Вежбе 7
-Генераторне функције-

<u>Пример:</u>

$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

$q(x) = 1 + x + x^2 + x^3$

$p(x) \cdot q(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Коефицијент уз x^5 добијамо када помножимо

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ x^2 \text{ из } p(x) \text{ са } x^3 \text{ из } q(x) \\ \cdot\ x^3 \text{ из } p(x) \text{ са } x^2 \text{ из } q(x) \\ \cdot\ x^4 \text{ из } p(x) \text{ са } x \text{ из } q(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{тражени коефицијент је } 3$$

1. Имамо 4 златна и 3 сребрна новчића, сваки у вредности од једног динара. На колико начина можемо платити износ од 5 динара помоћу ових новчића?

i - број златних новчића

j - број сребрних новчића

$i + j = 5 \qquad i \in \{0,1,2,3,4\}$

$j \in \{0,1,2,3\}$

Ако је i степен променљиве x у полиному $p(x)$, а j степен у полиному $q(x)$, онда тражени број представља коефицијент који стоји уз x^5 у полиному $p(x) \cdot q(x)$

За $u \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}_0$ дефинишемо $\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u(u-1)(u-2)\cdots(u-k+1)}{k!}, & k>0 \\ 1, & k=0 \end{cases}$

Специјални случајеви:

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+(k-1))}{k!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

- $n=1$ $\binom{-1}{k} = (-1)^k \binom{1+k-1}{k} = (-1)^k$
- $n=2$ $\binom{-2}{k} = (-1)^k \binom{2+k-1}{k} = (-1)^k \binom{k+1}{k} = (-1)^k (k+1)$

Сада можемо формулисати УОПШТЕНУ БИНОМНУ ТЕОРЕМУ

$$(1+z)^u = \sum_{k\geq 0} \binom{u}{k} z^k = \binom{u}{0} + \binom{u}{1} z + \binom{u}{2} z^2 + \ldots + \binom{u}{k} z^k + \ldots$$

- $\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1} = \sum_{k\geq 0} \binom{-1}{k} (-z)^k = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \cdot (-1)^k z^k = \sum_{k\geq 0} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^k + \ldots$
- $\frac{1}{(1-z)^2} = (1-z)^{-2} = \sum_{k\geq 0} \binom{-2}{k} (-z)^k = \sum_{k\geq 0} (-1)^k (k+1)(-1)^k z^k = \sum_{k\geq 0} (k+1) z^k = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots + (k+1) z^k + \ldots$
- $\frac{1}{(1-z)^n} = (1-z)^{-n} = \sum_{k\geq 0} \binom{-n}{k} (-z)^k = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-1)^k z^k = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k-1}{k} z^k = 1 + nz + \binom{n+1}{2} z^2 + \binom{n+2}{3} z^3 + \ldots + \binom{n+k-1}{k} z^k + \ldots$

2. У кутији се налази 30 црвених, 40 плавих и 50 црних маркера. Одредити на колико начина се може изабрати 70 маркера из кутије, ако маркере исте боје не разликујемо.

Тражимо коефицијент уз z^{70} у производу $(1+z+z^2+\dots+z^{30})(1+z+z^2+\dots+z^{40})(1+z+z^2+\dots+z^{50})$

Знамо да важи $1+z+z^2+\dots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$

Сада је посматрани производ

$$\frac{1-z^{31}}{1-z}\cdot\frac{1-z^{41}}{1-z}\cdot\frac{1-z^{51}}{1-z} = (1-z)^{-3}(1-z^{31})(1-z^{41})(1-z^{51})$$

$$(1-z)^{-3} = \sum_{k\geq 0}\binom{-3}{k}(-z)^k = \sum_{k\geq 0}\binom{3+k-1}{3-1}z^k = \sum_{k\geq 0}\binom{k+2}{2}z^k = \binom{2}{2}+\binom{3}{2}z+\binom{4}{2}z^2+\binom{5}{2}z^3+\dots+\binom{k+2}{2}z^k+\dots$$

У производу $(1-z^{31})(1-z^{41})(1-z^{51})$ је сада довољно наћи коефицијенте уз степене до z^{70}

$$(1-z)^{-3}(1-z^{31})(1-z^{41})(1-z^{51}) = \left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}z+\binom{4}{2}z^2+\binom{5}{2}z^3+\dots\right)(1-z^{31}-z^{41}-z^{51}+\dots)$$

$$z^{70}:\ \binom{70+2}{2}\cdot z^{70}\cdot 1+\binom{39+2}{2}\cdot z^{39}\cdot(-z^{31})+\binom{29+2}{2}\cdot z^{29}\cdot(-z^{41})+\binom{19+2}{2}\cdot z^{19}\cdot(-z^{51})$$

