predmet: Matematička analiza 2

Funkcionalni redovi

1. Ispitati konvergenciju sledećih funkcionalnih redova:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{\ln n}}$, $x > 0$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n (x-1)^n$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}+x}{2^{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^n}$.

Rešenje:

a) Transformacijom $x^{\ln n} = e^{\ln x^{\ln n}} = e^{\ln n \cdot \ln x} = \left(e^{\ln n}\right)^{\ln x} = n^{\ln x}$, $x > 0$, i uvođenjem $y = \ln x$ dobija se red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{\ln n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\ln x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^y}$. Konvergenciju ovog reda smo već ispitivali i zaključili smo da:

- za $y \le 0 \Leftrightarrow 0 < x \le 1$, red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^y}$ divergira i obično i apsolutno,
- za $0 < y \le 1 \Leftrightarrow 1 < x \le e$, red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^y}$ konvergira uslovno,
- za $y > 1 \Leftrightarrow x > e$, red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^y}$ konvergira i obično i apsolutno.

b) $|f_n| = \left|\frac{n}{2^n} x^n (x-1)^n\right| = \left|n\left(\frac{x(x-1)}{2}\right)^n\right|$. Na osnovu Košijevog korenskog kriterijuma:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\left|\frac{x(x-1)}{2}\right| = \left|\frac{x(x-1)}{2}\right|$$

dati red:

- za $\left|\frac{x(x-1)}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$ konvergira apsolutno, pa i obično,
- za $\left|\frac{x(x-1)}{2}\right| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ divergira i apsolutno i obično (jer mu opšti član ne teži nuli),
- za $x = -1$ ili $x = 2$ divergira i apsolutno i obično $\left(\text{dobija se red } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \text{ koji divergira}\right)$

c) $|f_n| = \left|\frac{5^{n-1}+x}{2^{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^n}\right|$. Na osnovu Košijevog korenskog kriterijuma:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{5^{n-1}+x}{2^{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{5^{n-1}+x}{2^{n-1}}\right| \cdot \frac{1}{|x+\frac{1}{x}|^n}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{|x+\frac{1}{x}|}$$

dati red:

- za $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{|x+\frac{1}{x}|} < 1 \Leftrightarrow \left|x+\frac{1}{x}\right| > \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{(x^2+1)^2}{x^2} > \frac{25}{4} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$ konvergira i apsolutno i obično,

- za $\left|x+\frac{1}{x}\right| < \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in (-2,-\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},2)$ red divergira i apsolutno i obično jer mu opšti član ne teži nuli:
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n-1}+x}{2^{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5}{2}^{n-1}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^n}\right| = \frac{2}{5}\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{5}{2(x+\frac{1}{x})}\right)^n\right|$$
- za $x=\pm\frac{1}{2}$ ili $x=\pm 2$ divergira i apsolutno i obično jer mu mu opšti član ne teži nuli:
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n-1}+x}{2^{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n-1}+x}{2^{n-1}\frac{5^n}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}2\left|\frac{1}{5}+\frac{x}{5^n}\right| = \frac{2}{5}\neq 0$$
.

Vajerštrasov kriterijum

1. Ispitati uniformnu i apsolutnu konvergenciju sledećih funkcionalnih redova na skupu $\mathbb{R}$:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+x^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n(1+x^2)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{arctg}(nx)}{3^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+\sin(nx))^n}$.

Rešenje:

a) Kako je $\left|\frac{1}{n^4+x^2}\right| = \frac{1}{n^4+x^2} \le \frac{1}{n^4}$, a red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ konvergira ($\alpha=4>1$), na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma sledi da funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+x^2}$ konvergira uniformno i apsolutno na $\mathbb{R}$.

b) Kako je $\left|2^{-n(1+x^2)}\right| = \frac{1}{2^{n(1+x^2)}} \le \frac{1}{2^n}$, a red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ konvergira (geometrijski red za $q=\frac{1}{2}$), na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma sledi da funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n(1+x^2)}$ konvergira uniformno i apsolutno na $\mathbb{R}$.

