Kompleksna analiza

Elementarne funkcije

Neka je $\omega = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, oznaka za kompleksnu funkciju kompleksne promenljive.

1. $\omega = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ je **stepena funkcija**. Za $z = \rho e^{i\varphi}$ je $z^n = \rho^n e^{in\varphi}$.

   $\omega = P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,\ i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, je **polinom stepena** n.

2. $\omega = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, $n < m,\ Q_m(z) \neq 0$, je **prava racionalna funkcija**.

3. $\omega = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, je **eksponencijalna funkcija**.

4. $\omega = \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ z \in \mathbb{C},$

   $\omega = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ z \in \mathbb{C},$

   $\omega = \operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z},\ z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

   $\omega = \operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z},\ z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, su **trigonometrijske funkcije**.

5. $\omega = \operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2},\ z \in \mathbb{C},$

   $\omega = \operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2},\ z \in \mathbb{C},$

   $\omega = \operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ z \neq \dfrac{\pi}{2} i + k\pi i,\ k \in \mathbb{Z},$

   $\omega = \operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z},\ z \neq k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$, su **hiperbolične trigonometrijske funkcije**.

Višeznačne elementarne funkcije

1. $\omega = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$ je **korena funkcija**.

2. $\omega = \operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i,\ z \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}$, je **logaritamska funkcija**, pri čemu je

   $$\ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

   i naziva se *glavna vrednost (grana)* od $\operatorname{Ln} z$.

3. $\omega = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}),\ z \in \mathbb{C},$

   $\omega = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),\ z \in \mathbb{C},$

   $\omega = \operatorname{Arctg} z = -\dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{i - z}{i + z},\ z \neq \pm i,$

   $\omega = \operatorname{Arcctg} z = -\dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z + i}{z - i},\ z \neq \pm i$, su **inverzne trigonometrijske funkcije**.

Opšte funkcije

1. $\omega = z^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Ln} z}$, $z \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, je **opšta stepena funkcija**.
2. $\omega = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$, $a \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, je **opšta eksponencijalna funkcija**.

Zadaci:

1. **Izračunati vrednosti funkcija:**

   a) $\operatorname{Ln} i$, b) $\operatorname{Ln}(-1)$, c) $\operatorname{Ln}(1-i)$, d) $\cos i$, e) $i^{2\pi i}$, f) $(-1)^{\pi i}$.

   Rešenje:

   a) $\operatorname{Ln} i = \ln i + 2k\pi i = \ln|i| + i \arg i + 2k\pi i = \ln 1 + i\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi i = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i$, $k \in \mathbb{Z}$.

   b) $\operatorname{Ln}(-1) = \ln(-1) + 2k\pi i = \ln|-1| + i\arg(-1) + 2k\pi i = \ln 1 + i\pi + 2k\pi i = (2k\pi + \pi)\, i$, $k \in \mathbb{Z}$.

   c) $\operatorname{Ln}(1-i) = \ln(1-i) + 2k\pi i = \ln|1-i| + i\arg(1-i) + 2k\pi i = \ln\sqrt{2} - i\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi i = \ln\sqrt{2} + \left(-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) i$, $k \in \mathbb{Z}$.

   d) $\cos i = \dfrac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \dfrac{e^{-1} + e^{1}}{2} = \dfrac{1 + e^2}{2e} = \operatorname{ch} 1.$

   e) $i^{2\pi i} = e^{2\pi i \operatorname{Ln} i} = e^{2\pi i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i} = e^{-\pi^2 - 4k\pi^2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

   f) $(-1)^{\pi i} = e^{\pi i \operatorname{Ln}(-1)} = e^{\pi i(2k\pi + \pi)i} = e^{-\pi^2 - 2k\pi^2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. **Rešiti jednačine u skupu kompleksnih brojeva.**

   a) $\cos z = 2$, b) $\sin z = 0$.

