Kombinatorika. σ-algebra događaja. Definicija verovatnoće.

Kombinatorika

Zadatak 1

Postavka: Na koliko načina se može razmestiti n ljudi duž jedne strane pravougaonog stola?

Rešenje:
Prilikom rešavanja koristimo pravilo proizvoda. Na prvo mesto možemo postaviti bilo koga od n ljudi, na drugo mesto bilo koga od preostalih $n-1$, na treće bilo koga od preostalih $n-2$ i tako dalje. Za poslednje mesto nam preostaje samo jedna osoba. Dakle, ukupno načina da rasporedimo n ljudi ima $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$.

Zadatak 2

Postavka: Koliko se može napisati različitih četvorocifrenih brojeva ako se cifre:

(a) mogu ponavljati,

(b) ne mogu ponavljati.

Rešenje:

(a) Koristimo pravilo proizvoda. Na raspolaganju su nam cifre $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Prvu cifru možemo izabrati na 9 načina (može bilo koja cifra sem nule), drugu cifru možemo izabrati na 10 načina (može i cifra koja je izabrana za prvu, jer se cifre mogu ponavljati), treću i četvrtu cifru takođe možemo izabrati na 10 načina. Prema tome, različitih četvorocifrenih brojeva kod kojih se cifre mogu ponavljati ima $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^3$.

(b) Ukoliko se cifre ne mogu ponavljati, prvu cifru možemo izabrati na 9 načina (može sve sem nule), drugu cifru možemo izabrati na 9 načina (može nula, ali ne može cifra koja je izabrana za prvu), treću cifru možemo izabrati na 8 načina (mogu sve sem prve dve cifre) i četvrtu cifru možemo izabrati na 7 načina (sve sem prve tri). Dakle, ukupno četvorocifrenih brojeva kod kojih se cifre ne mogu ponavljati ima $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

Zadatak 3

Postavka: Na koliko načina se može sastaviti tim od 11 igrača ako je na raspolaganju 14 igrača.

Rešenje:

Iz skupa od 14 igrača biramo podskup od 11 igrača (nije bitan redosled odabira igrača). Broj mogućih izbora je $C_{11}^{14} = \binom{14}{11} = 364$.

Zadatak 4

Postavka: Na koliko načina se grupa od 15 ljudi može podeliti na podgrupe tako da u prvoj bude 5, u drugoj 6, a u trećoj 4 ljudi?

Rešenje:

Na osnovu pravila proizvoda broj načina da podelimo grupu na tražene podgrupe je $m \cdot n \cdot k$, gde je m broj načina da odaberemo prvu podrgupu, n broj načina da izaberemo drugu, a k treću podgrupu. Prema tome je $m = C_5^{15} = \binom{15}{5}$, $n = C_6^{10} = \binom{10}{6}$, $k = C_4^4 = \binom{4}{4}$.

Zadatak 5

Postavka: Šest različitih knjiga iz algebre, četiri iz analize i dve iz verovatnoće slažu se na policu tako da sve knjige iz jedne oblasti stoje jedna do druge. Na koliko načina je moguće složiti knjige?

Rešenje:

Kako knjige iz iste oblasti moraju stajati jedna do druge, oblasti možemo rasporediti na 3! načina. Unutar svake oblasti još i knjige možemo rasporediti na različite načine. Knjige iz algebre možemo rasporediti na 6! načina, iz analize na 4! načina, a knjige iz verovatnoće na 2! načina. Dakle, ukupno rasporeda ima $3! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 2!$.

Zadatak 6

Postavka: Na koliko načina može biti ocenjen student ako ima 10 predmeta i ako:

(a) iz svakog predmeta može dobiti ocenu od 5 do 10,

(b) iz dva predmeta ne može dobiti ocenu veću od 7, a iz 3 manju od 9.

Rešenje:

(a) Student iz svakog predmeta može da dobije bilo koju ocenu od 5 do 10, što znači da iz svakog predmeta može biti ocenjen na 6 načina. Na osnovu pravila proizvoda, student može biti ocenjen na 6^{10} načina.

(b) Student iz dva predmeta ne može dobiti ocenu veću od 7, što znači da iz svakog od ta dva predmeta može biti ocenjen na 3 načina. Iz tri predmeta ne može dobiti ocenu manju od 9, pa iz svakog od ta tri predmeta može biti ocenjen na 2 načina. Iz preostalih predmeta može dobiti bilo koju ocenu, dakle iz svakog od njih može biti ocenjen na 6 načina. Na osnovu pravila proizvoda, student može biti ocenjen na $3^2 \cdot 2^3 \cdot 6^5$ načina.

σ- algebra događaja

Zadatak 1

Postavka: Novčić se baca jednom, dva puta, tri puta. Napisati skup elementarnih događaja.

Rešenje:

Ako se nočić baca jednom, skup elementarnih ishoda je $\Omega = \{\omega_G, \omega_P\}$, pri čemu ω_G označava događaj "pri bacanju novčića je pao grb", a ω_P označava događaj "pri bacanju novčića je palo pismo".

Ako se nočić baca dva puta, skup elementarnih ishoda je $\Omega = \{\omega_{GG}, \omega_{GP}, \omega_{PG}, \omega_{PP}\}$, pri čemu ω_{XY} označava događaj "u prvom bacanju novčića je palo $X \in \{G, P\}$, a drugom bacanju je palo $Y \in \{G, P\}$".

Ako se nočić baca tri puta, skup elementarnih ishoda je

$$\Omega = \{\omega_{GGG}, \omega_{GGP}, \omega_{GPG}, \omega_{GPP}, \omega_{PPP}, \omega_{PPG}, \omega_{PGP}, \omega_{PGG}\},$$

uz analogne oznake kao u prethodnom slučaju.

Zadatak 2

Postavka: Dinar se baca dok se dva puta uzastopno ne pojavi ista strana. Napisati skup elementarnih događaja.

Rešenje:

Skup elementarnih događaja je $\Omega = \{\omega_{GG}, \omega_{PP}, \omega_{PGG}, \omega_{GPP}, \omega_{PGPP}, \omega_{GPGG}, \cdots\}$.

Zadatak 3

Postavka: U metu se gađa tri puta. Sa A_i je označen događaj "meta je pogođena u i-tom gađanju". Pomoću ovih događaja izraziti sledeće događaje:

(a) tri pogotka,

(b) tri promašaja,

(c) bar jedan pogodak,

(d) bar jedan promašaj,

(e) ne više od dva pogotka,

(f) do trećeg gađanja nije bilo pogotka.

Rešenje:

(a) $A = A_1A_2A_3$,

(b) $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,

(c) $C = \overline{B} = \{A_1A_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\}$,

(d) $D = \overline{A} = \{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3\}$,

(e) $E = D = \{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3\}$,

(f) $F = \overline{A}_1\overline{A}_2$.

Definicija verovatnoće - klasična, geometrijska, aksiomatska

Zadatak 1

Postavka: Na raspolaganju se nalazi 5 duži čije su dužine $3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9$ cm. Na slučajan način se biraju tri duži. Izračunati verovatnoću da se od izabranih duži može konstruisati trougao.

Rešenje:

Skup svih elementarnih ishoda je $\Omega = \{(3,4,5), (3,4,7), (3,4,9), (3,5,7), (3,5,9), (3,7,9), (4,5,7), (4,5,9), (4,7,9), (5,7,9)\}$. Očigledno je $|\Omega| = 10$.

Da bi tri duži obrazovale trougao neophodno je da svaka od te tri duži bude manja od zbira druge dve. Ako sa A označimo događaj da se od tri izabrane duži može konstruisati trougao, imamo $A = \{(3,4,5), (3,5,7), (3,7,9), (4,5,7), (4,7,9), (5,7,9)\}$. Dakle, $|A| = 6$. Iz klasične definicije verovatnoće imamo $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Zadatak 2

Postavka: U kutiji se nalaze 3 bele i 2 zelene kuglice. Na slučajan način se biraju dve kuglice odjednom. Izračunati verovatnoću sledećih događaja A-izvučene dve bele kuglice, B-izvučene dve zelene kuglice, C-izvučene kuglice različitih boja.

Rešenje:

Kako izvlačimo dve kuglice odjednom, nije bitan redosled izvučenih kuglica, pe je stoga $|\Omega| = C_2^5 = \binom{5}{2} = 10$. Događaj A se realizuje kada su izvučene dve bele kuglice, takvih izvlačenja ima $\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{0} = 3$. Dakle, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{10}$.

Događaj B se realizuje kada su izvučene dve zelene kuglice, takvih izvlačenja ima $\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{0} = 1$. Onda je $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{10}$.

Događaj C se realizuje kada su izvučene kuglice različitih boja, tj. jedna bela i jedna zelena kuglica. Takvih izvlačenja ima $\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 6$. Onda je $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Zadatak 3

Postavka: Iz špila od 32 karte na slučajan način se biraju 4 karte. Izračunati verovatnoću sledećih događaja A-izvučena 4 pika, B-izvučene 4 dame, C-izvučeno po tačno 1 kralj, 1 dama i 1 sedmica.

Rešenje:

Kako u zadatku nije ništa naglašeno, redosled izvučenih karata nije bitan, stoga je $|\Omega| = C_4^{32} = \binom{32}{4}$. Događaj A se realizuje kada iz skupa od 8 pikova izvučemo 4 karte, a iz skupa od preostale 24 karte 0 karata, pa je:

$$P(A) = \frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{24}{0}}{\binom{32}{4}}.$$

Događaj B se realizuje kada iz skupa od 4 dame izvučemo 4 karte, a iz skupa od preostalih 28 karata 0 karata, tj.:

$$P(B) = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{28}{0}}{\binom{32}{4}}.$$

Događaj C se realizuje kada iz skupa od 4 kralja izvučemo 1 kartu, iz skupa od 4 dame 1 kartu, iz skupa od 4 sedmice 1 kartu, i iz skupa od preostalih 20 karata 1 kartu. Dakle:

$$P(C) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{20}{1}}{\binom{32}{4}}.$$

Zadatak 4

Postavka: U igri loto 7/39 igrač je popunio jednu kolonu. Naći verovatnoće događaja A-igrač ima svih 7 pogodaka, B-igrač ima bar 6 pogodaka.

Rešenje:

Ukupno načina da igrač popuni kolonu ima $|\Omega| = \binom{39}{7}$.
Skup od 39 brojeva možemo da podelimo na skup od 7 odgovarajućih brojeva koji čine dobitnu kombinaciju, i skup od ostala 32 broja. Događaj A će se realizovati ako je igrač izabrao 7 brojeva iz skupa od odgovarajućih 7, i nula brojeva iz skupa od preostala 32 broja, odnosno:

$$P(A) = \frac{\binom{7}{7} \cdot \binom{32}{0}}{\binom{39}{7}}.$$

Događaj B će se realizovati ako je igrač izabrao 6 brojeva iz skupa od 7 odgovarajućih, i 1 od preostala 32 broja, ili ako je izabrao 7 brojeva iz skupa od 7 odgovarajućih i nula brojeva iz skupa od preostala 32 broja.

$$P(B) = \frac{\binom{7}{6} \cdot \binom{32}{1} + \binom{7}{7} \cdot \binom{32}{0}}{\binom{39}{7}}.$$

Zadatak 5

Postavka: Igrač je popunio jedan tiket sportske prognoze sa 12 utakmica. Naći verovatnoću da će igrač imati svih 12 pogodaka ako:

(a) ne zna ništa ni o jednoj utakmici,

(b) zna da se sedam utakmica neće završiti nerešeno,

(c) zna rezultat pet utakmica.

Rešenje:

(a) Kako igrač ne zna ništa ni o jednoj utakmici, za svaku utakmicu bira po jedan broj iz skupa $\{0, 1, 2\}$. Na osnovu pravila proizvoda takvih izbora ukupno ima 3^{12}. Treba izračunati verovatnoću da će igrač imati svih 12 pogodaka, dakle odgovarajuća je samo jedna dobitna kombinacija. Prema tome verovatnoća iznosi $\frac{1}{3^{12}}$.

(b) Igrač za 7 utakmica zna da neće završiti nerešeno, pa za tih sedam utakmica bira po jedan broj iz skupa $\{1, 2\}$, dok za preostale utakmice bira po jedan broj iz skupa $\{0, 1, 2\}$. Takvih izbora ima $2^7 \cdot 3^5$. Ponovo je odgovarajuća samo jedna dobitna kombinacija, pa tražena verovatnoća iznosi $\frac{1}{2^7 \cdot 3^5}$.

(c) Igrač zna rezultat za pet utakmica, pa bira samo za preostale utakmice po jedan broj iz skupa $\{0, 1, 2\}$. Takvih izbora ima 3^7. Verovatnoća iznosi $\frac{1}{3^7}$.

Zadatak 6

Postavka: U grupi od n osoba nalaze se A i B. Osobe na slučajan način sedaju na n stolica poređanih u jedan red. Naći verovatnoću da A i B neće sedeti jedna do druge.

Rešenje:

Označimo sa C događaj "osobe A i B neće sedeti jedna do druge". Verovatnoću ovog događaja možemo izračunati kao $P(C) = 1 - P(\overline{C})$, gde je $\overline{C}$ suprotan događaj događaju C-"osobe A i B će sedeti jedna do druge". Mogućih rasporeda n osoba na n stolica ima $n!$, a rasporeda u kojima A i B sede jedna do druge ima $2(n-1)!$ (A i B mogu sedeti u sledećem redosledu "AB"i "BA"i možemo ih posmatrati kao jednu osobu tako da ukupno imamo $n-1$ osobu), pa je $P(\overline{C}) = \frac{2(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n}$. Tražena verovatnoća je onda $P(C) = 1 - \frac{2}{n}$.

Zadatak 7

Postavka: U grupi od $2n$ dece je n devojčica i n dečaka. Oni sedaju na $2n$ stolica poređanih u jedan red. Naći verovatnoću da dve osobe istog pola neće sedeti jedna do druge.

Rešenje:

Najpre, $2n$ osoba se može razmestiti na $(2n)!$ načina, a rasporeda u kojima dve osobe istog pola neće sedeti jedna do druge ima $2 \cdot n! \cdot n! = 2(n!)^2$(na prvom mestu može sedeti ili devojčica ili dečak). Ako sa $P(A)$ označimo verovatnoću traženog događaja, onda je $P(A) = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$.

Zadatak 8

Postavka: Dinar se baca dok prvi put ne padne pismo. Naći verovatnoću da će pismo prvi put pasti u k-tom bacanju. Naći verovatnoću da će pismo prvi put pasti u parnom po redu bacanju.

Rešenje:

Neka je A_k-"pismo je prvi put palo u k-tom bacanju". Tada je $P(A_k) = (\frac{1}{2})^{k-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.

Neka je A-"pismo je prvi put palo u parnom po redu bacanju". Tada je $A = A_2 + A_4 + A_6 + \cdots$ i

$$P(A) = P(A_2)+P(A_4)+P(A_6)+\cdots = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots = \frac{1}{2^2}\Big(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\Big) = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

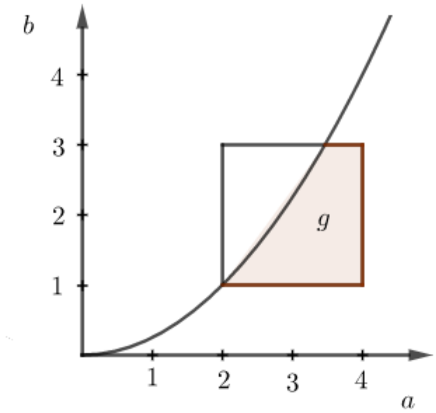
Zadatak 9

Postavka: Broj a se na slučajan način bira iz intervala $[2, 4]$, abroj b iz inntervala $[1, 3]$. Naći verovatnoću događaja da kvadratna jednačina $x^2 + ax + b = 0$ ima realne korene.

Rešenje:

Označimo sa A događaj "kvadratna jednačina ima realne korene". Da bi data kvadratna jednačina imala realne korene, treba da važi

$$D \geq 0 \iff a^2 - 4b \geq 0 \iff a^2 \geq 4b.$$



Kako se brojevi a i b biraju redom iz intervala $[2,4]$ i $[1,3]$, skup tačaka koji odgovara skupu svih mogućih ishoda je kvadrat $G = \{(x,y) : x \in [2,4], y \in [1,3]\}$ i $m(G) = P(G) = 2 \cdot 2 = 4$. Skup tačaka koji odgovara događaju A možemo označiti sa g a njegovu meru možemo izračunati na sledeći način:

$$m(g) = \int_1^3 (4 - 2\sqrt{b})\, db = \cdots = 8 - \frac{4}{3}\Big(3\sqrt{3} - 1\Big) = 8 - 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}.$$

Konačno, verovatnoća događaja A je

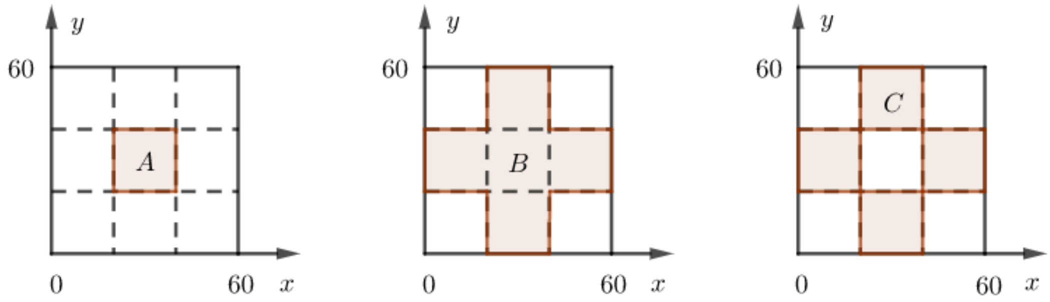
$$P(A) = \frac{m(g)}{m(G)} = \frac{8 - 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}}{4}.$$

Zadatak 10

Postavka: Autobus ulazi u stanicu u 12^{20}, a iz nje izlazi u 12^{40}. Dva putnika nezavisno jedan od drugog ulaze u stanicu u slučajnom trenutku između 12 i 13 časova. Ako je autobus u stanici ulaze u njega, a u suprotnom napuštaju stanicu. Izračunati verovatnoće događaja A-oba putnika će ući u autobus, B-bar jedan putnik će ući u autobus, C-tačno jedan putnik će ući u autobus.

