Rekurentne Relacije - Zadaci

Marko Gordić - IN 37/2023

Rekurentne Relacije - Homogene

Rekurentne relacije predstavljaju niz definisan na osnovu prethodnih članova. Homogene linearne rekurentne relacije oblika:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

imaju opšte rešenje koje se nalazi rešavanjem karakteristične jednačine.

Postupak rešavanja

Razmatramo relaciju:

$$2f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} - f_{n-3}, \quad n \geq 3,$$

sa početnim uslovima $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 3$.

Korak 1: Prebacivanje u standardni oblik

Napisati relaciju u standardnom obliku:

$$2f_n - f_{n-1} - 2f_{n-2} + f_{n-3} = 0.$$

Korak 2: Karakteristična jednačina

Pretpostavimo da $f_n = r^n$ i zamenimo u relaciju:

$$2r^n - r^{n-1} - 2r^{n-2} + r^{n-3} = 0.$$

Deljenjem sa r^{n-3}, dobijamo karakterističnu jednačinu:

$$2r^3 - r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Korak 3: Faktorisanje karakteristične jednačine

Koristeći Hornerovu šemu, tražimo korene. Pretpostavimo da je $r = 1$ koren:

$$2(1)^3 - (1)^2 - 2(1) + 1 = 0.$$

Zato je $r = 1$ zaista koren. Hornerova šema za polinom $2r^3 - r^2 - 2r + 1$:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ & 2 & 1 & -1 & \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Rezultat deli polinom na:

$$2r^3 - r^2 - 2r + 1 = (r-1)(2r^2 + r - 1).$$

Korak 4: Dalje faktorisanje kvadratnog polinoma

Rešavamo $2r^2 + r - 1 = 0$ koristeći kvadratnu formulu:

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}.$$

Koreni su:

$$r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = -1.$$

Korak 5: Opšte rešenje

Opšte rešenje je kombinacija oblika:

$$f_n = A \cdot 1^n + B \cdot (-1)^n + C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Korak 6: Odredjivanje konstanti

Koristimo početne uslove $f_0 = 0,\ f_1 = 0,\ f_2 = 3$:

$$A + B + C = 0,$$

$$A - B + \frac{C}{2} = 0,$$

$$A + B + \frac{C}{4} = 3.$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo:

$$A = 3,\ B = 1,\ C = -4.$$

Konačno rešenje

Rešenje rekurentne relacije je:

$$f_n = 3 \cdot 1^n + 1 \cdot (-1)^n - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Specijalni Slučajevi: Dupli i Višestruki Koreni

Ako karakteristična jednačina ima višestruki koren r, tada je opšte rešenje oblika:

$$f_n = (A + Bn + Cn^2 + \cdots) \cdot r^n,$$

gde se faktori n dodaju zbog višestrukosti korena.

Primer:

Razmotrite relaciju:

$$f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2},$$

sa početnim uslovima $f_0 = 1,\ f_1 = 2.$

Karakteristična jednačina:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \implies (r-1)^2 = 0.$$

Rešenje je:

$$f_n = (A + Bn) \cdot 1^n = A + Bn.$$

Korišćenjem početnih uslova:

$$f_0 = A = 1, \quad f_1 = A + B = 2 \implies B = 1.$$

Konačno rešenje je:

$$f_n = 1 + n.$$

Hornerova Šema

Hornerova šema je metoda koja omogućava brzo faktorisanje polinoma i testiranje potencijalnih korena. Ključna ideja je da se polinom podeli na linijski faktor $(r - c)$, gde je c kandidat za koren, koristeći samo osnovne aritmetičke operacije.

Postupak primene Hornerove šeme

Razmotrimo korake detaljno:

1. **Zapišite koeficijente polinoma.** Napišite koeficijente polinoma $P(r)$ uredno poredane prema silaznim stepenima promenljive. Ako neki stepen nedostaje, zamenite ga nulom.

2. **Izaberite kandidat za koren c.** Kandidate za korene tražimo medju deliocima slobodnog člana polinoma. Na primer, za $2r^3 - r^2 - 2r + 1$, slobodni član je 1, pa su kandidati $c = \pm 1$.

