

Metod Lagranževih množitelja i metod kaznenih funkcija

Anja Buljević

Aleksandra Mitrović

Smilja Stokanović

22. novembar 2025.

1 Metod Lagranževih množitelja

Optimizacioni problem koji rešavamo formulišemo na sledeći način: naći ekstrem funkcije

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ukoliko su ograničenja

$$g_k(x_1, \dots, x_n) = 0, k = 1, \dots, m$$

pri čemu mora da važi da je broj ograničenja strogo manji od broja promenljivih ($m < n$).

1. Metodom Lagranževih množitelja odrediti stacionarne tačke funkcije

$$f(x, y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$$

uz ograničenje

$$g : 3x + y - 10 = 0$$

i ispitati njihov karakter.

Formiramo novi kriterijum optimalnosti:

$$L = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y + \lambda(3x + y - 10).$$

Potrebni uslovi¹:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4x + y + 8 + 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + x + 3 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x + y - 10 = 0$$

¹ Potreban uslov za postajanje ekstrema jeste da su parcijalni izvodi jednaki nuli.

Rešavanjem sistema jednačina dobijamo sledeće vrednosti:

$x^* = \frac{69}{28}$, $y^* = \frac{73}{28}$. Kako bismo ispitali karakter dobijene stacionarne tačke, trebamo da ispitamo dovoljne uslove².

² Dovoljne uslove ispitujemo na osnovu definitnosti matrice drugih izvoda Lagranževe funkcije Q.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Definitnost matrice ćemo ispitati korišćenjem Silvestrove teoreme. Glavni minori su:

$$D_1 = -4 < 0$$

$$D_2 = 8 - 1 = 7 > 0$$

Zaključujemo da je matrica **Q negativno definitna**, pa je stacionarna tačka $A(\frac{69}{28}, \frac{73}{28})$ **maksimum**.

2. Presek kupe opisane jednačinom $z^2 = x^2 + y^2$ i ravni $z = 1 + x + y$ je neka kriva C. Odrediti tačku na krivoj C koja je najbliža koordinatnom početku.

Cilj je da odredimo najkraće rastojanje³, tako da će kriterijum optimalnosti za ovaj problem biti

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2}.$$

Radi lakšeg računanja, kriterijum optimalnosti ćemo zapisati u sledećem obliku

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ograničenja su

$$g_1 : z^2 - x^2 - y^2 = 0$$

$$g_2 : z - 1 - x - y = 0.$$

Formiramo novi kriterijum optimalnosti:

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(z^2 - x^2 - y^2) + \lambda_2(z - 1 - x - y).$$

Potrebni uslovi:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2y\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z + 2z\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = z^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = z - 1 - x - y = 0 \quad (5)$$

³ Rastojanje se računa po sledećem obrascu $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

Kriterijum optimalnosti možemo kvadrirati jer je u pitanju rastojanje za koje znamo da ne može biti negativno.

Sabiranjem (1) i (3) jednačine dobijamo izraz

$$\lambda_1 = \frac{x+z}{x-z},$$

dok sabiranjem (1) i (3) jednačine dobijamo izraz

$$\lambda_1 = \frac{y+z}{y-z}.$$

Sada možemo izjednačiti dobijene izraze za λ_1 .

$$\begin{aligned}\frac{x+z}{x-z} &= \frac{y+z}{y-z} \\ (x+z)(y-z) &= (y+z)(x-z) \\ 2z(y-x) &= 0 \implies z = 0 \vee y = x\end{aligned}$$

(a) $z = 0$

Za (4) i (5) jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 0 \\ x + y + 1 &= 0 \implies y = -1 - x.\end{aligned}$$

Ubacivanjem dobijene smene za y dobijamo jednčinu

$$2x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Koreni ove jednačine su

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{4} \implies \text{Ne postoje realna rešenja!}$$

(b) $x = y$

Za (4) i (5) jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned}z^2 - 2x^2 &= 0 \\ z - 1 - 2x &= 0 \implies z = 1 + 2x.\end{aligned}$$

Ubacivanjem dobijene smene za z dobijamo jednčinu

$$2x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Koreni ove jednačine su

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{4},$$

pa su dobijene stacionarne tačke

$$\begin{aligned}A(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 - \sqrt{2}) \\ B(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Pošto je ovo fizički realan problem, možemo samo izračunati rastojanje ubacivanjem dobijenih tačaka u formulu za rastojanje i na osnovu toga da zaključimo koja je tačka najbliža koordinatnom početku. Za ovaj konkretni problem rastojanje od tačke A do koordinatnog početka je $d_A = 3.4142$, a od tačke B je $d_B = 0.5858$, ali čemo ovo proveriti ispitivanjem dovoljnih uslova.

