Polinomi

Definicija 1 *Neka je* $(F,+,\cdot)$ *polje. Konstanta skupa* F *je proizvoljni element skupa* F*. Promenljiva skupa* F *je simbol (na primer* $x, y, z, t, x_1, y_1, z_1, t_1, ...$*) koji se može zameniti bilo kojim elementom skupa* F*.*

Definicija 2 *Skup svih polinoma, u oznaci* $F[t]$*, nad nekim poljem* F *s promenljivom* t*, može se definisati na sledeći način:*

1) Konstante i promenljiva t *polja* F *jesu polinomi nad poljem* F*.*

2) Ako su A *i* B *polinomi nad poljem* F*, tada su* $A+B$ *i* $A\cdot B$ *takođe polinomi nad poljem* F*, gde su* $+$ *i* $\cdot$ *binarne operacije u* $F[t]$ *koje su asocijativne, komutativne i važi distributivni zakon operacije* $\cdot$ *prema operaciji* $+$ *i takve da su* $+$ *i* $\cdot$ *iz polja* F *njihove restrikcije. Jedinica* e *i nula* 0 *polja* F *redom su neutralni elementi za operacije* $\cdot$ *i* $+$ *dok inverzni element za polinom* $p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n$ *u odnosu na sabiranje* $+$ *jeste polinom* $-p_0 - p_1 t - p_2 t^2 - \cdots - p_n t^n$*.*

3) Polinomi nad poljem F *mogu se dobiti samo primenom 1) i 2) i to konačno mnogo puta.*

- Ako je $p_n \neq 0$, stepen polinoma $p(t)$ je n (oznaka: $dg(p)$).
- Ako je $p_n = 1$, polinom $p(t)$ je normiran (normalizovan).
- Dva polinoma su jednaka ako su istog stepena i koeficijenti uz odgovarajuće stepene t su jednaki.

Primer 1 $p(x) = x^3 + 2x + 1$, $q(x) = x + 2$
a) $p(x) + q(x) = x^3 + 3x + 3$
b) $p(x)\cdot q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + x + 2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 5x + 2$

Definicija 3 *Koren ili nula polinoma* $p \in F[x]$ *je rešenje jednačine* $p(x) = 0$*.*

Teorema 1 *(Bezuova teorema) Ostatak pri deljenju polinoma* $p(x)$ *polinomom* $(x-\alpha)$ *jednak je vrednosti polinoma* p *u tački* α*.*

Primer 2 *Podeliti polinom* $2x^3 - x^2 + 5x$ *polinomom* $x - 1$*.*

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 - x^2 + 5x) : (x-1) = 2x^2 + x + 6 \\
\underline{-(2x^3 - 2x^2)} \\
\quad x^2 + 5x \\
\quad \underline{-(x^2 - x)} \\
\qquad 6x \\
\qquad \underline{-(6x - 6)} \\
\qquad\quad 6
\end{array}
$$

Pomoću Bezuove teoreme možemo lako naći ostatak: $p(1) = 2\cdot 1^3 - 1^2 + 5\cdot 1 = 6$

Postupak za deljenje polinoma $p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$ (nad bilo kojim poljem) se, u slučaju kada je delilac polinom oblika $(x-\alpha)$, može skraćeno zapisati tzv. ***Hornerovom šemom***:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_2 & p_1 & p_0 \\ \hline \alpha & q_{n-1} & q_{n-2} & q_{n-3} & \cdots & q_1 & q_0 & q_{-1} \end{array}$$

gde je $q_{n-1} = p_n$ i $q_k = \alpha q_{k+1} + p_{k+1}$ za sve $k \in \{n-2, n-3, \ldots, 1, 0, -1\}$, pri čemu je $q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + q_{n-3}x^{n-3} + \cdots + q_1 x + q_0$ količnik, a q_{-1} ostatak pri deljenju.

Primer 3 *Podeliti polinom $2x^3 - x^2 + 5x$ polinomom $x-1$ pomoću Hornerove šeme.*

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 5 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 6 & 6 \end{array} \qquad \frac{2x^3 - x^2 + 5x}{x-1} = 2x^2 + x + 6 + \frac{6}{x-1}$$

Definicija 4 *Najveći zajednički delilac dva polinoma je normiran polinom najvećeg stepena koji deli oba ta polinoma.*

Teorema 2 *Zajednički koreni polinoma $p(x)$ i $q(x)$ su koreni njihovog NZD-a koji se određuju pomoću Euklidovog algoritma.*

Zadatak 1 *Nad poljem realnih brojeva su dati polinomi*

$$p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2, \qquad q(x) = 2x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 4.$$

Naći njihove zajedničke korene.

Rešenje: Euklidovim algoritmom ćemo izračunati polinom $r = \mathrm{NZD}(p,q)$, a zatim određivanjem njegovih korena dobiti zajedničke korene polinoma p i q. Pri tome, umesto polinoma $q(x)$ možemo uzeti njemu odgovarajući normalizovani polinom (vodeći koeficijent je 1), što ne utiče ni na r (koji je po definiciji ionako normalizovani polinom), ni na korene polinoma. Iz istih razloga u toku postupka možemo svaki polinom zameniti njemu odgovarajućim normalizovanim polinomom. Neka je $\tilde{q}(x) = \frac{1}{2}q(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2$, te Euklidovim algoritmom izračunavamo $r = \mathrm{NZD}(p,q) = \mathrm{NZD}(p,\tilde{q})$:

korak 1:

$$\begin{array}{l} (x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2) : (x^4 + x^3 - x^2 + x - 2) = x - 2 \\ \underline{-(x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 2x\ )} \\ \quad -2x^4 + 2 \\ \quad \underline{-(-2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 4)} \\ \qquad 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 2(x^3 - x^2 + x - 1) \end{array}$$

korak 2:

$$\begin{array}{l} (x^4 + x^3 - x^2 + x - 2) : (x^3 - x^2 + x - 1) = x + 2 \\ \underline{-(x^4 - x^3 + x^2 - x)} \\ \quad 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \\ \quad \underline{-(2x^3 - 2x^2 + 2x - 2)} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Prema tome, $r(x) = \mathrm{NZD}(p,q)(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Grupisanjem članova polinoma r možemo dobiti $r(x) = x\left(x^2+1\right) - \left(x^2+1\right) = (x-1)\left(x^2+1\right)$, odakle sledi da je broj 1 jedini zajednički realan koren polinoma p i q, dok su zajednički koreni nad $\mathbb{C}$: $1, i$ i $-i$. $\square$

Zadatak 2 *U polju $\mathbb{Z}_3$ naći zajedničke korene polinoma*

$$p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 \quad i \quad q(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1.$$

Rešenje:

<u>Prvi način</u>

Možemo primeniti potpuno isti postupak kao i u prethodnom zadatku. Pri tome računske operacije izvodimo u polju $\mathbb{Z}_3$, gde je $-1 = 2$, $-2 = 1$, $1^{-1} = 1$ i $2^{-1} = 2$.

