Анализа 2

Јована Мичић

ПРЕДАВАЊА

Теорија редова

- редови су уствари бесконачне суме бројева
- сваки ред се може представити преко низова

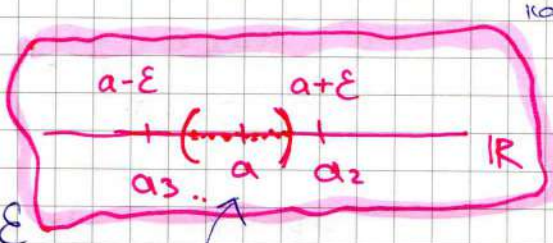
ПОДСЕТНИК:

- Низови $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \ldots$

***Def:** Број $a \in \mathbb{R}$ се назива граница низа $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ако важи $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq \underline{\underline{n_0}} \Rightarrow$ конечно много

$\Rightarrow \underbrace{|a_n - a| < \varepsilon}\,)$



$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

*Другим речима пишемо: $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ или } a_n \to a,\ n \to \infty}$

у тој околини (око a) имамо бесконачно много чланова низа, а ван те околине имамо коначно много чланова

***Def:** Број $b \in \mathbb{R}$ је тачка нагомилавања низа $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ако у свакој околини тачке b имамо бесконачно много чланова низа $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

*основна разлика између границе и тачке нагомилавања

T Ако је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан таја је његова граница јединствена

***** Конвергентни низови имају једну тачку нагомилавања и то је управо граница низа !

* Како доказати да је низ дивергентан → имати доказати да имаја бар 2 тачке нагомилавања

Пр. $a_n = (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$ Доказати да $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не постоји.

подниз-ови: $\begin{cases} n=2k \\ n=2k-1 \end{cases}$ → јер $(-1)^n$ мења знак у односу да ли је n парно или непарно

$$a_{2k} = (-1)^{2k}\left(1+\frac{1}{2k}\right) =$$

$$= 1 + \cancel{\frac{1}{2k}}^{\,0} \xrightarrow[k\to\infty]{} = 1$$ ← $\limsup a_n$ ↓ највећа тачка нагомилавања

$$a_{2k-1} = (-1)^{2k-1}\left(1+\frac{1}{2k-1}\right) = -\left(1+\frac{1}{2k-1}\right) =$$

$$= -1 - \frac{1}{2k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} = -1$$ → $\liminf a_n$ ↓ најмања тачка нагомилавања

⇒ добили смо две рази. тачке нагомилавања 1 и -1

⇒ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не постоји ⇒ $\{a_n\}$ је дивергентан

Def. Највећа тачка нагомилавања низа $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ се назива limes superior, а најмања ~~ро~~ limes inferior

$$\boxed{\limsup a_n \qquad \liminf a_n}$$

ознаке

Бројне редови

Def: Нека је $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ у $\mathbb{R}$. Тада је ред са општим чланом дат са

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots}$$

← РЕД ЈЕ ЈЕДНА БЕСКОНАЧНА СУМА

Def: k-та парцијална сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је дата са

$$\boxed{S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_k}_{\text{саберемо првих } k\text{-сабирака реда}}}$$

→ овде имамо коначно много сабирака

$\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ низ парцијалних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ → ово је као нови низ!

Def: Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је конвергентан акко је низ његових парцијалних сума конвергентан.

Ако је овај низ дивергентан, онда је и ред дивергентан, и та сума не постоји.

дивергентан → лим не постоји!

* Ако је $\boxed{S = \lim_{k\to\infty} S_k} < \infty$ тада се S назива сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и пишемо $\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$.

Пр. По дефиницији испитати конвергенцију редова и израчунати суме тада је то могуће.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} 1 \qquad (a_n = 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1 \ldots +1+1 \ldots$$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} 1 = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{k\text{-пута}} = k$$

$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} k = \infty$ → закључили да је дивергентан

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right)}_{a_n}$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8}\right)$$

$$+ \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{2k}} - \frac{1}{2k+2}\right)$$

$$\boxed{S_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k+2}}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\cancelto{0}{\frac{1}{2k+2}}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{S=\frac{1}{2} \rightarrow \text{сума реда}}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\ln\frac{n}{n+1}}_{a_n}$ $\qquad a_n=\ln n-\ln(n+1)$

$$S_k=\sum_{n=1}^{k} a_n=\sum_{n=1}^{k}\left(\ln n-\ln(n+1)\right)=$$

$$=\cancelto{0}{\ln 1}-\cancel{\ln 2}+\cancel{\ln 2}-\cancel{\ln 3}+\cancel{\dots}+\cancel{\ln k}-\ln(k+1)$$

$$S_k=-\ln(k+1)$$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}\left(-\ln(k+1)\right)=-\infty}$$

$\rightarrow$ Ред (НИЗ) је дивергентан

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ $\qquad q=\frac{1}{3}$

почетак реда $\rightsquigarrow$ * природно је да n иде од 1, али и не мора!

геометријска сума:

$$1+q+\dots+q^{k-1}=\frac{1-q^k}{1-q}$$

бројилац

$$S_k=\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\dots\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{1-\cancelto{0}{\left(\frac{1}{3}\right)^k}}{1-\frac{1}{3}}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}=S$$

$$S=\frac{3}{2}$$

* ако почетак иде од 0, онда је $k-1$, $\rightarrow$ k ел. мора да иде

• Геометријски редови

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} + \dots \qquad q \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{S_k = \frac{1-q^k}{1-q}}$$

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \begin{cases} K & |q| < 1 \rightarrow \text{таја су сви редови конвергентни} \\ D & |q| \geq 1 \rightarrow \text{сви остали случајеви дивергентни} \end{cases}$$

* Ако је $|q|<1$ таја је $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim \frac{1-q^k}{1-q} =$

$$= \frac{1}{1-q}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q|<1}$$

формула за геометријски ред

~~Пре: Извршити сумирање реда~~ $n=1$

• Особине конвергентних редова:

* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергентни редови

таја важи:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ← особина адитивности

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \alpha \neq 0$ ← константе испред реда прелазе

ТЕСТ!

Пр. Израчунати суму следећих редова

а) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{3^{n-2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^{(m+1)+1}}{3^{(m+1)-2}} =$$

$$\boxed{\text{померање бројача} : \begin{array}{l} m = n-1 \\ n = m+1 \end{array}}$$!

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^{m+2}}{3^{m-1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^m}{3^m} \cdot \frac{(-2)^2}{3^{-1}}$$ 2) 12

$$\boxed{q = -\frac{2}{3}}$$

$$= 12 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^m = 12 \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} =$$

$$= 12 \cdot \frac{3}{5} = \frac{36}{5}$$

б) $$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{3^n-(-1)^n}{4^{n+1}}}_{a_n} = a_n \rightarrow \boxed{a_n = \frac{3^n}{4^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-(-1)^n}{4^{n+1}} \underset{1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\underbrace{4^{n+1}}_{4^n \cdot 4}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\underbrace{4^{n+1}}_{4^n \cdot 4}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}} - \frac{1}{1+\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\left(4 - \frac{4}{5}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

ТЕСТ!

Пр. Доказати да је ред $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ дивергентан

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+\dots$$

2 случаја!

$$S_{2k} = \sum_{n=0}^{2k}(-1)^n = (1-1)+(1-1)+\dots+(1-1)=0$$

$$S_{2k+1} = \sum_{n=0}^{2k+1}(-1)^n = (1-1)+(1-1)\dots+(1-1)+1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$\{S_k\}$ има две тачке нагомилавања $\Rightarrow \lim_{k\to 0} S_k$ је дивергентан!

Вежбе I

① Испитати конвергенцију сл. редова:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{a_n} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$

$$\boxed{\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \quad \Big| \, n\cdot(n+1)}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

$$a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \cancel{\frac{1}{n+1}}^{\,0}\right) = 1 \rightarrow$$ низ је конвергентан

$$\boxed{S = 1}$$

б) $\sum_{n=6}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots \rightarrow$ ГЕОМ. НИЗ!

$\left|\frac{1}{7}\right|$ између 0 и 1 може геом. низ

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^n}{1 - \frac{1}{7}}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1 - \cancel{\left(\frac{1}{7}\right)^n}^{\,0}}{1 - \frac{1}{7}}\right. = \frac{1}{\frac{6}{7}} = \frac{7}{6}$$ – низ конвергира

$$\boxed{S = \frac{7}{6}}$$

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{дивергира}} = 1-1+1-1+\dots$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1-1 = 0$

$S_3 = S_2 + 1 = 1$

$S_4 = S_3 - 1 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} S_{2k} &= 0 \\ S_{2k+1} &= 1 \end{aligned}}$$ → 2 такие натрупвания → дивергира!

$-(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1})$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ $\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$S_n = \cancel{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} - \cancel{(\sqrt{2}-\sqrt{3}} \underbrace{\overset{k=1}{-\sqrt{2}} - \sqrt{2}}$ $+1$

$+ \underbrace{2 - \sqrt{3} - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{2}}}_{k=2}$

$+ \sqrt{5} - 2 \cancel{-2} + \cancel{\sqrt{3}}$

$+ \dots \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \cancel{\sqrt{n+1}} + \cancel{\sqrt{n}}$

$$\boxed{S_n = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)$

$= (1-\sqrt{2}) + \lim \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} =$

$$= (1-\sqrt{2}) + \lim \frac{\cancel{n}+2-\cancel{n}-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} =$$

$$= (1-\sqrt{2}) + \cancel{\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}}^{\,0} = 1-\sqrt{2}$$

$$\boxed{S = 1-\sqrt{2}}$$

* Критеријум дивергенције → ако општи члан не тежи 0, онда дивергира

* ако не тежи, морамо даље да испитујемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ див.}$$

* потребан услов али не и довољан

само нам служи да докажемо да дивергира, ако је нула морамо још испитати

пр. Хармонијски ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ дивергира}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \ \alpha > 1, \text{ конвергира}$$

1) Испитати конвергенцију сл. редова:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{a_n}$

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to} \frac{n+1-1}{n+1} = 1 \rightarrow \text{по критеријуму дивергира}$$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}}_{e} \cdot \frac{2}{n+1}\cdot n =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1}} = e^2 \neq 0$$ → по критериуму НИ дивергира

в) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n^2$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot n^2$$ → обе не може

→ НЕ постоји, па и ред не дивергира

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$$\lim_{n=\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$ не постоји, па и ред дивергира

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(an+b)^p}$, $a,b>0$, $p\in\mathbb{R}$

Више случајева:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(an+b)^p} = \begin{cases} 0 & , p>0 \leftarrow \text{треба још испитати} \\ 1 & , p=0 \\ \infty & , p<1 \end{cases} \Big\} \text{ почетни ред дивергира}$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

$$\boxed{n\to\infty \quad , \quad n! \underset{\text{апроксимација}}{\sim} \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n^n}{e^n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{n}{e}\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\, n}} = \lim \frac{e}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}\, n} =$$

$$= e \neq 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1}$$

Скала раста ф-је:

$\ln n < n^a < n^b < p^n < q^n < n! < n^n$, при чему је $0<a<b$ и $1<p<q$

Упоредни критеријум I врсте

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ф редови са позитивним члановима и ако важи $a_n < b_n$

а) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира

б) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

③ Упоредним критеријумом прве врсте испитати конвергенцију сл. редова

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 5^n}$

$$\frac{2^n}{n \cdot 5^n} < \frac{2^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$ конвергира $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ почетни ред конвергира на основу првог упоредног критеријума

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира $\Rightarrow$ па и почетни ред див. на основу I у. критеријума

* Упоредни критеријум II врсте →

ако се јавља више ф-ја узимамо оне које брже расту

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &\overset{x\to 0}{\sim} x \\ \ln x &\overset{x\to 0}{\sim} x \end{aligned}}$$

① Упоредним критеријумом II врсте испитати конвергенцију сл. редова:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-\sqrt{n}}{\sqrt{n^5+3n^2}}$

узмем

$$\frac{2n-\sqrt{n}}{\sqrt{n^5+3n^2}} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2n}{\sqrt{n^5}} = \frac{2n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ конв. $\Rightarrow$ зад II кр. исчитни ред конвергира и

$\frac{3}{2} > 1$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5-2n+3}}{n^2}$

$$\frac{\sqrt[3]{n^5-2n+3}}{n^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{n^5}}{n^2} = \frac{n^{\frac{5}{3}}}{n^2} = n^{\frac{5}{3}-2}.$$

$$= n^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$$

$\frac{1}{3} < 1$ → дивергира зад II кр. ред дивергира

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+n}{n^2+5^n} =$

$$\frac{2^n+n}{n^2+5^n} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n \\ \frac{2}{5}<1\end{array}\right\} \text{конв.} \Rightarrow$$ због II у.к. почетни ред конвергира

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n}$

$$\frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n} \cdot \frac{\sqrt{\ldots}+\sqrt{\ldots}}{\sqrt{\ldots}+\sqrt{\ldots}} =$$

$$= \frac{n^2+n+1-n^2-n+1}{n\left(\sqrt{\ldots}+\sqrt{\ldots}\right)} = \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{\ldots}+\sqrt{\ldots}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} =$$

$$= \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$$ хармонијски ред дивергира

$\Rightarrow$ II у.к. и почетни ред дивергира

реш: дивергира

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) \to$ домаћи

$2 \cdot \sin\frac{\pi}{2n} \cdot \sin\frac{\pi}{2n} \sim 2 \cdot \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{2n}$

адиционе формуле

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) = 2 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2n} \overset{n\to\infty}{\sim}$

$\boxed{\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$1 - \cos\frac{\pi}{n} \overset{n\to\infty}{\sim} \cancel{2}\frac{\pi^2}{\cancel{4}n^2} = \frac{\pi^2}{2n^2}$

$\sin(fn) \overset{n\to\infty}{\sim} f(n)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2n^2} = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ II у. к. почетни ред конв.

$\boxed{\ln n \overset{n\to\infty}{\sim} n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$

$\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2+1}{n^2} = 1 + \frac{1}{n^2}$ $\sim \frac{1}{n^2}$

$\sum\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ конвергира $\Rightarrow$ II у. к. почетни ред конв.

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) \sim$ када логаритам је у истој степени морамо да додамо нешто пре апроксимације

$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n^{3/2}}$

конвергира

$\Rightarrow$ почетни ред див

због II у. к

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt{1+n^3} \cdot \sin\frac{1}{n}}$

$$\frac{n+3}{\sqrt{1+n^3} \cdot \sin\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{n^3} \cdot \frac{1}{n}} = \frac{n}{n\sqrt{n}\,\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ дивергира $\Rightarrow$ II ред у.к дивергира

* Даламберов критеријум

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} <1 & \text{конвергира} \\ =1 & \text{не даје одговор} \\ >1 & \text{дивергира} \end{cases}$$

(5) Даламберовим к. испитати конвергенцију сл. ~~реда~~ редова

* код имамо факторијел користан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

$(n+1)!$ $n!$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1} \cdot \cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n \cdot \cancel{n!}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{(n+1)}\, n^n}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{-1}}\right)^{\frac{n+1}{-1}}}_{e}{}^{\frac{-1}{n+1} \cdot n} =$$

$$= 2 \cdot e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n+1}} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1$$

по 2.к почетни ред конвергира

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} =$ реш. дивергира

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{\frac{(n+1)\cancel{n!}}{3\cdot\cancel{3^n}}}{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{3^n}}} = \frac{n+1}{3} = \infty$$

див.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^p}{(n+1)!}}{\frac{n^p}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)\, n^p} = 0 < 1$$

→ степен p

$1+p = p+1$ степен

тоа 2.к. почетни ред конвергира

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ домаќи → конв.

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2 \cdots (1+a^n)}$, $a>0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{a^{n+1}}}{\cancel{(1+a)\cdots(1+a^n)}(1+a^{n+1})}}{\frac{\cancel{a^n}}{\cancel{(1+a)\cdots(1+a^n)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1+a^{n+1}} =$$

зависи од a

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & a=1 \\ a, & a<1 \\ 0, & a>1 \end{cases}$$

→ конвергира по 2.к.

ПРЕДАВАЊА

Критеријуми за конвергенцију редова

*** Напомена:**

* Коначно много сабирака не утиче на конвергенцију реда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots a_{n_0}}_{\text{коначан бр.}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$$

→ ако је овај ред конвергентан

и овај је

* ако нам само треба информација да ли је ред конв. или не, није битно одакле креће збајач!

• Кошијев критеријум конвергенције

(T) Ред $\sum a_n$ је конвергентан акко

~~за свако~~ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall p, k \in \mathbb{N})(k \geq k_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Big| \underbrace{\sum_{n=k+1}^{k+p} a_n}_{S_{k+p} - S_k} \Big| < \varepsilon)$$

ред је конвергентан, ако је низ парцијалних сума КОШИЈЕВ НИЗ.

$$S_{k+p} - S_k = \cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \dots + \cancel{a_k} + a_{k+p} - \cancel{a_1} - \cancel{a_2} - \cancel{a_3} \dots - \cancel{a_k}$$

$$= \sum_{n=k+1}^{k+p} a_n$$

• $\sum a_n$ је конвергентан акко је $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ Кошијев.

низ парц. сума

Пр. Доказати да је хармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ дивергентан.

зо. да нам не треба апсолутна вр.

* Ово доказујемо тако што узимамо негацију претходног услова (за Кошијев к.)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall k_0 \in \mathbb{N})(\exists k, p \in \mathbb{N})$$
$$\left(k \geq k_0 \Rightarrow \sum_{n=k+1}^{k+p} \frac{1}{n} \geq \varepsilon\right)$$

Ставимо $k = p = k_0$, за произвољно $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=k_0+1}^{2k_0} \frac{1}{n} \geq k_0 \cdot \frac{1}{2k_0} = \boxed{\frac{1}{2} := \varepsilon}$$

ово претпоставимо за ε оваквину

број сабирака

најмањи сабирак обе ставимо

* Последица Кошијевог критеријума

Ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан тада је $\Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

• Критеријум о дивергенцији редова

Ако је $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ тада је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергентан.

Пр. Испитати конвергенцију редова

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2+3}{3n^2-1}}_{a_n}$ D

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3 \,/:n^2}{3n^2-1 \,/:n^2} = \frac{1}{3} \neq 0$$

По крит. див. закључујемо да је див!

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{1+n}\right)^n}_{a_n}$ D

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)^{-n+1}}_{e} \cdot \frac{n}{-(n+1)}\right) =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0 \to \text{див}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^2$ (D)

$$\left.\begin{aligned} a_{2k} &= (2k)^2 = 4k^2 \xrightarrow{k\to\infty} +\infty \\ a_{2k-1} &= -(2k-1)^2 \xrightarrow{k\to\infty} -\infty \end{aligned}\right\} \lim_{n\to\infty} a_n \text{ не постоји } \neq 0 \text{ див.!}$$

· Интегрални критеријум за конвергенцију редова

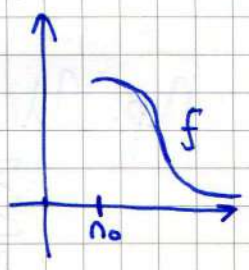
$$\boxed{\underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{несвојствени интеграл}} = \lim_{T\to+\infty} \underbrace{\int_1^{T} f(x)\,dx}_{\text{одређени интеграл}}}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \longleftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx}$$

Нека је $a_n = f(n)$ при чему f задовољава:

1) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је f дефинисано и ненегативно над $[n_0, +\infty)$

2) f монотоно опада над $[n_0, +\infty)$



Тада $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира акко $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира.

Пр. У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ дискутовати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

$\alpha = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ D → то смо већ доказали

хармонијски ред

Нека је $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_1^{T} x^{-\alpha}\,dx =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^T = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{T^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}\right) =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(\frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \infty & \text{D} \quad 1-\alpha>0 \quad \boxed{\alpha<1} \\ -\frac{1}{1-\alpha} & \text{K} \quad 1-\alpha<0 \quad \boxed{\alpha>1} \end{cases}$$

Дакле, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ → $\alpha > 1$ K; → $\alpha \leq 1$ D

ХАРМОНИЈСКИ РЕДОВИ

Пр. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

смена $\ln x = t$, $\frac{1}{x}dx = dt$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \lim_{T\to\infty} \int_2^{T} \frac{dx}{x \ln x} =$$

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln T} \frac{dt}{t} = \lim_{T\to\infty} \ln t \Big|_{\ln 2}^{\ln T} = \lim_{T\to\infty} \left(\overbrace{\ln(\ln T)}^{\infty} - \ln(\ln 2)\right) = \infty$$

D

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n \begin{cases} \nearrow K & |q|<1 \\ \rightarrow D & |q|\geq 1 \end{cases}}$$

ГЕОМЕТРИЈСКИ РЕДОВИ

• Упоредни критеријум I врсте

Нека је $\sum a_n$ ред такав да је $\boxed{a_n \geq 0}$ (ненегативан општи члан) за све $n \geq n_0$ где је $n_0 \in \mathbb{N}$. Тада ако важи $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$ имамо:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n \leq b_n \ / \sum \\ \sum a_n \leq \sum b_n \end{array}}$$

1) Ако је $\boxed{\sum b_n}$ конвергентан тада је и $\sum a_n$ конвергентан

2) Ако је $\boxed{\sum a_n}$ дивергентан тада је и $\sum b_n$ дивергентан

Пр. Испитати конвергенцију сл. редова

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 3^n}$

$$\boxed{\begin{array}{l} n \geq 1 \\ \frac{1}{n} \leq 1 \end{array}}$$

$$\frac{2^n}{n \cdot 3^n} \leq \overset{\leq 1}{\left(\frac{1}{n}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\boxed{\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n \ K \quad \frac{2}{3} < 1}$$

→ на основу крит. I вр. закључујемо да је и испитани ред конвер.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n}$$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n} \underset{\text{за } n\geq 1}{\geq} \frac{\sqrt{2}}{n} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{n} \qquad \boxed{\sum \frac{1}{n} \ \text{Ⓓ}}$$

самим тим на основу у к. I врсте је и почетни ред див!

• Упоредни критеријум друге врсте (о критеријум о понашању)

Нека су $\sum a_n$ и $\sum b_n$ редови такви да су $\boxed{a_n \geq 0}$ и $\boxed{b_n \geq 0}$ $\forall n \geq n_0$. Тада ако се $a_n \sim \lambda \cdot b_n$, $\lambda \neq 0$, $n \to \infty$ ред $\sum a_n$ конвергира (дивергира) акко $\sum b_n$ конвергира (дивергира).

$$\boxed{a_n \sim \lambda b_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda}$$

Пр. Испитати конвергенцију:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+1}{\sqrt{2n^7-n^6+n^3+n-1}} =$

$$\frac{3n^2+n+1}{\sqrt{2n^7+n^5+n^3+n-1}} \sim \frac{3n^2}{\sqrt{2n^7}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\, n^{2-\frac{7}{2}} =$$

$$= \underbrace{\frac{3}{\sqrt{2}}}_{=\lambda} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}_{b_n} \quad n \to \infty$$

$\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \to \boxed{\alpha = \frac{3}{2} > 1}$ конвергира!

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+4^{n+1}}{4^n+5^{n-2}}$

$$\frac{3^{n-1}+4^{n+1}}{4^n+5^{n-2}} \sim \frac{4^{n+1}}{5^{n-2}}$$

$$= \frac{4\cdot 4^n}{5^{-2}\cdot 5^n} = 100\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$n \to \infty$

$\sum \left(\frac{4}{5}\right)^n$ (К) → геом. ред $q = \frac{4}{5} < 1$

$$\boxed{\lim \frac{\sin x}{x} \Leftrightarrow \sin x \sim x,\ x \to 0}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ УВЕК ≥ 0

$x = \frac{1}{n}$, $n \to \infty \Rightarrow x \to 0$ $\boxed{\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}}$, $n \to \infty$ $\sum \frac{1}{n}$ → (D),

па је на основу у. к II ер. и полазни ред (D)

• Кошијев (коренски) критеријум

Нека је $\sum a_n$ ред такав да је $a_n \geq 0$, $\forall n \geq n_0$

Ако је:

1) $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$ ред $\sum a_n$ је конвергентан

2) $\limsup \boxed{\sqrt[n]{a_n}} > 1$ ред $\sum a_n$ је дивергентан

3) $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$ критеријум не даје одговор

Ако је $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан онда је

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Пр. Испитати конвергенцију:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}}_{a_n}$ → кад имамо на степен n згодан је Кошијев к.

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1$$

K

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+2}{3n+1}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{5n+2}{3n+1}\right)^{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \text{"}\left(\frac{5}{3}\right)^{\infty}\text{"} = \infty > 1$$

D

с) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$ → Кошијев не даје одговор

АКО

$$\lim a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = e^{-1} \neq 0$$ D

на основу критеријума о дивергентним дивергира

• Даламберов (количнички) критеријум

Нека је $\sum a_n$ ред такав да је $a_n \geq 0$ $\forall n \geq n_0$. Тада

1) ако је $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ред $\sum a_n$ конвергира

2) ако је $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ред $\sum a_n$ дивергира

3) ако је $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ тада критеријум не даје одговор

~~Тада~~ Ако је $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан

тада је $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Пр. Испитати конвергенцију реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n-1)!}$$

→ кад видимо факторијел најчешће Даламберов метод!

$$\boxed{n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+2}}{n!}}{\frac{3^{n+1}}{(n-1)!}} = \frac{\frac{3^{\cancel{n+2}} \cdot 3^{\cancel{n}}}{n \cdot \cancel{(n-1)!}}}{\frac{\cancel{3} \cdot 3^{\cancel{n}}}{\cancel{(n-1)!}}} = \frac{3}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \boxed{0 < 1}$$

K

Вежбе II

* Кошијев (коренски) критеријум

Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима

и нека је $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$.

Тада за $p<1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира

за $p>1$ дивергира

за $p=1$ не можемо ништа рећи о конв. реда

1. Кошијевим критеријумом испитати конвергенцију сл. редова:

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{2^n}{3^n}$

општи члан: $n\cdot\frac{2^n}{3^n} = n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{=1}\,\frac{2}{3} = 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{2^n}{3^n}$ конвергира

(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{3}{n}\cdot n} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\cdot n} = e^3 > 1 \Rightarrow \text{ред дивергира}$$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n^2+2}{n+1}}$, $a>0$ $\qquad a_n = a^{\frac{n^2+2}{n+1}}$, $a>0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{\frac{n^2+2}{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{n^2+2}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{n^2+2}{n+1}\cdot\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a^{\frac{n^2+2}{n^2+n}} = a^1 = a$$

Конвергенција нашег реда $\sum a^{\frac{n^2+2}{n+1}}$ заправо зависи од бр. параметра a.

