**FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1** **KOLOKVIJUM 1**

**Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________________ **14.07.2020.**

PREDISPITNE OBAVEZE 1

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(n^2+1\right)}{n+1} =$ ______________ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2-4n+3}{n^2-9}} =$ ______________
- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{3x-6} =$ ______________ $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} =$ ______________

  $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\dfrac{1}{2x} =$ ______________ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x+1}{x-1} =$ ______________
- Zaokružiti tačne iskaze, za proizvoljne realne funkcije $f$, $g$ i $h$:

  **1)** $\left(f\left(x^2\right)\right)' = 2xf'(x)$ **2)** $\left(f\left(e^x\right)\right)' = f\left(e^x\right)$ **3)** $\left(f\left(e^x\right)\right)' = e^x f\left(e^x\right)$ **4)** $\left(f\left(e^x\right)\right)' = e^x f'\left(e^x\right)$
  **5)** $f'(x) = g'(x) \ \Leftrightarrow\ f(x) = g(x)$ **6)** $f'(x) = g'(x) \ \Rightarrow\ f(x) = g(x)$
- Napisati jednačinu tangente na grafik funkcije $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+1}$ u tački 1:
- Za funkciju $f:\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-9}$ napisati, ako postoje, jednačine:

  (a) verikalnih asimptota:

  (b) leve horizontalne asimptote:

  (c) desne horizontalne asimptote:
- Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|x^2+4\right|$ je diferencijabilna u tačkama $x\in$ ______________

  $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$, $f'(x) =$ ______________

  $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^2(3-2x)$, $f'(x) =$ ______________

  $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2x}$, $g'(x) =$ ______________
- Prava $y=2$ je leva horizontalna asimptota funkcije $f(x)$ ako je (izraziti limesom): ______________
- Prvi parcijalni izvodi funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{x+y^2}-\sin\dfrac{y}{x}$ su

  $f_x(x,y) =$ ______________ $f_y(x,y) =$ ______________

ZADACI 1

1. Dat je rekurzivan niz $a_{n+1} = 4-\dfrac{1}{a_n}$, $n\in\mathbb{N}$ i $a_1=1$. Dokazati da za svaki član niza $a_n$, $n\in\mathbb{N}$ važi $1\le a_n<4$, dokazati da niz konvergira, i zatim mu izračunati granicu.
2. Za koje vrednosti konstanti $A,B\in\mathbb{R}$ je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} \sin(x+A)\cdot\sin\frac{1}{x} & , \quad x>0 \\ x^2+A\cdot\cos x+B & , \quad x\le 0\end{cases}$$
neprekidna.
3. Koliko članova u razvoju funkcije $f(x)=\cos(2x)$ u Maklorenov red treba uzeti da bi vrednost $\cos 2$ izračunali sa greškom manjom od 1?

**FTN, Informacioni inženjering, Matematička analiza 1** **KOLOKVIJUM 2**

**Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________________ **14.07.2020.**

## PREDISPITNE OBAVEZE 2

- Zaokružiti osobine integrala (za proizvoljne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, i $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$):

  **1)** $\int f^{\alpha}(x)dx = \alpha f^{\alpha-1}(x)+c$ **2)** $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$

  **3)** $\int f(x)dx = \int g(x)dx \ \Rightarrow\ f(x)=g(x)$ **4)** $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)+c$

  **5)** $\int e^{f(x)}dx = e^{\int f(x)dx}$ **6)** $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

- Izračunati:

  **1)** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx =$ ______________ **2)** $\int \cos(3x+2)dx =$ ______________

  **3)** $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx =$ ______________ **4)** $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx =$ ______________

  **5)** $\int \frac{\sin x}{\cos x-2}dx =$ ______________ **6)** $\int x\sin x dx =$ ______________

- Izračunati:

  **1)** $\int\limits_{-1}^{1}(x^2+2)dx =$ ______________ **2)** $\int\limits_{-2}^{0}(e^x+1)dx =$ ______________

  **3)** $\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{x+2}dx =$ ______________ **4)** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x dx =$ ______________

- Ako je $f'(x)=\sin x$, tada je $f(x) =$ ______________

- Napisati formulu za površinu koju parametarski zadana kriva $(x(t),y(t))$, $t\in[a,b]$, gde je $y(t)>0$ i $x'(t)>0$, zaklapa sa $x$-osom i pravama $x=a$ i $x=b$:

