UREĐENI IZBORI

1. Odrediti koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima su elementi 1 i 2 susedni.

Rešenje: Kako elementi 1 i 2 moraju biti susedni razlikujemo permutacije u kojima je 1 neposredno ispred 2 (blok $\boxed{12}$) i permutacije u kojima je 2 neposredno ispred 1 (blok $\boxed{21}$). U prvom slučaju posmatramo blok $\boxed{12}$ kao jedan element. Ovaj blok zajedno sa preostalih $n-2$ elemenata možemo permutovati na $(n-1)!$ načina. Analogno je prebrojavanje i u slučaju bloka $\boxed{21}$. Odakle zaključujemo da je broj permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima su elementi 1 i 2 susedni jednak $2(n-1)!$.

2. Odrediti na koliko načina n osoba mogu da stanu u red, ako znamo da osoba A i osoba B ne žele da stoje jedna pored druge.

Rešenje: Pošto između ove dve osobe mogu stajati dve druge osobe, zatim tri osobe, i tako dalje, lakše je da od broja svih mogućih rasporeda n osoba u red oduzmemo broj "loših" rasporeda. "Loši" rasporedi su oni u kojima osobe A i B stoje zajedno, pa je na osnovu prethodnog zadatka njihov broj $2(n-1)!$. Sada je broj traženih rasporeda $n! - 2(n-1)! = (n-2)(n-1)!$.

3. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, ..., n\}$ u kojima su elementi 1 i 2 susedni, a 1 i 3 nisu? (domaći)

Rešenje: Kako brojevi 1 i 2 moraju biti susedni imamo dve opcije, da su grupisani u blok $\boxed{12}$ ili blok $\boxed{21}$. U oba slučaja je broj permutacija bloka (posmatranog kao jedan element) i preostalih $n-2$ brojeva jednak $(n-1)!$. Stoga je broj permutacija u kojima su 1 i 2 susedni jednak $2(n-1)!$.

Oduzmimo od ovih permutacija u kojima su 1 i 2 susedni one permutacije u kojima su i 1 i 3 susedni. Postoje dve mogućnosti, da se pojavi uređena trojka $\boxed{213}$ ili $\boxed{312}$. U oba slučaja permutujemo uređenu trojku sa preostalih $n-3$ elemenata, te je broj permutacija po slučaju $(n-2)!$.

Dakle, rešenje je $2(n-1)! - 2(n-2)!$.

4. Koliko ima permutacija cifara $0, 1, \ldots, 9$ u kojima između cifara 2 i 3 stoje tačno tri druge cifre?

Rešenje: Razmatraćemo prvo permutacije u kojima se 2 javlja ispred 3. Da bi uslov zadatka bio zadovoljen, 2 mora da stoji na nekoj od prvih šest pozicija. Za svaki od tih šest slučajeva važi da je broj permutacija koje zadovoljavaju uslov zadatka 8!, jer ako znamo poziciju na kojoj je 2, onda je 3 smeštena na četvrtom mestu od 2, a preostale elemente možemo proizvoljno permutovati. Tako da je broj ovakvih permutacija $6 \cdot 8!$.

Isti se broj dobija i kada se 3 javlja u permutacijama ispred 2. Odnosno, traženi broj je $2 \cdot 6 \cdot 8!$.

5. Odrediti broj načina da n osoba sedne oko okruglog stola, ako stolice ne razlikujemo.

Rešenje: Kada bi se stolice razlikovale osobe bi mogle biti raspoređene na $n!$ načina. Kako se stolice ne razlikuju, uzimajući u obzir rotacionu simetriju okruglog stola jedan isti raspored ljudi za stolom je u okviru $n!$ uračunat n puta (raspored $o_1o_2...,o_io_{i+1}...o_n$ isti je kao $o_io_{i+1}...o_no_1o_2...o_{i-1}$).
Tako da je broj načina da n osoba sedne za okrugli sto jednak

$$n!/n = (n-1)!.$$

II način: Postavimo prvu osobu proizvoljno za sto. Kada smo fiksirali prvu osobu više nemamo rotaciju, te je broj načina da preostalih $n-1$ osoba sedne $(n-1)!$, što je i traženi broj rasporeda.

6. Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u kojima dvojka stoji iza jedinice?

Rešenje: Primetimo prvo da se dvojka može nalaziti bilo gde u permutaciji iza jedinice, a ne samo neposredno iza nje. Ukoliko u proizvoljnoj permutaciji zamenimo mesta brojevima 1 i 2 dobićemo bijektivno preslikavanje između skupa svih permutacija u kojima 2 stoji iza 1 i skupa permutacija u kojima 2 stoji ispred 1. Kako je u svakoj permutaciji ili 2 iza 1 ili je 2 ispred 1, i kako je ukupan broj permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ jednak $n!$, zaključujemo da traženih permutacija ima $\frac{n!}{2}$.

7.* Odrediti broj preslikavanja skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u skup $\{1, 2, \ldots, n\}$, sa osobinom da skup slika svake funkcije ima najviše $n-1$ elemenata.

Rešenje: Broj svih preslikavanja skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u skup $\{1, 2, \ldots, n\}$ iznosi n^n. Od ovog broja oduzećemo preslikavanja koja nemaju osobinu iz zadatka, odnosno ona preslikavanja čiji skup slika ima tačno n elemenata. Takvih (bijektivnih) preslikavanja ima $n!$. Dakle, traženi broj iz zadatka iznosi $n^n - n!$.

8. Na koliko načina se na šahovsku tablu može poređati 8 nezavisnih topova (takvih da se nikoja dva topa ne napadaju) ako
   (a) topove ne razlikujemo;
   (b) su topovi numerisani?

Rešenje:

(a) Ako se topovi ne napadaju, onda se u svakoj vrsti i svakoj kolokni mora nalaziti samo jedan top. Pretpostavimo da se $i-$ti top nalazi u $i-$toj vrsti, za $i = 1, 2, \ldots, 8$. Sada treba još odabrati u kojoj koloni se nalazi $i-$ti top, a to možemo uraditi na $8!$ načina.

(b) U prvom delu zadatka smo videli da je broj načina da odaberemo polja na šahovskoj tabli na kojima će se nalaziti topovi $8!$. Sada treba još razmestiti topove na izabrana polja, a to možemo uraditi na $8!$ načina. Konačno rešenje je $8! \cdot 8!$.

9. Napisati permutacije skupa $\{1,2,3,4\}$ u leksikografskom poretku.

Rešenje: Kažemo da permutacija $a_1a_2\ldots a_n$ prethodi permutaciji $b_1b_2\ldots b_n$ u leksikografskom poretku ako postoji indeks k, gde je $1 \leq k \leq n$, za koji važi $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$ i $a_k < b_k$. Permutacije skupa $\{1,2,3,4\}$ zapisane u leksikografskom poretku su date u sledećoj tabeli, gledano po kolonama.

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Primetimo da će prva permutacija u leksikografskom poretku skupa $\{1,2,3,\ldots,n\}$ biti permutacija $123\ldots(n-1)n$, dok poslednja permutacija biti $n(n-1)\ldots321$.

10. Ako su permutacije skupa $\{a,b,c,d,e\}$ generisane u leksikografskom (abecednom) poretku, odrediti 38. i 100. permutaciju.

Rešenje: Prvih 24 permutacija gledano u leksikografskom poretku počinju sa a, tačnije prva takva je *abcde*, a poslednja *aedcb*. Naredne 24 permutacije počinju sa b, a nama treba 14. takva permutacija. Posmatrajmo dalje skup od preostala četiri slova, skup $\{a,c,d,e\}$. Znamo da prvih 6 permutacija ovog novog skupa počinju sa a, a drugih 6 sa c. Prema tome, 14. permutacija će početi slovom d. Dalje tražimo drugu permutaciju skupa $\{a,c,e\}$, a to je *aec*. Dobijamo da je tražena 38. permutacija *bdaec*.

