Kriterijumi za konvergenciju redova

Analiza 2

Marko Gordić - IN 37/2023

Oktobar 2024

1 Uporedni kriterijum prve vrste

Uporedni kriterijum prve vrste koristi se za ispitivanje konvergencije redova. Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dva reda sa pozitivnim članovima $a_n \geq 0$ i $b_n \geq 0$, za svaki n.

Pretpostavimo da postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi:

$$a_n \leq b_n.$$

Tada važe sledeći zaključci:

- Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira, tada i red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mora konvergirati.
- Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira, tada i red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mora divergirati.

Drugim rečima, ako jedan red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira i drugi red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je po članovima manji ili jednak odgovarajućim članovima prvog reda, tada i manji red mora konvergirati. Slično tome, ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira, a veći red je po članovima veći ili jednak, tada i on mora divergirati.

1.1 Primer

Razmotrimo redove:

$$a_n = \frac{1}{n^3}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Znamo da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira (poznat kao kvadratni red). Pošto je $\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$ za svaki $n \geq 1$, možemo zaključiti da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ takodje konvergira po uporednom kriterijumu prve vrste.

2 Uporedni kriterijum druge vrste

Uporedni kriterijum druge vrste koristi se za ispitivanje konvergencije redova na osnovu njihovog asimptotskog ponašanja. Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dva reda sa pozitivnim članovima $a_n \geq 0$ i $b_n \geq 0$.

Ako postoji konstanta $K \neq 0$ i $K \neq \infty$ tako da važi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K,$$

tada su oba reda ili istovremeno konvergentna ili istovremeno divergentna.

Drugim rečima, ako članovi redova a_n i b_n postaju proporcionalni kada $n \to \infty$, tada imaju isti ishod u pogledu konvergencije ili divergencije.

2.1 Primer

Posmatrajmo redove:

$$a_n = \frac{1}{2n+1}, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Izračunajmo odnos članova redova:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Pošto je konstanta konačna i različita od nule, oba reda imaju isti ishod u pogledu konvergencije. Pošto red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira (harmonijski red), i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ mora divergirati.

3 Dalamberov (količnički) kriterijum

Dalamberov kriterijum koristi se za odredjivanje konvergencije beskonačnih redova sa pozitivnim članovima. Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ brojni red sa pozitivnim članovima.

Ako postoji granica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

tada važi:

- Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **konvergentan** ako je $l < 1$.
- Ako je $l = 1$, kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji ili divergenciji reda.
- Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **divergentan** ako je $l > 1$.

Za $l = 1$, ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji ili divergenciji reda, i moraju se koristiti drugi kriterijumi za procenu.

Dalamberov kriterijum je koristan jer omogućava procenu konvergencije redova na osnovu odnosa susednih članova reda. Ako odnos izmedju dva uzastopna člana postane manji od 1 za velike n, red konvergira.

3.1 Primer

Razmotrimo red:

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Izračunajmo količnik susednih članova:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \div \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1}.$$

Zato što:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergira prema Dalamberovom kriterijumu.

4 Košijev (korenski) kriterijum

Košijev kriterijum koristi se za ispitivanje konvergencije redova. Neka je $\sum a_n$ brojni red.

Ako postoji takav prirodan broj n_0 i konstanta q, $0 \leq q < 1$, da za sve $n \geq n_0$ važi $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, tj.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

tada red $\sum a_n$ konvergira.

Ako je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, onda red $\sum a_n$ divergira.

Ako je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, tada red $\sum a_n$ može da konvergira ili divergira.

4.1 Primer

Razmotrimo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Da bismo primenili Košijev kriterijum, posmatramo članove reda $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Izračunavamo koren n-tog stepena svakog člana:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Pošto je $\frac{1}{2} < 1$, imamo da

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1.$$

Prema Košijevom kriterijumu, pošto je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergira.

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergira prema Košijevom kriterijumu.

5 Lajbnicov kriterijum

Lajbnicov kriterijum koristi se za ispitivanje konvergencije naizmeničnih redova. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ naizmenični red, gde je svaki $a_n \geq 0$. Red konvergira ako su ispunjena dva uslova:

1. a_n je opadajući niz, tj. $a_{n+1} \leq a_n$ za svaki $n \geq N$, gde je N neki prirodan broj.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ako su oba uslova ispunjena, red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergira.

5.1 Primer

Razmotrimo naizmenični harmonijski red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Da bismo primenili Lajbnicov kriterijum, ispitujemo da li su ispunjena dva uslova:

1. Niz $a_n = \frac{1}{n}$ je opadajući jer za svako n, važi $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$.
2. Granica $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dakle drugi uslov je takodje ispunjen.

Po Lajbnicovom kriterijumu, ovaj red konvergira, iako nije apsolutno konvergentan. Zanimljivo je da suma ovog reda konvergira ka vrednosti $\ln(2)$.

Dakle, naizmenični harmonijski red je konvergentan prema Lajbnicovom kriterijumu.

6 Razni Asimptotski i Aproksimativni Metodi

U ovoj sekciji razmatraju se različiti asimptotski i aproksimativni metodi, koji se često koriste za ispitivanje konvergencije redova, graničnih ponašanja, i aproksimacija funkcija.

6.1 Kriterijum Divergencije

Za red $\sum a_n$ ako $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, red divergira. Drugim rečima, ako članovi reda ne teže nuli, red ne može biti konvergentan. Ovaj kriterijum je jednostavan način za brzo utvrdjivanje da li red divergira.

6.2 Redovi Geometrijskog Tipa

Ako je red geometrijskog tipa, tj. oblika $\sum r^n$, gde je r konstanta:

$$\text{Ako je } |r| < 1, \text{ red konvergira.}$$

$$\text{Ako je } |r| \geq 1, \text{ red divergira.}$$

Ovo pravilo se koristi za ispitivanje konvergencije redova geometrijskog oblika. Na primer, za red $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, pošto je $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, red konvergira.

6.3 Ponašanje Redova Tipa $\sum \frac{1}{n^p}$

Za redove oblika $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, važi sledeće:

$$\text{Red konvergira za } p > 1,$$

$$\text{Red divergira za } p \leq 1.$$

Ovo pravilo je posebno korisno za procenu konvergencije redova sa članovima koji opadaju polinomski.

6.4 Aproksimacija Logaritma za Male Vrednosti

Kada aproksimiramo izraz koji sadrži logaritamsku funkciju $\ln(1+x)$ za male vrednosti x, možemo koristiti Taylorev red:

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Za dovoljno male vrednosti x, može se uzeti samo prvi član x, jer doprinos ostalih članova postaje zanemarljiv. Dakle, aproksimacija postaje $\ln(1+x) \approx x$ kada je $x \to 0$.

6.5 Asimptotsko Ponašanje Funkcije $\sin x$ Kada $x \to 0$

Kada posmatramo funkciju $\sin x$ za vrednosti x blizu nule, možemo koristiti sledeću asimptotsku aproksimaciju:

$$\sin x \approx x, \quad x \to 0.$$

Ova aproksimacija proizilazi iz Taylorevog razvoja funkcije $\sin x$ oko tačke $x = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

Za x blizu nule, član x dominira i zato možemo reći da je $\sin x$ asimptotski ekvivalentan x kada $x \to 0$.