Informacioni inženjering
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
21.6.2021.

PREZIME I IME: ____________________

BROJ INDEKSA: __________

Predispitne obaveze 2
10 poena

$R_U=\{0,1,2\}$

1. [3 poena] Dat je slučajni proces $X_n=(n+1)U$, $n\in\mathbb{N}$, gde je X U slučajna promenljiva sa binomnom $\mathcal{B}(2,\frac{1}{3})$ raspodelom.

   Skup stanja slučajnog procesa X_n je $S=\{(n+1)\cdot 0,\ \overbrace{(n+1)\cdot 1}^{n+1},\ \overbrace{(n+1)\cdot 2}^{2n+2} : n\in\mathbb{N}\}$

   $=\{0,2,3,4,\dots,3,6,\dots\}=\{0,2,3,4,\dots\}$

   Matematičko očekivanje slučajnog procesa X_n je $m_X(n)=E(X_n)=E((n+1)\cdot U)$

   $=(n+1)\cdot E(U)=(n+1)\cdot 2\cdot\frac{1}{3}$

   Korelaciona funkcija slučajnog procesa X_n je $R_X(n,k)=E(X_n\cdot X_k)=E((n+1)\cdot U\cdot(k+1)U)$

   $=(n+1)(k+1)E(U^2)=(n+1)(k+1)\cdot 2\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}\right)=\dots$

   $D(U)=E(U^2)-E(U)^2$

   $npq=E(U^2)-(np)^2$

   $E(U^2)=npq+n^2p^2=np(q+np)$ (*) $n=2$, $p=1/3$, $q=2/3$

2. [2 poena] Neka je X_t Poasonov proces i neka slučajna promenljiva T predstavlja vreme koje protekne do realizacije prvog događaja. Naći raspodelu slučajne promenljive T.

   T – ~~кр~~. сл. пром. $F_T(t)=?$

   $X_t-X_s:\mathcal{P}(\lambda(t-s))$, $t>s$, $X_0=0$

   $t\in\mathbb{R}$

   $F_T(t)=P(T<t)$ (*)

   $t\le 0$: $F_T(t)\overset{(*)}{=}P(\emptyset)=0$

   $X_t=X_t-0$

   $X_t=X_t-X_0$

   $F_T(t)=P(T<t)=1-P(T\ge t)=1-P(X_t=0)$

   $=1-P(X_t-X_0=0)=1-\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=1-e^{-\lambda t}$

   $X_t-X_0:\mathcal{P}(\lambda(t-0))$

   $F_T(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ 1-e^{-\lambda t}, & t>0\end{cases}$ $T:\mathcal{E}(\lambda)$

3. [1 poen] Objasniti razliku između homogenog i stacionarnog procesa Markova.

   (ЛАНЦА)

   ХОМОГЕНА – ВЕРОВАТНОЋЕ ПРЕЛАЗА ИНВАРИЈАНТНЕ У ОДНОСУ НА ТРАНСЛАЦИЈУ ВРЕМЕНА

   СТАЦИОНАРНА – ВЕРОВ. СТАЊА ИНВАРИЈАНТНЕ У ОДНОСУ НА ТРАНС. ВРЕМЕНА

   [$p(n)=p(0)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ стац.)   СТАЦ. $\Rightarrow$ ХОМОГ.

4. [4 poena] Dat je lanac Markova čiji je skup stanja $S = \{s_1, s_2\}$ i čija je matrica prelaza
$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1. & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \end{array} . \not> 0 \quad \left(\frac{3}{4}\right)^1$$

Da li posttoje finalne verovatnoće za dati lanac Markova? Objasniti odgovor! Ako postoje finalne verovatnoće naći ih.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 & \left(\frac{3}{4}\right)^2 \end{bmatrix} \not> 0$$

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\cancel{\left(\frac{3}{4}\right)^n}\to 0 & \cancel{\left(\frac{3}{4}\right)^n}\to 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = P^*$$

$$p^* = \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \\ [\,1 & 0\,] \end{array} \quad \text{ДА}$$

P^n, $n\to\infty$ конвергира ка матрици P^*
која има исте врсте

објашњење

$$p(1) = p(0)\cdot P^1 = [0 \quad 1]\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \\ [\,1/4 & 3/4\,] \end{array}$$

$= p_2(1)$

Odrediti početni vektor $\mathbf{p}(0)$ ako je sistem u početnom momentu bio u stanju s_2 : $\mathbf{p}(0) =$ $[0 \quad 1]$

$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$

Izračunati $P(X_1 = s_2, X_2 = s_1, X_3 = s_1) =$ $P(X_1=s_2)\cdot P(X_2=s_1 | X_1=s_2)\cdot P(X_3=s_1 | X_1=s_2, X_2=s_1)$

$= p_2(1)\cdot p_{21}(2-1)\cdot p_{11}(3-2) = \underline{p_2(1)}\cdot p_{21}(1)\, p_{11}(1)$

$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 \quad \Big\} \; p_2(1)\cdot p_{21}(1)\cdot p_{11}(1)$

Odrediti, ako je to moguće, početni vektor $\mathbf{p}(0)$ tako da dati lanac Markova bude stacionaran. Objasniti odgovor!