- $a<1$ ред конвергира
- $a>1$ ред дивергира
- $a=1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{n^2+2}{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \to$ дивергира

крит. див.: $a_n \neq 0 \to$ дивергира

Овај критеријум не даје одговор, али неки други да

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}$, $a>0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}} = \qquad \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n} = 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{a+\cancelto{0}{\frac{1}{n}}} =$$

$$= \frac{1}{a}$$

Конвергенција реда зависи од вредности параметра a.

$a>1$ ред конвергира

$a<1$ ред дивергира

$a=1 \to \lim \frac{n^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$ исто овај крит. не даје одговор

$= \frac{\infty}{e} = \infty \to$ ред дивергира

Алтернативни редови

* Ред чији чланови наизменично мењају предзнак зову се управо алтернативни редови.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

$$\boxed{b_k = |a_k|} \qquad k = 1, \dots$$

Def:

(1) Ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ апсолутно конвергира ако $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ конвергира

(2) Ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ условно конвергира ако $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ конвергира и ред $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ дивергира

обичну конв. испитујемо овим крит.

* Лајбницов критеријум

Алтернативни ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot a_k \quad \text{конвергира:}$$

ако је:

(1) монотоно нерастући низ тј. $a_{k+1} \leq a_k$ (почевши од неког $\underbrace{k \geq k_0}_{\text{члана}}$)

(2) $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$

1. Испитати апсолутну и условну конвергенцију сл. редова:

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$

Прво ћемо испитати апсолутну конвергенцију:

$a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{n^2+1}$

упоредни критеријум друге врсте

$|a_n| = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ је хармонијски ред који дивергира, па и исчетни ред апсолутно дивергира.

Лајб. крит → да видимо испитали и обичну конв.

не мора апсолутно, ухватимо и знак, па само њега

(1) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$

(2) $|a_{n+1}| \leq |a_n|$

$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$

$(n+1)(n^2+1) \leq n \cdot ((n+1)^2+1)$

$n^3+n+n^2+1 \leq n \cdot (n^2+2n+1)+n$

$n^3+n^2+n+1 \leq n^3+2n^2+n+n$

$1 \leq n^2+n$ ✓

пошто је n природан бр, ту најмање што може је

$1 \leq 2$ (т) $\xrightarrow{2}$ увек!

Закључили смо да ред апсолутно дивергира, а конвергира обично => условно ~~конвергира~~ конвергира

* Не може да ванки и апсолутна и условна конвергенција.

(T) $\boxed{AK \Rightarrow K}$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{5n+6}$

пример? где неће ни апсолутна ни условна конв

$|a_n| = \frac{2n+1}{5n+6}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n+6} = \frac{2}{5} \neq 0$

$\Rightarrow$ ред апсолутно дивергира

$\lim_{n\to\infty} a_n$ = не постоји, јер има две тачке нагомилавања $\frac{2}{5}$ и $-\frac{2}{5}$

(1) $\overset{\text{Л.К}}{\lim a_n \neq 0}$

$\boxed{\text{обичне див} \Rightarrow \text{апсолутна див}}$

Ред дивергира апсолутно и $\underbrace{\text{не конвергира условно}}_{\text{условна див. као цјелина неће деф. не користи се}}$!

(C) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n\sqrt{n}-1}$

Прво ћемо испитати апсолутну конв.

$|a_n| = \frac{n}{n\sqrt{n}-1} \sim \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}} = n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} < 1$

$n^1 \cdot n^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{3}{2}}$

ред апсолутно дивергира

* Обичну конвергенцију проверавамо Лајбницовим критеријумом

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{n}-1} = 0$

(2) $|a_{n+1}| \leq |a_n|$

$$\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \leq \frac{n}{n\sqrt{n}-1}$$

$$(n+1)(n\sqrt{n}-1) \leq n\left[(n+1)\sqrt{n+1}-1\right]$$

$$(n+1)n\sqrt{n}-n+1 \leq \underline{n\cdot(n+1)\sqrt{n+1}} - \underline{n}$$

$$(n+1)n\sqrt{n} - \cancel{n} - 1 - n\cdot(n+1)\sqrt{n+1} + \cancel{n} \leq 0$$

$$\underbrace{\overset{>0}{(n+1)}\,\overset{>0}{n}\,\underbrace{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}_{<0}}_{<0} \leq 1$$

увек тачно!

Ред $\sum a_n$ апсолутно дивергира, а конвергира обично $\Rightarrow$ условно конвергира!

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$

$|a_n| = \frac{n}{2^n}$

Даламберов критеријум:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

апсолутно конвергира

и самим тим конвергира обично

не треба условна!

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$

$$|a_n| = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$$

Кошијев (коренски)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1$$

ред конвергира апсолутно, па самим тим и обично!

ПРЕДАВАЊА

Пр. Испитати конвергенцију редова

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n}{(n-1)!}$ → зов факторијела наводе

Даламберов крит. (K)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}+n+1}{n!}}{\frac{2^n+n}{(n-1)!}} = \frac{\frac{2\cdot 2^n+n+1}{n(n-1)!}}{\frac{2^n+n}{(n-1)!}} =$$

$$= \frac{2\cdot 2^n+n+1}{n\cdot 2^n+n^2} \begin{matrix} /:2^n \\ /:2^n \end{matrix} =$$

$$= \frac{2+\cancel{\frac{n}{2^n}}^{\to 0}+\cancel{\frac{1}{2^n}}^{\to 0}}{n+\cancel{\frac{n^2}{2^n}}^{\to 0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{0<1}$$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{n^3} \sim \frac{\frac{1}{n^2}}{n^3} =$ $\quad \sim \frac{1}{n^2}$

$e^x-1 \sim x \quad x\to 0$

$\lim_{x\to 2} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$= \frac{1}{n^5}, n\to\infty$

на основу Кошијевог крит. I врсте

$\sum \frac{1}{n^r} \quad \alpha=r>1$ (K)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} = \begin{cases} \frac{3^{\frac{1}{2k}\to 0}}{2} & n=2k \\ \frac{1}{2} & n=2k \end{cases} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} < 1$$

на основу Кошијевог (коренског) критеријума → (K)

↳ може сво и да растави на два геом. реда па решавамо

Алтернативни редови

* Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је алтернативан ако је $a_n = (-1)^{n-1} \cdot b_n$
$b_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Пр. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ $\boxed{b_n = \frac{1}{n}}$ ненегативни, део!

* алтернативни ред → очито да се мењује знак (није обавезан редослед)

$$\boxed{\cos(n\pi) = (-1)^n}$$

• Лајбницов критеријум за конвергенцију алтернативних редова

* Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot b_n$ алтернативни ред. Тада ако важе услови:

1) $b_{n+1} \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ монотоно нерастућа)

2) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ је конвергентан

! само за конвергенцију, овако не можемо закључити дивергенцију!

Пр. Испитати конвергенцију алтернативних редова:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $\boxed{b_n = \frac{1}{n}}$ К

1) $b_{n+1} \leq b_n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \cancel{n} \leq \cancel{n}+1 \Leftrightarrow 0 \leq 1$ ✓

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

овај ред је конвергентан!

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{3^n+1} \Rightarrow \boxed{b_n = \frac{2^n}{3^n+1}}$

1) $b_{n+1} \le b_n \iff \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1} \le \frac{2^n}{3^n+1} \iff \cancel{2^{n+1}} \cdot (3^n+1) \le \cancel{2^n} \cdot (3^{n+1}+1)$

$\iff 2\cdot 3^n + 2 \le 3\cdot 3^n + 1 \iff 3^n \ge 1 \,/\log_3 \iff n \ge 1$ ✓

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \,/:3^n}{3^n+1 \,/:3^n} = 0$ ✓

К

$\boxed{b_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \ne 0}$

с) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}}_{a^n}$

НЕ МОЖЕМО ПРИМЕНИТИ ЛАЈБНИЦОВ ПРИНЦИП

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$

$n=2k \quad \frac{2k}{2k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$

$n=2k-1 \quad \frac{-(2k-1)}{2k-1+1} = \frac{-2k+1}{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} -1$

Овај лимес не постоји $\ne 0$

↓

на основу критеријума дивергенције овај низ дивергира

Апсолутно конвергентни редови

Def. Ред $\sum a_n$ је апсолутно конвергентан ако је $\sum |a_n|$ конвергентан.

Пр. Испитати апсолутну конвергенцију

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$ $\quad |a_n| = \frac{|(-2)^n|}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ K $\quad q = \frac{2}{3} < 1$

→ значи да апсолутно конвергира

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $\quad |a_n| = \frac{|(-1)^{n-1}|}{n} = \frac{1}{n}$

$\alpha = 1$

$\sum \frac{1}{n}$ D

↑ ненано А.К.

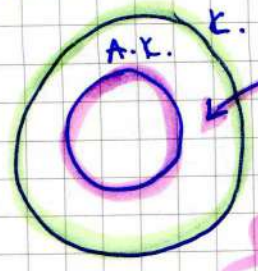
T Ако је ред $\sum a_n$ апсолутно конвергентан и тада је и обично конвергентан и важи

$$\boxed{\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \rightarrow \left(\begin{array}{l}\text{неједнакост} \\ \Delta \text{ за редове}\end{array}\right)}$$

$|x+y| \leq |x| + |y|$

А.К $\Rightarrow$ К

* Апсолутна конв. имплицира обичну конв.



Условно конвергентни редови, су редови који конвергирају, али не конвергирају и апсолутно!

Пр. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ У.К. (Лајбницов критеријум)

Пр. Испитати конвергенцију редова:

$$\boxed{\operatorname{arctg} x \sim x \quad x \to 0}$$

а) $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^3-n^2+n+1}}}_{a_n}$$

$$|a_n| = \frac{\overbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)}^{\sim \frac{1}{n}}}{\sqrt{n^3-n^2+n+1}} \sim$$

на основу Х.К. II врсте

$$\sim \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad n \to \infty, \quad \alpha = \frac{3}{2} > 1$$

овај ред је апсолутно конв. $\Rightarrow$ да је конв!

б) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin(n!)}{\sqrt{n^7+3}}$$

$$|a_n| = \frac{n \cdot |\sin(n!)|}{\sqrt{n^7+3}} \le \frac{n}{\sqrt{n^7+3}} \le \frac{n}{\sqrt{n^7}} = n^{1-\frac{7}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |\sin x| \le 1 \\ |\cos x| \le 1 \end{array}}$$

$n^7+3 \ge n^7 \quad / \sqrt{\ }$

$\sqrt{n^7+3} \ge n^7 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^7+3}} \le \frac{1}{\sqrt{n^7}}$

$\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \quad \alpha = \frac{5}{2} > 1$ К

на основу упоредног крит. I врсте

овај ред је А.К. $\Rightarrow$ К

Операције са редовима

1) САБИРАЊЕ Ако су $\sum a_n$ и $\sum b_n$ конвергентни редови тада $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$

* Напомена:

Ако је један од редова $\sum a_n$ и $\sum b_n$ дивергентан, а други конвергентан тада је и $\sum (a_n \pm b_n)$ дивергентан.

Пр. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! + 2^n}{n!}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \alpha = 1 \quad D$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad \text{Даламберов крит} \quad K$$

$\rightarrow D$

2) МНОЖЕЊЕ РЕДА СКАЛАРОМ (БРОЈЕМ)

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

3) МНОЖЕЊЕ ДВА РЕДА

Нека су $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ апсолутно конвергентна

Тада $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ при чему је

$$\boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \cdot b_k}$$

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots) = \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 \cdot b_0}_{c_1} + \dots$$

* као множење са коначним члановима

Пр. Израчунати производ редова $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

* по Даламберовом критеријуму су ова реда апсолутно конв.

$$\Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}}_{a_n}\Big) \cdot \Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}}_{b_n}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Биномна формула

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

биномни коеф.

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-3)^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{2^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} (-3)^{n-k} 2^k$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} (-3)^{n-k} \cdot 2^k = \frac{1}{n!}(-3+2)^n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

4) Комутативни и асоцијативни закон за редове

Комутативност: Нека је $\sum a_n$ апсолутно конвергентан ред и $p: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ произвољна пермутација скупа $\mathbb{N}$

Тада $\boxed{\sum a_n = \sum a_{p(n)}}$

$$p \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 4 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{pmatrix}$$

мењање места сабирака

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_4 + a_1 + a_2 + a_3$

Пр. Испитати да ли важи једнакост $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-n}{n^2+1}\right)^n =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-p(n)}{(p(n))^2+1}\right)^{p(n)}$$

за произвољну пермутацију скупа $\mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-n}{n^2+1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(-1)^n\cdot\left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)^n}_{a_n}$$

$$|a_n| = \left(\frac{n-1}{n^2+1}\right)^n \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{n-1}{n^2+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$$

по Кошијевом критеријуму (коренском)

Закључујемо да је овај ред А.К. на основу закона комутативности Вајнштајнова једнакост

<u>АСОЦИЈАТИВНОСТ</u>: Ако је ред $\sum a_n$ апсолутно конвергентан тада

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} a_n + \sum_{n\in\mathbb{N}_2} a_n + \dots + \sum_{n\in\mathbb{N}_k} a_n + \dots}$$

При чему је $\{\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \dots, \mathbb{N}_k, \dots\}$ партиција скупа $\mathbb{N}$

$\left(\begin{array}{l}\mathbb{N}_1\cup\mathbb{N}_2\cup\dots=\mathbb{N}\\ \mathbb{N}_i\cap\mathbb{N}_j=\emptyset\end{array}\right)$

Пр. $\mathbb{N}_1=\{1,2\}$ $\mathbb{N}_2=\{3,4\}$ $\mathbb{N}_3=\{5,6\}$

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\dots = (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)$$

Пр. За ли Вајнштајнова једнакост

$$\underbrace{(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots}_{S=0} \neq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n}_{\text{дивергентан}} \quad \text{НЕ}$$

НЕ може да Вајнштајнов овај закон овде !

Вежбе III

Алтернативни редови

② У зависности од параметра испитати апсолутну и условну конв. сл. редова:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in R$

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}} \right| = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha < 0 \end{cases}$$

- $\alpha \leq 0$: ред дивергира, јер општи члан не тежи нули

  див. обично па и апсолутно

- $\alpha > 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ див. Лајб. (не конв. апс.)

1) ✓

2) $\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$ ✓

конвергира обично, а не конвергира апсолутно

- $\alpha = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

не конв. апсолутно

1) ✓ ↙ Гледамо да ли је условно (Лајбницов)

2) $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

6) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)a^{2n}}$, $a \in R \setminus \{0\}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n+1)a^{2n}} \right| = \begin{cases} 0 & , a^2 > 1 \quad , a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ 0 & , a^2 = 1 \quad , a = 1 \vee a = -1 \\ \infty & , a^2 < 1 \quad , a \in (-1, 0) \cup (0, 1) \end{cases}$$

* $a^2 \leq 1$, $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ див.

бо загальний член не тяне нулю → крит. див.

* $a^2 > 1$, $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)a^{2n}} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)a^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}\, a^2} < 1$$

АПС конвергує та конвергує

* $a = 1 \vee a = -1$

АПС: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ не конв. абсолютно

Лейбніцев крит. ← шукаємо дал. конв. условно

1) ✓

2) $\frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1}$ ✓

конв. ⇒ условна конв.

③ Показати да ред конвергира и наћи суму са тачношћу 0,01.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$$

однос ћемо Лајбницов крит:

1) $\lim \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = 0$

2) $|a_{n+1}| \leq |a_n|$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \leq \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \Big/ \begin{matrix}(n+1)\\(n+2)\end{matrix}$$

$$\frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{n}$$ ✓ конвергира

$$\boxed{|S - S_n| \leq |a_{n+1}|} < 0{,}01$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} < \frac{1}{100}$$

$$(n+1)(n+2)(n+3) > 100$$

$4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 > 100$ ↑ нападамо

↓ гађа тачно

$n+1 = 4$

$\boxed{n = 3}$ → сума 3 члана

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{17}{120}$$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

Функционални редови

- код се издваја x

1. Испитати конв. сл. функционалних редова

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{\ln n}} = (*)$, $x>0$

$x^{\ln n} = e^{\ln x^{\ln n}} =$ ← ову особину користимо

$b = e^{\ln b}$

$b = \cancel{e^{\log_e b}}$

$= e^{\ln n \cdot \ln x} =$

$= \left(e^{\ln n}\right)^{\ln x} = n^{\ln x}$, смена $y = \ln x$

$\log_m a^b = b \cdot \log_m a$

$(*) \xrightarrow{\text{тада само увели смену}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^y}$

$y \leq 0$, $\boxed{0 < x \leq 1}$

$y = \ln x < 0$

$\log_e x = -a$

$e^{-a} = x$

$\frac{1}{e^a} = x$

одбацивање за 0

див. и апсолутно и обично

Условна конв:
- не конв. апсолутно
- конв. обично

* $0 < y \leq 1$

конв. условно

$x > 1$

$0 < y$ $\quad$ $y \leq 1$

$0 < \ln x$ $\quad$ $\ln x \leq 1$

$x > 1$ $\quad$ $x \leq e$

закључујемо

$$\boxed{1 < x \leq e}$$

* $y > 1$

конв. обично и апсолутно

$\ln x > 1$

$$\boxed{x > e}$$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x(-x-1)}{2} \right)^n$

$\lim_{x \to e} \sqrt[n]{n \left(\frac{x \cdot (x-1)}{2} \right)^n} = \left| \frac{x(x-1)}{2} \right|$

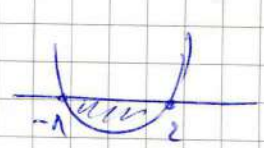
$\sqrt[n]{n} \to 1$

* $\left| \frac{x(x-1)}{2} \right| < 1$ $\quad$ конв.

$|x(x-1)| < 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_1 = -1 \vee x_2 = 2$



$x \in (-1, 2)$

$$* \quad \left| \frac{x(x-1)}{2} \right| > 1$$

$x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

gub.

$$* \quad \left| \frac{x(x-1)}{2} \right| = 1$$

$x = -1 \quad , x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (-1)^n \cdot (-2)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \rightarrow \text{ДИВ}$$

$x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cancel{2^n}} \cdot \cancel{2^n} \cdot 1^n \rightarrow \text{ДИВ}$$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}+x}{2^{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^n}$

$\boxed{\sqrt[n]{a^{n-1}} = a}$

$\sqrt[n]{a} = 1$

такође крај:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^{n-1}+x}{2^{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^n}} = \left|\frac{5}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)}\right|$

$* \quad \left|\frac{5}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)}\right| < 1$ конв. и конв. апсолутно

$\left|\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right| < 1 \quad \Big| : \frac{5}{2}$

$\left|\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right| < \frac{2}{5}$

$\left|x+\frac{1}{x}\right| > \frac{5}{2}$

$\left|\frac{x^2+1}{x}\right| > \frac{5}{2} \quad \Big|^2$ → да би нестале апсолутне заграде

$\frac{(x^2+1)^2}{x^2} > \frac{25}{4} \quad \Big| \cdot 4x^2$

и $(x^2+1)^2 > 25x^2$, $t = x^2$

и $(t^2+2t+1) > 25t$

↓ даље ово решимо

$x \in (-2,-2) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, 2)$

* $\left|\frac{5}{2(x+\frac{1}{x})}\right| > 1$ ДИВ.

: исто се решава
: као прех. случај

$x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

* $x = \pm\frac{1}{2}$, $x = \pm 2$, $\left|\frac{5}{2(x+\frac{1}{x})}\right| = 1$

По Кошијевом не знамо шта се решава, па испитујемо даље

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}+x}{2^{n-1}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n}+x$$

$x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}+2}{2^{n-1}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}+2}{\frac{2^{n-1}\cdot 5^n}{2^n}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(5^{n-1}+2)}{5^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 5^{n-1}+2}{5^n} \overset{L.H.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)\,\cancel{5^{n-2}}}{n\cdot\cancel{5^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \neq 0 \text{ див.}$$

- То би требало да испитамо за $x=-2$, $x=\pm\frac{1}{2}$

али видимо да ћемо само добити рат. реш. за питање, али су $\neq 0$ па рад.

Вајерштрасов критеријум

- за функционалне редове

- униформна конв → на неком скупу се испитује

* Нека за свако $x\in(a,b)$ и $\forall n\in\mathbb{N}$ важи $|f_n(x)|<c_n$ где је $c_n\in(0,\infty)$. Ако позитивни бројни ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ конв. онда је функц. ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ униформно конв. на (a,b).

$$\boxed{\text{Y.K} \Rightarrow \text{K.}}$$

* Испитати А.К и униформ К.

1 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}$

$$f_n(x) = \frac{1}{n^4+x^2} < \frac{1}{n^4}$$

ако је 1

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ конв.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}$ униф. конв. по В.К.

$\Rightarrow$ конв.

и апс. конв. → пошто је ред са поз. чл. иначе не знамо знати

б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(1+x^2)}$

$$f_n(x) = 2^{-n(1+x^2)} =$$

$$= \frac{1}{2^{n(1+x^2)}} < \frac{1}{2^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ~~конв.~~

→ овај ред конв.

⇒ почетни ред униформно конв ⇒ конв.

и пошто му је члан. позитиван онда и апсолутно конв.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(nx)}{3^n}$

$$\left| \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(nx)}{3^n} \right| = \frac{|\operatorname{arctg}(nx)|}{3^n} <$$

$\frac{\pi}{2}$ → узимамо највећу вр. за ову страницу

$$< \frac{\frac{\pi}{2}}{3^n}$$

$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ конв ⇒ па почетни оригинални ред униформно конв

- Пошто сви чл. нису поз. морамо да испитамо А.К.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(nx)}{3^n} \right|$$

$$\left| \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(nx)}{3^n} \right| \sim \left| \frac{(-1)^n \cdot nx}{3^n} \right| = \frac{nx}{3^n}$$

па овај ред конв.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{3^n}$$

дал. крит. $\lim \frac{\frac{(n+1)\cancel{x}}{3^{n+1}}}{\frac{n\cancel{x}}{\cancel{3^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$ конв.

и ~~овај~~ почетни ред А.К. сада

*може и преко униформне конв.
баш преко
Вајерштрасовог крит.
па дисто ово радили
и доказали тако А.К.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+\sin(nx))^n}$

$$\left| \frac{1}{(3+\sin(nx))^n} \right| < \left| \frac{1}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}$$

гледамо
када је
$\sin x = -1$
треба
нам
горње огр.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ конв.

$\Rightarrow$ па почетни ред
ун. конв $\Rightarrow$ конв

- а пошто су сви чланови пос
онда и апсолутно конв.

(T) Ако $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира на (a,b) онда $\int_{x_1}^{x_2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} f_n(x)\,dx \qquad a < x_1 < x_2 < b$$

(2.) Ако је $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+n+1}$, израчунати

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+n+1}$$

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n^2+n+1} \right| \leq \frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2+1}$$

$\cos = 1$ највећа вр.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ конв $\Rightarrow$ ун. ред
$-\infty < x < \infty$ ун. к. на

- услов за конв на интервалу $(0, \pi)$ је задовољен јер конв на R

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+n+1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2+n+1}\, dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} \int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx = \left(\begin{array}{l} \text{смена:} \\ t = nx \\ dt = n\,dx \\ \int \cos t \frac{dt}{n} \\ = \frac{1}{n} \sin t \Big|_0^{\pi} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} \cdot \frac{1}{n} \overbrace{(\sin\pi - \sin 0)}^{0} = 0$$

$\boxed{\text{предавања}}$

Функционални редови

$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{f_n(x)}_{\substack{a_n \\ \text{општи} \\ \text{члан}}}$ $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ функција над интервалом $I \subseteq \mathbb{R}$

Пр. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \cos x + \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{\cos(3x)}{9} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$

- редомо над интервалом конв.

Def. (Тачкаста конвергенција) → као обична конв. али за функц. редове

$\sum f_n(x)$ конвергира тачкасто над интервалом I ако

$$(\forall x_0 \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\underbrace{\exists k_0 \in \mathbb{N}}_{k_0 = k_0(\varepsilon, x_0)})(\forall k, p \in \mathbb{N})$$

$$\left(k \geq k_0 \Rightarrow \underbrace{\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x_0) \right|}_{S_{k+p} - S_k} < \varepsilon\right)$$

S_k - низ парцијалних сума

↑ функц. ред конв. за свако x

- не може се лако испитати (јер нам треба за сваку тачку испитивање, а имамо бесконачно тачака)

Деф. (Униформна конвергенција) → ред конв. над целим интервалом

* $\sum f_n(x)$ униформно конвергира над $I \subseteq R$ ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\underbrace{\exists k_0 \in \mathbb{N}}_{k_0 = k_0(\varepsilon)})(\forall k, p \in \mathbb{N})(\underbrace{\forall x \in I})(k \geq k_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{n=k+1}^{k+p} f_n(x) \right| < \varepsilon)$$

(T) Ако је ред $\sum f_n(x)$ униформно конвергентан над I тада је и тачкасто конвергентан над I.

• Вајерштрасов критеријум униформне конвергенције

* Нека је $\sum a_n$, $a_n \geq 0$, конвергентан бројни ред. Ако је $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x \in I$ низ ф-ја такав да $\boxed{|f_n(x)| \leq a_n}$, $\forall x \in I$ тада функционални ред $\sum f_n(x)$ конвергира униформно над I.

(Пр) Испитати униформну конвергенцију редова:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n^2+1}}_{f_n(x)}$, $\underbrace{x \in [-1,1]}_{|x| \leq 1}$

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

$$\sum \frac{1}{n^2+1} \quad (K) \quad \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2} \quad \alpha = 2 > 1$$

Х.К. II врсте

Што значи да је почетни ред униформно конвергентан над $[-1,1]$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \operatorname{arctg}(n!\,x)}_{f_n(x)}$ $x \in R$

$\boxed{|\operatorname{arctg}(x)| < \frac{\pi}{2}, \forall x \in R}$

$$|f_n(x)| = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} |\operatorname{arctg}(n!\,x)| < \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}_{a_n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1} < 1$$

на основу Кошијевог к.