   Rešenje:

   a) $\cos z = 2 \Leftrightarrow z = \operatorname{Arccos} 2$.
   Koristeći definiciju funkcije $\omega = \operatorname{Arccos} z$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Arccos} 2 &= -i \operatorname{Ln}(2 + \sqrt{2^2 - 1}) = -i \operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) = -i\left(\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i\right) \\
&= -i\left(\ln|2 \pm \sqrt{3}| + i\arg(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i\right) = -i\left(\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i\right) \\
&= 2k\pi - \ln(2 \pm \sqrt{3}) i,
\end{aligned}
$$

   pa je rešenje jednačine $\cos z = 2$ u skupu kompleksnih brojeva $z = 2k\pi - \ln(2 \pm \sqrt{3}) i$, $k \in \mathbb{Z}$.

   b) $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = \operatorname{Arcsin} 0$.
   Koristeći definiciju funkcije $\omega = \operatorname{Arcsin} z$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin} 0 &= -i \operatorname{Ln}(i \cdot 0 + \sqrt{1 - 0^2}) = -i \operatorname{Ln}(\sqrt{1}) = -i \operatorname{Ln}(\pm 1) \\
&= -i\,(\ln(\pm 1) + 2k\pi i) = -i\,(\ln|\pm 1| + i\arg(\pm 1) + 2k\pi i) \\
&= \arg(\pm 1) + 2k\pi = \begin{cases} 0 + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \end{cases} \\
&= k\pi,
\end{aligned}
$$

pa je rešenje jednačine $\sin z = 0$ u skupu kompleksnih brojeva $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Drugi način: koristeći definiciju funkcije $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, dobija se

$\sin z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} - \dfrac{1}{e^{iz}} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1$

$\Leftrightarrow 2iz = \operatorname{Ln} 1 \Leftrightarrow 2iz = \ln|1| + i\arg 1 + 2k\pi i \Leftrightarrow 2iz = 2k\pi i \Leftrightarrow z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Analitička funkcija

Zadaci:

1. **Naći izvod funkcije $f(z)$ po definiciji i odrediti na kom skupu je funkcija analitička.**

   a) $f(z) = \cos(z + i)$, b) $f(z) = \dfrac{z}{z - i}$.

   Rešenje:

   a) Izvod funkcije $f(z)$ po definiciji je

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\cos(z + \Delta z + i) - \cos(z + i)}{\Delta z} = -\lim_{\Delta z \to 0} \frac{2\sin(\frac{z+\Delta z+i+z+i}{2})\sin\frac{z+\Delta z+i-z-i}{2}}{\Delta z} \\ &= -\lim_{\Delta z \to 0} \frac{2\sin(z + \frac{\Delta z}{2} + i)\sin\frac{\Delta z}{2}}{2\frac{\Delta z}{2}} = -\lim_{\Delta z \to 0} \sin(z + \frac{\Delta z}{2} + i) \\ &= -\sin(z + i). \end{aligned}$$

   Kako je funkcija diferencijabilna u svakoj tački (ima izvod u svakoj tački) skupa $\mathbb{C}$, ona je analitička na skupu $\mathbb{C}$.

   b) Izvod funkcije $f(z)$ po definiciji je

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{z+\Delta z}{z+\Delta z-i} - \frac{z}{z-i}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-i\Delta z}{(z + \Delta z - i)(z - i)\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-i}{(z + \Delta z - i)(z - i)} \\ &= \frac{-i}{(z - i)^2}. \end{aligned}$$

   Kako je funkcija diferencijabilna u svakoj tački (ima izvod u svakoj tački) skupa $\mathbb{C}$ osim u tački $z = i$, ona je analitička na skupu $\mathbb{C}\backslash\{i\}$.

2. **Pokazati da funkcija $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$ nije analitička na skupu $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.**

   Rešenje:

   Neka je $z = x + iy$. Tada je funkcija $f(z)$ oblika

   $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z} = \dfrac{x}{x + iy} \cdot \dfrac{x - iy}{x - iy} = \dfrac{x^2 - ixy}{x^2 + y^2} = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-xy}{x^2 + y^2}$,

   pa su realni i imaginarni deo funkcije $f(z)$, redom $u(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ i $v(x, y) = \dfrac{-xy}{x^2 + y^2}$.

Kako je $u_x = \dfrac{2x(x^2+y^2)-2x^3}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ a $v_y = \dfrac{-x(x^2+y^2)+2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-x^3+xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, jasno je da je $u_x \neq v_y$, tj. ne važe Koši-Rimanovi uslovi, pa funkcija $f(z)$ nije analitička na skupu $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

3. **Odrediti konstante** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, **tako da funkcija** $\omega = ax^2 + bxy + y^2 + 1 + i(x^2 + cxy + dy^2)$ **bude analitička na skupu** $\mathbb{C}$ **i zapisati je u obliku** $\omega = f(z)$, $z = x + iy$.

