predmet: Matematička analiza 2

DVOSTRUKI INTEGRAL

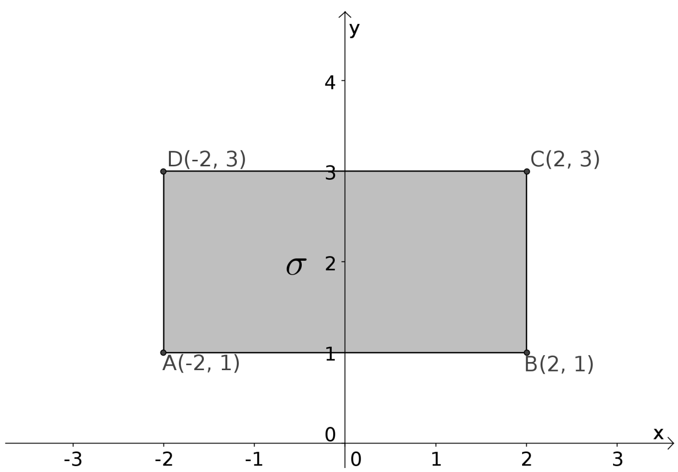
1. Odrediti granice integracije dvostrukog integrala (u oba poretka) $\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dx\,dy$, ako je

   (a) σ pravougaonik sa temenima $A(-2,1)$, $B(2,1)$, $C(2,3)$ i $D(-2,3)$;

   (b) oblast σ je ograničena sa $y = 2-x$, $y = x+2$ i x osom.

   Rešenje:

   (a) Granice integracije dvostrukog integrala su:



$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{1}^{3} f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_{1}^{3}\int\limits_{-2}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$$

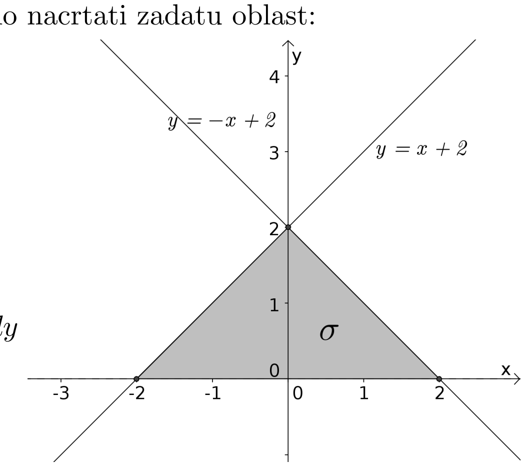
Date integrale možemo zapisati i na sledeći način:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{1}^{3} f(x,y)\,dy = \int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{-2}^{2} f(x,y)\,dx$$

Ubuduće ćemo koristit ovaj zapis.

   (b) Da bismo odredili granice integracije, najpre ćemo nacrtati zadatu oblast:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y-2}^{2-y} f(x,y)\,dx = \int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{0}^{x+2} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x,y)\,dy$$



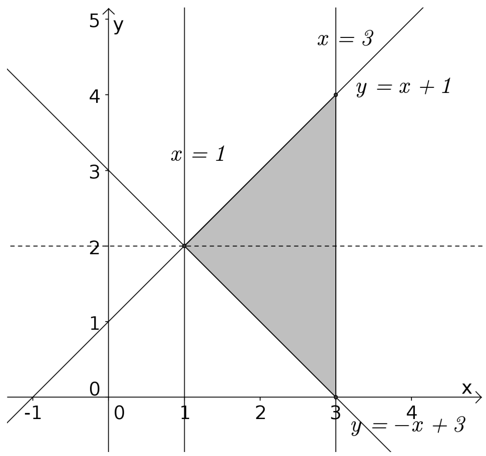
2. Promeniti redosled integracije u integralu

(a) $I_1 = \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{-x+3}^{x+1} f(x,y)\,dy;$

(b) $I_2 = \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y+2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y+2}} f(x,y)\,dx.$

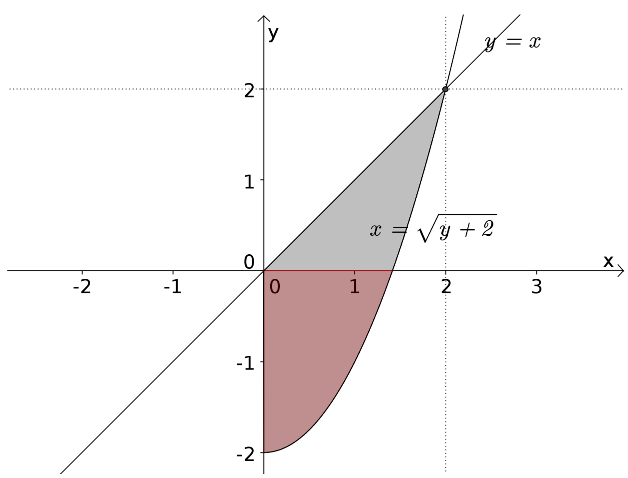
Rešenje:

(a) Da bismo promenili redosled integracije, najpre ćemo nacrtati oblast po kojoj integralimo.



$$I_1 = \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{-y+3}^{3} f(x,y)\,dx + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{y-1}^{3} f(x,y)\,dx$$

(b) Da bismo promenili redosled integracije, najpre ćemo nacrtati oblast po kojoj integralimo.



$$I_2 = \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^2-2}^{x} f(x,y)\,dy$$

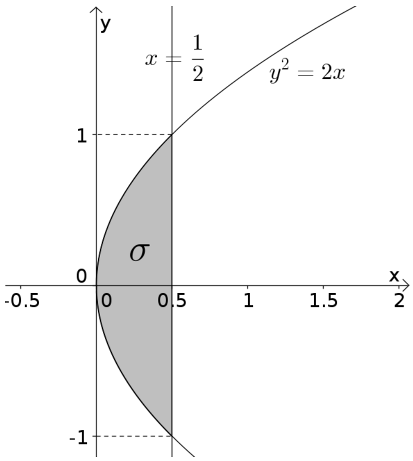
3. Izračunati integral

(a) $\iint\limits_{\sigma} xy^2\,dx\,dy$, gde je σ oblast ograničena sa $y^2 = 2x$ i $x = \dfrac{1}{2}$;

(b) $\iint\limits_{\sigma} \dfrac{x}{y}\,dx\,dy$, gde je σ oblast ograničena sa $y = x^2$ i $x = y^2$.