$\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (К)

$\Rightarrow$ На основу Вајерштрасовог к. униформ. конв. почетног реда над $\mathbb{R}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos(x^n)}{(n-1)!}}_{f_n(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{|\cos x| \le 1}$

$$|f_n(x)| = \frac{|\cos(x^n)|}{(n-1)!} \le \frac{1}{(n-1)!}$$

$\sum \frac{1}{(n-1)!}$ (К) по Даламберовом крит.

$\Rightarrow$ почетни ред конв. униформно над R

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$, $x \in [-4, 4]$

* Ако ставимо $x=4$ у ред добијамо

$\sum \frac{4^n}{3^n}$ (Д) $q = \frac{4}{3} > 1$ па немамо тачкасту конв над $[-4,4]$ па немамо ни униформну

Ч.К $\Rightarrow$ Т.К.

Низ не конв $\Rightarrow$ униформ не конв.

не постоји деф. за унif. тачкасту конв. !

Степени редови

* Def. $\sum f_n(x)$ је степени ред ако $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$ при чему су a_n коефицијенти степеног реда, а x_0 центар степеног реда.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n} \quad \boxed{\begin{array}{c}\text{Сменом}\\ x-x_0=t\end{array}} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n}_{\text{центриран у } 0}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_k \cdot t^k + \dots$$

- степени редови → полиноми бесконачног степена

Пр. У зависности од реалног параметра x испитати конв. сл. редова:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n^2}}_{f_n(x)}$

Даламберов крит.

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{\frac{\cancel{|x|}^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{\cancel{|x|}^{n}}{n^2}} = |x| \cdot \frac{n^2}{n^2+2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$

$|x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$ ред конвергира

$|x| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ ред дивергира

$|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1 \cup x = -1$ потребна су додатна испитивања

$x = 1 \to$ добијемо бројчани ред

$\sum \frac{1}{n^2}$ (К)

$x = -1$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} \to$ А.К $\Rightarrow$ (К)

коначно

$x \in [-1,1]$ (К)

$x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ (Д)

третирамо их као бројне редове!

- код степених редова, узимамо неки критеријум

као код бројних и пледнамо апсолутну $k \Rightarrow$

- који критеријум ћу изаберем, пледнамо да или у несређене x или да упросто обична конв.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ запаметити критеријум

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = |x| \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$$

ред је конвергентан $\forall x \in R$

с) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n^n \cdot x^n}_{f_n(x)}$

$$\sqrt[n]{|f_n(x)|} = n \cdot |x| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \; x \neq 0$$

$\infty > 1$

овај ред је дивергентан $\forall x \neq 0$

а само за $x=0$ је конвергентан

јер кад додајемо у изч. ред $x=0$

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 0}$ К

- степени редови могу бити конв. у неком интервалу, над целим скупом или у једној тачки.
- сваки степени ред је конв. у свом центру, па могу бити и једино конв.
- кад се прича о конвер. обично прича се о тачкастој конв.!

· Полупречник конвергенције степених редова

→ почетак коеф. и после само са коеф. реда

* Нека је $\sum a_n x^n$ степени ред. Тада се:

$$\boxed{1)\ r = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{или} \quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

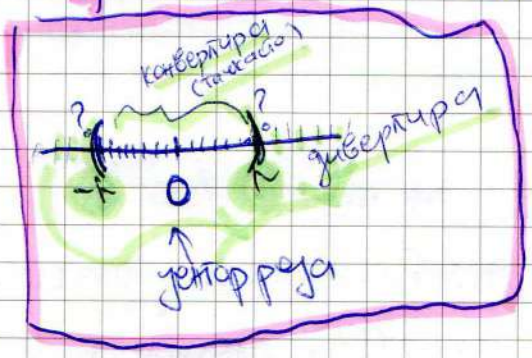
назива полупречник конвергенције степеног реда $\sum a_n x^n$.

Пр. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ $\quad |a_n| = \frac{1}{n}$

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to}\frac{n+1}{n} = 1$$

* Ако је $r>0$ полупречник конвергенције реда $\sum a_n x^n$ тада:

1) ред (тачкасто) конвергира $\forall x\in(-r,r)$
2) ред дивергира за $\forall x\in(-\infty,-r)\cup(r,+\infty)$
3) За $x=r$ и $x=-r$ су потребна додатна испитивања



* Специјално, ако је: $r=0$ ред конвергира само за $x=0$

$r=\infty$ тада ред конвергира над R.

Пр. Испитати конв. степених редова:

изр. полупр. конв и од тр. све редом!

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$ $\quad |a_n| = \frac{1}{n \cdot 5^n}$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 5^n}}} = \lim_{n\to\infty} 5 \cdot \cancel{\sqrt[n]{n}}^{\,1} = 5$$

(K) $\forall x \in [-5, 5)$

(D) $\forall x \in (-\infty, -5) \cup [5, +\infty)$

Остало јаче испитати за -5 и 5:

$\boxed{x = 5}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{5^n}}{n \cdot \cancel{5^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{(D)}$$

харм. ред

$\boxed{x = -5}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{5^n}}{n \cdot \cancel{5^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{(K)}$$

није апсолутно, али јесте условно

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n^3}$ $\quad$ смена $t = x-2$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^n}{n^3}$

* овај ред није центрирана у нули, већ у 2, па то применом можемо лако да решимо

$a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$

$|a_n| = \frac{1}{n^3}$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{(n+1)^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$$

$z \in (-1, 1)$ (K)

$z \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ (D)

Вратимо смену

$x-2 \in (-1^{+2}, 1^{+2}] \Rightarrow x \in [1,3]$ K

$x \in (-2,1) \cup (3,+2)$ D

ja $x=1$ и $x=3$ даље испитати.

$\boxed{x=1:}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ K

укључујемо у интервал конв. ! и такође када их испитамо

$\boxed{x=3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ AK $\Rightarrow$ K

Пр. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n x$ у зависности од $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{смена: } t = \cos x}$

$\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ → ово је већ степени ред

$\boxed{|a_n| = 1}$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$\forall t \in (-1,1)$ K

$\forall t \in (-2,-1) \cup (1,+2)$ D

вратимо смену

$\cos x \in (-1,1) \Rightarrow x \in \mathbb{R} \{x \mid x \in k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Шта кад је $x = k\pi$ D

$x = 2k\pi$

$\cos x = 1$

$x = (2k+1)\pi$

$\cos x = -1$

$\to \sum 1^n = \sum 1 \overset{\neq 0}{} \; D$

$\to \sum (-1)^n \; D$

• Особине степених редова

1) За свако x из пресека интервала конвергенције степених редова $\sum a_n x^n$ и $\sum b_n x^n$ важи

$\sum a_n$ $\sum b_n$ морају су K

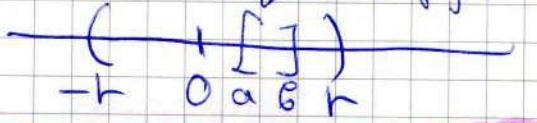
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}$$

2) Ако је $\boxed{\sum a_n x^n = \sum b_n x^n}$, $\forall x \in (-r, r)$ где је r полуречник за ова степена реда тада је и $\boxed{a_n = b_n}$ за $\forall n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

* СВАКИ СТЕПЕНИ РЕД ЈЕ ЈЕДИНСТВЕНО ОДРЕЂЕН СВОЈИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА

3) Ако је $r > 0$ полупр. конвергенције реда $\sum a_n x^n$ тада ред униформно конвергира $\forall [a, b] \subset (-r, r)$.

чак не мора ја сврдни центар



- на целом интервалу САМО ТАЧКАСТА
- на сваком интервалу (као горњу) УНИФОРМНА

обр. 7/2 зад. 7

Пр. Испитати да ли ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n+1}$ униформно конвергира над $[0,2]$.

* степени редови су спец. врста функц. редова па можемо узех В.К., али треба то нешто

$$|a_n| = \frac{1}{3^n+1} \qquad h = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{3^n+1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+1} = 3$$

$t = x-2 \qquad t \in (-3,3) \Leftrightarrow x-2 \in (-3,3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-1,5)$

- на основу особина степених редова $\Rightarrow$ униформна конв.

4) Извод и интеграл степеног реда.

Нека је $\sum a_n x^n$ ред са полупр. $r>0$

* Тада важи: 1) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' =$

*замењено места суме и извода и суме и интеграла

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} \quad \forall x \in (-r, r)$$

2) $$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$\forall x \in (-r, r)$

Вежбе IV

-наставак функ. редова

1) Испитати униформну и апсолутну конв. функционалног реда на интервалу $[1,2]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{1+n^2x}$$

не можемо тек тако да је опр. па трагамо екстреме само први извод

$$f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$$

n нам је константа, а x променљива кад тражимо извод

$$f_n'(x) = \frac{2(1+n^2x^2) - 2x \cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} =$$

$$= \frac{2+2n^2x^2-4n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} =$$

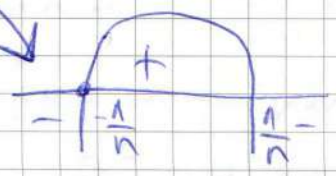
$$= \frac{2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0$$

$2-2n^2x^2=0$

$n^2x^2=0$

$x^2=\frac{1}{n^2}$

$x=\frac{\pm 1}{n}$



$(1+n^2x^2)^2>0$

ово је нешто [1,2]

		$-\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$	
$2-2n^2x^2$	−	0	+	0	−
$(1+n^2x^2)^2$	+	+	+	+	+
	−	0	+	0	−
	↘	f_{min}	↗	f_{max}	↘

јер нам је 1 део ор па је $\frac{1}{n}<1$, па је већ [1,2] после $\frac{1}{n}$

На интервалу [1,2] ф-ја је опадајућа, па је њена највећа вр. у 1 ($x=1$)

ово уместо x заменимо 1!

$$\frac{2x}{1+n^2x^2} \le \frac{2\cdot 1}{1+n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+n^2}$ конв.

$\left(\frac{2}{1+n^2} \sim \frac{2}{n^2} \to 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ конв.}\right)$

На основу Вајерш. кр. пор.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{1+n^2x^2}$ ун. конв

$\Rightarrow$ конв.

* На $[1,2]$ $\frac{2x}{1+n^2x^2} > 0$ што значи да су сви чланови позитивни, па ред и апсолутно конвергира

② Испитати апсолутну и униформну конв на скупу R сл. редова.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{1+n^8x^2}$

$$\boxed{f(-x) = -f(x) \quad \text{НЕПАРНА}}$$

$$f'(x) = \frac{2n(1+n^8x^2) - 2nx \cdot 2n^8 x}{(1+n^8x^2)^2} =$$

$$= \frac{2n + 2n^9x^2 - 4n^9x^2}{(1+n^8x^2)^2} = \frac{2n - 2n^9x^2}{(1+n^8x^2)^2} > 0$$

$$2n - 2n^9x^2 = 0$$

$$2n(\underbrace{1 - x^8x^2}) = 0$$

$2n = 0$ не треба нам све нам дошло!

$$1 - n^8x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{n^8} \to \boxed{x = \pm\frac{1}{n^4}}$$

$$- \quad \left(-\frac{1}{n^4} \quad + \quad \frac{1}{n^4}\right) \quad -$$

~~$2n - 2n^9x^2$ | + | 0 | + | 0 | −~~

~~$(1+n^8x^2)^2$ | + | + | + | + | +~~

~~$f'(x)$~~

~~$f(x)$~~

		$-\frac{1}{n^4}$		$\frac{1}{n^4}$	
$2n-2n^9x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(1+n^8x^2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	f_{min}	$\nearrow$	f_{max}	$\searrow$

$$\left|\frac{2nx}{1+n^8x^2}\right| \leq \frac{2n\cdot\frac{1}{n^4}}{1+n^8\cdot\frac{1}{n^8}} =$$

нема критичних тачака

$$= \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{n^3}$$

непрекидна је за $x\in\mathbb{R}$, па нема верт. асимптоте

$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$, па је хоризонтална асимптота

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ конв.

$\overset{\text{В.К.}}{\Longrightarrow}$ наш почетни ред униформно конв

$\Rightarrow$ конв.

* Апсолутну морамо испитати јер нису сви чланови позитивни.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2nx}{1+n^8x^2}\right|$$

$\overset{\text{В.К.}}{\Longrightarrow}$ ХН.К. $\Rightarrow$ КОН што значи

да асим. ред апсолутно конв.

8) $\sum_{n=1}^{\infty} x \cdot e^{\frac{27^n x^3}{3}}$, $x \in R$

$\boxed{\bullet\ x > 0}$

$\lim_{x \to \infty} x \cdot e^{\frac{27^n x^3}{3}} = \infty \cdot e^{\infty} = \infty \neq 0$

ред дивергира

$\boxed{\bullet\ x = 0}$

$\sum_0 = 0$ конв.

$\boxed{\bullet\ x < 0}$

$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^{\frac{27^n x^3}{3}} = 0}$

$\infty \cdot 0 = 0$ → јер експон. ф-ја опне расте, значи опне иде у нулу, нето је e

За ово треба још да испитамо!

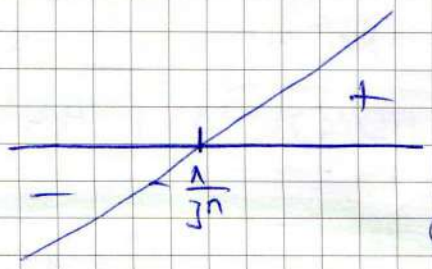
$$\left(x \cdot e^{\frac{27^n x^3}{3}}\right)' = e^{\frac{27^n \cdot x^3}{3}} + x \cdot e^{\frac{27^n \cdot x^3}{3}} \cdot 27^n \cdot x^2$$

$$= \underbrace{e^{\frac{27^n x^3}{3}}}_{>0} \left(1 + 27^n x^3\right)$$

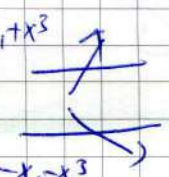
$1 + 27^n x^3 = 0$

$x^3 = -\frac{1}{\underbrace{27^n}_{3^3}}$

$\boxed{x = -\frac{1}{3^n}}$



* Гледамо као обично x



		$-\frac{1}{3^n}$		0
$e^{\square}$	+	+	+	
$1+27^n x^3$	−	0	+	
$f'(x)$	−	0	+	
$f(x)$	↘	Emin	↗	

хоризонтална асимтота је x-оса, а ф-ија непрекидна

$$\left| x e^{\frac{27^n x^3}{3}} \right| \leq \left| -\frac{1}{3^n} \cdot e^{27^n \cdot \frac{-1}{\cancel{(-3^n)^3}\,\cancel{3}} 27^n} \right| =$$

$$= \left| -\frac{1}{3^n} \cdot e^{-\frac{1}{3}} \right| = \frac{1}{3^n} \cdot e^{-\frac{1}{3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot e^{\frac{1}{-3}} = e^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \text{ конв.}$$

=> ПСМ. ФЕ униформно конв => конв

=> апсолутно конв
(као малопре)
претх. пример
зад ток
АПС. конв.

* Битне су нам асимтоте да бисмо само знали да сигурно нешто ф-ију да ограничимо на min и max

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin \frac{2^n x}{1+9^n x^2}}_{f_n(x)}$

$\boxed{|\sin t| \le |t|}$

Посматрамо овај израз

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n x}{1+9^n x^2}}_{g_n(x)}$$

$$g_n(x) = \frac{2^n(1+9^n x^2) - 2^n x \cdot 9^n \cdot 2x}{(1+9^n x^2)^2} =$$

$$= \frac{2^n + \underline{2^n 9^n x^2} - \underline{2^{n+1} 9^n x^2}}{(1+9^n x^2)^2} = \frac{2^n - 2^n 9^n x^2}{(1+9^n x^2)^2} =$$

$$= \frac{\overset{>0}{2^n}(1-9^n x^2)}{(1+9^n x^2)^2 > 0} \to \text{да испитујемо само ово}$$

$1 - 9^n x^2 = 0$

$x^2 = \frac{1}{9^n}$

$x = \frac{\pm 1}{3^n}$

... Тачка !!!

$f(x) \downarrow \quad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3^n}\right) \cup \left(\frac{1}{3^n}, \infty\right)$

$f(x) \uparrow \quad x \in \left(-\frac{1}{3^n}, \frac{1}{3^n}\right)$

$\boxed{E_{max}\left(\frac{1}{3^n}, \frac{2^n}{2 \cdot 3^n}\right)}$ $\quad E_{min}\left(-\frac{1}{3^n}, -\frac{2^n}{2 \cdot 3^n}\right)$

$\uparrow$ x уврстимо

$$\left| \frac{2^n x}{1+9^n x^2} \right| \leq \frac{2^n}{2\cdot 3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2\cdot 3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\frac{2}{3} < 1 \to$ конв.

$\overset{\text{В.К.}}{\Longrightarrow}$ оск. ред је униформно конв.

$\Rightarrow$ конв

а ванн и апс. конв
(претх. пример)

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2x^2+n^2}{(n^2+1)x^2+n^2}$

$f(x) = f(-x)$ ф-ја је парна!

*Кад је парна или непарна апсолутне вр min и max су једнаке!

Свако мфаме јаве ја испитамо јер неше ја се јеси ја е апсолутна вр min вета од max

$$f_n(x) = \ln \frac{n^2x^2+n^2}{(n^2+1)x^2+n^2}$$

$f_n(x) < 0$ која је

$$\boxed{\frac{n^2x^2+n^2}{(n^2+1)x^2+n^2} < 1}$$

просторно 1 и пратимо ја растојање

решење:

$f_n(x) < 0 \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\boxed{\bullet\ x = 0}$

$f_n(x) = \ln 1 = \boxed{0}$ онда ред конв.

$\bullet\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f_n'(x) = \frac{-2xn^2}{(n^2x^2+n^2)\left((n^2+1)x^2+n^2\right)}$$

нема критичних тачака

ф-ја је непрекидна за $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ нема верт. асимптота

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln\frac{n^2x^2+n^2}{(n^2+1)x^2+n^2}$$

$$\ln \lim \frac{n^2x^2+n^2}{(n^2+1)x^2+n^2}$$

Х.А $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = \ln\frac{n^2}{n^2+1}$

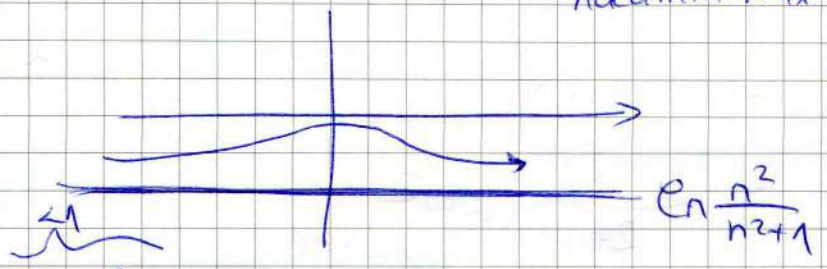
* таблица *

$f_n(x) \nearrow \quad x \in (-\infty, 0)$

$f_n(x) \searrow \quad x \in (0, +\infty)$

$\boxed{E_{max}(0,0)}$

локални max



$$|f_n(x)| \le \left|\ln\frac{n^2}{n^2+1}\right| = -\ln\frac{n^2}{n^2+1}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2}{n^2+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2+1}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \text{ конв} \xrightarrow{\text{гр. I врсте}} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2}{n^2+1} \text{ конв.} \longrightarrow$$

→ а онда на основу ВАЈЕР. крит. униформно конв, а ванн и апс. конв.

Степени редови

(1.) Развити ф-ију $f(x)$ у Маклоренов ред и одредити област конв. добијеног развоја ако је

а) $f(x) = e^{\boxed{-x}}$

М.р. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boxed{x}^n}{n!}$, $x \in R$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}, \; -x \in R =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad \text{о.к. } x \in R$$

апс. конв.

б) $f(x) = \sin^2 x$

М.р. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$$= \frac{1-\cos 2x}{2} \quad 2x \in R$$

↑ само овде уоштимо ред

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\boxed{\cos 2x}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{1}{2} - (-1)^0 \cdot \frac{2^{0-1} \cdot x^0}{0!} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

$n=0 \to$ прва члан да дисто свуда исти

$$= \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \sum_{n=1}^{\infty} (\quad) =$$

свесно уводимо тај минус

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

$\boxed{\text{ОК. } x \in \mathbb{R}}$

б) $f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{1-x}{2+x}}$

м.р. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]$

$$f(x) = \frac{1}{3} \ln \frac{1-x}{2+x} = \frac{1}{3} \left(\ln(1-x) - \ln(2+x) \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\ln(1+(-x)) - \ln 2 \cdot \left(1 + \frac{x}{2}\right) \right) =$$

$(\ln 2 + \ln(1+\frac{x}{2}))$

$-x \in (-1, 1] \quad -1 < -x \leq 1 \ (\cdot(-1)) \Rightarrow \boxed{x \in [-1, 1)}$

$x > x \geq -1$

$$= \frac{1}{3} \left(\ln(1+(-x)) - \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \right) =$$

$\frac{x}{2} \in (-1, 1) \quad -1 < \frac{x}{2} \leq 1 \ (\cdot 2)$

$\boxed{x \in (-2, 2)}$

$$= \frac{1}{3} \left(\sum (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n} - \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{2^n \cdot n} \right) =$$

$(-x)^n$

$$= \frac{-\ln 2}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(-1 - \frac{1}{2^n}\right) x^n$$

пресек сва два интервала за област конв.

$[-1, 1) \cap (-2, 2]$

$[-1, 1) \leftarrow$ о.к.

i) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

Н.р. $(1+x)^{\alpha} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^{n}$, $x \in (-1,1)$

$$f(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{n} x^{2n}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

$$\binom{-\frac{3}{2}}{n} = \frac{\overbrace{-\frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-(n-1)\right)}^{n}}{\underset{-1}{n!}} =$$

$\frac{3}{2}+n-1$

$\frac{3}{2}+\frac{2n-2}{2} =$

$= \frac{2n+1}{2}$

и 2 одно и тот же

$$= \frac{(-1)^{n}\cdot\frac{1}{2}^{n}\left(3\cdot 5\cdots(2n+1)\right)}{n!}$$

$$\boxed{n!! = n\cdot(n-2)(n-4)\ldots}$$

$$= \frac{(-1)^{n}\cdot(2n+1)!!}{2^{n}\cdot n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)!!}{(2n)!!}$$

$2^n n!$

$\frac{2n-1}{2} = n-1$

$$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\ldots(2n-(2n-2)) \to n$$

$$= 2^n\cdot n\cdot(n-1)(n-2)\ldots = 2^n\cdot n!$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} = \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{(2n)!!}$$

нема скраћивања
јер је једним
фактором
$(n+1)!! \to$ све непарне!
$(2n)!! \to$ све парне!

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 \in (-1,1) \\ x \in (-1,1) \text{ ok.} \end{array}}$$

g) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

користимо $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

I НАЧИН

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1+(-x))^{-2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(-1)^n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$\boxed{\text{o.k. } x \in (-1,1)}$$

II НАЧИН

$$\left(\frac{1}{1-x} \to \frac{1}{1-f(x)} \right)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)'$$

ако је ред конв. тада сума и извод могу да замене место
као и да интеграл

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \left(\underset{n=0}{1} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' =$$

o.k. $x \in (-1,1)$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n$$

сада и
почетак
= као
I начин

d) $f(x) = \frac{1}{1+2x} =$ domaćim

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$, o.k. $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

e) $f(x) = \frac{x^2+2}{(1-x)^2(1+2x)} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+2x}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1 + (-2)^n) x^n$ o.k. $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

f) $f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ o.k. $x \in \mathbb{R}$

-користећи теорију степеног реда можемо да изр. суме бројних редова

ПРЕДАВАЊА

Задатак кућни

Пр. Доказати да је $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

$n=1$ → по истој формули од прошлог часа

Сетити се n у бројиоцу! сигурно је n у бројиоцу! да је лепо интеграл. редови

$\forall x \in [-1, 1)$ конвергира

$$\int_0^x t^{n-1}\,dt = \frac{t^n}{n}\Big|_0^x = \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} g^n = \frac{1}{1-g} \quad |g|<1$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} =$$

користимо ово

ово је реда

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\,dt = \frac{1}{x} \int_0^x \Big(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\Big)\,dt$$

на основу особине са прошлих часова (сума и интеграл мењају места)

$$= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{t-1} =$$

$$= -\frac{1}{x} \ln|t-1|\Big|_0^x = \boxed{-\frac{1}{x} \ln|x-1|}$$

ово је сума

За $x=-1$ добијамо

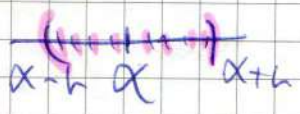
уврстимо која је $x=-1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\frac{1}{(-1)} \cdot \ln|-2| = \ln 2$$

ГЛАВНА ПРИМЕНА: са особинама степеног реда, изр суме бројних редова

Развој ф-ије у степени ред

Def. Функција $f(x)$ је аналитичка у тачки $\alpha \in \mathbb{R}$ ако постоји степени ред $\sum a_n (x-\alpha)^n$ и $h>0$ такви да $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n$ $\forall x \in (\alpha-h, \alpha+h)$



* аналитичка ф-ја → у некој околини може развити у степени ред (центриран у тачки α)

* Може се показати да су коефицијенти дати са $\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}}$ → n-ти извод $n \in \mathbb{N}$ → ако је ф-ја аналитичка у некој тачки ⇒ довољно дефинисани изводи

* Ред $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x-\alpha)^n, x \in (\alpha-h, \alpha+h)}$ се назива ТЕЈЛОРОВ РЕД ф-ије f у тачки α. Специјално, за $\alpha = 0$ добијамо МАКЛОРЕНОВ РЕД.

Пр. Следеће ф-ије развити у Маклоренов ред:

а) $f(x) = e^x$

$f' = e^x$, $f'' = e^x$, ... $f^{(n)} = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$ ← прво извод

$\Rightarrow a_n \frac{f^{(n)}0}{n!} = \frac{1}{n!}$ ← за коеф.

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}}$$

б) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\quad f' = -\frac{1}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$f'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f''' = \frac{2\cdot 3}{(1-x)^4}$$

$$\dots$$

$$f^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(0) = n!$$

унесемо x уместо нуле

форм. само за унапред геом. сума

$$\Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ \forall x \in (-1,1) \quad (r=1)}$$

Пр. Сл. ф-ије развити у Маклоренов ред.

