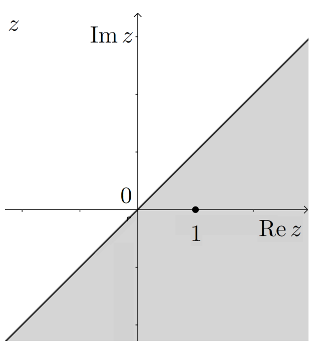
1. **Inverzijom $\omega = \frac{1}{z}$, preslikati oblasti:**

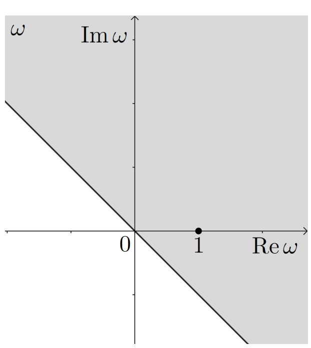
   a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 1\}$, c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > \frac{1}{4}\}$,

   d) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < -\frac{1}{2}\}$, e) $\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{i}{2}\right| > \frac{1}{2}\}$, f) $\{z \in \mathbb{C} : |z+1-i| > \sqrt{2}\}$,

   Rešenje:

   a)





Oblast koju preslikavamo je poluravan ograničena pravom $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$, kojoj pripadaju tačke kod kojih je imaginarni deo manji od realnog dela. Inverzijom prvo preslikavamo rub oblasti, tj. pravu $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$.
Kako je $\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$, a $\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$, i $z = \frac{1}{\omega}$ i $\overline{z} = \frac{1}{\overline{\omega}}$, dobija se

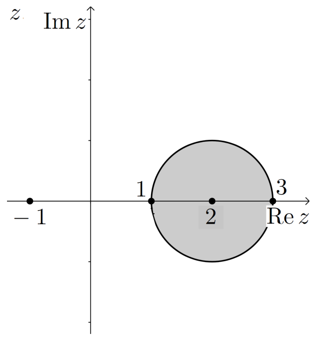
$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{z-\overline{z}}{2i} \Leftrightarrow \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\overline{\omega}} = i\frac{1}{\omega} + i\frac{1}{\overline{\omega}} \,/\cdot \omega\overline{\omega} \neq 0 \Leftrightarrow \overline{\omega} - \omega = i\overline{\omega} + i\omega.$$

Zamenom $\omega = x + iy$ sledi

$$x - iy - x - iy - i(x - iy) - i(x + iy) = 0 \Leftrightarrow -2y - 2x = 0 \Leftrightarrow y = -x,$$

pa je slika prave $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$ prava $\operatorname{Im} \omega = -\operatorname{Re} \omega$.
Potrebno je još odrediti gde se preslikavaju tačke oblasti $\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$ u $\omega-$ravni u odnosu na pravu $\operatorname{Im} \omega = -\operatorname{Re} \omega$. Kako tačka $z = 1$ pripada početnoj oblasti, tada njena slika $\omega = 1$ pripada rezultujućoj oblasti, pa je slika oblasti $\operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$ oblast $\operatorname{Im} \omega > -\operatorname{Re} \omega$.

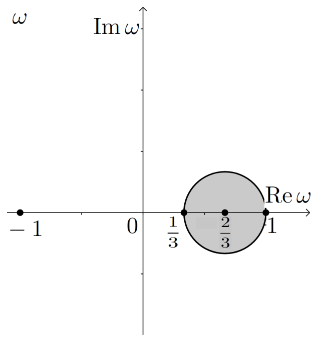
b)



Oblast koju preslikavamo je unutrašnjost kružnice $K(2,1)$. Inverzijom prvo preslikavamo rub oblasti, tj. kružnicu $|z-2|=1$.

$$\begin{aligned}
|z-2|=1\,/^2 \quad &\Leftrightarrow\quad (z-2)\,\overline{(z-2)}=1\\
&\Leftrightarrow\quad (z-2)(\overline{z}-2)=1\\
&\Leftrightarrow\quad z\overline{z}-2z-2\overline{z}+4=1\\
&\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\omega}\frac{1}{\overline{\omega}}-\frac{2}{\omega}-\frac{2}{\overline{\omega}}=-3\,/\cdot\omega\overline{\omega}\neq 0\\
&\Leftrightarrow\quad 1-2\overline{\omega}-2\omega=-3\omega\overline{\omega}.
\end{aligned}$$

Zamenom $\omega = x+iy$ sledi

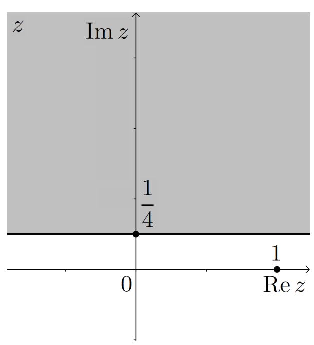


$$1-2x+2iy-2x-2iy=-3(x^2+y^2)\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{1}{9},$$

pa je slika kružnice $|z-2|=1$ kružnica $\left|\omega-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3}$.