c) Kako je $\left|\frac{(-1)^n\operatorname{arctg}(nx)}{3^n}\right| = \frac{|\operatorname{arctg}(nx)|}{3^n} \le \frac{\frac{\pi}{2}}{3^n}$, a red $\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ konvergira (geometrijski red za $q=\frac{1}{3}$ pomnožen konstantom), na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma sledi da funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\operatorname{arctg}(nx)}{3^n}$ konvergira uniformno i apsolutno na $\mathbb{R}$.

d) Kako je $\left|\frac{1}{(3+\sin(nx))^n}\right| = \frac{1}{(3+\sin(nx))^n} \le \frac{1}{2^n}$, a red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ konvergira (geometrijski red za $q=\frac{1}{2}$), na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma sledi da funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+\sin(nx))^n}$ konvergira uniformno i apsolutno na $\mathbb{R}$.

2. Ako je $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2+n+1}$, izračunati $\int_0^{\pi}f(x)dx$.

Rešenje: Kako je $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2+n+1}\right| = \frac{|\cos(nx)|}{n^2+n+1} \le \frac{1}{n^2}$, a red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergira ($\alpha=2>1$), na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma sledi da funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2+n+1}$ konvergira uniformno i apsolutno na $\mathbb{R}$ (pa i na intervalu $[0,\pi]$). Takođe, funkcije $f_n(x)=\frac{\cos(nx)}{n^2+n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, su neprekidne (pa samim tim i integrabilne) na intervalu $[0,\pi]$. Stoga simboli $\int$ i $\sum$ mogu da zamene mesta pa je:

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2+n+1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2+n+1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} \cdot \frac{1}{n} \sin(nx)\Big|_0^{\pi}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1} \cdot 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

3. Ispitati uniformnu i apsolutnu konvergenciju funkcionalnog reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{1+n^2x^2}$ na intervalu $[1,2]$.

Rešenje: Prvi izvod funkcije $f_n(x) = \dfrac{2x}{1+n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$, je

$$f_n'(x) = \frac{2(1+n^2x^2 - x \cdot 2xn^2)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Stoga je funkcija $f_n(x)$ monotono opadajuća za $x \in \Big(-\infty, -\dfrac{1}{n}\Big) \cup \Big(\dfrac{1}{n}, \infty\Big)$, a rastuća za $x \in \Big(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\Big)$ i njen lokalni minimum je tačka $M_1\Big(-\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\Big)$, a lokalni maksimum $M_2\Big(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\Big)$. Pošto je na intervalu $[1,2]$ funkcija $f_n(x)$ pozitivna i monotono opadajuća sledi da je:

$$\max_{x\in[1,2]} |f_n(x)| = f_n(1) = \frac{2}{1+n^2}.$$

Kako je $\dfrac{2}{1+n^2} \sim \dfrac{2}{n^2}$, $n \to \infty$, a red $2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira ($\alpha = 2 > 1$), na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma funkcionalni red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{1+n^2x^2}$ konvergira uniformno i apsolutno na intervalu $[1,2]$.

4. Ispitati uniformnu i apsolutnu konvergenciju sledećih funkcionalnih redova na skupu $\mathbb{R}$:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx}{1+n^8x^2}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} xe^{\frac{(27)^n x^3}{3}}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2^n x}{1+9^n x^2}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2x^2+n^2}{(n^2+1)x^2+n^2}$.

Rešenje:

a) Neka je $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^8x^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Uniformnu i apsolutnu konvergenciju funkcionalnog reda ispitujemo za $x \in \mathbb{R}$. Kako je $f_n(-x) = -f_n(x)$, funkcija $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^8x^2}$ je neparna. Funkcija $f_n(x)$ je negativna za $x < 0$ i pozitivna za $x > 0$. Takođe, $f_n(x)$ je neprekidna za svako $x \in \mathbb{R}$ (tj. nema vertikalnu asimptotu) i $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$ pa je njena horizontalna asimptota prava $y = 0$ ($x-$osa). Prvi izvod

