Вежбе 9

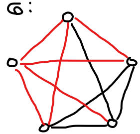
-Основни појмови теорије графова-

Комплемент графа G, у ознаци $\overline{G}$, је граф за који важи

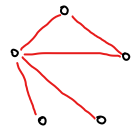
$V(\overline{G}) = V(G)$

$E(\overline{G}) = \{uv \mid u,v \in V(G) \wedge uv \notin E(G)\}$

G:



$\overline{G}$:



Ако је $|V(G)| = n$ онда важи:

- $E(G) \cup E(\overline{G}) = E(K_n)$
- $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n-1, \ \forall v$
- Ако је G k-регуларан, тада је $\overline{G}$ $(n-k-1)$-регуларан

1. Нека је G граф са непарним бројем чворова. Доказати да граф G и његов комплемент $\overline{G}$ имају исти број чворова непарног степена.

Нека је $|V(G)| = n \equiv 1 \pmod 2$ (n непарно)

За сваки чвор $v \in V(G) = V(\overline{G})$ важи

$d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n-1 \equiv 0 \pmod 2$ ($n-1$ је тада парно)

Добијамо да су $d_G(v)$ и $d_{\overline{G}}(v)$ оба парна или оба непарна, па тривијално важи да графови G и $\overline{G}$ имају исти број чворова непарног степена.

2. Нека је G граф са $n = 4k - 1$ чворова. Тада бар један од графова G и $\overline{G}$ садржи чвор са степеном $\geq 2k$.

Ако G садржи чвор степена $\geq 2k$, доказ је готов.

Претпоставимо да у G не постоји чвор траженог степена, тј. $\Delta(G) < 2k$

Сада је $d_G(v) \leq 2k-1, \ \forall v \in V(G)$

Уколико би сви чворови у G имали степен $2k-1$, добили бисмо да G има $4k-1$ чворова (непаран број чворова) непарног степена, а то није могуће.

$\Rightarrow \exists u \in V(G)$ такав да је $d_G(u) \leq 2k-2$

Посматрајмо сада чвор u у графу $\overline{G}$

$$d_{\overline{G}}(u) = n-1 - d_G(u) \geq 4k-2-(2k-2) = 2k$$

Добили смо да је $d_{\overline{G}}(u) \geq 2k$, па је u тражени чвор у $\overline{G}$.

-Повезаност графова-

Шетња $W = v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3\ldots v_{k-1}e_kv_k$ (произвољан низ чворова и грана) (walk)

Пошто радимо само са простим графовима, довољно је навести низ чворова

$\rightarrow W = v_0v_1v_2v_3\ldots v_{k-1}v_k$

СТАЗА = шетња код које нема понављања грана (trail)

ПУТ = шетња код које нема понављања чворова (path)

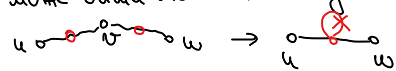
Чворови u и v су ПОВЕЗАНИ у $G \Leftrightarrow$ постоји пут у G између чворова u и v, тзв. uv-пут

Ова релација је релација еквиваленције

Р: по дефиницији се узима да је сваки чвор повезан сам са собом

С: ако постоји uv-пут, онда постоји и vu-пут

Т: Унија uv-пута и vw-пута у општем случају може бити шетња, али уколико постоји uw-шетња, онда постоји и uw-пут



Класе ове релације еквиваленције се називају КОМПОНЕНТЕ ПОВЕЗАНОСТИ

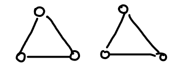
$\omega(G)$ - број компоненти повезаности графа G

Граф G је ПОВЕЗАН $\Leftrightarrow$ $\forall u,v \in V(G)$ важи да су чворови u и v повезани

$\Leftrightarrow \omega(G) = 1$

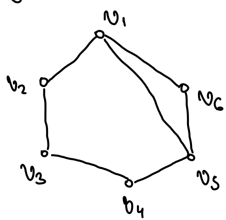
Т: Ако за граф G важи $|V|=n$ и $|E|<n-1$, тада је G неповезан. $\not\Leftarrow$

Из претходног тврђења следи да повезан граф са n чворова има барем $n-1$ грану.