Odatle sledi: $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.

korak 1:

$$\begin{array}{l}
(x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1) : (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) = x + 1 \\
-(x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x) \\ \hline
\quad x^4 + x + 1 \\
\quad -(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) \\ \hline
\quad\quad 2x^3 + x^2 \qquad = 2\left(x^3 + 2x^2\right)
\end{array}$$

korak 2:

$$\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) : (x^3 + 2x^2) = x + 2 \\
-(x^4 + 2x^3) \\ \hline
\quad 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \\
\quad -(2x^3 + x^2) \\ \hline
\quad\quad x^2 + x + 1
\end{array}$$

korak 3:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2) : (x^2 + x + 1) = x + 1 \\
-(x^3 + x^2 + x) \\ \hline
\quad x^2 + 2x \\
\quad -(x^2 + x + 1) \\ \hline
\quad\quad x + 2
\end{array}$$

korak 4:

$$\begin{array}{l}
(x^2 + x + 1) : (x + 2) = x + 2 \\
-(x^2 + 2x) \\ \hline
\quad 2x + 1 \\
\quad -(2x + 1) \\ \hline
\quad\quad 0
\end{array}$$

Sledi da je $\mathrm{NZD}(p(x), q(x)) = x + 2 = x - 1$, te je 1 jedini koren polinoma $NZD(p, q)$, odnosno jedini zajednički koren polinoma p i q.

<u>Drugi način</u>

Polje $\mathbb{Z}_3$ ima samo 3 elementa, direktnim ispitivanjem vrednosti polinomskih funkcija za sve elemente skupa $\mathbb{Z}_3$ dobijamo

$$p(0) = 1, \quad p(1) = 0, \quad p(2) = 2,$$
$$q(1) = 0,$$

odakle sledi da je 1 jedini zajednički koren polinoma p i q. □

Teorema 3 *Ako je p polinom nad poljem realnih brojeva (tj. polinom čiji su koeficijenti realni brojevi) i α koren polinoma p onda je i $\overline{\alpha}$ koren polinoma p.*

Teorema 4 *Ako su α i $\overline{\alpha}$ koreni polinoma p nad $\mathbb{R}$, onda $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})\,\big|\,p$, tj. $(x^2-2xRe(\alpha)+|\alpha|^2)\,\big|\,p$.*

Zadatak 3 *Odrediti polinom najmanjeg stepena čiji su koeficijenti realni brojevi tako da broj -1 bude dvostruki, a brojevi 2 i $(1-i)$ jednostruki koreni tog polinoma.*

Rešenje: Kako je $1-i$ koren traženog polinoma, onda to mora biti i $1+i$, pa imamo:

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x+1)^2(x-2)(x-1+i)(x-1-i)\\
&= (x^2+2x+1)(x-2)(x^2-2x+2)\\
&= (x^3-3x-2)(x^2-2x+2)\\
&= x^5-2x^4+2x^3-3x^3+6x^2-6x-2x^2+4x-4\\
&= x^5-2x^4-x^3+4x^2-2x-4.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5 *Ako polinom sa celobrojnim koeficijentima ima racionalni koren $\frac{p}{q}$, tada p deli slobodni član, a q deli vodeći koeficijent.*

Definicija 5 *Polinomi su uzajamno prosti ako nemaju zajedničkih faktora, tj. ako im je NZD jednak* 1.

Zadatak 4 *Nad poljem kompleksnih brojeva su dati polinomi*

$p(x)=2x^6+9x^5+22x^4+45x^3+58x^2+36x+8,$

$q(x)=x^6+2x^4+2x^2+1.$

(a) *Naći sve korene polinoma p i faktorisati ga nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.*

(b) *Dokazati da su polinomi p i q uzajamno prosti nad poljem $\mathbb{R}$.*

Rešenje:

(a) Svi mogući racionalni koreni polinoma p se nalaze u skupu $\left\{\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm2,\pm4,\pm8\right\}$. S obzirom da su svi keficijenti polinoma p pozitivni, nijedan pozitivan realan broj ne može biti koren polinoma p jer za sve $x>0$ sledi $p(x)>0$, pa treba ispitati samo negativne kandidate. Najbolje je da pri tome koristimo Hornerovu šemu jer tada odmah dobijamo i (delimičnu) faktorizaciju.

	2	9	22	45	58	36	8	
$-\frac{1}{2}$	2	8	18	36	40	16	0	✓
$-\frac{1}{2}$	2	7	$\frac{29}{2}$	$\frac{115}{4}$	$\frac{205}{8}$	$\frac{51}{16}$		×

$\Downarrow$

$$\begin{aligned}
p(x) &= \left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(2x^5+8x^4+18x^3+36x^2+40x+16\right)=\\
&= 2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(x^5+4x^4+9x^3+18x^2+20x+8\right),
\end{aligned}$$

	1	4	9	18	20	8	
-1	1	3	6	12	8	0	✓
-1	1	2	4	8	0		✓
-1	1	1	3	5			×

$\Downarrow$

$$p(x) = (2x+1)(x+1)\left(x^4+3x^3+6x^2+12x+8\right) = \\ = (2x+1)(x+1)^2\left(x^3+2x^2+4x+8\right),$$

	1	2	4	8	
-2	1	0	4	0	✓
-2	1	-2	8		×

Tražene faktorizacije su:

$$p(x) = (2x+1)(x+1)^2(x+2)\left(x^2+4\right) \quad \text{nad } \mathbb{R} \\ = (2x+1)(x+1)^2(x+2)(x-2i)(x+2i) \quad \text{nad } \mathbb{C}\,.$$

(b) Treba da dokažemo da polinomi p i q nemaju zajedničkih faktora, a s obzirom na to da smo dobili faktorizaciju polinoma p, možemo dokazati da ni jedan faktor polinoma p nije faktor tj. delilac polinoma q. Kako je $q(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$ (jer su mu svi koeficijenti pozitivni i svi stepeni parni), polinom q nema linearnih faktora, tako da ostaje samo da dokažemo da x^2+4 nije delilac polinoma q nad $\mathbb{R}$, tj. da se pri deljenju q sa x^2+4 dobija ostatak različit od 0.

$$\begin{array}{l}
(x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1) : (x^2+4) = x^4 - 2x^2 + 10 \\
\underline{-(x^6 + 4x^4)} \\
\quad -2x^4 + 2x^2 + 1 \\
\quad \underline{-(2x^4 - 8x^2)} \\
\qquad 10x^2 + 1 \\
\qquad \underline{-(10x^2 + 40)} \\
\qquad\qquad -39
\end{array}$$

Time je tvrđenje dokazano.