а) $f(x) = e^{x^2-3} = e^{-3}\cdot e^{x^2} =$

$$= e^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!} = e^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

не наше све само да уде уочено

карамо другачиту формулу!

б) $f(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x \underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{=0} - \sin x \underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{=-1} =$

$$= \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

ЈЕР Маклоренов ред мора бити центриран у 0! (само степени x-а)

Пр. Сл. ф-ије развити у Тејлоров ред у околини тачке α и написати ње одређени развој basici.

$$\boxed{\sum a_n (x-\alpha)^n}$$

$\sum a_n (x+1)^n$ зато овај а наместимо

а) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\quad \alpha = -1$

$$f(x) = \frac{1}{1-(x+1-1)} = \frac{1}{1-(x+1)+1} = \frac{1}{2-(x+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$$

зато сада $-1<x<1$ сада ово наше заменимо

$$\left|\frac{x+1}{2}\right| < 1 \iff -1 < \frac{x+1}{2} < 1 \iff$$

$$\iff -2 < x+1 < 2 \iff x \in (-3, 1)$$

б) $f(x) = \ln(2+3x)$, $\alpha = 2$

→ зато $\sum a_n (x-\alpha)^n$ и $\ln(1+x)$

$x-2$ нам треба

тако се ово намести

$$f(x) = \ln(2+3(x-2+2)) =$$

$$= \ln(2+3(x-2)+6) = \ln(8+3(x-2)) =$$

$$= \ln\left(8 \cdot \left(1+\frac{3(x-2)}{8}\right)\right) = \ln 8 + \ln\left(1+\frac{3(x-2)}{8}\right) =$$

$$= \ln 8 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \left(\frac{3(x-2)}{8}\right)^n}{n} =$$

$$= \ln 8 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n (x-2)^n}{n \cdot 8^n} \rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!}$$

$$-1 < \frac{3(x-2)}{8} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{3} \leq (x-2) \leq \frac{8}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right]$$

само заменимо

ТЕСТ!

Израчунаати $f^{(n)}(2) = \cancel{n}(n-1)! \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{\cancel{n} \cdot 8^n} =$

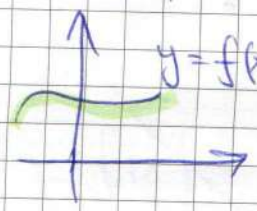
$$= \frac{(n-1)! \, (-1)^{n+1} \cdot 3^n}{8^n}$$

Двострук интеграл

ПОДСЕТНИК

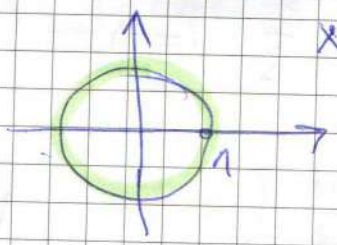
* Криве у R^2

1) графици ф-ја (експлицитно)



2) Имплицитни облик

$$F(x,y) = 0$$

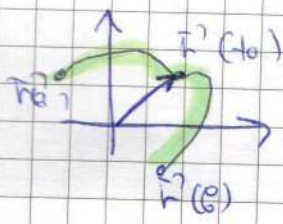


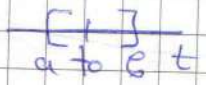
$x^2+y^2=1$

$F(x,y) = x^2+y^2-1$

3) Параметарски облик

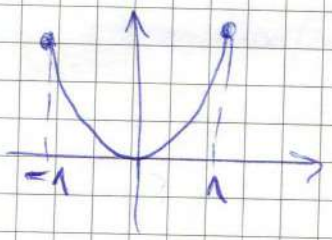
$$t \xrightarrow{\text{биективно}} \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a,b]$$





Пр Сл. криве написати у параметарском облику

а) $y = x^2$, $x \in [-1,1]$



$x(t) = t$ ← само заменимо са t

$y(t) = t^2$ ← параметрисано у

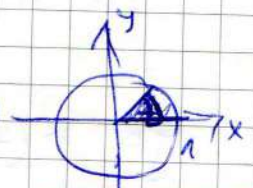
$$\vec{r}(t) = (t, t^2), \quad t \in [-1,1]$$

$y = f(x)$, $x \in [a, b]$ + каја имамо криве које су праћене ф-ја

$\vec{r}(t) = (t, f(t))$, $t \in [a, b]$

парам. облик

б) $x^2 + y^2 = 1$ - кружница са центром у коорд. почетку (параметарски облик)



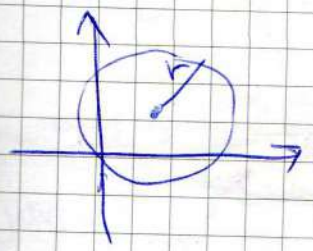
$x(t) = \cos t$

$y(t) = \sin t$

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$

t - угао који полуправа заклапа са позитивним делом x-осе

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ - произвољна кружница (параметарски облик)



$x - x_0 = r\cos t$

$y - y_0 = r \cdot \sin t$

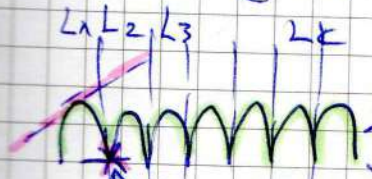
$x(t) = x_0 + r\cos t$

$y(t) = y_0 \cdot r\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$

Def. Крива $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ је глатка ако

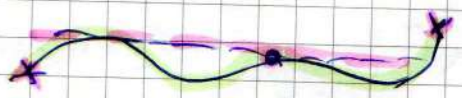
$\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t))$ постоји $\forall t \in (a, b)$

(ако се у свакој унутрашњој тачки може поставити тангента)



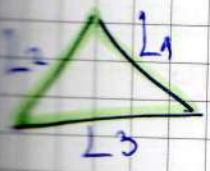
- јесте по деловима глатка
- али није

- овде не може тангента јер су чвор



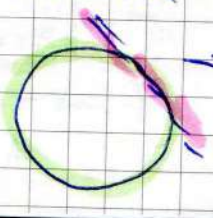
- зато је боље отворене криве

x у крајњим тачкама се не може никад поставити тангента



значи није глатка

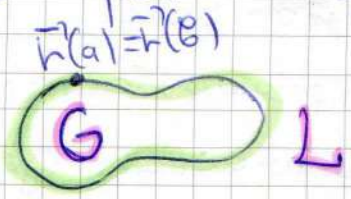
- нека није глатка, али по деловима јесте



- глатке криве

Def. Крива L је по деловима глатка ако се може написати у облику
$L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$, где су $L_1, L_2, \dots L_k$ глатке криве.

* Крива L је $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ је затворена ако је $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.



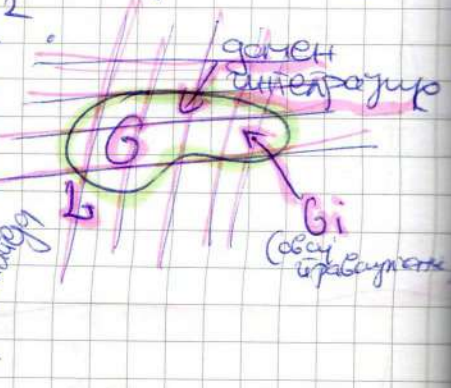
* G - област у R^2 ограничена кривом L

Def. (Двоструки интеграл)

* Нека је L по деловима глатка затворена крива која ограничава област G у R^2.

Тада $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta G_i}_{\text{интегрална сума}}$$



* При чему је: $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ подела области G по деловима глатким кривим.

M_i је тачка унутар области G_i, а

ΔG_i је површина области G_i.

* Подела $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ мора бити таква да $\max\limits_{1 \le i \le n} d(G_i) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ при чему

је $d(G_i) = \max\limits_{A, B \in G_i} d(A, B)$ ДИЈАМЕТАР области G_i.

растојање тј. дужке A, B

Пр.

максимално растојање између две тачке → дијаметар

Вежба V

*Наставак развоја

5) Развити ф-ију $f(x)$ у Маклоренов ред и одредити област конв. добијеног развоја ако је

a) $\arccos x$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n} = \dots =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

$(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\dots$

$$f(x) = \int_0^x (\arccos t)' dt = \arccos t \Big|_0^x$$

$$= \int_0^x -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} t^{2n} dt =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^x t^{2n} dt =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \left(x^{2n+1} - 0^{2n+1}\right)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arccos t \Big|_0^x$$

$$= \arccos x - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\boxed{\text{O.K. } x^2 \in (-1,1) \qquad x \in (-1,1)}$$

e) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - x^2$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\operatorname{arctg} t \Big|_0^x = \int_0^x (\operatorname{arctg} t)' \, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \, dt$$

$$\| $$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0$$

$$= \operatorname{arctg} x - 0$$

$$= \operatorname{arctg} x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} \, dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \left(x^{2n+1} - 0^{2n+1} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$f(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - x^2 =$$ → покушавамо да нестане сво x^2

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1} - x^2$$

$n=0$

$$(-1)^0 \cdot \frac{x^{2\cdot 0+2}}{2\cdot 0+1}$$

нулти члан

$$= \frac{(-1)^0 \cdot x^{2\cdot 0+2}}{2\cdot 0+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1} - x^2$$

полазимо од бројача 1

$$= \cancel{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1} - \cancel{x^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

$-x^2 \in (-1,1)$

о.к. $x \in (-1,1)$

② Развити ф-ију $f(x)$ у Тејлоров ред у околини тачке $x_0 \in \mathbb{R}$ и одредити област конв. добијеног развоја ако је:

а) $f(x) = e^{3x}$, $\boxed{x_0 = 2}$ → треба нам $x-\alpha$, $x-2$

$$= e^{3(x-2)+6} =$$

горе/доле

$$= e^6 \cdot e^{3(x-2)} = e^6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot (x-2)^n}{n!}$$

$3(x-2) \in \mathbb{R}$

о.к. $x \in \mathbb{R}$

б) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$

← где користимо sin збира формулу

$$= \sin\left(2\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right) = \sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\overbrace{\cos\pi}^{-1} + \cancel{\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\underbrace{\sin\pi}_{0}} =$$

$$= -\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} & 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \in R \\ \text{o.k} & x \in R \end{array}}$$

б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$

$$= \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{1-(-(x-1))}$$ → зоол гоорой разбоїа наменшіамо

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

o.k.

$$\boxed{\begin{array}{l} x-1 \in (-1,1) \\ -1 < x-1 < 1 \quad /+1 \\ 0 < x < 2 \\ x \in (0,2) \rightarrow \text{o.k.} \end{array}}$$

г) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $x_0 = 1$

$$= \frac{1}{(x-1)-1} = -\frac{1}{1-(x-1)}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x-1 \in (-1,1) \\ -1 < x-1 < 1 \\ \text{o.k.} \quad x \in (0,2) \end{array}}$$

g) $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x^2-2x}$, $x_0 = 1$

о.к. пресек ових два, али пошто је иста $x \in (0,2)$

$$= \frac{2x-2}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} = \dots = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$$

ово користимо да растављамо у два реда...

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n \left((-1)^n - 1\right)$$

$(-1)^n - 1$: $n = 2k$, $1-1=0$; $n = 2k+1$, $-1-1=-2$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (x-1)^{2k+1} \cdot (-2) =$$

$k=1$ → јер је нулти члан исто 0!

пошто су парни чланови сви $n=2k$ где онда у суму само

$$= -2 \sum_{k=1}^{\infty} (x-1)^{2k+1}$$

f) $f(x) = \ln(x^2+7x+12)$, $x_0 = -2$

→ треба нам $x+2$..

$x^2+7x+12 = \dots$

$x_{1,2} = \dots$ → -3, -4

$$f(x) = \ln((x+3)(x+4))$$

$$= \ln(x+3) + \ln(x+4)$$

$$= \ln((x+2)+1) + \ln((x+2)+2)$$

$$= \ln(1+(x+2)) + \ln\left(2\left(1+\frac{x+2}{2}\right)\right)$$

$$= \ln(1+\boxed{(x+2)}) + \ln 2 + \ln\left(1+\boxed{\frac{x+2}{2}}\right)$$

$\in (-1,1]$ о.к. $\in (-1,1]$ о.к.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x+2)^n + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{(x+2)^n}{2^n}$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x+2)^n \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$x+2 \in (-1,1]$

$-1 < x+2 \leq 1 \quad | -2$

$-3 < x \leq -1$

$x \in (-3,-1] = I_1$

$\frac{x+2}{2} \in (-1,1]$

$-1 < \frac{x+2}{2} \leq 1 \quad | \cdot 2$

$-2 < x+2 \leq 2 \quad | -2$

$-4 < x \leq 0$

$x \in (-4,0] = I_2$

пресек ова 2 интервала је о.к.

$$\boxed{\text{о.к. } I_1 \cap I_2 \quad x \in (-3,-1]}$$

пресек ће бити у ком случају разлика

е) $f(x) = \ln(\underbrace{x^2+4x+5}_{\boxed{x^2+4x+4}+1 = (x+2)^2+1})$, $x_0 = -2$

$= \ln(1 + \underbrace{(x+2)^2}_{\in(-1,1]})$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x+2)^{2n}$

$-1 < (x+2)^2 \leq 1$

• $x+2 \geq 0$

јер је на квадрат

$0 \leq x+2 \leq 1 \quad | -2$

$-2 \leq x \leq -1$

$x \in [-2,-1] \to I_1$

• $x+2 < 0$

$-1 \leq x+2 \leq 0 \quad | -2$

$-3 \leq x < -2$

$x \in [-3,-2) \to I_2$

о.к. $I_1 \cup I_2$ $\boxed{x \in [-3,-1]}$

свуда је један разлог са једне случаја зато је у другом а не

③ Сумирати сл. бројне редове:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

а) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - 1 = e^{-1} - 1$$

$x = e^{-1}$

$$\boxed{n=0: \quad \frac{x^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1}$$

б) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{9^n (2n)!} =$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}}$$

$$= - \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = -\cos\frac{1}{3}$$

в)

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{3^{n-1}} = (-1)^2 \cdot 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{6}{5}$$

г) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^{n+1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n+2}}{n!} + 4 =$$

увећава за 1 јер је то за сваки $n+1$

фали нам нулти члан

$$\boxed{n=0 \quad \frac{(-1)^0 \cdot 2^{0+2}}{0!} = 4}$$

$2^n \cdot 2^2$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n+2}}{n!} - 4$$

јест +4 то је очигледно члан

$$= 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n!} - 4$$

$$= 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} - 4 = 4 \cdot e^{-2} - 4 =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right)$$

Сумирање степених редова

1. Одредити област конв. сл. степених редова

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n} (2x+1)^n \longrightarrow t = 2x+1$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} t^n$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{3}{\sqrt[n]{n}}} \to 1$$

$$|t| < \frac{1}{3}$$

испитујемо за $-\frac{2}{3}$ и $-\frac{1}{3}$ јер за њих не знамо

$$|2x+1| < \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < 2x+1 < \frac{1}{3}$$

$$x \in \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

• $x = -\frac{2}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$ КАНС. УСЛОВНО (К)

• $x = -\frac{1}{3}$ } кад уврстимо и среди се сбр

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ ДИВ X

$$\boxed{\text{О.К. } x \in \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$$

б) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2n+1} (x+1)^n$$

$$\boxed{t = x+1}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n!}{2n+1}}{\frac{(n+1)! \cdot (2(n+1)+1)}{2n+3}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{(2n+1)(n+1)}$$

$2(n+1)+1$

КАНС. ЗА $t = 0$

$x+1 = 0$

$$\boxed{\text{О.К. } x = -1}$$ → само та тачка

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)!} x^n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2n}{\cancel{(n+1)!}}}{\frac{2n+2}{\underset{(n+2)(\cancel{n+1})!}{\cancel{(n+2)!}}}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n(n+2)}{2n+2} \right| = \infty$$

$$\boxed{\text{o.k.} \quad x \in R}$$

② Одредити област конв. и сумирати сл. степене редове

а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{1}} = 1$$

$|x| < 1$

$x \in (-1, 1)$

- $x = -1$

  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ див.

- $x = 1$

  $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ див.

$$\boxed{\text{o.k} \quad x \in (-1, 1)}$$

I начин

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \pm 1 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 =$$

$$= \frac{x}{1-x}$$

$n=0$

$x^0 = 1$

II начин

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} =$$

овај равној користимо!

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n}$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \quad \to x \in (-1,1)$$

$x=1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} n$ D

$x=-1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^n$ D

$$\boxed{\text{O.K.} \quad x \in (-1,1)}$$

КОЛОКВИЈУМ!

када множимо са n → ИЗВОД узимамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} =$$

ово је претх. зад

$$= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'$$

$$= x \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' = x \cdot \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$$x \in [-1, 1)$$

$x = -1$ конв.

$x = 1$ див.

каја се дели онда је интеграл!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x z^{n-1}\, dz$$

$$= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}\, dz$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, dz$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\underbrace{1-z}_{u=1-z}}\, dz$$

$$= -\ln|1-z|\Big|_0^x$$

$$= -\ln|1-x|$$

$$\text{г)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \underbrace{(2x-3)}_{z}{}^n$$ → извод јер се мнежи!

Домаћи

о.к. $x \in (1,2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z = \dots$$

$$\dots = \frac{z^2+z}{(1-z)^3} \xrightarrow{\text{Вратимо смену}} \frac{2x^2-5x+3}{4(2-x)^3}$$

са изводом

③ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{n}(x+2)^n$$ ← дат је степени ред

а) одредити област конв. и сумирати ред

б) користећи добијени резултат израчунати

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{2^n n} = ?$$

а) о.к. $x \in (-3,-1)$ реш.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n}(x+2)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n} - \frac{2}{n}\right)(x+2)^n$$ * поделимо на два дела

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \underbrace{(x+2)}_{z}{}^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$$

може извод

z n може интеграл

$$\dots = \frac{z}{(1-z)^2} + 2\ln|1-z|$$

$$= \frac{x+2}{(x+1)^2} + 2\ln|x+1|$$

б) $\frac{n^2-2}{\cancel{n}}(x+2)^n = \frac{n^2-2}{2^n \cancel{n}}$

$(x+2)^n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$x+2 = \frac{1}{2}$

$x = -\frac{3}{2}$

У решење под а) уврстимо добијено

$x \to -\frac{3}{2}$

$\hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{2^n n} = \frac{-\frac{3}{2}+2}{\left(-\frac{3}{2}+1\right)^2} + 2\ln\left|-\frac{3}{2}+1\right| =$

$= \dots = 2 - 2\ln 2$

предавања

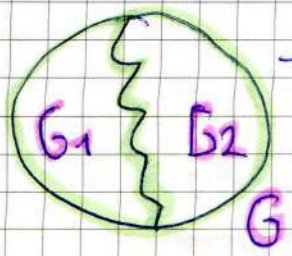
Особине двоструког интеграла

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\iint\limits_G (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy =$

$= \alpha \cdot \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy + \beta \cdot \iint\limits_G g(x,y)\,dxdy$

2) Ако је $\{G_1, G_2\}$ подела области G тада

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dxdy$$

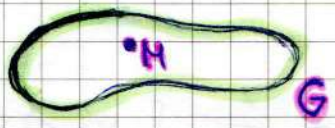


→ области G_1 и G_2 се не смеју преклапати!

3) Ако је $f(x,y) \leq g(x,y)$ над области G тада $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint\limits_G g(x,y)\,dxdy$

* Специјално, $f(x,y) \geq 0$ над области G тада је и $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy \geq 0$

4) (Теорема средње вредности)



* Нека је f непрекидна ф-ја над области G тада постоји тачка M унутар области G таква да је $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = f(M) \cdot \Delta G$, ΔG - површина области G

* Специјално, ако је $\boxed{f(x,y)=1}$ над G

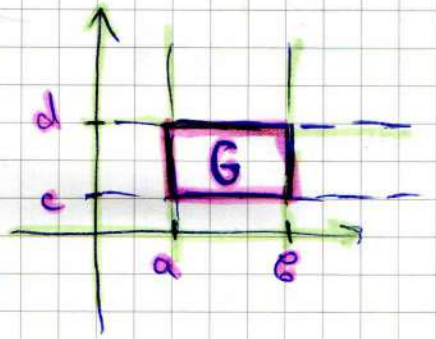
тада је $\boxed{\iint_G dxdy = \Delta G}$ → Директна последица теореме средње вр.

↑ површина површи

$\boxed{\int_a^b dx = b-a}$ дужина дужи

Израчунавање двоструког интеграла

1) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$



$$\iint_G f(x,y)\,dxdy =$$

x је константа, јер интегралимо по y!

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx =$$

y је константа, јер овде интегралимо по x!

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Пр. Израчунати:

а) $I = \iint_G x^2 y^3\,dxdy \qquad G = [0,1] \times [0,1]$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 y^3\,dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \left(\frac{y^4}{4} \Big|_0^1 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

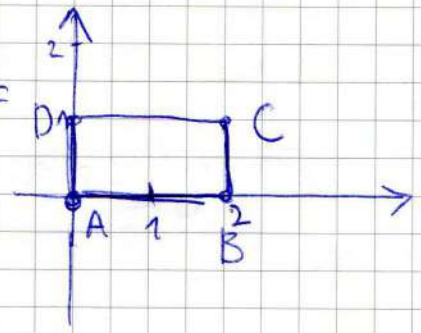
б) $I = \iint_G (x^2+3y)\,dx\,dy$ ако је G правоугаоник

$A(0,0)$ $B(2,0)$

$C(2,1)$ $D(0,1)$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2+3y)\,dx \right) dy =$$

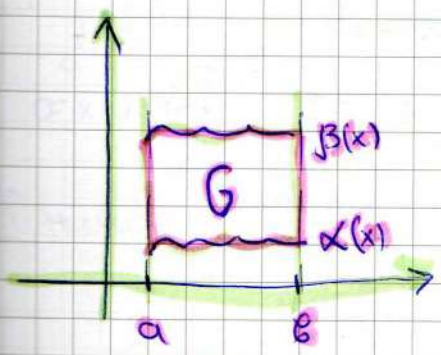
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 3y\,x\Big|_0^2 \right) dy =$$



$$= \int_0^1 \left(\frac{8}{3} + 6y \right) dy =$$

$$= \frac{8}{3} + 6 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{8}{3} + 3 = \frac{17}{3}$$

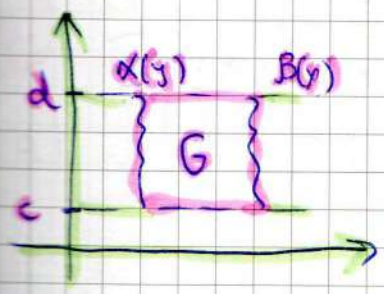
2) $G = \{ (x,y) \in R^2 \mid a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x) \}$ $a, b \in R$, $\alpha, \beta\,[a,b] \to R$



$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx :=$$

$$\underset{\text{ознака}}{:=} \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$$

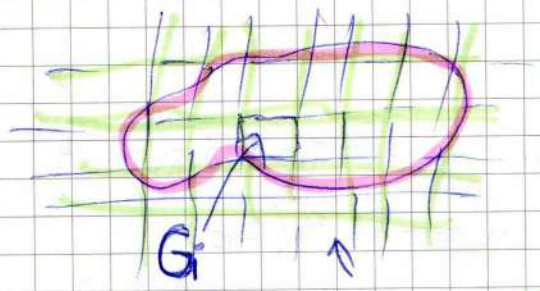
3) $G = \{ (x,y) \in R^2 \mid \alpha(y) \le x \le \beta(y),\ c \le y \le d \}$ $c, d \in R$, $\alpha, \beta\,[c,d] \to R$



$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy :=$$

$$:= \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

* Свака област G се може поделити на подобласти облика 1), 2) или 3).

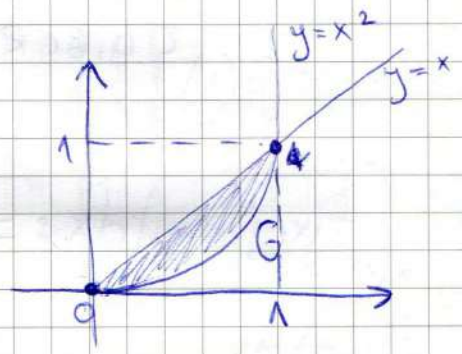


$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{G_i} f(x,y)\,dx\,dy$$

нека област = збир интеграла мањих области
које знамо како да израчунамо.

Пр. У сл. двоструким интегралима поставити границе

а) $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$ ако је G област ограничена са $y=x$ и $y=x^2$



Пресек: $x=x^2$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0 \Rightarrow x=1 \cup x=0$

I начин:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$$

II начин: → обрнути редослед

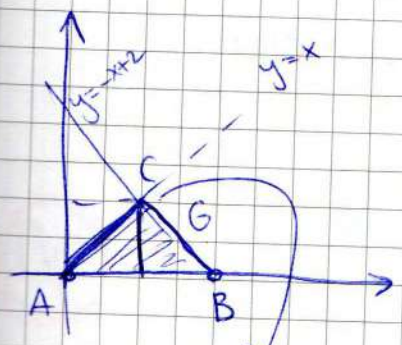
$y=x \to x=y$

$y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$$

Интеграл у реду

в) $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$ где је G троугао са теменима $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$



$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$ – ј-на праве кроз две тачке

$$AC:\ y-0=\frac{1-0}{1-0}(x-0)$$

$$\boxed{y=x}$$

$$BC:\ y-0=\frac{1-0}{1-2}\cdot(x-2)$$

$$\boxed{y=-x+2}$$

јер су све праве кроз тачку пр. морамо добити та као збир два интеграла

I начин

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{-x+2} f(x,y)\,dy$$

II начин → сада прво y, па тек онда трансформ. x-а
овде немамо проблема
– морамо x преко y-а да изразимо овде!

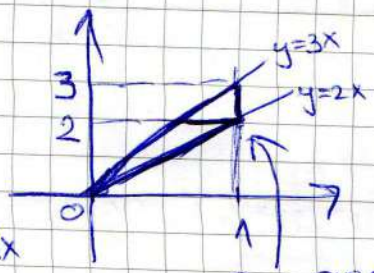
$$\int_0^1 dy\int_y^{-y+2} f(x,y)\,dx$$

Пр. У сл. интегралима променити редослед интеграције

ТЕСТ

само заменимо x и y иако је још ни изр. по y.

