Neprekidna jednodimenzionalna slučajna promenljiva i njene transformacije.

Zadatak 1

POSTAVKA: Knjiga u čitaonici se iznajmljuje najduže na dva sata. Neka slučajna promenljiva X označava vreme zadržavanja knjige kod slučajno izabranog studenta. Gustina slučajne promenljive X data je sa:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

(a) Izračunati $F_X(1.2)$, $F_X(-1)$, $F_X(3.5)$, a zatim naći funkciju raspodele $F_X(x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

(b) Kolika je verovatnoća da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena?

(c) Izračunati verovatnoće $P(X < 1)$, $P(X > 1.5)$ i $P(X = 1)$.

(d) Grafički predstaviti funkciju gustine $\varphi_X(x)$ i funkciju raspodele $F_X(x)$.

REŠENJE:

(a) Direktnom primenom izraza za vrednost funkcije raspodele dobijamo:

$$F_X(1.2) = P(X < 1.2)^* = \int_{-\infty}^{1.2} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1.2} \frac{1}{2}\, x\, dx = 0 + \frac{1}{4}\, x^2 \Big|_0^{1.2} = 0.36.$$

Gornji integral se piše kao zbir integrala funkcije gustine nad intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, 1.2)$, zato što je funkcija gustine različito i definisana nad ovim intervalima. Analogno sledi:

$$F_X(-1) = P(X < -1) = \int_{-\infty}^{-1} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-1} 0\, dx = 0,$$

zato što je $\varphi_X(x) = 0$ za svako $x < -1$, kao i:

$$F_X(3.5) = \int_{-\infty}^{3.5} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{2} \varphi_X(x)\, dx + \int_{2}^{3.5} 0\, dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{2} x\, dx = 1.$$

*U literaturi se mogu naći sledeće definicije funkcije raspodele: 1° $F_X(x) = P(X \leq x)$ i 2° $F_X(x) = P(X < x)$. Na ovom kursu funkciju raspodele definišemo na drugi način, kao $F_X(x) = P(X < x)$.

Za pronalaženje funkcije raspodele u proizvoljnoj tački $x \in \mathbb{R}$, razmotrićemo sledeća tri slučaja:

(i) Za $x \leq 0$, važi da je:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0.$$
Primetiti da se integrali po t. Ovo je urađeno samo zato da se oznaka x ne bi koristila i za broj i za promenjivu. Ovde je x broj, i to broj iz intervala $(-\infty, 0]$.

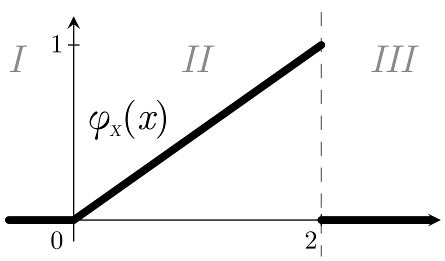
(ii) Za neko fiksirano x iz intervala $(0, 2]$, dobija se:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\, t\, dt = 0 + \frac{1}{4}\, t^2 \Big|_0^x = \frac{1}{4} x^2.$$

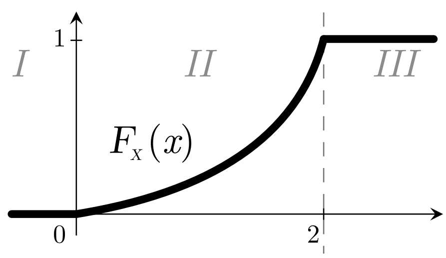
(iii) Ako je $x > 2$, dobijamo:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}\, t\, dt + \int_{2}^{x} 0\, dt = 0 + \frac{1}{4}\, t^2 \Big|_0^2 + 0 = 1.$$
Konačno, iz (i), (ii) i (iii) dobija se izraz za funkciju raspodele:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

(b) Verovatnoća događaja da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena je verovatnoća da slučajna promenjiva X uzima vrednosti između 1 i 1.5. U skladu sa tim:
$$\mathsf{P}(1 \leq X \leq 1.5) = \int_{1}^{1.5} \frac{1}{2}\, x\, dx = \frac{1}{4}\, x^2 \Big|_1^{1.5} = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125.$$
Primetimo da isti rezultat možemo dobiti i pomoću funkcije raspodele F_X određene pod (a):
$$\mathsf{P}(1 \leq X \leq 1.5) = \mathsf{P}(1 < X < 1.5) = F_X(1.5) - F_X(1) = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125.$$