$$f_n'(x) = \frac{2n(1+n^8x^2) - 2nx \cdot 2xn^8}{(1+n^8x^2)^2} = \frac{2n(1-n^8x^2)}{(1+n^8x^2)^2}$$

je negativan za $x < -\dfrac{1}{n^4}$ ili $x > \dfrac{1}{n^4}$, a pozitivan za $-\dfrac{1}{n^4} < x < \dfrac{1}{n^4}$ pa je funkcija $f_n(x)$ monotono opadajuća na $\left(-\infty, -\dfrac{1}{n^4}\right) \cup \left(\dfrac{1}{n^4}, \infty\right)$ dok je na intervalu $\left(-\dfrac{1}{n^4}, \dfrac{1}{n^4}\right)$ monotono rastuća. U tački $M_1\Big(-\dfrac{1}{n^4}, -\dfrac{1}{n^3}\Big)$ funkcija $f_n(x)$ ima lokalni minimum, a u tački $M_2\Big(\dfrac{1}{n^4}, \dfrac{1}{n^3}\Big)$ lokalni maksimum. Na osnovu ispitanog toka funkcije $f_n(x)$, dobijamo da je

$$|f_n(x)| \le f_n\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{n^3}.$$

Kako brojni red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergira ($\alpha = 3 > 1$), na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma, početni funkcionalni red konvergira uniformno i apsolutno na $\mathbb{R}$.

b) Neka je $f_n(x) = xe^{\frac{(27)^n x^3}{3}}, n \in \mathbb{N}$. Uniformnu i apsolutnu konvergenciju funkcionalnog reda ispitujemo za $x \leq 0$ jer za $x > 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$ pa red divergira. Za $x = 0$ dobija se red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0$ koji konvergira. Stoga dalja ispitivanja vršimo za $x < 0$. Funkcija $f_n(x)$ je negativna i neprekidna za svako $x < 0$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = 0$ pa je njena horizontalna asimptota prava $y = 0$ ($x-$osa). Prvi izvod

$$f_n'(x) = e^{\frac{(27)^n x^3}{3}} + xe^{\frac{(27)^n x^3}{3}} \cdot \frac{(27)^n}{3} \cdot 3x^2 = e^{\frac{(27)^n x^3}{3}}(1 + (27)^n x^3)$$

je negativan za $x < -\frac{1}{\cdot 3^n}$, a pozitivan za $x > -\frac{1}{3^n}$ pa je funkcija $f_n(x)$ monotono opadajuća na intervalu $\left(-\infty, -\frac{1}{3^n}\right)$, dok je na intervalu $\left(-\frac{1}{3^n}, 0\right)$ monotono rastuća. U tački $M\Big(-\frac{1}{3^n}, -\frac{1}{\sqrt[3]{e}\cdot 3^n}\Big)$ funkcija $f_n(x)$ dostiže lokalni minimum. Na osnovu ispitanog toka funkcije $f_n(x)$, dobijamo da je za svako $n \in \mathbb{N}$ najmanje gornje ograničenje funkcije $f_n(x)$ po apsolutnoj vrednosti apsolutna vrednost u njenom lokalnom minimumu, odnosno

$$|f_n(x)| \leq \left| f_n\left(-\frac{1}{3^n}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt[3]{e}\cdot 3^n}.$$

Kako brojni red $\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ konvergira (geometrijski red za $q = \frac{1}{3}$ pomnožen konstantom), na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma, početni funkcionalni red konvergira uniformno i apsolutno na $(-\infty, 0]$.

c) Neka je $f_n(x) = \sin \frac{2^n x}{1 + 9^n x^2}$ i $g_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 9^n x^2}, n \in \mathbb{N}$. Uniformnu i apsolutnu konvergenciju funkcionalnog reda ispitujemo za $x \in \mathbb{R}$. Zbog činjenice da je $|\sin t| \leq |t|, t \in \mathbb{R}$, radi jednostavnosti, možemo posmatrati funkciju $g_n(x)$ i tražiti njeno ograničenje po apsolutnoj vrednosti. Kako je $g_n(-x) = -g_n(x)$, funkcija $g_n(x)$ je neparna. Funkcija $g_n(x)$ je negativna za $x < 0$ i pozitivna za $x > 0$. Takođe, $g_n(x)$ je neprekidna za svako $x \in \mathbb{R}$ (tj. nema vertikalnu asimptotu) i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g_n(x) = 0$ pa je njena horizontalna asimptota prava $y = 0$ ($x-$osa). Prvi izvod