□

Vijetove formule

Ako su $x_1,...,x_n$ koreni polinoma $p(x)$ stepena n onda:

- za $n=2$ $\quad a_2x^2+a_1x+a_0 = a_2(x-x_1)(x-x_2)$

  $x_1+x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$

  $x_1x_2 = \frac{a_0}{a_2}$

- za $n=3$ $\quad a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 = a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

  $x_1+x_2+x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$

  $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}$

  $x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$

- $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

  $x_1+x_2+\cdots+x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

  $x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$$\vdots$$
$$x_1x_2\cdots x_k+\cdots+x_{n-k+1}\cdots x_{n-1}x_n=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$
$$\vdots$$
$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

Zadatak 5 *Naći normiran polinom 4. stepena ako se zna da je zbir njegovih korena* 2, *proizvod* 1 *i ostatak pri deljenju sa polinomom* $x-2$ *je* 5, *a sa* $x+1$ *je ostatak* 8.

Rešenje: Opšti oblik normiranog polinoma 4. stepena je
$$p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d.$$
Koristeći Vijetove formule dobijamo:
$$x_1+x_2+x_3+x_4=-a=2 \quad\Rightarrow\quad a=-2,$$
$$x_1x_2x_3x_4=d=1 \quad\Rightarrow\quad d=1,$$
Otuda je
$$p(x)=x^4-2x^3+bx^2+cx+1.$$
Na osnovu Bezuove teoreme imamo:
$$p(2)=16-16+4b+2c+1=5 \quad\Rightarrow\quad 2b+c=2,$$
$$p(-1)=1+2+b-c+1=8 \quad\Rightarrow\quad b-c=4.$$
Rešenje ovog sistema je $b=2$ i $c=-2$, pa je traženi polinom
$$p(x)=x^4-2x^3+2x^2-2x+1.$$
□

Zadatak 6 *Neka je* $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ *polinom nad poljem* $\mathbb{R}$ *i neka je skup svih njegovih korena* $\{1,2\}$. *Odrediti sve moguće vrednosti za* a,b *i* c.

Rešenje: Moguće su dve opcije:
$$x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=2 \qquad \text{ili} \qquad x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=2.$$
Iz $x_1+x_2+x_3=-a$ sledi
$$1+1+2=-a \qquad \text{ili} \qquad 1+2+2=-a,$$
dakle $a\in\{-4,-5\}$.
Iz $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$ sledi
$$1\cdot1+1\cdot2+1\cdot2=b \qquad \text{ili} \qquad 1\cdot2+1\cdot2+2\cdot2=b,$$
dakle $b\in\{5,8\}$
Iz $x_1x_2x_3=-c$ sledi
$$1\cdot1\cdot2=-c \qquad \text{ili} \qquad 1\cdot2\cdot2=-c,$$
dakle $c\in\{-2,-4\}$. □

Zadatak 7 *Neka je* $\{1,2,3\}$ *skup svih korena polinoma* $p(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ *nad poljem* $\mathbb{C}$. *Odrediti sve moguće vrednosti za* a_4 *i* a_0.

Rešenje: Iz Vijetovih formula znamo:
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-a_4 \quad \text{i} \quad x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5=-a_0.$$
Sve mogućnosti za korene su:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 1, x_5 = 1,\\
&x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 1, x_5 = 2,\\
&x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 1, x_5 = 3,\\
&x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 2,\\
&x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 2, x_5 = 3,\\
&x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 3, x_5 = 3,
\end{aligned}
$$

pa odatle imamo da je

$$a_4 \in \{-8, -9, -10, -11, -12\} \quad \text{i} \quad a_0 \in \{-6, -12, -18, -24, -36, -54\}. \qquad \square$$

Teorema 6 *(Osnovni stav algebre) Svaki polinom stepena različitog od nule nad poljem kompleksnih brojeva ima bar jedan koren u tom polju.*

Teorema 7 *Svaki polinom nad $\mathbb{C}$ se može napisati kao proizvod linearnih polinoma.*

Teorema 8 *Svaki polinom nad poljem $\mathbb{R}$ se može napisati kao proizvod kvadratnih i/ili linearnih polinoma.*

Definicija 6 *Polinom je svodljiv ako se može napisati kao proizvod polinoma stepena većih od nule. Polinom stepena većeg od nule koji nije svodljiv naziva se nesvodljiv polinom.*

Napomena 1 *Konstantni polinomi nisu ni svodljivi ni nesvodljivi, tj. klasifikacija kreće tek od linearnih.*

Teorema 9 *Linearni polinomi su uvek nesvodljivi, nad svakim poljem.*

• Za polinome 2. ili 3. stepena važi da su svodljivi nad nekim poljem akko imaju bar jedan koren u tom polju.

Primer 4 *Polinom $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 1)$ je svodljiv je nad $\mathbb{R}$, ali nema korene u $\mathbb{R}$.*

Zadatak 8 *Odrediti presek skupa svih stepena nesvodljivih polinoma i skupa svih stepena svodljivih polinoma nad poljem $\mathbb{R}$ i nad poljem $\mathbb{C}$.*

Rešenje:
Nad $\mathbb{R}$:
nesvodljivi $A = \{1, 2\}$
svodljivi $B = \{2, 3, ...\} \Rightarrow A \cap B = \{2\}$
Nad $\mathbb{C}$:
nesvodljivi $A = \{1\}$
svodljivi $B = \{2, 3, ...\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ $\square$

Primer 5 *Polinom $t^2 - 2 = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$ je svodljiv nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, a nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$.*
Polinom $t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$ je svodljiv nad $\mathbb{C}$, a nesvodljiv nad $\mathbb{R}$.