(c) Direktno se dobija da je:
$$\mathsf{P}(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\, x\, dx = 0 + \frac{1}{4}\, x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} = 0.25.$$
Traženu verovatnoću možemo izračunati i ovako: $\mathsf{P}(X < 1) = F_X(1) = \frac{1}{4}$.
Slično je $\mathsf{P}(X > 1.5) = \int_{1.5}^{2} \frac{1}{2}\, x\, dx = \frac{1}{4}\, x^2 \Big|_{1.5}^{2} = 1 - 0.5625 = 0.4375$ ili, pomoću funkcije raspodele, $\mathsf{P}(X > 1.5) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 1.5) = 1 - \mathsf{P}(X < 1.5) = 1 - F_X(1.5) = 1 - \dfrac{1.5^2}{4} = 0.4375$. Na kraju, znamo da je $\mathsf{P}(X = 1) = 0$, na osnovu osobine gustine koja je zadovoljena za svaki realan broj.

(d) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





Zadatak 2

Postavka: Na putu za posao, profesor prvo mora da „hvata” autobus blizu kuće koji ga odvozi do stajališta za drugi autobus koji ga vozi do posla. Slučajna promenljiva X predstavlja vreme čekanja oba autobusa (izraženo u minutama) i data je gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & 0 \le x < 5, \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{25}x, & 5 \le x \le 10, \\ 0, & x \notin [0, 10]. \end{cases}$$

(a) Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti” više od 6 minuta?

(b) Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti” između 3 i 8 minuta?

(c) Naći funkciju raspodele $F_X(x)$.

(d) Grafički predstaviti funkcije $\varphi_X(x)$ i $F_X(x)$, a zatim na graficima obeležiti $\mathsf{P}(X < 6)$.

Rešenje:

(a) Verovatnoća događaja da će na čekanje „izgubiti” više od 6 minuta je:

$$\mathsf{P}(X > 6) = \int_6^{\infty} \varphi_X(x)\,dx = \int_6^{10} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}x\right) dx = \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2\right)\Big|_6^{10} = 0.32.$$

(b) Uočimo da je gustina različito definisana na intervalima $[0, 5)$ i $[5, 10]$. Slično kao pod (a), dobijamo da je tražena verovatnoća:

$$\mathsf{P}(3 \le X \le 8) = \int_3^8 \varphi_X(x)\, dx = \int_3^5 \frac{1}{25}x\,dx + \int_5^8 \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}x\right) dx = \frac{x^2}{50}\Big|_3^5 + \left(\frac{2x}{5} - \frac{x^2}{50}\right)\Big|_5^8 = 0.74.$$

(c) Ako je $x \le 0$, onda je za takvo x trivijalno $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$

Ako je $x \in (0, 5]$, tada je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x \frac{1}{25}t\,dt = \frac{x^2}{50}.$

Ako je $x \in (5, 10]$, tada je:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^5 \frac{1}{25}t\,dt + \int_5^x \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}t\right) dt = \frac{t^2}{50}\Big|_0^5 + \left(\frac{2t}{5} - \frac{t^2}{50}\right)\Big|_5^x = -1 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2.$$

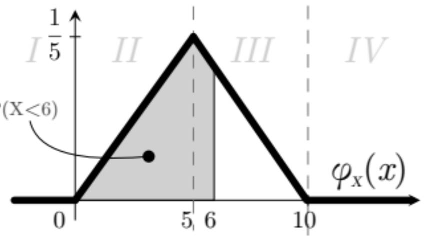
Konačno, ako je $x > 10$, onda je:

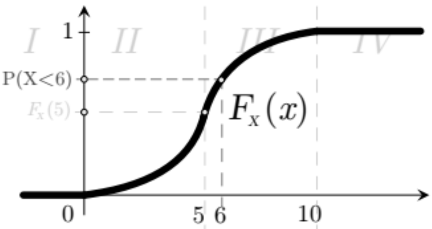
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^5 \frac{1}{25}t\,dt + \int_5^{10} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{25}t\right) dt + \int_{10}^{x} 0\,dt = 1.$$