Rešenje:

(a) Dati integral računamo na sledeći način:

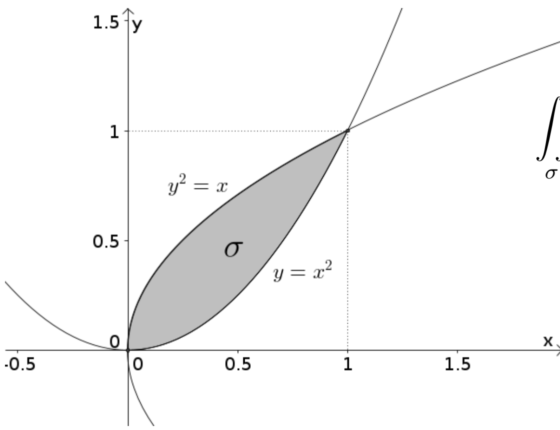


$$\iint\limits_{\sigma} xy^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{1}{2}} xy^2\,dx = \int_{-1}^{1} \left(y^2 \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{y^2}{8} - \frac{y^6}{8} \right) dy = \frac{1}{8}\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{8}\frac{y^7}{7}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{7} - \left(-\frac{1}{7}\right)\right) = \cdots = \frac{1}{21}.$$

(b) Dati integral računamo na sledeći način:



$$\iint\limits_{\sigma} \frac{x}{y}\,dx\,dy = \int_{0}^{1} dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \frac{x}{y}\,dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{y}\frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{y}\frac{y}{2} - \frac{1}{y}\frac{y^4}{2} \right) dy = \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{y^3}{2} \right) dy$$

$$= \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_{0}^{1} = \cdots = \frac{3}{8}$$

Smena promenljivih u dvostrukom integralu

4. Smenom promenljivih rešiti integral $\iint\limits_{\sigma} dx\,dy$, gde je

   $\sigma = \{(x, y) : \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1, x + y \leq 2, y \geq x, y \leq 2x\}$.

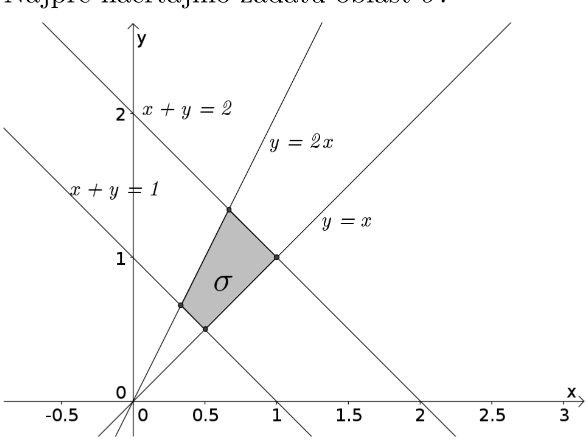
   Rešenje:

   Oblast σ je zadata sledećim nejednačinama:

$$x + y \geq 1 \qquad x + y \leq 2 \tag{1}$$

$$y \geq x \qquad y \leq 2x \tag{2}$$

Najpre nacrtajmo zadatu oblast σ.



Primetimo da kada bismo integralili po oblasti σ, morali bismo prvo datu oblast podeliti na manje oblasti, pa tek onda integraliti po svakoj od tih oblasti.

Da bismo olakšali izračunavanje integrala uvodimo smenu. Uzmimo smenu određenu jednačinama:

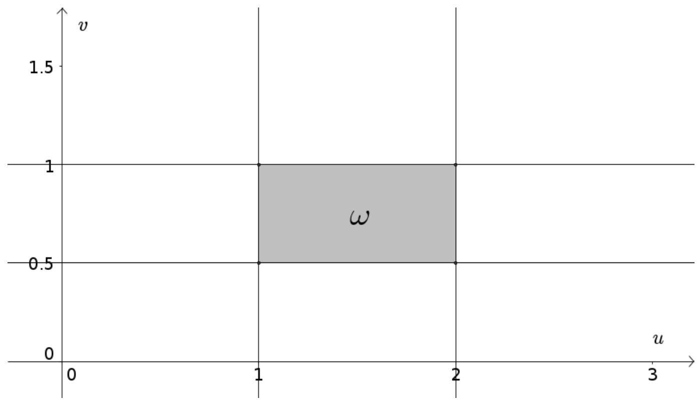
$$u = x + y \qquad v = \frac{x}{y} \tag{3}$$

Na osnovu nejednačina kojom je definisana oblast σ i jednačina kojim smo definisali smenu, dobijamo sledeća ograničenja za promenljive u i v:

$$u \geq 1 \qquad u \leq 2 \tag{4}$$

$$v \leq 1 \qquad v \geq \frac{1}{2} \tag{5}$$

Nova oblast ω (dobijena transformacijom) u uOv ravni je pravouganik kome su stranice paralelne sa osama.



Da bismo primenili smenu na zadati integral, potrebno je da promenljive x i y predstavimo kao funkcije po u i v. Iz jednačina (3) dobijamo

$$x = \frac{uv}{v+1} \qquad y = \frac{u}{v+1}$$

Ove jednačine definišu smenu koju ćemo koristiti.

Sada kada imamo jednačine koje definišu smenu i oblast ω koja se datom smenom preslikava na σ, treba da odredimo Jakobijan transformacije.

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{1}{v+1} & -\frac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = -\frac{uv}{(v+1)^3} - \frac{u}{(v+1)^3} = -u\frac{v+1}{(v+1)^3} = -\frac{u}{(v+1)^2}$$

Konačno, računamo zadati integral:

$$\iint\limits_{\sigma} dx\,dy = \iint\limits_{\omega} |J(u,v)|\,du\,dv = \int\limits_1^2 du \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{u}{(v+1)^2}\,dv = \int\limits_1^2 \left(u\frac{-1}{v+1}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right) du$$

$$= \int\limits_1^2 \left(u \left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{\frac{3}{2}} \right) \right) \right) du = \frac{1}{6}\int\limits_1^2 u\,du = \frac{1}{6}\,\frac{u^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

<u>**Polarne koordinate**</u>

5. Date oblasti opisati (direktnim) polarnim koordinatama.

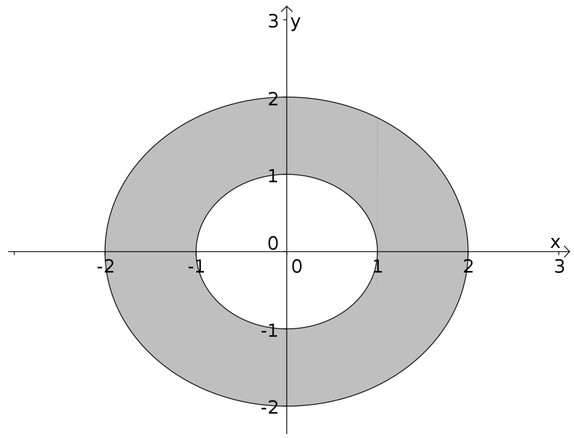
(a) $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(b) $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq y,\ x^2 + y^2 \leq 2y,\ y \geq |x|\}$;

(c) $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 2x,\ x^2 + y^2 \leq 4x,\ y \geq 0,\ y \leq x\}$.

Rešenje:

(a)



Uvodimo polarne koordinate:

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi$$

Potrebno je odrediti granice za ρ i φ na datoj oblasti.