Неповезан граф за који важи $|V|=|E|=6$

РАСТОЈАЊЕ између чворова u и v, у ознаци $d_G(u,v)$, је дужина најкраћег uv-пута у G



$d(v_1,v_2)=1$

$d(v_1,v_3)=2$

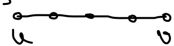
$d(v_1,v_4)=2$

(пут $v_1v_5v_4$)

ДИЈАМЕТАР графа G → највеће растојање између 2 чвора

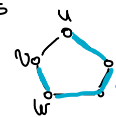
$$d(G) = \max_{u,v\in V} d_G(u,v)$$

P_5



$d(G) = d(u,v) = 4$

C_5



$d(C_5)=d(u,w)=2$, што је различито од 4, колика је дужина max пута

← максималан пут у C_5

Важи $d(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

3. Нека је G повезан граф са n чворова и $\Delta(G) \leq 2$. Тада је $G \cong C_n$ или $G \cong P_n$.

$\Delta(G) \leq 2$: $d(v) \in \{0,1,2\}$

G повезан $\Rightarrow$ нема изолованих чворова

$\Rightarrow d(v) \in \{1,2\}, \forall v \in V$

- Ако G има висећи чвор, онда из услова задатка добијамо да G мора бити пут са n чворова, па је $G \cong P_n$.
- Уколико G не садржи висеће чворове, G је повезан 2-регуларан граф са n чворова па је $G \cong C_n$.

4. Доказати да је за сваки граф G бар један од графова G и $\overline{G}$ повезан.

Ако је G повезан граф, тврђење је доказано.

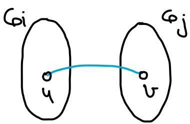
Претпоставимо да је G неповезан, тј. $\omega(G)=k\geq 2$. Доказујемо да је тада $\overline{G}$ повезан.

Нека су $G_1, G_2, \dots, G_k$ компоненте повезаности графа G.

Посматрајмо произвољне чворове $u,v\in V(\overline{G})=V(G)$. Разликујемо следеће случајеве:

1° Чворови u и v су у различитим компонентама повезаности графа G.

Нека $u\in V(G_i), v\in V(G_j)$

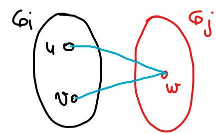


$uv\notin E(G)$ јер су чворови u и v у различитим компонентама

$\Rightarrow uv\in E(\overline{G})$, па су чворови u и v повезани путем дужине 1 у графу $\overline{G}$

2° Чворови u и v су у истој компоненти.

Нека $u,v\in V(G_i)$



Како $\omega(G)=k\geq 2$, знамо да постоји компонента повезаности G_j, $G_i\neq G_j$.

Сада $\exists w\in V(G_j)$

На исти начин као малопре добијамо $uw\in V(G)$ и $vw\in V(G)$

$\Rightarrow$ Пут uwv је пут дужине 2 у $\overline{G}$

$\Rightarrow$ Граф $\overline{G}$ је повезан граф.

5. Нека је G граф са n чворова и $e \geq \binom{n-1}{2} + 1$ грана. Доказати да је G повезан граф.

Претпоставимо да G није повезан граф.

Сада је $\overline{G}$ повезан. Нека је $e' = |E(\overline{G})|$

Из чињенице да је $\overline{G}$ повезан следи $e' \geq n-1$.

Добијамо да важи

$$e = \binom{n}{2} - e' \leq \binom{n}{2} - (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{n-1}{2}(n-2) = \binom{n-1}{2} \quad \lightning$$

Ово је у контрадикцији са условом $e \geq \binom{n-1}{2} + 1$, те је посматрани граф G повезан.

6. Ако је G граф са $n \geq 3$ чворова, такав да је $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$, доказати да је G повезан.

Претпоставимо да је G неповезан, тј. $\omega(G) = k \geqslant 2$.

Нека су $G_1, G_2, \dots, G_k$ компоненте повезаности графа G.

I начин: Посматрајмо произвољну компоненту повезаности G_i.

