Višedimenzionalna diskretna slučajna promenljiva i njene transformacije.

Zadatak 1

Postavka: Novčić se baca tri puta. Ukoliko sva tri puta padne ista strana izvodi se još jedno bacanje.

(a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive (slučajnog vektora) (X, Y) gde je X broj palih grbova, Y broj bacanja.

(b) Naći marginalne raspodele.

(c) Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.

(d) Naći raspodelu slučajne promenljive $X|Y = 3$.

(e) Naći raspodelu za $Z = XY$, $U = 2X - Y$, $V = max\{X, Y\}$, $W = max\{Y, \frac{X}{2}\}$.

Rešenje:

(a) Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj grbova, a slučajna promenljiva Y broj bacanja. Tada je skup vrednosti slučajne promenljive X, $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dok je skup vrednosti za Y, $R_Y = \{3, 4\}$. U nastavku tražimo zakon raspodele slučajne promenljive (X, Y).

$P(X = 0, Y = 3) = 0$
$P(X = 1, Y = 3) = P(GPP + PGP + PPG) = P(GPP) + P(PGP) + P(PPG) = \binom{3}{1}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$
$P(X = 2, Y = 3) = P(GGP + GPG + PGG) = P(GGP) + P(GPG) + P(PGG) = \binom{3}{2}(\frac{1}{2})^2\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
$P(X = 3, Y = 3) = 0$
$P(X = 4, Y = 3) = 0$

$P(X = 0, Y = 4) = P(PPPP) = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$
$P(X = 1, Y = 4) = P(PPPG) = (\frac{1}{2})^3\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
$P(X = 2, Y = 4) = 0$
$P(X = 3, Y = 4) = P(GGGP) = (\frac{1}{2})^3\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$P(X=4, Y=4) = P(GGGG) = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$

Zakon raspodele predstavljamo tablicom:

$X \backslash Y$	3	4	$P(X=i)$
0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{6}{16}$
3	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$P(Y=j)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(b) Marginalne raspodele, tj. raspodele pojedinačnih slučajnih promenljivih X i Y, čitamo iz tablice. Marginalne verovatnoće za slučajnu promenljivu X čitamo iz poslednje kolone, dok za Y čitamo iz poslednje vrste. Dakle:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$Y : \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(c) Slučajne promenljive X i Y su nezavisne ako i samo ako je:

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j), \quad \text{za svako } \ i \in R_X, j \in R_Y.$$

$P(X=3) \cdot P(Y=3) = \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} \neq 0 = P(X=3, Y=3) \Rightarrow$ promenljive X i Y nisu nezavisne.

(d) Skup mogućih vrednosti slučajne promenljive $X|Y=3$ je isti kao skup vrednosti slučajne promenljive X, tj. $R_{X|Y=3} \subseteq \{0,1,2,3,4\}$. Odgovarajuće vrovatnoće dobijamo na sledeći način:

$P(X=k|Y=3) = \frac{P(X=k,Y=3)}{P(Y=3)} = \frac{P(X=k,Y=3)}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \cdot P(X=k, Y=3), \forall k \in R_X.$

$P(X=0|Y=3) = \frac{4}{3} \cdot P(X=0, Y=3) = \frac{4}{3} \cdot 0 = 0,$

$P(X=1|Y=3) = \frac{4}{3} \cdot P(X=1, Y=3) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$

$P(X=2|Y=3) = \frac{4}{3} \cdot P(X=2, Y=3) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$

$P(X=3|Y=3) = \frac{4}{3} \cdot P(X=3, Y=3) = \frac{4}{3} \cdot 0 = 0,$

$P(X=4|Y=3) = \frac{4}{3} \cdot P(X=4, Y=3) = \frac{4}{3} \cdot 0 = 0.$

Dakle, zakon raspodele je:

$X|Y=3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, odnosno $X|Y=3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(e) – Slučajna promenljiva Z je definisana sa $Z = XY$. Kako je $R_X = \{0,1,2,3,4\}$ i $R_Y = \{3,4\}$, možemo zaključiti da je skup vrednosti slučajne promenljive Z, $R_Z \subseteq \{0,3,4,6,8,9,12,16\}$. Zakon raspodele tražimo u nastavku.