Iz nejednačina koje opisuju oblast σ dobijamo:

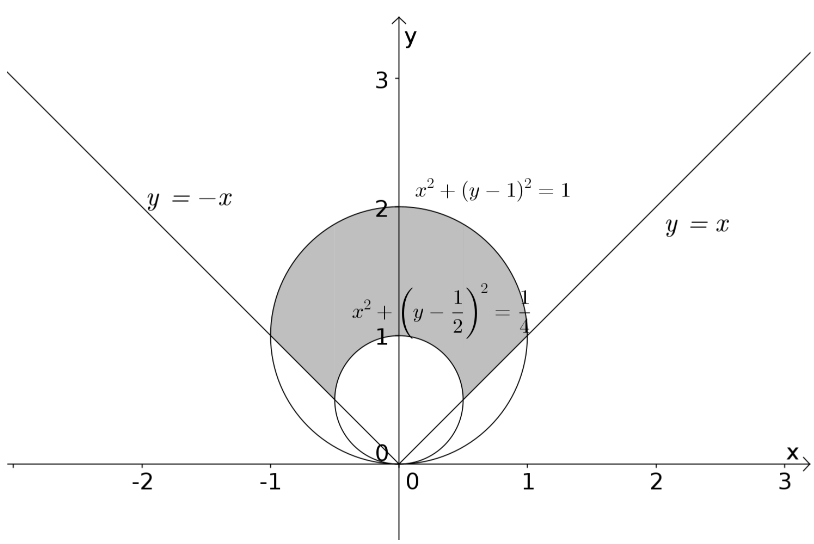
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq 1 \\ \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi &\geq 1 \\ \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) &\geq 1 \\ \rho^2 \cdot 1 &\geq 1 \\ \rho^2 &\geq 1 \\ \text{kako je } \rho \geq 0 \text{ dobijamo:} & \\ \rho &\geq 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 4 \\ \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi &\leq 4 \\ \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) &\leq 4 \\ \rho^2 \cdot 1 &\leq 4 \\ \rho^2 &\leq 4 \\ \text{kako je } \rho \geq 0 \text{ dobijamo:} & \\ \rho &\leq 2 \end{aligned}$$

Dakle, zaključujemo da $\rho \in [1, 2]$. Sa druge strane, kako je φ ravanski ugao, sa slike vidimo da taj ugao uzima vrednosti iz intervala $[0, 2\pi]$.

Prelaskom na polarne koordinate, zadatu oblast možemo zapisati na sledeći način:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad \rho \in [1, 2], \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

(b)



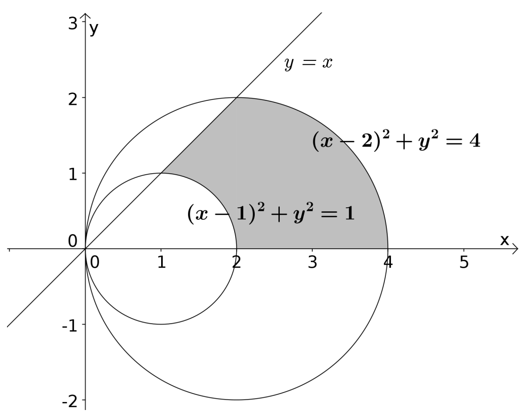
Prelaskom na polarne koordinate, imamo da je $x = \rho\cos\varphi$ i $y = \rho\sin\varphi$. Iz nejednačina kojim je zadata oblast σ dobijamo:

$$
\begin{array}{rcl}
x^2 + y^2 \geq y & \qquad & x^2 + y^2 \leq 2y \\
\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \geq \rho\sin\varphi & & \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \leq 2\rho\sin\varphi \\
\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \geq \rho\sin\varphi & & \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \leq 2\rho\sin\varphi \\
\rho^2 \geq \rho\sin\varphi & & \rho^2 \leq 2\rho\sin\varphi \\
\rho^2 - \rho\sin\varphi \geq 0 & & \rho^2 - 2\rho\sin\varphi \leq 0 \\
\rho(\rho - \sin\varphi) \geq 0 & & \rho(\rho - 2\sin\varphi) \leq 0 \\
\text{kako je } \rho \geq 0 & & \text{kako je } \rho \geq 0 \\
\rho - \sin\varphi \geq 0 & & \rho - 2\sin\varphi \leq 0 \\
\rho \geq \sin\varphi & & \rho \leq 2\sin\varphi
\end{array}
$$

Dakle, dobili smo $\rho \in [\sin\varphi, 2\sin\varphi]$. Sa druge strane, vidimo da se oblast nalazi između pravih $y = x$ i $y = -x$, koje polove prvi i drugi kvadrant, te duž određena koordinatnim početkom i tačkom iz te oblasti može da zaklapa sa pozitivnim delom x-ose ugao između $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}$.
Prelaskom na polarne koordinate, zadatu oblast možemo zapisati na sledeći način:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad \rho \in [\sin\varphi, 2\sin\varphi], \qquad \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

(c)



Uvodimo polarne koordinate:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi$$

Slično kao u prethodna dva primera, iz nejednačina kojima je zadata oblast σ dobijamo:

$$
\begin{array}{lcl}
x^2 + y^2 \geq 2x & \qquad & x^2 + y^2 \leq 4x \\
\cdots & & \cdots \\
\rho \geq 2\cos\varphi & & \rho \leq 4\cos\varphi
\end{array}
$$

Odakle je $\rho \in [2\cos\varphi, 4\cos\varphi]$. Kako je zadata oblast između x-ose i prave $y = x$ koja polovi prvi kvadrant, ravanski ugao φ može da uzima vrednosti iz intervala $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

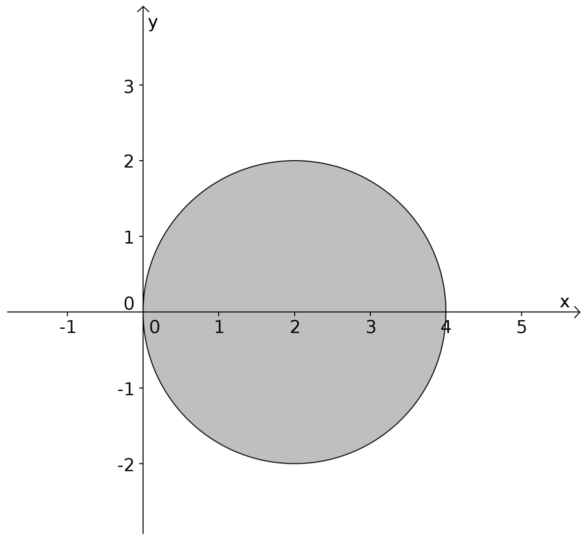
6. Date oblasti opisati pomoću pomerenih polarnih koordinata:

(a) $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4x\}$;

(b) $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2y,\ x \leq 0,\ y \geq 1\}$;

Rešenje:

(a) Najpre ćemo nacrtati zadatu oblast.



Oblast σ je unutrašnjost kružnice čija je jednačina $(x-2)^2+y^2=4$.