а) $$\int_0^1 dx\int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy$$



$$=\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx+\int_2^3 dy\int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,dx$$

опет делимо

$$e)\quad \int_0^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx$$

десн. део x осе

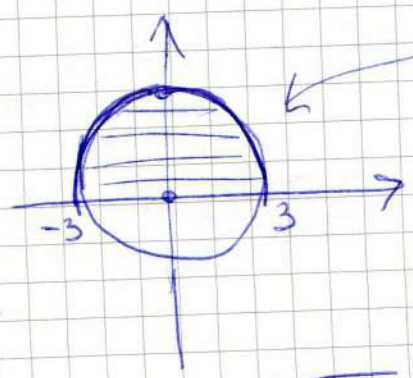
нег. део x осе

$x = \sqrt{9-y^2} \quad /^2$

$\boxed{x^2+y^2=9}$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{9-x^2}$

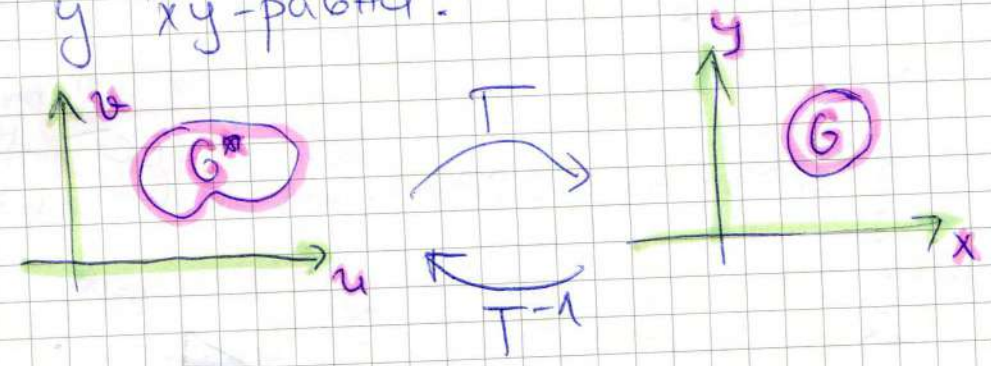
десн. део y осе



$$= \int_{-3}^{3} dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy$$

Смена променљиве у двоструком интегралу

* Нека је T бијективно пресликавање (смена) дата са $x=x(u,v)$ и $y=y(u,v)$ која слика област G^* из uv-равни у област G у xy-равни.



* Јакобијан, пресликавања T је детерминанта 2×2 дата са $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ нас

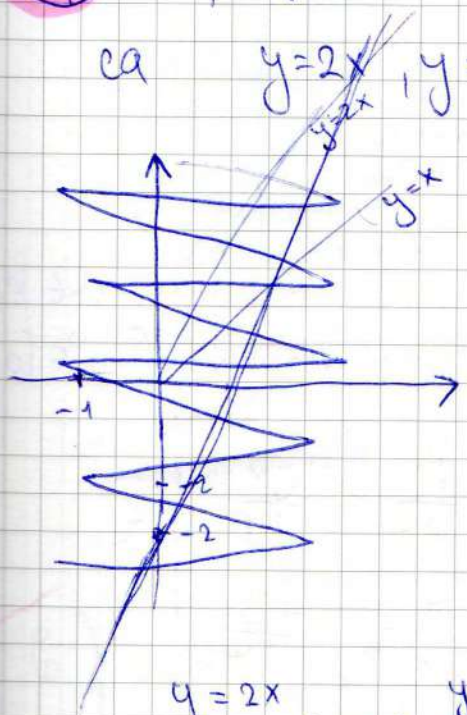
* Тада $\iint_G f(x,y)\,\boxed{dx\,dy} = \iint_{G^*} f(x(u,v)), y(u,v))\,\boxed{|J|\,du\,dv}$

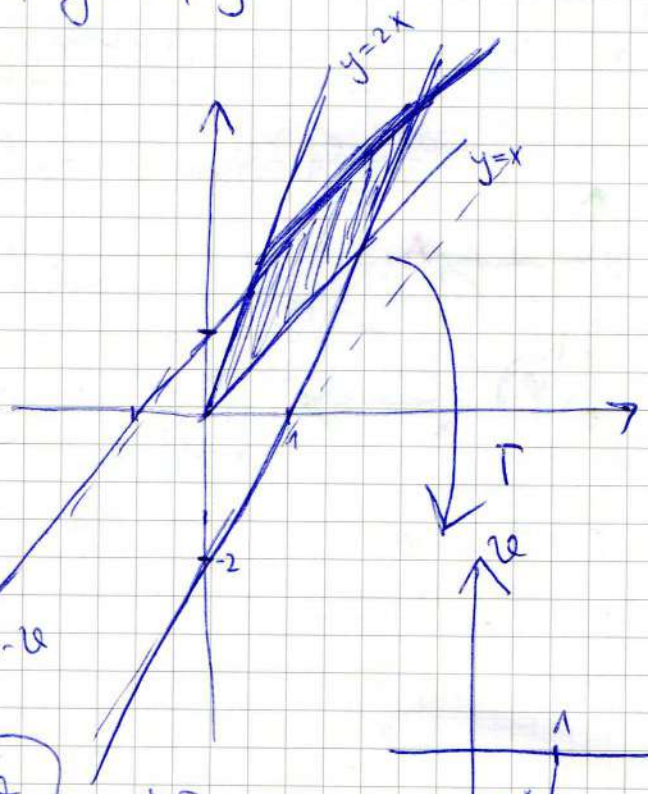
то се мења

апсолутна вр јакобијана

Пр. Израчунати $\iint_G \underbrace{xy}_{f(x,y)}\,dx\,dy$ ако је G ограничена са $y=2x$, $y=2x-2$, $y=x$, $y=x+1$

$=I$





$y=2x$ $\quad$ $y=x$

$2u-v=2(u-v)$ $\quad$ $u-v=2u-v$

$2u-v=2u-2v$ $\quad$ $u=0$

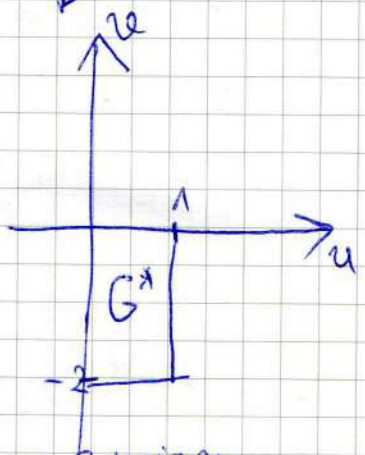
$v=0$

Смена $\quad x=u-v$

$y=2u-v$

→ НЕ ЗНАМ КАКО ОВО ДА ОДРЕДИМО

Треба да видимо да ваљајући горњу област → тира трапезоидна!



$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1+2 = 1 \neq 0 \rightarrow$$ смена је добра

$|J| = 1$

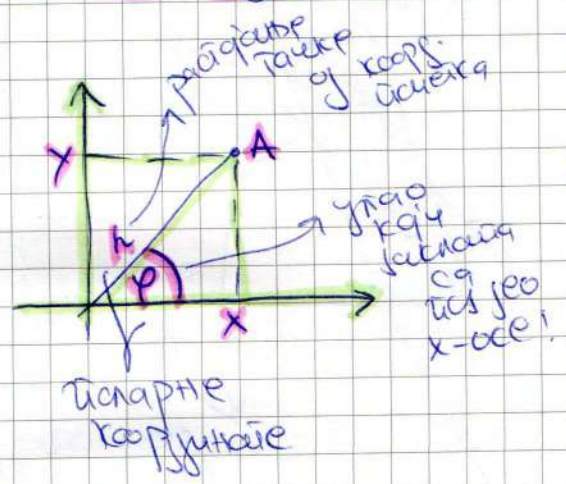
$$I = \iint_G (u-v)(2u-v)\,du\,dv = \int_{-2}^{0} dv \int_0^1 (2u^2 - 3uv + v^2)\,du$$

$$= \int_{-2}^{0} \left(2 \cdot \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 - 3v \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 + v^2 u\Big|_0^1 \right) dv =$$

$$= \int_{-2}^{0} \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}v + v^2 \right) dv = \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{3}{2}\frac{v^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{v^3}{3}\Big|_{-2}^{0} =$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{3}{4}(-4) + \frac{8}{3} = 4 + 3 = 7$$

Смена у поларним координатама



$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\varphi \quad r \in [0, \ldots], \ \varphi \in [0, \ldots]$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

потпуно исправно

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\varphi - (-r\sin\varphi) \cdot \sin\varphi =$$

$$= r \cdot \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1} = r \geq 0 \Rightarrow |J| = r$$

формула за смену поларних координата

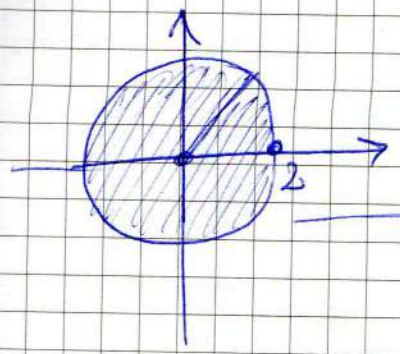
$$\rightarrow \iint_{G} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{G^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

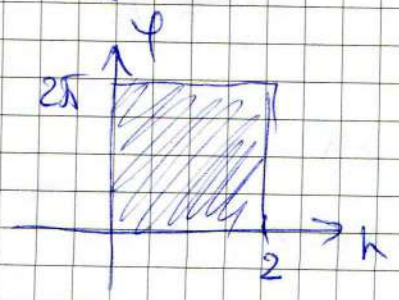
Пр. Сл. области описати у поларним координатама:

а) $x^2+y^2 \le 4$

$r \in [0,2]$

$\varphi \in [0,2\pi]$





б) $x^2+(y-2)^2 \le 9$, $y \ge 2$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y-2 = r\sin\varphi \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 2 + r\sin\varphi \end{cases}$$

$r \in [0,3]$

$\varphi \in [0,\pi]$

↳ када се преобразимо у поларним облик опет правоугаоник као у трећ. примеру!

Вежбе VI

КОЛОКВИЈУМ!

1. Одредити област конвергенције и сумирати сл. степене редове:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+5n-1}{n-1} (x+1)^{2n}$

смена: $z = (x+1)^2$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{\frac{n^2+5n-1}{n-1}}}_{\text{добијем 1}}} = 1$$

$|z| < 1$

$(x+1)^2 < 1 \quad / \sqrt{\ }$

$|(x+1)| < 1$

$-1 < x+1 < 1 \quad / -1$

$-2 < x < 0$

$x \in (-2, 0)$

* крајње тачке

$x = -2$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+5n-1}{n-1}$ D

* $x = 0$ } исто овај

$-\|-$ D

о.к. $x \in (-2, 0)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+5n-1}{n-1} z^n$$

$$\begin{array}{l} n^2+5n-1 : n-1 = n \\ \underline{-n^2+n} \\ \quad 6n-1 \\ \quad \underline{-6n+6} \\ \qquad 5 \end{array}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(n+6+\frac{5}{n-1}\right) z^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n z^n + \sum_{n=2} 6 \cdot z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n-1} z^n$$

може извод

може интеграл

$$= z \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot z^{n-1} + 6 \sum_{n=2}^{\infty} z^n + 5 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n-1}$$

$$\int t^n = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$= z \sum_{n=2}^{\infty} (z^n)' + 6 \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+2} + 5 z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n-1} =$$

извучемо једно z због интеграла

$$= z \left(\sum_{n=2}^{\infty} z^n\right)' + 6z^2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n + 5z \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^z s^{n-2} ds =$$

$$= z \left(z^2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' + 6z^2 \frac{1}{1-z} + 5z \int_0^z \sum_{n=2}^{\infty} s^{n-2} ds =$$

$$= z \left(z^2 + \frac{1}{1-z}\right)' + \frac{6z^2}{1-z} + 5z \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} s^n ds$$

$$= z \left(\frac{2z(1-z) - z^2(-1)}{(1-z)^2}\right) + \frac{6z^2}{1-z} + 5z \int_0^z \frac{1}{1-s} ds$$

$a = 1-s$
$da = -ds$

$$= z \cdot \frac{2z - 2z^2 + z^2}{(1-z)^2} + \frac{6z^2(1-z)}{1-z} - 5z \ln|1-s|\Big|_0^z$$

$$= z \cdot \frac{2z - z^2}{(1-z)^2} + \frac{6z^2 - 6z^3}{(1-z)^2} - 5z\left(\ln|1-z| - \ln 1\right)$$

$$= \frac{2z^2 - z^3 + 6z^2 - 6z^3}{(1-z)^2} - 5z \ln|1-z|$$

$$= \frac{8z^3 - 7z^3}{(1-z)^2} - 5z \ln|1-z|$$

→ Враћамо смену

$$\boxed{z = x+1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+5n-1}{n-1} (x+1)^{2n}$$

$$= \frac{-7(x+1)^6 + 8(x+1)^4}{(x^2+2x)^2} - 5(x+1)^2 \ln|x^2+2x|$$

6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6} \sin^n x$

$t = \sin x$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{2n+5}{n^2+5n+6}}} = 1$$

$|t| < 1$

$|\sin x| < 1$

проблем: $\sin x = \pm 1$

у $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$

$x \in R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$

$t = 1$ $\qquad \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6}$$

$$\frac{2n+5}{n^2+5n+6} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{див.}$$

$* \; z = -1$ $\qquad x \in \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6} (-1)^n$$

видимо да не конв. ако се
на гледамо условно

Лајбницов

1) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6} = 0$ ✓

2) $a_{n+1} \leq a_n$

$$\frac{2n+7}{(n+1)^2+5n+11} \leq \frac{2n+5}{n^2+5n+6}$$

→ средиште то

$(\;) \cdot (\;)$

✓ конв.

$$\boxed{\text{O.K. } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+5}{n^2+5n+6} z^n =$$

$n^2+5n+6 = \cdots$ → -2, → -3

$= (n+2)(n+3)$

$\cdots$ после ово $\left(\frac{A}{n+2} \cdot \frac{B}{n+3} \right)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) z^n$$

$\frac{z^2}{z^2}$ → да бисмо добили $\frac{z^{n+2}}{n+2}$ зов интеграла!

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \cdot \frac{z^2}{z^2}}{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \cdot \frac{z^3}{z^3}}{n+3}$$

аналогно и овај

$$= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+2}}{n+2} + \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{n+3}$$

$$= \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z s^{n+1} ds + \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z s^{n+2} ds =$$

$$= \frac{1}{z^2} \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} ds + \frac{1}{z^3} \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+2} ds =$$

ово радимо зов низова да остане само s^n

$$= \frac{1}{z^2} \int_0^z s \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s^n ds + \frac{1}{z^3} \int_0^z s^2 \sum_{n=0}^{\infty} s^n ds =$$

$$= \frac{1}{z^2}\int_0^z s^{+1}\cdot\frac{1}{1-s}\,ds + \frac{1}{z^3}\int_0^z s^2\cdot\frac{1}{1-s}\,ds$$

$$= \frac{1}{z^2}\int_0^z \frac{\overbrace{s+1-1}^{-(1-s)}}{1-s}\,ds + \frac{1}{z^3}\int_0^z \frac{\overbrace{s^2+1-1}^{(s-1)(s+1)}}{1-s}\,ds$$

$$= \frac{1}{z^2}\int_0^z \left(\frac{1}{1-s}-1\right)ds + \frac{1}{z^3}\int_0^z \left(-s-1+\frac{1}{1-s}\right)ds$$

$$= \frac{1}{z^2}\left(-s-\ln|1-s|\right)\Big|_0^z + \frac{1}{z^3}\left(-\frac{s^2}{2}-s-\ln|1-s|\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}\left(-z-\ln|1-z|\right) + \frac{1}{z^3}\left(-\frac{z^2}{2}-z-\ln|1-z|\right)$$

$$= -\frac{3}{2z}-\frac{1}{z^2}-\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right)\ln|1-z|$$

и дефе $z\neq 0$ зат деленьа са z

$z=\sin x$ $\qquad z=0$: $\sum \frac{2n+5}{n^2+5n+6}\cdots = \frac{5}{6}$

$$= \frac{-3}{2\sin x}-\frac{1}{\sin^2 x}-\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin^3 x}\right)\ln|1-\sin x|$$

в) $\boxed{\text{домаћи}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+2)}\left(\frac{x}{x-1}\right)^n$

$$z = \frac{-x}{x-1}$$

$R = \cdots = 1$ па ов мало $x\in R$,

АЛИ зат разматрамо $1-x\neq 0 \to x\neq 1$

о.к. $x\in R\setminus\{1\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!(n+2)} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) e^{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2}$$

уводимо смену

$$z = \frac{x}{1-x}$$

$z \neq 0$ зато што долази са z у решењу!

$$= \frac{-2x^2+3x-1}{x^2} e^{\frac{x}{1-x}} + \frac{(1-x)^2}{x^2} - \frac{1}{2}$$

$$z=0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{n!(n+2)} = 0$$

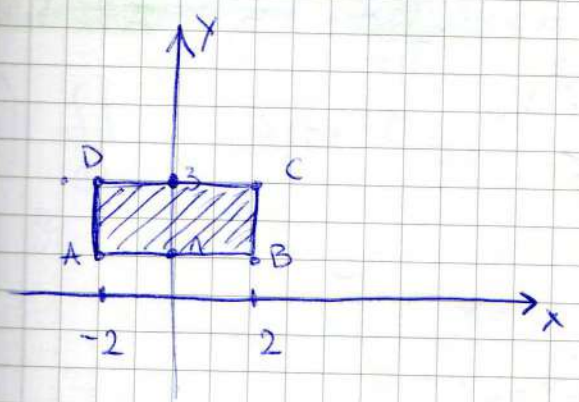
Двоструки интеграл

1. Одредити границе интеграције двоструког интеграла у оба поретка

$$\iint_{\sigma} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{ако је:}$$

σ – слика

а) σ правоугаоник са теменима $A(-2,1)$, $B(2,1)$, $C(2,3)$, $D(-2,3)$



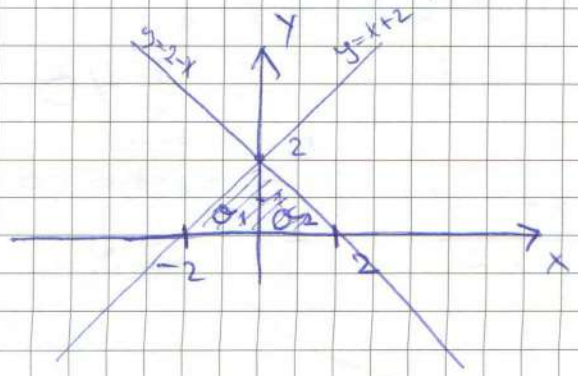
$$\iint_{\sigma} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^3 \int_{-2}^{2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^3 dy \int_{-2}^{2} f(x,y)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_1^3 f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} dx \int_1^3 f(x,y)\,dy$$

б) σ - област ограничена са $y=2-x$ $y=x+2$ x-оса

$\downarrow$ $\downarrow$

$x=2-y$ $x=y-2$



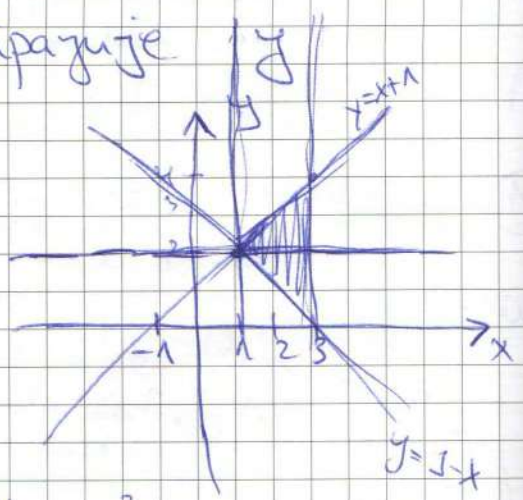
$$\iint_{\sigma} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^2 dy \int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} dx \int_0^{x+2} f(x,y)\,dy + \int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$$

② Промените редослед интеграције интегралу

а) $I_1 = \int_1^3 dx \int_{-x+3}^{x+1} f(x,y)\,dy$



$y=3-x$ $y=x+1$ $x=1$ $x=3$

$x=3-y$ $x=1-y$

Тачке пресека:

$3-x=x+1$

$2=2x$

$x=1$

$$I_1 = \underbrace{\int_0^2 dy \int_{3-y}^{3} f(x,y)\,dx}_{\sigma_1} + \underbrace{\int_2^4 dy \int_{1-y}^{3} f(x,y)\,dx}_{\sigma_2}$$

x делимо на две области
таја чији је нека пр. ограничена са више ф-ја

б) $I_2 = \int_{-2}^{0} dy \int_0^{\sqrt{y+2}} f(x,y)\,dx + \int_0^2 dy \int_y^{\sqrt{y+2}} f(x,y)\,dx$

Видимо:

$x=0$

$x=\sqrt{y+2} \rightarrow y=x^2-2$

$x=y$

$y=0$

$y=2$

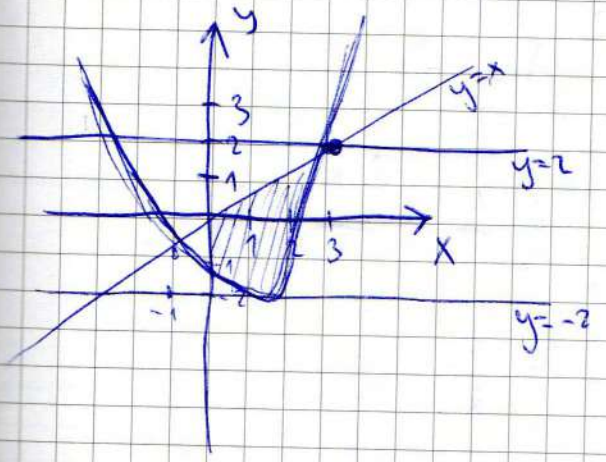
$y=-2$

Пресек: $y=x^2-2$; $x=y$

$x^2-2=x$

$x^2-x-2=0$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$



$$I_2 = \int_0^2 dx \int_{x^2-2}^{x} f(x,y)\,dy$$

3. Израчунати интеграл

а) $\iint_\sigma xy^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{1}{2}} xy^2\,dx$

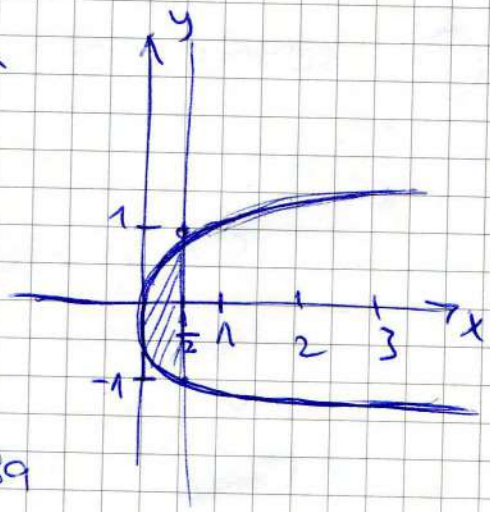
σ : $y^2 = 2x$

$x = \frac{1}{2}$

пресек

$y^2 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

$y = \pm 1$



* ако би изразили x преко једначина

0 до $\frac{1}{2}$ ја би имао две границе $y^2 = 2x$

$y = \pm\sqrt{2x}$

$$= \int_{-1}^{1} y^2\,dy \left.\frac{x^2}{2}\right|_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{1}{2}} = \int_{-1}^{1} y^2\,dy\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{4}\right) =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{y^2}{8} - \frac{y^6}{8}\right)dy = \frac{1}{8}\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-1}^{1} - \frac{1}{8}\left.\frac{y^7}{7}\right|_{-1}^{1} = \ldots = \frac{1}{21}$$

б) $\iint_\sigma \frac{x}{y}\,dx\,dy = *$

σ : $y = x^2$

$x = y^2$

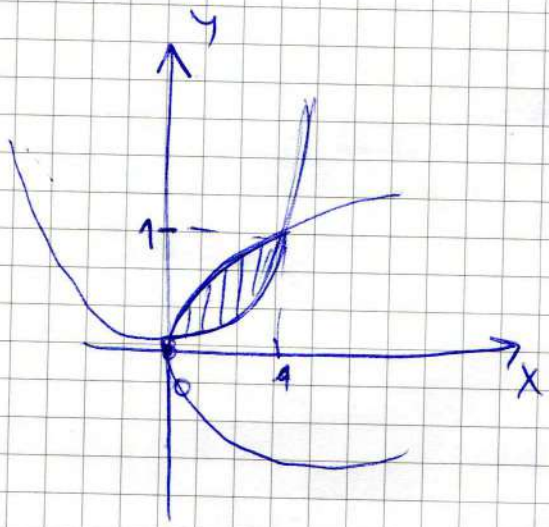
пресек

$y = x^2 = y^4$

$y^4 - y = 0$

$y(y^3 - 1) = 0$

$y = 0 \quad y = 1$



$$* \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \frac{x}{y}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2y}\Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2y}(y - y^4)\,dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^3}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}y\Big|_0^1 - \frac{y^4}{8}\Big|_0^1 = \dots = \frac{3}{8}$$

* смена променљивих у двоструком интегралу

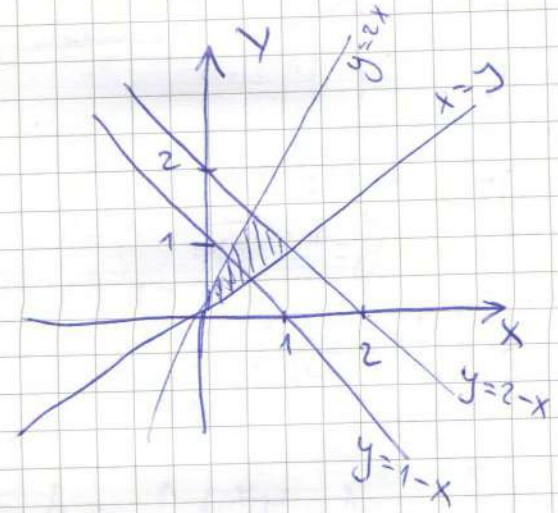
(4.) Сменом пром. реши интеграл

$$\iint_\sigma dx\,dy$$

$$\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq 1,\ x+y \leq 2,\ y \geq x,\ y \leq 2x\}$$

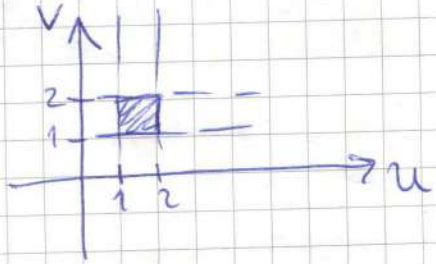
$y \geq 1-x$ $\quad$ $y \leq 2-x$

x	0	1
y	0	2



- приметимо да се два услова односе на $x+y$ па тако правимо смену $u = x+y$ $u \in [1,2]$
- из $y \geq x$ и $y \leq 2x$ имамо смену $v = \frac{x}{y}$ $v \in [1,2]$

- нова област



- Налазимо Јакобијан

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

али наше бројне су u и v па их морамо другачије изразити!

$$v = \frac{x}{y} \Rightarrow \boxed{x = v \cdot y}$$

$$u = x + y \Rightarrow v \cdot y + y$$

$$u = y(v+1)$$

$$\boxed{y = \frac{u}{v+1}}$$

$$x = v \cdot y$$

$$\boxed{x = \frac{u \cdot v}{v+1}}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{1}{v+1} & -\frac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \dots = \frac{-u}{(v+1)^2}$$

$$\iint_{\sigma} dx\,dy = \iint_{\sigma} |J|\,du\,dv =$$

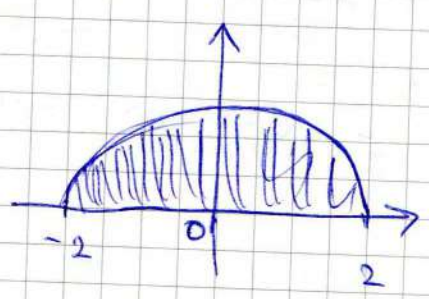
$$= \int_1^2 dv \int_1^2 \frac{u}{(v+1)^2}\,du = \dots = \frac{1}{4}$$

Предавања

Пр У сл. интегралима прећи на поларне координате:

ТЕСТ!

