

Predispitne obaveze 1 – 20 poena

1. [3 poena] Napisati klasičnu (Laplasovu) definiciju verovatnoće.  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$   
 $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = 1/n$   
 $P(A) = \frac{k}{n}$  ,  $k$  - broj elemenata koji su u  $A$  ,  $n = \text{card}(\Omega)$

Kockica za "Ne ljuti se čoveče" baca se jednom. Ispisati skup elementarnih događaja  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Izračunati verovatnoću da prilikom bacanja kockice padne neparan broj tačkica  $P(A) = \frac{3}{6}$

Ako je prilikom bacanja kockice pao neparan broj tačkica izračunati verovatnoću da je taj broj manji od 5.

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2/6}{3/6} = 2/3$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$AB = \{1, 3\}$$

2. [3 poena] Napisati za koje slučajne promenljive važe navedene jednakosti

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{uvek / za sve gde}$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad \text{neopisnupate (upisnupate se u nezavisnupate)}$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) \quad \text{neopisnupate (upisnupate se u nezavisnupate)}$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)]$$

Koristeći osobine matematičkog očekivanja i disperzije napisati jednakosti koje važe

$$E(1 - X) = E(1) - E(X) = 1 - E(X)$$

$$D(1 - X) = D(-X) = (-1)^2 D(X) = D(X)$$

$$D(X \pm c) = D(X)$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 p(x_i) \quad \text{(za diskretan ili neprekidan slučaj)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx$$

3. [3 poena] Verovatnoća da dete jede sladoled je 0.7, a verovatnoća da jede čokoladu je 0.6. Verovatnoća da jede bar jednu poslasticu je 0.9.  $P(S) = 0.7$   $P(\check{C}) = 0.6$   $P(S \cup \check{C}) = 0.9$

Izračunati verovatnoću da će dete jesti obe poslastice.

$$P(S \cap \check{C}) = ?$$

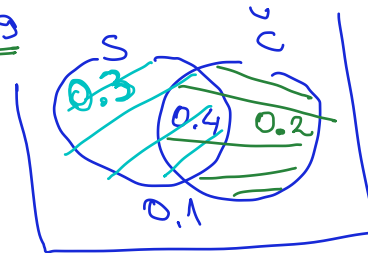
$$P(S \cup \check{C}) = P(S) + P(\check{C}) - P(S \cap \check{C})$$

$$0.9 = 0.7 + 0.6 - P(S \cap \check{C}) \Rightarrow P(S \cap \check{C}) = 0.4$$

Izračunati verovatnoću da će dete jesti tačno jednu poslasticu. = A



$$P(A) = 0.3 + 0.2 = 0.5$$



Ako je dete jelo tačno jednu poslasticu izračunati verovatnoću da je jelo sladoled.

$$P(S|A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

AS = samo sladoled



4. [1 poen] Slučajna promenljiva  $X$  ima binomnu  $\mathcal{B}(30, \frac{1}{3})$  raspodelu. Napisati standardizovanu (normalizovanu) slučajnu promenljivu i njeno matematičko očekivanje i disperziju.

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - 10}{\sqrt{\frac{20}{3}}}$$

$$E(X^*) = 0$$

$$D(X^*) = 1$$

$$E(X) = n \cdot p = 30 \cdot \frac{1}{3} = 10$$

$$D(X) = npq = 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 10 \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

5. [5 poen] Slučajna promenljiva  $X$  data je gustinom raspodele verovatnoća  $\varphi_X(x) = \begin{cases} ax^3, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases}$

Odrediti konstantu  $a$ . (Izračunati integral!)

$$1 = \int_0^1 ax^3 dx = a \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{a}{4} (1-0) = \frac{a}{4} \Rightarrow a=4$$

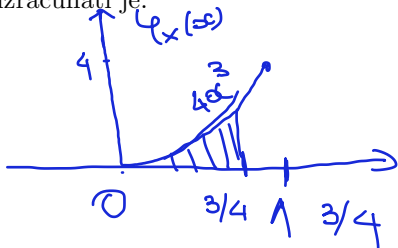
Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive  $X$ .