Pomerene polarne koordinate uvodimo sa jednačinama:

$$x = 2 + \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi.$$

Slično kao u prethodnom zadatku, iz nejednačine kojom je zadata oblast, dobijamo

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\le 4x \\ (x-2)^2+y^2 &\le 4 \\ \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi &\le 4 \\ \rho^2 &\le 4 \\ \rho &\le 2 \end{aligned}$$

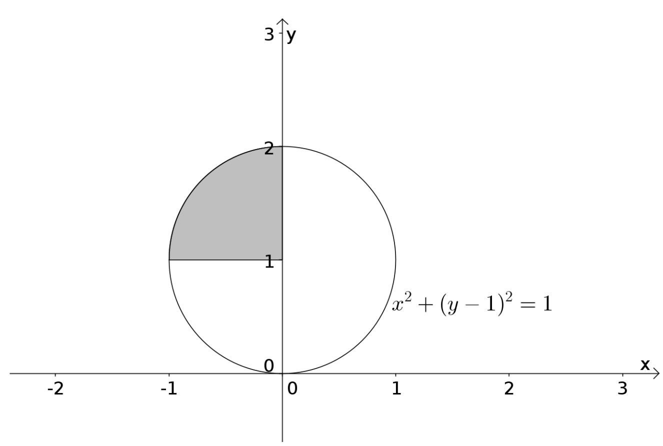
Ovim smo dobili gornju granicu za ρ. Kako je vrednost promenljive ρ uvek nenegativna, to je $\rho \in [0,2]$.

Prilikom određivanja granica za promenljivu φ, najpre transliramo datu kružnicu u koordinatni početak, a zatim odredimo skup vrednosti ravanskog ugla za transliranu oblast. U ovom slučaju, imamo $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Zadatu oblast, pomoću pomerenih polarnih koordinata, možemo opisati na sledeći način:

$$x = 2 + \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad \rho \in [0,2], \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

(b)



Uvodeći smenu $x = \rho\cos\varphi$, $y = 1 + \rho\sin\varphi$, kao i u prethodnom primeru, iz nejednačine za unutrašnjost kružnice, date u definiciji oblasti σ, dobijamo:

$$x^2 + y^2 \leq 2y$$
$$\ldots$$
$$\rho \leq 1$$

Odakle zaključujemo $\rho \in [0, 1]$. Dok promenljiva φ uzima vrednosti iz intervala $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
Zadatu oblast, pomoću pomerenih polarnih koordinata, možemo opisati na sledeći način:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = 1 + \rho\sin\varphi, \qquad \rho \in [0, 1], \qquad \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Površina ravnog lika

7. Izračunati površinu figure σ ako je :

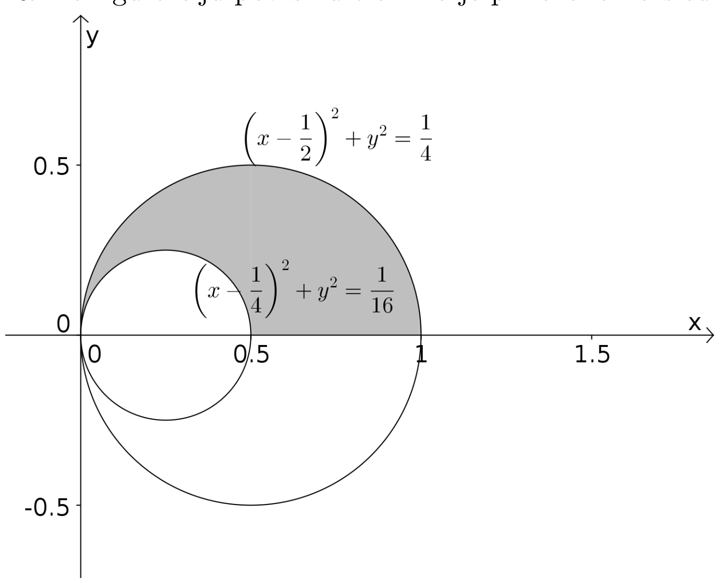
   (a) $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}x,\ x^2 + y^2 \leq x,\ y \geq 0\}$;

   (b) σ ograničeno sa $y = x^2$, $y = 2 - x$ i x-osom;

   (c) $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$

Rešenje:

(a) Ravna figura čiju površinu tražimo je prikazana na sledećoj slici.



Da bismo olakšali računanje integrala, uvodimo smenu polarnim koordinatama, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Iz nejednačina kojima je definisana oblast σ dobijamo:

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}x \qquad\qquad x^2 + y^2 \leq x$$
$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$
$$\rho \geq \frac{1}{2}\cos\varphi \qquad\qquad \rho \leq \cos\varphi$$

Oblast σ se nalazi u prvom kvadrantu, te je $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ovim smo odredili granice za promenljive ρ i φ. Ovom transformacijom/smenom (polarnim koordinatama) na oblast σ se slika oblast $\omega = \{(\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{1}{2}\cos\varphi \le \rho \le \cos\varphi\}$. Znamo da je $J(\rho,\varphi) = \rho$. Sada možemo da izračunamo integral:

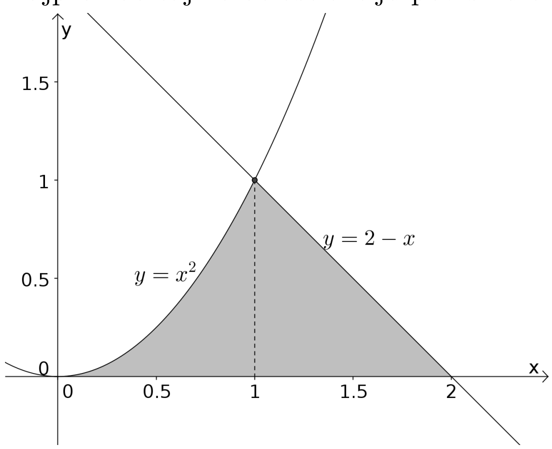
$$P(\sigma) = \iint\limits_{\sigma} 1\,dx\,dy = \iint\limits_{\omega} 1|J(\rho,\varphi)|\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{2}\cos\varphi}^{\cos\varphi} \rho\,d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}\cos\varphi}^{\cos\varphi} \right) d\varphi$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2\varphi}{2} - \frac{\cos^2\varphi}{8} \right) d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{8}\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{3}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{3}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= \frac{3}{8}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,d\varphi + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi \right) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi\,d\varphi \right)$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\,\varphi|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0 \right) = \frac{3\pi}{32}.$$

(b) Najpre nacrtajmo oblast σ čiju površinu tražimo.

