Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 9. jul 2024.

PREZIME I IME: ______________________

BROJ INDEKSA: ______________

Predispitne obaveze 1
20 poena

1. [1 poen] Napisati geometrijsku definiciju verovatnoće.

V или A

2. [3 poena] U ispitnom roku student polaže Verovatnoću i Analizu. Verovatnoća da će položiti bar jedan ispit je 0.7, verovatnoća da će položiti Verovatnoću je 0.5 i verovatnoća da će položiti Analizu je 0.4.

$P(V \cup A) = 0{,}7 \quad P(V) = 0{,}5 \quad P(A) = 0{,}4$

Da li je događaj "student će položiti oba ispita" nemoguć događaj? Objasniti odgovor!

$P(AV) \stackrel{?}{=} 0 \quad P(A \cup V) = P(A) + P(V) - P(AV) \quad P(AV) = 0{,}2 \neq 0$

$0{,}7 = 0{,}5 + 0{,}4 - P(AV)$ нису дисј

Da li su događaji "student će položiti Verovatnoću' i "student će položiti Analizu" nezavisni? Objasniti odgovor!

$\Rightarrow P(AV) \stackrel{?}{=} P(A)P(V)$

$0{,}2 = 0{,}4 \cdot 0{,}5$ (T) $\Rightarrow$ јесу независни

Da li su događaji "student će položiti Verovatnoću' i "student će položiti Analizu" disjunktni? Objasniti odgovor!

$P(A \cup V) \stackrel{?}{=} P(A) + P(V)$ $\quad$ $P(AV) > 0 \Rightarrow$ нису дисј.

$0{,}7 \neq 0{,}5 + 0{,}4$ или

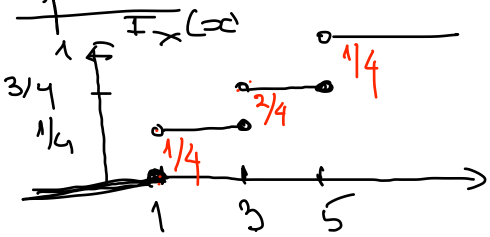
нису дисј.

3. [5 poena] Slučajna promenljiva X data je funkcijom raspodele $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 < x \leq 3 \\ \frac{3}{4}, & 3 < x \leq 5 \\ p, & x > 5. \end{cases}$.

Odrediti vrednost parametra p. Odrediti tip slučajne promenljive (disretna ili neprekidna). Ako je slučajna promenljiva diskretnog tipa odrediti zakon raspodele (verovatnoća), a ako je neprekidnog tipa odrediti funkciju gustine. Izračunati matematičko očekivanje slučajne promenljive X. Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = X^2 - 6X + 5$.

14 - 18

$p = 1$



$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{2}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4}$

$Y : \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} & 2/4 \end{pmatrix}$

X је дискретна

$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/4 & 2/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

4. [1 poen] Aproksimacija binomne slučajne promenljive Poasonovom (formulisati teoremu).

Нека је X $B(n,p)$ расп

$n \to \infty$

$p \to 0$

$n \cdot p \to \lambda > 0$

5. [2 poena] **Definisati** disperziju jednodimenzionalne slučajne promenljive.

$D(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

$D(X + c) =$ $D(X)$

$D(cX) =$ $c^2 D(X)$

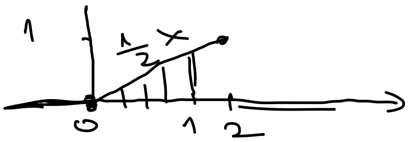
6. [3 poena] Slučajna promenljiva X data je funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} \underbrace{(a+2)x}_{\frac{1}{2}x}, & x \in (0,2) \\ 0, & \cancel{x \notin (0,2)} \end{cases}$.