Zadatak 9 *Dokazati da je polinom $p(x) = x^3 + x + 1$ nesvodljiv nad poljem $\mathbb{Q}$. Ispitati svodljivost nad poljima $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$.*

Rešenje:
$\mathbb{Q}$: Jedini mogući racionalni koreni su 1 i -1. Kako to nisu koreni polinoma p, sledi da je on nesvodljiv nad $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{R}$: svodljiv
$\mathbb{C}$: svodljiv
$\mathbb{Z}_2$: nesvodljiv $p(0)=1, p(1)=1$
$\mathbb{Z}_3$: svodljiv $p(0)=1, p(1)=0, p(2)=2$, dakle $x^3+x+1=(x+2)(x^2+x+2)$
$\mathbb{Z}_5$: nesvodljiv $p(0)=1, p(1)=3, p(2)=1, p(3)=1, p(4)=4$
$\mathbb{Z}_7$: nesvodljiv $p(0)=1, p(1)=3, p(2)=4, p(3)=3, p(4)=6, p(5)=5, p(6)=6$ □

Zadatak 10 *Ostaci pri deljenju polinoma P sa* $x-1$*,* $x-2$ *i* $x+1$ *su redom* 2, 3 *i* 6*. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma P polinomom* $(x-1)(x-2)(x+1)$.

Rešenje: Pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom trećeg stepena $(x-1)(x-2)(x+1)$ se dobija količnik $Q(x)$ i ostatak koji je najviše drugog stepena, tj. ostatak je oblika ax^2+bx+c za neke $a,b,c \in \mathbb{R}$ koje treba da izračunamo. Na osnovu teoreme o deljenju polinoma sledi

$$[*] \quad P(x) = (x-1)(x-2)(x+1)Q(x) + ax^2 + bx + c.$$

Na osnovu Bezuove teoreme dobijamo sistem jednačina:

$$2 = P(1) \overset{[*]}{=} a+b+c,$$
$$3 = P(2) \overset{[*]}{=} 4a+2b+c,$$
$$6 = P(-1) \overset{[*]}{=} a-b+c.$$

Ako prvu jednačinu pomnoženu sa -4 dodamo drugoj, zatim prvu jednačinu oduzmemo od treće, dobijamo

$$\begin{array}{rrrrlrl} a\,+ & b\,+ & c & = & 2 & & \Rightarrow\ a=1 \\ & -\,2b & -\,3c & = & -5 & \Rightarrow\ c=3 & \\ & -\,2b & & = & 4 \quad \Rightarrow\ b=-2 & & \end{array}$$

Dakle, ostatak pri deljenju polinoma P polinomom $(x-1)(x-2)(x+1)$ je x^2-2x+3. □

Zadatak 11 *Nad poljem* $\mathbb{R}$ *su dati polinomi*

$$p(x) = x^5-(10+a)x^4+(10a+35)x^3-(35a+50)x^2+(50a+24)x-24a,$$
$$q(x) = x^3+(5-b)x^2+(6-5b)x-6b,$$

gde su a i b realni parametri.

(a) *Za koje vrednosti parametara* $a,b \in \mathbb{R}$ *je polinom* $r(x) = x-1$ *najveći zajednički delilac polinoma p i q.*

(b) *Za koje vrednosti* $a,b \in \mathbb{R}$ *je polinom* $r(x) = x^2+x-2$ *najveći zajednički delilac polinoma p i q.*

Rešenje:

(a) Deljenjem polinoma p polinomom r dobijamo

	1	$-10-a$	$10a+35$	$-35a-50$	$50a+24$	$-24a$
1	1	$-9-a$	$9a+26$	$-26a-24$	$24a$	0

$$\Rightarrow \quad p(x) = (x-1)\left(x^4-(9+a)x^3+(9a+26)x^2-(26a+24)x+24a\right).$$

Dakle, polinom p je deljiv polinomom r za svako $a \in \mathbb{R}$.

Deljenjem polinoma q polinomom r dobijamo

	1	$5-b$	$6-5b$	$-6b$
1	1	$6-b$	$12-6b$	$12-12b$

$\Rightarrow \quad q(x) = (x-1)\left(x^2+(6-b)x+(12-6b)\right)+(12-12b).$

Da bi polinom q bio deljiv polinomom r, ostatak pri deljenju mora biti 0, tj. mora biti $b = 1$.

Dakle, polinom r deli polinome p i q za $(a,b) \in A = \{(\alpha,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Da bi polinom r bio *najveći* zajednički delilac polinoma p i q, ovi polinomi ne smeju imati drugih zajedničkih prostih faktora osim $(x-1)$. Za $(a,b) \in A$, odnosno za $b = 1$, je $q(x) = (x-1)\left(x^2+5x+6\right) = (x-1)(x+2)(x+3)$, te iz skupa A treba još eliminisati one uređene parove (a,b) za koje je $x+2$ ili $x+3$ faktor polinoma p, tj. one za koje je -2 ili -3 koren polinoma p. Kako je

$$p(-2) = -360a - 720 = 0 \Rightarrow a = -2$$
$$p(-3) = -840a - 2520 = 0 \Rightarrow a = -3$$

imamo da je $r(x) = x-1$ NZD za polinome p i q za $b = 1$ i $a \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-3\}$.

(b) Kako je $r(x) = x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ i

- $r(x) \mid q(x) \Rightarrow (x-1) \mid q(x) \Rightarrow b = 1$
- $r(x) \mid p(x) \Rightarrow p(-2) = 0 \Rightarrow a = -2$
- $q(x) \nmid p(x)$

sledi da je $a = -2$ i $b = 1$.

□

Zadatak 12 *Date polinome rastaviti na faktore nad poljima* $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ *i* $\mathbb{Z}_3$.

(a) $f(x) = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1.$

(b) $g(x) = 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 64.$

Rešenje:

(a) Polinom f možemo posmatrati kao zbir prvih 8 članova geometrijskog niza sa prvim članom $c = -1$ i koeficijentom progresije $q = -x$, odakle dobijamo

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (-1)\frac{1-(-x)^8}{1-(-x)} = \frac{x^8-1}{x+1} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x^8 = 1 \,\wedge\, x \neq -1\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x = \sqrt[8]{1} = \sqrt[8]{e^{0\cdot i}} \in \left\{e^{\frac{0+2k\pi}{8}i} \,\middle|\, k = -3,-2,\ldots,4\right\} \,\wedge\, x \neq -1\right) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left\{1, e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\frac{3\pi}{4}i}, e^{-\frac{3\pi}{4}i}, e^{-\frac{\pi}{2}i}, e^{-\frac{\pi}{4}i}\right\}, \end{aligned}$$

te faktorizacije nad poljima glase

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\left(x-e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\left(x-e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)\left(x-e^{\frac{\pi}{2}i}\right)\left(x-e^{-\frac{\pi}{2}i}\right)\left(x-e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)\left(x-e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right) \quad \text{nad } \mathbb{C} \\ &= (x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{4}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{2}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{4}+1\right) \\ &= (x-1)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) \quad \text{nad } \mathbb{R} \\ &= (x-1)\left(\left(x^2+1\right)^2-2x^2\right)\left(x^2+1\right) = (x-1)\left(x^4+1\right)\left(x^2+1\right) \quad \text{nad } \mathbb{Q} \end{aligned}$$