Da sumiramo, funkcija raspodele je data sa:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{50}, & 0 < x \le 5, \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1, & 5 < x \le 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

(d) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





Obratimo posebnu pažnju na to da je tražena verovatnoća $\mathsf{P}(X < 6)$ na grafiku gustine predstavljena kao (zatamnjena) *površina*, a na grafiku funkcije raspodele kao *broj*, koji se očitava sa ordinate, jer je $\mathsf{P}(X \leq 6) = \mathsf{P}(X < 6) = F_X(6)$.

Zadatak 3

Postavka: Neprekidna slučajna promenljiva data je funkcijom raspodele

$$F_X(x) = \begin{cases} b^3 - 1, & x \leq 0, \\ \frac{x}{4}(1 + \ln\frac{4}{x}), & 0 < x \leq 4, \\ a^2, & x > 4. \end{cases}$$

(a) Odrediti realne konstante a i b.

(b) Naći funkciju gustine za X.

(c) Izračunati $P(X \leq 1)$ i $P(1 < X \leq 3)$.

Rešenje:

(a) Ako je za neko $a, b \in \mathbb{R}$ funkcija $F_X(x)$ zaista funkcija raspodele neke slučajne promenjive X, onda ona mora zadovoljavati i osobine $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Važi da je $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x)$ jednako $b^3 - 1$, jer je to vrednost koju uzima $F_X(x)$ za bilo x koje je manje od 0, pa je zato $b = 1$. Takođe je $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x)$ jednako a^2, jer je to vrednost koju uzima $F_X(x)$ za bilo x veće od 4, pa zato mora biti $a = \pm 1$.

Dakle, jedino je funkcija za koju je $a = \pm 1$ i $b = 1$, tj. funkcija:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{4}(1 + \ln\frac{4}{x}), & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4, \end{cases}$$

zaista funkcija raspodele, te u nastavku nećemo više ni pominjati parametre a i b.

(b) Kako je sad već poznata funkcija raspodele F_X, gustinu ćemo naći kao njen izvod, u svim tačkama u kojima je gustina neprekidna. Za $x \in (0, 4]$ je:

$$\varphi_X(x) = \left(\frac{x}{4}\left(1 + \ln\frac{4}{x}\right)\right)' = \frac{1}{4}\left(1 + \ln\frac{4}{x}\right) + \frac{x}{4}\cdot\frac{x}{4}\cdot\left(-\frac{4}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \ln\frac{4}{x}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\ln\frac{4}{x},$$

gde smo koristili izraz za izvod proizvoda i za složeni izvod. Budući da znamo da je izvod konstante jednak nuli, nije teško zaključiti da je konačno:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\ln\frac{4}{x}, & x \in (0, 4], \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(c) $\mathsf{P}(X \leq 1) = \mathsf{P}(X < 1) = F_X(1) = \frac{1}{4}(1 + \ln 4)$.

Slično je $\mathsf{P}(1 < X \leq 3) = \mathsf{P}(1 < X < 3) = F_X(3) - F_X(1) = \frac{3}{4}\left(1 + \ln\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{4}(1 + \ln 4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln\frac{16}{27} \approx 0.37$.

Ove vrednosti su se mogle dobiti i integracijom gustine $\varphi_X(x)$.

Zadatak 4

Postavka: Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu, $X : \mathcal{U}(-1, 4)$.

(a) Izračunati $F_X(1.2)$, $\mathsf{P}(|X - 3| \leq 5)$ i $\mathsf{P}(1 < 2 - X < 10)$.

(b) Na grafiku funkcije gustine i funkcije raspodele predstaviti $\mathsf{P}(1 < X \leq 2)$.