ДА, $p(0) = p^* = [1 \quad 0]$ постоји P^*

Kako se naziva stanje s_1 datog lanca Markova? Апсорбујуће

$p_{11} = 1$ (кад систем дође у s_1 у њему и остаје)

$U : B(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

$R_U = \{0, 1, \dots, n\}$

$P(U = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $q = 1 - p$

$E(U) = n \cdot p$

[illegible]

$\{0, 1, \dots, 10\}$

$U : B(10, 1/3)$

Informacioni inženjering PREZIME I IME: ______________________________
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
21.6.2021. BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 2
30 poena

Zadaci – Raditi u svesci!

1. [8 poena] Neprekidne i nezavisne slučajne promenljive X i Y su date svojim funkcijama raspodele:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{x}{4} & , \quad 0 \leq x < 4 \\ 1 & , \quad x \geq 4 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y < 0 \\ 1 - e^{-2y} & , \quad y \geq 0 \end{cases} .$$

Definisan je slučajni proces $W_t = tX + t^2 Y,\ t \geq 0$.

(a) Odrediti srednju vrednost, korelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa W_t.

(b) Da li je ovaj proces slabo stacionaran? Objasniti odgovor!

2. [8 poena] Jovica svaki dan odlazi u jednu od tri čitaonice, $\check{C}_1$, $\check{C}_2$ i $\check{C}_3$. Ako jednog dana ide u čitaonicu $\check{C}_1$, onda sutra sigurno ne ide u čitaonicu $\check{C}_3$, a podjednako verovatno odlazi u čitaonice $\check{C}_1$ i $\check{C}_2$. Ako jedan dan ide u čitaonicu $\check{C}_2$, sutra sa istom verovatnoćom odlazi u sve tri čitaonice. Ako jedan dan ide u čitaonicu $\check{C}_3$, sutra ne odlazi u čitaonicu $\check{C}_1$, a sa istom verovatnoćom posećuje jednu od preostale dve čitaonice. Jovica u ponedeljak odlazi u čitaonicu $\check{C}_1$ sa tri puta veom verovatnoćom nego u čitaonicu $\check{C}_3$, dok u čitaonicu $\check{C}_2$ odlazi sa dva puta većom verovatnoom nego u čitaonicu $\check{C}_3$.

(a) U koju od navedenih čitaonica Jovica odlazi najverovatnije u sredu?

(b) Izračunati verovatnoću da Jovica u ponedeljak odlazi u čitaonicu $\check{C}_1$, a utorak i sredu u čitaonicu $\check{C}_2$.

(c) Izračunati verovatnoću da Jovica odlazi u sredu u čitaonicu $\check{C}_1$ i u četvrtak u čitaonicu $\check{C}_2$, ako se zna da je i u ponedeljak i u utorak bio u čitaonici $\check{C}_1$.

(d) Ispitati postojanje finalnih verovatnoća, i odrediti ih, ako postoje.

3. [9 poena] U prodavnici igračaka rade dva prodavca. U prodavnicu tokom jednog sata u proseku dođe 15 kupaca i potok trebovanja je Poasonov proces. Vreme usluživanja jednog kupca koji dođe u prodavnicu ima eksponencijalnu raspodelu i traje u proseku 5 minuta. Red čekanja nema ograničenja.

a) Odrediti brzine rađanja i umiranja ovog sistema usluživanja. Ispitati postojanje finalnih verovatnoća, i odrediti ih, ako postoje.

b) Odrediti očekivani broj kupaca u prodavnici nakon dovoljno dugo vremena.

c) Vlasnik prodavnice svakom kupcu koji zatekne četiri ili više kupaca u prodavnici poklanja šareni privezak. Koliko privezaka će pokloniti tokom osmočasovnog radnog vremena?

d) Koliko vremena u proseku oba prodavca provedu bez posla tokom osmočasovnog radnog vremena?

Teorijska pitanja – Raditi na ovom papiru!

1. [5 poena] Stacionarni slučajni procesi (definisati strogu i slabu stacionarnost procesa; za strogo stacionarni proces izračunati matematičko očekivanje i korelacionu funkciju).

Informacioni inženjering
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 21. jun 2021.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Deo završnog ispita 1 –40 poena

Zadaci

1. [6 poena] Brojevi a i b biraju se na slučajan način iz intervala $[0,1]$. Izračunati verovatnoću da kvadratna jednačina $x^2+ax+b=0$ nema realna rešenja.
2. [8 poena] Na stolu se nalaze tri kutije sa kuglicama. U prvoj kutiji su dve crne i jedna bela kuglica, u drugoj dve bele i jedna crna kuglica, a u trećoj jedna crna i jedna bela kuglica. Na slučajan način se iz prve i druge kutije uzima po jedna kuglica i prebacuje u treću kutiju, a zatim se iz treće kutije biraju tri kuglice odjednom. Naći raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvučeni crnih kuglica iz treće kutije.
3. [8 poena] Slučajna promenljiva X data je funkcijom gustine $\varphi_X(x)=\begin{cases} ax, & x\in(0,\sqrt{2}) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.
   a) Izračunati konstantu a i naći funkciju raspodele slučajne promenljive X.
   b) Naći raspodelu slučajne promenljive $Y=\max\{X,1\}$. Da li je Y slučajna promenljiva neprekidnog tipa?
4. [8 poena] Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(1,3)$ raspodelu, a uslovna slučajna promenljiva $Y|X=x$, $x\in(1,3)$, ima uniformnu $\mathcal{U}(x,x+1)$ raspodelu. Naći raspodelu slučajne promenljive $Z=XY$.

Teorijska pitanja – pisati na ovom papiru

1. [5 poena] Jednodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa.
2. [5 poena] Uslovna slučajna promenljiva i njeno očekivanje (funkcija raspodele, diskretna i neprekidna).