Ispitujemo karakter stacionarnih tačaka:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 + 2\lambda_1 \end{bmatrix}$$

Definitnost matrice ćemo ispitati korišćenjem Silvestrove teoreme. Glavni minori su:

$$\begin{aligned} D_1 &= 2 - 2\lambda_1 \\ D_2 &= (2 - 2\lambda_1)^2 \\ D_3 &= (2 - 2\lambda_1)^2(2 + 2\lambda_1). \end{aligned}$$

Treba da ispitamo definitnost matrice za dobijene stacionarne tačke A i B. Vrednost λ_1 za tačku A je $\lambda_{1A} = -5.828$, a za tačku B je $\lambda_{1B} = -0.1716$.

Ubacivanjem ovih vrednosti u glavne minore, za tačku A dobijamo

$$\begin{aligned} D_1 &= 13.656 > 0 \\ D_2 &= 186.4863 > 0 \\ D_3 &= -1800.7 < 0, \end{aligned}$$

a za tačku B

$$\begin{aligned} D_1 &= 2.3432 > 0 \\ D_2 &= 5.4906 > 0 \\ D_3 &= 9.0968 > 0. \end{aligned}$$

Primećujemo da je matrica Q za tačku A nedefinitna (za domaći nastaviti ispitivanje za ovu tačku), dok je matrica Q za tačku B pozitivno definitna, pa zaključujemo da je tačka B najbliže koordinatnom početku za zadate uslove (tačka B predstavlja **minimum**).

3. Metodom Lagranževih množitelja odrediti stacionarne tačke funkcije

$$f(x_1, x_2) = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2$$

uz ograničenje

$$g : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

i ispitati njihov karakter.

Formiramo novi kriterijum optimalnosti:

$$L = x_2^2 - 2x_1 - x_1^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

Potrebni uslovi:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 - 2x_1 + 2\lambda x_1 = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda x_2 = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \quad (8)$$

Iz jednačine (7) dobijamo:

$$2x_2(1 + \lambda) \implies x_2 = 0 \vee \lambda = -1,$$

pa vidimo da ćemo imati 2 slučaja za pronalaženje stacionarnih tačaka.

(a) $x_2 = 0$

Iz jednačine (8) dobijamo da je $x_1 = \pm 1$, pa imamo dve stacionarne tačke:

- $A(1, 0), \lambda_A = 2$
- $B(-1, 0), \lambda_B = 0$

(b) $\lambda = -1$

Iz jednačine (6) dobijamo da je $x_1 = -\frac{1}{2}$, a iz (8) dobijamo da je $x_2^2 = \frac{3}{4}$, pa imamo sledeće dve stacionarne tačke:

- $C(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \lambda_C = -1$
- $D(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \lambda_D = -1$

Kako bismo ispitali karakter dobijene stacionarne tačke, trebamo da ispitamo dovoljne uslove.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda - 2 & 0 \\ 0 & 2\lambda + 2 \end{bmatrix}$$

Definitnost matrice ćemo ispitati korišćenjem Silvestrove teoreme. Glavni minori su:

$$D_1 = 2\lambda - 2$$

$$D_2 = 4\lambda^2 - 4$$

Uvrštavamo za svaku stacionarnu tačku vrednosti za λ , pa dobijamo sledeće minore:

	A	B	C	D
karakter	Minimum	Ne znamo	Ne znamo	Ne znamo
D_1	2	-2	-4	-4
D_2	12	-4	0	0

Za tačke B, C i D moramo dalje da ispitamo karakter.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2\lambda - 2 - \mu & 0 & 2x_1 \\ 0 & 2\lambda + 2 - \mu & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanta matrice Δ^4 je:

Napomena: pogledati skriptu za predavanja kako bi se prisetili kako se formira matrica Δ .

$${}^4 |\Delta| = 0$$

$$|\Delta| = -4x_2^2(2\lambda - 2 - \mu) - 4x_1^2(2\lambda + 2 - \mu) = 0.$$

Nakon što odredimo izraz za μ , dobijamo sledeće vrednosti

	B	C	D
karakter	Minimum	Maksimum	Maksimum
μ	2	-3	-3

Tabela 2: Karakter stacionarnih tačaka.