Rešenje:

(a) Znamo kako izgleda funkcija gustine i raspodele slučajne promenjive koja ima $X : \mathcal{U}(a, b)$ raspodelu. Ovde je konkretno $a = -1$ i $b = 4$, pa je zato:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-1, 4), \\ \frac{1}{5}, & x \in (-1, 4), \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{x+1}{5}, & -1 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Tražene verovatnoće je onda lako izračunati:

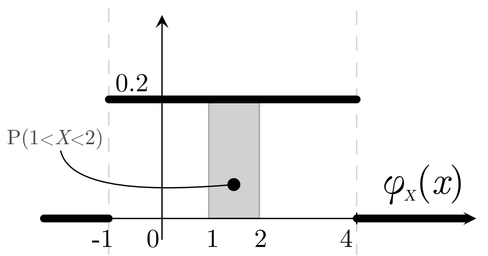
$F_X(1.2) = \frac{1.2+1}{5} = \frac{2.2}{5} = 0.44$,

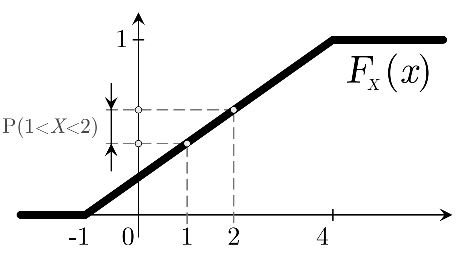
$\mathsf{P}(|X - 3| \leq 5) = \mathsf{P}(-5 \leq X - 3 \leq 5) = \mathsf{P}(-2 \leq X \leq 8) = \mathsf{P}(-2 < X < 8) = F_X(8) - F_X(-2) = 1 - 0 = 1$,

$\mathsf{P}(1 < 2 - X < 10) = \mathsf{P}(-10 < X - 2 < -1) = \mathsf{P}(-8 < X < 1) = F_X(1) - F_X(-8) = \frac{2}{5}$.

Sve ove verovatnoće su se mogle odrediti i integracijom funkcije gustine, kao u prethodnim zadacima.

(b) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





Obratimo posebnu pažnju na to da je tražena verovatnoća $\mathsf{P}(1 < X < 2)$ na grafiku gustine predstavljena kao (zatamnjena) *površina*, a na grafiku funkcije raspodele kao *rastojanje*, koje se očitava sa ordinate, jer je $\mathsf{P}(1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(1)$.

Zadatak 5

Postavka: Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu, $X : \mathcal{E}(2)$.

(a) Odrediti funkciju raspodele i gustinu slučajne promenljive X.

(b) Izračunati verovatnoće $\mathsf{P}(-1 < X \leq 2)$, $\mathsf{P}(X > 1.5)$, $\mathsf{P}(|X| \leq 3)$. Naći $F_X(2)$.

(c) Na grafiku funkcije gustine i funkcije raspodele predstaviti $P(X > 1.5)$.

Rešenje:

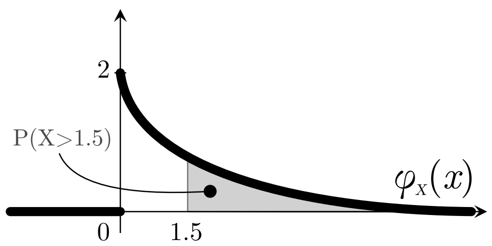
(a) Znamo kako izgleda funkcija gustine i raspodele slučajne promenjive koja ima $X : \mathcal{E}(a)$ raspodelu. Ovde je $a = 2$, pa je konkretno:

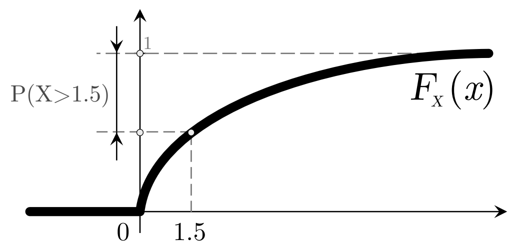
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2e^{-2x}, & x > 0, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

(b) Tražene verovatnoće se mogu lako izračunati:

$\mathsf{P}(-1 < X \leq 2) = \mathsf{P}(-1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(-1) = (1 - e^{-4}) - 0 = 1 - e^{-4} \approx 0.982$,
$\mathsf{P}(X > 1.5) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 1.5) = 1 - \mathsf{P}(X < 1.5) = 1 - F_X(1.5) = 1 - (1 - e^{-3}) = e^{-3} \approx 0.05$,
$\mathsf{P}(|X| \leq 3) = \mathsf{P}(-3 \leq X \leq 3) = \mathsf{P}(-3 < X < 3) = F_X(3) - F_X(-3) = (1 - e^{-6}) - 0 = 1 - e^{-6} \approx 0.998$,
$F_X(2) = 1 - e^{-4} \approx 0.982$.