Rešenje:

Označimo sa x vreme dolaska prvog putnika, a sa y vreme dolaska drugog putnika. Oba putnika dolaze u slučajnom trenutku između 12 i 13 časova, tj. i x i y pripadaju intervalu $[0,60]$ ako posmatramo u minutama. Dakle, skup tačaka koji odgovara skupu svih mogućih ishoda je kvadrat $G = \{(x,y) : x \in [0,60], y \in [0,60]\}$.



Ukoliko skiciramo skupove tačaka koji odgovaraju događajima A, B i C vrlo lako možemo uočiti da površina oblasti koja odgovara događaju A čini $\frac{1}{9}$ ukupne površine, površina oblasti koja odgovara događaju B čini $\frac{5}{9}$ ukupne površine, i površina oblasti koja odgovara događaju C čini $\frac{4}{9}$ ukupne površine. Dakle, tražene verovatnoće su $P(A) = \frac{1}{9}$, $P(B) = \frac{5}{9}$, i $P(C) = \frac{4}{9}$.

Zadatak 11

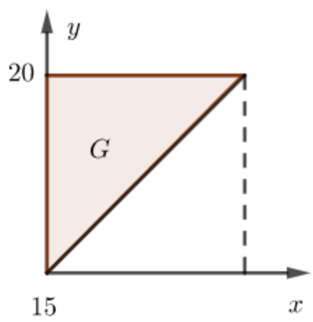
Postavka: Prodavnica je otvorena od 15 do 20 časova. Kupac posećuje prodavnicu. Vreme njegovog ulaska i zadržavanja u prodavnici je slučajno.

(a) Naći verovatnoću da se kupac zadržao u prodavnici duže od pola sata.

(b) Izračunati verovatnoću da je kupac ušao u prodavnicu pre 16 časova, a izašao posle 19 časova.

Rešenje:

Označimo sa x vreme ulaska kupca u prodavnicu, a sa y vreme izlaska kupca iz prodavnice. Skup tačaka koji odgovara skupu svih mogućih ishoda je trougao $G = \{(x, y) : x \in [15, 20], y \in [15, 20], x \leq y\}$ i njegova mera je $m(G) = \dfrac{5 \cdot 5}{2} = \dfrac{25}{2}$.

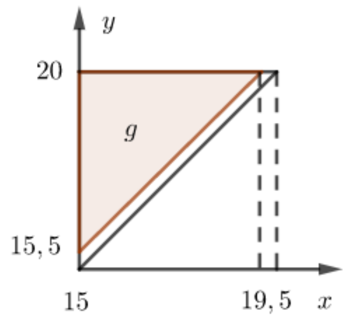


(a) Označimo sa A događaj "kupac se zadržao u prodavnici duže od pola sata". Skup tačaka koji odgovara događaju A je $g_1 = \{(x, y) : x \in [15, 20], y \in [15, 20], y - x \geq \frac{1}{2}\}$ a njegovu meru možemo izračunati na sledeći način:

$$m(g_1) = \frac{4.5 \cdot 4.5}{2} = \frac{4.5^2}{2}.$$

Konačno, verovatnoća događaja A je

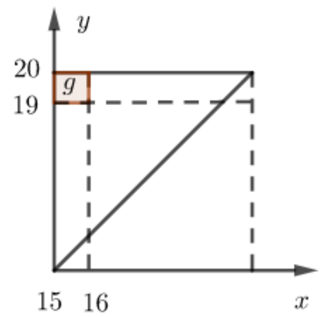
$$P(A) = \frac{m(g_1)}{m(G)} = \frac{\frac{4.5^2}{2}}{\frac{25}{2}} = 0.81.$$



(b) Označimo sa B događaj "kupac je ušao u prodavnici pre 16h, a izašao posle 19h". Skup tačaka koji odgovara događaju B je $g_2 = \{(x, y) : x \in [15, 20], y \in [15, 20], x < 16 \wedge y > 19\}$ a njegova mera je $m(g_2) = 1 \cdot 1 = 1$.

Konačno, verovatnoća događaja B je

$$P(B) = \frac{m(g_2)}{m(G)} = \frac{1}{\frac{25}{2}} = 0.08.$$



Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet Tehničkih Nauka
Verovatnoća i slučajni procesi, letnji semestar akademske 2022/2023. godine

Uopštena formula unije i preseka. Uslovna verovatnoća. Nezavisnost.

Zadatak 1

Postavka: U kutiji se nalazi 6 belih i 4 crne kuglice. Izvlači se tri puta po jedna kuglica:

(a) bez vraćanja,

(b) sa vraćanjem.

Izračunati verovatnoću da je izvučena bar jedna bela kuglica.

Rešenje:
Označimo sa A događaj "izvučena je bar jedna bela kuglica". Prvo ćemo izračunati verovatnoću suprotnog događaja, tj. događaja $\overline{A}$ - "nije izvučena nijedna bela kuglica". Označimo sa C_i događaj "u i-tom izvlačenju izvučena je crna kuglica", $i = 1, 2, 3$. Tada je $\overline{A} = C_1C_2C_3$ i $P(\overline{A}) = P(C_1C_2C_3)$.

(a) Kako se kuglice izvlače bez vraćanja prethodno izvučene kuglice u kutiju, izvlačenja nisu nezavisna, pa važi

$$P(\overline{A}) = P(C_1C_2C_3) = P(C_1)P(C_2 \,|\, C_1)P(C_3 \,|\, C_1C_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30},$$

odakle sledi da je $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$.

(b) Kuglice se izvlače tako da se svaki put pre izvlačenja prethodno izvučena kuglica vrati u kutiju, te su izvlačenja međusobno nezavisna tako da je $P(C_2 \,|\, C_1) = P(C_2) = P(C_1)$, i $P(C_3 \,|\, C_1C_2) = P(C_3) = P(C_1)$, pa je

$$P(\overline{A}) = P(C_1)^3 = \left(\frac{4}{10}\right)^3,$$

odakle je $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{4}{10}\right)^3 = \frac{117}{125}$.

Zadatak 2

Postavka: U kutiji se nalazi k belih i m crnih kuglica. Igrači A i B, jedan za drugim izvlače po jednu kuglicu:

(a) sa vraćanjem,

(b) bez vraćanja.

Pobednik je onaj igrač koji prvi izvuče belu kuglicu. Naći verovatnoću da će pobednik biti igrač A koji započinje igru.

Rešenje:

(a) Obeležimo sa A događaj "pobedio je igrač A", sa B događaj "izvučena je bela kuglica" i sa C događaj "izvučena je crna kuglica". Događaj A tada možemo predstaviti na sledeći način:

$$A = \{B, CCB, CCCCB, ...\} = \{C^{2i}B, i = 0, 1, 2, ...\}.$$

Kako se kuglice izvlače jedna po jedna sa vraćanjem, događaji B i C su nezavisni, pa važi:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} P(C^{2i}B) = \sum_{i=0}^{\infty} P(C)^{2i}P(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{m}{k+m}\right)^{2i} \frac{k}{k+m} = \frac{k}{k+m} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\left(\frac{m}{k+m}\right)^2\right)^i \overset{*}{=}$$
$$\frac{k}{k+m} \cdot \frac{1}{1-(\frac{m}{k+m})^2} = \frac{k}{k+m} \cdot \frac{(k+m)^2}{k^2+2km+m^2-m^2} = \frac{k+m}{k+2m}.$$

$*$ Koristili smo $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1.$

(b) Kako se sada kuglice izvlače bez vraćanja, izvlačenja neće biti nezavisna, odnosno moramo razlikovati događaje C_i-"u i-tom izvlačenju je izvučena crna kuglica". Razlikovaćemo dva slučaja: kada je m paran broj, i kada je m neparan.

- m-paran broj

  Sada je $A = \{B, C_1C_2B, C_1C_2C_3C_4B, ..., C_1C_2...C_mB\}$-u $m+1$ izvlačenju se sigurno izvlači bela kuglica.

  Verovatnoća događaja A je

$$P(A) = P(B) + P(C_1C_2B) + ... + P(C_1C_2...C_mB) =$$
$$= P(B)+P(C_1)P(C_2|C_1)P(B|C_1C_2)+...+P(C_1)\cdot...\cdot P(C_m|C_1...C_{m-1})P(B|C_1...C_m) =$$
$$= \frac{k}{k+m}+\frac{m}{k+m}\cdot\frac{m-1}{k+m-1}\cdot\frac{k}{k+m-2}+...+\frac{m}{k+m}\cdot\frac{m-1}{k+m-1}\cdot\frac{m-2}{k+m-2}\cdot...\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k}{k}.$$

- m-neparan broj

  Sada je $A = \{B, C_1C_2B, C_1C_2C_3C_4B, ..., C_1C_2...C_{m-1}B\}$.
  Verovatnoća događaja A je

$$P(A) = P(B) + P(C_1C_2B) + ... + P(C_1C_2...C_{m-1}B) =$$
$$= P(B)+P(C_1)P(C_2|C_1)P(B|C_1C_2)+...+P(C_1)\cdot...\cdot P(C_{m-1}|C_1...C_{m-2})P(B|C_1...C_{m-1}) =$$
$$= \frac{k}{k+m}+\frac{m}{k+m}\cdot\frac{m-1}{k+m-1}\cdot\frac{k}{k+m-2}+...+\frac{m}{k+m}\cdot\frac{m-1}{k+m-1}\cdot\frac{m-2}{k+m-2}\cdot...\cdot\frac{2}{k+2}\cdot\frac{k}{k+1}.$$

Zadatak 3

Postavka: Igrači A i B više puta igraju igru u kojoj A pobeđuje sa verovatnoćom p, a B pobeđuje sa verovatnoćom $1-p$. Pobeđuje onaj igrač koji pobedi:

(a) u dve igre,

(b) u dve uzastopne igre.

Ako su igre međusobno nezavisne, naći verovatnoću da ukupni pobednik bude igrač A.

Rešenje:
Označimo sa A događaj "u jednoj igri pobedio je igrač A", sa B događaj "u jednoj igri pobedio je igrač B", a sa A_u događaj "ukupno je pobedio igrač A". Tada je $P(A) = p$ i $P(B) = 1 - p = q$.

(a) Kako u prvom slučaju pobeđuje onaj igrač koji pobedi u dve igre, događaj A_u možemo predstaviti kao $A_u = \{AA, ABA, BAA\}$. Onda je:

$$\begin{aligned} P(A_u) &= P(AA) + P(ABA) + P(BAA) = \\ &\overset{\text{nez.igre}}{=} P(A)P(A) + P(A)P(B)P(A) + P(B)P(A)P(A) = \\ &= p^2 + p^2q + p^2q = p^2 + 2p^2q = p^2(1 + 2q). \end{aligned}$$

(b) U drugom slučaju igrač pobeđuje ako pobedi u dve uzastopne igre, te je $A_u = \{AA, ABAA, ABABAA, ..., BAA, BABAA, BABABAA, ...\}$, odnosno $A_u = \{(AB)^iAA, i = 0, 1, 2, 3, ...\} \cup \{(BA)^iA, i = 1, 2, 3, ...\}$. Onda je:

$$P(A_u) = \sum_{i=0}^{\infty} P((AB)^iAA) + \sum_{i=1}^{\infty} P((BA)^iA) =$$

$$\overset{\text{nez.igre}}{=} \sum_{i=0}^{\infty}(P(A)P(B))^iP(A)^2) + \sum_{i=1}^{\infty}(P(B)P(A))^iP(A)) = \sum_{i=0}^{\infty}(pq)^ip^2 + \sum_{i=1}^{\infty}(pq)^ip =$$

$$= p^2\sum_{i=0}^{\infty}(pq)^i + ppq\sum_{i=0}^{\infty}(pq)^i = p^2\frac{1}{1-pq} + p^2q\frac{1}{1-pq} = p^2\frac{1+q}{1-pq}.$$

Zadatak 4

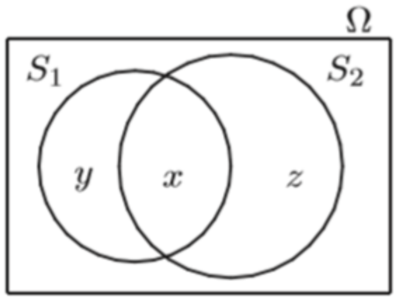
Postavka: Na putu do posla inženjer prolazi pored dva semafora. Verovatnoća da će morati da se zaustavi kod prvog je 0.4, a kod drugog je 0.5, a kod bar jednog je 0.6. Izračunati verovatnoću događaja
A — "moraće da se zaustavi kod oba semafora", B — "zaustaviće se samo kod prvog semafora", C — "zaustaviće se kod tačno jednog semafora", D — "uhvatiće zeleni talas".

Rešenje:
Označimo sa S_i, $i = 1, 2$, događaj "inženjer će morati da se zaustavi kod i-tog semafora". Na osnovu datih podataka $P(S_1) = 0.4$, $P(S_2) = 0.5$ i $P(S_1 \cup S_2) = 0.6$ računamo

- $P(A) = P(S_1S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cup S_2) = 0.4 + 0.5 - 0.6 = 0.3$,

- $P(B) = P(S_1\overline{S_2}) = P(S_1 \setminus S_1S_2) = P(S_1) - P(S_1S_2) = 0.4 - 0.3 = 0.1$,
- $P(C) = P(S_1\overline{S_2}+\overline{S_1}S_2) = P(S_1\overline{S_2})+P(\overline{S_1}S_2) = 0.1+P(S_2\setminus S_1S_2) = 0.1+P(S_2)-P(S_1S_2) = 0.1 + 0.5 - 0.3 = 0.3$,
- $P(D) = 1 - P(S_1 \cup S_2) = 1 - 0.6 = 0.4$.

Drugi način: Verovatnoću možemo često interpretirati grafički



$P(S_1S_2) = x$, $P(S_1\overline{S_2}) = y$, $P(\overline{S_1}S_2) = z$. Onda je $P(S_1) = x + y = 0.4$, $P(S_2) = x + z = 0.5$, $P(S_1 \cup S_2) = x + y + z = 0.6$. Rešavanjem sistema jednačina

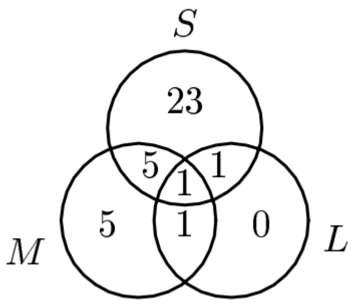
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0.4 \\ x & & & + & z & = & 0.5 \\ x & + & y & + & z & = & 0.6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0.4 \\ & - & y & + & z & = & 0.1 \\ & & & & z & = & 0.2 \end{array}$$

dobijamo $z = 0.2$, $y = 0.1$, $x = 0.3$, odnosno
$P(A) = P(S_1S_2) = x = 0.3$,
$P(B) = P(S_1\overline{S_2}) = y = 0.1$,
$P(C) = P(S_1\overline{S_2} + \overline{S_1}S_2) = P(S_1\overline{S_2}) + P(\overline{S_1}S_2) = z + y = 0.3$,
$P(D) = 1 - P(S_1 \cup S_2) = 1 - (x + y + z) = 1 - 0.6 = 0.4$.

Zadatak 5

POSTAVKA: Na simpozijumu od 40 učesnika njih 30 govori srpski, 12 mađarski, 3 slovački, 6 srpski i mađarski, 2 srpski i slovački, 2 mađarski i slovački i jedan učesnik govori sva tri jezika. Naći verovatnoće događaja:
A — "ne govori ni jedan od navedenih jezika", B — "govori tačno dva od navedenih jezika",
C — "govori tačno jedan od navedenih jezika", D — "govori samo slovački jezik".

REŠENJE:
Obeležimo redom sa S, L i M skupove učesnika koji govore srpski, slovački i mađarski jezik.



Na dijagramu ovih skupova uočavamo koliko učesnika govori koje od ova tri jezika. Sledi da $23 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 = 36$ učesnika govori bar jedan od ova tri jezika, tj. $40 - 36 = 4$ učesnika ne govori ni jedan od navedena tri jezika. Tačno dva od navedenih jezika govori $5+1+1 = 7$ učesnika, a tačno jedan $23+5 = 28$. Samo slovački jezik ne govori ni jedan od učesnika. Verovatnoće traženih događaja onda iznose $P(A) = \frac{4}{40}$, $P(B) = \frac{7}{40}$, $P(C) = \frac{28}{40}$ i $P(D) = 0$.

Zadatak 6

POSTAVKA: Tri aviona nezavisno jedan od drugog bombarduju jedan most serijom bombi. Verovatnoća da bar jedna bomba iz serije pogodi most za prvi avion je 0.2, za drugi 0.3 i za treći 0.4. Naći verovatnoću da most bude pogođen.

REŠENJE:
Označimo sa A događaj “most je pogođen”. Most je pogođen ako ga je pogodila bar jedna bomba iz bar jednog aviona, tako da je

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3),$$

gde je sa A_i označen događaj “most je pogođen bombom iz i-tog aviona”, $i = 1, 2, 3$ i njihove verovatnoće iznose $P(A_1) = 0.2$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.4$.
Kako avioni gađaju most nezavisno jedan od drugog, važi

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$$

$$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08$$

$$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.024$$

Tako da je $P(A) = 0.2 + 0.3 + 0.4 - 0.06 - 0.08 - 0.12 + 0.024 = 0.664$.