а) $\int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy =$



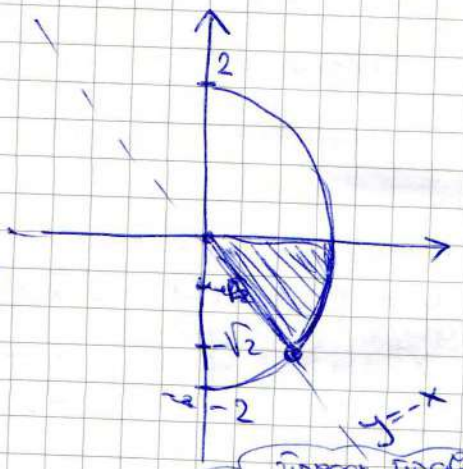
$y=\sqrt{4-x^2} \quad /^2$ (тај део y-осе)

$\Rightarrow y^2 = 4-x^2$

$\Rightarrow x^2+y^2=4$

$= \int_{0}^{2} dr \int_{0}^{\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi$ (2 → за r, π → за φ; r — јакобијан)

б) $\int_{-\sqrt{2}}^{0} dy \int_{-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx =$



$= \int_{0}^{2} dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi$

пресек праве и кружнице

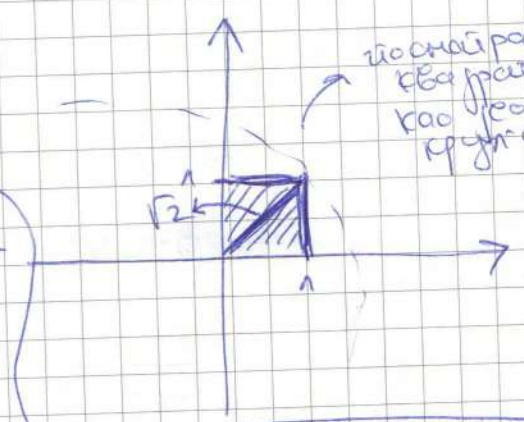
$(-y)^2+y^2=4$

$2y^2=4 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$

c) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\cos\varphi, \sin\varphi)\, r\, dr +$ $\quad x=1$

$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(\cos\varphi, \sin\varphi)\, r\, dr$ $\quad y=1$



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$x = 1 \Leftrightarrow r\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\cos\varphi}$

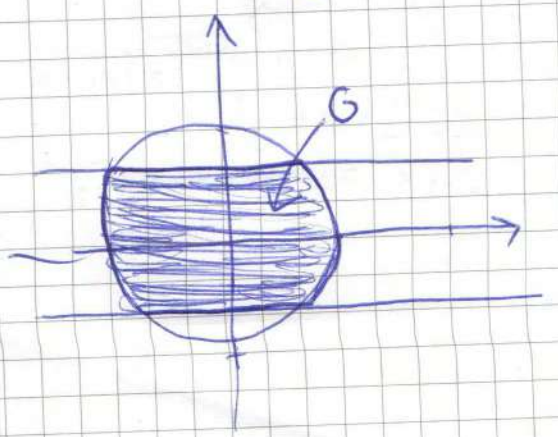
$y = 1 \Leftrightarrow r\sin\varphi = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sin\varphi}$

Примена двоструког интеграла

1) Рачунање површине делова равни

$$\boxed{\iint_G dx\,dy = \Delta G \rightarrow \text{површина области } G}$$

Пр. Израчунати површину ограничену са $x^2+y^2=9$, $y=-2$, $y=2$



$$\Delta G = \iint_G dx\,dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dx =$$

$x^2 = 9 - y^2$

$x = \pm\sqrt{9-y^2}$

$$= \int_{-2}^{2} 2\sqrt{9-y^2}\,dy = 2\int_{-2}^{2}\sqrt{9-y^2}\,dx =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{y}{2}\sqrt{9-y^2}\Big|_{-2}^{2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{y}{3}\Big|_{-2}^{2}\right) =$$

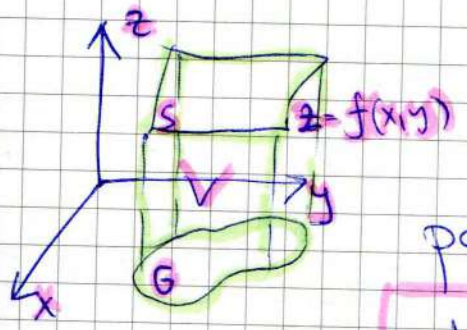
$$= 4\sqrt{5} + 18\cdot\arcsin\frac{2}{3}$$

испит (неки јаз са запремином)

2) Рачунање запремине

површ изнад xy-равни

Нека је $S: z = f(x,y) \geq 0$ површ у R^3 и G (ортогонална) пројекција од S на xy-раван и V област у R^3 коју ограничавају G и S.

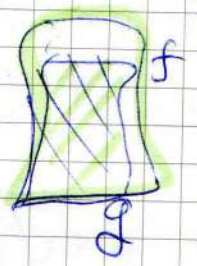


Тада запремину области V рачунамо као

$$\boxed{\Delta V = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy}$$

* Ако је $f(x,y) \geq g(x,y)$ над G тада

$\boxed{\iint_G (f(x,y) - g(x,y))\,dx\,dy}$ је запремина између површи графика ф-ја f и g.



испит → ако не дуже запремина онда нека површина површи да се изр.

3) Рачунање површине површи

Нека је $S: z = f(x,y)$ површ и G њена пројекција на xy-раван

Тада $\boxed{\Delta S = \iint\limits_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy}$

Пр. Нека је V област у R^3 ограничена са $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и $z=1-x^2-y^2 \to =1-(x^2+y^2)$

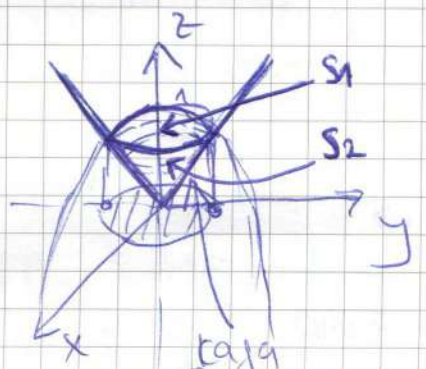
а) Израчунати запремину од V

б) Израчунати површину омотача

Одреде површ

$z=f(x^2+y^2)$ → када z зависи само од x^2+y^2

$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x=0 \quad z=\sqrt{y^2}=|y|$

$z=1-x^2-y^2$

$x=0 \quad z=1-y^2$

Пресек: $\left.\begin{array}{l} z=y \\ z=1-y^2 \end{array}\right\} y=1-y^2$

$y^2+y-1=0$

$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=$

$=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$y_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$

$y_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

узимамо јер нам треба полупречник

$G: x^2+y^2 \le \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

јер је круг, не само кружница!

од горње одузимамо доњу!

$$\Delta V = \iint_G \left[(1-x^2-y^2) - \sqrt{x^2+y^2} \right] dx\,dy$$

$x = r\cos\varphi$ $\quad r \in \left[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ $\quad |J| = r$

$y = r\sin\varphi$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi)$

$$x^2+y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2(\underbrace{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}_{1}) = r^2$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} dr \int_0^{2\pi} \left((1-r^2) - r \right) \cdot r\,d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} (r - r^2 - r^3)\,dr = \dots$$

б) $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$

$S_1: \quad z = \underbrace{1-x^2-y^2}_{f_1(x,y)}$ $\qquad S_2: \quad z = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{f_2(x,y)}$

$$\Delta S_1 = \iint_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \iint_G \sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\,dx\,dy$$

$$= \iint_G \sqrt{1+\underbrace{4x^2+4y^2}_{4(x^2+y^2)}}\,dx\,dy$$

*користимо исте поларне коорд. као и за пр. под а)

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} dr \int_0^{2\pi} \sqrt{1+4r^2} \cdot r\,d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \sqrt{1+4r^2}\, r\,dr =$$

смена:

$1+4r^2 = t$

$8r\,dr = dt \Rightarrow r\,dr = \frac{dt}{8}$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^{7-2\sqrt{5}} \sqrt{z}\, dz = \dots$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}+4}{4} = 1+4\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2} =$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

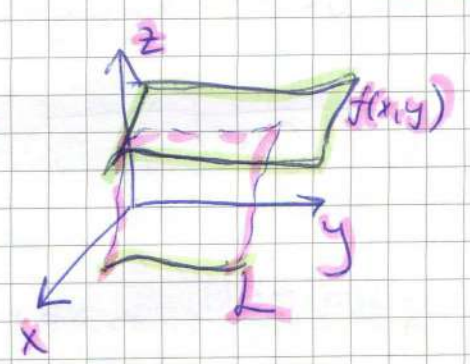
$$\Delta S_2 = \iint_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy =$$

$$= \iint_G \sqrt{1+\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{1}}\, dx\,dy =$$

$$= \sqrt{2}\underbrace{\iint_G dx\,dy}_{\Delta G} = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\pi = \sqrt{2}\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\pi$$

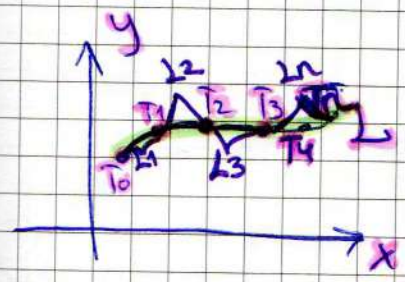
ΔG а нам је та површина круга са $r = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Криволинијски интеграл I врсте



* код двоструког интеграла увек морамо имати да домен интеграције неку површину
* само уводимо к.и. за криву, јер је површина криве 0, па не мисле двоструки интеграл

Def. $$\boxed{\int_L f(x,y)\,dl = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta l_i}_{\text{интегрална сума}}}$$



* Тачкама $T_0, T_1, \dots, T_n$ направимо поделу криве L на $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ при чему је
подела на лукове

$$L_i = \overset{\frown}{T_i T_{i-1}}, \quad 1 \le i \le n$$

лук са

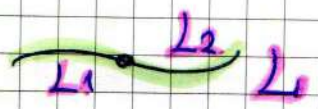
* Тачке $M_i \in L_i$, а ΔC_i су дужине лукова L_i, $1 \le i \le n$.

* Подела $\{L_1, L_2, \dots L_n\}$ мора бити таква да $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta C_i \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ → све више уситњавамо делиће криве, подела на све мање делове!

Особине криволинијског интеграла I врсте

1) $\forall \alpha, \beta \in R \quad \int\limits_L [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\, dC =$
$= \alpha \int\limits_L f(x,y)\, dC + \beta \int\limits_L g(x,y)\, dC$

2) Ако је $\{L_1, L_2\}$ подела криве L тада
$$\int\limits_L f(x,y)\, dC = \int\limits_{L_1} f(x,y)\, dC + \int\limits_{L_2} f(x,y)\, dC$$



Теорема интеграла! Средње.

3) Ако је $f(x,y) \le g(x,y)$ над L тада

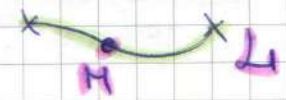
$$\int_L f(x,y)\,dl \le \int_L g(x,y)\,dl$$

Специјално, ако је $f(x,y) \ge 0$ над L тада је и $\int_L f(x,y)\,dl \ge 0$.

4) (Теорема средње вредности)

Ако је f непрекидна над кривом L тада постоји тачка M у L таква да

$$\boxed{\int_L f(x,y)\,dl = f(M)\cdot \underbrace{\Delta l}_{\text{дужина лука криве } L}}$$



* Специјално, ако је $f=1$ над L тада $\boxed{\int_L dl = \Delta l}$

• Израчунавање криволинијског интеграла I врсте

* Нека је: $L \begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t) \end{matrix}$, $t \in [a,b]$ крива у параметарском облику.

Тада $\boxed{\int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'}}$

Вежбе 7

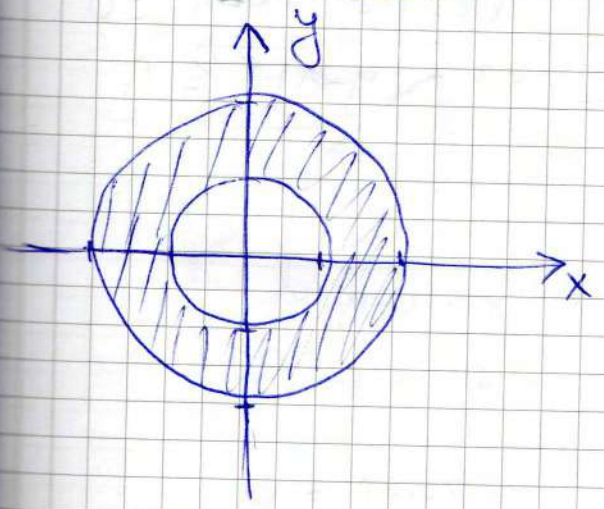
Поларне координате

① Дате области скицати (директним) поларним координатама.

а) $D = \{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 4\}$

ј-на круга са центром у $O(p,q)$ полуп. r

$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\varphi \end{aligned}}$$

$x^2+y^2 \geq 1$

$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \geq 1$

$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin\varphi^2 \geq 1$

$r^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1} \geq 1$

$r^2 \geq 1 \quad /\sqrt{\ }$

$\boxed{r \geq 1}$ → само један је реш

$r \geq 0$ → јер је то полупречник

$x^2+y^2 \leq 4$

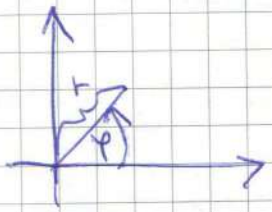
- - - - → аналогно као први део

$r^2 \leq 4$

$\boxed{r \leq 2}$

пресек

$\boxed{r \in [1,2]}$



$\boxed{\varphi \in [0, 2\pi]}$ - цео круг!
Јасно је колико

б) $\Theta = \{(x,y) \in R^2 \;\; x^2+y^2 \geq y \;,\; x^2+y^2 \leq 2y \;,\; y \geq |x|$

$x^2+y^2 \geq y$

$x^2+y^2-y \geq 0$

$x^2+(y-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2 \geq 0$

намештамо

$y^2-2\cdot y\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2$

y

$\boxed{x^2+(y-\frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{4}}$

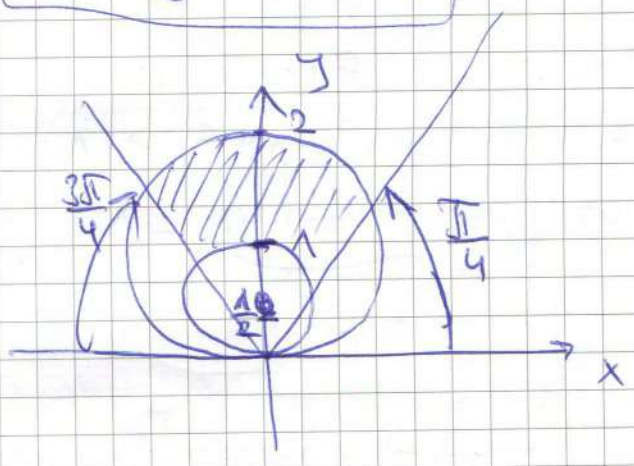
$x^2+y^2 \leq 2y$

$x^2+y^2-2y \leq 0$

$x^2+(y-1)^2-1^2 \leq 0$

$\boxed{x^2+(y-1)^2 \leq 1}$

Ово је исто само у супротној!



$x = r\cos\varphi$

$y = r\cdot\sin\varphi$

$x^2+y^2 \geq y$

$\vdots$

$r^2 \geq r\cdot\sin\varphi$

$r^2 - r\sin\varphi \geq 0$

$r(r-\sin\varphi) \geq 0$

$r \geq 0 \qquad r-\sin\varphi \geq 0$

$\boxed{r \geq \sin\varphi}$

$x^2+y^2 \leq 2y$

$r^2 \leq 2r\sin\varphi$

$\boxed{r \leq 2\sin\varphi}$

$\boxed{r \in [\sin\varphi, 2\sin\varphi]}$

$\boxed{\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]}$ → са слике

$y \geq |x|$

$x \geq 0$

$y \geq x$

$r\cos\varphi \geq r\sin\varphi \quad / : r, \; r > 0$

$\cos\varphi \geq \sin\varphi$

$\cos\varphi = \sin\varphi$ | пр. случај да само са =!

$\cot\varphi = 1 \rightarrow \boxed{\varphi \geq \frac{\pi}{4}}$

$\boxed{\varphi \leq \frac{3\pi}{4}}$

$\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ II начин како да се изр. угао

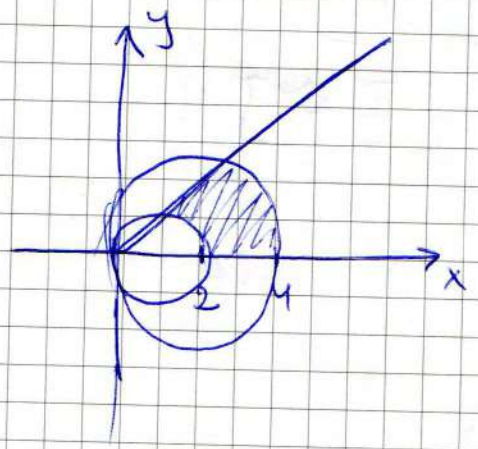
из сва три услова налазимо да изр. φ!

$x < 0$

$y \geq -x$

⋮

б) $\Theta = \{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 \geq 2x, \; x^2+y^2 \leq 4x, \; y \geq 0, \; y \leq x\}$



$x = r\cos\varphi$

$y = r\cdot\sin\varphi$

$r \in [2\cos\varphi, 4\cos\varphi]$

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$

② Дате однос описати помоћу померених поларних координата.

а) $\Theta = \{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 \leq 4x$

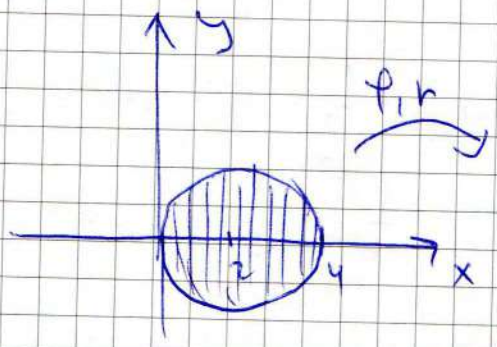
$x^2+y^2 = 4x$

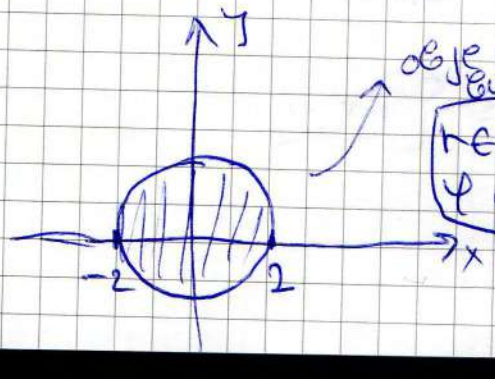
$(x-2)^2 - 2^2 + y^2 = 0$

$(x-2)^2 + y^2 = 4$

$x = r\cos\varphi + 2$ | ер је центар у 2! на x-оси

$y = r\sin\varphi \; (+0)$ | по y оси координата центра је 0!





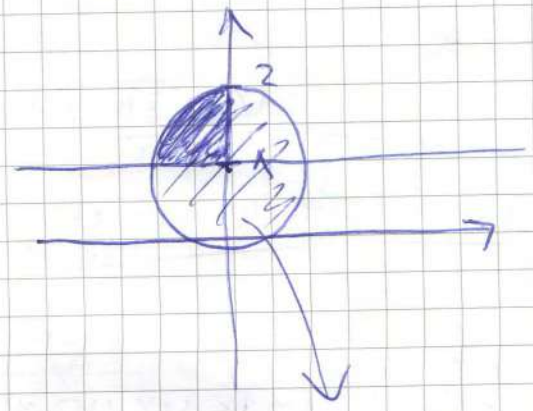
$\boxed{r \in [0,2] \quad \varphi \in [0, 2\pi]}$ где је однос видимо

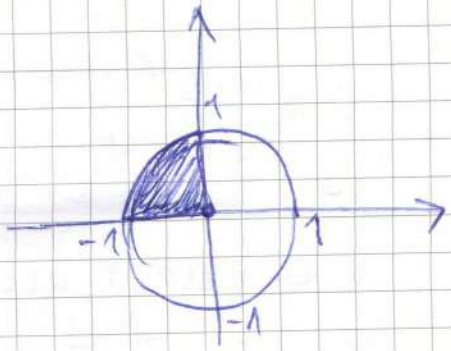
д) $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2y \ , x \le 0 \ , y \ge 1\}$

$x^2 + (y-1)^2 \le 1$

$x = r \cdot \cos\varphi$

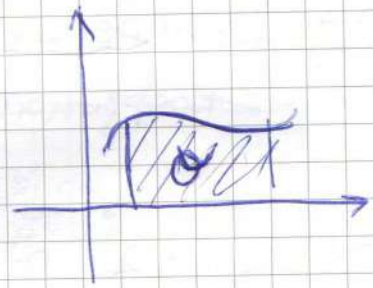
$y = r \cdot \sin\varphi + 1$





$$\boxed{\begin{array}{l} r \in [0,1] \\ \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{array}}$$

Површина равног лика

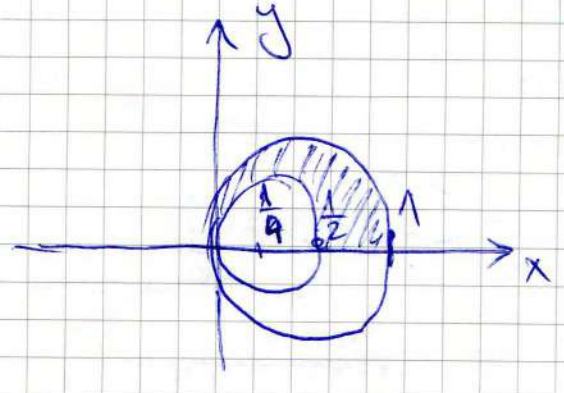


$$\boxed{P = \iint_{\sigma} 1 \, dx \, dy}$$

③ Израчунати површину области σ ако је:

а) $\sigma = \{(x,y) = \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \ge \frac{1}{2}x \quad x^2+y^2 \le x \ , y \ge 0$

$(x-\frac{1}{4})^2 + y^2 \ge \frac{1}{16} = r^2 \qquad (x-\frac{1}{2}) + y^2 \le \frac{1}{4}$



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$\in$ као пресек скуп.

$r \in \left[\frac{1}{2}\cos\varphi, \cos\varphi\right]$

са слике

$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

за поларне координате:

$$\boxed{J(r,\varphi) = r}$$

Јакобијан

$$P = \iint_{\Theta} 1\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{2}\cos\varphi}^{\cos\varphi} 1 \cdot |J|\,dr =$$

обично јер је r изражено преко φ

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{2}\cos\varphi}^{\cos\varphi} r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}\cos\varphi}^{\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\varphi - \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right) d\varphi =$$

$\frac{3}{4}\cos^2\varphi$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} =$$

$$= \dots = \boxed{\frac{3\pi}{32}}$$

б) σ огр. са

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= 2-x \end{aligned}\right\}$$

x-осом

пресек

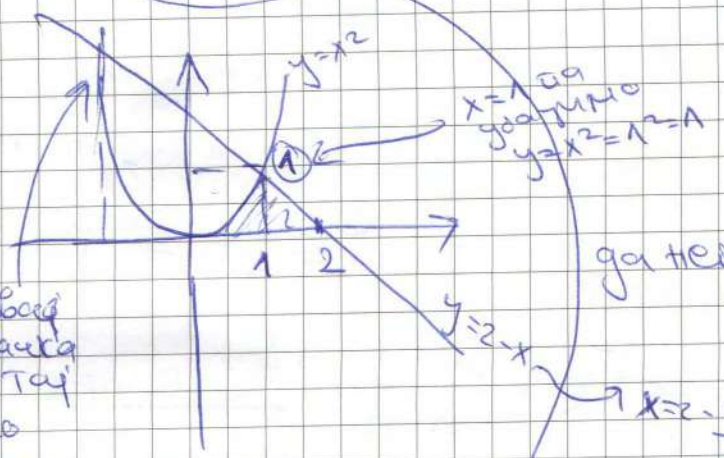
x^2-2-x

$x_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$ → није нам битна

$y=x^2$

$x = \pm\sqrt{y} = \sqrt{y}$

јер је у 1ој јео x-а



да нема тај услов требало би!