Нека $v_i \in V(G_i)$. Сада важи

$$|V(G_i)| \geqslant 1 + d(v_i) \geqslant 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}, \ \forall i = 1,2,\dots,k$$

За број чворова графа G тада важи $|V(G)| = \sum_{i=1}^{k} |V(G_i)| \geqslant k \cdot \frac{n+1}{2} \overset{k \geqslant 2}{\geqslant} 2 \cdot \frac{n+1}{2} = n+1$ $\lightning$

(број чворова је $|V(G)| = n$)

$\Rightarrow$ G мора бити повезан граф

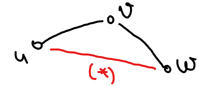
II начин: Нека је, б.у.о., G_1 компонента повезаности са најмањим бројем чворова $\Rightarrow$ $|V(G_1)| \leq \frac{n}{k}$

За чвор $v \in V(G_1)$ важи

$$d_G(v) = d_{G_1}(v) \leq \frac{n}{k} - 1 = \frac{n-k}{k} \overset{k \geqslant 2}{\leq} \frac{n-2}{2} < \frac{n-1}{2} \ \lightning \text{ са условом } \delta(G) \geqslant \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow \forall u \in V(G) \ d_G(u) \geqslant \frac{n-1}{2}$$

$\Rightarrow$ G је повезан

7. Ако за свака три чвора u, v и w графа G важи

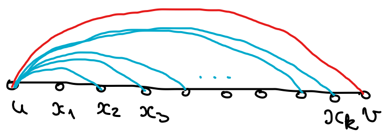


$$uv \in E(G) \wedge vw \in E(G) \Rightarrow uw \in E(G) \quad (*)$$

тада је G комплетан граф или дисјунктна унија комплетних графова.

Нека је G повезан граф. Претпоставимо да G није комплетан, тј. $\exists u,v \in V(G)$ такви да $uv \notin E(G)$.

G повезан $\Rightarrow \exists$ uv-пут у G



Важи:

$ux_1 \in E(G) \wedge x_1x_2 \in E(G) \overset{(*)}{\Rightarrow} ux_2 \in E(G)$

$ux_2 \in E(G) \wedge x_2x_3 \in E(G) \overset{(*)}{\Rightarrow} ux_3 \in E(G)$

$\vdots$

$ux_k \in E(G) \wedge x_kv \in E(G) \overset{(*)}{\Rightarrow} uv \in E(G)$ ↯ (Претпоставили смо $uv \notin E(G)$)

$\Rightarrow$ G је комплетан граф

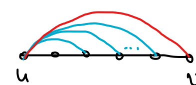
Ако је G неповезан граф, онда малопре описаним поступком закључујемо да је свака компонента повезаности графа G комплетан граф, па је G унија комплетних графова.

II начин: Нека је, б.у.о., G повезан.

Нека су u и v произвољни чворови графа G. Посматрајмо најкраћи uv-пут у G.

Ако је $d(u,v) \geq 2$, исто као у првом начину добијамо $uv \in E(G)$, па је $d(u,v) = 1$ ↯

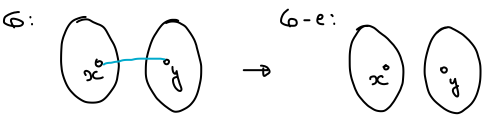
$\Rightarrow$ $d(u,v) = 1$ за свака 2 чвора, па је G комплетан граф



Нека је дат граф $G=(V,E)$. Одузимањем

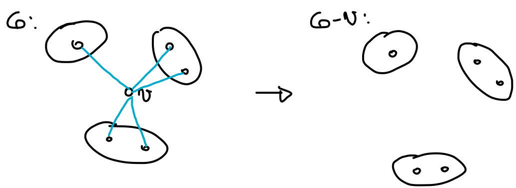
- гране $e \in E$ добијамо граф $G-e$ који је покривајући подграф графа G за који важи $E(G-e)=E\setminus\{e\}$
- чвора $v \in V$ добијамо граф $G-v$ за који важи $G-v = G[V\setminus\{v\}]$ ($G-v$ је подграф индукован скупом чворова $V\setminus\{v\}$)

Грана $e=xy$ је МОСТ (РАЗДЕЛНА ГРАНА) акко $\omega(G-e) > \omega(G)$



Важи $\omega(G-e)=1+\omega(G)$, ако је грана e мост у графу G.

Чвор v је АРТИКУЛАЦИОНИ (РАЗДЕЛНИ) чвор акко $\omega(G-v) > \omega(G)$

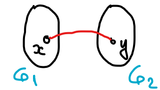


Ако је v артикулациони чвор, онда граф $G-v$ има најмање једну, а највише $d_G(v)-1$ додатних компоненти

$$\omega(G)+1 \le \omega(G-v) \le \omega(G)+d_G(v)-1$$

8. Доказати да ако су сви чворови графа G парног степена, онда G нема мост.