Zadatak 7

POSTAVKA: U pozorište je došlo n ljudi, svi su ostavili kapute u garderobi i svi su ostali do kraja predstave. Na kraju predstave nestalo je struje, te su posetioci nasumice uzimali kapute iz garderobe. Izračunati verovatnoću da je bar jedan od posetioca uzeo svoj kaput iz garderobe.

Rešenje:
Označimo događaje:
A_i - "i-ti posetilac je uzeo svoj kaput", $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,
B_n - "bar jedan od n posetioca je uzeo svoj kaput".
Pošto je $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, sledi:

$$P(B_n) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n) =$$

$$\stackrel{[1]}{=} n\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} - \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{0!}{n!} =$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

[1] - *Po opisu iz zadatka izračunavamo:*

$$P(A_i) = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!},$$

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j|A_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{(n-2)!}{n!} \quad (i < j),$$

$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j|A_i)P(A_k|A_iA_j) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{(n-3)!}{n!} \quad (i < j < k),$$

$$\vdots$$

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1} = \frac{0!}{n!}.$$

Napomena: *Ako posmatramo, na primer,* $\sum_{i<j} P(A_iA_j)$*, parova* A_iA_j *takvih da je* $i < j$ *i* $A_iA_j = A_jA_i$*, ima* $\binom{n}{2}$*, dok je* $P(A_iA_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$*, pa je* $\sum_{i<j} P(A_iA_j) = \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!}$.

(Primetimo da je $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\right) = 1 - e^{-1}$, jer je $e^x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$).

Zadatak 8

Postavka: U grupi se nalazi n ljudi sa međusobno različitim imenima i prezimenima. Svako od njih zapisuje svoje ime na cedulju i ubacije u prvu kutiju, a cedulju sa svojim prezimenom u drugu kutiju. Zatim svaka osoba izvlači po jednu cedulju iz kutije sa imenima i iz kutije sa prezimenima, bez vraćanja.

(a) Naći verovatnoću da će svaka osoba izvući svoje ime i prezime.

(b) Naći verovatnoću da će svaka osoba izvući ime i prezime koje odgovara nekoj osobi.

(c) Naći verovatnoću da će bar jedna osoba izvući ime i prezime koje odgovara nekoj osobi.

Rešenje:

(a) Označimo sa A_i, $i = 1, 2, 3, ..., n$, događaj "i-ta osoba je izvukla svoje ime i prezime", a sa A događaj "svaka osoba je izvukla svoje ime i prezime". Tada je $A = A_1A_2A_3 \cdots A_n$. Kako se imena i prezimena koje su već izvučena ne vraćaju nazad u kutije, izvlačenje nisu nezavisna, pa je:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) \cdots P(A_n \mid A_1A_2A_3...A_{n-1}) =$$
$$\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{n-2}\right) \cdots \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{(n!)^2}.$$

Napomena: $P(A_2|A_1)$ *je* $\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}$ *jer je, nakon što je prva osoba izvlačila ime i prezime, u obe kutije je ostalo* $n-1$ *imena i prezimena, a svakoj osobi odgovara samo njeno ime i prezime.*

(b) Označimo sa B_i događaj "i-ta osoba je izukla ime i prezime neke osobe", a sa B događaj "svaka osoba je izvukla ime i prezime neke osobe". Onda je $B = B_1B_2B_3 \cdots B_n$. Kao i u prvom slučaju, izvlačenje nisu nezavisna, te je:

$$P(B) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1B_2) \cdots P(B_n \mid B_1B_2B_3 \cdots B_{n-1}) =$$
$$= \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}\right)\left(\frac{n-2}{n-2} \cdot \frac{1}{n-2}\right) \cdots \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}\right) =$$
$$\left(1 \cdot \frac{1}{n}\right)\left(1 \cdot \frac{1}{n-1}\right)\left(1 \cdot \frac{1}{n-2}\right) \cdots 1 = \frac{1}{n!}.$$

Napomena: $P(B) = \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n}$ *jer ukoliko osoba prvo bira ime, može izvući bilo koje ime, tj. odgovara joj* n *imena od* n *mogućih, dok kad izvuče ime, odgovara joj samo prezime osobe sa tim imenom, od* n *prezimena koje može izvući.*

(c) Označimo sa C događaj "bar jedna osoba će izvući nečije ime i prezime". Onda je $C = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ... \cup B_n$. Odatle imamo:

$$P(C) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) - \sum_{i<j} P(B_iB_j) + \sum_{i<j<k} P(B_iB_jB_k) - ... + (-1)^{n-1}P(B_1B_2 \cdots B_n) = *$$

Računamo:

$P(B_i) = 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$,

$P(B_iB_j) = P(B_i)P(B_j \mid B_i) = (1 \cdot \frac{1}{n})(1 \cdot \frac{1}{n-1}) = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \quad (i < j)$,

$P(B_iB_jB_k) = P(B_i)P(B_j \mid B_i)P(B_k \mid B_iB_j) =$

$= (1 \cdot \frac{1}{n})(1 \cdot \frac{1}{n-1})(1 \cdot \frac{1}{n-2}) = \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)} \quad (i < j < k)$,

$\vdots$

$P(B_1B_2...B_n) = \frac{1}{n!}$.

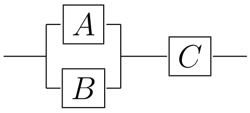
Onda je:

$$* = n \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n \cdot (n-1)} + \binom{n}{3} \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

Zadatak 9

POSTAVKA:

Dato je strujno kolo sastavljeno od tri prekidača povezana kao na slici:



(a) Prekidač A je uključen sa verovatnoćom 0.6. Prekidač B je uključen sa verovatnoćom 0.8 ako je A uključen, a sa verovatnoćom 0.3 ako je A isključen. Prekidač C je nezavisan od A i B i uključen je sa verovatnoćom 0.6.

(b) Sva tri prekidača su nezavisna i uključena sa verovatnoćom 0.7.

Naći verovatnoću da struja prolazi kroz kolo.

REŠENJE:
Obeležimo sa A, B i C redom događaje "Prekidač A je uključen", "Prekidač B je uključen" i "Prekidač C je uključen". Dalje, obeležimo sa S– "kroz kolo protiče struja". Da bi struja proticala kroz kolo, prekidač C mora biti uključen, a od prekidača A i B mora biti uključen bar jedan. Dakle, S je unija disjunktnih događaja, $S = ABC + A\overline{B}C + \overline{A}BC$, odnosno $P(S) = P(ABC) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}BC)$.

(a) Po uslovu zadatka važi
$P(A) = 0.6$, $P(B|A) = 0.8$, $P(B|\overline{A}) = 0.3$, odakle sledi da je

$$P(\overline{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$$
$$P(\overline{B}|A) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

Takođe, po uslovu zadatka je $P(C) = 0.6$.
Kako je prekidač C nezavisan od prekidača A i B, dobijamo:

$$P(S) = P(AB)P(C) + P(A\overline{B})P(C) + P(\overline{A}B)P(C) =$$
$$= P(A)P(B|A)P(C) + P(A)P(\overline{B}|A)P(C) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})P(C) =$$
$$= 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.6 = 0.$$

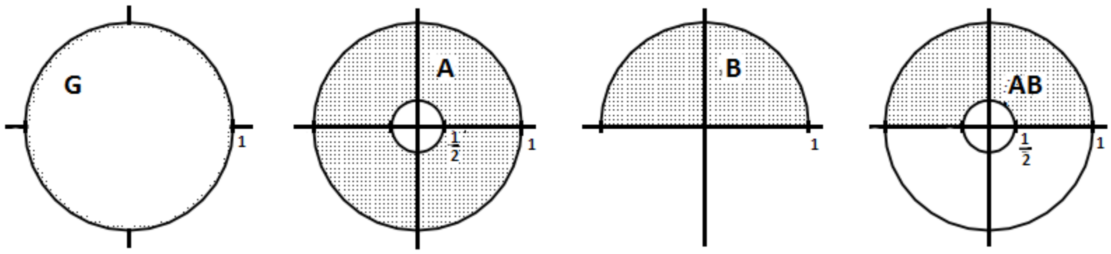
(b) Po uslovu zadatka važi $P(A) = P(B) = P(C) = 0.7$ i kako su sva tri prekidača nezavisna dobijamo

$$P(S) = P(A)P(B)P(C) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C) =$$
$$= 0.7^3 + 0.7^2 \cdot 0.3 + 0.7^2 \cdot 0.3 = 0.637.$$

Zadatak 10

POSTAVKA: Strelac gađa kružnu metu poluprečnika 1. Ispitati nezavisnost događaja A — "pogođen je prsten sa poluprečnicima 0.5 i 1" i B — "pogođena je gornja polovina mete".

Rešenje:
Treba ispitati da li važi $P(AB) = P(A)P(B)$.
Možemo koristiti geometrijsku definiciju verovatnoće.



Sa slike se vidi da je $m(G) = \pi$, $m(A) = \pi - (\frac{1}{2})^2\pi = \frac{3}{4}\pi$, $m(B) = \frac{1}{2}\pi$ i $m(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{8}\pi$.
Tada je $P(A) = \frac{m(A)}{m(G)} = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{m(B)}{m(G)} = \frac{1}{2}$ i $P(AB) = \frac{m(AB)}{m(G)} = \frac{3}{8}$.
Kako je $P(AB) = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$, događaji A i B su nezavisni.

Formula totalne verovatnoće. Bajesova formula.

Zadatak 1

POSTAVKA: Novčić se baca dva puta. Ako oba puta padne pismo, izvlače se odjednom dve kuglice iz kutije koja sadrži 2 bele i 3 zelene kuglice. U suprotnom, izvlači se dva puta po jedna kuglica, sa vraćanjem iz iste kutije.

(a) Izračunati verovatnoću da su izvučene kuglice različitih boja.

(b) Ako su izvučene kuglice različitih boja, izračunati verovatnoću da pismo nije palo dva puta.

REŠENJE:

(a) Hipoteze H_1 – oba puta je palo pismo (“PP”), i H_2 – nije oba puta palo pismo (“PG”, “GP”, “GG”), čine potpun sistem događaja. Važi da je:

$$P(H_1) = P(\text{“oba puta je palo pismo”}) = P(\text{“PP”}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$P(H_2) = P(\text{“nije oba puta je palo pismo”}) = P(\text{“PG”}) + P(\text{“GP”}) + P(\text{“GG”}) = \frac{3}{4}.$$

Posmatrajmo sada događaj A – izvučene su kuglice različitih boja. Ako se realizovao događaj H_1 (dvaput je palo pismo), onda je verovatnoća da će se realizovati i događaj A jednaka sa:

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

jer se odjednom izvlače dve kuglice iz kutije koja sadrži 2 bele i 3 zelene kuglice. Slično:

$$P(A|H_2) = P(\text{“BZ”}) + P(\text{“ZB”}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25},$$

zato što se izvlači dva puta po jedna kuglica (te je redosled izvučenih boja bitan) sa vraćanjem. Prema formuli totalne verovatnoće:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{25} = \frac{51}{100}.$$

(b) Verovatnoća traženog događaja, $P(H_2|A)$, može se izračunati direktno primenom Bajesove formule, na sledeći način:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{12}{25}}{\frac{51}{100}} = \frac{12}{17}.$$

Zadatak 2

Postavka: U kutiji se nalaze 3 ispravna novčića i jedan neispravan novčić koji ima grb sa obe strane. Na slučajan način se iz kutije bira jedan novčić i baca 2 puta.

(a) Izračunati verovatnoću da će oba puta pasti grb.

(b) Ako je oba puta pao grb, koliko iznosi verovatnoća da je iz kutije izabran ispravan novčić?

Rešenje:

(a) Događaji H_1 – izvučen je ispravan novčić, i H_2 – izvučen je neispravan novčić, predstavljaju hipoteze ovog zadatka. Njihove verovatnoće su očigledno $P(H_1) = \frac{3}{4}$ i $P(H_2) = \frac{1}{4}$, jer od ukupno 4 novčića imamo 3 ispravna i 1 neispravan.

Neka je dat događaj A – oba puta će pasti grb. Po postavci zadatka imamo da je:

$$P(A|H_1) = P(\text{“GG”}|H_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad \text{i} \quad P(A|H_2) = P(\text{“GG”}|H_2) = 1\cdot 1,$$

jer se u prvom slučaju posmatraju ispravni novčići, a u drugom neispravan. Prema formuli totalne verovatnoće:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{7}{16}.$$

(b) Verovatnoća traženog događaja, $P(H_1|A)$, može se izračunati direktno primenom Bajesove formule, na sledeći način:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}.$$

Zadatak 3

Postavka: Prva kutija sadrži 5 crvenih i 6 belih kuglica, a druga kutija sadrži 4 crvene i 4 bele kuglice. Iz prve kutije se nasumice izvlači jedna kuglica i premešta u drugu kutiju. Zatim se iz druge kutije na slučajan način izvlači jedna kuglica.

(a) Izračunati verovatnoću da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica.

(b) Ako se zna da je iz druge kutije izvučena crvena kuglica, koliko iznosi verovatnoća da je iz prve u drugu kutiju premeštena crvena kuglica?

Rešenje:

(a) Primetimo da ne možemo znati kolika je verovatnoća da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica (nazovimo ovo događaj A) ako ne znamo najpre sadržaj druge kutije nakon prebacivanja, ili preciznije, ako ne znamo koje je boje prebačena kuglica.

To nam govori da događaji H_1 – iz prve kutije je prebačena crvena kuglica ("C"), i H_2 – iz prve kutije je prebačena bela kuglica ("B"), predstavljaju hipoteze ovog zadatka. Njihove verovatnoće su očigledno $P(H_1) = \frac{5}{11}$ i $P(H_2) = \frac{6}{11}$, jer od ukupno 11 kuglica imamo 5 crvenih i 6 belih.

Ako je u drugu kutiju prebačena crvena kuglica (realizovao se H_1), onda druga kutija nakon prebacivanja sadrži 4 bele i 5 crvenih, te je verovatnoća da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica jednaka $P(A|H_1) = \frac{5}{9}$.

Slično, ako je u drugu kutiju prebačena bela kuglica (realizovao se H_2), onda druga kutija nakon prebacivanja sadrži 5 belih i 4 crvene, te je verovatnoća da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica $P(A|H_2) = \frac{4}{9}$.

Znajući sve ovo, prema formuli totalne verovatnoće:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{11} \cdot \frac{4}{9} = \frac{49}{99}.$$

(b) Verovatnoća traženog događaja, $P(H_1|A)$, može se izračunati diretno primenom Bajesove formule, na sledeći način:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{11} \cdot \frac{5}{9}}{\frac{49}{99}} = \frac{25}{49}.$$

Zadatak 4

Postavka: Iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ na slučajan način se bira jedan broj, a zatim bez vraćanja još jedan.

(a) Naći verovatnoću da je drugi broj veći od prvog;

(b) Naći verovatnoću da je drugi broj za dva veći od prvog;

(c) Ako je drugi broj manji od prvog, izračunati verovatnoću da je u prvom izvlačenju izvučen broj 3.

Rešenje:

Mogu se uvesti hipoteze H_i — u prvom izvlačenju je izvučen broj i, gde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. One se sve realizuju sa verovatnoćama $\frac{1}{n}$, jer ima jedan povoljan broj (broj i) od n mogućih brojeva.

(a) Događaj koji nas zanima je A – drugi izvučeni broj je veći od prvog. Treba primetiti da je:

$$P(A|H_1) = \frac{n-1}{n-1}, \quad P(A|H_2) = \frac{n-2}{n-1}, \quad P(A|H_3) = \frac{n-3}{n-1}, \cdots$$
$$P(A|H_{n-2}) = \frac{2}{n-1}, \quad P(A|H_{n-1}) = \frac{1}{n-1}, \quad P(A|H_n) = 0,$$

zato što ako je prvi izvučeni broj $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, onda od preostalih $(n-1)$ brojeva koji mogu biti izvučeni u drugom izvlačenju ima samo $(n-k)$ onih koji su veći od k.

Primenom formule totalne verovatnoće imamo:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \cdot 0 = \\ &= \frac{1}{n(n-1)} ((n-1) + (n-2) + \cdots + 1) = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

gde je korišćen sledeći izraz za zbir prvih k prirodnih brojeva:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

(b) Treba izračunati verovatnoću događaja B – drugi izvučeni broj je za dva veći od prvog. Imamo:

$$P(B|H_1) = \frac{1}{n-1}, \quad P(B|H_2) = \frac{1}{n-1}, \quad P(B|H_3) = \frac{1}{n-1}, \cdots$$
$$P(B|H_{n-2}) = \frac{1}{n-1}, \quad P(B|H_{n-1}) = 0, \quad P(B|H_n) = 0,$$

zato što ako je prvi izvučeni broj $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, onda od preostalih $(n-1)$ brojeva koji mogu biti izvučeni u drugom izvlačenju ima samo jedan koji je za tačno dva veći od k (to je broj $k+2$). Ako su u prvom izvlačenju izvučeni $n-1$ ili n, očigledno među preostalim brojevima nema broj za dva veći.

Slično kao u prethodnom delu zadatka:

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(B|H_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{1}{n} \cdot 0 = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot (n-2) = \frac{n-2}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

(c) U ovom delu zadatka se posmatra događaj $\bar{A}$ – drugi broj je manji od prvog, čija je verovatnoća data sa:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Prema postavci, traži se verovatnoća događaja $H_3|\bar{A}$, koja se može izračunati Bajesovom formulom:

$$\begin{aligned} P(H_3|\bar{A}) &= \frac{P(H_3)P(\bar{A}|H_3)}{P(\bar{A})} = \frac{P(H_3)(1 - P(A|H_3))}{1 - P(A)} = \\ &= \frac{\frac{1}{n}\left(1 - \frac{n-3}{n-1}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{n-1-n+3}{n-1}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Zadatak 5

POSTAVKA: U kutiji se nalaze 4 ispravna i 2 neispravna proizvoda. Na slučajan način se izvlači grupa od 3 proizvoda i ako među njima ima neispravnih, svi se vraćaju. Ako je grupa proizvoda vraćena, koliko iznosi verovatnoća da je vraćena zato što su u njoj bila tačno 2 neispravna proizvoda?