Potrebno je još odrediti gde se preslikavaju tačke unutrašnjosti kružnice $|z-2|=1$ u $\omega-$ravni u odnosu na kružnicu $\left|z-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3}$. Kako tačka $z=-1$ ne pripada početnoj oblasti, tada ni njena slika $\omega=-1$ ne pripada rezultujućoj oblasti, pa je slika oblasti $|z-2|<1$ unutrašnjost kružnice $\left|\omega-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3}$, tj. $\left|\omega-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{3}$.

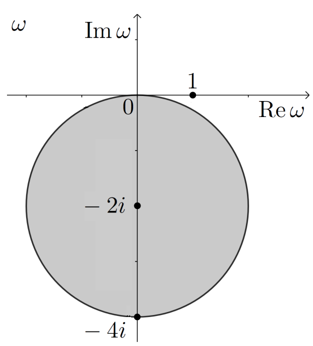
c)



Oblast koju preslikavamo je poluravan ograničena pravom $\operatorname{Im} z=\frac{1}{4}$, kojoj pripadaju tačke kod kojih je imaginarni deo veći od $\frac{1}{4}$. Inverzijom prvo preslikavamo rub oblasti, tj. pravu $\operatorname{Im} z=\frac{1}{4}$.

$$\frac{z-\overline{z}}{2i}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\overline{\omega}}=\frac{i}{2}\,/\cdot\omega\overline{\omega}\neq 0\Leftrightarrow\overline{\omega}-\omega=\frac{i}{2}\omega\overline{\omega}.$$

Zamenom $\omega=x+iy$ sledi

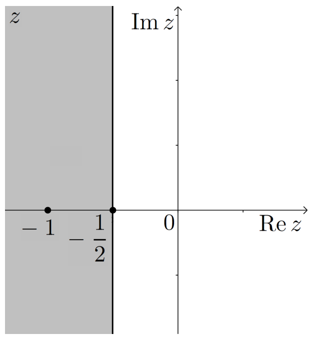


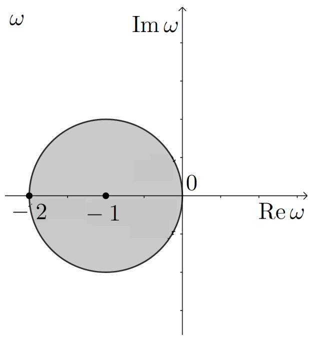
$$x-iy-x-iy=\frac{i}{2}(x^2+y^2)\Leftrightarrow x^2+y^2+4y=0\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2=2^2,$$

pa je slika prave $\operatorname{Im} z=\frac{1}{4}$ kružnica $K(-2i,2)$, tj. $|\omega+2i|=2$.

Potrebno je još odrediti gde se preslikavaju tačke oblasti $\operatorname{Im} z>\frac{1}{4}$, u $\omega-$ravni u odnosu na kružnicu $|\omega+2i|=2$. Kako tačka $z=1$ ne pripada početnoj oblasti, tada ni njena slika $\omega=1$ ne pripada rezultujućoj oblasti, pa je slika oblasti $\operatorname{Im} z>\frac{1}{4}$ unutrašnjost kružnice $K(-2i,2)$, tj. $|\omega+2i|<2$.

d)





Oblast koju preslikavamo je poluravan ograničena pravom $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$, kojoj pripadaju tačke kod kojih je realni deo manji od $-\frac{1}{2}$. Inverzijom prvo preslikavamo rub oblasti, tj. pravu $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$.

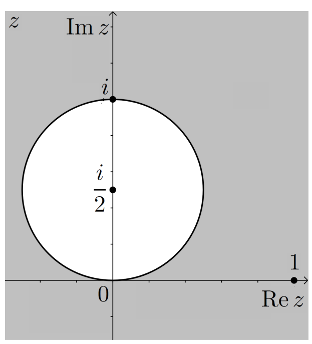
$$\frac{z+\overline{z}}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\overline{\omega}} = -1 \,/\cdot \omega\overline{\omega} \neq 0 \Leftrightarrow \overline{\omega} + \omega = -\omega\overline{\omega}.$$

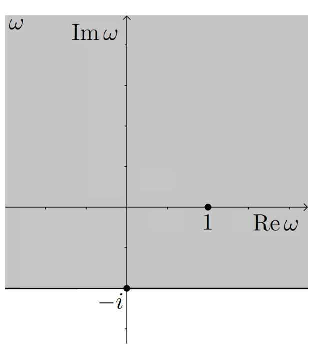
Zamenom $\omega = x + iy$ sledi

$$x - iy + x + iy = -(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1,$$

pa je slika prave $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$ kružnica $K(-1,1)$, tj. $|\omega + 1| = 1$.
Potrebno je još odrediti gde se preslikavaju tačke oblasti $\operatorname{Re} z < -\frac{1}{2}$ u $\omega-$ravni u odnosu na kružnicu $|\omega + 1| = 1$. Kako tačka $z = -1$ pripada početnoj oblasti, tada njena slika $\omega = -1$ pripada rezultujućoj oblasti, pa je slika oblasti $\operatorname{Re} z < -\frac{1}{2}$ unutrašnjost kružnice $K(-1,1)$, tj. $|\omega + 1| < 1$.