Нека је, б.у.о., граф G повезан.



Претпоставимо да је грана $e = xy$ мост у графу G.

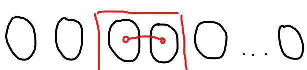
Брисањем гране e се граф G распада на две компоненте повезаности, на графове G_1 и G_2, тј. $G - e = G_1 \cup G_2$

Нека је $x \in V(G_1)$.

Чвор x је сада чвор непарног степена у графу G_1, док сви остали чворови у G_1 имају исти паран степен који имају и у G. Добијамо да граф G_1 има тачно један чвор непарног степена, а то није могуће.

$\Rightarrow$ Граф G не садржи грану која је мост.

* Уколико би G био неповезан граф, исти доказ бисмо поновили за компоненту повезаности графа G која садржи мост e, пошто брисање гране e не утиче на остале компоненте



-Графовски низови-

Кажемо да је низ графовски уколико постоји граф са тим низом степена чворова.

→ нерастући низ

<u>Пример:</u>

Низ $(5,4,3,2,1)$ није графовски низ

1° Није могуће да граф има 5 чворова и да је $d(v_1) = 5$

2° Граф не може имати непаран број чворова непарног степена.

3° Сваки нетривијалан граф садржи 2 чвора истог степена.

* Граф са једним чвором је тривијалан граф.  тривијалан граф

Графови са $n \geq 2$ чворова су нетривијални.

9. Утврдити да ли су следећи низови графовски. За низове који јесу графовски је потребно конструисати одговарајуће графове.

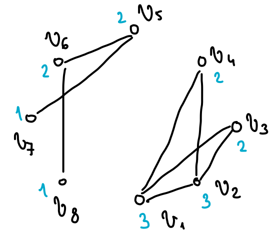
а) $(4, 4, 3, 2, 1)$

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
4	4	3	2	1
	3	2	1	0
		1	0	$\boxed{-1}$

Пошто низ $(1, 0, -1)$ није графовски (-1 не може бити степен чвора), ни низ $(4,4,3,2,1)$ такође није графовски.

б) $(3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
3	3	2	2	2	2	1	1
	2	1	1	2	2	1	1
		0	0	2	2	1	1
				1	0	1	
							0

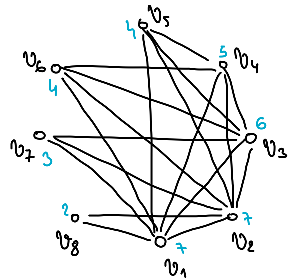


Т: (Хавел - Хакими)

Низ целих бројева $(d_1, d_2, \dots, d_n)$, где је $n-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0$, је графовски АККО је низ $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ графовски.

в) $(7, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2)$

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
7	7	6	5	4	4	3	2
	6	5	4	3	3	2	1
		4	3	2	2	1	0
			2	1	1	0	
				0	0		



г) $(7, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$

д) $(7, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$

10. Доказати да постоје тачно два неизоморфна графа са низом степена $(6, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

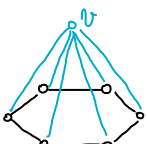
$|V| = 7$

Постоји $v \in V$ такав да је $d(v) = 6$, па је чвор v повезан са преосталих 6 чворова графа

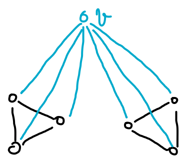
$$\begin{array}{ccccccc} 6 & \underline{3} & \underline{3} & \underline{3} & \underline{3} & \underline{3} & \underline{3} \\ & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

Граф $G - v$ је 2-регуларан граф са 6 чворова.

Како постоје 2 неизоморфна 2-регуларна графа са 6 чворова (C_6 и $C_3 \cup C_3$), број неизоморфних графова са низом степена чворова $(6,3,3,3,3,3,3)$ је тачно два.