REŠENJE:

Primetimo da ne možemo znati kolika je verovatnoća da će se grupa proizvoda vratiti (nazovimo ovo događaj A) ako ne znamo najpre sadržaj koja tri proizvoda su izvučena, ili preciznije, ako ne znamo koliko među tri izvučena proizvoda ima neispravnih.

To nam govori da događaji H_i – izvučeno je i neispravnih proizvoda, $i = 0, 1, 2$, predstavljaju hipoteze ovog zadatka. Njihove verovatnoće su očigledno redom:

$$P(H_0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{12}{20}, \quad \text{i} \quad P(H_2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20}.$$

Uslovne verovatnoće $P(A|H_0)$, $P(A|H_1)$ i $P(A|H_2)$ je lako odrediti jer po postavci zadatka ako se među tri izvučena proizvoda nalazi makar jedan neispravan, grupa je sigurno vraćena:

$$P(A|H_0) = 0, \quad P(A|H_1) = 1, \quad \text{i} \quad P(A|H_2) = 1.$$

Primenom formule totalne verovatnoće imamo:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i) = P(H_0)P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$$
$$= \frac{4}{20} \cdot 0 + \frac{12}{20} \cdot 1 + \frac{4}{20} \cdot 1 = \frac{16}{20},$$

pa je konačno:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{20} \cdot 1}{\frac{16}{20}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

NAPOMENA: Zadatak se može kraće rešiti ako se primeti da je A disjunktna unija događaja H_1 i H_2. Naime, A će se realizovati ako se realizuje ili H_1 (1 neispravan) ili H_2 (2 neispravna), a nije moguće da se u istoj grupi nalaze i 1 i 2 neistravna proizvoda (realizuju i H_1 i H_2, tj. njihov presek).

Onda je direktno:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2 A)}{P(A)} = \frac{P(H_2(H_1 + H_2))}{P(H_1 + H_2)} = \frac{P(H_2)}{P(H_1) + P(H_2)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}} = \frac{1}{4},$$

gde smo koristili skupovnu jednakost $H_2(H_1 + H_2) = H_2$ zato što je presek podskupa i njegovog nadskupa jednak podskupu. Takođe, $P(H_1 + H_2) = P(H_1) + P(H_2)$ po definiciji verovatnoće.

Zadatak 6

Postavka: Crvenkapa ide kod bake jednim od dva puta: p_1 ili p_2, i to dvostruko verovatnije putem p_1, nego putem p_2. Ako krene putem p_i, $i \in \{1,2\}$, verovatnoća da će sresti vuka je $\frac{1}{i+1}$, i pri tome će je on pojesti sa verovatnoćom $\frac{i+1}{i+2}$. Ako je vuk ne pojede, tada sigurno stiže kod bake. Izračunati verovatnoću da je Crvenkapa stigla kod bake.

Rešenje:

Najpre primetimo da su hipoteze koje će se koristiti događaji H_i – Crvenkapa je krenula putem i, za $i \in \{1,2\}$. Hipoteze H_1 i H_2 čine potpun sistem događaja (jer Crvenkapa mora ići tačno jednim putem do bake), te je suma njihovih verovatnoća jednaka jedinici. Otuda je:

$$\left.\begin{array}{r} P(H_1)+P(H_2)=1, \\ P(H_1):P(H_2)=2:1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} P(H_1)=\frac{2}{3}, \\ P(H_2)=\frac{1}{3}. \end{array}$$

Uvodi se oznaka V za događaj "Crvenkapa je srela vuka". To znači da su sve mogućnosti (dešavanja) koja su se Crvenkapi mogle desiti opisane sistemom događaja $\{H_1V, H_1\bar{V}, H_2V, H_2\bar{V}\}$, čije su pojedinačne verovatnoće date sa:

$$\begin{aligned} P(H_1V) &= P(H_1)\cdot P(V|H_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}; \\ P(H_1\bar{V}) &= P(H_1)\cdot P(\bar{V}|H_1) = \frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{1+1}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}; \\ P(H_2V) &= P(H_2)\cdot P(V|H_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}; \\ P(H_2\bar{V}) &= P(H_2)\cdot P(\bar{V}|H_2) = \frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2+1}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

To znači da ćemo verovatnoću događaja S – Crvenkapa je stigla kod bake računati kao:

$$P(S) = P(H_1V)P(S|H_1V) + P(H_1\bar{V})P(S|H_1\bar{V}) + P(H_2V)P(S|H_2V) + P(H_2\bar{V})P(S|H_2\bar{V}).$$

U zadatku su date verovatnoće da vuk pojede Crvenkapu $\left(\frac{i+1}{i+2}\right)$, što znači da je vuk nije pojeo sa verovatnoćom $1-\frac{i+1}{i+2} = \frac{1}{i+2}$. Pritom, Crvenkapa stiže kod bake samo ako je vuk nije pojeo. Zato:

$$\begin{aligned} P(S|H_1V) &= \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}, \\ P(S|H_2V) &= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}, \\ P(S|H_1\bar{V}) &= 1, \\ P(S|H_2\bar{V}) &= 1, \end{aligned}$$

te uvrštavanjem ovih vrednosti u formulu totalne verovatnoće dobijamo:

$$P(S) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{9}\cdot 1 = \frac{25}{36}.$$

Diskretna jednodimenzionalna slučajna promenljiva i njene transformacije

Zadatak 1

Postavka: U kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem 1, četiri kuglice označene brojem 3, i jedna kuglica označena brojem 5. Na slučajan način izvlačimo odjednom dve kuglice iz kutije. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja zbir izvučenih brojeva.

(a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.

(b) Izračunati $F_X(2)$, $F_X(4)$, $F_X(8)$ i $F_X(16.375)$.

(c) Naći funkciju raspodele, $F_X(x)$, za slučajnu promenljivu X i grafički je predstaviti.

Rešenje:

(a) Označimo sa $\langle m,n\rangle$, $m,n \in \{1,3,5\}$ događaj „izvučene su kuglice sa brojevima m i n" (pri čemu je nebitan redosled izvučenih kuglica). Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{2,4,6,8\}$ pri čemu je

$\mathsf{P}(X=2) = \mathsf{P}(\langle 1,1\rangle) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{21}$,

$\mathsf{P}(X=4) = \mathsf{P}(\langle 1,3\rangle) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{8}{21}$,

$\mathsf{P}(X=6) = \mathsf{P}(\langle 1,5\rangle \cup \langle 3,3\rangle) = \mathsf{P}(\langle 1,5\rangle + \langle 3,3\rangle) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{7}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{8}{21}$ i

$\mathsf{P}(X=8) = \mathsf{P}(\langle 3,5\rangle) = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4}{21}$,

tako da je $X : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ \frac{1}{21} & \frac{8}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}$.

(b) Na osnovu definicije funkcije raspodele imamo:

$F_X(2) = \mathsf{P}(X<2) = 0$,

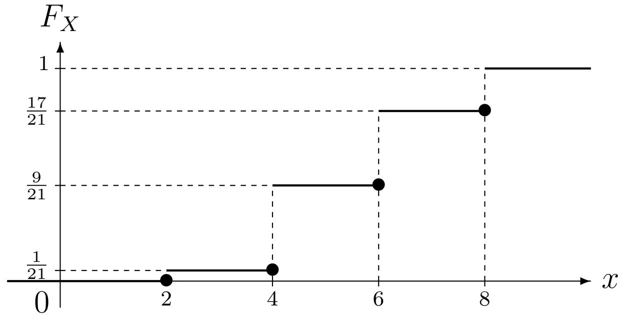
$F_X(4) = \mathsf{P}(X<4) = \mathsf{P}(X=2) = \frac{1}{21}$,

$F_X(8) = \mathsf{P}(X<8) = 1 - \mathsf{P}(X=8) = 1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21}$,

$F_X(16.375) = \mathsf{P}(X<16.375) = 1$.

(c) Funkcija raspodele slučajne promenljive X i njen grafik su

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{1}{21}, & 2 < x \leq 4 \\ \frac{9}{21}, & 4 < x \leq 6 \\ \frac{17}{21}, & 6 < x \leq 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases},$$



Zadatak 2

Postavka: Strelac pogađa cilj sa verovatnoćom p, a gađa dok ne pogodi dva puta ili ne promaši tri puta. Naći raspodelu slučajnih promenljivih X i Y, gde je X broj gađanja, a Y broj pogodataka.

Rešenje:

Označimo sa $+$ događaj " cilj je pogođen", a sa $-$ " cilj nije pogođen". S obzirom na to da je verovatnoća pogotka p, označimo sa $q = 1 - p$ verovatnoću promašaja.

Skup vrednosti slučajne promenljive X je očigledno $\mathcal{R}_X = \{2, 3, 4\}$. Traženi zakon raspodele je tada

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix},$$

gde su odgovarajuće verovatnoće:

$p_2 = \mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(++) = p^2$,
$p_3 = \mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor +) + \mathsf{P}(---) = \binom{2}{1} pqp + q^3 = 2p^2q + q^3$,
$p_4 = \mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor -) + \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor +) = \binom{3}{1} pq^2q + \binom{3}{1} pq^2p = 3pq^2(q+p) = 3pq^2$.

Napomena: Oznaka $\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor$ označava sve moguće događaje gde je cilj jednom pogođen i dvaput promašen, tj. događaje $+--$, $-+-$ i $--+$(redosled je bitan). Takvih događaja ima $\binom{3}{1}$ jer od tri "mesta"biramo jedno na kome će biti $+$.

Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{0, 1, 2\}$. Traženi zakon raspodele je tada

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix},$$

gde su odgovarajuće verovatnoće:
$q_0 = \mathsf{P}(Y = 0) = \mathsf{P}(---) = q^3$,
$q_1 = \mathsf{P}(Y = 1) = \mathsf{P}(\lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor + \rfloor -) = \binom{3}{1} pq^2q = pq^3$,
$q_2 = \mathsf{P}(Y = 2) = \mathsf{P}(++) + \mathsf{P}(\lfloor - \rfloor \lfloor + \rfloor +) + \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor +) = p^2 + \binom{2}{1} pqp + \binom{3}{1} pq^2p = p^2 + 2p^2q + 3p^2q^2$.

Zadatak 3

Postavka: U svakoj od tri nezavisne igre igrač pobeđuje sa verovatnoćom p, a zatim igra još onoliko igara koliko je pobeda imao u prve tri igre. Naći raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja ukupan broj pobeda.

Rešenje:
Slično kao u prethodnom zadatku, označimo sa $+$ događaj " igrač je pobedio", a sa $-$ "igrač je izgubio ". S obzirom na to da je verovatnoća pobede p, označimo sa $q = 1-p$ verovatnoću poraza.

Skup vrednosti slučajne promenljive X je očigledno $\mathcal{R}_X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, a odgovarajuće verovatnoće su:
$\mathsf{P}(X=0) = q^3$,
$\mathsf{P}(X=1) = \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor -) = \binom{3}{1} pq^2 q = 3pq^3$,
$\mathsf{P}(X=2) = \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor --) + \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor +) = \binom{3}{2} p^2 q q^2 + \binom{3}{1} pq^2 p = 3p^2q^3 + 3p^2q^2$,
$\mathsf{P}(X=3) = \mathsf{P}(+++---) + \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \ \ \lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor) = p^3q^3 + \binom{3}{2} p^2 q \binom{2}{1} pq = p^3q^3 + 6p^3q^2$,
$\mathsf{P}(X=4) = \mathsf{P}(+++\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor) + \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor ++) = p^3 \binom{3}{1} pq^2 + \binom{3}{2} p^2 q p^2 = 3p^4q^2 + 3p^4 q$,
$\mathsf{P}(X=5) = \mathsf{P}(+++\lfloor + \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor) = p^3 \binom{3}{2} p^2 q = 3p^5 q$,
$\mathsf{P}(X=6) = \mathsf{P}(++++++) = p^6$.

Napomena: Oznake $\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor$, $\lfloor + \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor$ itd. imaju isto značenje kao u prethodnom zadatku.

Zadatak 4

Postavka:
Košarkaš gađa koš 1000 puta. Verovatnoća promašaja u svakom nezavisnom gađanju je 0.005.Naći raspodele slučajnih promenljivih X i Y koje predstavljaju redom tačan i približan broj promašaja.
Rešenje:
Verovatnoća promašaja je $p = 0.005$, a verovatnoća pogotka $q = 0.995$. Slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(1000, 0.005)$ raspodelu i odgovarajuće verovatnoće su:

$$\mathsf{P}(X=i) = \binom{1000}{i} 0.005^i \cdot 0.995^{1000-i}, \quad i \in \{0,1,2,\dots,1000\}.$$

Kako je $\lambda = 1000 \cdot 0.005 = 5$, slučajna promenljiva X se može aproksimirati Poasonovom slučajnom promenljivom tako da slučajna promenljiva Y ima Poasonovu $\mathcal{P}(5)$ raspodelu i tada su odgovarajuće verovatnoće:

$$\mathsf{P}(Y=i) = \frac{5^i}{i!} e^{-5}, \quad i \in \{0,1,2,\dots\}.$$

Napomena: Kasnije ćemo videti još jednu aproksimaciju Binomne raspodele primenom Moavr-Laplasove teoreme.

Zadatak 5

Postavka: Kockica se baca do prve pojave šestice ali najviše četiri puta. Neka slučajna promenljiva X predstavlja ukupan broj izvedenih bacanja.

(a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.

(b) Izračunati $\mathsf{P}(2 \le X < 4)$, $\mathsf{P}(2 < X < 4)$, $\mathsf{P}(X < 3)$, $\mathsf{P}(-4X < -5)$ i $\mathsf{P}(2X - 5 < 0)$.

Rešenje:
Označimo sa D događaj da se u jednom bacanju kockice pojavi broj 6, a sa $\bar{D}$ da se u jednom bacanju kockice ne pojavi broj 6. Tada je $\mathsf{P}(D) = \frac{1}{6}$ i $\mathsf{P}(\bar{D}) = \frac{5}{6}$. Primetimo da su bacanja kockice međusobno nezavisna.

(a) Očigledno je da je $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, 4\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(D) = \frac{1}{6}$,
$\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(\bar{D}D) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$,
$\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}D) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$,
$\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}\bar{D}D + \bar{D}\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$,

tako da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{25}{216} & \frac{125}{216} \end{pmatrix}$.

(b) Tražene verovatnoće su

$\mathsf{P}(2 \leq X < 4) = \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) = \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{55}{216}$,
$\mathsf{P}(2 < X < 4) = \mathsf{P}(X = 3) = \frac{25}{216}$,
$\mathsf{P}(X < 3) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$,
$\mathsf{P}(-4X < -5) = \mathsf{P}(X > \frac{5}{4}) = 1 - \mathsf{P}(X \leq \frac{5}{4}) = 1 - \mathsf{P}(X = 1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$,
$\mathsf{P}(2X - 5 < 0) = \mathsf{P}(X < \frac{5}{2}) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = \frac{11}{36}$

Zadatak 6

Postavka: Baca se kockica za igru „Ne ljuti se čoveče”. Ako se pojavi broj manji od tri izvlače se dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze tri zelene i dve bele kuglice. U suprotnom se izvlače dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze dve zelene i jedna bela kuglica. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj izvučenih zelenih kuglica. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.

Rešenje:
Obeležimo sa H_1 događaj da se pri bacanju kockice pojavio broj manji od tri, a sa H_2 događaj da se pojavio broj veći ili jednak sa tri, koji čine potpun sistem događja. Njihove verovatnoće su $\mathsf{P}(H_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ i $\mathsf{P}(H_2) = 1 - \mathsf{P}(H_1) = \frac{2}{3}$. Raspodelu slučajne promenljive X, odnosno odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(X = j)$, $j \in \mathcal{R}_X = \{0, 1, 2\}$ možemo izračunati primenom formule totalne verovatnoće

$$\mathsf{P}(X = j) = \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}\left(X = j | H_1\right) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}\left(X = j | H_2\right), \quad j \in \mathcal{R}_X,$$

pri čemu je

$$\mathsf{P}\left(X = 0 | H_1\right) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}, \qquad \mathsf{P}\left(X = 0 | H_2\right) = \frac{0}{\binom{3}{2}} = 0,$$

$$\mathsf{P}\left(X = 1 | H_1\right) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}, \quad \mathsf{P}\left(X = 1 | H_2\right) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{3}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$\mathsf{P}\left(X = 2 | H_1\right) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}, \qquad \mathsf{P}\left(X = 2 | H_2\right) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Uvrštavanjem u formulu totalne verovatnoće dobijamo

$\mathsf{P}(X = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{30}$,
$\mathsf{P}(X = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{29}{45}$,
$\mathsf{P}(X = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{29}{90}$,

tako da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{30} & \frac{29}{45} & \frac{29}{90} \end{pmatrix}$.

Zadatak 7

Postavka: Strelac gađa metu tri puta. Verovatnoća pogotka u svakom nezavisnom gađanju je 0.9. Ako je meta pogođena najviše jednom strelac dobija -5 poena, ako ostvari dva pogotka dobija 5 poena, a u preostalom slučaju dobija 10 poena. Slučajna promenljiva X predstavlja broj osvojenih poena. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.