своја тачка и тај јео нам не треба јер је не ограничава x-оса!

– пошто није нека крупница → можемо обичне координате!

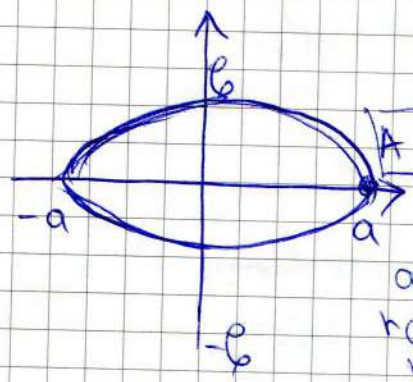
$$P = \iint_{\sigma} 1\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} 1\,dx =$$

$$= \int_0^1 x\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} dy = \int_0^1 (2-y-\sqrt{y})\,dy =$$

$$= 2y\Big|_0^1 - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Big|_0^1 =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{12}{6} - \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$$

e) $\mathcal{O} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$



$\boxed{A\,(a,0)}$

$x = a$

$ar\cos\varphi = a|a$

$r\cos\varphi = 1$

$r \cdot 1 = 1$

$\boxed{r = 1}$

$$\left.\begin{aligned} \boxed{x = ar\cos\varphi} \\ y = br\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$ елиптичне координате

нису класичне поларне! јер је елипса

$$\boxed{\begin{aligned} r &\in [0,1] \\ \varphi &\in [0,2\pi] \end{aligned}}$$

морамо јакобијан да urs јер је елипса

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= abr\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1} = abr \cdot 1 = abr$$

$$P = \iint dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abr \cdot dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} ab\frac{r^2}{2}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ab}{2}\,d\varphi = \frac{ab}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = ab\pi$$

Кол:

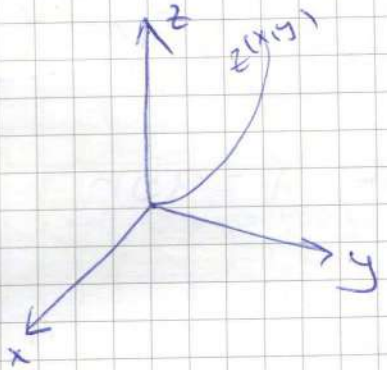
1) конвергенција редова
2) област конв. и сумирање редова
3) површина или запремина самотача
4) криволинијски интеграл

Запремина тела и површина површи

КОЛОКВИЈУМ

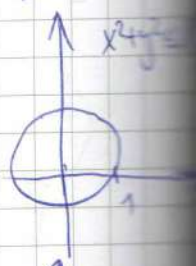
(4.) Израчунати запремину тела

а) $V = \{(x,y,z) \in R^3 : \underbrace{x^2+y^2+z^2 \le 4}_{\text{лопта}},\ \underbrace{x^2+y^2 \le 1},\ \underbrace{z \ge 0}\}$



$$\boxed{V = \iint_{\sigma} z(x,y)\,dx\,dy}$$

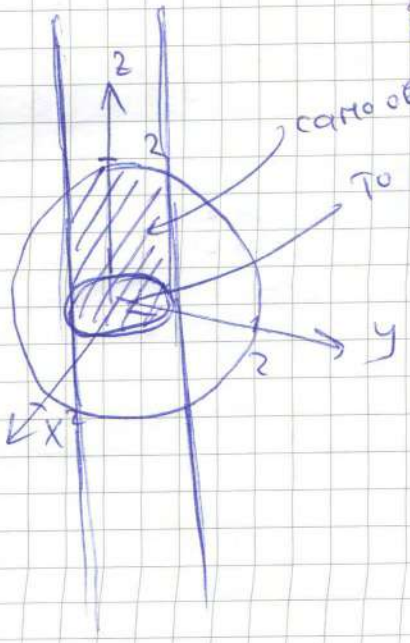
пројектујемо равни



изражавамо z

$z^2 \le 4 - x^2 - y^2$

$z \le \sqrt{4-x^2-y^2}$



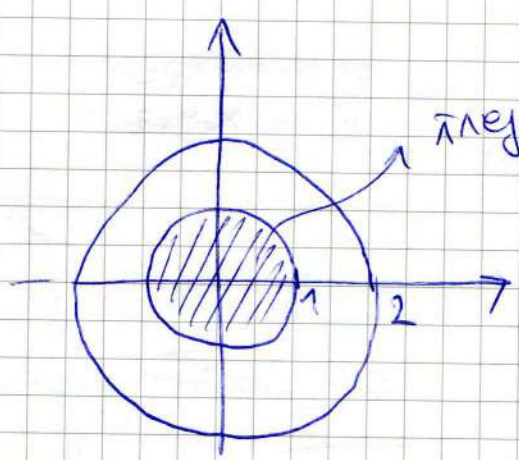
само овај део јер је $z \ge 0$

то је један круг $x^2+y^2 \le 1$

пређемо у овај радијални

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\cdot\sin\varphi \\ r &\in [0,1] \\ \varphi &\in [0,2\pi] \end{aligned}}$$

Проекција на x, y раван, $z=0$



гледамо у круг ода унутрашности јер је $x^2+y\le 1$ па се то своди на један круг па исто тако гледамо за поларне координате!

$$\sqrt{4-x^2-y^2} =$$
$$= \sqrt{4-r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi} =$$
$$= \sqrt{4-r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \sqrt{4-r^2}$$

$$V=\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{4-r^2}\, r \cdot dr =$$

r → јакобијан-поларне координате

$$= \text{смена}: u=4-r^2 =$$

$$= \dots \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 d\varphi =$$

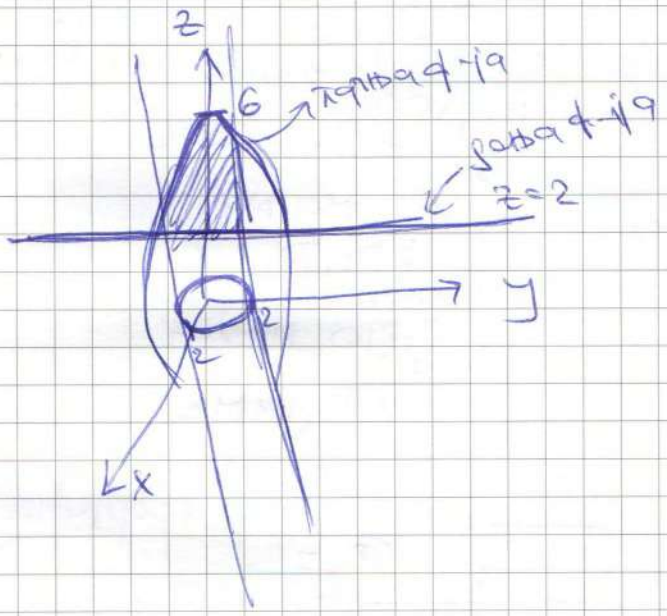
$$= \boxed{\frac{8-3\sqrt{3}}{3}\cdot 2\pi}$$

$\sqrt{x^2+y^2}$ $\wedge\vee$ x^2+y^2 $\cap\cup$ > на уриену

макс. ер
ер орудимамо
од 6!

б) $V = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2 \le 4,\ \boxed{z \le 6 - \sqrt{x^2+y^2}},\ z \ge 2\}$

од тела кретемо!
где су x, y, z !



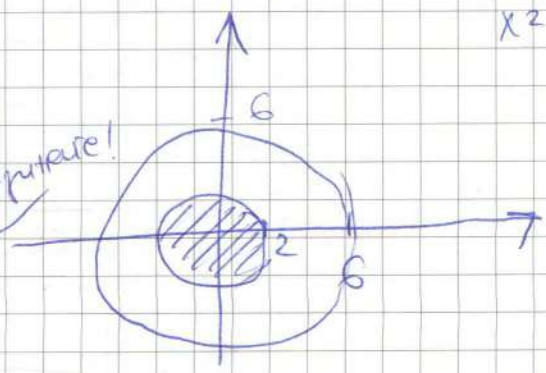
пројекција на x, y раван

$0 \le 6 - \sqrt{x^2+y^2}$

$\sqrt{x^2+y^2} \le 6 \quad /^2$

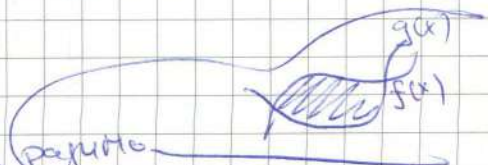
$x^2+y^2 \le 36$

$x^2+y^2 \le 4$



обе јер
су кружне
поларне координате!

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ r &= [0,2] \\ \varphi &= [0,2\pi] \end{aligned}}$$



$\int f(x) - g(x)\,dx$

шта радимо
исоде

горња ф-ија

од горње
ф-ије одузимамо
доњу! (са z)

$$V = \iint_{\Theta} \left(\underbrace{6 - \sqrt{x^2+y^2}}_{\text{горња}} - \underbrace{2}_{\text{доња}}\right) dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(6 - \sqrt{r^2} - 2\right) r\,dr =$$

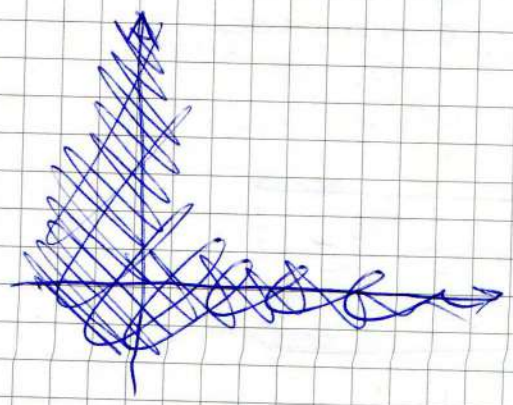
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4r - r^2)\,dr = \boxed{\frac{32\pi}{3}}$$

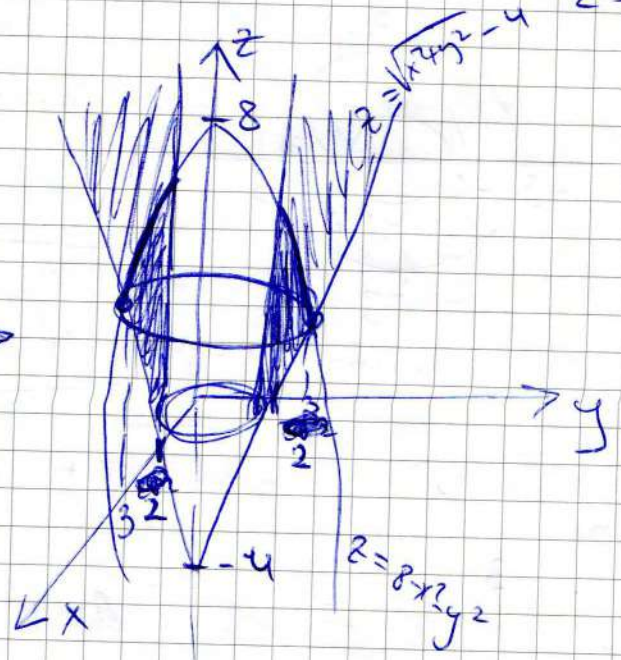
инако када корен $\sqrt{\cdot} = 0$, па пролазимо min или max бр.

када имамо $\sqrt{\cdots} - 4$ наћи тачку $\to -4$

б) $V = \{ (x,y,z) \in R^3 ;\ x^2+y^2 \geq 1,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2} - 4,\ z \leq 8 - x^2 - y^2 \}$

$= 0$ па је $\uparrow y$ 8





Пресек:

$\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{z} - 4 \overset{(\leq)}{=} 8 - x^2 - y^2$ $\boxed{z = x^2 + y^2}$

$\sqrt{z} - 4 \leq 8 - z$

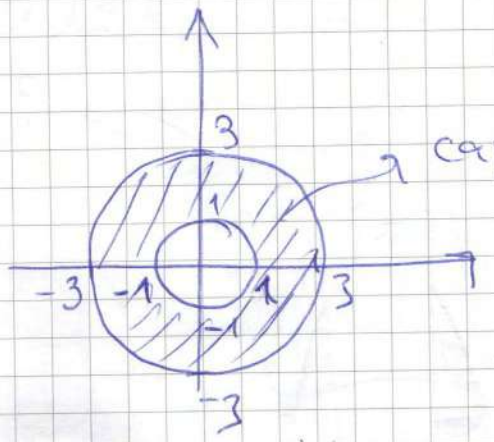
$\sqrt{z} \leq 12 - z \quad |^2 \to$ $z \leq 12$ ↗ јер корен $\sqrt{z}$ не сме очу нелитивни

$z \leq 144 - 24z + z^2$ уклоба

$z_{1,2} = \begin{cases} 9 \\ 16 \end{cases}$ $\to z \leq 9$

$\boxed{\text{па је пресек } x^2 + y^2 \leq 9}$

Пројекција на xy раван



сада гледамо површност јер је услов $x^2+y^2 \geq 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} r \in [1,3] \\ \varphi \in [0,2\pi] \end{array}}$$

опет горња ф-ја − доња ф-ја

$$V = \iint_{D} \left(8 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2+4}\right) dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^3 \left(8 - r^2 - r - 4\right) r\,dr$$

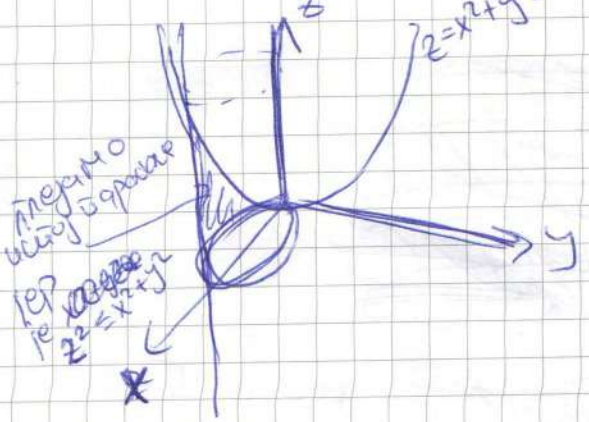
$$= \int_0^{2\pi} \left(12\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_1^3 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{58}{3}\, d\varphi = \boxed{\frac{116\pi}{3}}$$

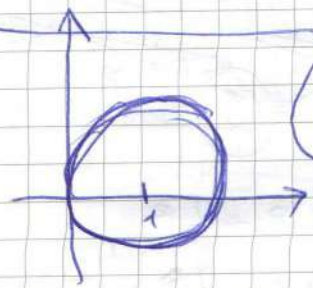
i) $V = \{(x,y,z) \in R^3 \; x^2+y^2 \leq 2x,\; 0 \leq z \leq x^2+$

два услов

из свега то доцртамо!



Пројекција на xy раван



$x = r\cos\varphi$

$y = r\cdot\sin\varphi$

$r \in [0, 2\cos$

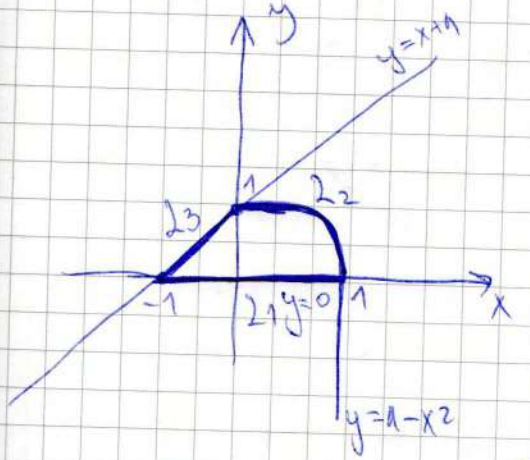
$\varphi = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

1. и 4. квадрант

$$\boxed{V = \frac{3\pi}{2}}$$

предавања

Пр. Израчунати $I = \int_L xy\,dl$ где је L руб области ограничен са x-осом, $y = x+1$, $y = 1-x^2$ $x \geq 0$.



$$\int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3}$$

формула

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

L_1 $y=0$ $\quad x(t) = z$, $y(t) = 0$ $\quad z \in [-1,1]$

$x'(t) = 1$

$y'(t) = 0$

$$\int_{L_1} = \int_{-1}^{1} z \cdot 0 \cdot \sqrt{1^2+0^2}\,dz = 0$$

L_2 $x(t) = z$

$y(t) = 1-z^2$, $z \in [0,1]$

$x'(t) = 1$ $\quad y'(t) = -2z$

$$\int_{L_2} = \int_0^1 z(1-z^2)\sqrt{1^2+(-2z)^2}\,dz$$

$$= \int_0^1 z(1-z^2)\sqrt{1+4z^2}\,dz =$$

смена

$$= \left(1+4z^2 = s \quad 8z\,dz = ds \Rightarrow z\,dz = \frac{ds}{8} \quad z^2 = \frac{s-1}{4} \right| =$$

$$= \int_1^5 \left(1 - \frac{s-1}{4}\right)\sqrt{s} \cdot \frac{ds}{8} = \frac{1}{8}\left(\int_1^5 \sqrt{s}\,ds - \frac{1}{4}\int_1^5 s\sqrt{s}\,ds + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{s}\,ds \right) = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5 - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot s^{\frac{5}{2}}\Big|_1^5 + \frac{1}{4} \cdot s^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5 \right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{10}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right) - \frac{2}{5}\left(5^{\frac{5}{2}} - 1\right) \right)$$

L_3 $\quad x(t) = t$

$y(t) = t+1, \quad t \in [-1, 0]$

$x'(t) = 1$

$y'(t) = 1$

$$\int_{L_3} = \int_{-1}^{0} t(t+1) \cdot \sqrt{1^2+1^2}\, dt = \sqrt{2} \int_{-1}^{0} (t^2+t)\, dt$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^{0} + \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^{0} \right) =$$

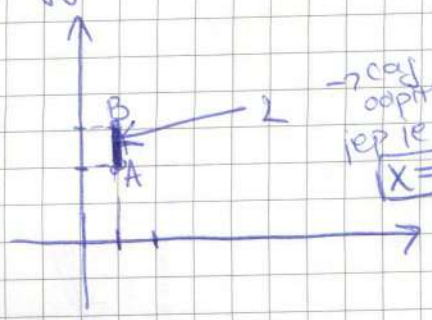
$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\int_L = 0 + \frac{1}{32} \left(\frac{10}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right) - \frac{2}{5} \left(5^{\frac{5}{2}} - 1 \right) \right) - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$\boxed{\text{ТЕСТ}}$

1p Израчунати $\int_L (2x - 3y)\, dl$ ако је L:

а) дуж AB, $A(1,2)$, $B(1,3)$



→ сад оштрицо јер је права $\boxed{x=1}$

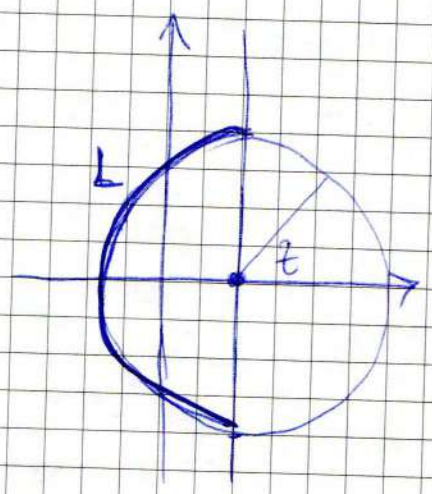
L: $x(t) = 1$, $y(t) = t$, $t \in [2,3]$

$x'(t) = 0$, $y'(t) = 1$

$$\int_L = \int_2^3 (2 \cdot 1 - 3t) \sqrt{0^2+1^2}\, dt = \int_2^3 (2-3t)\, dt = 2t - 3\frac{t^2}{2}$$

$$= 2 - 5 \cdot \frac{5}{2} = -\frac{11}{2}$$

б) део кружнице $(x-1)^2+y^2=4$, $x \le 1$



$$x-1 = 2\cos t$$
$$y = 2\sin t \quad , t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$x(t) = 1+2\cos t$$
$$y(t) = 2\sin t$$
$$x'(t) = -2\sin t$$
$$y'(t) = 2\cos t$$

$$\int_L = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(2(1+2\cos t) + 3\cdot 2\sin t\right) \cdot \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\, dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(2+4\cos t + 6\sin t\right) \underbrace{\sqrt{4\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1}}}_{2}\, dt =$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(1+2\cos t + 3\sin t\right) dt =$$

$$= 4 \cdot \left(t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + 2\sin t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - 3\underbrace{\cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}}_{0} \right) = 4(\pi - 4)$$

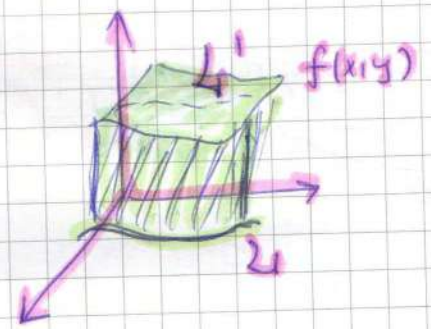
Примена криволинијског интеграла I врсте

1) Израчунавање дужине лука криве

$$\boxed{\int_L dl = \Delta l}$$

2) Израчунавање површине површи

* Нека је $f(x,y) \geq 0$ над кривом L. Тада $\int_L f(x,y)\,dl$ представља површину површи коју одређују криве L и $L' = f(L)$

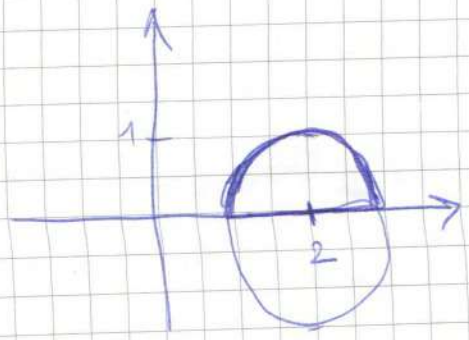


Пр. Израчунати дужину лука криве

$L: x^2-4x+y^2=-3, \; y \geq 0$

$$x^2-4x+y^2=-3 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}-4+y^2+3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=1$$



$x-2=\cos t \quad x(t)=2+\cos t$

$y=\sin t \quad y(t)=\sin t$

$x'(t)=-\sin t$

$y'(t)=\cos t$

$$\Delta \mathcal{L} = \int_{\mathcal{L}} d\mathcal{L} = \int_0^{\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int_0^{\pi} dt = \pi$$

Пр Израчунати површину површи коју образују крива L : $x - y = 1$, $x \in [0,1]$ и површ $z = \underbrace{x^2 + y^2}_{f(x,y) \geq 0}$

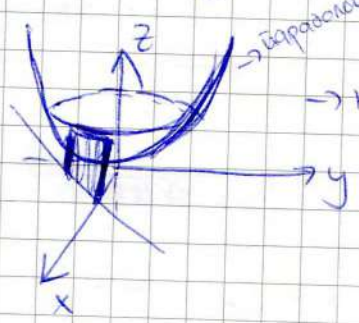
$y = x - 1$

$x(t) = t$
$y(t) = t - 1$
$t \in [0,1]$
$x'(t) = 1$
$y'(t) = 1$

$$\Delta S = \int_{\mathcal{L}} (x^2 + y^2)\, d\mathcal{L} =$$

$$= \int_0^1 (t^2 + (t-1)^2) \sqrt{1^2 + 1^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \int_0^1 (2t^2 - 2t + 1)\, dt = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cancel{-1} \cancel{+1}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

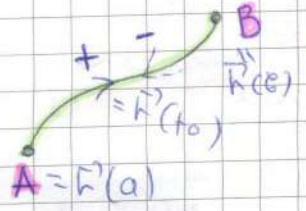


→ параболоид

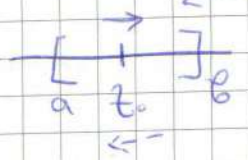
→ не мора баш овако!

Криволинијски интеграл II врсте

* Оријентација криве



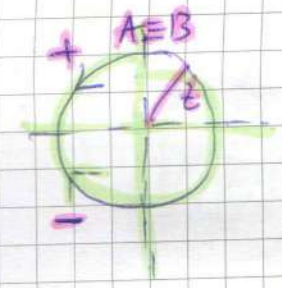
$L\ \vec{r}(t)=(x(t),y(t))$



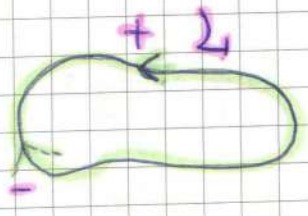
← позитивна ор. одговара расту параметра t

← уопштење смеру је негативна → када параметар t опада

* Позитивна оријентација је она која одговара расту параметра t, а негативна је супротна.



смер супротан од кретања казаљке на сату → +

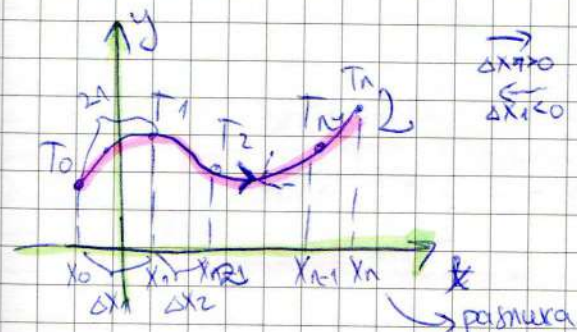


* Специјално, ако је L затворена крива $(A \equiv B)$ тада је позитивна оријентација супротна од кретања казаљке на сату.

Def. Нека је L оријентисана крива у R^2. Тада криволинијски интеграл II врсте по променљивој x се дефинише као

$$\boxed{\int_L f(x,y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x_i}$$

↑ ОВО ЗА ТЕСТ ако буде дф.



$\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ подела криве L тачкама $T_i(x_i, y_i)$.

Тачка $M_i \in L_i$ и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$

→ разлика односно на к.и. I врсте, не узимамо дужине лукова, већ приraштаје Δx_i ...

* Подела $\{L_1, L_2, \dots L_n\}$ мора бити таква да

$$\max_{1 \le i \le n} \Delta l_i \xrightarrow[n \to \infty]{} 0, \quad \Delta l_i \text{ дужина лука } L_i$$

* када променимо оријентацију криве, приraштаји мењају знак → овај интеграл зависи од оријентације криве (супротне на знак)

* Слично се дефинише $\int_L f(x,y)\,dy$.