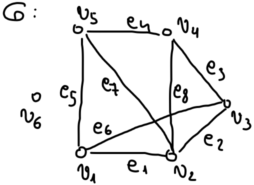


C_6



$C_3 \cup C_3$

-Графови и матрице-



матрица ИНЦИДЕНЦИЈЕ $B(G)$

→однос између чворова и грана графа

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \in e_j \\ 0, & v_i \notin e_j \end{cases}$$

$$B(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Број јединица у
- колони: 2
- врсти: $d(v_i)$

матрица СУСЕДСТВА $A(G)$

→однос између чворова графа

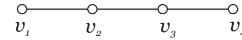
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E(G) \\ 0, & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Квадратна матрица
- На главној дијагонали су нуле (јер немамо петље)
- Симетрична матрица
- Број јединица у врсти/колони: $d(v_i)$

T: Број различитих $v_i - v_j$ шетњи дужине $k \geq 1$ у графу G једнак је елементу $a_{ij}^{(k)}$ матрице $A^k(G)$, где је $A(G)$ матрица суседства графа G.

11. Одредити број свих $v_2 - v_3$ шетњи дужине 7 у графу



Једна таква шетња је $v_2 v_1 v_2 v_3 v_4 v_3 v_2 v_3$

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Тражимо матрицу A^7

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

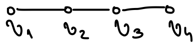
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = A^3 \cdot A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 13 & 0 & 8 \\ 13 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 13 \\ 8 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_{23}^{(7)} = 21 \Rightarrow$ Број шетњи дужине 7 у графу G од v_2 до v_3 је 21.

НАПОМЕНЕ:



- Посматрајмо матрице A^2 и A^4, односно A^3 и A^7. Приметимо да се код матрица са парним експонентом нуле налазе на истим позицијама, и аналогно за непарне експоненте. Наиме, како је $d(v_2,v_3)=1$, немогуће је да имамо v_2-v_3 шетњу парне дужине. Слично, пошто је нпр. $d(v_1,v_3)=2$, број v_1-v_3 шетњи непарне дужине у посматраном графу је 0.

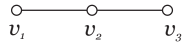
- Посматрајмо матрицу A^2 и приметимо да се на њеној главној дијагонали налазе степени чворова.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Знамо да елемент $a_{ii}^{(2)}$ матрице A^2 одговара броју шетњи дужине 2 од чвора v_i до чвора v_i.

Како се свака v_i-v_i шетња дужине 2 у графу G може представити као $v_i v_j v_i$, за неки чвор v_j који је сусед чвора v_i, добијамо да је $a_{ii}^{(2)} = |N_G(v_i)| = d_G(v_i)$, за $\forall v_i \in V(G)$.

12. Одредити број свих $v_1 - v_2$ и $v_1 - v_3$ шетњи дужине 2024 у графу



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & c_n \\ b_n & d_n & e_n \\ c_n & e_n & f_n \end{bmatrix}$$

Користимо симетричност

$$A^{n+1} = A^n \cdot A$$

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \\ b_{n+1} & d_{n+1} & e_{n+1} \\ c_{n+1} & e_{n+1} & f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & b_n & c_n \\ b_n & d_n & e_n \\ c_n & e_n & f_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n & a_n + c_n & b_n \\ d_n & b_n + e_n & d_n \\ e_n & c_n + f_n & c_n \end{bmatrix}$$

Требају нам b_{n+1} и c_{n+1} пошто тражимо број $v_1 - v_2$ и $v_1 - v_3$ шетњи

$a_{n+1} = b_n = c_{n+1}$ → Ако одредимо b_n, знаћемо и c_n

$b_{n+1} = a_n + c_n = b_{n-1} + b_{n-1}$

$v_1 - v_2$ шетње → b_{n+1}

$v_1 - v_3$ шетње → b_n

Добијамо рекурентну релацију 2. реда

$b_{n+1} - 2b_{n-1} = 0$

Карактеристична једначина $t^2 - 2 = 0$

$t = \pm\sqrt{2}$

$b_n = A(\sqrt{2})^n + B(-\sqrt{2})^n$

$1 = b_1 = A\sqrt{2} - B\sqrt{2}$ (читамо из $A(G)$)

$0 = b_2 = 2A + 2B$ (број $v_1 - v_2$ шетњи дужине 2 је 0, јер је $d(v_1, v_2) = 1$)

$\vdots$

$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$b_n = \frac{(\sqrt{2})^{n-1}}{2}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)$$

$n + 1 = 2024$

$v_1 - v_2: b_{2024} = \frac{(\sqrt{2})^{2023}}{2}\left(1 + (-1)^{2025}\right) = 0$

$v_1 - v_3: b_{2023} = \frac{(\sqrt{2})^{2022}}{2}\left(1 + (-1)^{2024}\right) = 2^{1011}$