$= (x^4+1)(x^2+1)(x+2).$ nad $\mathbb{Z}_3$

Dodatno, primetimo da dati polinom možemo da faktorišemo nad $\mathbb{Z}_2$:

$f(x) = (x^4+1)(x^2+1)(x+1) = ((x^2)^2-1)(x^2-1)(x+1)$
$= (x^2-1)(x^2+1)(x-1)(x+1)(x+1) = (x+1)^7.$

(b) Polinom g možemo posmatrati kao zbir prvih 6 članova geometrijskog niza sa prvim članom $c = 64$ i koeficijentom progresije $q = \frac{1}{2}x$, pa dobijamo

$$\begin{aligned} g(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 64\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1-\frac{x}{2}}=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{64-x^6}{1-\frac{x}{2}}=0 \;\Leftrightarrow\; \left(x^6=64 \;\wedge\; x\neq 2\right)\\ &\Leftrightarrow \quad \left(x=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{64e^{0\cdot i}}\in\left\{2e^{\frac{0+2k\pi}{6}i}\,\middle|\,k=-2,-1,\dots,3\right\} \;\wedge\; x\neq 2\right)\\ &\Leftrightarrow \quad x\in\left\{2e^{\pm\frac{\pi}{3}i},2e^{\pm\frac{2\pi}{3}i},-2\right\}, \end{aligned}$$

te faktorizacije nad poljima glase

$g(x) = 2(x+2)\left(x-2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)\left(x-2e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)\left(x-2e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(x-2e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)$ nad $\mathbb{C}$
$= 2(x+2)\left(x^2-2x\cdot 2\cos\frac{\pi}{3}+4\right)\left(x^2-2x\cdot 2\cos\frac{2\pi}{3}+4\right)$
$= 2(x+2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$ nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$
$= 2(x+2)(x^2+x+1)(x^2+2x+1) = 2(x+1)^2(x+2)^3$ nad $\mathbb{Z}_3$

□

Zadatak 13 *Dat je polinom $f(x) = x^5+x-1$. Izračunati $f(e^{\frac{\pi}{3}i})$ i napisati polinom f kao proizvod nesvodljivih polinoma nad $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_3$.*

Rešenje: Važi $f(e^{\frac{\pi}{3}i}) = e^{\frac{5\pi}{3}i}+e^{\frac{\pi}{3}i}-1 = e^{-\frac{\pi}{3}i}+e^{\frac{\pi}{3}i}-1 = 2\cos\frac{\pi}{3}-1 = 0.$

Dakle, $\alpha = e^{\frac{\pi}{3}i}$ je koren polinoma f, pa to mora biti i $\overline{\alpha} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$, odnosno polinom f je deljiv polinomom

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2-2x\cos\frac{\pi}{3}+1 = x^2-x+1.$$

$$\begin{array}{l} (x^5 \qquad\qquad\qquad + x - 1) : (x^2-x+1) = x^3+x^2-1\\ \underline{-(x^5 - x^4 + x^3)\qquad\qquad\quad}\\ \qquad x^4 - x^3 \qquad + x - 1\\ \quad \underline{-(x^4 - x^3 + x^2)\qquad\quad}\\ \qquad\qquad -x^2 + x - 1\\ \qquad\qquad \underline{-(-x^2 + x - 1)}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Pošto polinom x^3+x^2-1 nema korene ni nad $\mathbb{Q}$, ni nad $\mathbb{Z}_3$, tražene faktorizacije su:

$f(x) = (x^2-x+1)(x^3+x^2-1)$ nad $\mathbb{Q}$,
$f(x) = (x^2+2x+1)(x^3+x^2+2) = (x+1)^2(x^3+x^2+2)$ nad $\mathbb{Z}_3$. □

Zadatak 14 *Dat je polinom* $f(x) = x^8 + x^4 + 1$. *Izračunati* $f(e^{\frac{\pi}{6}i}), f(e^{\frac{\pi}{3}i}), f(e^{\frac{2\pi}{3}i}), f(e^{\frac{5\pi}{6}i})$ *i napisati polinom* f *kao proizvod nesvodljivih polinoma nad* $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_3$.

Rešenje:

Prvi način:

Važi $f(e^{\frac{\pi}{6}i}) = e^{\frac{8\pi}{6}i} + e^{\frac{4\pi}{6}i} + 1 = e^{-\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{2\pi}{3}i} + 1 = 2\cos\frac{2\pi}{3} + 1 = -1 + 1 = 0.$

Slično se dobija $f(e^{\frac{\pi}{3}i}) = f(e^{\frac{2\pi}{3}i}) = f(e^{\frac{5\pi}{6}i}) = 0$, tj. $e^{\frac{\pi}{6}i}$, $e^{\frac{\pi}{3}i}$, $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ i $e^{\frac{5\pi}{6}i}$ su koreni polinoma f, a kako je f polinom sa realnim koeficijentima, to i $e^{-\frac{\pi}{6}i}$, $e^{-\frac{\pi}{3}i}$, $e^{-\frac{2\pi}{3}i}$, $e^{-\frac{5\pi}{6}i}$ moraju biti njegovi koreni.

Sada je faktorizacija nad poljem $\mathbb{C}$:

$f(x) = \left(x - e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)\left(x - e^{-\frac{5\pi}{6}i}\right)\left(x - e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(x - e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(x - e^{\frac{\pi}{3}i}\right)\left(x - e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)\left(x - e^{\frac{\pi}{6}i}\right)\left(x - e^{-\frac{\pi}{6}i}\right).$

Faktorizacije nad ostalim poljima dobijamo na sledeći način:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x^2 - 2x\cdot\cos\tfrac{5\pi}{6} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cdot\cos\tfrac{2\pi}{3} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cdot\cos\tfrac{\pi}{3} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cdot\cos\tfrac{\pi}{6} + 1\right)\\
&= (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1) \quad \text{nad } \mathbb{R}\\
&= \left((x^2+1)^2 - 3x^2\right)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \quad \text{nad } \mathbb{Q}\\
&= (x^4 + 2x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 1) = (x^2+1)^2(x+2)^2(x+1)^2 \quad \text{nad } \mathbb{Z}_3
\end{aligned}$$

Drugi način:

Polinom f možemo posmatrati kao zbir prva 3 člana geometrijskog niza sa prvim članom $c = 1$ i koeficijentom progresije $q = x^4$, te dobijamo