(c) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





Obratimo posebnu pažnju na to da je tražena verovatnoća $\mathsf{P}(X > 1.5)$ na grafiku gustine predstavljena kao (zatamnjena) *površina*, a na grafiku funkcije raspodele kao *rastojanje*, koja se očitava sa ordinate, jer je $\mathsf{P}(X > 1.5) = 1 - F_X(1.5)$.

Zadatak 6

Postavka: Slučajna promenljiva X ima normalnu $X : \mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu.

(a) Izračunati verovatnoće $P(1.34 < X \leq 2.16)$, $P(X < 2.17)$, $P(-1.34 < X \leq 2.16)$ i $P(X > 1.48)$;

(b) Odrediti x tako da je $P(X < x) = 0.834$, $P(X > x) = 0.23425$ i $P(X < x) = 0.1231$.

Rešenje:

Kao i svaka slučajna promenljiva neprekidnog tipa, i slučajna promenljiva sa normalnom (Gausovom) $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelom data je funkcijom gustine i funkcijom raspodele U slučaju kada je $m = 0$ i $\sigma = 1$ u pitanju je standardizovana normalna $\mathcal{N}(0,1)$ raspodela, čiju funkciju raspodele označavamo sa $\Phi(x)$. Vrednosti funkcije rapodele $\Phi(x)$ date su u statističkoj tablici normalne $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele, koju ćemo koristiti prilikom rešavanja ovog i narednog zadataka (tablica se može naći na sajtu predmeta). Takođe se koriste i sledeće osobine funkcije $\Phi(x)$:

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$

$$\begin{array}{c|ccc}
x & \dots & 0.07 & \dots \\
\hline
\vdots & & \downarrow & \\
2.1 & \rightarrow & 0.985 & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

Dakle, $\Phi(2.17) = 0.985$.

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ kao i $P(|Z| < x) = 2\Phi(x) - 1$.

a) $P(1.34 < X \leq 2.16) = P(1.34 < X < 2.16) = \Phi(2.16) - \Phi(1.34) = 0.9846 - 0.9099 = 0.0747$

   $P(X < 2.17) = \Phi(2.17) = 0.985$

   $P(-1.34 < X \leq 2.16) = P(-1.34 < X < 2.16) = \Phi(2.16) - \Phi(-1.34) = \Phi(2.16) - (1 - \Phi(1.34) = 0.9846 - (1 - 0.9099) = 0.9846 - 0.0901 = 0.8945$

   $P(X > 1.48) = 1 - P(X \leq 1.48) = 1 - P(X < 1.48) = 1 - \Phi(1.48) = 1 - 0.9306 = 0.0694$.

b) Tražimo x tako da je $P(X < x) = 0.834$. Znamo da je $P(X < x) = \Phi(x) = 0.834$, pa je odatle $x = \Phi^{-1}(0.834) = 0.97$.

   Tražimo x tako da je $P(X > x) = 0.23425$. Znamo da je $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - P(X < x) = 1 - \Phi(x) = 0.23425$. Odatle je $\Phi(x) = 1 - 0.23425 = 0.76575$, a $x = \Phi^{-1}(0.76575) = 0.725$.

   Tražimo x tako da je $P(X < x) = 0.1231$. Znamo da je $P(X < x) = \Phi(x) = 0.1231$, ali 0.1231 ne možemo da nađemo u tablici pa koristimo osobinu $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Odatle je $\Phi(-x) = 1 - 0.1231 = 0.8769$, pa je $-x = 1.16$ i konačno $x = -1.16$.

Zadatak 7

Postavka: Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(80,10)$. Izračunati verovatnoće $P(X \leq 100)$, $P(70 \leq X)$, $P(65 \leq X \leq 100)$ i $P(|X - 80| \leq 10)$.