   Rešenje:

   Realni i imaginarni deo funkcije ω su redom $u(x,y) = ax^2 + bxy + y^2 + 1$ i $v(x,y) = x^2 + cxy + dy^2$, pa je $u_x = 2ax + by$, $u_y = bx + 2y$, $v_x = 2x + cy$ i $v_y = cx + 2dy$.

   Korišćenjem Koši-Rimanovih uslova, dobija se $u_x = v_y \Rightarrow 2a = c \wedge b = 2d$ i $u_y = -v_x \Rightarrow b = -2 \wedge c = -2$, pa je $a = -1$, $b = -2$, $c = -2$ i $d = -1$, odakle je

$$\begin{aligned} \omega &= -x^2 - 2xy + y^2 + 1 + i(x^2 - 2xy - y^2) = -x^2 - 2xy + y^2 + 1 + ix^2 - 2ixy - iy^2 \\ &= -(x^2 + 2ixy - y^2) + 1 + i(x^2 + 2ixy - y^2) = -(x+iy)^2 + 1 + i(x+iy)^2. \end{aligned}$$

   Kako je $z = x + iy$ dobija se da je $\omega = f(z) = (i-1)z^2 + 1$.

4. **Odrediti analitičku funkciju** $\omega = u(x,y) + iv(x,y)$ **na skupu** $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ **ako je dat imaginarni deo** $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ **i** $f(1) = 0$ **i zapisati je u obliku** $\omega = f(z)$, $z = x + iy$.

   Rešenje:

   Kako je $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, sledi

$$v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{i} \quad v_y = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

   Iz Koši-Rimanovog uslova $u_y = -v_x$ je $u_y = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ pa je

$$u(x,y) = -\int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -x\int \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi(x).$$

   Potrebno je još odrediti nepoznatu funkciju $\varphi(x)$. Kako je $u_x = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x)$, iz Koši-Rimanovog uslova $u_x = v_y$ sledi $\dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x) = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$, odakle je $\varphi'(x) = 0$, pa je $\varphi(x) = c$, $c = const.$

   Dakle, $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + c$, pa je tražena funkcija

$$\omega = u(x,y) + iv(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + c + i\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + c = \frac{1}{x+iy} + c.$$

   Kako je $z = x + iy$ sledi da je $\omega = f(z) = \dfrac{1}{z} + c$, a iz uslova $f(1) = 1 + c = 0$ sledi da je $c = -1$.

   Dakle, tražena analitička funkcija na skupu $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ je $f(z) = \dfrac{1}{z} - 1$.

5. **Odrediti analitičku funkciju** $\omega = u(x,y) + iv(x,y)$ **na skupu** $\mathbb{C}$ **ako je dat realni deo** $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^{9x}\cos 9y + 9$ **i** $f(0) = 10$ **i zapisati je u obliku** $\omega = f(z)$, $z = x + iy$.

   Rešenje:

Kako je $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^{9x} \cos 9y + 9$, sledi

$$u_x = 2x + 9e^{9x} \cos 9y \quad \text{i} \quad u_y = -2y - 9e^{9x} \sin 9y.$$

Iz Koši-Rimanovog uslova $u_x = v_y$ je $v_y = 2x + 9e^{9x} \cos 9y$ pa je

$$v(x,y) = \int (2x + 9e^{9x} \cos 9y)\, dy = 2xy + e^{9x} \sin 9y + \varphi(x).$$

Potrebno je još odrediti nepoznatu funkciju $\varphi(x)$. Kako je $v_x = 2y + 9e^{9x} \sin 9y + \varphi'(x)$, iz Koši-Rimanovog uslova $u_y = -v_x$ sledi $-2y - 9e^{9x} \sin 9y = -(2y + 9e^{9x} \sin 9y + \varphi'(x))$, odakle je $\varphi'(x) = 0$, pa je $\varphi(x) = c$, $c = const$.

Dakle, $v(x,y) = 2xy + e^{9x} \sin 9y + c$, pa je tražena funkcija

$$\begin{aligned} \omega = u(x,y) + iv(x,y) &= x^2 - y^2 + e^{9x} \cos 9y + 9 + i(2xy + e^{9x} \sin 9y + c) \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 + e^{9x}(\cos 9y + i \sin 9y) + 9 + ic. \end{aligned}$$

Kako je $z = x + iy$ sledi da je $\omega = f(z) = z^2 + e^{9z} + 9 + ic$, a iz uslova $f(0) = 10$ sledi da je $c = 0$.

Dakle, tražena analitička funkcija na skupu $\mathbb{C}$ je $f(z) = z^2 + e^{9z} + 9$.