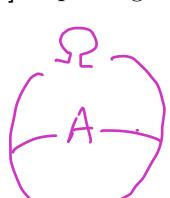


Predispitne obaveze 1 – 20 poena

. / / / /

1. [3 poena] Napisati geometrijsku definiciju verovatnoće.



$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$A \subseteq \Omega$$

odgovarajući učinak kohtačiti zecane
zatvarajući uspravljajući
 $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$

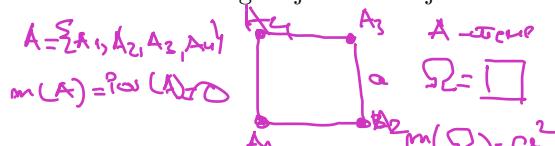
Ω : gubitak

R^1 : odgovarajući

R^2 : zatvarajući

Iz kvadrata stranice a na slučajan način bira se tačka. Izračunati verovatnoću događaja A – "slučajno izabrana tačka je teme kvadrata".

$$P(A) = \dots = 0$$



Događaj A se naziva **ekopo nekotički**

2. [3 poena] Za bilo koja dva događaja A i B je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (1)

$$A \cap B = \emptyset$$

Za disjunktnye događaje A i B je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\emptyset) = P(A) + P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Za nezavisne događaje A i B je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$$\text{nezavisnost} = I \cup II$$

3. [3 poena] Verovatnoća da student položi prvi kolokvijum je 0.7, a verovatnoća da položi drugi kolokvijum je 0.6. Verovatnoća da položi bar jedan kolokvijum je 0.9.

$$P(I) = 0.7 \quad P(II) = 0.6 \quad P(I \cup II) = 0.9$$

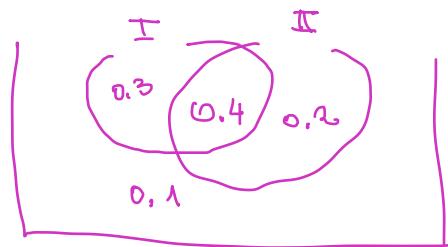
Izračunati verovatnoću da student položi oba kolokvijuma.

$$P(I \cup II) = P(I) + P(II) - P(I \cap II)$$

$$0.9 = 0.7 + 0.6 - P(I \cap II)$$

$$P(I \cap II) = 0.4$$

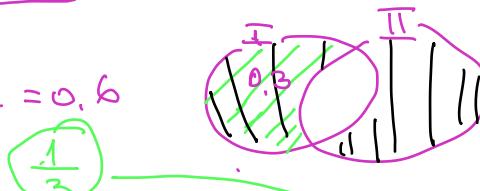
Izračunati verovatnoću da student položi tačno jedan kolokvijum.



$$P = 0.3 + 0.2 = 0.5 = P(B)$$

Ako je student položio tačno jedan kolokvijum izračunati verovatnoću da je položio prvi kolokvijum.

$$P(I | B) = \frac{P(I \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5} = 0.6$$



4. [2 poena] Na kolokvijum je izašlo 90 studenata koji polažu kolokvijum nezavisno jedan od drugog. Poznato je da svaki treći student položi kolokvijum. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj studenata koji će položiti kolokvijum. Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X . Napisati standardizovanu slučajnu promenljivu X^* .

X je četvrtina nakonostno

$$X: B(90, \frac{1}{3})$$

$$E(X) = np$$

$$D(X) = npq$$

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

$$E(X) = 90 \cdot \frac{1}{3} = 30$$

$$D(X) = 90 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 20$$

$$X^* = \frac{X - 30}{\sqrt{20}}$$

5. [4 poen] Slučajna promenljiva X data je gustom raspodele verovatnoća $\varphi_X(x) = \begin{cases} ax, & x \in (0, 2) \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases}$.