e)





Oblast koju preslikavamo je spoljašnjost kružnice $K(\frac{i}{2}, \frac{1}{2})$. Inverzijom prvo preslikavamo rub oblasti, tj. kružnicu $\left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

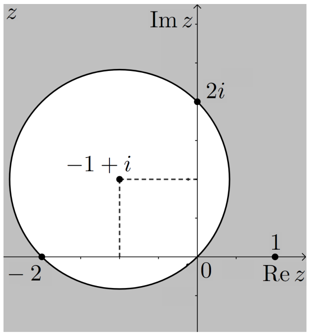
$$\begin{aligned}
\left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} \,/^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(z - \frac{i}{2}\right)\overline{\left(z - \frac{i}{2}\right)} = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z - \frac{i}{2}\right)\left(\overline{z} + \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad z\overline{z} + \frac{i}{2}z - \frac{i}{2}\overline{z} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\omega}\frac{1}{\overline{\omega}} + \frac{i}{2}\frac{1}{\omega} - \frac{i}{2}\frac{1}{\overline{\omega}} = 0 \,/\cdot 2\omega\overline{\omega} \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2 + i\overline{\omega} - i\omega = 0.
\end{aligned}$$

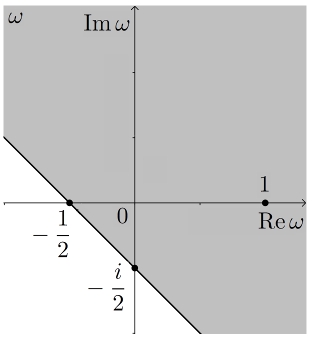
Zamenom $\omega = x + iy$ sledi

$$2 + i(x - iy) - i(x + iy) = 0 \Leftrightarrow 2 + ix + y - ix + y = 0 \Leftrightarrow y = -1,$$

pa je slika kružnice $\left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$, prava $\operatorname{Im} \omega = -1$.
Potrebno je još odrediti gde se preslikavaju tačke spoljašnjosti kružnice u $\omega-$ravni u odnosu na pravu $\operatorname{Im} \omega = -1$. Kako tačka $z = 1$ pripada početnoj oblasti, tada njena slika $\omega = 1$ pripada rezultujućoj oblasti, pa je slika oblasti $\left|z - \frac{i}{2}\right| > \frac{1}{2}$ poluravan $\operatorname{Im} \omega > -1$.

f)





Oblast koju preslikavamo je spoljašnjost kružnice $K(-1+i,\sqrt{2})$. Inverzijom prvo preslikavamo rub oblasti, tj. kružnicu $|z-(-1+i)| = \sqrt{2}$.

$$
\begin{aligned}
|z-(-1+i)| = \sqrt{2}\,/^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (z-(-1+i))\,\overline{(z-(-1+i))} = 2\\
&\Leftrightarrow \quad (z-(-1+i))\,(\overline{z}+1+i) = 2\\
&\Leftrightarrow \quad z\overline{z} + (1+i)z + (1-i)\overline{z} + 2 = 2\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\omega}\frac{1}{\overline{\omega}} + \frac{1+i}{\omega} + \frac{1-i}{\overline{\omega}} = 0 \,/\cdot 2\omega\overline{\omega} \neq 0\\
&\Leftrightarrow \quad 1 + (1+i)\overline{\omega} + (1-i)\omega = 0.
\end{aligned}
$$

Zamenom $\omega = x+iy$ sledi

$$1 + (1+i)(x-iy) + (1-i)(x+iy) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + 1 = 0,$$

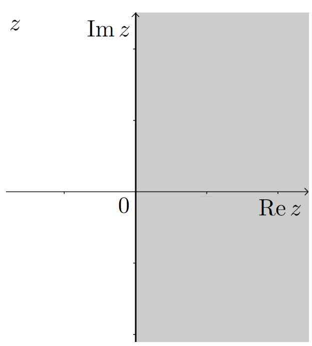
pa je slika kružnice $|z-(-1+i)| = \sqrt{2}$ prava $2\operatorname{Re}\omega + 2\operatorname{Im}\omega + 1 = 0$. Potrebno je još odrediti gde se preslikavaju tačke spoljašnjosti kružnice u $\omega-$ravni u odnosu na pravu $\operatorname{Im}\omega = -\operatorname{Re}\omega - \frac{1}{2}$. Kako tačka $z=1$ pripada početnoj oblasti, tada njena slika $\omega = 1$ pripada rezultujućoj oblasti, pa je slika oblasti $|z-(-1+i)| > \sqrt{2}$ poluravan $2\operatorname{Re}\omega + 2\operatorname{Im}\omega + 1 > 0$.