$$g_n'(x) = \frac{2^n(1 + 9^n x^2) - 2^n x \cdot 2x \cdot 9^n}{(1 + 9^n x^2)^2} = \frac{2^n(1 - 9^n x^2)}{(1 + 9^n x^2)^2}$$

je negativan za $x < -\frac{1}{3^n}$ ili $x > \frac{1}{3^n}$, a pozitivan za $-\frac{1}{3^n} < x < \frac{1}{3^n}$ pa je funkcija $f_n(x)$ monotono opadajuća na $\left(-\infty, -\frac{1}{3^n}\right) \cup \left(\frac{1}{3^n}, \infty\right)$ dok je na intervalu $\left(-\frac{1}{3^n}, \frac{1}{3^n}\right)$ monotono rastuća. U tački $M_1\Big(-\frac{1}{3^n}, -\frac{2^n}{2\cdot 3^n}\Big)$ funkcija $g_n(x)$ ima lokalni minimum, a u tački $M_2\Big(\frac{1}{3^n}, \frac{2^n}{2\cdot 3^n}\Big)$ lokalni maksimum. Na osnovu ispitanog toka funkcije $g_n(x)$, dobijamo da je

$$|f_n(x)| \leq |g_n(x)| \leq g_n\left(\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Kako brojni red $\frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergira (geometrijski red za $q = \frac{2}{3}$ pomnožen konstantom), na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma, početni funkcionalni red konvergira uniformno i apsolutno na $\mathbb{R}$.

d) Neka je $f_n(x) = \ln \frac{n^2 x^2 + n^2}{(n^2 + 1)x^2 + n^2}, n \in \mathbb{N}$. Uniformnu i apsolutnu konvergenciju funkcionalnog reda ispitujemo za $x \in \mathbb{R}$. Kako je $f_n(-x) = f_n(x)$, funkcija $f_n(x)$ je parna. Funkcija $f_n(x)$ ima nulu za $x_0 = 0$ i negativna je za $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\Big(\frac{n^2 x^2 + n^2}{(n^2 + 1)x^2 + n^2} < 1\Big)$. Takođe, $f_n(x)$ je neprekidna za svako $x \in \mathbb{R}$ (tj. nema vertikalnu asimptotu) i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_n(x) = \ln \frac{n^2}{n^2 + 1}$ pa je njena horizontalna asimptota prava $y = \ln \frac{n^2}{n^2 + 1}$. Prvi izvod

$$f_n'(x) = \frac{(n^2 + 1)x^2 + n^2}{n^2 x^2 + n^2} \cdot \frac{2xn^2((n^2 + 1)x^2 + n^2) - 2x(n^2 + 1)(n^2 x^2 + n^2)}{((n^2 + 1)x^2 + n^2)^2} = \frac{-2xn^2}{(n^2 x^2 + n^2)((n^2 + 1)x^2 + n^2)}$$

je pozitivan za $x < 0$ i negativan za $x > 0$ pa je funkcija $f_n(x)$ monotono rastuća na $(-\infty, 0)$ dok je na intervalu $(0, \infty)$ monotono opadajuća. U tački $M(0,0)$ funkcija $f_n(x)$ ima lokalni maksimum. Na osnovu ispitanog toka funkcije $f_n(x)$, dobijamo da je

$$|f_n(x)| \leq \left| \ln \frac{n^2}{n^2+1} \right| = -\ln \frac{n^2}{n^2+1} = \ln \frac{n^2+1}{n^2}.$$

Kako je $\ln \dfrac{n^2+1}{n^2} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$, $n \to \infty$, a brojni red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira $(\alpha = 2 > 1)$, na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma, početni funkcionalni red konvergira uniformno i apsolutno na $\mathbb{R}$.