Osnovni principi prebrojavanja

Marko Gordić - IN 37/2023

Osnovni principi prebrojavanja

Princip bijekcije

Ako izmedju konačnih skupova A i B postoji bijektivno preslikavanje (svakom elementu A odgovara tačno jedan element B i obrnuto), tada skupovi imaju isti broj elemenata:

$$|A| = |B|$$

Primer: Ako imamo skup $A = \{1, 2, 3\}$ i skup $B = \{a, b, c\}$, preslikavanje $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ pokazuje da $|A| = |B| = 3$.

Princip zbira

Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ medjusobno disjunktni konačni skupovi, tada je ukupan broj elemenata njihove unije jednak zbiru brojeva elemenata svakog skupa:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

Primer: Ako $A_1 = \{1, 2\}$ i $A_2 = \{3, 4, 5\}$, tada je $|A_1 \cup A_2| = 2 + 3 = 5$.

Princip proizvoda

Ako se bira po jedan element iz svakog od n konačnih skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tada je ukupan broj načina izbora jednak proizvodu brojeva elemenata svakog skupa:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

Primer: Ako $A_1 = \{a, b\}$ i $A_2 = \{1, 2, 3\}$, tada je broj uredjenih parova $|A_1| \cdot |A_2| = 2 \cdot 3 = 6$.

Dirihleov princip

Ako se $n + 1$ ili više objekata rasporedi u n kutija, tada će bar jedna kutija sadržati najmanje dva objekta. Ovo je poznato i kao princip "goluba i golubarnika".

Primer: Ako rasporedimo 5 jabuka u 4 kutije, najmanje jedna kutija će sadržati najmanje 2 jabuke.

Uopšteni Dirihleov princip

Ako se $nk + 1$ ili više objekata rasporedi u n kutija, tada će bar jedna kutija sadržati najmanje $k + 1$ objekata.

Primer: Ako rasporedimo 10 loptica u 3 kutije, tada će bar jedna kutija sadržati najmanje $\lceil \frac{10}{3} \rceil = 4$ loptice.

Permutacije

Permutacija bez ponavljanja

Redosled svih n elemenata iz skupa sa n elemenata. Broj permutacija je:

$$P(n) = n!$$

Primer: Ako biramo redosled za 3 osobe, imamo $3! = 6$ mogućnosti: $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$.

Permutacija sa ponavljanjem

Za n elemenata, od kojih se neki ponavljaju $k_1, k_2, \ldots, k_r$ puta, broj permutacija je:

$$P(n; k_1, k_2, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_r!}$$

Primer: Ako imamo 3 slova "AAB", broj permutacija je $\frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$: AAB, ABA, BAA.

Permutacije oko okruglog stola

Kod permutacija oko okruglog stola, rotacije se ne razlikuju, pa je ukupan broj permutacija:

$$P_{\text{okrugli}}(n) = (n - 1)!$$

Primer: Ako imamo 4 osobe koje sedaju za okrugli sto, broj različitih rasporeda je $(4 - 1)! = 6$.

Varijacije

Varijacije bez ponavljanja

Redosled uredjenog izbora k elemenata od n elemenata (bez ponavljanja). Broj varijacija je:

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Primer: Ako biramo 2 osobe od 5 za predsednika i potpredsednika, imamo $V(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ mogućnosti.

Varijacije sa ponavljanjem

Redosled uredjenog izbora k elemenata od n elemenata (sa ponavljanjem). Broj varijacija je:

$$V'(n, k) = n^k$$

Primer: Ako biramo 2 kuglice od 3 boje (sa ponavljanjem), imamo $3^2 = 9$ mogućnosti.

Kombinacije

Kombinacije bez ponavljanja

Neuredjen izbor k elemenata od n elemenata (bez ponavljanja). Broj kombinacija je:

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Primer: Ako biramo 2 osobe od 5 za tim, imamo $\binom{5}{2} = 10$ mogućnosti.

Kombinacije sa ponavljanjem

Neuredjen izbor k elemenata od n elemenata (sa ponavljanjem). Broj kombinacija je:

$$C'(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

Primer: Ako biramo 2 slatkiša od 3 vrste (sa ponavljanjem), imamo $\binom{3+2-1}{2} = 6$ mogućnosti.