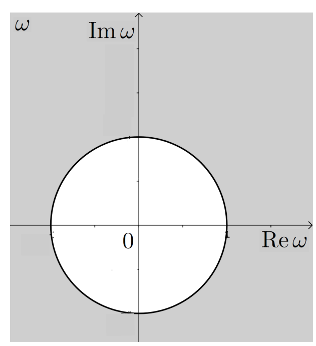
2. **Eksponencijalnom funkcijom $\omega = e^z$, preslikati oblasti:**

   a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$.

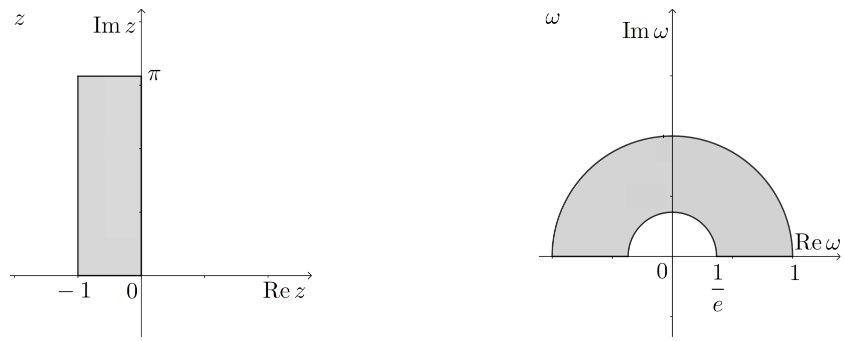
   Rešenje:

   a) Neka je $z = x+iy$. Oblast koju preslikavamo su tačke $z \in \mathbb{C}$ za koje je $\operatorname{Re} z > 0$, tj. $x > 0$, pa su slike tih tačaka tačke $\omega \in \mathbb{C}$ čiji je moduo $\rho = e^x > 1$. Dakle, tražena oblast je spoljašnjost kružnice $|z| > 1$.





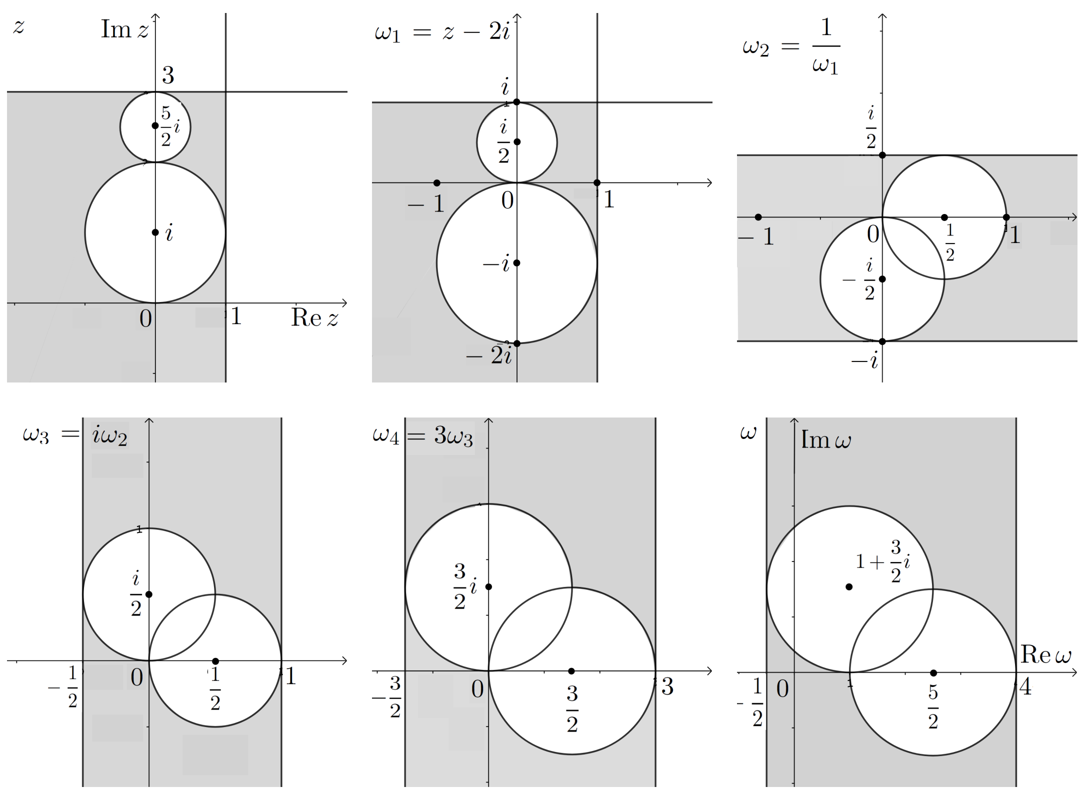
   b) Neka je $z = x+iy$. Oblast koju preslikavamo su tačke $z \in \mathbb{C}$ za koje je $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, tj. $-1 < x < 0$ i $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ tj. $0 < y < \pi$, pa su slike tih tačaka tačke $\omega \in \mathbb{C}$ čiji je moduo $e^{-1} < e^x < 1$ i argument $0 < \arg\omega < \pi$. Dakle, tražena oblast je deo kružnog prstena sa poluprečnicima $\frac{1}{e}$ i 1 u prvom i drugom kvadrantu.