Тражени коефицијент: $\binom{72}{2}-\binom{41}{2}-\binom{31}{2}-\binom{21}{2}=1061$

II начин: Одредити број решења једначине $x_1+x_2+x_3=70$ ако је $0\leq x_1\leq 30$, $0\leq x_2\leq 40$, $0\leq x_3\leq 50$

Идеја генераторних функција је да се бесконачном низу реалних бројева придружи непрекидна функција

$\underbrace{1+z+z^2+z^3+\dots+z^n+\dots}_{}=\underbrace{\frac{1}{1-z}}_{}$ је генераторна функција за низ $(1,1,1,1,\dots,1,\dots)$

ОТВОРЕНА форма ЗАТВОРЕНА форма

Нека је $(a_0,a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots)$ низ реалних бројева. Генераторна функција овог низа је (формални) степени ред

$$A(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\dots+a_nz^n+\dots=\sum_{n\geq 0}a_nz^n$$

није битна конвергенција реда

Особине генераторних функција

$(a_0,a_1,a_2,\dots)\longleftrightarrow A(z)$

$(b_0,b_1,b_2,\dots)\longleftrightarrow B(z)$

- САБИРАЊЕ

низ $(a_0+b_0,\ a_1+b_1,\ a_2+b_2,\dots)$

ген. ф-ја $(a_0+b_0)+(a_1+b_1)z+(a_2+b_2)z^2+\dots=(a_0+a_1z+a_2z^2+\dots)+(b_0+b_1z+b_2z^2\dots)=\sum_{n\geq 0}a_nz^n+\sum_{n\geq 0}b_nz^n=A(z)+B(z)$

- МНОЖЕЊЕ НИЗА РЕАЛНИМ БРОЈЕМ α (СКАЛИРАЊЕ)

низ $\alpha(a_0,a_1,a_2,\dots)=(\alpha a_0,\alpha a_1,\alpha a_2,\dots)$

Ген. ф-ја $\alpha a_0+\alpha a_1z+\alpha a_2z^2+\dots=\alpha(a_0+a_1z+a_2z^2+\dots)=\alpha\sum_{n\geq 0}a_nz^n=\alpha A(z)$

- ЛИНЕАРНОСТ

$\alpha(a_0,a_1,a_2,\dots)+\beta(b_0,b_1,b_2,\dots)\longleftrightarrow\alpha A(z)+\beta B(z)$

Низу $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ одговара генераторна ф-ја $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots$

Одредићемо генераторне функције низова који су ТРАНСЛИРАНИ k КОРАКА у односу на низ $\{a_n\}_{n \geq 0}$

- померање низа УДЕСНО

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \to (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k \text{ нула}}, a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

Ген. ф-ја $a_0 z^k + a_1 z^{k+1} + a_2 z^{k+2} + \ldots = z^k (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) = z^k \sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n = z^k A(z)$

$$* \sum_{n \geq k} a_{n-k} z^n = z^k \sum_{n \geq k} a_{n-k} z^{n-k} = z^k \sum_{i \geq 0} a_i z^i = z^k A(z)$$

смена $i = n-k$

- померање низа УЛЕВО

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) \to (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$$

Ген. ф-ја $a_k + a_{k+1} z + a_{k+2} z^2 + \ldots = \dfrac{\sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{k-1} z^{k-1}}{z^k} = \dfrac{A(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{k-1} z^{k-1}}{z^k}$

$$* \sum_{n \geq 0} a_{n+k} z^n = \frac{\sum\limits_{n \geq 0} a_{n+k} z^{n+k}}{z^k} = \frac{\sum\limits_{i \geq k} a_i z^i}{z^k} = \frac{\sum\limits_{i \geq 0} a_i z^i - (a_0 + a_1 z + \ldots + a_{k-1} z^{k-1})}{z^k} = \frac{A(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{k-1} z^{k-1}}{z^k}$$

смена $i = n+k$

- ЗАМЕНА ПРОМЕНЉИВЕ z СА αz

$$A(\alpha z) = \sum_{n\geq 0} a_n (\alpha z)^n = a_0(\alpha z)^0 + a_1(\alpha z)^1 + a_2(\alpha z)^2 + \dots + a_n(\alpha z)^n + \dots = (a_0\alpha^0) + (a_1\alpha^1)z + (a_2\alpha^2)z^2 + \dots + (a_n\alpha^n)z^n + \dots = \sum_{n\geq 0}(a_n\alpha^n)z^n$$