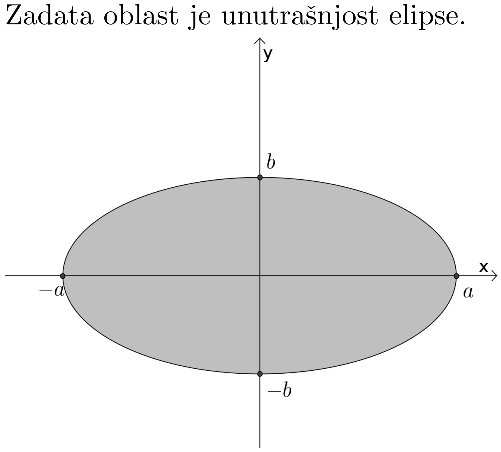


Površinu računamo po sledećoj formuli:

$$P(\sigma) = \iint\limits_{\sigma} 1\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} 1\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} 1\,dy = \int\limits_0^1 y|_0^{x^2}\,dx + \int\limits_1^2 y|_0^{2-x}\,dx$$

$$= \int\limits_0^1 x^2\,dx + \int\limits_1^2 (2-x)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

(c) Zadata oblast je unutrašnjost elipse.



Koristićemo smenu eliptičnim koordinatama, gde je:

$$x = a\rho\cos\varphi, \qquad y = b\rho\sin\varphi$$

$$\rho \in [0,1], \qquad \varphi \in [0,2\pi]$$

Da bismo uveli smenu, najpre moramo izračunati Jakobijan:

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix}=ab\rho\cos^2\varphi+ab\rho\sin^2\varphi=ab\rho.$$

Koristeći navedenu smenu računamo traženu površinu:

$$P(\sigma)=\iint_\sigma 1\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 1ab\rho\,d\rho=\int_0^{2\pi}ab\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^1d\varphi=\int_0^{2\pi}ab\frac{1}{2}\,d\varphi=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{ab}{2}\cdot 2\pi=ab\pi.$$

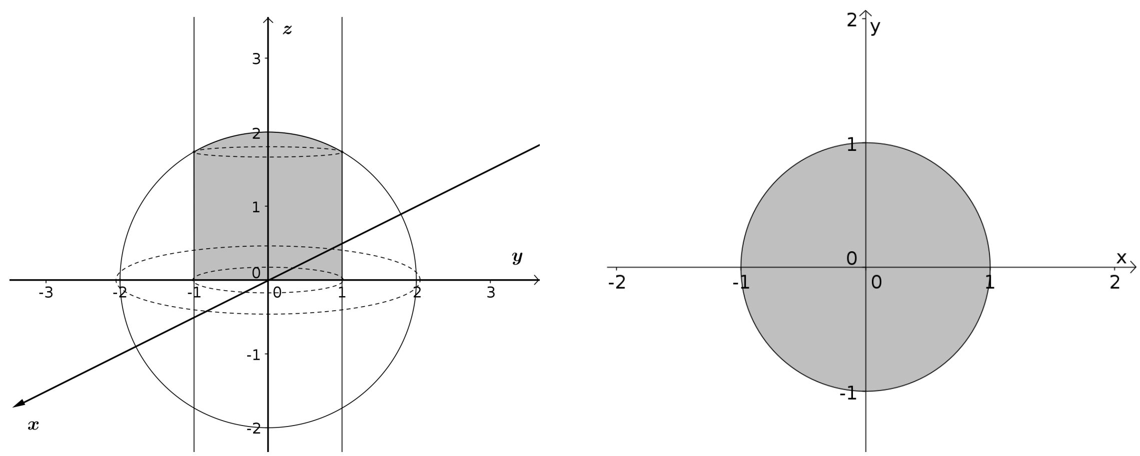
Zapremina tela i površina površi

8. Izračunati zapreminu tela:

   (a) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2\le 1, z\ge 0\}$;
   (b) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 4,\ z\le 6-\sqrt{x^2+y^2},\ z\ge 2\}$;
   (c) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\ge 1, z\ge\sqrt{x^2+y^2}-4,\ z\le 8-x^2-y^2\}$;
   (d) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 2x,\ 0\le z\le x^2+y^2\}$.

   Rešenje:

   (a) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2\le 1, z\ge 0\}$



(a) Zadato telo

(b) Projekcija tela na xOy ravan

Slika 1: Zadatak $8(a)$

Projekcija tela na xOy ravan je unutrašnjost kružnice sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika 1. Uvodeći smenu polarnim koordinatama

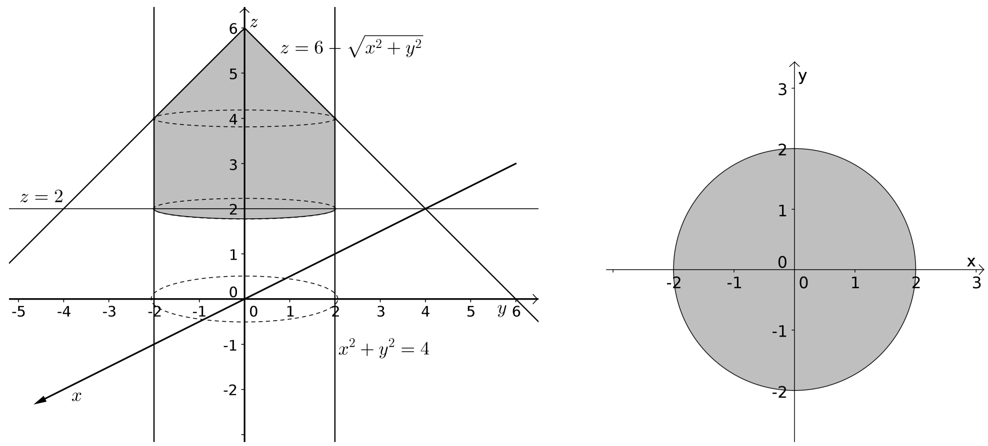
$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi,\qquad \rho\in[0,1],\qquad \varphi\in[0,2\pi]$$

dobijamo:

$$V=\iint_\sigma\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{4-\rho^2}\rho\,d\rho=\left|\begin{array}{c}\text{integral rešavamo smenom:}\\ u=4-\rho^2\\ \text{i dobijamo}\end{array}\right|$$

$$=\int_0^{2\pi}\left.\left(\frac{-1}{2}\frac{2}{3}(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right)\right|_0^1d\varphi=-\frac{3\sqrt{3}-8}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{8-3\sqrt{3}}{3}2\pi$$

(b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ z \leq 6 - \sqrt{x^2+y^2},\ z \geq 2\}$



(a) Zadato telo (b) Projekcija tela na xOy ravan

Slika 2: Zadatak 8(b)