Poslednje 24 permutacije počinju sa e, tj. od 97. do 120. permutacije. Dakle, 100. permutacija je 4. od ovih koje počinju sa e, tj. *eacdb*.

11. Koliko se različitih reči, bez obzira na smisao, može napisati premeštanjem slova reči MATEMATIKA i KOMBINATORIKA?

Rešenje: U reči MATEMATIKA slovo M se pojavljuje dva puta, slovo A tri puta, slovo T dva puta, dok se slova E, I i K pojavljuju tačno jednom. Tražene reči odgovaraju permutacijama multiskupa i njihov broj je $\dfrac{10!}{3!2!2!}$.

Ukupan broj slova u reči KOMBINATORIKA je 13, pri čemu se slova $\mathrm{K, O, I}$ i A pojavljuju po dva puta, pa je broj svih reči zapisanih pomoću datih slova $\dfrac{13!}{2!2!2!2!}$.

12. Na koliko načina se dva topa, dva skakača, dva lovca, kralj i kraljica mogu postaviti u prvi red šahovske table, tako da lovci budu na poljima različite boje?

Rešenje: Znamo da prvi red šahovske table sadrži 4 crna i 4 bela polja, pa je broj načina da odaberemo polja na kojima stoje lovci $4 \cdot 4$. Ostaje još da se ostale figure rasporede na preostalih 6 polja. Kako ne razlikujemo dva topa i ne razlikujemo dva skakača, broj načina da se figure postave u prvi red šahovske table na traženi način je $4 \cdot 4 \cdot \dfrac{6!}{2!2!}$.

13. Napisati JAVA kod koji ispisuje sve permutacije zadatog skupa (multiskupa).

Rešenje:

```
import java.util.HashSet;

public class Permutacije{

    private static void zameni(char[] chars, int i, int j){
        char temp = chars[i];
        chars[i] = chars[j];
        chars[j] = temp;
    }

    public static HashSet<String> h = new HashSet<String>();

    // Generisanje svih permutacija primenom rekurzije
    private static void permutacije(char[] chars, int trenutniIndex){
        if (trenutniIndex == chars.length - 1) {

            //Kada imamo multiskup (javljaju se ponovljeni elementi)
            if (!(h.contains(String.copyValueOf(chars)))){
                h.add(String.copyValueOf((chars)));
                System.out.println(String.valueOf(chars));
            }
        }

        for (int i = trenutniIndex; i < chars.length; i++){
            zameni(chars, trenutniIndex, i);
            permutacije(chars, trenutniIndex + 1);
            zameni(chars, trenutniIndex, i);
        }
    }

    public static void nadjiPermutaciju(String str) {
        if (str == null || str.length() == 0) {
            return;
        }

        permutacije(str.toCharArray(), 0);
    }

    public static void main(String[] args)
    {
        String str= "mata";
        nadjiPermutaciju(str);
    }
}
```

Napomena: Napisani kod ne vraća permutacije u leksikografskom poretku, pošto kao početnu permutaciju uzima zadatu permutaciju. Ukoliko želimo da permutacije budu ispisane u leksikografskom poretku, neophodno je proslediti programu prvu permutaciju tog poretka.

14. Odrediti maksimalan broj pravih određenih sa n zadatih tačaka u ravni.

Rešenje: Maksimalan broj pravih se postiže kada nikoje 3 tačke nisu kolinearne, te bi u tom slučaju svaki izbor dve različite tačke određivao jedinstvenu pravu. Stoga je maksimalan broj pravih određenih sa n tačaka jednak $\binom{n}{2}$.