Rešenje:

Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu sa parametrima m i σ, tada slučajna promenljiva $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ ima normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu, tj.

$$X : \mathcal{N}(80,10) \;\Rightarrow\; X^* = \frac{X-80}{10} : \mathcal{N}(0,1).$$

- $P(X \leq 100) = P(\frac{X-80}{10} \leq \frac{100-80}{10}) = P(X^* \leq 2) = \Phi(2) = 0.9773.$
- $P(70 \leq X) = P(\frac{70-80}{10} \leq \frac{X-80}{10}) = P(-1 \leq X^*) = 1 - P(X^* < -1) =$
  $= 1 - \Phi(-1) = 1 - (1-\Phi(1)) = 0.8413.$
- $P(65 \leq X \leq 100) = P(\frac{65-80}{10} \leq \frac{X-80}{10} \leq \frac{100-80}{10}) = P(-1.5 \leq X^* \leq 2) =$
  $= \Phi(2) - \Phi(-1.5) = 0.9773 + 0.9332 - 1 = 0.9105.$
- $P(|X-80| \leq 10) = P(-10 \leq X - 80 \leq 10) = P(-\frac{10}{10} \leq \frac{X-80}{10} \leq \frac{10}{10}) =$
  $= P(-1 \leq X^* \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826.$

Zadatak 8

Postavka: Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} a(x-1), & x \in [1,4], \\ 0, & x \notin [1,4]. \end{cases}$$

Odrediti konstantu a i naći raspodelu slučajne promenljive $Y = 3X - 1$.

Rešenje:

Konstantu a određujemo tako da je zadovoljen uslov $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\, dx = 1$. Naime:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\, dx = a \int\limits_{1}^{4} (x-1)\, dx = a \left(\frac{x^2}{2} - x \right)\Bigg|_1^4 = a\left(8 - 4 - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{9}{2}a,$$

što je jednako jedinici samo ako je $a = \dfrac{2}{9}$. U nastavku zato nećemo nigde pisati a, nego $\dfrac{2}{9}$.

Funkciju raspodele slučajne promenljive X je lako izračunati (kad znamo koliko je a):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^2}{9}, & 1 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Funkciju F_Y računamo preko F_X:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(3X - 1 < y) = \mathsf{P}(X < \tfrac{y+1}{3}) = F_X\left(\tfrac{y+1}{3}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{y+1}{3} \leq 1 \\ \frac{\left(\frac{y+1}{3}-1\right)^2}{9}, & 1 < \frac{y+1}{3} \leq 4 \\ 1, & \frac{y+1}{3} > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leq 2, \\ \frac{(y-2)^2}{81}, & 2 < y \leq 11, \\ 1, & y > 11. \end{cases} \end{aligned}$$

Zadatak 9

Postavka: Slučajna promenljiva X ima uniformnu $X : \mathcal{U}(0,1)$ raspodelu. Naći raspodelu slučajnih promenljivih:

(a) $Y = |X - \frac{1}{3}|$;

(b) $Z = -\ln X$;

(c) $U = max\{X, \frac{1}{2}\}$. Ispitati da li je U neprekidna slučajna promenljiva.

Rešenje: Gustina i funkcija raspodele slučajne promenljive X glase

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in (0,1) \\ 0 & , \quad x \notin (0,1) \end{cases},$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ x & , \quad x \in (0,1] \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}.$$

(a) $Y = |X - \frac{1}{3}|$

(*) $F_Y(y) = P(Y < y) = P(|X - \frac{1}{3}| < y)$
Za $y \le 0$ događaj $(|X - \frac{1}{3}| < y)$ je nemoguć događaj, tako da je $F_Y(y) = P(\emptyset) = 0$.
Za $y > 0$ iz (*) dalje dobijamo

$$F_Y(y) = P(-y < X - \frac{1}{3} < y) = P\left(\frac{1}{3} - y < X < \frac{1}{3} + y\right) = F_X\left(\frac{1}{3} + y\right) - F_X\left(\frac{1}{3} - y\right). (**)$$

$$F_X\left(\tfrac{1}{3} + y\right) = \begin{cases} 0 & , \quad y + \frac{1}{3} \le 0 \\ y + \frac{1}{3} & , \quad 0 < y + \frac{1}{3} \le 1 \\ 1 & , \quad y + \frac{1}{3} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad y \le -\frac{1}{3} \\ y + \frac{1}{3} & , \quad -\frac{1}{3} < y \le \frac{2}{3} \\ 1 & , \quad y > \frac{2}{3} \end{cases},$$