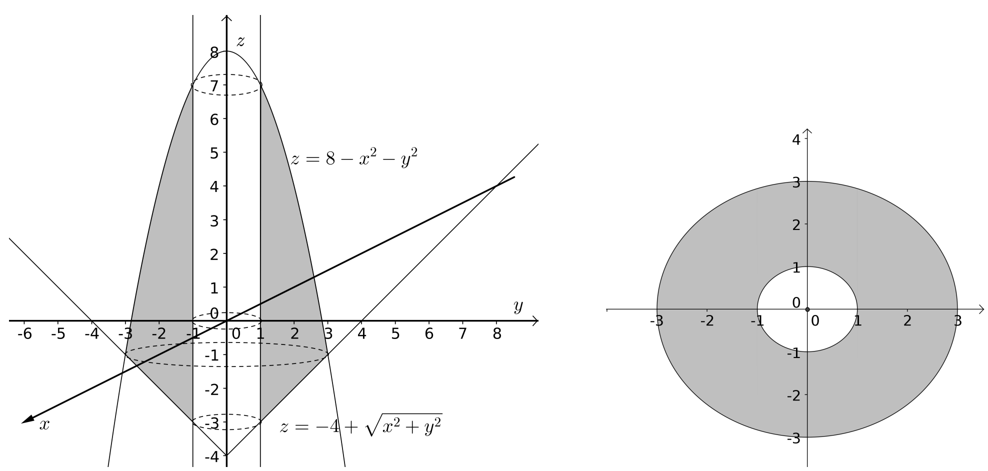
Projekcija tela na xOy-ravan je unutrašnjost kružnice sa centrom u koordinatnom početku, poluprečnika 2, tj. $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Uvodeći polarne koordinate

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad \rho \in [0,2], \qquad \varphi \in [0,2\pi]$$

dobijamo:

$$V = \iint\limits_{\sigma} (6 - \sqrt{x^2+y^2} - 2)\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma} (4 - \sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (4-\rho)\rho\,d\rho$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(4\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{16}{3}\,d\varphi = \frac{32\pi}{3}.$$

(c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \geq 1, z \geq \sqrt{x^2+y^2} - 4,\ z \leq 8 - x^2 - y^2\}$



(a) Zadato telo (b) Projekcija tela na xOy ravan

Slika 3: Zadatak 8(c)

Najpre odredimo presek konusa i paraboloida:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2}-4 &= 8-x^2-y^2,\ t=x^2+y^2\\
\sqrt{t}-4 &= 8-t\\
\sqrt{t} &= 12-t, \quad (t\le 12)\\
t &= (12-t)^2\\
t &= 144-24t+t^2\\
t^2-25t+144 &= 0\\
t_{1,2} &= \frac{25\pm 7}{2}\\
t_1 = 16 &\qquad t_2 = 9\\
&\text{rešenje } t_1 \text{ odbacujemo zbog uslova } t\le 12\\
\text{rešenje: } x^2+y^2 &= 9
\end{aligned}$$

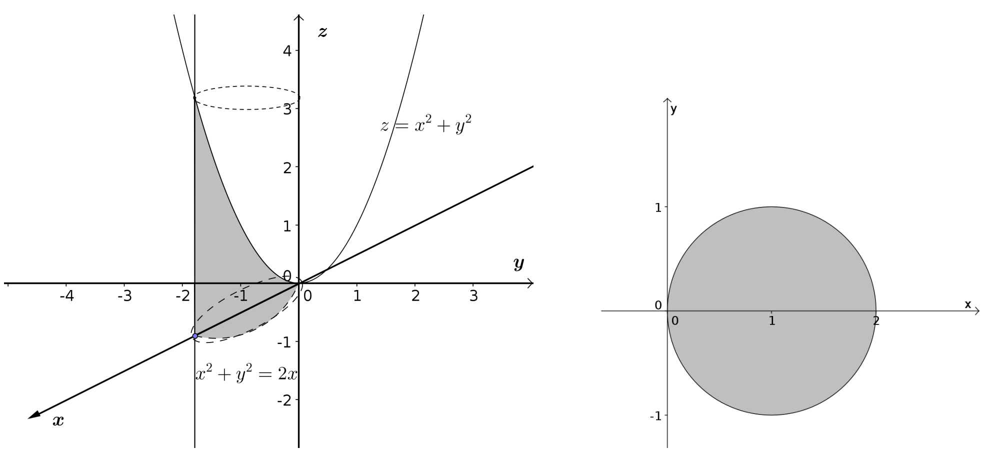
Presek konusa i paraboloida je kružnica poluprečnika 3. Projekcija tela na xOy-ravan je prsten $\sigma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 3^2\}$. Uvodeći smenu polarnim koordinatama

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ \rho\in[1,3],\ \varphi\in[0,2\pi]$$

dobijamo:

$$\begin{aligned}
V &= \iint\limits_{\sigma}(8-x^2-y^2-(\sqrt{x^2+y^2}-4))\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma}(12-(x^2+y^2)-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy\\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi\int_1^3(12-\rho^2-\rho)\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi}\left(12\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{58}{3}\,d\varphi = \frac{58}{3}2\pi = \frac{116\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(d) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 2x,\ 0\le z\le x^2+y^2\}$



(a) Zadato telo

(b) Projekcija tela na xOy ravan

Slika 4: Zadatak 8(d)

Projekcija tela na xOy ravan je $\sigma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2x\}$.
Uvodeći smenu polarnim koordinatama

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi,\qquad \rho\in[0,2\cos\varphi],\qquad \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

,
dobijamo:

$$V = \iint_{\sigma} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 \cdot \rho\, d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3\, d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi$$

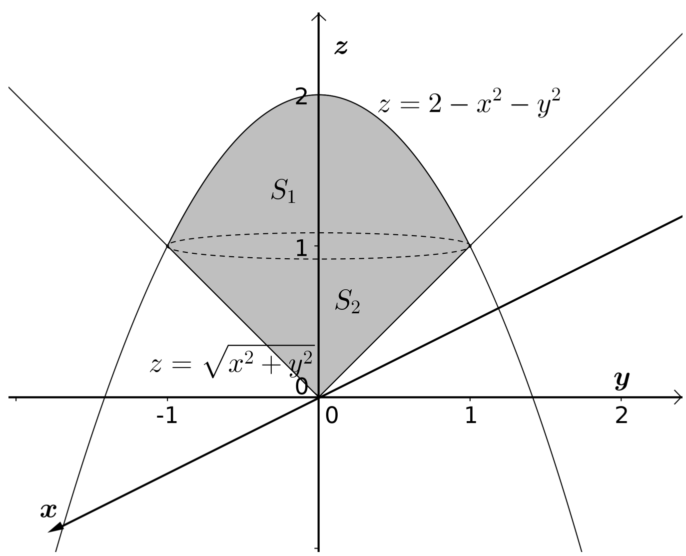
$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\, d\varphi = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi)^2\, d\varphi = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{4}\, d\varphi$$

$$= \cdots = \frac{3\pi}{2}.$$

9. Izračunati zapreminu i površinu tela $T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2-x^2-y^2\}$.

Rešenje:

Zadato telo je prikazano na sledećoj slici.