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1 - \left(x^4\right)^3}{1 - x^4} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x^{12} = 1 \;\wedge\; x^4 \neq 1\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \left(x \in \sqrt[12]{1} = \sqrt[12]{e^{0\cdot i}} = e^{\frac{0+2k\pi}{12}i} = e^{\frac{k\pi}{6}i} \;\wedge\; x \notin \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{0\cdot i}} = e^{\frac{0+2k\pi}{4}i} = e^{\frac{k\pi}{2}i}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad x \in \left\{e^{\pm\frac{5\pi}{6}i}, e^{\pm\frac{2\pi}{3}i}, e^{\pm\frac{\pi}{3}i}, e^{\pm\frac{\pi}{6}i}\right\}.
\end{aligned}$$

Otuda je $f(e^{\frac{\pi}{6}i}) = f(e^{\frac{\pi}{3}i}) = f(e^{\frac{2\pi}{3}i}) = f(e^{\frac{5\pi}{6}i}) = 0.$

Faktorizacije dobijamo kao u prethodnom slučaju.

$\square$

Teorema 10 *Ako za svaki koren polinoma P višestrukosti k važi da je koren polinoma Q, ali višestrukosti veće ili jednake k tada P deli Q.*

Teorema 11 α *je koren višetrukosti k za polinom P akko važi*

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad i \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Zadatak 15 *Dati su polinomi*

$$p(x) = (x+1)^m - x^m - 1, \qquad q(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^2,$$

nad poljem $\mathbb{C}$. *Za koje vrednosti parametra* $m \in \mathbb{N}$ *je polinom* $p(x)$ *deljiv polinomom* $q(x)$*?*

Rešenje: Polinom p je stepena $m-1$, a polinom q stepena 4, te o deljivosti možemo govoriti samo za $m-1\geq 4$ odnosno $m\geq 5$. Rešenja kvadratne jednačine $x^2+x+1=0$ su $x_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{2\pi}{3}i}$ i $x_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-\frac{2\pi}{3}i}$, te je

$$q(x)=\left(x^2+x+1\right)^2=\left(x-e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2\left(x-e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^2.$$

Sledi da $q|p$ ako i samo ako su x_1 i x_2 bar dvostruki koreni polinoma p, a ovo važi ako i samo ako je

$[1]:\ p(x_1)=0,\qquad [2]:\ p'(x_1)=0,\qquad [3]:\ p(x_2)=0,\qquad [4]:\ p'(x_2)=0,$

gde je $p'(x)=m\left((x+1)^{m-1}-x^{m-1}\right)$. Sistem jednačina $[1],[2],[3],[4]$ ćemo rešiti po $m\in\{5,6,7,\dots\}$ tako što ćemo rešiti svaku jednačinu pojedinačno, te je skup rešenja sistema jednak preseku skupova rešenja pojedinačnih jednačina. Označimo sa S_i skup rešenja jednačine $[i]$.

(a.1) $p(x_1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}+1\right)^m-\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^m-1=0 \quad\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad \left(e^{\frac{\pi}{3}i}\left(e^{\frac{\pi}{3}i}+e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)\right)^m-e^{\frac{2m\pi}{3}i}-1=0 \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad \left(e^{\frac{\pi}{3}i}2\cdot\frac{1}{2}\right)^m-e^{\frac{2m\pi}{3}i}-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{\frac{m\pi}{3}i}-\left(e^{\frac{m\pi}{3}i}\right)^2-1=0 \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad \left(t^2-t+1=0\ \wedge\ t=e^{\frac{m\pi}{3}i}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \left(t=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\ \wedge\ t=e^{\frac{m\pi}{3}i}\right) \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad \left(\left(t=e^{\frac{\pi}{3}i}\ \vee\ t=e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)\ \wedge\ t=e^{\frac{m\pi}{3}i}\right) \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad \left(\left(t=e^{\frac{\pi}{3}i}\ \wedge\ t=e^{\frac{m\pi}{3}i}\right)\ \vee\ \left(t=e^{-\frac{\pi}{3}i}\ \wedge\ t=e^{\frac{m\pi}{3}i}\right)\right) \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad \left(e^{\frac{\pi}{3}i}=e^{\frac{m\pi}{3}i}\ \vee\ e^{-\frac{\pi}{3}i}=e^{\frac{m\pi}{3}i}\right) \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\pi}{3}+2k\pi=\frac{m\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\quad\vee\quad\frac{-\pi}{3}+2k\pi=\frac{m\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right) \quad\overset{[1]}{\Leftrightarrow}\\
&\Leftrightarrow\quad (m=6k+1,\ k\in\mathbb{Z}\quad\vee\quad m=6k-1,\ k\in\mathbb{Z}) \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad m\in\{6k+1\ |\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{6k-1\ |\ k\in\mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

[1] - Deleći jednačine sa π, i množeći ih sa 3.

Uzimajući u obzir gore navedeni uslov $m\geq 5$, dobijamo da je skup rešenja jednačine [1] skup $S_1=\{6k+1\ |\ k\in\mathbb{N}\}\cup\{6k-1\ |\ k\in\mathbb{N}\}$.

(a.2) $p'(x_1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad m\left(\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}+1\right)^{m-1}-\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{m-1}\right)=0 \quad\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad m\left(\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\left(e^{\frac{\pi}{3}i}+e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)\right)^{m-1}-e^{\frac{2(m-1)\pi}{3}i}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad m\left(\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{m-1}-e^{\frac{2(m-1)\pi}{3}i}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad m\left(e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i}-\left(e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i}\right)^2\right)=0 \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad \left(m=0\ \vee\ e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i}-\left(e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i}\right)^2=0\right) \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad \left(m=0\ \vee\ \left(t=e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i}\ \wedge\ t-t^2=0\right)\right) \quad\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\quad \left(m=0\ \vee\ \left(t=e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i}\ \wedge\ (t=0\ \vee\ t=1)\right)\right) \quad\Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(m = 0 \ \vee \ \left(e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i} = 0 \vee e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i} = 1\right)\right) \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(m = 0 \ \vee \ e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i} = e^0 = 1\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(m = 0 \ \vee \ \frac{(m-1)\pi}{3} + 2k\pi = 0,\ k \in \mathbb{Z}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (m = 0 \ \vee \ m - 1 + 6k = 0,\ k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (m = 0 \ \vee \ m = 1 - 6k,\ k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (m = 0 \ \vee \ m = 1 + 6k,\ k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad m \in \{0\} \cup \{1 + 6k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

[1] - Jednačina $e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i} = 0$ nema rešenja jer je $\left|e^{\frac{(m-1)\pi}{3}i}\right| = 1$ za svako m.