  $P =$ ______________________________

- Zaokruži rešenja diferencijalne jednačine $y'+\frac{1}{x}y = 4x^2+2$:

  **1)** $y(x)=\sqrt{x}$ **2)** $y(x)=x^3+x$ **3)** $y(x)=x^3$ **4)** $y(x)=5$ **5)** $y(x)=4x^2+2$

- Rešenje diferencijalne jednačine oblika $y'+f(x)y=g(x)$ tražimo u obliku: $y(x)=$ ______________

- Karakteristični koreni diferencijalne jednačine $y'''-27y=0$ su: ______________

## ZADACI 2

1. Izračunati $I=\int \frac{x^2-2x-2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$
2. Odrediti površinu dela ravni ograničene lukom krive $y=\frac{2x}{1+x^2}$, $x$-osom, $y$-osom i pravom $x=x_0$, gde je $x_0$ tačka u kojoj kriva dostiže maksimum.
3. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''+y'-2y=x^2-2x+2$.

## REŠENJA ZADATAKA KOLOKVIJUMA 1

1. *Dat je rekurzivan niz* $a_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$ *i* $a_1 = 1$. *Dokazati da za svaki član niza* $a_n$, $n \in \mathbb{N}$ *važi* $1 \le a_n < 4$, *dokazati da niz konvergira, i zatim mu izračunati granicu.*

   REŠENJE:

   (a) Dokaz izvodimo matematičkom indukcijom. Za $a_1 = 1$ važi $1 \le a_1 < 4$. Pretpostavimo da nejednakost $1 \le a_n < 4$ važi za $n \ge 2$, i dokažimo da važi i za $n+1$. Kako je

   $1 \le a_{n+1} < 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le 4 - \dfrac{1}{a_n} < 4 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \le -\dfrac{1}{a_n} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \ge \dfrac{1}{a_n} > 0,$

   imamo da nejednakost $\dfrac{1}{a_n} > 0$ očigledno važi jer je $1 \le a_n$ tj. $0 < a_n$, a nejednakost $3 \ge \dfrac{1}{a_n}$ važi jer je $1 \le a_n$ tj. $\dfrac{1}{a_n} \le 1$.

   (b) Dokažimo da je niz $a_n$, $n \in \mathbb{N}$ monotono rastući, te će zbog njegove ograničenosti, što smo dokazali pod (a), slediti da je konvergentan. Dakle, dokažimo da je $a_n < a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

   $a_n < a_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad a_n < 4 - \dfrac{1}{a_n} \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \quad a_n^2 < 4a_n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_n^2 - 4a_n + 1 < 0$

   [1] - Nejednakost se ne menja jer je $a_n > 0$, što je dokazano pod (a).

   Rešenja kvadratne jednačine $x^2 - 4x + 1 = 0$ su

   $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

   gde je $x_2 = 2 \pm \sqrt{3} > 3$, te nejednakost $a_n^2 - 4a_n + 1 < 0$ važi za sve $n \ge 3$ (naime, kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 4x + 1$ je konveksna, dakle monotono rastuća za sve vrednosti $x > x_2 = 2 + \sqrt{3}$).

   (c) Pod (b) je dokazano da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, pri čemu je $A \ne 0$ odnosno $1 \le A \le 4$ jer je $1 \le a_n < 4$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

   $$a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(4 - \frac{1}{a_n}\right) = 4 - \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$$

   $$\Rightarrow \quad \left(A = 4 - \frac{1}{A} \ \land \ A \ge 1\right) \quad \Rightarrow \quad \left(A^2 - 4A + 1 = 0 \ \land \ A \ge 1\right)$$

   $$\Rightarrow \quad \left(A = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \ \land \ A \ge 1\right) \quad \Rightarrow \quad A = 2 + \sqrt{3}.$$

2. *Za koje vrednosti konstanti* $A, B \in \mathbb{R}$ *je funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

   $$f(x) = \begin{cases} \sin(x+A) \cdot \sin\frac{1}{x} & , \quad x > 0 \\ x^2 + A \cdot \cos x + B & , \quad x \le 0 \end{cases}$$

   *neprekidna.*

   REŠENJE:

   U svim tačkama $x > 0$ je funkcija $f(x) = \sin(x+A) \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ neprekidna za svako $A \in \mathbb{R}$, a funkcija $f(x) = x^2 + A \cdot \cos x + B$ je u svim tačkama $x \le 0$ neprekidna za svako $A, B \in \mathbb{R}$. Dakle, preostaje pitanje neprekidnosti u tački $x = 0$.