Општи облик:

$$\boxed{\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy := \int_L P(x,y)\,dx + \int_L Q(x,y)\,dy}$$

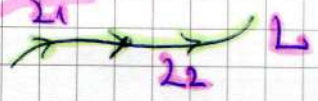
Особине $\int_L f(x,y)\,dx$

линеарност:

1) $\forall \alpha, \beta \in R \quad \int_L (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx = \alpha \int_L f(x,y)\,dx + \beta \int_L g(x,y)\,dx$

2) Ако је $\{L_1, L_2\}$ подела криве L при чему L_1 и L_2 наслеђују оријентацију криве L

$$\boxed{\int_L f(x,y)\,dx = \int_{L_1} f(x,y)\,dx + \int_{L_2} f(x,y)\,dx}$$



3) Ако је $-L$ крива супротно оријентисана од L тада $\boxed{\int_{-L} f(x,y)\,dx = -\int_{L} f(x,y)\,dx}$

Израчунавање:

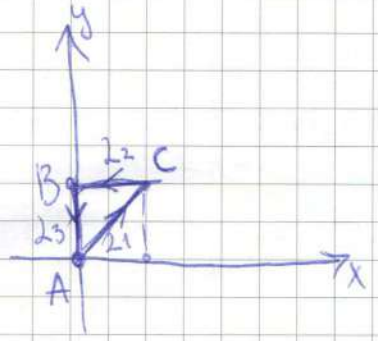
Нека је L $\begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t) \end{matrix}$, $t\in[a,b]$ позитивно оријентисана крива

Тада
$$\boxed{\begin{aligned}&\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \\ &= \int_a^b \Big[P(x(t),y(t))\cdot \underbrace{x'(t)}_{\frac{dx}{dt}} + Q(x(t),y(t))\cdot \underbrace{y'(t)}_{\frac{dy}{dt}}\Big]dt\end{aligned}}$$

$$\boxed{\int_a^b = -\int_b^a}$$

Пр. Израчунати $\int_L (2x-1)\,dx + 3y\,dy$ ако је L позитивно оријентисана контура троугла A, B, C

$A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$



$$\int_L = \int_{L1} + \int_{L2} + \int_{L3}$$

$L1$: $y=x$

$x(t)=t$

$y(t)=t$, $t\in[0,1]$

$x'(t)=y'(t)=1$

$$\int_{L1} = \int_0^1 \big((2t-1)\cdot 1 + 3t\cdot 1\big)\,dt =$$
$$= \int_0^1 (5t-1)\,dt = \frac{5}{2}-1 = \frac{3}{2}$$

* Пазимо на оријентацију!

L_2 : $y = t$

$x(t) = t$ $\quad t \in [1,0]$

$y(t) = 1$

$x'(t) = 1$

$y'(t) = 0$

$$\int_{L_2} = \int_1^0 (2t-1)\cdot 1\,dt =$$

$$= -\int_0^1 (2t-1)\,dt = -2\cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + 1 = 0.$$

L_3 : $x = 0$

$x(t) = 0$ $\quad t \in [1,0]$

$y(t) = t$

$y'(t) = 1$

$x'(t) = 0$

$$\int_{L_3} = \int_1^0 (3t\cdot 1)\,dt =$$

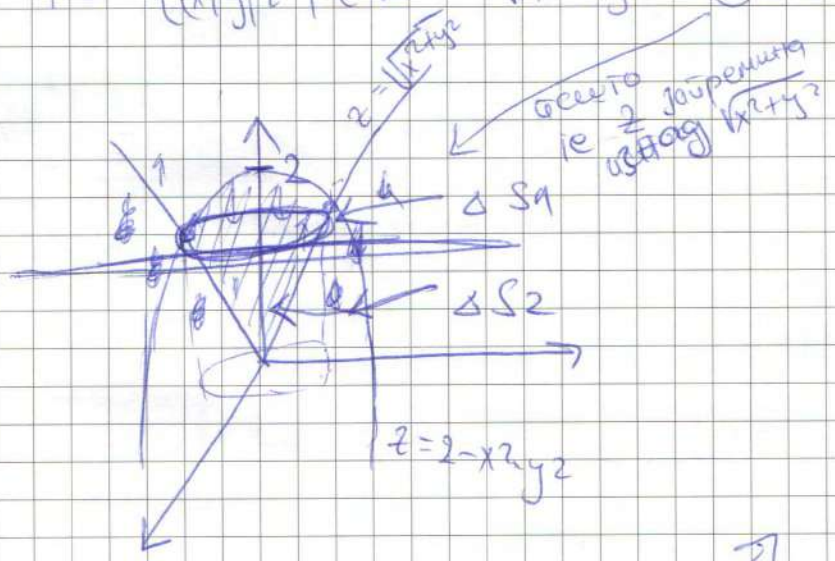
$$= -3\int_0^1 t\,dt = -3\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = -\frac{3}{2}$$

$$\int_L = \frac{3}{2} + 0 - \frac{3}{2} = 0$$

Вежбе 8

① Израчунати запремину и површину тела

$$T = \{(x,y,z) \in R^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2-x^2-y^2\}$$



пресек:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2-x^2-y^2$$

$$0 \le x^2+y^2 = z$$

$$0 \le \sqrt{z} = \underbrace{2-z}_{\ge 0}$$

$$\boxed{2-z \ge 0}$$

$$\boxed{2 \ge z}$$

$$\sqrt{z} = 2-z \quad |^2$$

$$z = 4-4z+z^2$$

$$z^2-5z+4=0$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ \cancel{4} \end{cases}$$

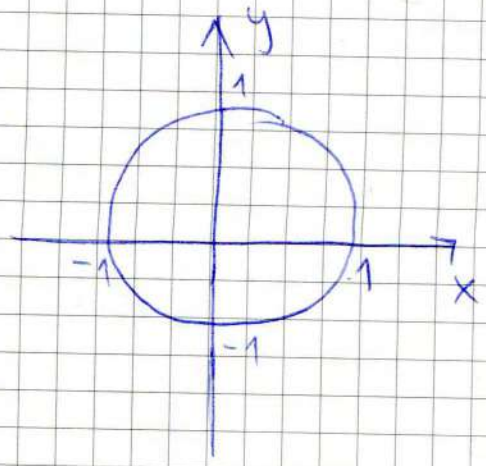
задовољава услов

$z=1$

$x^2+y^2=1$

у пресеку је кружница полуречника 1

Пројекција на xy - раван



Поларне коорд.

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r \in [0,1]$

$\varphi \in [0, 2\pi]$

$$V = \iint_{\sigma} \left(2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy$$

$$= \iint_{0}^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(2 - r^2 - \sqrt{r^2}\right) \cdot r \cdot d\varphi$$

особено важан елемент!

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(2r - r^3 - r^2\right) dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1 d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{5}{12} = \frac{5}{12}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{5}{12} \cdot 2\pi = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$$

површина отсечка

$$\boxed{\Delta S = \iint_{\sigma} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy}$$

изводи по x и y

$z_1 = 2-x^2-y^2$

$z_{1x} = -2x$

$z_{1x} = -2y$

$$\Delta S_1 = \iint_{\sigma} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy$$

опет поларне координате

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+\underbrace{4r^2}_{4(x^2+y^2)}}\, r\, dr =$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{смена:} \\ t = 1+4r^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{5^3}-1}{12} \right| d\varphi = \frac{5\sqrt{5}}{12} 2\pi = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi$$

$z_2 = \sqrt{x^2+y^2}$

$$z_{2x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z_{2y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Delta S_2 = \iint_{\sigma} \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dxdy$$

зоста страницата удобно поларне

$$= \iint_{\sigma} \sqrt{1+1}\, dxdy = \iint_{\sigma} \sqrt{2}\, dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{2}\, r\, dr = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} r^2 \Big|_0^1 d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi \Big|_0^{2\pi}$$

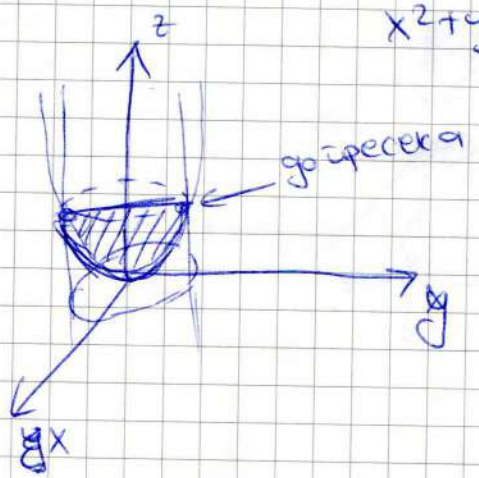
$$= \sqrt{2}\pi$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$\Delta S = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi + \sqrt{2}\pi$$

(2) Израчунати површину дела параболоида

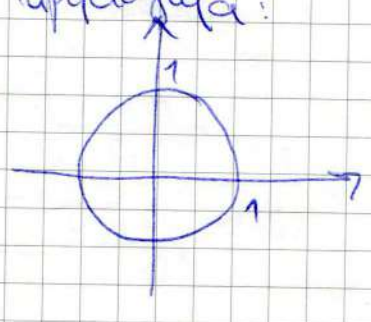
а) $z = x^2 + y^2$ које се налази унутар цилиндра $x^2+y^2=1$



Пресек:

$z = 1$ очигледно је $z = x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$

пројекција:



- овде се поклапа пројекција цилиндра и пресека! па је једна кружница

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r \in [0,1]$

$\varphi \in [0, 2\pi]$

$z_x = 2x \quad , \quad y_x = 2y$

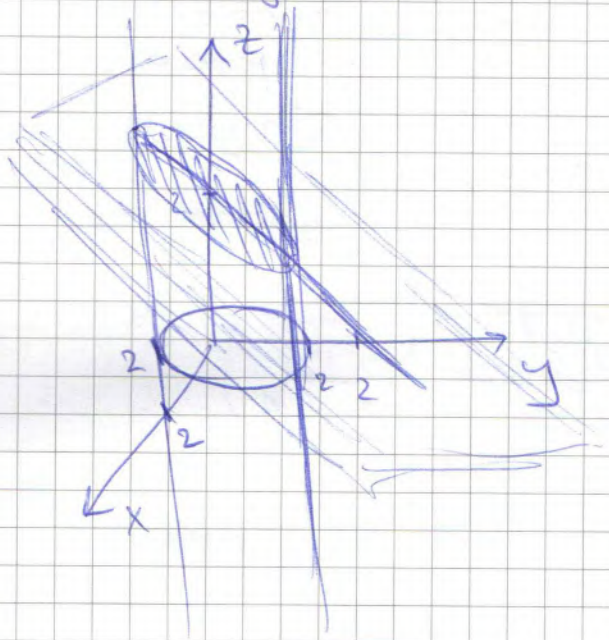
$$\Delta S = \iint_{\Omega} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\,dy$$

$$= \dots = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi$$

б) дела равни $z = 2-y$

који се налази унутар цилиндра

$x^2+y^2=4$

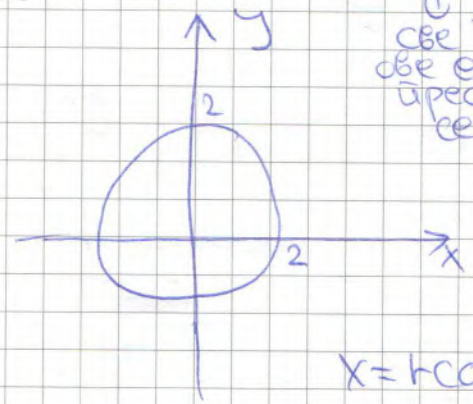


Пресек:

Нестворно је

да видимо са слике

пројекција



све тачке

све елипсе

пресликане

се у круг

$x^2+y^2=4$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\cdot\sin\varphi$

$r \in [0,2]$

$\varphi \in [0,2\pi]$

$z_x = 0$

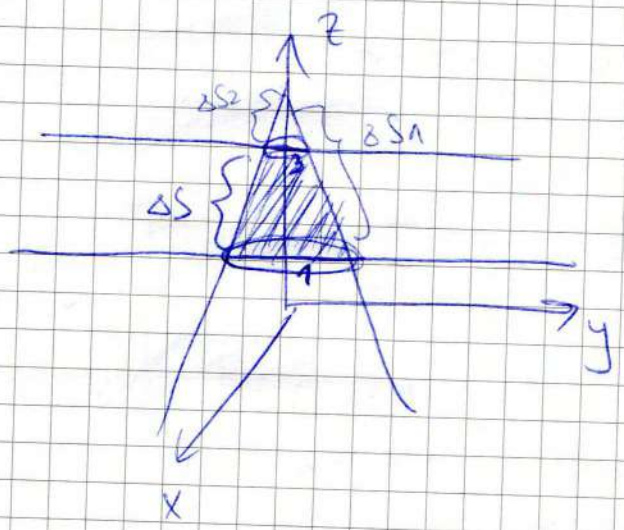
$z_y = -1$

$$\Delta S = \iint_Q \sqrt{1+1}\, dx\,dy$$

$$\Delta S = \iint_Q \sqrt{2}\, dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{2}\, r\, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} r^2 \Big|_0^2 d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} 4^2 \varphi \Big|_0^{2\pi} = \boxed{4\sqrt{2}\pi}$$

в) дела конуса $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$
између равни $z=1$ и $z=3$



I начин

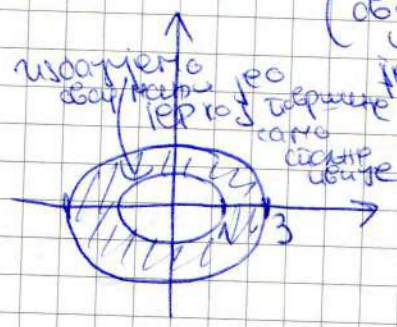
$\Delta S = \Delta S_1 - \Delta S_2$

II начин

одмах тражимо ΔS

(овај начин инамо јер треба површина отсечка

изоштрено ово/ово ја јер то површине само сферне области



пресеци

$1 = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$

$\sqrt{x^2+y^2} = 3 \quad |^2$

$\boxed{x^2+y^2 = 9}$

$3 = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$

$\sqrt{x^2+y^2} = 1 \quad |^2$

$\boxed{x^2+y^2 = 1}$

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r \in [1,3]$

$\varphi \in [0, 2\pi]$

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Delta S = \iint_{\sigma} \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint_{\sigma} \sqrt{2}\,dxdy$$

$$= \iint_{\sigma} \sqrt{2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^3 \sqrt{2}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Јакобијан}}}{r}\,dr = 8\sqrt{2}\pi$$

Криволинијски интеграл

* Примери параметризације криве

Параметарски облик ј-не:

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

① Одредити параметарски облик ј-не дужи AB задате са $y = 2x+1$ $0 \le x \le 1$

I начин $\boxed{x = t}$

$y = 2t+1$

$t \in [0,1]$

II начин (само да видиш да може и овако)

$x = t+1$

$y = 2t+2+1$

$y = 2t+3$

$t \in [-1,0]$

III начин

$\boxed{y = t}$

$x = \frac{t-1}{2}$

$t \in [1,3]$

② Одредити параметарски облик једне кружнице

$$k: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

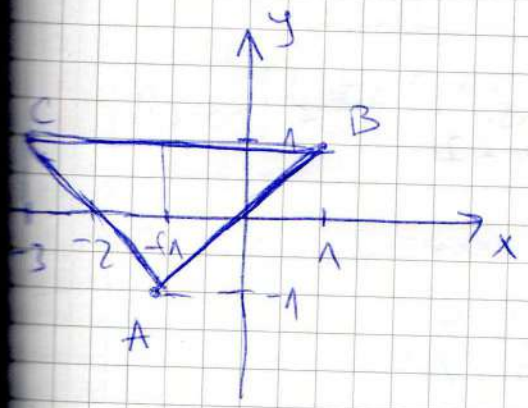
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t + x_0 \\ y &= r\sin t + y_0 \end{aligned}\right\}$$ као генералне поларне координате

Криволинијски интеграл прве врсте

① Израчунати:

$$\int_L (xy + y^2)\,dl$$ где је L руб троугла

са теменима $A(-1,-1)$, $B(1,1)$, $C(-3,1)$



$$\int_L (xy+y^2)\,dl = \int_{\overline{AB}} (xy+y^2)\,dl + \int_{\overline{BC}} (xy+y^2)\,dl + \int_{\overline{CA}} (xy+y^2)\,dl$$

AB: ↗ ј-на праве кроз 2 тачке

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$A(x_0, y_0)$ $B(x_1, y_1)$

$$y + 1 = \frac{1+1}{1+1}(x+1)$$

$y + 1 = x + 1$ $t \in [-1, 1]$

$\boxed{y = x} = t$ $\boxed{x_t = 1 = y_t}$

увести ја Јакобијан

$$\int_{\overline{AB}} (xy+yz)\, dl$$

$$= \int_{-1}^{1} (z^2+z^2) \cdot \sqrt{1+1}\, dz$$

$\sqrt{xz^2+yz^2}$ → одавемо

$$= 2\sqrt{2} \int_{-1}^{1} z^2\, dz = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_{\overline{BC}} (xy+y^2)\, dl$$

$B(\overset{x_0}{1}, \overset{y_0}{1})$

$C(\overset{x_1}{-3}, \overset{y_1}{1})$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$y - 1 = \frac{1-1}{-3-1}(x+3$$

$$y - 1 = 0$$

$$y = 1$$

параметризација

$y = 1$

$x = z$ $\quad z \in [-3, 1]$

извод

$y' = 0$

$x' = 1$

$$\int_{\overline{BC}} (xy+y^2)\, dl = \int_{-3}^{1} (z+1)\sqrt{0^2+1^2}\, dt =$$

$$= \int_{-3}^{1} z+1\, dt = \frac{z^2}{2}\Big|_{-3}^{1} + z\Big|_{-3}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\right) + (1+3) = -4+4 = 0$$

$$\int_{CA} (xy+y^2)\,dl$$

$C(-3,1)$
$A(-1,-1)$

$$y-y_0 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$y-1 = \frac{-1-1}{-1+3}(x+3)$$

$$y-1 = \frac{-2}{2}(x+3)$$

$$y-1 = -x-3$$

$$y = -x-2$$

$x = t$
$y = -t-2$
$t \in [-3,-1]$

чтобы
$xt = 1$
$yt = -1$

$$\int_{CA} (xy+y^2)\,dl = \int_{-3}^{-1} (t(-t-2)+(-t-2)^2)\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dt$$

$$= \int_{-3}^{-1} (\cancel{-t^2}-2t+\cancel{t^2}+2t+4)\sqrt{2}\,dt =$$

$$= \int_{-3}^{-1} (2t+4)\sqrt{2}\,dt = (\sqrt{2}t^2+4t)\Big|_{-3}^{-1} = 0$$

на краю

$$\boxed{\int_{2} (xy+y^2)\,dl = \frac{4\sqrt{2}}{3}+0+0 = \frac{4\sqrt{2}}{3}}$$

КОЛОКВИЈУМ

2. Израчунати интеграл $\int_{L} x \, dl$

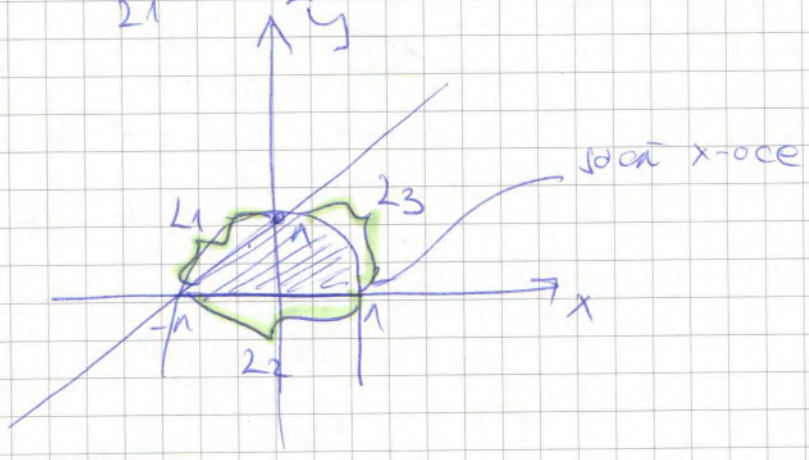
где је L руб области ограничене са $y = x+1$, $y = 1-x^2$ и x-осом.

$$\int_{L} x\,dl = ? = \int_{L_1} x\,dl + \int_{L_2} x\,dl + \int_{L_3} x\,dl$$

$y = x+1$

$y = 1-x^2$

x-оса



пресек:

$x+1 = 1-x^2$

$x^2+x = 0$

$x(x+1) = 0$

$x=-1 \vee x=0$

$1-x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$C_1 : y = x+1$

$x = t$

$y = t+1$

$xt = 1$

$yt = 1$

$\boxed{t \in [-1,0]}$

$$\int_{C_1} x\,dl = \int_{-1}^{0} t\sqrt{2}\,dl = \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \Big|_{-1}^{0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

C_2 : $y=0$

$x=t$ $\qquad t\in[-1,1]$ $\qquad xt=1$

$y=0$ $\qquad yt=0$

$$\int_{C_2} x\,dl = \int_{-1}^{1} t\sqrt{1}\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

C_3 : $y=1-x^2$

$x=t$ $\qquad xt=1$

$y=1-t^2$ $\qquad yt=-2t$

$t\in[0,1]$

$$\int_{C_3} t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

$u=1+4t^2$

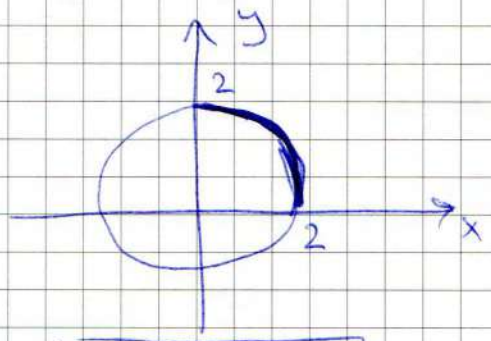
$\dots$

$$\int_{L} x\,dl = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{5\sqrt{5}-1}{12} = \boxed{\frac{5\sqrt{5}-1-6\sqrt{2}}{12}}$$

* Дужина лука криве

③ Израчунати дужину лука кружнице $x^2+y^2=4$ у I квадранту

$$\boxed{\Delta l = \int_l 1 \cdot dl}$$



$x = 2\cos t$

$y = 2\sin t$

$\boxed{t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$ → гледамо горњи

$x_t = -2\sin t$

$y_t = 2\cos t$

$$\Delta l = \int_l 1\,dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \sqrt{\underbrace{4}_{\substack{4\sin^2 t + 4\cos^2 t \\ 4\cdot(\sin^2 t + \cos^2 t) \\ 4 \cdot 1}}}\,dt =$$

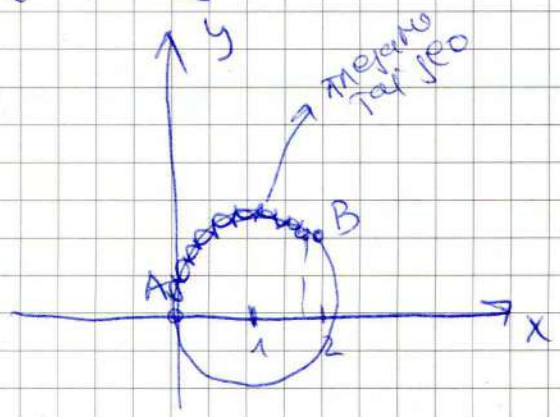
$$= 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

~~колоквијум~~

④ Израчунати дужину кратког лука кружнице $x^2+y^2=2x$ између тачака $A(0,0)$, $B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(x^2+y^2 → $(x-1)^2+y^2$ каноничко)

$(x-1)^2+y^2=1$



$x = \cos t + 1$

$y = \sin t$

$A(0,0)$

$\cos t + 1 = 0$

$\sin t = 0$

$\cos t = -1$

$\boxed{t = \pi}$

$B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\cos t + 1 = \frac{3}{2}$

$\cos t = \frac{1}{2}$ $\qquad \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$t = \frac{\pi}{3}$

$$\boxed{t \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]}$$

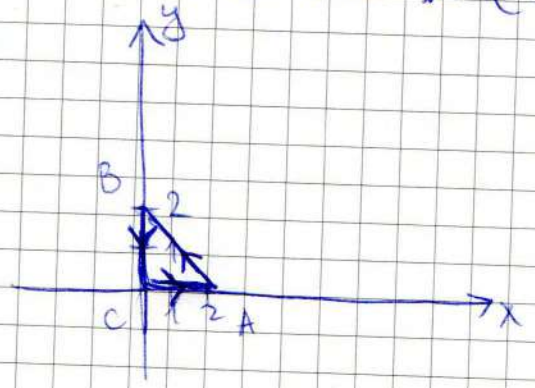
$x_t = -\sin t$

$y_t = \cos t$

$$s_C = \int_{\Gamma} 1\,dl = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 1 \cdot \underbrace{\sqrt{1}}_{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}\,dl = t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Криволинијски интеграл
II Врсте

① Израчунати интеграл $\int_{\Gamma} x\,dy$ где је Γ позитивно оријентисан руб троугла са теменима $A(2,0)$ $B(0,2)$ $C(0,0)$



$$\int_{\Gamma} x\,dy = \int_{\overline{AB}} x\,dy + \int_{\overline{BC}} x\,dy + \int_{\overline{CA}} x\,dy$$

$\overline{AB}$: једначина праве 2 тачке

$y = 2 - x$

$x = t$

$y = 2 - t$ $\qquad x_t = 1$

$t \in [2, 0]$ $\qquad y_t = -1$

или

$t \in [0, 2]$

$$\int_{\overline{AB}} x\,dy = \int_2^0 t\,\underset{\substack{\uparrow \\ dy \\ \text{(wzór ogólny)}}}{(-1)}\,dt = -\frac{t^2}{2}\Big|_2^0 = \boxed{2}$$

$\overline{BC}$: $x = 0$

$y = t$

$t \in [2, 0]$

$xt = 0$
$yt = 1$

$$\int_{\overline{BC}} x\,dy = \int_2^0 0 \cdot 1 = 0$$

$\overline{CA}$: $x = t$

$y = 0$

$t \in [0, 2]$

$xt = 1$
$yt = 0$

$$\int_{\overline{CA}} x\,dy = \int_0^2 t \cdot 0 = \boxed{0}$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{L}} x\,dy = 2 + 0 + 0 = \boxed{2}}$$