Rešenje:

Na osnovu uslova zadatka skup vrednosti tražene slučajne promenljive je $\mathcal{R}_X = \{-5, 5, 10\}$, a odgovarajuće verovatnoće su:
$\mathsf{P}(X = -5) = \mathsf{P}($"Strelac ima 3 promašaja, ili 2 promašaja i 1 pogodak"$)=$
$= 0.1^3 + \binom{3}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9 = 0.028,$
$\mathsf{P}(X = 5) = \mathsf{P}($"Strelac ima 2 pogodka i 1 promašaj"$)= \binom{3}{2} \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.243$
$\mathsf{P}(X = 10) = \mathsf{P}($"Strelac ima 3 pogodka"$)= 0.9^3 = 0.729.$

Traženi zakon raspodele je onda:

$$X : \begin{pmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 0.028 & 0.243 & 0.729 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 8

Postavka: Slučajna promenljiva X je data zakonom raspodele $X : \begin{pmatrix} -\pi & -\frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} \end{pmatrix}$.
Naći zakon raspodele slučajne promenljive $Y = \sin X$.

Rešenje: Kako je $Y = \sin(X) = g(X)$, skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = g(\mathcal{R}_X) = \{-1, 0, 1\}$, a odgovarajuće verovatnoće računamo na sledeći način:
$\mathsf{P}(Y = -1) = \mathsf{P}\left(X = -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8},$
$\mathsf{P}(Y = 0) = \mathsf{P}(X = -\pi) + \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = \pi) = \frac{6}{8},$
$\mathsf{P}(Y = 1) = \mathsf{P}\left(X = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8},$
tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Zadatak 9

Postavka: Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele $X : \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$. Neka je $Y = 2X + 3$, $Z = X^2$ i $T = X^3 - X^2$. Naći zakon raspodele za slučajne promenljive Y, Z i T.

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive $Y = 2X + 3$ je $\mathcal{R}_Y = \{1, 9, 11\}$. Odgovarajuće verovatnoće su tada:
$\mathsf{P}(Y = 1) = \mathsf{P}(X = -1) = 0.4,$ $\quad \mathsf{P}(Y = 9) = \mathsf{P}(X = 3) = 0.5,$
$\mathsf{P}(Y = 11) = \mathsf{P}(X = 4) = 0.1,$
tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Za slučajnu promenljivu $Z = X^2$ imamo da je $\mathcal{R}_Z = \{1, 9, 16\}$ njen skup vrednosti, pa dobijamo da su odgovarajuće verovatnoće:

$\mathsf{P}(Z = 1) = \mathsf{P}(X = -1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(Z = 9) = \mathsf{P}(X = 3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(Z = 16) = \mathsf{P}(X = 4) = 0.1,$

tako da je zakon raspodele slučajne promenljive $Z : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 16 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Analogno, za slučajnu promenljivu $T = X^3 - X^2$ imamo da je $\mathcal{R}_T = \{-2, 18, 48\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(T = -2) = \mathsf{P}(X = -1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(T = 18) = \mathsf{P}(X = 3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(T = 48) = \mathsf{P}(X = 4) = 0.1,$

i tražena slučajna promenljiva je $T : \begin{pmatrix} -2 & 18 & 48 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Zadatak 10

Postavka: Strelac gađa metu dok ne promaši. Verovatnoća promašaja u svakom nezavisnom gađanju je $\frac{1}{20}$. Slučajna promenljiva T uzima vrednost 1 ako je strelac promašio metu u parnom po redu gađanju, a vrednost -1 ako je strelac promašio metu u neparnom po redu gađanju. Naći zakon raspodele za T.

Rešenje: Posmatrajmo najpre slučajnu promenljivu Z koja predstavlja broj gađanja. Ova slučajna promenljiva ima $\mathcal{G}(\frac{1}{20})$ raspodelu. Sada slučajnu promenljivu T možemo posmatrati kao transformaciju slučajne promenljive Z. Očigledno je njen skup vrednosti $\mathcal{R}_T = \{-1, 1\}$, a odgovarajuće verovatnoće su:

$\mathsf{P}(T = -1) = \mathsf{P}(Z = 1) + \mathsf{P}(Z = 3) + \mathsf{P}(Z = 5) + \cdots =$

$= \frac{1}{20} + (\frac{19}{20})^2 \cdot \frac{1}{20} + (\frac{19}{20})^4 \cdot \frac{1}{20} + \cdots =$

$= \frac{1}{20} \cdot (1 + (\frac{19}{20})^2 + (\frac{19}{20})^4 + \cdots) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{1-(\frac{19}{20})^2} = \frac{20}{39},$

$\mathsf{P}(T = 1) = 1 - \mathsf{P}(T = -1) = \frac{19}{39},$

tako da slučajna promenljiva T ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{20}{39} & \frac{19}{39} \end{pmatrix}$.

Neprekidna jednodimenzionalna slučajna promenljiva i njene transformacije.

Zadatak 1

Postavka: Knjiga u čitaonici se iznajmljuje najduže na dva sata. Neka slučajna promenljiva X označava vreme zadržavanja knjige kod slučajno izabranog studenta. Gustina slučajne promenljive X data je sa:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

(a) Izračunati $F_X(1.2)$, $F_X(-1)$, $F_X(3.5)$, a zatim naći funkciju raspodele $F_X(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

(b) Kolika je verovatnoća da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena?

(c) Izračunati verovatnoće $P(X < 1)$, $P(X > 1.5)$ i $P(X = 1)$.

(d) Grafički predstaviti funkciju gustine $\varphi_X(x)$ i funkciju raspodele $F_X(x)$.

Rešenje:

(a) Direktnom primenom izraza za vrednost funkcije raspodele dobijamo:

$$F_X(1.2) = P(X < 1.2)^* = \int_{-\infty}^{1.2} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1.2} \frac{1}{2}\, x\, dx = 0 + \frac{1}{4}\, x^2 \Big|_0^{1.2} = 0.36.$$

Gornji integral se piše kao zbir integrala funkcije gustine nad intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, 1.2)$, zato što je funkcija gustine različito i definisana nad ovim intervalima. Analogno sledi:

$$F_X(-1) = P(X < -1) = \int_{-\infty}^{-1} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-1} 0\, dx = 0,$$

zato što je $\varphi_X(x) = 0$ za svako $x < -1$, kao i:

$$F_X(3.5) = \int_{-\infty}^{3.5} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{2} \varphi_X(x)\, dx + \int_{2}^{3.5} 0\, dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{2} x\, dx = 1.$$

*U literaturi se mogu naći sledeće definicije funkcije raspodele: 1° $F_X(x) = P(X \leq x)$ i 2° $F_X(x) = P(X < x)$. Na ovom kursu funkciju raspodele definišemo na drugi način, kao $F_X(x) = P(X < x)$.

Za pronalaženje funkcije raspodele u proizvoljnoj tački $x \in \mathbb{R}$, razmotrićemo sledeća tri slučaja:

(i) Za $x \leq 0$, važi da je:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\ dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0.$$

Primetiti da se integrali po t. Ovo je urađeno samo zato da se oznaka x ne bi koristila i za broj i za promenjivu. Ovde je x broj, i to broj iz intervala $(-\infty, 0]$.

(ii) Za neko fiksirano x iz intervala $(0, 2]$, dobija se:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\, t\, dt = 0 + \frac{1}{4}\, t^2\Big|_0^x = \frac{1}{4}x^2.$$

(iii) Ako je $x > 2$, dobijamo:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}\, t\, dt + \int_{2}^{x} 0\, dt = 0 + \frac{1}{4}\, t^2\Big|_0^2 + 0 = 1.$$

Konačno, iz (i), (ii) i (iii) dobija se izraz za funkciju raspodele:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

(b) Verovatnoća događaja da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena je verovatnoća da slučajna promenjiva X uzima vrednosti između 1 i 1.5. U skladu sa tim:
$$\mathsf{P}(1 \leq X \leq 1.5) = \int_{1}^{1.5} \frac{1}{2}\, x\, dx = \frac{1}{4}\, x^2\Big|_1^{1.5} = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125.$$

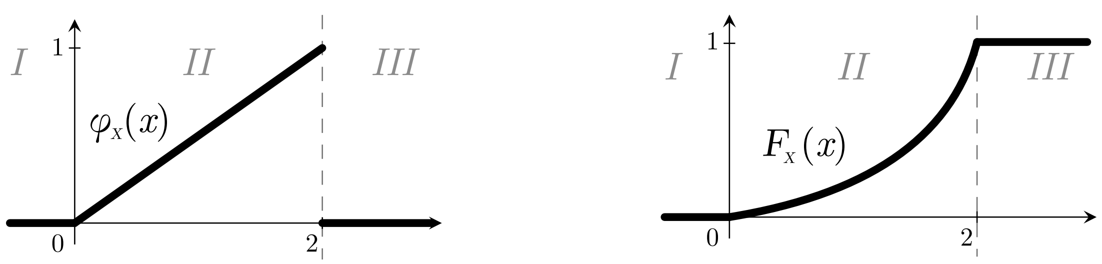
Primetimo da isti rezultat možemo dobiti i pomoću funkcije raspodele F_X određene pod (a):
$$\mathsf{P}(1 \leq X \leq 1.5) = \mathsf{P}(1 < X < 1.5) = F_X(1.5) - F_X(1) = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125.$$

(c) Direktno se dobija da je:
$$\mathsf{P}(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} \varphi_X(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\, x\, dx = 0 + \frac{1}{4}\, x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Traženu verovatnoću možemo izračunati i ovako: $\mathsf{P}(X < 1) = F_X(1) = \frac{1}{4}$.

Slično je $\mathsf{P}(X > 1.5) = \int_{1.5}^{2} \frac{1}{2}\, x\, dx = \frac{1}{4}\, x^2\Big|_{1.5}^{2} = 1 - 0.5625 = 0.4375$ ili, pomoću funkcije raspodele, $\mathsf{P}(X > 1.5) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 1.5) = 1 - \mathsf{P}(X < 1.5) = 1 - F_X(1.5) = 1 - \frac{1.5^2}{4} = 0.4375$. Na kraju, znamo da je $\mathsf{P}(X = 1) = 0$, na osnovu osobine gustine koja je zadovoljena za svaki realan broj.

(d) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:



Zadatak 2

Postavka: Na putu za posao, profesor prvo mora da „hvata" autobus blizu kuće koji ga odvozi do stajališta za drugi autobus koji ga vozi do posla. Slučajna promenljiva X predstavlja vreme čekanja oba autobusa (izraženo u minutama) i data je gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & 0 \leq x < 5, \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{25}x, & 5 \leq x \leq 10, \\ 0, & x \notin [0,10]. \end{cases}$$

(a) Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti" više od 6 minuta?

(b) Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti" između 3 i 8 minuta?

(c) Naći funkciju raspodele $F_X(x)$.

(d) Grafički predstaviti funkcije $\varphi_X(x)$ i $F_X(x)$, a zatim na graficima obeležiti $\mathsf{P}(X < 6)$.

Rešenje:

(a) Verovatnoća događaja da će na čekanje „izgubiti" više od 6 minuta je:

$$\mathsf{P}(X > 6) = \int_6^\infty \varphi_X(x)\,dx = \int_6^{10} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}x\right) dx = \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2\right)\Big|_6^{10} = 0.32.$$

(b) Uočimo da je gustina različito definisana na intervalima $[0,5)$ i $[5,10]$. Slično kao pod (a), dobijamo da je tražena verovatnoća:

$$\mathsf{P}(3 \leq X \leq 8) = \int_3^8 \varphi_X(x)\,dx = \int_3^5 \frac{1}{25}x\,dx + \int_5^8 \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}x\right) dx = \frac{x^2}{50}\Big|_3^5 + \left(\frac{2x}{5} - \frac{x^2}{50}\right)\Big|_5^8 = 0.74.$$

(c) Ako je $x \leq 0$, onda je za takvo x trivijalno $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0\,dt = 0$.

Ako je $x \in (0,5]$, tada je $F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0\,dt + \int_0^x \frac{1}{25}t\,dt = \frac{x^2}{50}$.

Ako je $x \in (5,10]$, tada je:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0\,dt + \int_0^5 \frac{1}{25}t\,dt + \int_5^x \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}t\right) dt = \frac{t^2}{50}\Big|_0^5 + \left(\frac{2t}{5} - \frac{t^2}{50}\right)\Big|_5^x = -1 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2.$$

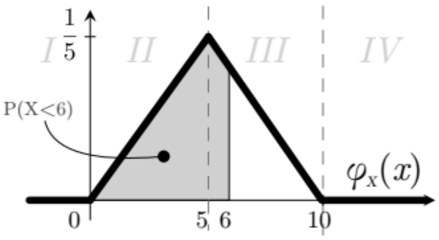
Konačno, ako je $x > 10$, onda je:

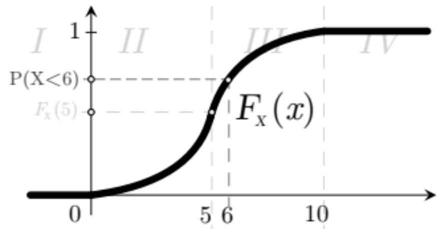
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0\,dt + \int_0^5 \frac{1}{25}t\,dt + \int_5^{10} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}t\right) dt + \int_{10}^x 0\,dt = 1.$$

Da sumiramo, funkcija raspodele je data sa:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{50}, & 0 < x \leq 5, \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1, & 5 < x \leq 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

(d) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





Obratimo posebnu pažnju na to da je tražena verovatnoća $\mathsf{P}(X < 6)$ na grafiku gustine predstavljena kao (zatamnjena) *površina*, a na grafiku funkcije raspodele kao *broj*, koji se očitava sa ordinate, jer je $\mathsf{P}(X \le 6) = \mathsf{P}(X < 6) = F_X(6)$.

Zadatak 3

Postavka: Neprekidna slučajna promenljiva data je funkcijom raspodele

$$F_X(x) = \begin{cases} b^3 - 1, & x \le 0, \\ \frac{x}{4}(1 + \ln\frac{4}{x}), & 0 < x \le 4, \\ a^2, & x > 4. \end{cases}$$

(a) Odrediti realne konstante a i b.

(b) Naći funkciju gustine za X.

(c) Izračunati $P(X \le 1)$ i $P(1 < X \le 3)$.

Rešenje:

(a) Ako je za neko $a, b \in \mathbb{R}$ funkcija $F_X(x)$ zaista funkcija raspodele neke slučajne promenjive X, onda ona mora zadovoljavati i osobine $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Važi da je $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x)$ jednako $b^3 - 1$, jer je to vrednost koju uzima $F_X(x)$ za bilo x koje je manje od 0, pa je zato $b = 1$. Takođe je $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x)$ jednako a^2, jer je to vrednost koju uzima $F_X(x)$ za bilo x veće od 4, pa zato mora biti $a = \pm 1$.

Dakle, jedino je funkcija za koju je $a = \pm 1$ i $b = 1$, tj. funkcija:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x}{4}(1 + \ln\frac{4}{x}), & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4, \end{cases}$$

zaista funkcija raspodele, te u nastavku nećemo više ni pominjati parametre a i b.

(b) Kako je sad već poznata funkcija raspodele F_X, gustinu ćemo naći kao njen izvod, u svim tačkama u kojima je gustina neprekidna. Za $x \in (0, 4]$ je:

$$\varphi_X(x) = \left(\frac{x}{4}\left(1 + \ln\frac{4}{x}\right)\right)' = \frac{1}{4}\left(1 + \ln\frac{4}{x}\right) + \frac{x}{4}\cdot\frac{x}{4}\cdot\left(-\frac{4}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \ln\frac{4}{x}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{x},$$

gde smo koristili izraz za izvod proizvoda i za složeni izvod. Budući da znamo da je izvod konstante jednak nuli, nije teško zaključiti da je konačno:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\ln\frac{4}{x}, & x \in (0, 4], \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

(c) $\mathsf{P}(X \leq 1) = \mathsf{P}(X < 1) = F_X(1) = \frac{1}{4}(1 + \ln 4)$.

Slično je $\mathsf{P}(1 < X \leq 3) = \mathsf{P}(1 < X < 3) = F_X(3) - F_X(1) = \frac{3}{4}\left(1 + \ln\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{4}(1 + \ln 4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln\frac{16}{27} \approx 0.37$.

Ove vrednosti su se mogle dobiti i integracijom gustine $\varphi_X(x)$.

Zadatak 4

Postavka: Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu, $X : \mathcal{U}(-1, 4)$.

(a) Izračunati $F_X(1.2)$, $\mathsf{P}(|X - 3| \leq 5)$ i $\mathsf{P}(1 < 2 - X < 10)$.

(b) Na grafiku funkcije gustine i funkcije raspodele predstaviti $\mathsf{P}(1 < X \leq 2)$.

Rešenje:

(a) Znamo kako izgleda funkcija gustine i raspodele slučajne promenjive koja ima $X : \mathcal{U}(a, b)$ raspodelu. Ovde je konkretno $a = -1$ i $b = 4$, pa je zato:

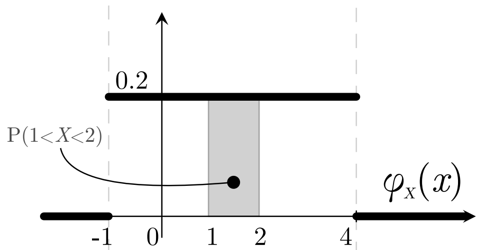
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-1, 4), \\ \frac{1}{5}, & x \in (-1, 4), \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{x+1}{5}, & -1 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

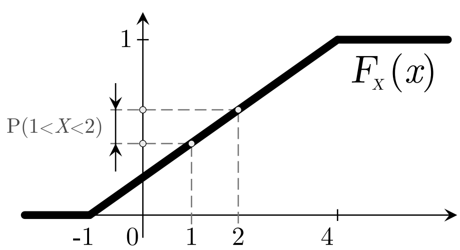
Tražene verovatnoće je onda lako izračunati:

$F_X(1.2) = \frac{1.2+1}{5} = \frac{2.2}{5} = 0.44$,
$\mathsf{P}(|X - 3| \leq 5) = \mathsf{P}(-5 \leq X - 3 \leq 5) = \mathsf{P}(-2 \leq X \leq 8) = \mathsf{P}(-2 < X < 8) = F_X(8) - F_X(-2) = 1 - 0 = 1$,
$\mathsf{P}(1 < 2 - X < 10) = \mathsf{P}(-10 < X - 2 < -1) = \mathsf{P}(-8 < X < 1) = F_X(1) - F_X(-8) = \frac{2}{5}$.