3. **Preslikavanjem** $\omega = \dfrac{z+i}{z-2i}$ **preslikati oblast** $G = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| > 1, \left|z - \frac{5}{2}i\right| > \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z < 3, \operatorname{Re} z < 1\}$**.**

   Rešenje:

   Preslikavanje $\omega = \dfrac{z+i}{z-2i} = \dfrac{z-2i+3i}{z-2i} = 1 + 3i\dfrac{1}{z-2i}$, se može razložiti na kompoziciju pet elementarnih preslikavanja. To su: translacija po imaginarnoj osi $\omega_1 = z - 2i$, inverzija $\omega_2 = \dfrac{1}{\omega_1}$, rotacija $\omega_3 = i\,\omega_2$, homotetija $\omega_4 = 3\,\omega_3$ i translacija po realnoj osi $\omega_5 = 1 + \omega_4$. Preslikavanjem oblasti G datim preslikavanjima redom se dobija

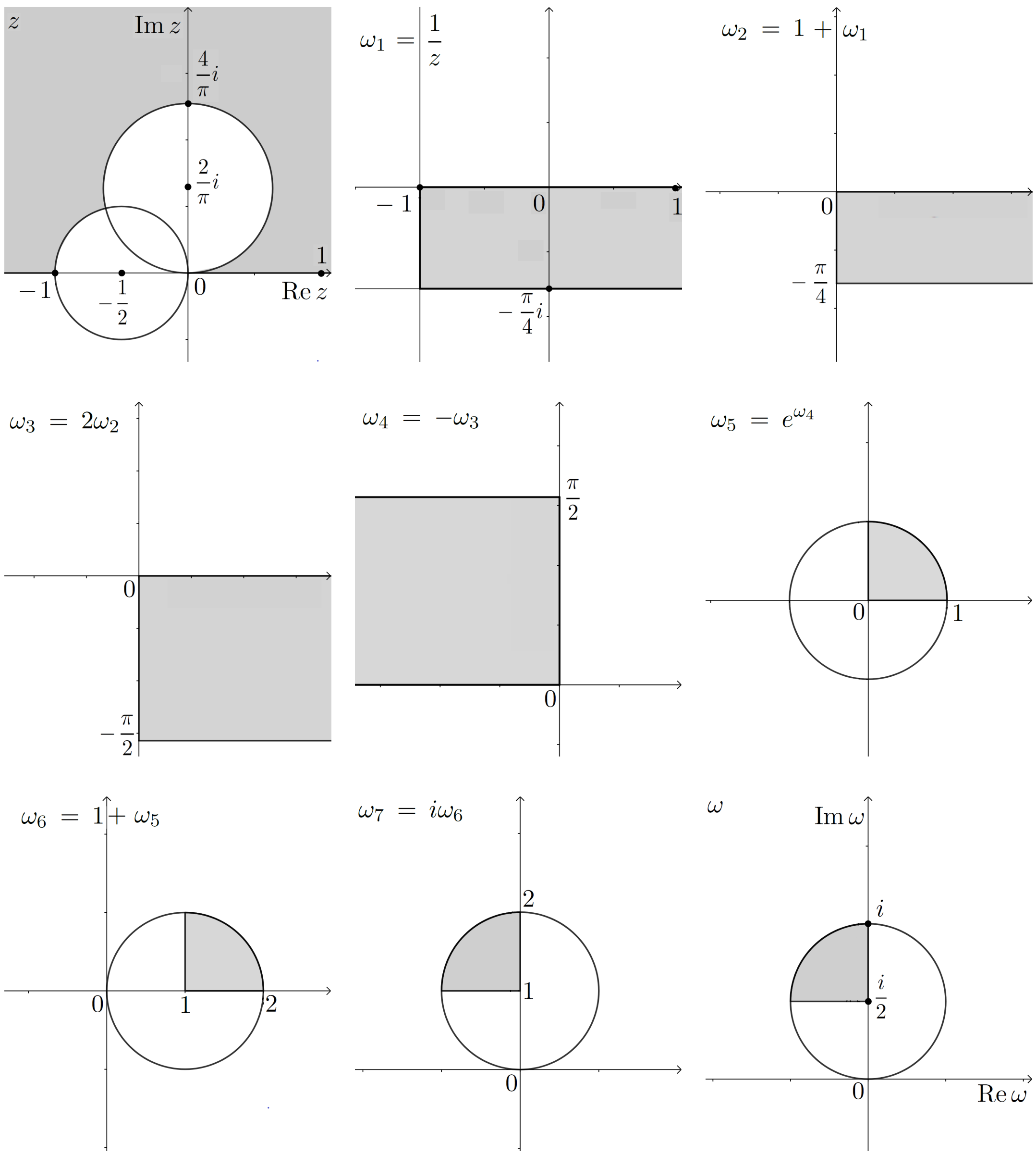


   pa je slika početne oblasti G oblast $G^* = \{\omega \in \mathbb{C} : \left|\omega - 1 - \frac{3}{2}i\right| > \frac{3}{2}, \left|\omega - \frac{5}{2}\right| > \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\omega < 4\}$.

4. **Preslikavanjem** $\omega = i\dfrac{\cos i\frac{z+1}{z}}{e^{\frac{z+1}{z}}}$ **preslikati oblast** $G = \{z \in \mathbb{C} : \left|z + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}, \left|z - \frac{2}{\pi}i\right| > \frac{2}{\pi}, \operatorname{Im} z > 0\}$**.**

Rešenje:

Preslikavanje $\omega = i\dfrac{\cos i\frac{z+1}{z}}{e^{\frac{z+1}{z}}} = i\dfrac{\frac{e^{-\frac{z+1}{z}}+e^{\frac{z+1}{z}}}{2}}{e^{\frac{z+1}{z}}} = \dfrac{i}{2}\dfrac{e^{\frac{z+1}{z}}\left(1+e^{-2\frac{z+1}{z}}\right)}{e^{\frac{z+1}{z}}} = \dfrac{i}{2}\left(1+e^{-2\left(1+\frac{1}{z}\right)}\right)$, se može razložiti na kompoziciju osam elementarnih preslikavanja. To su: inverzija $\omega_1 = \dfrac{1}{z}$, translacija po realnoj osi $\omega_2 = 1 + \omega_1$, homotetija $\omega_3 = 2\omega_2$, centralna simetrija $\omega_4 = -\omega_3$, eksponencijalno preslikavanje $\omega_5 = e^{\omega_4}$, translacija po realnoj osi $\omega_6 = 1 + \omega_5$, rotacija $\omega_7 = i\omega_6$ i homotetija $\omega_8 = \dfrac{1}{2}\omega_7$. Preslikavanjem oblasti G datim preslikavanjima redom se dobija