II način: Prvu tačku prave možemo odabrati na n, a drugu na $n-1$ načina. Kako redosled kojim smo birali tačke nije bitan, jer je $p(A,B) = p(B,A)$, broj traženih pravih je $\dfrac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

15. Odrediti broj dijagonala konveksnog n-tougla.

Rešenje: Kod konveksnog n-tougla nikoja 3 temena nisu kolinearna, pa je ukupan broj pravih određenih sa temenima $\binom{n}{2}$. Na n ovih pravih leže stranice n-tougla, a na preostalim dijagonale. Dakle, broj dijagonala je $\binom{n}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

16. Nacrtano je m horizontalnih i n vertikalnih pravih. Koliko ima pravougaonika čija svaka stranica leži na jednoj od nacrtanih pravih?

Rešenje: Svakim izborom dve horizontalne i dve vertikalne prave dobijamo četiri prave u čijem preseku je jedan pravougaonik. Ovakvih izbora ima $\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}$.

17. U grupi od 20 šahista nalazi se 5 velemajstora. Na koliko načina se mogu formirati dve ekipe od po 10 šahista tako da u prvoj ekipi bude 2 velemajstora, a u drugoj 3?

Rešenje: Formirajući prvu ekipu automatski smo formirali i drugu od preostalih šahista. Broj načina da formiramo ekipe jeste $\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{8}$.

18. Na koliko načina od 2 matematičara i 8 inženjera možemo formirati tim od 5 članova u kom će biti bar jedan matematičar?

Rešenje: U timu može biti tačno jedan ili tačno dva matematičara. Broj timova koji imaju jednog matematičara je $\binom{2}{1}\binom{8}{4}$, dok timova sa dva matematičara ima $\binom{2}{2}\binom{8}{3}$. Prema tome, broj traženih timova je $2 \cdot \binom{8}{4} + \binom{8}{3} = 196$.

II način: Ukupan broj timova koji se mogu sastaviti od posmatranih ljudi je $\binom{10}{5}$. Timovi u kojima nema matematichara nisu odgovarajući i njih ima $\binom{8}{5}$. Sada je rešenje $\binom{10}{5} - \binom{8}{5} = 196$.

19. Tim programera broji 15 članova. Od toga je 8 muškaraca i 7 žena.
    (a) Na koliko načina možemo izabrati grupu od 6 ljudi za rad na projektu?
    (b) Koliki je broj mogućnosti za izbor grupe od 6 koja će imati jednak broj muškaraca i žena?
    (c) Na koliko načina možemo izabrati grupu od 6 ljudi ako dva člana tima odbijaju da zajedno rade na projektu?
    (d) Koliki je broj mogućnosti za formiranje grupe od 6 ljudi ako unutar tima imamo dva člana koja insistiraju da rade zajedno ili inače neće da rade na projektu?
    (e) Koliki je broj mogućnosti za izbor grupe od 6 koja će imati bar jednog muškarca?

Rešenje:

(a) Broj načina da se izabere grupa od 6 ljudi iz tima od 15 članova je $\binom{15}{6}$.

(b) Ukoliko u grupi treba da bude isti broj muškaraca i žena, grupa od 6 ljudi će imati 3 muška i 3 ženska člana. Prema tome, broj traženih izbora je $\binom{8}{3} \cdot \binom{7}{3}$.

(c) Neka su A i B članovi tima koji ne žele da rade zajedno. Razlikujemo tri slučaja. Ukoliko je A u grupi, tada B neće biti član grupe, pa je broj izbora $\binom{13}{5}$. Na isti način se dobija broj izbora u slučaju kada je B deo grupe (tada A nije u grupi). Poslednja situacija koju posmatramo je da ni A, ni B nisu deo grupe, i u tom slučaju imamo $\binom{13}{6}$ mogućih izbora. Konačno rešenje je $2 \cdot \binom{13}{5} + \binom{13}{6} = 4290$.