Rešavanje jednačina pomoću kombinatorike

Kombinatorne metode mogu se koristiti za rešavanje linearnih diofantskih jednačina oblika:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

gde su x_i nenegativni celi brojevi. Broj nenegativnih celobrojnih rešenja je:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Primer: Broj nenegativnih celobrojnih rešenja jednačine $x + y + z = 4$ je $\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$.

Koncept rešavanja zadataka sa uslovima izbegavanja susednih elemenata

Pri rešavanju zadataka u kojima je potrebno kreirati niz od N nula i K jedinica ($K \geq N+1$), uz uslov da dve jedinice nikada ne budu susedne, primenjuje se sledeći princip:

Princip rešavanja

1. **Postavljanje nula:** - Prvo se u nizu postavi svih N nula. Ove nule kreiraju $N+1$ "rupe" izmedju nula (uključujući pozicije pre prve i posle poslednje nule) gde se jedinice mogu postaviti. - Na primer, za $N = 3$ (niz "000"), imamo $N + 1 = 4$ rupe:

_0_0_0_

2. **Odabir pozicija za jedinice:** - Da bi se zadovoljio uslov da jedinice nisu susedne, svaka jedinica mora biti postavljena u različitu rupu. To znači da ćemo birati K rupa od $N+1$ dostupnih, bez ponavljanja i bez mogućnosti susedstva. - Broj načina na koje možemo izabrati K rupa je jednak:

$$\binom{N+1}{K}$$

3. **Proveravanje uslova:** - Ovaj metod je primenjiv samo ako $K \leq N+1$. Ako je $K > N+1$, zadatak nema rešenje jer nema dovoljno rupa da se sve jedinice rasporede bez susedstva.

Gde se ovaj princip primenjuje?

Ovaj princip se primenjuje u mnogim kombinatornim zadacima, naročito u sledećim scenarijima: - **Formiranje binarnih nizova:** Kreiranje nizova od N nula i K jedinica uz odredjene ograničavajuće uslove. - **Raspoređjivanje predmeta:** Postavljanje objekata (npr. ljudi, kutija, kuglica) u rasporedima gde neki objekti ne smeju biti susedni. - **Kombinatorika sa uslovima:** Kreiranje kombinacija koje zadovoljavaju odredjene fizičke ili logičke uslove, poput izbegavanja sudara, sukoba ili susedstva.

Primer

Za $N = 3$ nula i $K = 2$ jedinice, broj načina formiranja nizova gde jedinice nisu susedne je:

$$\binom{N+1}{K} = \binom{4}{2} = 6$$

Mogući nizovi su:

10100, 10010, 10001, 01010, 01001, 00101

Napomena: Ovaj metod je opšti princip koji se lako prilagodjava različitim kombinatornim problemima sa sličnim pravilima i ograničenjima.

Pronalaženje N-tog elementa u leksikografskom poretku

Leksikografski poredak sortira elemente kao u rečniku. Da bismo pronašli N-ti element medju $n!$ permutacija, koristimo sledeće korake:

1. Podele prema prefiksima

Permutacije su grupisane prema prvom slovu (prefiksu). Svaka grupa ima $(n-1)!$ permutacija.

2. Iterativno traženje

Koraci:

1. Odredimo prefiks deljenjem N sa $(n-1)!$ i nalazimo indeks prefiksa.
2. Ažuriramo N oduzimanjem broja permutacija prethodnih grupa.
3. Ponavljamo za preostale elemente dok ne pronadjemo niz.

Primer

Za $N = 5$ i niz $\{1, 2, 3\}$:

- $N = 5$, $(n-1)! = 2! = 2$.
- $\lfloor (5-1)/2 \rfloor = 2$, prefiks je 3.
- Preostaje $N = 1$. U podnizu $\{1, 2\}$, $N = 1$ daje permutaciju 12.

Rezultat je:

312

Ovaj metod se koristi za brzo generisanje odredjenih permutacija bez izračunavanja svih.