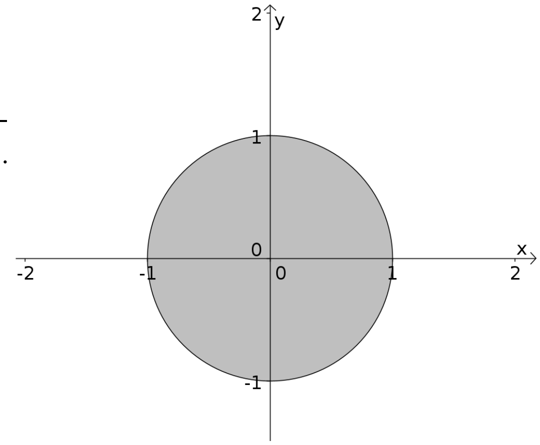


Najpre odredimo presek konusa i paraboloida

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2-x^2-y^2, \qquad t = x^2+y^2$$
$$\sqrt{t} = 2-t, \qquad (t \le 2)$$
$$t = (2-t)^2$$
$$t = 4-4t+t^2$$
$$t^2-5t+4 = 0$$
$$t_1 = 1 \qquad t_2 = 4$$

zbor uslova $t \le 2$ odbacuemo rešenje t_2

Presek konusa i paraboloida je kružnica poluprečnika 1, pa je projekcija tela na xOy ravan, $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Uvodimo smenu polarnim koordinatama



$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi$$

$$\rho \in [0,1], \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Zapreminu tela računamo po sledećoj formuli:

$$V = \iint\limits_{\sigma} (2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (2 - \rho^2 - \rho)\rho\,d\rho$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(2\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^1 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) d\varphi = \frac{5}{12}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{5}{12}2\pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Da bismo izračunali površinu tela, možemo ga posmatrati kao uniju dva tela, pa je onda $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$, gde je ΔS_1 površina dela paraboloida zadatog jednačinom $z = 2 - x^2 - y^2$ nad oblašću σ, a ΔS_2 je površina dela konusa zadatog jednačinom $z = \sqrt{x^2+y^2}$, koji se nalazi iznad oblasti σ.

Koristeći ranije navedenu formulu za površinu površi, dobijamo:

$$\Delta S_1 = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy$$

$$= \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\rho\,d\rho = \left| \begin{array}{c} \text{integral rešavamo smenom} \\ t = 1 + 4\rho^2 \\ \text{i dobijamo:} \end{array} \right|$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{5^3} - 1}{12}\right) d\varphi = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}2\pi = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}\pi.$$

$$\Delta S_2 = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$= \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{2}\,dx\,dy$$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_{\sigma} 1\,dx\,dy = \sqrt{2}P(\sigma) = \sqrt{2}\cdot 1^2\pi = \sqrt{2}\pi.$$

Konačno, $\Delta S = \dfrac{5\sqrt{5} - 1}{6}\pi + \sqrt{2}\pi$.

10. Izračunati površinu:

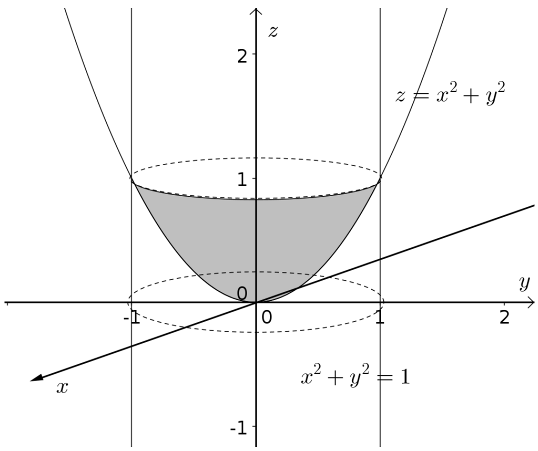
(a) dela paraboloida $z = x^2 + y^2$, koji se nalazi unutar cilindra $x^2 + y^2 = 1$;

(b) dela ravni $z = 2 - y$ koji se nalazi unutar cilindra $x^2 + y^2 = 4$;

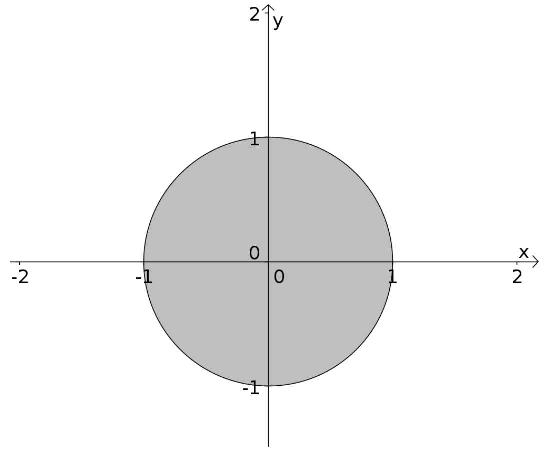
(c) dela konusa $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ između ravni $z = 1$ i $z = 3$.

Rešenje:

(a) Zadata površ je prikazana na sledećoj slici.



(a) Zadata površ

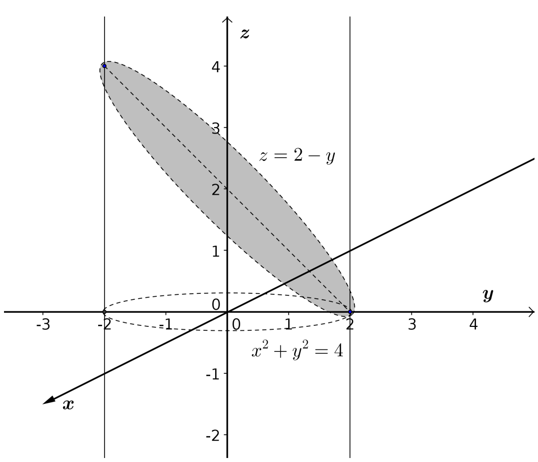


(b) Projekcija tela na xOy ravan

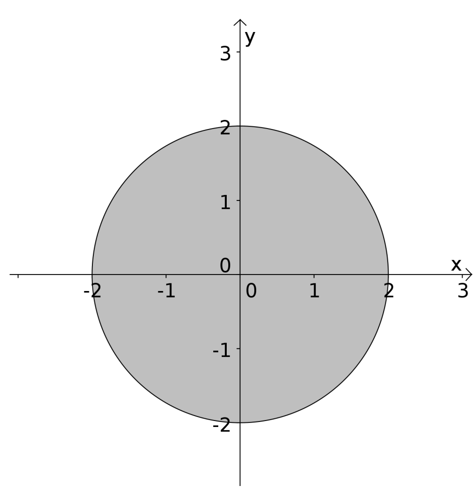
Slika 5: Zadatak 10(a)

Projekcija dela površi, čiju površinu tražimo, na xOy ravan je oblast $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Uvodeći smenu polarnim koordinatama $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \rho \in [0, 1],\ \varphi \in [0, 2\pi]$, dobijamo:

$$\Delta S = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dx\, dy = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho\, d\rho = \dots = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}\pi$$