$$F_X\left(\tfrac{1}{3} - y\right) = \begin{cases} 0 & , \quad \frac{1}{3} - y \le 0 \\ \frac{1}{3} - y & , \quad 0 < \frac{1}{3} - y \le 1 \\ 1 & , \quad \frac{1}{3} - y > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \quad y > \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - y & , \quad -\frac{2}{3} < y \le \frac{1}{3} \\ 1 & , \quad y \le -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Dalje, iz (**) dobijamo

$$F_Y(y) = \begin{cases} (y + \frac{1}{3}) - (\frac{1}{3} - y) & , \quad 0 < y \le \frac{1}{3} \\ (y + \frac{1}{3}) - 0 & , \quad \frac{1}{3} < y \le \frac{2}{3} \\ 1 - 0 & , \quad y > \frac{2}{3} \end{cases} = \begin{cases} 2y & , \quad 0 < y \le \frac{1}{3} \\ y + \frac{1}{3} & , \quad \frac{1}{3} < y \le \frac{2}{3} \\ 1 & , \quad y > \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Spajanjem rezultata za $y \le 0$ i $y > 0$ dobijamo konačno rešenje:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \quad y \le 0 \\ 2y & , \quad 0 < y \le \frac{1}{3} \\ y + \frac{1}{3} & , \quad \frac{1}{3} < y \le \frac{2}{3} \\ 1 & , \quad y > \frac{2}{3} \end{cases}.$$

(b) $Z = -\ln X$

$$F_Z(z) = P(-\ln X < z) = P(\ln X > -z) = 1 - P(\ln X \le -z) = 1 - P(X \le e^{-z}) =$$
$$1 - P(X < e^{-z}) = 1 - F_X(e^{-z}) = 1 - \begin{cases} 0 & , \quad e^{-z} \le 0 \\ e^{-z} & , \quad 0 < e^{-z} \le 1 \\ 1 & , \quad e^{-z} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-z} & , \quad z > 0 \\ 0 & , \quad z \le 0 \end{cases},$$

$\varphi_Z(z) = F_Z(z)' = \begin{cases} e^{-z} & , \quad z > 0 \\ 0 & , \quad z \le 0 \end{cases}$ pa možemo zaključiti da slučajna promenljiva Z ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(1)$ raspodelu.

(c) $U = max\{X, \frac{1}{2}\}$

$F_U(u) = P(U < u) = P(max\{X, \frac{1}{2}\} < u) = P(X < u, \frac{1}{2} < u) = P(X < u)P(\frac{1}{2} < u) = F_X(u)\, P(\frac{1}{2} < u)$.

1° Za $u \leq \frac{1}{2}$ $P(\frac{1}{2} < u) = 0$ odakle sledi da je $F_U(u) = F_X(u) \cdot 0 = 0$;

2° Za $u > \frac{1}{2}$ $P(\frac{1}{2} < u) = 1$ odakle sledi da je $F_U(u) = F_X(u) \cdot 1 = \begin{cases} u & , \frac{1}{2} < u \leq 1 \\ 1 & , u > 1 \end{cases}$.

Spajanjem rezultata iz 1° i 2° dobijamo:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & , u \leq \frac{1}{2} \\ u & , \frac{1}{2} < u \leq 1 \\ 1 & , u > 1 \end{cases} \quad \text{i} \qquad F_U(u)' = \begin{cases} 1 & , u \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & , u \notin (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

Neprekidna slučajna promenljiva je definisana funkcijom gustine $\varphi_X(x)$ koja ima osobinu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\, dx = 1.$$

Kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_U(u)'\, du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1du = \frac{1}{2} \neq 1,$$

zaključujemo da U nije neprekidna slučajna promenljiva.

Zadatak 10

Postavka: Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(a)$. Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = [X]$ gde $[X]$ označava funkciju "najveće celo od X".