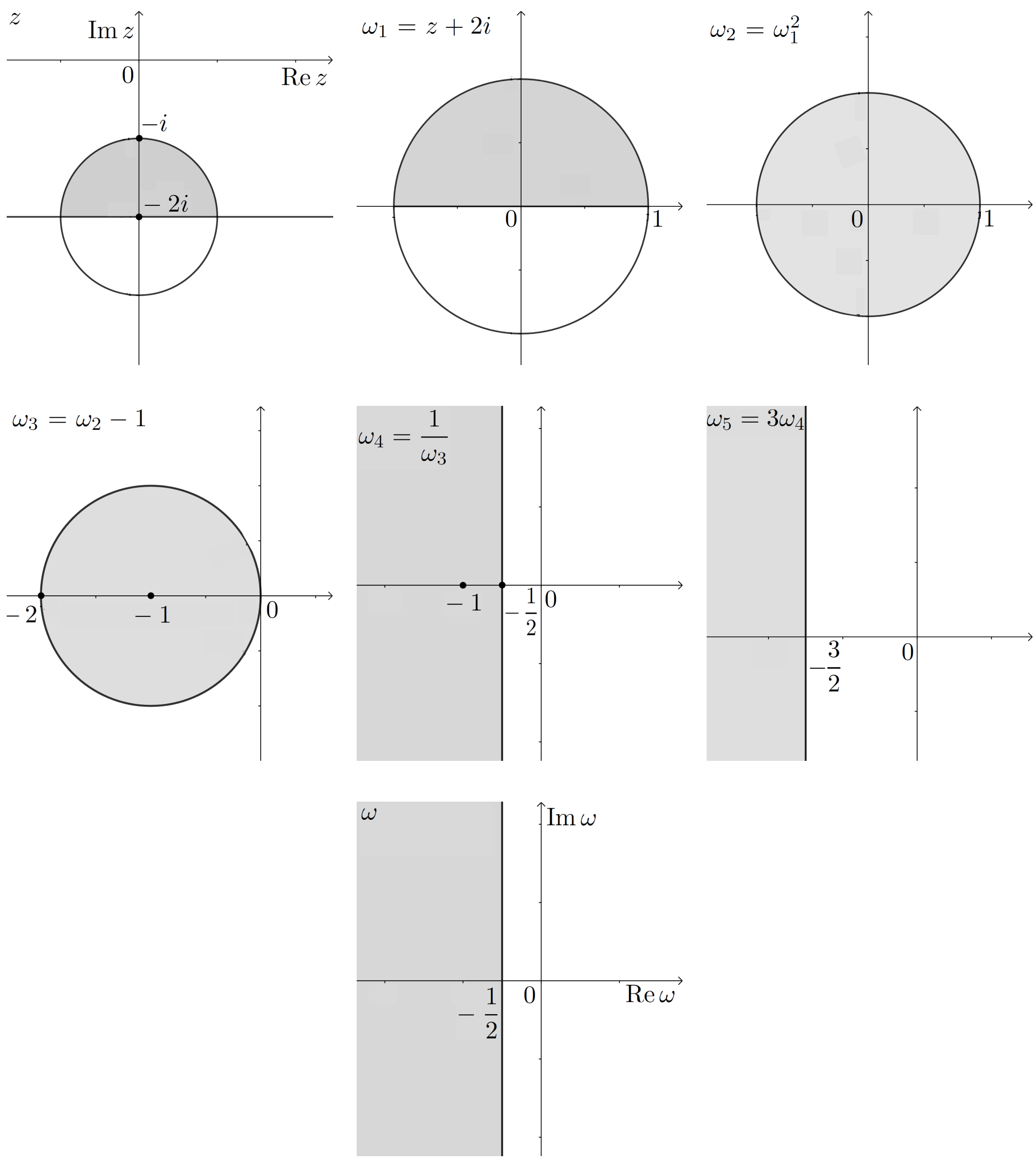


pa je slika početne oblasti G oblast $G^* = \{\omega \in \mathbb{C} : \left|\omega - \dfrac{i}{2}\right| < \dfrac{1}{2}, \operatorname{Re}\omega < 0, \operatorname{Im}\omega > \dfrac{1}{2}\}$.

5. **Preslikavanjem** $\omega = \dfrac{z^2+4iz-2}{z^2+4iz-5}$ **preslikati oblast** $G = \{z \in \mathbb{C} : |z+2i| < 1, \operatorname{Im} z \geq -2\}$**.**

Rešenje:

Preslikavanje $\omega = \dfrac{z^2+4zi-2}{z^2+4iz-5} = \dfrac{z^2+4iz-5+3}{z^2+4iz-5} = 1 + \dfrac{3}{z^2+4iz-4-1} = 1 + 3\dfrac{1}{(z+2i)^2-1}$, se može razložiti na kompoziciju šest elementarnih preslikavanja. To su: translacija po imaginarnoj osi $\omega_1 = z+2i$, stepenovanje $\omega_2 = \omega_1^2$, translacija po realnoj osi $\omega_3 = \omega_2 - 1$, inverzija $\omega_4 = \dfrac{1}{\omega_3}$, homotetija $\omega_5 = 3\,\omega_4$ i translacija po realnoj osi $\omega_6 = 1 + \omega_5$. Preslikavanjem oblasti G datim preslikavanjima redom se dobija