3. **Izvedite Hornerovu šemu.** Koristite c da podelite polinom. Rezultat deli $P(r)$ na proizvod $(r - c)$ i nižestepeni polinom.

   (a) Prvi koeficijent se samo prepiše.

   (b) Pomnožite c sa prethodno dobijenim rezultatom i dodajte sledećem koeficijentu.

   (c) Ponavljajte postupak dok ne dobijete ostatak. Ako je ostatak 0, c je koren polinoma.

Detaljan primer: Faktorisanje $2r^3 - r^2 - 2r + 1$

Razmotrimo polinom:

$$P(r) = 2r^3 - r^2 - 2r + 1.$$

Koraci su sledeći:

1. **Koeficijenti polinoma:** Polinom ima koeficijente:

$$[2, -1, -2, 1].$$

2. **Izbor kandidata za koren:** Koristimo teoremu o racionalnim korenima koja kaže da, za polinom oblika:

$$P(r) = a_k r^k + a_{k-1} r^{k-1} + \cdots + a_1 r + a_0,$$

racionalni koreni moraju biti oblika:

$$r = \frac{p}{q},$$

gde:

- p je delilac slobodnog člana (a_0),
- q je delilac glavnog koeficijenta (a_k).

Za polinom:

$$P(r) = 2r^3 - r^2 - 2r + 1,$$

slobodni član je $a_0 = 1$, a glavni koeficijent je $a_k = 2$.
Delitelji slobodnog člana (1) su:

$$p = \pm 1.$$

Delitelji glavnog koeficijenta (2) su:

$$q = \pm 1, \pm 2.$$

Mogući racionalni koreni su svi razlomci oblika $\frac{p}{q}$, odnosno:

$$r = \pm 1, \pm \frac{1}{2}.$$

Ovi kandidati se koriste za testiranje u polinomu $P(r)$ pomoću Hornerove šeme ili direktne zamene.

3. **Testiranje kandidata $r = 1$:** Postavljamo Hornerovu šemu:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ & & 2 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Objašnjenje šeme:

- Prvi koeficijent 2 se prepisuje direktno.
- Množimo $2 \cdot 1 = 2$ i dodajemo sledećem koeficijentu: $-1 + 2 = 1$.
- Množimo $1 \cdot 1 = 1$ i dodajemo sledećem koeficijentu: $-2 + 1 = -1$.
- Množimo $-1 \cdot 1 = -1$ i dodajemo sledećem koeficijentu: $1 - 1 = 0$.

Pošto je ostatak 0, $r = 1$ je koren polinoma.

4. **Delioci polinoma:** Rezultujući nižestepeni polinom je:

$$2r^2 + r - 1.$$

Dakle:

$$P(r) = (r - 1)(2r^2 + r - 1).$$

Dalje faktorisanje

Za polinom $2r^2 + r - 1$, koristimo kvadratnu formulu:

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}.$$

Koreni su:

$$r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = -1.$$

Konačno faktorisanje polinoma je:

$$P(r) = (r-1)(2r^2 + r - 1) = (r-1)(r - \frac{1}{2})(r+1).$$

Oslobadjanje stepena logaritmom

Rekurentne relacije koje uključuju potencije članova niza mogu se pojednostaviti uvodjenjem smene sa logaritmom. Ovaj metod omogućava da se složeni izrazi sa stepenima pretvore u linearne ili kvadratne rekurentne relacije.

Primer:

Razmotrimo rekurentnu relaciju:

$$a_{n+2} = a_{n+1} a_n^6, \quad n \geq 0,$$

sa početnim uslovima:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3.$$

Korak 1: Uzimanje logaritma

Da bismo se oslobodili stepena u relaciji, uzimamo logaritam (osnove 3) sa obe strane:

$$\log_3 a_{n+2} = \log_3 a_{n+1} + 6 \log_3 a_n.$$

Kako odlučiti koji logaritam uzeti?