   Kako ne postoji $\lim\limits_{x\to 0^-} \sin\dfrac{1}{x}$ i vrednosti funkcije $\sin\dfrac{1}{x}$ u okolini tačke 0 osciliraju u ograničenom intervalu $[0,1]$, sledi da $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sin(x+A) \cdot \sin\dfrac{1}{x}\right)$ postoji ako i samo ako je $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin(x+A) = 0$, i tada je i $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sin(x+A) \cdot \sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Pri tome je

   $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin(x+A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$

   S druge strane, za $A = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je

   $f(0) = 0^2 + A \cdot \cos 0 + B = A + B,$

   te je

$f(0) = A + B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = -A.$

Dakle, funkcija $f$ je neprekidna i u 0 za $(A, B) \in \{(k\pi, -k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3. *Koliko članova u razvoju funkcije $f(x) = \cos(2x)$ u Maklorenov red treba uzeti da bi vrednost* $\cos 2$ *izračunali sa greškom manjom od* 1*?*

REŠENJE: Za funkciju $f(x) = \cos(2x)$ induktivno dobijamo

$f^{(4k)}(x) = 2^{4k}\cos(2x),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$f^{(4k)}(0) = 2^{4k}\cos 0 = 2^{4k},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$f^{(4k+1)}(x) = -2^{4k+1}\sin(2x),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$f^{(4k+1)}(0) = -2^{4k+1}\sin 0 = 0,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$f^{(4k+2)}(x) = -2^{4k+2}\cos(2x),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$f^{(4k+2)}(0) = -2^{4k+2}\cos 0 = -2^{4k+2},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$f^{(4k+3)}(x) = 2^{4k+3}\sin(2x),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$f^{(4k+3)}(0) = 2^{4k+3}\sin 0 = 0,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

te je

$$\cos(2x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 4^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n}(x),$$

gde je

$$r_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ za neko } \xi \in (0, x),$$

te za $x = 2$ treba da bude

$$|r_{2n}(x)| = \left| \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| < 1.$$

Tako, za $\xi \in (0, 2)$, i koristeći da je $|\sin t| < 1$ i $|\cos t| < 1$ za sve $t \in \mathbb{R}$ dobijamo

$$|r_{2n}(2)| = \left| \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} 2^{2n+1} \right| = \frac{\left|\pm 2^{2n+1}\sin(2\xi)\right|}{(2n+1)!} 2^{2n+1} < \frac{1}{(2n+1)!} 2^{4n+2} < 1,$$

što redom za

$n = 1$ nije tačno jer je $\frac{1}{3!}2^6 = \frac{64}{6} > 1$,

$n = 2$ nije tačno jer je $\frac{1}{5!}2^{10} = \frac{1024}{120} \approx 8.5333 > 1$,

$n = 3$ nije tačno jer je $\frac{1}{7!}2^{14} = \frac{16384}{5040} \approx 3.2508 > 1$,

$n = 4$ jeste tačno jer je $\frac{1}{9!}2^{18} = \frac{262144}{362880} \approx 0.7224 < 1$.

Dakle, za traženu aproksimaciju je dovoljno uzeti $n = 4$, odnosno polinom 8-og stepena.