$P(Z=0) = P(X=0, Y=3) + P(X=0, Y=4) = 0 + \frac{1}{16} = \frac{1}{16},$

$P(Z=3)=P(X=1,Y=3)=\frac{3}{8}$,
$P(Z=4)=P(X=1,Y=4)=\frac{1}{16}$,
$P(Z=6)=P(X=2,Y=3)=\frac{3}{8}$,
$P(Z=8)=P(X=2,Y=4)=0$,
$P(Z=9)=P(X=3,Y=3)=0$,
$P(Z=12)=P(X=3,Y=4)+P(X=4,Y=3)=\frac{1}{16}+0=\frac{1}{16}$,
$P(Z=16)=P(X=4,Y=4)=\frac{1}{16}$.
Dakle, $Z:\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 6 & 12 & 16 \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

– Slučajna promenljiva U je definisana sa $U=2X-Y$. Onda je $R_U \subseteq \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$. Računamo:

$P(U=-4)=P(X=0,Y=4)=\frac{1}{16}$,
$P(U=-3)=P(X=0,Y=3)=0$,
$P(U=-2)=P(X=1,Y=4)=\frac{1}{16}$,
$P(U=-1)=P(X=1,Y=3)=\frac{3}{8}$,
$P(U=0)=P(X=2,Y=4)=0$,
$P(U=1)=P(X=2,Y=3)=\frac{3}{8}$,
$P(U=2)=P(X=3,Y=4)=\frac{1}{16}$,
$P(U=3)=P(X=3,Y=3)=0$,
$P(U=4)=P(X=4,Y=4)=\frac{1}{16}$,
$P(U=5)=P(X=4,Y=3)=0$.
Prema tome, imamo $U:\begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

– Slučajna promenljiva V je definisana sa $V=max\{X,Y\}$, pa je $R_V \subseteq \{3,4\}$.

$P(V=3)=P(X=0,Y=3)+P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=3)+$
$+P(X=3,Y=3)=\frac{3}{4}$,
$P(V=4)=P(X=0,Y=4)+P(X=1,Y=4)+P(X=2,Y=4)+$
$+P(X=3,Y=4)+P(X=4,Y=4)+P(X=4,Y=3)=\frac{1}{4}$.
Zakon raspodele za V je $V:\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

– Slučajna promenljiva W je definisana sa $W=max\{Y,\frac{X}{2}\}$. Zakon raspodele slučajne promenljive $\frac{X}{2}$ je $\frac{X}{2}:\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.
Na osnovu toga može se zaključiti da je $R_W \subseteq \{3,4\}$.

$P(W=3)=P(\frac{X}{2}=0,Y=3)+P(\frac{X}{2}=\frac{1}{2},Y=3)+P(\frac{X}{2}=1,Y=3)+$
$+P(\frac{X}{2}=\frac{3}{2},Y=3)+P(\frac{X}{2}=2,Y=3)=P(X=0,Y=3)+P(X=1,Y=3)+$
$+P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=3)+P(X=4,Y=3)=\frac{3}{4}$,

$P(W=4)=P(\frac{X}{2}=0,Y=4)+P(\frac{X}{2}=\frac{1}{2},Y=4)+P(\frac{X}{2}=1,Y=4)+$
$+P(\frac{X}{2}=\frac{3}{2},Y=4)+P(\frac{X}{2}=2,Y=4)=P(X=0,Y=4)+P(X=1,Y=4)+$
$+P(X=2,Y=4)+P(X=3,Y=4)+P(X=4,Y=4)=\frac{1}{4}$.
Zakon raspodele za W je $W:\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Zadatak 2

Postavka: U kutiji se nalaze 3 zelene i 3 crvene kuglice. Igrač na slučajan način bira 3 kuglice iz kutije, a zatim baca onoliko kockica koliko je zelenih kuglica izvukao. Neka slučajna promenljiva X označava broj izvučenih zelenih kuglica, a slučajna promenljiva Y broj pojavljivanja 6 - ice na bačenim kockicama.

(a) Naći raspodelu dvodimenzionalnog slučajnog vektora (X, Y).

(b) Naći zakon raspodele slučajne promenljive $Y|X = 2$.

Rešenje:
Raspodelu slučajne promenljive X možemo dobiti računajući odgovarajuće verovatnoće primenom klasične (Laplasove) definicije verovatnoće: za svako $k \in R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ je

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k}\cdot\binom{3}{3-k}}{\binom{6}{3}} = \frac{\binom{3}{k}\cdot\binom{3}{3-k}}{20}, \text{ dakle } X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}.$$

Naravno, skup mogućih vrednosti slučajne promenljive Y je takođe $R_Y = \{0, 1, 2, 3\}$.

(a) $R_{X,Y} = R_X \times R_Y = \{(i, j) \in \{0, 1, 2, 3\}\}$.

Zajednički zakon raspodele vektora (X, Y) možemo naći na sledeći način:

$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j|X = i), \quad (i, j) \in R_{X,Y}$.

