Traženje modela

Model za neki skup formula može biti konačan ili beskonačan. Postoje formule koje imaju samo konačne i one koje imaju samo beskonačne modele. Evo nekih saveta za konstruisanje modela.

- **Konačni modeli:** najčešće je dovoljni isprobati samo modele čiji domen D ima dva ili tri elementa.

  Svako *relacijsko slovo* koje se pojavljuje u formulu interpretiramo kao relaciju odgovarajuće arnosti na D – uglavnom će to biti unarne ($\rho \subseteq D$) ili binarne ($\rho \subseteq D^2$) relacije. Npr. ako je $D = \{a, b\}$ i u formuli se pojavljuje

  1° $(\forall x)R(x,x)$: relacija je refleksivna, tj. mora da sadrži parove (a,a) i (b,b);
  $(\forall x)\neg R(x,x)$: relacija je irefleksivna, tj. ne sme da sadrži ni jedan od parova (a,a) i (b,b);

  2° $(\exists x)R(x,x)$: relacija sadrži bar jedan od parova (a,a) i (b,b);
  $(\exists x)\neg R(x,x)$: relacija ne sadrži bar jedan od parova (a,a) i (b,b);

  3° $(\forall x)(\forall y)\big(R(x,y) \Rightarrow R(y,x)$: relacija je simetrična, tj. ako sadrži par (a,b), onda mora da sadrži i par (b,a), i obrnuto;

  4° $(\forall x)(\exists y)R(x,y)$: relacija mora da sadrži bar jedna par čija je prva koordinata a i bar jedan par čija je prva koordinata b;
  $(\forall x)(\exists y)R(y,x)$: relacija mora da sadrži bar jedna par čija je druga koordinata a i bar jedan par čija je druga koordinata b;

  5° $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$: relacija sadrži ili oba para (a,a) i (a,b), ili oba para (b,a) i (b,b);
  $(\exists x)(\forall y)R(y,x)$: relacija sadrži ili oba para (a,a) i (b,a), ili oba para (a,b) i (b,b).

  Ako se u formuli pojavljuju *funkcijska slova*, ona se interpretiraju kao operacije odgovarajuće arnosti na D – najčešće će to biti unarne ($f : D \to D$) i binarne ($f : D^2 \to D$) operacije. Ove operacije možemo zadati tablicom.

  Svaki *simbol konstante* interpretiramo kao neki element iz D.

- **Beskonačni modeli:** najčešće za domen uzimamo neki od skupova brojeva ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

  Za unarna relacijska slova pogodne interpretaije mogu biti npr.

  - $R(x)$ akko je x paran (neparan) broj (u $\mathbb{N}$ ili $\mathbb{Z}$,
  - $R(x)$ akko je x racionalan (u $\mathbb{R}$)...

  Binarna relacijska slova obično interpretiramo kao $=$ ili $\neq$, ili kao neku relaciju (strogog) poretka $(\leq, <, \geq, >, |, \dots)$.

  Kao interpretaciju funkcijskih slova uglavnom uzimamo neke poznate funkcije – za unarne npr. funkciju sledbenika $f(x) = x + 1$, a za binarne neku od aritmetičkih operacija.

Ako je formula za koju se traži model oblika $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n$, zadatak se svodi na traženje modela za skup formula $\{F_1, F_2, \dots F_n\}$.

Neke važnije valjane formule

1. $\neg(\forall x)A \Leftrightarrow (\exists x)\neg A$
2. $\neg(\exists x)A \Leftrightarrow (\forall x)\neg A$
3. $(\forall x)(A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A \wedge (\forall x)B$
4. $(\exists x)(A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x)A \vee (\exists x)B$
5. $(\forall x)A \vee (\forall x)B \Rightarrow (\forall x)(A \vee B)$
6. $(\exists x)(A \wedge B) \Rightarrow (\exists x)A \wedge (\exists x)B$
7. $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow \big((\forall x)A \Rightarrow (\forall x)B\big)$
8. $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow \big((\exists x)A \Rightarrow (\exists x)B\big)$
9. $(\exists x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \big((\forall x)A \Rightarrow (\exists x)B\big)$
10. $(\forall x)(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \big((\forall x)A \Leftrightarrow (\forall x)B\big)$
11. $(\forall x)(\forall y)A \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A$
12. $(\exists x)(\exists y)A \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A$
13. $(\exists x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall y)(\exists x)A$

Ako x nije slobodno u B:

14. $(\forall x)(A \vee B) \Leftrightarrow (\forall x)A \vee B$
15. $(\forall x)(A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A \wedge B$
16. $(\exists x)(A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x)A \vee B$
17. $(\exists x)(A \wedge B) \Leftrightarrow (\exists x)A \wedge B$
18. $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \big((\exists x)A \Rightarrow B\big)$
19. $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \big(A \Rightarrow (\forall x)B\big)$

Često se za dokazivanje valjanosti formule koristi sledeće tvrđenje:

Zatvorena formula je valjana akko njena negacija nema model.

Ako je formula F oblika

$$B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n \Rightarrow C,$$

onda je njena negacija $\neg F$ oblika

$$B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_n \wedge \neg C,$$

pa se problem traženja modela za $\neg F$ svodi na traženje modela za skup formula $\{B_1, B_2, \ldots, B_n, C\}$. (Videti zadatak 7 sa 6. vežbi ili zadatak 8 iz Domaćeg 2.)