Teorija grafova

Marko Gordić — IN 37/2023

Prosti grafovi (što radimo)

- Prosti, neusmereni, bez paralelnih grana i petlji; izolovane čvorove *ne* razmatramo.
- **Incidentni/susedni** čvorovi: povezani granom.
- **Stepen** $deg(v)$ = broj suseda (grana) čvora v.

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

TEOREMA — parnost neparnih

Broj čvorova *neparnog* stepena je **paran**.

Regularan (k-regularan): svi čvorovi stepena k.
Kompletan K_n: svaki sa svakim.
Min. stepen $\beta(G)$, maks. $\Delta(G)$.
Bipartitan: $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, nema grana unutar V_1 ni V_2.
Kompletan bipartitan $K_{x,y}$: $|E| = xy$.
Komplement $\overline{G}$: tamo gde G nema granu — $\overline{G}$ je ima.

TEOREMA — stepen u komplementu

$deg_{\overline{G}}(v) = (n-1) - deg_G(v)$. Ako je G k-regularan, onda je $\overline{G}$ $(n-k-1)$-regularan; *i obrnuto*.
Takođe: $G \cup \overline{G} = K_n$, $\overline{\overline{G}} = G$.

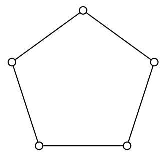
Kontura C_n i put P_n

Kontura C_n: zatvoren ciklus, svi čvorovi stepena 2; u C_n važi $|V| = |E| = n$.
Put P_n: otvoren niz — krajnji čvorovi stepena 1, ostali 2.

Izomorfizam

Grafovi G i H su izomorfni ako postoji bijekcija $\varphi : V(G) \to V(H)$ tako da je $uv \in E(G) \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$.
Posledice: čuvaju se stepeni, broj komponenti, postojanje kontura/puteva određene dužine, planarnost itd. Način crtanja *nije bitan.*

Primer: C_5 (kontura)



Primer: P_6 (put)

Komponente povezanosti

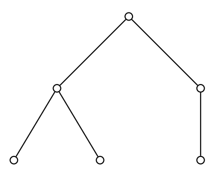
$\omega(G)$ — broj komponenti.
Ako $\omega(G) > 1$ graf je **nepovezan**.
Jedan od G i $\overline{G}$ je uvek **povezan**.
Ako je G povezan: $|E| \geq n-1$.

Most (bridge): uklanjanjem grane e raste $\omega(G)$.
Artikulacioni čvor: uklanjanjem v raste $\omega(G)$.

Stabla i šume

- **Stablo** T_n: povezano i acikličko; $|E| = n-1$. Takođe: *maksimalno acikličko* i *minimalno povezano*.
- Svako stablo ima **barem 2** viseća čvora. **Dijametar**: dužina najdužeg puta (broj grana).
- **Šuma**: *acikličan graf*; može se posmatrati kao (disjunktna) unija stabala.
  Formula: $e = n - \omega(G)$.
- **Pokrivajuće stablo** (spanning tree): za povezani G podgraf T sa $V(T) = V(G)$ koji je stablo.
  Svojstva: ima $n-1$ grana; spaja sve čvorove bez ciklusa; *nije* jedinstveno (obično više njih); dobijamo ga npr. DFS/BFS-om.
- **Tvrdjenje**: svaki bipartitan graf nema *neparne* konture.

Primer stabla T_6



Ojlerovi grafovi

Ojlerov: postoji zatvorena staza koja prolazi kroz *sve grane*.
Polu-ojlerov: postoji (otvorena) staza kroz sve grane.

Uslovi (AKKO)

Ojlerov $\iff$ graf je povezan i **svi** čvorovi su parnog stepena.
Polu-ojlerov $\iff$ graf je povezan i **tačno 2** čvora su neparnog stepena.

Praktični recept:

- Prebroj parne/neparne stepene. Ako su *dva* neparna $\Rightarrow$ polu-ojlerov:
  kreni iz jednog neparnog, završi u drugom.
- Numeriši grane (nemoj podebljavati). Crtaj u svesci, ne po tekstu zadatka.
- Pazi na *mostove*: dok je grana most, nemoj je koristiti prerano.

Hamiltonovi grafovi

Hamiltonov: kontura kroz *sve čvorove*.
Polu-hamiltonov: put kroz sve čvorove.

Dovoljni uslovi

Teorema Oysteina Orea: za svaka dva nesusedna u, v važi $deg(u) + deg(v) \geq n \Rightarrow$ graf je hamiltonov.
Teorema Gabriela A. Diraca: za svaki čvor v važi $deg(v) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow$ graf je hamiltonov.

Kako dokazivati da *nije* hamiltonov

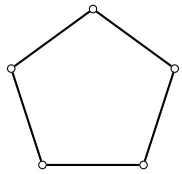
Ako postoji skup $S \subseteq V$ takav da je $\omega(G-S) > |S|$ (za put: $> |S|+1$),
tada G (resp. nema hamiltonovu konturu/put).
Traži takav S.

Recept :)

Jeste hamiltonov: (1) eksplicitno nađi hamiltonovu konturu ili (2) primeni Orea/Diraca.
Nije hamiltonov: traži kontradikciju ili skup S sa uslovom iznad.

Primer (C_5): C_5 je hamiltonov. Za dva nesusedna u, v: $deg(u) + deg(v) = 4 < 5$ (Ore ne ispunjen);
ni Dirac ($n/2 = 2.5$). I dalje hamiltonov.

C_5: Hamiltonova kontura, iako uslovi nisu ispunjeni



Planarni grafovi

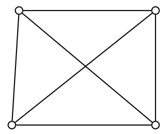
Planaran = može da se nacrta bez presecanja grana.
K_4 planaran; K_5 i $K_{3,3}$ *nisu*.

Formule

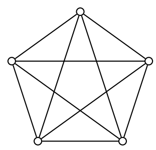
$$\begin{aligned} n - e + r &= 2 && \text{(Ojlerova formula)} \\ e &\leq 3n - 6 && \text{(povezan planaran, } n \geq 3\text{)} \\ e &\leq 2n - 4 && \text{(ako nema trouglova)} \end{aligned}$$

Za planarne važi: $2e = \sum_{k\geq 3} k\, N_k$ (zbir dužina oblasti).

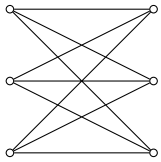
K_4 (planaran)



K_5 (neplanaran)



$K_{3,3}$ (neplanaran)



Brze taktike

- Egzistencijalni zadaci: ili nacrtaj *primer* sa malo čvorova ili dokaži *nepostojanje* kontradikcijom.
- Ojler/Hamilton: proveri povezanost; zatim stepene (Ojler), pa Oystein Ore / Gabriel A. Dirac. Ako zapne — izbacuj čvorove i gledaj ω.
- Pamti osobine tipova (regularan, kompletan, bipartitan, planaran, stablo) da znaš koje formule smeš.
- Obeležavanje staza/turneje: numeriši grane; crtaj u svesci (ne po tekstu).