II način: Pod (a) smo izračunali da je ukupan broj grupa od 6 ljudi $\binom{15}{6}$. Od ovog broja ćemo oduzeti broj grupa koje sadrže i osobu A i osobu B. Ukoliko su odabrane obe osobe, od preostalih 13 članova projektnog tima treba odabrati još 4 osobe, a to se može uraditi na $\binom{13}{4}$ načina. Sada je rešenje $\binom{15}{6} - \binom{13}{4} = 4290$.

(d) Neka su C i D članovi tima koji insistiraju da rade zajedno. Ukoliko su C i D uključeni u grupu, broj načina da se odaberu preostala 4 člana grupe je $\binom{13}{4}$. Nasuprot tome, imamo izbore u kojima ne učestvuju ni C, ni D, i takvih izbora ima $\binom{13}{6}$. Ukupan broj traženih izbora je $\binom{13}{4} + \binom{13}{6}$.

(e) Umesto da posmatramo 6 situacija u zavisnosti od broja muškaraca u grupi, od ukupnog broja izbora grupe od 6 ljudi oduzećemo broj grupa u kojima ne učestvuju muškarci. Rešenje je $\binom{15}{6} - \binom{7}{6}$.

20. Na koliko načina se mogu izabrati tri različita broja od 1 do 30 tako da njihov zbir bude paran broj?

Rešenje: Zbir tri broja je paran broj ako su sva tri broja parna ili ako su dva među njima neparna i jedan paran. U prvom slučaju imamo $\binom{15}{3}$ kombinacija, a u drugom $\binom{15}{2} \cdot \binom{15}{1}$. Ukupno mogućnosti imamo:

$$\binom{15}{3} + \binom{15}{2} \cdot \binom{15}{1}.$$

21. Na koliko načina se mogu izabrati tri različita broja od 1 do 30 tako da njihov zbir bude deljiv sa 3? (domaći)

Rešenje: Skup $A = \{1, 2, \ldots, 30\}$ možemo razbiti na tri disjunktna podskupa:

$$A_0 = \{3, 6, 9, \ldots, 30\},\ A_1 = \{1, 4, 7, \ldots, 28\} \text{ i } A_2 = \{2, 5, 8, \ldots, 29\}.$$

Skup A_0 čine svi brojevi koji daju ostatak 0 pri deljenju sa 3, u A_1 su oni koji daju ostatak 1, a u su A_2 oni koji daju ostatak 2. Zbir tri broja će biti deljiv sa 3 ako sva tri broja pripadaju istom podskupu, ili ako su sva tri broja iz različitih podskupova. Odavde dobijamo da je rešenje $3 \cdot \binom{10}{3} + \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1}$.

22. Koliko ima četvorocifrenih brojeva u kojima je svaka cifra
    (a) manja od prethodne;
    (b) veća od prethodne?

    Napisati kod u programskom jeziku JAVA koji ispisuje sve takve brojeve.

Rešenje:

(a) Primetimo prvo da cifre trebaju da budu u **opadajućem** poretku. Od svake 4 različite cifre mi na jedinstven način možemo formirati četvorocifreni broj kod koga je svaka cifra manja od prethodne. Kako izbora 4 različite cifre ima $\binom{10}{4}$, to je i traženi broj.

```java
public class CetvorocifreniOpadajuci{

   public static void main(String []args) {
      int s=0;

      for (int i=1; i<=9; i++){
         for (int j=0; j<i; j++){
            for (int k=0; k<j; k++){
               for (int l=0; l<k; l++){
                  System.out.println(""+i+j+k+l);
                  s += 1;
               }
            }
         }
      }

      System.out.println("S="+s);
   }
}
```

Napomena: Trivijalan način da se napiše traženi kod bi bio da prođemo kroz skup svih četvorocifrenih brojeva i da proverimo za koje brojeve je ispunjen uslov da se cifre nalaze u opadajućem poretku, tj. da važi uslov:

```
i>j & j>k & k>l
```