## REŠENJA ZADATAKA KOLOKVIJUMA 2

1. *Izračunati* $I = \displaystyle\int \frac{x^2 - 2x - 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx.$

REŠENJE: Rešenje tražimo u obliku

$$\int \frac{x^2 - 2x - 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 + x + 1} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx.$$

Primenom izvoda na zadnju jednakost dobijamo

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = A\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{(Ax + B)(2x + 1)}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + x + 1}},$$

te množenjem ove jednakosti sa $\sqrt{x^2 + x + 1}$ sledi

$$x^2-2x-2 = A\big(x^2+x+1\big)+(Ax+B)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\lambda =$$
$$= 2Ax^2+\left(\frac{3}{2}A+B\right)x+\left(A+\frac{1}{2}B+\lambda\right).$$

Izjednačavanjem koeficijenata polinoma dobijamo sistem jednačina

$1=2A \ \wedge\ -2=\frac{3}{2}A+B \ \wedge\ -2=A+\frac{1}{2}B+\lambda$

čija su rešenja $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{11}{4}$, $\lambda=-\frac{9}{8}$, te je

$$I=\frac{1}{2}\left(x-\frac{11}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{9}{8}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$$

Preostali integral u poslednjoj jednakosti rešavamo svođenjem na jedan od tabličnih integrala:

$$I_1=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}dx \overset{[1]}{=} \int\frac{1}{\sqrt{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}dt =$$

$$=\ln\left|t+\sqrt{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right|+c=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+c.$$

[1] - smena $x+\frac{1}{2}=t,\ dx=dt$;

2. *Odrediti površinu dela ravni ograničene lukom krive* $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$*, x-osom, y-osom i pravom* $x=x_0$*, gde je* $x_0$ *tačka u kojoj kriva dostiže maksimum.*

REŠENJE: Prvo odredimo tačku $x_0$ maksimuma krive $y=f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$. Kako je

$$f'(x)=\frac{2\big(1+x^2\big)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2},$$

$$\frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2-2x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad (x=-1\ \vee\ x=1),$$

stacionarne tačke funkcije $f$ su $-1$ i $1$. Kako je

$$f''(x)=\frac{-4x\big(1+x^2\big)^2-\big(2-2x^2\big)2\big(1+x^2\big)2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{4x\big(1+x^2\big)\big(x^2-3\big)}{\left(1+x^2\right)^4},$$

iz $f''(-1)=1$ i $f''(1)=-1$ sledi da je $x_0=1$ jedina tačka maksimuma funkcije $f$, te tražimo površinu ograničenu krivom $y=f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, i pravama $y=0$, $x=0$ i $x=1$. Kako je $\dfrac{2x}{1+x^2}\geq 0$ za sve $x\geq 0$ (tj. za $x\in[0,1]$), sledi da je tražena površina

$$P=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx \overset{[1]}{=} \int_1^2\frac{dt}{t}=\ln t\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

[1] - smena $1+x^2=t$, $2xdx=dt$, uz promenu granica integracije $x=0\to t=1$, $x=1\to t=2$.

3. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y''+y'-2y=x^2-2x+2$.

REŠENJE: Karakteristična jednačina homogenog dela $y''+y'-2y=0$ polazne jednačine je $k(r)=r^2+r-2=0$, te su karakteristični koreni $r_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$, odnosno $r_1=-2$ i $r_2=1$. Sledi da su fundamentalna rešenja homogenog dela funkcije $y_1(x)=e^{-2x}$ i $y_2(x)=e^x$, a opšte rešenje homogenog dela tada glasi $y_h(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^x$.

Kako je

$$y''+y'-2y=x^2-2x+2=e^{0\cdot x}\big(\big(x^2-2x+2\big)\cos(0\cdot x)+1\cdot\sin(0\cdot x)\big)$$

pri čemu 0 nije karakteristični koren, partikularno rešenje $y_p$ tražimo u obliku

$$y_p(x)=e^{0\cdot x}\big(\big(Ax^2+Bx+C\big)\cos(0\cdot x)+\big(ax^2+bx+c\big)\sin(0\cdot x)\big)=$$
$$=Ax^2+Bx+C,$$

gde je tada $y_p'(x)=2Ax+B$ i $y_p''(x)=2A$.

Uvrštavanjem u polaznu jednačinu dobijamo

$$y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x) = x^2 - 2x + 2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 2A + (2Ax + B) - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = x^2 - 2x + 2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad -2Ax^2 + (2A - 2B)x + 2A + B - 2C = x^2 - 2x + 2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} -2A & & & & & = & 1 \\ 2A & - & 2B & & & = & -2 \\ 2A & + & B & - & 2C & = & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = -\frac{5}{4} \end{array},$$

te je

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}.$$

Dakle, opšte rešenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}.$$