Odrediti konstantu a . (Izračunati integral!)

$$1 = \int_0^2 ax dx = a \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{a}{2} (4 - 0) = \frac{4a}{2} = 2a \quad \xrightarrow{2a=1} \quad \underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$$

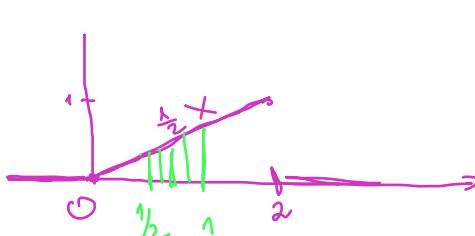
$$D(1 - X) = D(-X + 1) = D(-X) = D(-1 \cdot X) = (-1)^2 \cdot D(X) = D(X)$$

$$D(X \pm C) = D(X) \quad D(e^x) = e^x D(X) \quad \underline{\underline{E(X^2)} = E(X^2) = E(X)^2}$$

$$E(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} x dx \quad E(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} x dx$$

$$P(X = 0) = 0 \quad (\text{X neupravljivo})$$

Na grafiku funkcije gustine slučajne promenljive X predstaviti verovatnoću $P(\frac{1}{2} < X \leq 1)$ i izračunati je.



$$P\left(\frac{1}{2} < X \leq 1\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \dots$$

6. [1 poen] Definisati matematičko očekivanje slučajne promenljive i napisati dve osobine.

$$E(X) = \begin{cases} \text{Ispisac}, X-\text{gust.} \\ \int x \varphi_x(x) dx, X-\text{neupr.} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{poz učinkovit za red/interpolaciju} \\ \text{Analogno koliko} \end{array}$$

7. [5 poena] Slučajna promenljiva (X, Y) data je zakonom raspodele verovatnoća

X/Y	1	2	3	
1	0.1	0.3	0.0	0.4
3	0.2	0.3	0.1	0.6

Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive X .

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y . $[p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j), \forall x_i, y_j]$

$$P(X=1, Y=3) = P(X=1) \cdot P(Y=3)$$

$$0 = 0.4 \cdot 0.1 \quad \text{Odg} \Rightarrow \text{Hercg 4e3 slobocite}$$

Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive $Y|X=3$.

$$Y|X=3: \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0.6 & 3/6 \end{pmatrix} \quad P(Y=1|X=3) = \frac{P(Y=1, X=3)}{P(X=3)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=2|X=3) = \frac{P(Y=2, X=3)}{P(X=3)} = \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2}$$

Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive $Y|X=3$.

$$F_{Y|X=3}(y) = P(Y \leq y | X=3)$$

$$F_{Y|X=3}(y) = \begin{cases} y \in (-\infty, 1]: & P(\emptyset) = 0 \quad \leftarrow \\ & y \in (1, 2]: & P(1) = 2/6 \quad \leftarrow \\ & y \in (2, 3]: & P(1) + P(2) = 2/6 + 3/6 = 5/6 \\ & y \in (3, \infty): & P(1) + P(2) + P(3) = 1 \end{cases}$$

Izračunati matematičko očekivanje slučajne promenljive $Y|X=3$.

$$Y|X=3: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$E(Y|X=3) = 1 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{3}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2+6+3}{6} = \frac{11}{6}$$

Deo završnog ispita 1 – 35 poena

1. [8 poena] Na stolu se nalaze dve kutije. U prvoj kutiji su dve kuglice zelene boje i tri kuglice crvene boje, a u drugoj kutiji jedna kuglica zelene boje i dve kuglice crvene boje. Peca na slučajan način bira jednu kutiju i iz nje bira odjednom dve kuglice. Izračunati verovatnoću da će Peca izvući kuglice različitih boja.
2. [10 poena] Novčić se baca dva puta i ako oba puta padne ista strana izvodi se još jedno bacanje novčića. Slučajna promenljiva X predstavlja broj palih pisama, a slučajna promenljiva Y broj izvedenih bacanja novčića.
 - a) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive (X, Y) .
 - b) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive X i njenu funkciju raspodele.
 - c) Odrediti matematičko očekivanje slučajne promenljive $Z = X + Y$.
3. [10 poena] Slučajna promenljiva X je data funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.
 - a) Izračunati konstantu a .
 - b) Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X .
 - c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = X + 2$.
4. [10 poena] Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive, pri čemu X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu, a Y uniformnu $\mathcal{U}(1, 2)$ raspodelu. Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = 2X + Y$.
5. [7 poena] Peca baca kockicu za "Ne ljuti se čoveče". Slučajna promenljiva X predstavlja broj na gornjoj stranici kockice. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X i njenu karakterističnu funkciju.

Ako Peca baca kockicu 50 puta, odrediti očekivani zbir palih brojeva.