Za $j > i$ je očigledno:

$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j|X = i) = P(X = i) \cdot 0 = 0$,

i dalje je:

$P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0|X = 0) = \frac{1}{20} \cdot 1 = \frac{1}{20}$,

$P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1)P(Y = 0|X = 1) = \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{8}$,

$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1|X = 1) = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{40}$,

$P(X = 2, Y = 0) = P(X = 2)P(Y = 0|X = 2) = \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{16}$,

$P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2)P(Y = 1|X = 2) = \frac{9}{20} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{8}$,

$P(X = 2, Y = 2) = P(X = 2)P(Y = 2|X = 2) = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{80}$,

$P(X = 3, Y = 0) = P(X = 3)P(Y = 0|X = 3) = \frac{1}{20} \cdot (\frac{5}{6})^3 = \frac{25}{864}$,

$P(X = 3, Y = 1) = P(X = 3)P(Y = 1|X = 3) = \frac{1}{20} \cdot 3 \cdot (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{288}$,

$P(X = 3, Y = 2) = P(X = 3)P(Y = 2|X = 3) = \frac{1}{20} \cdot 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{288}$,

$P(X = 3, Y = 3) = P(X = 3)P(Y = 3|X = 3) = \frac{1}{20} \cdot (\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{4320}$.

Dakle:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$P(X = i)$
0	$\frac{1}{20}$	0	0	0	$\frac{1}{20}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{40}$	0	0	$\frac{9}{20}$
2	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{80}$	0	$\frac{9}{20}$
3	$\frac{25}{864}$	$\frac{5}{288}$	$\frac{1}{288}$	$\frac{1}{4320}$	$\frac{1}{20}$

(b) Zakon raspodele slučajne promenljive $Y|X=2$ nalazimo na sledeći način:

$P(Y=j|X=2) = \frac{P(X=2,Y=j)}{P(X=2)} = \frac{20}{9} \cdot P(X=2, Y=j), \quad j \in R_Y.$

Dakle:

$P(Y=0|X=2) = \frac{20}{9} \cdot P(X=2, Y=0) = \frac{20}{9} \cdot \frac{5}{16} = \frac{25}{36},$

$P(Y=1|X=2) = \frac{20}{9} \cdot P(X=2, Y=1) = \frac{20}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{18},$

$P(Y=2|X=2) = \frac{20}{9} \cdot P(X=2, Y=2) = \frac{20}{9} \cdot \frac{1}{80} = \frac{1}{36},$

$P(Y=3|X=2) = \frac{20}{9} \cdot P(X=2, Y=3) = \frac{20}{9} \cdot 0 = 0.$

Prema tome, $Y|X=2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{25}{36} & \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$

Zadatak 3

POSTAVKA: Numerisana homogena kocka se baca 2 puta. Slučajna promenljiva X predstavlja broj pojavljivanja parnog broja u 2 bacanja, a slučajna promenljiva Y broj pojavljivanja broja deljivog sa 3 u 2 bacanja. Naći zakon raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y). Ispitati da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

REŠENJE:
Traženi zakon raspodele tražimo na sledeći način:

$P(X=0, Y=0) = P(\langle 1,1\rangle + \langle 1,5\rangle + \langle 5,1\rangle + \langle 5,5\rangle) = \frac{1}{9},$

$P(X=0, Y=1) = P(\langle 1,3\rangle + \langle 3,1\rangle + \langle 3,5\rangle + \langle 5,3\rangle) = \frac{1}{9},$

$P(X=0, Y=2) = P(\langle 3,3\rangle)) = \frac{1}{36},$

$P(X=1, Y=0) = P(\langle(1,2\rangle + \langle 2,1\rangle + \langle 1,4\rangle + \langle 4,1\rangle + \langle 2,5\rangle + \langle 5,2\rangle + \langle 4,5\rangle + \langle 5,4\rangle) = \frac{2}{9},$

$P(X=1, Y=1) = P(\langle 1,6\rangle + \langle 2,3\rangle + \langle 3,2\rangle + \langle 3,4\rangle, +\langle 4,3\rangle + \langle 5,6\rangle + \langle 6,1\rangle + \langle 6,5\rangle) = \frac{2}{9},$

$P(X=1, Y=2) = P(\langle 3,6\rangle + \langle 6,3\rangle) = \frac{1}{18},$

$P(X=2, Y=0) = P(\langle 2,2\rangle + \langle 2,4\rangle + \langle 4,2\rangle + \langle 4,4\rangle) = \frac{1}{9},$

$P(X=2, Y=1) = P(\langle 2,6\rangle + \langle 4,6\rangle + \langle 6,2\rangle + \langle 6,4\rangle) = \frac{1}{9},$

$P(X=2, Y=2) = P(\langle 6,6\rangle) = \frac{1}{36}.$

Dakle, zakon raspodele je:

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X=i)$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$
$P(Y=j)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

Direktnom proverom na osnovu dobijenih verovatnoća dobijamo da važi:
$\forall i, j \in \{0,1,2\}, \quad P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j),$
što znači da su slučajne promenljive X i Y nezavisne.

Zadatak 4

POSTAVKA: Iz skupa $\{1,2,3,4\}$ na slučajan način se bira broj x, a zatim se iz skupa $\{x, ..., 4\}$ na slučajan način bira broj y.