Prilikom rešavanja rekurentnih relacija koje uključuju potencije ili proizvode, izbor baze logaritma zavisi od strukture zadatka i cilja pojednostavljivanja. Evo ključnih principa:

1. **Osnova logaritma treba odgovarati strukturi zadatka.** Ako u zadatku postoje izrazi sa potencijama koje uključuju odredjenu bazu (npr. 3^n), logično je uzeti logaritam sa istom bazom. Na primer, za izraz $a_{n+2} = a_{n+1} a_n^6$, ako su početni uslovi dati u terminima potencija broja 3 (npr. $a_1 = 3$), najpraktičnije je uzeti logaritam osnove 3, jer će to eliminisati potenciju i omogućiti rad sa sabiranjem umesto množenja.

2. **Cilj pojednostavljivanja izraza.** Cilj uzimanja logaritma je eliminacija stepena ili složenih operacija. Za rekurentnu relaciju:

   $$a_{n+2} = a_{n+1} a_n^6,$$

   logaritam (bilo koje osnove) transformiše proizvod u sabiranje:

   $$\log_b(a_{n+2}) = \log_b(a_{n+1}) + 6 \log_b(a_n).$$

   Ako su početni uslovi a_0 i a_1 potencije baze 3 (kao u ovom primeru), izbor logaritma osnove 3 dodatno pojednostavljuje račun:

   $$\log_3 3 = 1, \quad \log_3 1 = 0.$$

   To omogućava da početni uslovi za transformisanu rekurentnu relaciju budu jednostavni brojevi, što olakšava dalje rešavanje.

Zaključak:

Za datu rekurentnu relaciju:

$$a_{n+2} = a_{n+1} a_n^6,$$

korisno je uzeti logaritam osnove 3 jer:

- Eliminiše potencije i pretvara operaciju množenja u sabiranje.
- Početni uslovi ($a_0 = 1$, $a_1 = 3$) su lako izraženi u terminima osnove 3, što pojednostavljuje računanje.
- Održava konzistentnost sa prirodom zadatka, gde su svi članovi niza povezani sa potencijama 3.

Korak 2: Uvodjenje smene

Uvodimo smenu:

$$b_n = \log_3 a_n,$$

čime dobijamo novu rekurentnu relaciju za niz b_n:

$$b_{n+2} = b_{n+1} + 6b_n,$$

sa početnim uslovima:

$$b_0 = \log_3 a_0 = \log_3 1 = 0, \quad b_1 = \log_3 a_1 = \log_3 3 = 1.$$

Korak 3: Rešavanje rekurentne relacije

Rekurentna relacija za b_n je homogena linearna i može se rešiti korišćenjem karakteristične jednačine:

$$t^2 - t - 6 = 0.$$

Rešavanjem kvadratne jednačine:

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

dobijamo:

$$t_1 = 3, \quad t_2 = -2.$$

Opšte rešenje rekurentne relacije za b_n je:

$$b_n = A(-2)^n + B \cdot 3^n.$$

Korak 4: Odredjivanje konstanti

Koristimo početne uslove $b_0 = 0$ i $b_1 = 1$ za odredjivanje konstanti A i B:

$$b_0 = A(-2)^0 + B \cdot 3^0 = A + B = 0,$$

$$b_1 = A(-2)^1 + B \cdot 3^1 = -2A + 3B = 1.$$

Rešavamo sistem:

$$A + B = 0, \quad -2A + 3B = 1.$$

Zamenom $A = -B$ u drugu jednačinu:

$$-2(-B) + 3B = 1 \implies 2B + 3B = 1 \implies B = \frac{1}{5}.$$

Odavde dobijamo $A = -\frac{1}{5}$.

Korak 5: Vraćanje u originalni niz

Rešenje za b_n je:

$$b_n = -\frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n.$$

Vraćamo se na originalni niz a_n koristeći smenu $b_n = \log_3 a_n$:

$$\log_3 a_n = -\frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n.$$

Eksponenciranjem dobijamo:

$$a_n = 3^{\frac{1}{5}3^n - \frac{1}{5}(-2)^n}.$$

Napomena:

Smena sa logaritmom je validna jer su svi članovi niza a_n pozitivni, što garantuje da je logaritamska funkcija dobro definisana za sve n.