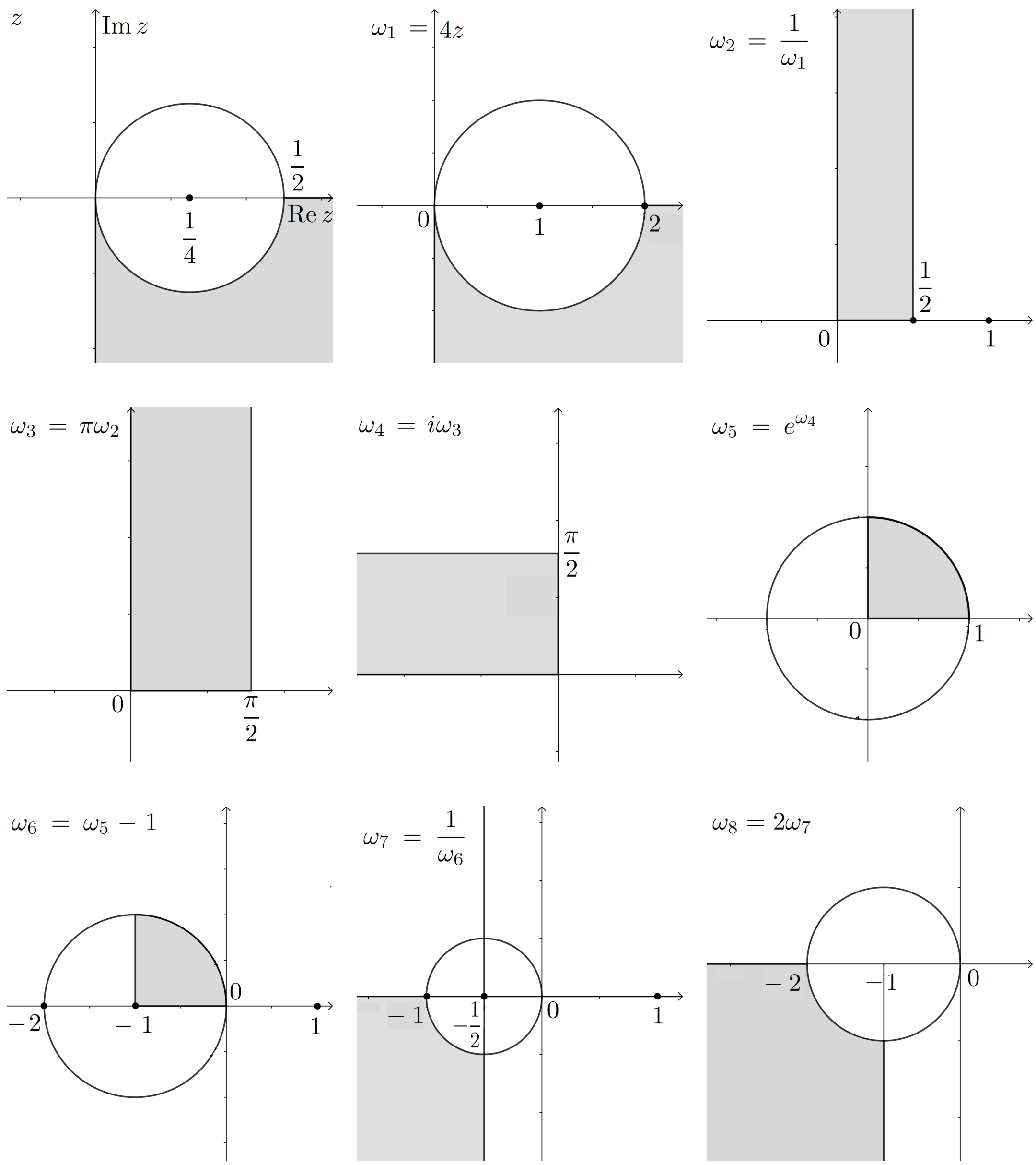


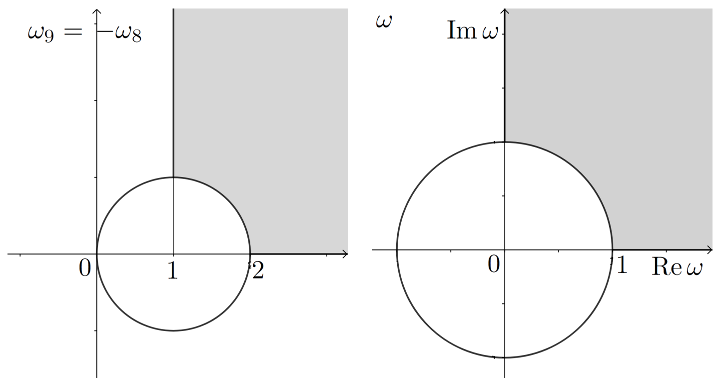
pa je slika početne oblasti G oblast $G^* = \{\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\omega < -\dfrac{1}{2}\}$.

6. **Preslikavanjem** $\omega = i\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{8z}$ **preslikati oblast** $G = \{z \in \mathbb{C} : \left|z - \dfrac{1}{4}\right| > \dfrac{1}{4}, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z < 0\}$**.**

Rešenje:

Preslikavanje $\omega = i\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{8z} = i\dfrac{\cos\frac{\pi}{8z}}{\sin\frac{\pi}{8z}} = i\dfrac{\frac{e^{i\frac{\pi}{8z}}+e^{-i\frac{\pi}{8z}}}{2}}{\frac{e^{i\frac{\pi}{8z}}-e^{-i\frac{\pi}{8z}}}{2i}} = -\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{8z}}\left(1+e^{i\frac{\pi}{4z}}\right)}{e^{-i\frac{\pi}{8z}}\left(-1+e^{i\frac{\pi}{4z}}\right)} = -\left(1+\dfrac{2}{e^{i\frac{\pi}{4z}}-1}\right) = -1-2\dfrac{1}{e^{i\pi\frac{1}{4z}}-1}$, se može razložiti na kompoziciju deset elementarnih preslikavanja. To su: homotetija $\omega_1 = 4z$, inverzija $\omega_2 = \dfrac{1}{\omega_1}$, homotetija $\omega_3 = \pi\omega_2$, rotacija $\omega_4 = i\omega_3$, eksponencijalno preslikavanje $\omega_5 = e^{\omega_4}$, translacija po realnoj osi $\omega_6 = \omega_5 - 1$, inverzija $\omega_7 = \dfrac{1}{\omega_6}$, homotetija $\omega_8 = 2\omega_7$, centralna simetrija $\omega_9 = -\omega_8$ i translacija po realnoj osi $\omega_{10} = -1 + \omega_9$. Preslikavanjem oblasti G datim preslikavanjima redom se dobija





pa je slika početne oblasti G oblast $G^* = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| > 1, \mathrm{Re}\,\omega > 0, \mathrm{Im}\,\omega > 0\}$.