Sve ove verovatnoće su se mogle odrediti i integracijom funkcije gustine, kao u prethodnim zadacima.

(b) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





Obratimo posebnu pažnju na to da je tražena verovatnoća $\mathsf{P}(1 < X < 2)$ na grafiku gustine predstavljena kao (zatamnjena) *površina*, a na grafiku funkcije raspodele kao *rastojanje*, koje se očitava sa ordinate, jer je $\mathsf{P}(1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(1)$.

Zadatak 5

Postavka: Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu, $X : \mathcal{E}(2)$.

(a) Odrediti funkciju raspodele i gustinu slučajne promenljive X.

(b) Izračunati verovatnoće $\mathsf{P}(-1 < X \leq 2)$, $\mathsf{P}(X > 1.5)$, $\mathsf{P}(|X| \leq 3)$. Naći $F_X(2)$.

(c) Na grafiku funkcije gustine i funkcije raspodele predstaviti $P(X > 1.5)$.

Rešenje:

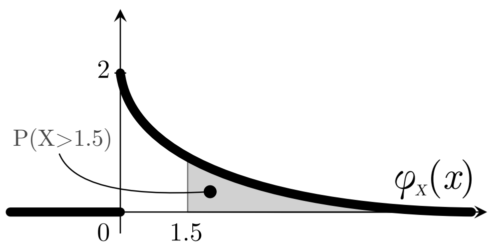
(a) Znamo kako izgleda funkcija gustine i raspodele slučajne promenjive koja ima $X : \mathcal{E}(a)$ raspodelu. Ovde je $a = 2$, pa je konkretno:

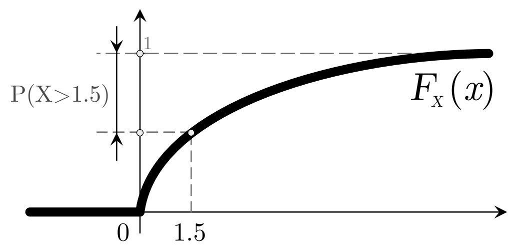
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2e^{-2x}, & x > 0, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

(b) Tražene verovatnoće se mogu lako izračunati:

$\mathsf{P}(-1 < X \leq 2) = \mathsf{P}(-1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(-1) = (1 - e^{-4}) - 0 = 1 - e^{-4} \approx 0.982$,
$\mathsf{P}(X > 1.5) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 1.5) = 1 - \mathsf{P}(X < 1.5) = 1 - F_X(1.5) = 1 - (1 - e^{-3}) = e^{-3} \approx 0.05$,
$\mathsf{P}(|X| \leq 3) = \mathsf{P}(-3 \leq X \leq 3) = \mathsf{P}(-3 < X < 3) = F_X(3) - F_X(-3) = (1 - e^{-6}) - 0 = 1 - e^{-6} \approx 0.998$,
$F_X(2) = 1 - e^{-4} \approx 0.982$.

(c) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





Obratimo posebnu pažnju na to da je tražena verovatnoća $\mathsf{P}(X > 1.5)$ na grafiku gustine predstavljena kao (zatamnjena) *površina*, a na grafiku funkcije raspodele kao *rastojanje*, koja se očitava sa ordinate, jer je $\mathsf{P}(X > 1.5) = 1 - F_X(1.5)$.

Zadatak 6

Postavka: Slučajna promenljiva X ima normalnu $X : \mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu.

(a) Izračunati verovatnoće $P(1.34 < X \leq 2.16)$, $P(X < 2.17)$, $P(-1.34 < X \leq 2.16)$ i $P(X > 1.48)$;

(b) Odrediti x tako da je $P(X < x) = 0.834$, $P(X > x) = 0.23425$ i $P(X < x) = 0.1231$.

Rešenje:

Kao i svaka slučajna promenljiva neprekidnog tipa, i slučajna promenljiva sa normalnom (Gausovom) $\mathcal{N}(m, \sigma)$ raspodelom data je funkcijom gustine i funkcijom raspodele U slučaju kada je $m = 0$ i $\sigma = 1$ u pitanju je standardizovana normalna $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodela, čiju funkciju raspodele označavamo sa $\Phi(x)$. Vrednosti funkcije rapodele $\Phi(x)$ date su u statističkoj tablici normalne $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodele, koju ćemo koristiti prilikom rešavanja ovog i narednog zadataka (tablica se može naći na sajtu predmeta). Takođe se koriste i sledeće osobine funkcije $\Phi(x)$:

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$

x	$\ldots$	0.07	$\ldots$
$\vdots$		$\downarrow$	
2.1	$\rightarrow$	0.985	
$\vdots$			

Dakle, $\Phi(2.17) = 0.985$.

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ kao i $P(|Z| < x) = 2\Phi(x) - 1$.

a) $P(1.34 < X \leq 2.16) = P(1.34 < X < 2.16) = \Phi(2.16) - \Phi(1.34) = 0.9846 - 0.9099 = 0.0747$

$P(X < 2.17) = \Phi(2.17) = 0.985$

$P(-1.34 < X \leq 2.16) = P(-1.34 < X < 2.16) = \Phi(2.16) - \Phi(-1.34) = \Phi(2.16) - (1 - \Phi(1.34) = 0.9846 - (1 - 0.9099) = 0.9846 - 0.0901 = 0.8945$

$P(X > 1.48) = 1 - P(X \leq 1.48) = 1 - P(X < 1.48) = 1 - \Phi(1.48) = 1 - 0.9306 = 0.0694$.

b) Tražimo x tako da je $P(X < x) = 0.834$. Znamo da je $P(X < x) = \Phi(x) = 0.834$, pa je odatle $x = \Phi^{-1}(0.834) = 0.97$.

Tražimo x tako da je $P(X > x) = 0.23425$. Znamo da je $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - P(X < x) = 1 - \Phi(x) = 0.23425$. Odatle je $\Phi(x) = 1 - 0.23425 = 0.76575$, a $x = \Phi^{-1}(0.76575) = 0.725$.

Tražimo x tako da je $P(X < x) = 0.1231$. Znamo da je $P(X < x) = \Phi(x) = 0.1231$, ali 0.1231 ne možemo da nađemo u tablici pa koristimo osobinu $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Odatle je $\Phi(-x) = 1 - 0.1231 = 0.8769$, pa je $-x = 1.16$ i konačno $x = -1.16$.

Zadatak 7

Postavka: Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(80, 10)$. Izračunati verovatnoće $P(X \leq 100)$, $P(70 \leq X)$, $P(65 \leq X \leq 100)$ i $P(|X - 80| \leq 10)$.

Rešenje:

Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu sa parametrima m i σ, tada slučajna promenljiva $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ ima normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu, tj.

$$X : \mathcal{N}(80,10) \;\Rightarrow\; X^* = \frac{X-80}{10} : \mathcal{N}(0,1).$$

- $P(X \leq 100) = P(\frac{X-80}{10} \leq \frac{100-80}{10}) = P(X^* \leq 2) = \Phi(2) = 0.9773.$
- $P(70 \leq X) = P(\frac{70-80}{10} \leq \frac{X-80}{10}) = P(-1 \leq X^*) = 1 - P(X^* < -1) =$
  $= 1 - \Phi(-1) = 1 - (1 - \Phi(1)) = 0.8413.$
- $P(65 \leq X \leq 100) = P(\frac{65-80}{10} \leq \frac{X-80}{10} \leq \frac{100-80}{10}) = P(-1.5 \leq X^* \leq 2) =$
  $= \Phi(2) - \Phi(-1.5) = 0.9773 + 0.9332 - 1 = 0.9105.$
- $P(|X-80| \leq 10) = P(-10 \leq X - 80 \leq 10) = P(-\frac{10}{10} \leq \frac{X-80}{10} \leq \frac{10}{10}) =$
  $= P(-1 \leq X^* \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826.$

Zadatak 8

Postavka: Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} a(x-1), & x \in [1,4], \\ 0, & x \notin [1,4]. \end{cases}$$

Odrediti konstantu a i naći raspodelu slučajne promenljive $Y = 3X - 1$.

Rešenje:

Konstantu a određujemo tako da je zadovoljen uslov $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\, dx = 1$. Naime:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\, dx = a \int\limits_{1}^{4} (x-1)\, dx = a\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^4 = a\left(8 - 4 - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{9}{2}a,$$

što je jednako jedinici samo ako je $a = \dfrac{2}{9}$. U nastavku zato nećemo nigde pisati a, nego $\dfrac{2}{9}$.

Funkciju raspodele slučajne promenljive X je lako izračunati (kad znamo koliko je a):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^2}{9}, & 1 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Funkciju F_Y računamo preko F_X:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(3X - 1 < y) = \mathsf{P}(X < \tfrac{y+1}{3}) = F_X\left(\tfrac{y+1}{3}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{y+1}{3} \leq 1 \\ \frac{\left(\frac{y+1}{3} - 1\right)^2}{9}, & 1 < \frac{y+1}{3} \leq 4 \\ 1, & \frac{y+1}{3} > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leq 2, \\ \frac{(y-2)^2}{81}, & 2 < y \leq 11, \\ 1, & y > 11. \end{cases} \end{aligned}$$

Zadatak 9

Postavka: Slučajna promenljiva X ima uniformnu $X : \mathcal{U}(0,1)$ raspodelu. Naći raspodelu slučajnih promenljivih:

(a) $Y = |X - \frac{1}{3}|$;

(b) $Z = -\ln X$;

(c) $U = max\{X, \frac{1}{2}\}$. Ispitati da li je U neprekidna slučajna promenljiva.

Rešenje: Gustina i funkcija raspodele slučajne promenljive X glase

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in (0,1) \\ 0 & , \quad x \notin (0,1) \end{cases},$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ x & , \quad x \in (0,1] \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}.$$

(a) $Y = |X - \frac{1}{3}|$

(*) $F_Y(y) = P(Y < y) = P(|X - \frac{1}{3}| < y)$
Za $y \leq 0$ događaj $(|X - \frac{1}{3}| < y)$ je nemoguć događaj, tako da je $F_Y(y) = P(\emptyset) = 0$.
Za $y > 0$ iz (*) dalje dobijamo

$$F_Y(y) = P(-y < X - \frac{1}{3} < y) = P\left(\frac{1}{3} - y < X < \frac{1}{3} + y\right) = F_X\left(\frac{1}{3} + y\right) - F_X\left(\frac{1}{3} - y\right).(**)$$

$$F_X\left(\tfrac{1}{3} + y\right) = \begin{cases} 0 & , \quad y + \frac{1}{3} \leq 0 \\ y + \frac{1}{3} & , \quad 0 < y + \frac{1}{3} \leq 1 \\ 1 & , \quad y + \frac{1}{3} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad y \leq -\frac{1}{3} \\ y + \frac{1}{3} & , \quad -\frac{1}{3} < y \leq \frac{2}{3} \\ 1 & , \quad y > \frac{2}{3} \end{cases},$$

$$F_X\left(\tfrac{1}{3} - y\right) = \begin{cases} 0 & , \quad \frac{1}{3} - y \leq 0 \\ \frac{1}{3} - y & , \quad 0 < \frac{1}{3} - y \leq 1 \\ 1 & , \quad \frac{1}{3} - y > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad y > \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - y & , \quad -\frac{2}{3} < y \leq \frac{1}{3} \\ 1 & , \quad y \leq -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Dalje, iz (**) dobijamo

$$F_Y(y) = \begin{cases} (y + \frac{1}{3}) - (\frac{1}{3} - y) & , \quad 0 < y \leq \frac{1}{3} \\ (y + \frac{1}{3}) - 0 & , \quad \frac{1}{3} < y \leq \frac{2}{3} \\ 1 - 0 & , \quad y > \frac{2}{3} \end{cases} = \begin{cases} 2y & , \quad 0 < y \leq \frac{1}{3} \\ y + \frac{1}{3} & , \quad \frac{1}{3} < y \leq \frac{2}{3} \\ 1 & , \quad y > \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Spajanjem rezultata za $y \leq 0$ i $y > 0$ dobijamo konačno rešenje:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \leq 0 \\ 2y & , \quad 0 < y \leq \frac{1}{3} \\ y + \frac{1}{3} & , \quad \frac{1}{3} < y \leq \frac{2}{3} \\ 1 & , \quad y > \frac{2}{3} \end{cases}.$$

(b) $Z = -\ln X$

$$F_Z(z) = P(-\ln X < z) = P(\ln X > -z) = 1 - P(\ln X \leq -z) = 1 - P(X \leq e^{-z}) =$$

$$1 - P(X < e^{-z}) = 1 - F_X(e^{-z}) = 1 - \begin{cases} 0 & , \quad e^{-z} \leq 0 \\ e^{-z} & , \quad 0 < e^{-z} \leq 1 \\ 1 & , \quad e^{-z} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-z} & , \quad z > 0 \\ 0 & , \quad z \leq 0 \end{cases},$$

$\varphi_Z(z) = F_Z(z)' = \begin{cases} e^{-z} & , \quad z > 0 \\ 0 & , \quad z \leq 0 \end{cases}$ pa možemo zaključiti da slučajna promenljiva Z ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(1)$ raspodelu.

(c) $U = max\{X, \frac{1}{2}\}$

$F_U(u) = P(U < u) = P(max\{X, \frac{1}{2}\} < u) = P(X < u, \frac{1}{2} < u) = P(X < u)P(\frac{1}{2} < u) = F_X(u)\, P(\frac{1}{2} < u)$.

1° Za $u \leq \frac{1}{2}$ $P(\frac{1}{2} < u) = 0$ odakle sledi da je $F_U(u) = F_X(u) \cdot 0 = 0$;

2° Za $u > \frac{1}{2}$ $P(\frac{1}{2} < u) = 1$ odakle sledi da je $F_U(u) = F_X(u) \cdot 1 = \begin{cases} u & , \ \frac{1}{2} < u \leq 1 \\ 1 & , \ u > 1 \end{cases}$.

Spajanjem rezultata iz 1° i 2° dobijamo:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & , \ u \leq \frac{1}{2} \\ u & , \ \frac{1}{2} < u \leq 1 \\ 1 & , \ u > 1 \end{cases} \quad \text{i} \quad F_U(u)' = \begin{cases} 1 & , \ u \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & , \ u \notin (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

Neprekidna slučajna promenljiva je definisana funkcijom gustine $\varphi_X(x)$ koja ima osobinu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\, dx = 1.$$

Kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_U(u)'\, du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 du = \frac{1}{2} \neq 1,$$

zaključujemo da U nije neprekidna slučajna promenljiva.

Zadatak 10

Postavka: Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(a)$. Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = [X]$ gde $[X]$ označava funkciju "najveće celo od X".

Rešenje:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ae^{-ax} & x > 0 \end{cases}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-ax} & x > 0 \end{cases}.$$

$Y = [X]$ je diskretna slučajna promenljiva i $\mathcal{R}_Y = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Za svako $k \in \mathcal{R}_Y$ važi

$\mathsf{P}(Y = k) = \mathsf{P}([X] = k) = \mathsf{P}(k \leq X < k + 1) = \int\limits_{k}^{k+1} \varphi_X(x)\, dx =$

$= a \int\limits_{k}^{k+1} e^{-ax} dx = F_X(k + 1) - F_X(k) = 1 - e^{-a(k+1)} - 1 + e^{-ak} =$

$= e^{-ak}(1 - e^{-a})$.

Zadatak 11

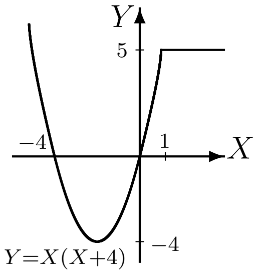
Postavka: Slučajna promenljiva X ima gustinu $\varphi_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Naći raspodelu slučajne promenljive

$$Y = \begin{cases} X(X+4) & , \ X \leq 1 \\ 5 & , \ X > 1 \end{cases}.$$

Rešenje:

Gustina i funkcija raspodele slučajne promenljive X glase

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & , \ x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & , \ x \geq 0 \end{cases},$$



$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & , \ x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & , \ x > 0 \end{cases},$$

jer za $x \leq 0$ imamo

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \tfrac{1}{2}e^{t}dt = \tfrac{1}{2}e^{x},$$

a za $x > 0$ je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \tfrac{1}{2}e^{t}dt + \int_{0}^{x} \tfrac{1}{2}e^{-t}dt = 1 - \tfrac{1}{2}e^{-x}.$$

Raspodela slučajne promenljive X se grana u tački $x = 0$. Na osnovu definicije slučajne promenljive Y ($Y = -4$ je minimalna vrednost, za $X > 1$ je $Y = 5$, i za $X = 0$ je $Y = 0$) nalazimo funkciju raspodele slučajne promenljive Y na sledeći način (vidi sliku):

- ▷ Za $y \leq -4$ je $F_Y(y) = 0$.
- ▷ Za $y \in (-4, 0]$ je ($x^2 + 4x = y$ je za $x_1 = -2 - \sqrt{4+y}$ i za $x_2 = -2 + \sqrt{4+y}$, pri čemu je $x_1 < 0$ i $x_2 \leq 0$):
  $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(x_1 < X < x_2) =$
  $= \mathsf{P}\left(-2 - \sqrt{4+y} < X < -2 + \sqrt{4+y}\right) =$
  $= F_X\left(-2 + \sqrt{4+y}\right) - F_X\left(-2 - \sqrt{4+y}\right) =$
  $= \frac{1}{2}\left(e^{-2+\sqrt{4+y}} - e^{-2-\sqrt{4+y}}\right).$
- ▷ Za $y \in (0, 5]$ je ($x^2 + 4x = y$ je za $x_1 = -2 - \sqrt{4+y}$ i za $x_2 = -2 + \sqrt{4+y}$, pri čemu je $x_1 < 0$ i $0 < x_2 \leq 1$):
  $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(x_1 < X < x_2) =$
  $= \mathsf{P}\left(-2 - \sqrt{4+y} < X < -2 + \sqrt{4+y}\right) =$
  $= F_X\left(-2 + \sqrt{4+y}\right) - F_X\left(-2 - \sqrt{4+y}\right) =$
  $= 1 - \frac{1}{2}e^{2-\sqrt{4+y}} - \frac{1}{2}e^{-2-\sqrt{4+y}}.$
- ▷ Za $y \in (5, \infty)$ je ($x^2 + 4x = y \ \wedge \ x < 1$ je za $x_1 = -2 - \sqrt{4+y}$, pri čemu je $x_1 < 0$):
  $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(x_1 < X) = 1 - F_X\left(-2 - \sqrt{4+y}\right) =$
  $= 1 - \frac{1}{2}e^{-2-\sqrt{4+y}}.$

Za vežbu: Ako slučajna promenljiva X ima Košijevu raspodelu i ako je slučajna promenljiva Y definisana na isti način kao u ovom zadatku, naći raspodelu slučajne promenljive Y. Gustina slučajne promenljive koja ima Košijevu raspodelu je data sa:

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}$$

Višedimenzionalna diskretna slučajna promenljiva i njene transformacije.