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} x \leq 0: 0 \\ x \in (0, 1]: \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 4t^3 dt = 4 \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_0^x = x^4 \\ x > 1: 1 \end{cases}$$

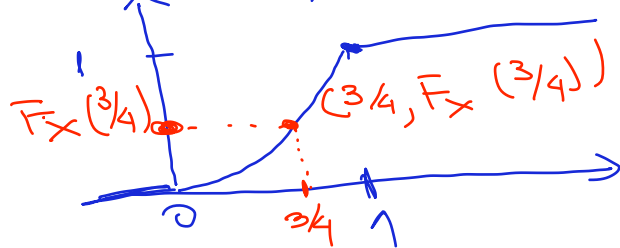
$$P(X = \frac{1}{2}) = 0$$

Na grafiku funkcije gustine i na grafiku funkcije raspodele slučajne promenljive  $X$  predstaviti verovatnoću  $P(X < \frac{3}{4})$  i izračunati je.



$$P(X < 3/4) = \int_0^{3/4} 4x^3 dx$$

$$P(X < 3/4) = F_X(3/4) = (3/4)^4$$



6. [6 poena] Slučajna promenljiva  $(X, Y)$  data je zakonom raspodele verovatnoća

$X/Y$	0	1	2	
1	0.1	0.3	0.4	0.4
2	0.2	0.3	0.1	0.6
				0.1

Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive  $X$ .

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih  $X$  i  $Y$ .

$$P(X=1, Y=2) \stackrel{?}{=} P(X=1)P(Y=2) \quad P(X=1, Y=2) = 0.4 \cdot 0.1 = 0.04 \neq 0.4 \cdot 0.6 = 0.24 \Rightarrow X \text{ i } Y \text{ nisu nezavisne}$$

Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive  $Y|X=2$ .

$$Y|X=2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$P(Y=0|X=2) = \frac{P(X=2, Y=0)}{P(X=2)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{2}{6}$$

$$P(Y=1|X=2) = \frac{P(X=2, Y=1)}{P(X=2)} = \frac{0.3}{0.6} = \frac{3}{6}$$

Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive  $Y|X=2$ .

$$F_{Y|X=2}(y) = P(Y \leq y | X=2)$$

$$1) y \in (-\infty, 0] \quad F_{Y|X=2}(y) = 0$$

$$2) y \in (0, 1] \quad F_{Y|X=2}(y) = \frac{2}{6}$$

$$3) y \in (1, 2] \quad F_{Y|X=2}(y) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$4) y \in (2, \infty) \quad F_{Y|X=2}(y) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

Izračunati matematičko očekivanje slučajne promenljive  $Y|X=2$ .

$$E(Y|X=2) = 0 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

**Deo završnog ispita 1 – 40 poena**

1. [10 poena] Na stolu se nalaze dve kutije. U prvoj kutiji su dve kuglice zelene boje i tri kuglice crvene boje, a u drugoj kutiji jedna kuglica zelene boje i dve kuglice crvene boje. Peca na slučajan način bira jednu kuglicu iz prve kutije i prebacuje je u drugu kutiju. Nakon prebacivanja kuglice, iz druge kutije Peca na slučajan način bira **odjednom** dve kuglice. Izračunati verovatnoću da će Peca izvući kuglice različitih boja. Ako je Peca iz druge kutije izvukao kuglice istih boja izračunati verovatnoću da je iz prve u drugu kutiju prebacio kuglicu zelene boje.
2. [10 poena] Novčić se baca tri puta i ako sva tri puta padne ista strana izvodi se još jedno bacanje novčića. Slučajna promenljiva  $X$  predstavlja broj palih pisama, a slučajna promenljiva  $Y$  broj izvedenih bacanja novčića.
  - a) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive  $(X, Y)$ .
  - b) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive  $X$  i njenu funkciju raspodele.
  - c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive  $Z = \min\{X, Y\}$ .
3. [10 poena] Slučajna promenljiva  $X$  je data funkcijom gustine  $\varphi_X(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ .
  - a) Izračunati konstantu  $a$ .
  - b) Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive  $X$ .
  - c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive  $Y = \max\{X, \frac{1}{2}\}$ . Da li je  $Y$  slučajna promenljiva neprekidnog tipa?
4. [10 poena] Neka su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne promenljive, pri čemu  $X$  ima eksponencijalnu  $\mathcal{E}(2)$  raspodelu, a  $Y$  uniformnu  $\mathcal{U}(1, 3)$  raspodelu. Odrediti raspodelu (funkciju gustine ili funkciju raspodele) slučajne promenljive  $Z = X - Y$ .