(b) Kako svaka cifra traba da bude veća od prethodne, izbore u kojima je nula moramo da isključimo. Dakle, rešenje je $\binom{9}{4}$. U ovom slučaju cifre trebaju da budu u **rastućem** poretku.

```java
public class CetvorocifreniRastuci{

   public static void main(String []args) {
      int s=0;

      for (int i=1; i<=9; i++){
         for (int j=i+1; j<=9; j++){
            for (int k=j+1; k<=9; k++){
               for (int l=k+1; l<=9; l++){
                  System.out.println(""+i+j+k+l);
                  s += 1;
               }
            }
         }
      }

      System.out.println("S="+s);
   }
}
```

23.* Na koliko načina se iz skupa od 17 osoba može izabrati 12 pod uslovom

(a) ako je izabrana osoba A, tada mora biti izabrana i osoba B;

(b) ako je izabrana osoba A, tada ne sme biti izabrana osoba B?

Rešenje:

(a) U slučaju da je izabrana osoba A, zbog uslova zadatka mora biti izabrana i osoba B, pa treba odabrati još 10 osoba od preostalih 15 i to radimo na $\binom{15}{10}$ načina. Ako osoba A nije izabrana, od preostalih 16 osoba treba odabrati svih 12 osoba na $\binom{16}{12}$ načina. Ukupan broj načina da se izaberu osobe je $\binom{15}{10} + \binom{16}{12}$.

(b) Ako je osoba A izabrana, osoba B ne mozhe biti birana i tada treba odabrati još 11 osoba od 15 na $\binom{15}{11}$ načina. Slučaj da osoba A nije izabrana je isti kao u zadatku pod (a) i imamo $\binom{16}{12}$ mogućih izbora. Rešenje dobijamo sabiranjem broja načina u slučajevima kada osoba A jeste, odnosno nije izabrana.

24. Koliko ima nizova od n nula i k jedinica ($k \leq n+1$), takvih da nikoje dve jedinice nisu susedne?

Rešenje. Ukoliko prvo postavimo svih n nula, jedinice možemo smestiti na neko od $(n-1)$ mesta između nula, ispred prve nule ili iza poslednje nule, dakle na $(n+1)$ potencijalnih mesta. Kako imamo k jedinica, biramo k od $(n+1)$ pozicija za njihovo smeštanje, odnosno dobijamo da je broj nizova u kojima nikoje dve jedinice nisu susedne $\binom{n+1}{k}$.

25. Za okruglim stolom kralja Artura sedi 12 vitezova. Poznato je da je svaki od njih u svađi sa svojim neposrednim susedom za stolom. Na koliko načina se može izabrati 5 vitezova, tako da nikoja dva među njima nisu u svađi?

Rešenje: Fiksirajmo jednog viteza A. Sve izbore delimo u dve grupe, one u kojima jeste vitez A i one u kojima nije.

Ako je vitez A izabran, njegov levi i desni sused ne mogu biti izabrani. Od preostalih 9 vitezova treba izabrati 4 koja nisu susedi. Uspostavimo bijekciju između svih nizova od 5 nula i 4 jedinice u kojima nikoje dve jedinice nisu susedne i svih mogućih izbora 4 nesusedna viteza (jedinice) od 9 vitezova. Na osnovu prethodnog zadatka taj broj je $\binom{6}{4}$.

Ako vitez A nije izabran, od preostalih 11 vitezova treba izabrati 5 nesusednih. Dakle, kao u prvom slučaju uspostavljamo bijekciju između broja ovakvih izbora i broja nizova od 6 nula i 5 jedinica u kojima nikoje dve jedinice nisu susedne. Na osnovu prethodnog zadatka taj broj je $\binom{7}{5}$.

Pet vitezova koji zadovoljavaju uslov zadatka možemo izabrati na $\displaystyle\binom{6}{4} + \binom{7}{5}$ načina.