Zadatak 1

Postavka: Novčić se baca tri puta. Ukoliko sva tri puta padne ista strana izvodi se još jedno bacanje.

(a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive (slučajnog vektora) (X, Y) gde je X broj palih grbova, Y broj bacanja.

(b) Naći marginalne raspodele.

(c) Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.

(d) Naći raspodelu slučajne promenljive $X|Y = 3$.

(e) Naći raspodelu za $Z = XY$, $U = 2X - Y$, $V = max\{X, Y\}$, $W = max\{Y, \frac{X}{2}\}$.

Rešenje:

(a) Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj grbova, a slučajna promenljiva Y broj bacanja. Tada je skup vrednosti slučajne promenljive X, $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dok je skup vrednosti za Y, $R_Y = \{3, 4\}$. U nastavku tražimo zakon raspodele slučajne promenljive (X, Y).

$P(X = 0, Y = 3) = 0$
$P(X = 1, Y = 3) = P(GPP + PGP + PPG) = P(GPP) + P(PGP) + P(PPG) = \binom{3}{1}\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$
$P(X = 2, Y = 3) = P(GGP + GPG + PGG) = P(GGP) + P(GPG) + P(PGG) = \binom{3}{2}(\frac{1}{2})^2\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
$P(X = 3, Y = 3) = 0$
$P(X = 4, Y = 3) = 0$

$P(X = 0, Y = 4) = P(PPPP) = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$
$P(X = 1, Y = 4) = P(PPPG) = (\frac{1}{2})^3\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
$P(X = 2, Y = 4) = 0$
$P(X = 3, Y = 4) = P(GGGP) = (\frac{1}{2})^3\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$P(X=4, Y=4) = P(GGGG) = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$

Zakon raspodele predstavljamo tablicom:

$X \backslash Y$	3	4	$P(X=i)$
0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{6}{16}$
3	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$P(Y=j)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(b) Marginalne raspodele, tj. raspodele pojedinačnih slučajnih promenljivih X i Y, čitamo iz tablice. Marginalne verovatnoće za slučajnu promenljivu X čitamo iz poslednje kolone, dok za Y čitamo iz poslednje vrste. Dakle:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$Y : \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(c) Slučajne promenljive X i Y su nezavisne ako i samo ako je:

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j), \quad \text{za svako } \ i \in R_X, j \in R_Y.$$

$P(X=3) \cdot P(Y=3) = \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} \neq 0 = P(X=3, Y=3) \Rightarrow$ promenljive X i Y nisu nezavisne.

(d) Skup mogućih vrednosti slučajne promenljive $X|Y=3$ je isti kao skup vrednosti slučajne promenljive X, tj. $R_{X|Y=3} \subseteq \{0,1,2,3,4\}$. Odgovarajuće vrovatnoće dobijamo na sledeći način:

$P(X=k|Y=3) = \frac{P(X=k,Y=3)}{P(Y=3)} = \frac{P(X=k,Y=3)}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \cdot P(X=k, Y=3), \forall k \in R_X.$

$P(X=0|Y=3) = \frac{4}{3} \cdot P(X=0, Y=3) = \frac{4}{3} \cdot 0 = 0,$

$P(X=1|Y=3) = \frac{4}{3} \cdot P(X=1, Y=3) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$

$P(X=2|Y=3) = \frac{4}{3} \cdot P(X=2, Y=3) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$

$P(X=3|Y=3) = \frac{4}{3} \cdot P(X=3, Y=3) = \frac{4}{3} \cdot 0 = 0,$

$P(X=4|Y=3) = \frac{4}{3} \cdot P(X=4, Y=3) = \frac{4}{3} \cdot 0 = 0.$

Dakle, zakon raspodele je:

$X|Y=3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, odnosno $X|Y=3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(e) – Slučajna promenljiva Z je definisana sa $Z = XY$. Kako je $R_X = \{0,1,2,3,4\}$ i $R_Y = \{3,4\}$, možemo zaključiti da je skup vrednosti slučajne promenljive Z, $R_Z \subseteq \{0,3,4,6,8,9,12,16\}$. Zakon raspodele tražimo u nastavku.

$P(Z=0) = P(X=0, Y=3) + P(X=0, Y=4) = 0 + \frac{1}{16} = \frac{1}{16},$

$P(Z=3) = P(X=1, Y=3) = \frac{3}{8}$,
$P(Z=4) = P(X=1, Y=4) = \frac{1}{16}$,
$P(Z=6) = P(X=2, Y=3) = \frac{3}{8}$,
$P(Z=8) = P(X=2, Y=4) = 0$,
$P(Z=9) = P(X=3, Y=3) = 0$,
$P(Z=12) = P(X=3, Y=4) + P(X=4, Y=3) = \frac{1}{16} + 0 = \frac{1}{16}$,
$P(Z=16) = P(X=4, Y=4) = \frac{1}{16}$.
Dakle, $Z : \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 6 & 12 & 16 \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

– Slučajna promenljiva U je definisana sa $U = 2X - Y$. Onda je $R_U \subseteq \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Računamo:

$P(U=-4) = P(X=0, Y=4) = \frac{1}{16}$,
$P(U=-3) = P(X=0, Y=3) = 0$,
$P(U=-2) = P(X=1, Y=4) = \frac{1}{16}$,
$P(U=-1) = P(X=1, Y=3) = \frac{3}{8}$,
$P(U=0) = P(X=2, Y=4) = 0$,
$P(U=1) = P(X=2, Y=3) = \frac{3}{8}$,
$P(U=2) = P(X=3, Y=4) = \frac{1}{16}$,
$P(U=3) = P(X=3, Y=3) = 0$,
$P(U=4) = P(X=4, Y=4) = \frac{1}{16}$,
$P(U=5) = P(X=4, Y=3) = 0$.
Prema tome, imamo $U : \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

– Slučajna promenljiva V je definisana sa $V = max\{X, Y\}$, pa je $R_V \subseteq \{3, 4\}$.

$P(V=3) = P(X=0, Y=3) + P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=3) +$
$+ P(X=3, Y=3) = \frac{3}{4}$,
$P(V=4) = P(X=0, Y=4) + P(X=1, Y=4) + P(X=2, Y=4) +$
$+ P(X=3, Y=4) + P(X=4, Y=4) + P(X=4, Y=3) = \frac{1}{4}$.
Zakon raspodele za V je $V : \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

– Slučajna promenljiva W je definisana sa $W = max\{Y, \frac{X}{2}\}$. Zakon raspodele slučajne promenljive $\frac{X}{2}$ je $\frac{X}{2} : \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.
Na osnovu toga može se zaključiti da je $R_W \subseteq \{3, 4\}$.

$P(W=3) = P(\frac{X}{2}=0, Y=3) + P(\frac{X}{2}=\frac{1}{2}, Y=3) + P(\frac{X}{2}=1, Y=3) +$
$+ P(\frac{X}{2}=\frac{3}{2}, Y=3) + P(\frac{X}{2}=2, Y=3) = P(X=0, Y=3) + P(X=1, Y=3) +$
$+ P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=3) + P(X=4, Y=3) = \frac{3}{4}$,

$P(W=4) = P(\frac{X}{2}=0, Y=4) + P(\frac{X}{2}=\frac{1}{2}, Y=4) + P(\frac{X}{2}=1, Y=4) +$
$+ P(\frac{X}{2}=\frac{3}{2}, Y=4) + P(\frac{X}{2}=2, Y=4) = P(X=0, Y=4) + P(X=1, Y=4) +$
$+ P(X=2, Y=4) + P(X=3, Y=4) + P(X=4, Y=4) = \frac{1}{4}$.
Zakon raspodele za W je $W : \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Zadatak 2

Postavka: U kutiji se nalaze 3 zelene i 3 crvene kuglice. Igrač na slučajan način bira 3 kuglice iz kutije, a zatim baca onoliko kockica koliko je zelenih kuglica izvukao. Neka slučajna promenljiva X označava broj izvučenih zelenih kuglica, a slučajna promenljiva Y broj pojavljivanja 6 - ice na bačenim kockicama.

(a) Naći raspodelu dvodimenzionalnog slučajnog vektora (X, Y).

(b) Naći zakon raspodele slučajne promenljive $Y|X = 2$.

Rešenje:
Raspodelu slučajne promenljive X možemo dobiti računajući odgovarajuće verovatnoće primenom klasične (Laplasove) definicije verovatnoće: za svako $k \in R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ je

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k}\cdot\binom{3}{3-k}}{\binom{6}{3}} = \frac{\binom{3}{k}\cdot\binom{3}{3-k}}{20}, \text{ dakle } X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}.$$

Naravno, skup mogućih vrednosti slučajne promenljive Y je takođe $R_Y = \{0, 1, 2, 3\}$.

(a) $R_{X,Y} = R_X \times R_Y = \{(i, j) \in \{0, 1, 2, 3\}\}$.

Zajednički zakon raspodele vektora (X, Y) možemo naći na sledeći način:

$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j|X = i), \quad (i, j) \in R_{X,Y}$.

Za $j > i$ je očigledno:

$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j|X = i) = P(X = i) \cdot 0 = 0$,

i dalje je:

$P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0|X = 0) = \frac{1}{20} \cdot 1 = \frac{1}{20}$,

$P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1)P(Y = 0|X = 1) = \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{8}$,

$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1|X = 1) = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{40}$,

$P(X = 2, Y = 0) = P(X = 2)P(Y = 0|X = 2) = \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{16}$,

$P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2)P(Y = 1|X = 2) = \frac{9}{20} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{8}$,

$P(X = 2, Y = 2) = P(X = 2)P(Y = 2|X = 2) = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{80}$,

$P(X = 3, Y = 0) = P(X = 3)P(Y = 0|X = 3) = \frac{1}{20} \cdot (\frac{5}{6})^3 = \frac{25}{864}$,

$P(X = 3, Y = 1) = P(X = 3)P(Y = 1|X = 3) = \frac{1}{20} \cdot 3 \cdot (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{288}$,

$P(X = 3, Y = 2) = P(X = 3)P(Y = 2|X = 3) = \frac{1}{20} \cdot 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{288}$,

$P(X = 3, Y = 3) = P(X = 3)P(Y = 3|X = 3) = \frac{1}{20} \cdot (\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{4320}$.

Dakle:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$P(X = i)$
0	$\frac{1}{20}$	0	0	0	$\frac{1}{20}$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{40}$	0	0	$\frac{9}{20}$
2	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{80}$	0	$\frac{9}{20}$
3	$\frac{25}{864}$	$\frac{5}{288}$	$\frac{1}{288}$	$\frac{1}{4320}$	$\frac{1}{20}$

(b) Zakon raspodele slučajne promenljive $Y|X = 2$ nalazimo na sledeći način:

$P(Y = j|X = 2) = \frac{P(X=2,Y=j)}{P(X=2)} = \frac{20}{9} \cdot P(X = 2, Y = j), \quad j \in R_Y.$

Dakle:

$P(Y = 0|X = 2) = \frac{20}{9} \cdot P(X = 2, Y = 0) = \frac{20}{9} \cdot \frac{5}{16} = \frac{25}{36},$

$P(Y = 1|X = 2) = \frac{20}{9} \cdot P(X = 2, Y = 1) = \frac{20}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{18},$

$P(Y = 2|X = 2) = \frac{20}{9} \cdot P(X = 2, Y = 2) = \frac{20}{9} \cdot \frac{1}{80} = \frac{1}{36},$

$P(Y = 3|X = 2) = \frac{20}{9} \cdot P(X = 2, Y = 3) = \frac{20}{9} \cdot 0 = 0.$

Prema tome, $Y|X = 2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{25}{36} & \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$

Zadatak 3

Postavka: Numerisana homogena kocka se baca 2 puta. Slučajna promenljiva X predstavlja broj pojavljivanja parnog broja u 2 bacanja, a slučajna promenljiva Y broj pojavljivanja broja deljivog sa 3 u 2 bacanja. Naći zakon raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y). Ispitati da li su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

Rešenje:
Traženi zakon raspodele tražimo na sledeći način:

$P(X = 0, Y = 0) = P(\langle 1, 1\rangle + \langle 1, 5\rangle + \langle 5, 1\rangle + \langle 5, 5\rangle) = \frac{1}{9},$

$P(X = 0, Y = 1) = P(\langle 1, 3\rangle + \langle 3, 1\rangle + \langle 3, 5\rangle + \langle 5, 3\rangle) = \frac{1}{9},$

$P(X = 0, Y = 2) = P(\langle 3, 3\rangle)) = \frac{1}{36},$

$P(X = 1, Y = 0) = P(\langle(1, 2\rangle + \langle 2, 1\rangle + \langle 1, 4\rangle + \langle 4, 1\rangle + \langle 2, 5\rangle + \langle 5, 2\rangle + \langle 4, 5\rangle + \langle 5, 4\rangle) = \frac{2}{9},$

$P(X = 1, Y = 1) = P(\langle 1, 6\rangle + \langle 2, 3\rangle + \langle 3, 2\rangle + \langle 3, 4\rangle, +\langle 4, 3\rangle + \langle 5, 6\rangle + \langle 6, 1\rangle + \langle 6, 5\rangle) = \frac{2}{9},$

$P(X = 1, Y = 2) = P(\langle 3, 6\rangle + \langle 6, 3\rangle) = \frac{1}{18},$

$P(X = 2, Y = 0) = P(\langle 2, 2\rangle + \langle 2, 4\rangle + \langle 4, 2\rangle + \langle 4, 4\rangle) = \frac{1}{9},$

$P(X = 2, Y = 1) = P(\langle 2, 6\rangle + \langle 4, 6\rangle + \langle 6, 2\rangle + \langle 6, 4\rangle) = \frac{1}{9},$

$P(X = 2, Y = 2) = P(\langle 6, 6\rangle) = \frac{1}{36}.$

Dakle, zakon raspodele je:

X \ Y	0	1	2	$P(X = i)$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$
$P(Y = j)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

Direktnom proverom na osnovu dobijenih verovatnoća dobijamo da važi:
$\forall i, j \in \{0, 1, 2\}, \quad P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j),$
što znači da su slučajne promenljive X i Y nezavisne.

Zadatak 4

Postavka: Iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ na slučajan način se bira broj x, a zatim se iz skupa $\{x, ..., 4\}$ na slučajan način bira broj y.

(a) Naći raspodelu slučajna promenljive (X, Y), gde je X izabrani broj x, a Y izabrani broj y.

(b) Naći raspodelu slučajne promenljive (U, V), gde je $U = X + Y$, $V = Y - X$.

REŠENJE:

(a) Skupovi vrednosti za slučajne promenljive X i Y su $R_X = \{1, 2, 3, 4\}$, i $R_Y = \{1, 2, 3, 4\}$.
$P(X = i, Y = j) = 0$, za $j < i$ (kako broj y biramo iz skupa $\{x, ..., 4\}$ važi $y \geq x$).
$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j|X = i) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4-(i-1)}$, za $j \geq i$.
Prema tome, zakon raspodele slučajne promenljive (X, Y) je sledeći:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$
3	0	0	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$
4	0	0	0	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1}$

(b) $U = X + Y \Rightarrow R_U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$V = Y - X \Rightarrow R_V = \{0, 1, 2, 3\}$.
$P(U = u, V = v) = P(X + Y = u, Y - X = v) = P(X = \frac{u-v}{2}, Y = \frac{u+v}{2}) = *$

1. Ako je $X > Y$, tj. $\frac{u-v}{2} > \frac{u+v}{2}$, $P(U = u, V = v) = 0$ $(Y \geq X)$.
2. Ako su u i v različite parnosti, onda su $u + v$ i $u - v$ neparni brojevi, što znači da $\frac{u-v}{2}$ i $\frac{u+v}{2}$ nisu celi brojevi, ali to se ne poklapa sa R_X i R_Y (sve vrednosti u R_X i R_Y su celobrojne). Prema tome, $P(U = u, V = v) = 0$.
3. Ako su u i v iste parnosti i $1 \leq \frac{u-v}{2} \leq 4$ i $\frac{u-v}{2} \leq \frac{u+v}{2} \leq 4$, onda je:

   $P(U = u, V = v) = * = P(X = \frac{u-v}{2})P(Y = \frac{u+v}{2}|X = \frac{u-v}{2}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4 - \frac{u-v}{2} + 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{8-u+v+2} = \frac{1}{20-2u+2v}$.