4. Naći najkraće rastojanje između tačke $(0, 1, 2)$ i paraboloida $z = x^2 + y^2$.

Kriterijum optimalnosti je

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} \implies f = d^2 = x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2,$$

a ograničenje je

$$g : x^2 + y^2 - z = 0.$$

Formiramo novi kriterijum optimalnosti:

$$L = x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z).$$

Potrebni uslovi:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-1) + 2\lambda y = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2(z-2) - \lambda = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - z = 0 \quad (12)$$

Iz jednačine (9) dobijamo:

$$2x(1 + \lambda) \implies x = 0 \vee \lambda = -1,$$

pa vidimo da ćemo imati 2 slučaja za pronalaženje stacionarnih tačaka.

(a) $x = 0$

Iz jednačine (10) dobijamo $\lambda = \frac{1-y}{y}$.

Iz jednačine (11) dobijamo $\lambda = 2(z - 2)$.

Iz jednačine (12) dobijamo $z = y^2$.

$$\begin{aligned} \frac{1-y}{y} &= 2(z-2) \\ \frac{1-y}{y} &= 2(y^2 - 2) \\ 1-y &= 2y^3 - 4y \\ 2y^3 - 3y - 1 &= 0 \\ (y+1)(2y^2 - 2y - 1) &= 0 \implies y_1 = -1 \vee y_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Dobijene stacionarne tačke su:

- $A(0, -1, 1)$
- $B\left(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{4+2\sqrt{3}}{4}\right)$
- $C\left(0, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{4-2\sqrt{3}}{4}\right)$

(b) $\lambda = -1$

Iz (10) dobijamo $2(y-1) - 2y = 0$ što nije moguće, tako da za ovaj slučaj ne postoje stacionarne tačke.

Možemo da izračunamo rastojanja za dobijene stacionarne tačke i utvrdimo za koju se dobije najkraće rastojanje. Dobijena rastojanja su sledeća:

$$d_A \approx 2.361$$

$$d_B \approx 0.3897$$

$$d_C \approx 2.3126$$

Vidimo da najkraće rastojanje dobijamo za tačku B. Ovo možemo pokazati i ispitivanjem dovoljnih uslova.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definitnost matrice ćemo ispitati korišćenjem Silvestrove teoreme. Glavni minori su:

$$\begin{aligned}D_1 &= 2\lambda + 2 \\D_2 &= (2\lambda + 2)^2 > 0 \\D_3 &= 2(2\lambda + 2)^2 > 0.\end{aligned}$$

Pošto možemo odmah zaključiti da su D_2 i D_3 uvek pozitivni, dovoljno je da izračunamo vrednost minora D_1 . Iz (11) sledi da je $\lambda = 2z - 4$.

Vrednosti za λ i minor D_1 dati su u tabeli 3.

	A	B	C
λ	-2	-0.274	-3.73
D_1	-2	1.452	-5.46
karakter	Ne znamo	Minimum	Ne znamo

Tabela 3: Karakter stacionarne tačke.

Za domaći nastaviti ispitivanje karaktera stacionarnih tačaka A i C .

5. **Zadatak za samostalni rad.** Metodom Lagranževih množitelja naći stacionarne tačke za sledeći kriterijum optimalnosti

$$f(x, y) = e^{(x-1)y}$$

koje se nalaze na jediničnoj kružnici sa centrom u koordinatnom početku.

2 Metod kaznenih funkcija

- Metodom kaznenih funkcija naći minimum funkcije

$$y(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 7x_2^2$$

uz ograničenje

$$x_1 + 2x_2 - 5 = 0.$$

Prvi korak je formiranje modifikovanog kriterijuma optimalnosti, koji odgovara traženom minimumu:

$$F = 2x_1^2 - 7x_2^2 + P(x_1 + 2x_2 - 5)^2.$$

Stacionarne tačke tražimo kao da ograničenja ne postoje:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= 4x_1 + 2P(x_1 + 2x_2 - 5) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= -14x_2 + 4P(x_1 + 2x_2 - 5) = 0.\end{aligned}$$

Eliminacijom P dobijamo

$$-4x_1 - 7x_2 = 0,$$

tako da je

$$x_1 = -\frac{7}{4}x_2.$$

Zamenom u prvi izraz dobijamo

$$\begin{aligned}-7x_2 + P\frac{x_2}{2} - 10p &= 0 \\ x_2 &= \frac{20P}{P - 14}\end{aligned}$$

Za velike vrednosti pondera P ($P \rightarrow \infty$) dobijamo $x_2^* = 20$, a $x_1^* = -35$.