Uzimajući u obzir gore navedeni uslov $m \geq 5$, dobijamo da je skup rešenja jednačine [1] skup $S_2 = \{6k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

(a.3) Na isti način kao pod (a.1) dobijamo isto rešenje:

$$p(x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{-\frac{2\pi}{3}i} + 1\right)^m - \left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^m - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad m \in S_3 = \{6k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{6k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

(a.4) Na isti način kao pod (a.2) dobijamo isto rešenje:

$$p'(x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\left(\left(e^{-\frac{2\pi}{3}i} + 1\right)^{m-1} - \left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^{m-1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad m \in S_4 = \{6k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Prema tome

$$q|p \quad \Leftrightarrow \quad m \in S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{6k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}. \qquad \square$$

Primeri sa testa:

- Ako je p polinom stepena 2 nad poljem $\mathbb{R}$ tada je p

  a) svodljiv(uvek) b) nesvodljiv(uvek) c) ništa od prethodnog

- Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom t^2+1 nesvodljiv nad njima:

  $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

- p i q su polinomi $dg(p)=3, dq(q)=2$. Tada je

  $dg(pq)=5$ i $dg(p+q)=3$.

- Naći NZD polinoma $p(t)=(t-3)^4(t+7)^2(t-1)^5(t+13)^3$ i $q(t)=(t-3)^2(t-15)(t-1)^7(t+13)^5$

  NZD je $(t-3)^2(t-1)^5(t+13)^3$

- Nesvodljiv polinom nad poljem $\mathbb{R}$ može biti stepena:

  0 1 2 3 4

- Nesvodljiv polinom nad poljem $\mathbb{C}$ može biti stepena:

  0 1 2 3 4

- Neka je polinom p nad poljem F takav da je $dg(p)\geqslant 1$. Tada:

  a) Ako polinom p ima koren u F, tada je on i svodljiv,

  b) Ako polinom p ima koren u F, tada je on nesvodljiv,

  c) Ako je polinom svodljiv, tada on ima koren u F,

  d) Ako je $dg(p)=3$, tada je polinom p svodljiv nad F,

  e) Ako je $dg(p)>1$, tada je polinom p svodljiv nad F akko ima koren u F,

  f) Ako je $dg(p)>1$ i p ima koren, tada je p svodljiv.

Zadatak 1 *Odrediti nepoznate koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ polinoma*

$$p(x) = x^5 - 5x^4 + ax^3 + 16x^2 + bx + c$$

ako je $x = 2$ njegov trostruki koren.

Rešenje:

Prvi način:

Ako je $x = 2$ trostruki koren polinoma $p(x)$, to znači da je $p(x)$ deljiv polinomom $(x-2)^3$. Pri deljenju polinoma $p(x)$ sa $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ dobijamo

$$\begin{array}{rrrrrl}
(x^5 - 5x^4 + & ax^3 + & 16x^2 + & bx + & c) & : (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = x^2 + x + a - 6 \\
-(x^5 - 6x^4 + & 12x^3 - & 8x^2) & & & \\
\hline
x^4 + (a-12)x^3 + & & 24x^2 + & bx + & c & \\
-\ (x^4 - & 6x^3 + & 12x^2 - & 8x) & & \\
\hline
& (a-6)x^3 + & 12x^2 + & (b+8)x + & c & \\
& -\ ((a-6)x^3 - & 6(a-6)x^2 + & 12(a-6)x - & 8(a-6)) & \\
\hline
& & \multicolumn{3}{r}{(6a-24)x^2 + (-12a+b+80)x + 8a + b - 48} &
\end{array}$$

Pošto ostatak mora biti jednak 0, to nam daje sistem

$$\begin{array}{rcccrcr}
6a & & & & = & 24 \\
-12a & + & b & & = & -80 \\
8a & & & + \ c & = & 48
\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad (a, b, c) = (4, -32, 16).$$

Drugi način:

Do nepoznatih koeficijenata polinoma $p(x)$ možemo doći i pomoću Hornerove šeme

x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0	α	r
1	-5	a	16	b	c		
	1	-3	$a-6$	$2a+4$	$4a+b+8$	2	$8a+2b+c+16$
		1	-1	$a-8$	$4a-12$	2	$12a+b-16$
			1	1	$a-6$	2	$6a-24$

Odavde dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr}
8a & + & 2b & + & c & = & -16 \\
12a & + & b & & & = & 16 \\
6a & & & & & = & 24
\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad (a, b, c) = (4, -32, 16).$$

Treći način:

Iz činjenice da je $x = 2$ trostruki koren polinoma $p(x)$ sledi $p(2) = p'(2) = p''(2) = 0$. Prvi i drugi izvod polinoma $p(x)$ su

$$\begin{aligned}
p'(x) &= 5x^4 - 20x^3 + 3ax^2 + 32x + b \\
p''(x) &= 20x^3 - 60x^2 + 6ax + 32.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x = 2$ u polinome $p(x), p'(x)$ i $p''(x)$ dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr}
8a & + & 2b & + & c & = & -16 \\
12a & + & b & & & = & 16 \\
12a & & & & & = & 48
\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad (a, b, c) = (4, -32, 16).$$

□

Zadatak 2 *Odrediti koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ tako da -2 bude tačno dvostruki koren polinoma $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x + c$ nad poljem $\mathbb{R}$.*

Rešenje: Kako bi -2 bio tačno dvostruki koren polinoma $p(x)$ mora da važi $p(-2) = p'(-2) = 0$ i $p''(-2) \neq 0$. Pošto je

$$p'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx - 4 \quad \text{i} \quad p''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b,$$

imamo

$$\begin{aligned} p(-2) &= 16 - 8a + 4b + 8 + c = 0 \\ p'(-2) &= -32 + 12a - 4b - 4 = 0 \\ p''(-2) &= 48 - 12a + 2b \neq 0. \end{aligned}$$

Iz sistema

$$8a - 4b - c = 24 \quad \wedge \quad 12a - 4b = 36$$

dobijamo

$$b = 3a - 9 \quad \wedge \quad c = -4a + 12,$$

dok iz uslova $12a - 2b \neq 48$ sledi da je $a \neq 5$.