Rešenje:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ae^{-ax} & x > 0 \end{cases}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-ax} & x > 0 \end{cases}.$$

$Y = [X]$ je diskretna slučajna promenljiva i $\mathcal{R}_Y = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Za svako $k \in \mathcal{R}_Y$ važi

$\mathsf{P}(Y = k) = \mathsf{P}([X] = k) = \mathsf{P}(k \leq X < k + 1) = \int\limits_k^{k+1} \varphi_X(x)\, dx =$

$= a \int\limits_k^{k+1} e^{-ax} dx = F_X(k+1) - F_X(k) = 1 - e^{-a(k+1)} - 1 + e^{-ak} =$

$= e^{-ak}(1 - e^{-a})$.

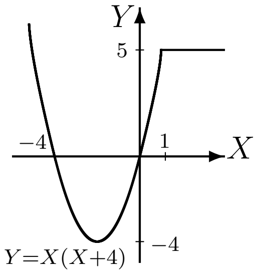
Zadatak 11

Postavka: Slučajna promenljiva X ima gustinu $\varphi_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Naći raspodelu slučajne promenljive

$$Y = \begin{cases} X(X+4) & , X \leq 1 \\ 5 & , X > 1 \end{cases}.$$

Rešenje:

Gustina i funkcija raspodele slučajne promenljive X glase



$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & , \ x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & , \ x \geq 0 \end{cases},$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & , \ x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & , \ x > 0 \end{cases},$$

jer za $x \leq 0$ imamo

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \tfrac{1}{2}e^{t}dt = \tfrac{1}{2}e^{x},$$

a za $x > 0$ je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \tfrac{1}{2}e^{t}dt + \int_{0}^{x} \tfrac{1}{2}e^{-t}dt = 1 - \tfrac{1}{2}e^{-x}.$$

Raspodela slučajne promenljive X se grana u tački $x = 0$. Na osnovu definicije slučajne promenljive Y ($Y = -4$ je minimalna vrednost, za $X > 1$ je $Y = 5$, i za $X = 0$ je $Y = 0$) nalazimo funkciju raspodele slučajne promenljive Y na sledeći način (vidi sliku):

- ▷ Za $y \leq -4$ je $F_Y(y) = 0$.
- ▷ Za $y \in (-4, 0]$ je ($x^2 + 4x = y$ je za $x_1 = -2 - \sqrt{4+y}$ i za $x_2 = -2 + \sqrt{4+y}$, pri čemu je $x_1 < 0$ i $x_2 \leq 0$):
  $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(x_1 < X < x_2) =$
  $= \mathsf{P}\left(-2 - \sqrt{4+y} < X < -2 + \sqrt{4+y}\right) =$
  $= F_X\left(-2 + \sqrt{4+y}\right) - F_X\left(-2 - \sqrt{4+y}\right) =$
  $= \frac{1}{2}\left(e^{-2+\sqrt{4+y}} - e^{-2-\sqrt{4+y}}\right).$
- ▷ Za $y \in (0, 5]$ je ($x^2 + 4x = y$ je za $x_1 = -2 - \sqrt{4+y}$ i za $x_2 = -2 + \sqrt{4+y}$, pri čemu je $x_1 < 0$ i $0 < x_2 \leq 1$):
  $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(x_1 < X < x_2) =$
  $= \mathsf{P}\left(-2 - \sqrt{4+y} < X < -2 + \sqrt{4+y}\right) =$
  $= F_X\left(-2 + \sqrt{4+y}\right) - F_X\left(-2 - \sqrt{4+y}\right) =$
  $= 1 - \frac{1}{2}e^{2-\sqrt{4+y}} - \frac{1}{2}e^{-2-\sqrt{4+y}}.$
- ▷ Za $y \in (5, \infty)$ je ($x^2 + 4x = y \ \wedge \ x < 1$ je za $x_1 = -2 - \sqrt{4+y}$, pri čemu je $x_1 < 0$):
  $F_Y(y) = \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(x_1 < X) = 1 - F_X\left(-2 - \sqrt{4+y}\right) =$
  $= 1 - \frac{1}{2}e^{-2-\sqrt{4+y}}.$

Za vežbu: Ako slučajna promenljiva X ima Košijevu raspodelu i ako je slučajna promenljiva Y definisana na isti način kao u ovom zadatku, naći raspodelu slučajne promenljive Y. Gustina slučajne promenljive koja ima Košijevu raspodelu je data sa:

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}$$