Dakle, $P(U = u, V = v) = \begin{cases} \frac{1}{20-2u+2v}, & u \text{ i } v \text{ iste parnosti i } 1 \leq \frac{u-v}{2} \leq 4 \text{ i } \frac{u-v}{2} \leq \frac{u+v}{2} \leq 4 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

Zadatak 5

POSTAVKA: Nezavisne slučajne promenljive X i Y imaju Poasonove raspodele $X : \mathcal{P}(a)$, $Y : \mathcal{P}(b)$, $(a, b > 0)$. Naći raspodele slučajnih promenljivih:

(a) $Z = X + Y$.

(b) $X|\{X + Y = n\}$.

REŠENJE:
$X : \mathcal{P}(a)$, $Y : \mathcal{P}(b)$, $R_X = R_Y = \{0, 1, 2, \dots\}$, $P(X = j) = \frac{a^j}{j!}e^{-a}$, $P(Y = j) = \frac{b^j}{j!}e^{-b}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

(a) $Z = X + Y$, $R_Z = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Za $k \in R_Z$ je:

$$P(Z = k) = P(\sum_{i=0}^{k}(X = i, Y = k-i)) \overset{[1]}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k-i) \overset{[2]}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k-i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{a^i}{i!}e^{-a} \cdot \frac{b^{k-i}}{(k-i)!}e^{-b} = e^{-(a+b)} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i! \cdot (k-i)!} a^i b^{k-i} = e^{-(a+b)} \cdot \frac{1}{k!}(a+b)^k.$$

Dakle, slučajna promenljiva Z ima Poasonovu raspodelu $\mathcal{P}(a + b)$.

(b) Za $k \in R_{X|\{X+Y=n\}} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ važi:

$$P(X = k|X+Y = n) = \frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X = k, Y = n-k)}{P(X + Y = n)} \overset{[2]}{=} \frac{P(X = k)P(Y = n-k)}{P(X + Y = n)} =$$

$$= \frac{\frac{a^k}{k!}e^{-a} \cdot \frac{b^{n-k}}{n-k!}e^{-b}}{\frac{(a+b)^n}{n!}e^{-(a+b)}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{a}{a+b})^k(\frac{b}{a+b})^{n-k}.$$

Pri tome je $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$, pa slučajna promenljiva $X|\{X + Y = n\}$ ima binomnu $\mathcal{B}(n, \frac{a}{a+b})$ raspodelu.

[1] - Koristimo disjunktnost događaja koji čine uniju.
[2] - Koristimo nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.

Nejednakost Čebiševa i centralne granične teoreme.

Zadatak 1

Postavka: Elektrostanica opslužuje mrežu sa 10000 sijalica. Verovatnoća uključenja svake od sijalica uveče iznosi 0.9. Izračunati verovatnoću da apsolutno odstupanje broja uključenih sijalica od matematičkog očekivanja bude najviše 200 koristeći

(a) nejednakost Čebiševa,

(b) teoremu Moavr - Laplasa.

Rešenje:
Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj uključenih sijalica ima binomnu raspodelu.
$X : \mathcal{B}(10000, 0.9)$, pri čemu je $\mathsf{E}(X) = 10000 \cdot 0.9 = 9000$ i $\mathsf{D}(X) = 10000 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 900$.

(a) Na osnovu nejednakosti Čebiševa $\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{D}(X)}{\varepsilon^2}$ (za sve $\varepsilon > 0$) dobijamo

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| \leq 200) = 1 - \mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| > 200) =$$
$$= 1 - \mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| \geq 201) \geq 1 - \frac{\mathsf{D}(X)}{201^2} \approx 0.9777.$$

(b) Primenom teoreme Moavr-Laplasa dobijamo

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| \leq 200) = \mathsf{P}(|X - \mathsf{E}(X)| < 201) =$$
$$= \mathsf{P}(-201 < X - \mathsf{E}(X) < 201) = \mathsf{P}\left(\frac{-201}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} < \frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} < \frac{201}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}}\right) =$$
$$= \mathsf{P}\left(-\frac{201}{\sqrt{900}} < \frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathsf{D}(X)}} < \frac{201}{\sqrt{900}}\right) = \mathsf{P}(-6.7 < X^* < 6.7) =$$
$$\approx \phi(6.7) - (1 - \phi(6.7)) = 2\phi(6.7) - 1 \approx 1.$$

Zadatak 2

Postavka: Poznato je da se u prometu nalazi 20% belih automobila. Beleži se boja 1000 automobila koji sukcesivno prođu kroz raskrsnicu. Oceniti verovatnoću da relativna učestanost prolaska belih automobila odstupa od odgovarajuće verovatnoće za manje od 0.02:

(a) pomoću nejednakosti Čebiševa,

(b) pomoću teoreme Moavr - Laplasa.

Rešenje:
Slučajna promenljiva S_{1000} koja predstavlja broj belih od ukupno 1000 automobila koji prođu kroz raskrsnicu ima binomnu $\mathcal{B}\left(1000, \frac{1}{5}\right)$ raspodelu. Pri tome je $\mathsf{E}\left(S_{1000}\right) = 1000 \cdot \frac{1}{5} = 200$ i $\mathsf{D}\left(S_{1000}\right) = 1000 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 160$. Ispitujemo odstupanje $\left|\frac{S_{1000}}{1000} - \frac{1}{5}\right|$ relativne učestanosti $\frac{S_{1000}}{1000}$ broja belih automobila od verovatnoće $\frac{1}{5}$ prolaska belog automobila:

(a) $\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}}{1000} - \frac{1}{5}\right| < 0.02\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}}{1000} - \frac{1}{5}\right| \geq 0.02\right) =$

$= 1 - \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000} - 1000 \cdot \frac{1}{5}}{1000}\right| \geq 0.02\right) =$

$= 1 - \mathsf{P}\left(\left|S_{1000} - 1000 \cdot \frac{1}{5}\right| \geq 1000 \cdot 0.02\right) \overset{[1]}{\geq} 1 - \frac{1000 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{(1000 \cdot 0.02)^2} =$

$= 1 - \frac{160}{400} = \frac{240}{400} = \frac{3}{5}.$

[1] - Primena nejednakosti Čebiševa:

$\mathsf{P}\left(\left|S_{1000} - \mathsf{E}\left(S_{1000}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathsf{D}(S_{1000})}{\varepsilon^2}.$

(b) $\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000}}{1000} - \frac{1}{5}\right| < 0.02\right) = \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000} - 1000 \cdot \frac{1}{5}}{1000}\right| < 0.02\right) =$

$= \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000} - 1000 \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}} \sqrt{\frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{1000}}\right| < 0.02\right) =$

$= \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000} - 1000 \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}}\right| < 0.02 \sqrt{\frac{1000}{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}}\right) \approx \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{1000} - 200}{\sqrt{160}}\right| < 1.58114\right) =$

$= \mathsf{P}\left(-1.58114 < \frac{S_{1000} - 200}{\sqrt{160}} < 1.58114\right) \approx$

$\overset{[2]}{\approx} \phi\left(1.58114\right) - \phi\left(-1.58114\right) = 2\phi\left(1.58114\right) - 1 \approx 2\phi\left(1.58\right) - 1 \approx$

$\approx 2 \cdot 0.9429 - 1 \approx 0.8858.$

[2] - Primena Moavr - Laplasove teoreme:

$\mathsf{P}\left(a < \frac{S_{1000} - \mathsf{E}(S_{1000})}{\mathsf{D}(S_{1000})} < b\right) \approx \phi\left(b\right) - \phi\left(a\right).$

Zadatak 3

Postavka: Prosečno 80% vozača koristi sigurnosni pojas. Saobraćajna policija je u toku dana zaustavila 500 vozača.

(a) Kolika je verovatnoća da više od 100 vozača ne koristi pojas?

(b) Kolika je verovatnoća da bar 300 vozača koristi pojas?

(c) Kolika je verovatnoća da je broj vozača koji ne koriste pojas između 100 i 150?

Rešenje:
Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj vozača koji koriste sigurnosni pojas ima binomnu raspodelu sa parametrima $n = 500$ i $p = 0.8$. Kako je $np = 400$, $\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = \sqrt{80} = 8.944$ i $X : \mathcal{B}(500, 0.8)$ sledi $X^* = \frac{X - 400}{8.944} : \mathcal{N}(0, 1)$.

(a) $\mathsf{P}(500 - X > 100) = \mathsf{P}(X < 400) = \mathsf{P}(X^* < \frac{400-400}{8.944}) = \mathsf{P}(X^* < 0) = \Phi(0) = 0.5.$

(b) $\mathsf{P}(X \geq 300) = 1 - \mathsf{P}(X < 300) = 1 - \mathsf{P}(X^* \leq \frac{300-400}{8.944}) = 1 - \mathsf{P}(X^* \leq -11.18) =$
$= 1 - \Phi(-11.18) = \Phi(11.18) \approx 1.$

(c) $\mathsf{P}(100 \leq 500 - X \leq 150) = \mathsf{P}(350 < X < 400) = \mathsf{P}(\frac{350-400}{8.944} < X^* < \frac{400-400}{8.944}) =$
$= \mathsf{P}(-5.59 < X < 0) = \Phi(0) - \Phi(-5.59) \approx 0.5.$

Zadatak 4

Postavka: Slučajna promenljiva X predstavlja broj automobila koji prolaze kroz neku posmatranu raskrsnicu tokom jednog minuta ima (u svakoj minuti) Poasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda = 30$.

(a) Naći verovatnoću da tokom 20 minuta kroz raskrsnicu prođe najmanje 200 automobila.

(b) Odrediti maksimalnu vrednost broja m takvog da sa verovatnoćom većom od 0.9 broj automobila koji za 20 minuta prolaze kroz raskrsnicu bude bar m.

Rešenje:
Znamo: $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathsf{P}(X = i) = \frac{30^i}{i!}e^{-30}$, $i \in \mathcal{R}_X$, kao i $\mathsf{E}(X) = 30$, $\mathsf{D}(X) = 30$.
Posmatrajmo slučajne promenljive X_k koje predstavljaju broj automobila koji prolaze kroz raskrsnicu tokom k - tog posmatranog minuta. Slučajne promenljive X_k su međusobno nezavisne i imaju iste raspodele (samim tim i matematička očekivanja i disperzije) kao slučajna promenljiva X. Slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ predstavlja broj automobila koji prolaze kroz raskrsnicu tokom n minuta, pri čemu za nju važi $\mathsf{E}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{E}(X_k) = 30n$ i $\mathsf{D}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{D}(X_k) = 30n$.
Posmatrajmo i normalizovanu slučajnu promenljivu $S_n^* = \frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} = \frac{S_n - 30n}{\sqrt{30n}}$.

(a) Primenom centralne granične teoreme na S_{20}^* dobijamo

$\mathsf{P}(S_{20} \geq 200) = 1 - \mathsf{P}(S_{20} < 200) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{20} - 600}{\sqrt{600}} < \frac{200-600}{\sqrt{600}}\right) =$

$= 1 - \mathsf{P}\left(S_{20}^* < \frac{-400}{10\sqrt{6}}\right) \approx 1 - \mathsf{P}(S_{20}^* < -16.33) \approx 1 - \phi(-16.33) =$

$= 1 - 1 + \phi(16.33) \approx 1.$

(b) Tražimo maksimalno $m \in \mathbb{N}$ za koje važi $\mathsf{P}(S_{20} \geq m) > 0.9$? Imamo

$\mathsf{P}(S_{20} \geq m) = 1 - \mathsf{P}(S_{20} < m) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{20} - 600}{\sqrt{600}} < \frac{m-600}{\sqrt{600}}\right) =$

$= 1 - \mathsf{P}\left(S_{20}^* < \frac{m-600}{10\sqrt{6}}\right) \approx 1 - \phi\left(\frac{m-600}{10\sqrt{6}}\right).$

Dakle:

$$\mathsf{P}(S_{20} \geq m) > 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \phi\left(\frac{m-600}{10\sqrt{6}}\right) \succ 0.9 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{m-600}{10\sqrt{6}}\right) \prec 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m-600}{10\sqrt{6}} \prec \phi^{-1}(0.1) \approx -1.28 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad m \prec 568.647$$

pa je traženo rešenje $m = 568$.

Zadatak 5

Postavka: Količina praška u jednoj kesi ima očekivanu vrednost $a = 3.6\ kg$ sa standardnim odstupanjem $\sigma = 0.05\ kg$. Količina praška u jednoj kesi u sanduku je nezavisna od količine praška u ostalim kesama. Koliko najviše može biti kesa u sanduku pa da ukupna količina praška bude manja od $400\ kg$ sa verovatnoćom 0.9?

Rešenje:
Neka je X_i količina praška u i - toj kesi (jedinica merenja je kilogram), a $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ ukupna količina praška koji se nalazi u sanduku, upakovana u n kesa ($n \in \mathbb{N}$). Slučajna promenljiva X_i ima numeričke karakteristike $\mathsf{E}(X_i) = 3.6$ i $\mathsf{D}(X_i) = 0.05^2 = 0.0025$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Odatle dobijamo:

$$\mathsf{E}(S_n) = \mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = 3.6n,$$
$$\mathsf{D}(S_n) = \mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = 0.0025n$$

(slučajne promenljive X_i su nezavisne).

Treba po n rešiti jednačinu $\mathsf{P}(S_n < 400) = 0.9$.

$$\mathsf{P}(S_n < 400) = 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(\frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} < \frac{400 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) = 0.9 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{400 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) \approx 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{400 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}} \approx \phi^{-1}(0.9) \approx 1.28 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{400 - 3.6n}{0.05\sqrt{n}} \approx 1.28 \quad \Leftrightarrow \quad 3.6n + 0.064\sqrt{n} - 400 \approx 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (3.6t^2 + 0.064t - 400 \approx 0 \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad ((t \approx -10.532 \ \vee \ t \approx 10.5498) \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \approx 10.5498 \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 10.5498^2 \approx 111.2983,$$

što znači da se sa najviše 111 kesa u sanduku nalazi manje od $400kg$ sa verovatnoćom 0.9.

Zadatak 6

Postavka: U jednoj igri igrač osvaja 50 poena sa verovatnoćom 0.5, 10 poena sa verovatnoćom 0.3 i -100 poena sa verovatnoćom 0.2 (dakle, gubi 100 poena sa verovatnoćom 0.2).

(a) Ako je igrač odigrao 100 igara, koliko iznosi verovatnoća da je osvojio bar 900 poena?

(b) Koliko igara treba da odigra, pa da sa verovatnoćom 0.95 osvoji bar 1000 poena?

Rešenje:
Neka je X_i slučajna promenljiva koja predstavlja broj poena koji igrač dobija (ili gubi) u i - toj igri. Slučajne promenljive X_i su nezavisne i imaju isti zakon raspodele i numeričke karakteristike:

$$X_i : \begin{pmatrix} -100 & 10 & 50 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{E}(X_i) = -100 \cdot 0.2 + 10 \cdot 0.3 + 50 \cdot 0.5 = 8,$$
$$\mathsf{E}(X_i^2) = (-100)^2 \cdot 0.2 + 10^2 \cdot 0.3 + 50^2 \cdot 0.5 = 3280,$$

$\mathsf{D}(X_i) = \mathsf{E}(X_i^2) - \mathsf{E}(X_i) = 3280 - 8^2 = 3216.$

Slučajna promenljiva $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ predstavlja ukupan broj dobijenih ili izgubljenih poena tokom odigranih n igara. Pri tome je:

$\mathsf{E}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{E}(X_i) = 8n$ i

$\mathsf{D}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{D}(X_i) = 3216n$

(zbog nezavisnosti slučajnih promenljivih X_i). Na osnovu centralne granične teoreme ([$*$]), slučajna promenljiva $S_n^* = \frac{S_n - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}$ ima (za "dovoljno" veliko n) približno $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu.

(a) $\mathsf{P}(S_{100} \geq 900) = 1 - \mathsf{P}(S_{100} < 900) =$

$$= 1 - \mathsf{P}\left(\frac{S_{100} - \mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}} < \frac{900 - \mathsf{E}(S_{100})}{\sqrt{\mathsf{D}(S_{100})}}\right) = 1 - \mathsf{P}\left(S_{100}^* < \frac{900-800}{\sqrt{321600}}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \mathsf{P}(S_{100}^* < 0.18) \overset{[*]}{\approx} 1 - \phi(0.18) \approx 1 - 0.5676 \approx 0.4324.$$

(b) Rešavamo po n jednačinu $\mathsf{P}(S_n \geq 1000) = 0.95$:

$$\mathsf{P}(S_n \geq 1000) = 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \mathsf{P}(S_n < 1000) = 0.95 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(S_n < 1000) = 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(S_n^* < \frac{1000 - \mathsf{E}(S_n)}{\sqrt{\mathsf{D}(S_n)}}\right) = 0.05 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathsf{P}\left(S_n^* < \frac{1000-8n}{\sqrt{3216n}}\right) = 0.05 \quad \overset{[*]}{\Leftrightarrow} \quad \phi\left(\frac{1000-8n}{\sqrt{3216n}}\right) \approx 0.05 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1000-8n}{\sqrt{3216n}} \approx \phi^{-1}(0.05) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1000-8n}{\sqrt{3216n}} \approx -1.65 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 1000 - 8n \approx -1.65\sqrt{3216n} \quad \Leftrightarrow \quad 8n - 93.57\sqrt{n} - 1000 \approx 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (8t^2 - 93.57t - 1000 \approx 0 \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad ((t \approx -6.76935 \ \vee \ t \approx 18.4656) \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (t \approx 18.4656 \ \wedge \ t = \sqrt{n}) \quad \Leftrightarrow \quad n \approx 18.4656^2 \approx 340.978.$$

Dakle, treba da odigra 341 igru.