Otuda je

$$(a, b, c) \in \left\{ (\alpha, 3\alpha - 9, -4\alpha + 12) \,|\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{5\} \right\}.$$

□

Primeri sa testa:

- Ako su P i Q polinomi, $P+Q \neq 0$ i $dg(P)=2$ i $dg(Q)=2$, tada je $dg(PQ) \in \{\quad\}$ i $dg(P+Q) \in \{\qquad\}$
- Neka su $P=(a_0,a_1,\ldots,a_4)$ i $Q=(b_0,b_1,\ldots,b_3)$ polinomi. Tada je $dg(P+Q)=$ _____ i $dg(PQ)=$ _____
- Ako je $P(x)=ax^3+bx+c$ polinom nad poljem realnih brojeva i ako je $c \neq 0$, tada za stepen $dg(P)$ polinoma P važi: **1)** $dg(P)=3$, **2)** $dg(P) \in \{1,3\}$, **3)** $dg(P) \in \{0,3\}$, **4)** $dg(P) \in \{0,1,3\}$, **5)** $dg(P) \in \{0,1,2,3\}$.
- Za polinome $p(x)=(x+1)^3x^3(x-2)^6$ i $q(x)=x^5(x+1)^4(x-5)^2(x+2)^3$ nad poljem realnih brojeva izračunati: $NZD(p,q)=$
- NZD za polinome $x^2-x\sqrt{2}+1$ i x^2-i:
  1) ne postoji **2)** je linearni polinom **3)** je konstantni polinom

- Neka su $a,b \in \mathbb{R}$ i $w \in \mathbb{C}$ koeficijenti polinoma $P(x)=x^2+ax+b$ i $Q(x)=x^2+w$. Ako je broj $2-3i$ zajednički koren polinoma P i Q, tada preostali koreni polinoma P i Q su redom $\alpha_1=$ __________ i $\alpha'=$ __________, dok je $a=$ __________, $b=$ __________ i $w=$ __________.

- Neka je $\{i,-i\}$ skup nekih korena polinoma $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, gde su $a,b,c \in \mathbb{R}$. Tada skup svih vrednosti za a,b i c je $\quad a \in \qquad b \in \qquad c \in \qquad$.

- Ako je p polinom stepena 4 nad nekim poljem F i ako ima tačno jedan koren u tom polju, tada je p: **1)** uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** nekada svodljiv, a nekada nesvodljiv **4)** ništa od prethodnog **5)** uvek normalizovan
- Polinom stepena 2 nad poljem $\mathbb{R}$ je:
  1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** ništa od prethodnog.
- Ako je p polinom stepena 3 nad poljem $\mathbb{R}$, tada je p nad poljem $\mathbb{R}$:
  1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** ništa od prethodnog.
- Ako je p polinom stepena 3 nad poljem $\mathbb{Q}$, tada je p nad poljem $\mathbb{Q}$:
  1) uvek svodljiv **2)** uvek nesvodljiv **3)** ništa od prethodnog.

- Nesvodljiv polinom nad poljem $\mathbb{R}$ može biti stepena 0 1 2 3 4

  Nesvodljiv polinom nad poljem $\mathbb{C}$ može biti stepena 0 1 2 3 4

- Odrediti sve vrednosti parametara $a,b \in \mathbb{Q}$ za koje je polinom $p(x) = ax + b$ nesvodljiv nad poljem $\mathbb{Q}$:

- Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^2 + t + 1$ nesvodljiv nad njima.

  $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

- Zaokružiti oznaku polja za koje važi da je polinom $t^4 + t^2 + 1$ svodljiv nad njima.

  $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}_5$

- Neka je P polinom nad poljem F takav da je $dg(P) \geq 1$. Tada:
  1) ako polinom P ima koren u F, tada je on svodljiv nad F;
  2) ako polinom P ima koren u F, tada je on nesvodljiv nad F;
  3) ako je polinom P svodljiv nad F, tada on ima koren u F;
  4) ako je $dg(P) = 3$, tada je polinom P svodljiv nad F;
  5) ako je $dg(P) > 1$, tada je polinom P svodljiv nad F akko ima koren u F;
  6) ako je $dg(P) > 1$ i polinom P ima koren u F, tada je on svodljiv nad F;
  7) ako je polinom P jednak proizvodu dva polinoma, onda je on svodljiv;
  8) ako je polinom P jednak proizvodu dva polinoma stepena većeg od 0, onda je on svodljiv.

- Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(e^{-i\alpha}) = 0$ i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, tada je: **1)** $x - e^{-i\alpha} \,\big|\, f(x)$ **2)** $x - e^{i\alpha} \,\big|\, f(x)$ **3)** $x - e^{i|\alpha|} \,\big|\, f(x)$ **4)** $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 \,\big|\, f(x)$ **5)** $x^2 - x\cos\alpha + 1 \,\big|\, f(x)$ **6)** $x^2 + x\cos\alpha + 1 \,\big|\, f(x)$ **7)** $x^2 - x\cos\alpha + \alpha^2 \,\big|\, f(x)$

- Ako je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(e^{-i\alpha}) = 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tada je: **1)** $x - e^{-i\alpha} \,\big|\, f(x)$ **2)** $x - e^{i\alpha} \,\big|\, f(x)$ **3)** $x - e^{i|\alpha|} \,\big|\, f(x)$ **4)** $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 \,\big|\, f(x)$ **5)** $x^2 - x\cos\alpha + 1 \,\big|\, f(x)$ **6)** $x^2 + x\cos\alpha + 1 \,\big|\, f(x)$ **7)** $x^2 - x\cos\alpha + \alpha^2 \,\big|\, f(x)$

- Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(e^{-i\frac{\pi}{6}}) = 0$. Zaokružiti tačno: **1)** $x - e^{-i\frac{\pi}{6}} \,\big|\, f(x)$ **2)** $x + e^{i\frac{\pi}{6}} \,\big|\, f(x)$ **3)** $x - e^{i\frac{\pi}{6}} \,\big|\, f(x)$ **4)** $x^2 - x\sqrt{3} + 1 \,\big|\, f(x)$ **5)** $x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 \,\big|\, f(x)$ **6)** $x^2 + x\sqrt{3} + 1 \,\big|\, f(x)$ **7)** $x^2 - x + 1 \,\big|\, f(x)$

- Neka je $f \in \mathbb{R}[x]$, $f(a + ib) = 0$, $b \neq 0$. Zaokružiti tačno:
  1) $x - a + ib \,\big|\, f(x)$ **2)** $x - a - ib \,\big|\, f(x)$ **3)** $x - e^{ia} \,\big|\, f(x)$ **4)** $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \,\big|\, f(x)$ **5)** $x^2 + 2ax + a^2 + b^2 \,\big|\, f(x)$ **6)** $x^2 - ax + a^2 + b^2 \,\big|\, f(x)$ **7)** $x - e^{-ia} \,\big|\, f(x)$