(a) Zadata površ



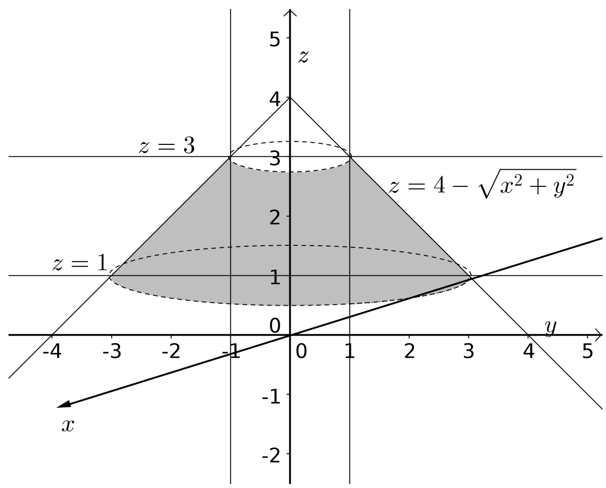
(b) Projekcija tela na xOy ravan

Slika 6: Zadatak 10(b)

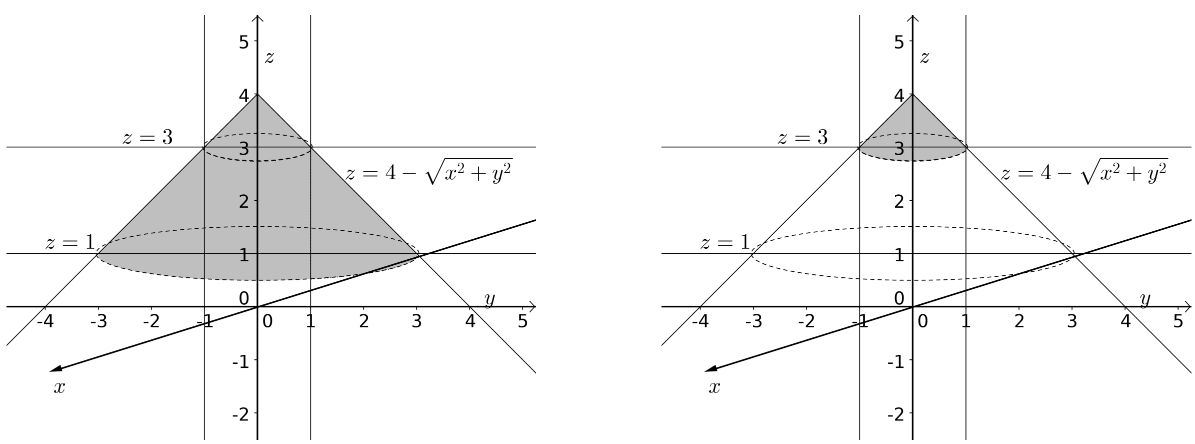
(b) Projekcija na xOy ravan je $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Površ, čiju površinu tražimo, je zadata jednačinom $z = 2 - y$, pa je $z_x = 0$ i $z_y = -1$. Traženu površinu računamo na sledeći način:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1+0+1}\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2} \iint\limits_{\sigma} 1\, dx\, dy \\ &= \sqrt{2} P(\sigma) = \sqrt{2} \cdot 2^2 \cdot \pi = 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

(c) Tražimo površinu dela površi prikazane na sledećoj slici.



Traženu površinu možemo izračunati na sledeći način: $\Delta S = \Delta S_1 - \Delta S_2$, gde je ΔS_1 površina konusa između ravni $z = 1$ i $z = 4$ (Slika 7 (a)), a ΔS_2 površina dela konusa između ravni $z = 3$ i $z = 4$ (Slika 7 (b)).



(a) ΔS_1 (b) ΔS_2

Slika 7: Zadatak 10(c)

Presek konusa i ravni $z = 1$ je:

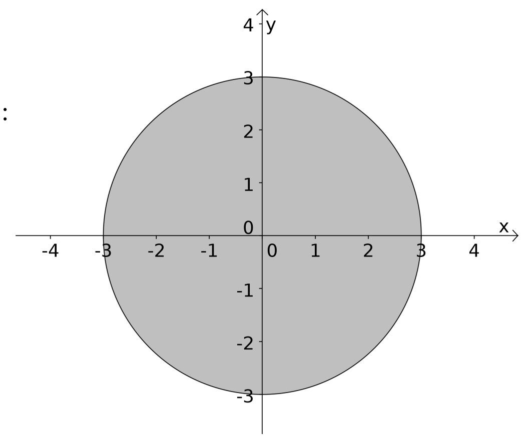
$$\begin{aligned} 1 &= 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= 3 \\ x^2 + y^2 &= 3^2 \end{aligned}$$

Projekcija površi S_1 na xOy ravan je $\sigma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3^2\}$. Uvodeći smenu polarnim koordinatama,

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi$$

$$\rho \in [0,3] \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

dobijamo:



$$\begin{aligned}\Delta S_1 &= \iint\limits_{\sigma_1} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma_1} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\, dx\, dy \\ &= \iint\limits_{\sigma_1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma_1} \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2} \iint\limits_{\sigma_1} 1\, dx\, dy \\ &= \sqrt{2} P(\sigma_1) = \sqrt{2} \cdot 3^2 \cdot \pi = 9\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

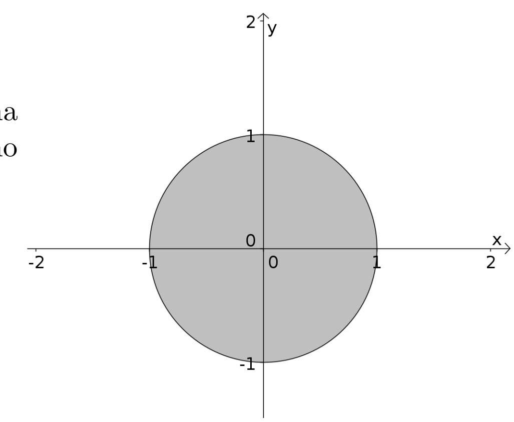
Sada tražimo presek konusa i ravni $z = 3$:

$$\begin{aligned}3 &= 4 - \sqrt{x^2+y^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

Na osnovu ovog, zaključujemo da je projekcija površi S_2 na xOy ravan oblast $\sigma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Uvodimo smenu polarnim koordinatama

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi$$

$$\rho \in [0,1] \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$



Računamo površinu ΔS_2

$$\begin{aligned}\Delta S_2 &= \iint\limits_{\sigma_2} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma_2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\, dx\, dy \\ &= \iint\limits_{\sigma_2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma_2} \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2} \iint\limits_{\sigma_2} 1\, dx\, dy \\ &= \sqrt{2} \cdot P(\sigma_2) = \sqrt{2} \cdot 1^2 \cdot \pi = \sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

Tražena površina je: $\Delta S = \Delta S_1 - \Delta S_2 = 9\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}\pi = 8\sqrt{2}\pi$.

Napomena: Traženu površinu smo mogli izračunati i tako što projektujemo deo konusa na xOy ravan, pri čemu je projekcija prsten $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 3\}$ i izračunamo integral $\Delta S = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$, gde je $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$.