Izračunati konstantu a.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)dx = 1 \qquad 1 = \int_0^2 (a+2)x\,dx = (a+2)\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2(a+2)$$

$$a+2 = \frac{1}{2} \qquad \boxed{a = -3/2}$$

Izračunati verovatnoću $P(0 < X \leq 1)$ i predstaviti je na grafiku funkcije gustine.



$$P(0<X\leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx$$

Odrediti funkciju raspodele i grafički je predstaviti.

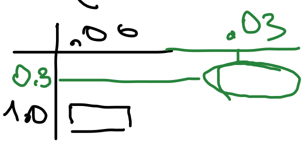
$\mathcal{N}(m,\sigma)$

7. [1 poen] Slučajna promenljiva X ima normalnu $\mathcal{N}(-2, 3)$ raspodelu. Na grafiku njene funkcije gustine predstaviti verovatnoću $P(-1 < X \leq 1)$ i izračunati je.

$$P(-1<X\leq 1) = P\left(\frac{-1+2}{3} < \frac{X+2}{3} \leq \frac{1+2}{3}\right)$$

$$= P(0{,}33 < X^* \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(0{,}33)$$

$$= \square - \bigcirc$$



$$X^* = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{X+2}{3} : \mathcal{N}(0,1)$$

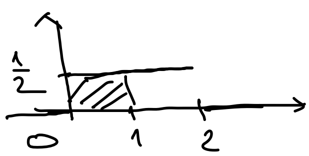
8. [2 poena] Definisati koeficijent korelacije $\rho_{X,Y}$ dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y).

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \quad (*)$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, onda je $\rho_{X,Y} = 0$. Dokazati!

$$\rho_{XY} \overset{(*)}{=} \frac{E(X)E(Y) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0$$

$$\binom{3}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$$



9. [2 poena] Slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$ raspodelu, a slučajna promenljiva Y ima uniformnu $\mathcal{U}(0, 2)$ raspodelu. Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive izračunati $P(X = 1,\ 0 < Y < 1)$ i matematičko očekivanje slučajne promenljive $Z = XY$.

$$P(X=1, 0<Y<1) \overset{\text{nezav.}}{=} P(X=1)P(0<Y<1) = \binom{3}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2}dy}$$

$$= 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2} = \ldots$$

$$E(Z) = E(X\cdot Y) = E(X)E(Y) = \left(3\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{0+2}{2}\right)$$

Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 9. jul 2024.

PREZIME I IME: ______________________________

BROJ INDEKSA: ____________

Predispitne obaveze 2
10 poena

1. [2 poena] Neka je X_t, $t \in [0, \infty)$ slučajni proces koji predstavlja broj klijenata koji dođu u banku. Pretpostavimo da je X_t Poasonov $\mathcal{P}(\lambda t)$ proces, $\lambda > 0$. Neka je T slučajna promenljiva koja predstavlja dužinu vremena koja protekne dok prvi klijent ne dođe u banku. Odrediti raspodelu slučajne promenljive T.

2. [4 poena] Za date matice prelaza lanaca Markove proveriti da li postoje finalne verovatnoće. Odgovore **obrazložiti**! Ako postoje, izračunati vektore finalnih verovatnoća. Odrediti, ako je to moguće, za obe matrice prelaza početne vektore tako da dati lanci Markova budu stacionarni.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

3. [2 poen] Definisati strogu stacionarnost procesa X_t, $t \in [0, \infty)$. Pokazati da za strogo stacionaran slučajni proces X_t važi $R_X(t, s) = r_X(t - s)$, gde je $R_X(t, s)$ korelaciona funkcija procesa X_t.

4. [2 poen] Neka je X_t, $t \in [0, \infty)$ proces rađanja i umiranja čiji je skup stanja $S = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$. Za $i = 0, 1, \ldots, k - 1$ brzine rađanja su $\lambda_i = i + 1$, i za $i = 1, 2, \ldots, k$, a brzine umiranja su $\mu_i = 2i$.

   Napisati odgovarajuću matricu izvoda Λ.