Opšti postupak rešavanja rekurentnih relacija sa homogenim i nehomogenim delom

Rekurentne relacije koje uključuju nehomogeni član oblika:

$$f_n = c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2} + \cdots + c_k f_{n-k} + g(n),$$

gde je $g(n)$ nehomogeni član, rešavaju se kombinovanjem rešenja homogenog i nehomogenog dela. Opšte rešenje je:

$$f_n = h_n + p_n,$$

gde je:

- h_n opšte rešenje homogenog dela rekurentne relacije,
- p_n partikularno rešenje nehomogene relacije.

Korak 1: Rešavanje homogenog dela

Homogeni deo rekurentne relacije ima oblik:

$$h_n = c_1 h_{n-1} + c_2 h_{n-2} + \cdots + c_k h_{n-k}.$$

Da bismo rešili homogeni deo:

1. Pretpostavimo rešenje oblika $h_n = r^n$.
2. Zamenimo ovu pretpostavku u homogenu relaciju da bismo dobili karakterističnu jednačinu:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0.$$

3. Rešimo karakterističnu jednačinu da bismo našli korene $r_1, r_2, \ldots, r_k$.
   - Ako su svi koreni različiti, opšte rešenje homogenog dela je:

   $$h_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \cdots + A_k r_k^n.$$

   - Ako postoje višestruki koreni (npr. r je m-struki koren), za svaki višestruki koren dodajemo članove oblika:

   $$(B_0 + B_1 n + B_2 n^2 + \cdots + B_{m-1} n^{m-1}) r^n.$$

Korak 2: Pronalaženje partikularnog rešenja

Partikularno rešenje p_n zavisi od oblika nehomogenog člana $g(n)$. U tabeli su dati tipični oblici $g(n)$ i odgovarajuće pretpostavke za p_n:

Oblik $g(n)$	Pretpostavka za p_n
Konstanta C	$p_n = K$
Polinom stepena m: $g(n) = a_m n^m + \cdots + a_1 n + a_0$	$p_n = b_m n^m + \cdots + b_1 n + b_0$
Eksponencijalni: $g(n) = Ar^n$	$p_n = Kr^n$
Proizvod polinoma i eksponencijale: $g(n) = P(n) r^n$	$p_n = Q(n) r^n$, gde je $Q(n)$ polinom

Napomena: Ako pretpostavka za p_n sadrži članove koji već postoje u homogenom rešenju h_n, treba je pomnožiti sa n (ili višim stepenom n) dok ne postane linearno nezavisna od h_n.

Korak 3: Odredjivanje konstanti

Kombinujemo rešenje:

$$f_n = h_n + p_n,$$

i koristimo početne uslove za odredjivanje svih konstanti (iz homogenog i partikularnog dela).

—

Primena: Primer rekurentne relacije

Razmotrimo rekurentnu relaciju:

$$f_n = 3f_{n-1} + 10f_{n-2} + 7 \cdot 5^n, \quad n \geq 2,$$

sa početnim uslovima:

$$f_0 = 4, \quad f_1 = 3.$$

Rešavanje homogenog dela
Homogeni deo je:

$$h_n = 3h_{n-1} + 10h_{n-2}.$$

Zamenom $h_n = r^n$ dobijamo karakterističnu jednačinu:

$$r^2 - 3r - 10 = 0.$$

Rešavanjem kvadratne jednačine:

$$r = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2}.$$

Koreni su:

$$r_1 = 5, \quad r_2 = -2.$$

Opšte rešenje homogenog dela je:

$$h_n = A \cdot 5^n + B \cdot (-2)^n.$$

Pronalaženje partikularnog rešenja
Nehomogeni član je:

$$g(n) = 7 \cdot 5^n.$$

Svrha pronalaženja partikularnog rešenja je da nadjemo specifično p_n koje zadovoljava celokupnu relaciju, uključujući i nehomogeni član $g(n)$. Oblik partikularnog rešenja zavisi od strukture nehomogenog člana $g(n)$.

Zašto pretpostavljamo oblik $p_n = Cn \cdot 5^n$? Postupak za izbor oblika p_n vodi se sledećim pravilima:

1. **Ako je $g(n)$ eksponencijalnog oblika $A \cdot r^n$:** Pretpostavljamo partikularno rešenje oblika:

$$p_n = K \cdot r^n,$$

   gde je r baza eksponencijale. Ovo funkcioniše zato što su eksponencijalni članovi (poput 5^n) stabilni pod rekurzijom – njihovo ponašanje ostaje isto kada ih zamenimo u relaciju.