(a) Naći raspodelu slučajna promenljive (X,Y), gde je X izabrani broj x, a Y izabrani broj y.

(b) Naći raspodelu slučajne promenljive (U,V), gde je $U = X+Y$, $V = Y-X$.

REŠENJE:

(a) Skupovi vrednosti za slučajne promenljive X i Y su $R_X = \{1,2,3,4\}$, i $R_Y = \{1,2,3,4\}$.
$P(X=i,Y=j) = 0$, za $j < i$ (kako broj y biramo iz skupa $\{x,...,4\}$ važi $y \geq x$).
$P(X=i,Y=j) = P(X=i)P(Y=j|X=i) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4-(i-1)}$, za $j \geq i$.
Prema tome, zakon raspodele slučajne promenljive (X,Y) je sledeći:

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$
3	0	0	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$
4	0	0	0	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}$

(b) $U = X+Y \Rightarrow R_U = \{2,3,4,5,6,7,8\}$,
$V = Y-X \Rightarrow R_V = \{0,1,2,3\}$.
$P(U=u,V=v) = P(X+Y=u, Y-X=v) = P(X=\frac{u-v}{2}, Y=\frac{u+v}{2}) = *$

1. Ako je $X > Y$, tj. $\frac{u-v}{2} > \frac{u+v}{2}$, $P(U=u,V=v) = 0$ $(Y \geq X)$.
2. Ako su u i v različite parnosti, onda su $u+v$ i $u-v$ neparni brojevi, što znači da $\frac{u-v}{2}$ i $\frac{u+v}{2}$ nisu celi brojevi, ali to se ne poklapa sa R_X i R_Y (sve vrednosti u R_X i R_Y su celobrojne). Prema tome, $P(U=u,V=v) = 0$.
3. Ako su u i v iste parnosti i $1 \leq \frac{u-v}{2} \leq 4$ i $\frac{u-v}{2} \leq \frac{u+v}{2} \leq 4$, onda je:

   $P(U=u,V=v) = * = P(X=\frac{u-v}{2})P(Y=\frac{u+v}{2}|X=\frac{u-v}{2}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4-\frac{u-v}{2}+1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{8-u+v+2} = \frac{1}{20-2u+2v}$.

Dakle, $P(U=u,V=v) = \begin{cases} \frac{1}{20-2u+2v}, & u \text{ i } v \text{ iste parnosti i } 1 \leq \frac{u-v}{2} \leq 4 \text{ i } \frac{u-v}{2} \leq \frac{u+v}{2} \leq 4 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

Zadatak 5

POSTAVKA: Nezavisne slučajne promenljive X i Y imaju Poasonove raspodele $X : \mathcal{P}(a)$, $Y : \mathcal{P}(b)$, $(a,b > 0)$. Naći raspodele slučajnih promenljivih:

(a) $Z = X+Y$.

(b) $X|\{X+Y=n\}$.

REŠENJE:
$X : \mathcal{P}(a)$, $Y : \mathcal{P}(b)$, $R_X = R_Y = \{0,1,2,\dots\}$, $P(X=j) = \frac{a^j}{j!}e^{-a}$, $P(Y=j) = \frac{b^j}{j!}e^{-b}$, $j \in \{0,1,2,\dots\}$.

(a) $Z = X + Y$, $R_Z = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Za $k \in R_Z$ je:

$$P(Z = k) = P(\sum_{i=0}^{k}(X = i, Y = k-i)) \stackrel{[1]}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k-i) \stackrel{[2]}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k-i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{a^i}{i!}e^{-a} \cdot \frac{b^{k-i}}{(k-i)!}e^{-b} = e^{-(a+b)} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i! \cdot (k-i)!} a^i b^{k-i} = e^{-(a+b)} \cdot \frac{1}{k!}(a+b)^k.$$

Dakle, slučajna promenljiva Z ima Poasonovu raspodelu $\mathcal{P}(a + b)$.

(b) Za $k \in R_{X|\{X+Y=n\}} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ važi:

$$P(X = k|X+Y = n) = \tfrac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X = k, Y = n-k)}{P(X + Y = n)} \stackrel{[2]}{=} \frac{P(X = k)P(Y = n-k)}{P(X + Y = n)} =$$

$$= \frac{\frac{a^k}{k!}e^{-a} \cdot \frac{b^{n-k}}{n-k!}e^{-b}}{\frac{(a+b)^n}{n!}e^{-(a+b)}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{a}{a+b})^k(\frac{b}{a+b})^{n-k}.$$

Pri tome je $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$, pa slučajna promenljiva $X|\{X + Y = n\}$ ima binomnu $\mathcal{B}(n, \frac{a}{a+b})$ raspodelu.

[1] - Koristimo disjunktnost događaja koji čine uniju.
[2] - Koristimo nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.