   Da li postoje finalne verovatnoće? Obrazložiti odgovor! Ako postoje, napisati sistem jednačina iz kojeg se određuju finalne verovatnoće.

Verovatnoća i slučajni procesi, 9. jul 2024.

Deo završnog ispita 1 – 40 poena

Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika

1. [5 poena] Brojevi a i c se na slučajan način biraju iz intervala $[1,3]$. Izračunati verovatnoću da kvadratna jednačina $ax^2 + 2\sqrt{3}x + c = 0$ ima realna rešenja.

2. [15 poena] U prvoj kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem 1, jedna kuglica označena brojem 2, i jedna kuglica označena brojem 3. U drugoj kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem 1 i dve kuglice označene brojem 2. Iz svake kutije se na slučajan način izvlači po jedna kuglica. Slučajna promenljiva X predstavlja maksimum brojeva na izvučenim kuglicama, a slučajna promenljiva Y proizvod tih brojeva.
   (a) Odrediti zakon raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y).
   (b) Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.
   (c) Izračunati matematičko očekivanje uslovne slučajne promenljive $Y|X=2$.
   (d) Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive $Z = \max\{X+1, Y\}$.

3. [10 poena] Neprekidna slučajna promenljiva data je funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{a}{4} - x^3, & x \in (0,1] \\ \frac{a}{x^2}, & x \in (1,\infty) \end{cases}$.
   (a) Izračunati konstantu a.
   (b) Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X.
   (c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $W = 2 - X$.

4. [10 poena] Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive date sa funkcijama gustine $\varphi_X(x) = 2x, x \in [0,1]$, i $\varphi_Y(y) = \frac{y}{2}, y \in [0,2]$. Odrediti raspodelu slučajne promenljive $V = Y - X$.

Verovatnoća i slučajni procesi, 9. jul 2024.

Deo završnog ispita 2 – 20 poena

Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika

1. [6 poena] Dat je slučajni proces $X_t = (t+1)e^U + V$, $t \in \mathbb{R}$, gde su U i V nezavisne slučajne promenljive, U ima uniformnu $\mathcal{U}(0,2)$ raspodelu i V ima uniformnu $\mathcal{U}(-1,1)$ raspodelu. Izračunati matematičko očekivanje, disperziju i korelacionu funkciju slučajnog procesa X_t.

2. [7 poena] Dat je homogen lanac Markova, čiji je skup stanja $S = \{s_1, s_2, s_3\}$. Verovatnoće prelaza date su sa:
$$P(X_{n+1} = s_1 \mid X_n = s_i) = 0.5, \quad i = 1,2,3,$$
$$P(X_{n+1} = s_{j+1} \mid X_n = s_j) = 0.5, \quad j = 1,2,$$
$$P(X_{n+1} = s_3 \mid X_n = s_3) = 0.5,$$
   za svaki korak $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. U početnom trenutku važi $P(X_0 = s_1) = 1$.
   (a) Odrediti matricu prelaza za jedan korak.
   (b) Ispitati postojanje finalnih verovatnoća (i obrazložiti).
   (c) Izračunati finalne verovatnoće, ako postoje.
   (d) Izračunati verovatnoću $P(X_2 = s_1)$.

3. [7 poena] U agenciji za proveru kvaliteta rade tri kontrolora. U proseku pristiže 10 proizvoda za sat vremena, Poasonov potok trebovanja. Svaki proizvod pregleda jedan kontrolor. Prosečno vreme provere ima eksponencijalnu raspodelu, i iznosi 2 minuta po proizvodu.
   (a) Napisati brzine rađanja i umiranja opisanog sistema opsluživanja i matricu gustina prelaza Λ.
   (b) Ispitati postojanje finalnih verovatnoća i izračunati ih, ako postoje.
   (c) Izračunati očekivani broj proizvoda u agenciji za proveru kvaliteta.
   (d) Koliko je vremena tokom smene od 8h tačno jedan operator bez posla?