2. **Ako baza eksponencijale r već postoji u homogenom delu:** Kada je $g(n) = A \cdot r^n$ i r je već koren karakteristične jednačine homogenog dela (kao u ovom slučaju $r = 5$), prosta pretpostavka $p_n = K \cdot 5^n$ neće biti dovoljna. Ovo je zato što 5^n već zadovoljava homogenu relaciju, te neće "dodati" ništa novo u ukupno rešenje.

3. **Kako izbeći konflikt sa homogenim rešenjem:** Da bismo rešili ovaj problem, množenjem eksponencijale sa n (ili višim stepenima n ako je potrebno) stvaramo linearno nezavisnu funkciju od postojećih delova homogenog rešenja. Dakle, pretpostavljamo:

$$p_n = Cn \cdot 5^n.$$

   Ovaj oblik osigurava da partikularno rešenje ne pripada homogenom delu i da može da zadovolji nehomogeni član $g(n)$.

4. **Zaključak:** Pošto je $g(n) = 7 \cdot 5^n$ eksponencijalnog oblika sa bazom $r = 5$, koja već postoji u homogenom delu, partikularno rešenje mora biti oblika:

$$p_n = Cn \cdot 5^n.$$

Izračunavanje partikularnog rešenja
Zamenjujemo pretpostavku $p_n = Cn \cdot 5^n$ u originalnu relaciju:

$$f_n = 3f_{n-1} + 10f_{n-2} + 7 \cdot 5^n.$$

Računamo p_{n-1} i p_{n-2} na osnovu pretpostavke:

$$p_{n-1} = C(n-1) \cdot 5^{n-1} = C(n-1) \cdot \frac{5^n}{5},$$

$$p_{n-2} = C(n-2) \cdot 5^{n-2} = C(n-2) \cdot \frac{5^n}{25}.$$

Zamenjujemo p_n, p_{n-1}, i p_{n-2} u originalnu relaciju:

$$Cn \cdot 5^n = 3 \cdot C(n-1) \cdot \frac{5^n}{5} + 10 \cdot C(n-2) \cdot \frac{5^n}{25} + 7 \cdot 5^n.$$

Delimo sve članove sa 5^n (jer je $5^n > 0$) kako bismo pojednostavili:

$$Cn = 3C \cdot \frac{n-1}{5} + 10C \cdot \frac{n-2}{25} + 7.$$

Raširimo sve članove:

$$Cn = \frac{3C(n-1)}{5} + \frac{10C(n-2)}{25} + 7.$$

Sredjujemo koeficijente:

$$Cn = \frac{3C(n-1)}{5} + \frac{2C(n-2)}{5} + 7.$$

Faktorisanjem i grupisanjem dobijamo:

$$Cn = \frac{3Cn - 3C + 2Cn - 4C}{5} + 7.$$

Sredjujemo dalje:

$$Cn = \frac{5Cn - 7C}{5} + 7.$$

Množimo celu jednačinu sa 5 kako bismo eliminisali razlomke:

$$5Cn = 5Cn - 7C + 35.$$

Iz ove jednačine dobijamo:

$$-7C + 35 = 0 \implies C = 5.$$

Dakle, partikularno rešenje je:

$$p_n = 5n \cdot 5^n.$$

Kombinovanje rešenja i odredjivanje konstanti

Kombinujemo homogeni i nehomogeni deo:

$$f_n = A \cdot 5^n + B \cdot (-2)^n + 5n \cdot 5^n.$$

Koristimo početne uslove:

$$f_0 = A + B = 4, \quad f_1 = 5A - 2B + 25 = 3.$$

Rešavanjem sistema, dobijamo:

$$A = -2, \quad B = 6.$$

Konačno rešenje

Konačno rešenje rekurentne relacije je:

$$f_n = (-2) \cdot 5^n + 6 \cdot (-2)^n + 5n \cdot 5^n.$$