Ова генераторна функција генерише низ $(a_0, a_1\alpha, a_2\alpha^2, \dots, a_n\alpha^n, \dots)$

Пример:

Ако уместо z убацимо $(-3)z$ у генераторну ф-ју низа $(1,1,1,\dots)$, добијамо генераторну функцију

$$\frac{1}{1-(-3)z} = \frac{1}{1+3z}$$ која генерише низ $(1\cdot(-3)^0, 1\cdot(-3)^1, 1\cdot(-3)^2, \dots, 1\cdot(-3)^n, \dots)$, тј. низ $\{(-3)^n\}_{n\geq 0}$

- Извод

$$A'(z) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots)' = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + n a_n z^{n-1} + \dots$$

На k-том месту у новом низу је члан $(k+1)a_{k+1}$, $k\geq 0$

$$* \ A'(z) = \Big(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\Big)' = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{k\geq 0}(k+1)a_{k+1}z^k$$

смена $k=n-1$

- МНОЖЕЊЕ генераторних функција

$(a_0, a_1, a_2, \dots) \Longleftrightarrow A(z)$

$(b_0, b_1, b_2, \dots) \Longleftrightarrow B(z)$

$A(z)\cdot B(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n z^n = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)\cdot(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots)$ генерише низ $\{c_n\}_{n\geq 0}$ за који важи

$c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

3. Одредити генераторне функције за низове чији је општи члан

а) $a_n = n + 1$

Низ природних бројева

$(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$

$A(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \dots$

Посматрајмо низ $b_n = 1$, тј. низ $(1, 1, 1, 1, \dots)$

$B(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots = \frac{1}{1-z}$

$B'(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$

Видимо $A(z) = B'(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$

б) $a_n = n$

Низ ненегативних целих бројева

$(0, 1, 2, 3, 4, \dots)$

Ако транслирамо низ из а) за један корак удесно, добијамо тражени низ са општим чланом $a_n = n$.

$A(z) = z \cdot \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$

Тражимо затворене форме генераторних функција.

в) $a_n = 2n^2$

$(2\cdot 0, 2\cdot 1^2, 2\cdot 2^2, 2\cdot 3^2, \ldots) = 2\cdot(0, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$

Знамо да је генераторна ф-ја за низ $b_n = n$ дата са $B(z) = 0 + z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots = \frac{z}{(1-z)^2}$

$B'(z) = 1 + 2\cdot 2z + 3\cdot 3z^2 + 4\cdot 4z^3 + \ldots$

$= 1^2 + 2^2 z + 3^2 z^2 + 4^2 z^3 + \ldots$

Генераторна ф-ја $B'(z)$ генерише низ $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots)$

$$B'(z) = \left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)' = \frac{z'(1-z)^2 - z\cdot((1-z)^2)'}{(1-z)^4} = \frac{(1-z)^{\cancel{2}} - 2z\cancel{(1-z)}}{(1-z)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

Уколико низ $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots)$ померимо један корак удесно добијамо низ $(0, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots)$ који је генерисан генераторном функцијом $z\frac{1+z}{(1-z)^3}$

На крају овај низ треба скалирати са 2, па је $A(z) = 2z\cdot\frac{1+z}{(1-z)^3}$

г) $a_n = (n-1)\,n\,(n+1)$

Посматрајмо низ $b_n = n+1$ $(1,2,3,4,\dots)$

$$B(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \overset{a)}{=} \frac{1}{(1-z)^2}$$

· Нека је $C(z) = B'(z)$

Сада је $c_n = (n+1)b_{n+1} = (n+1)((n+1)+1) = (n+1)(n+2)$

$$C(z) = B'(z) = \left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = \frac{2}{(1-z)^3}$$

· Нека је $D(z) = C'(z)$

$$d_n = (n+1)c_{n+1} = (n+1)((n+1)+1)((n+1)+2) = (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$D(z) = C'(z) = \left(\frac{2}{(1-z)^3}\right)' = \frac{6}{(1-z)^4}$$

$n=0$ $d_0 = 1\cdot2\cdot3$ $a_0 = 0$

$n=1$ $d_1 = 2\cdot3\cdot4$ $a_1 = 0$

$n=2$ $d_2 = 3\cdot4\cdot5$ $a_2 = 1\cdot2\cdot3$

Низ $a_n = (n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ добијамо померањем низа $d_n = (n+1)(n+2)(n+3)$ за два корака удесно

$$\Rightarrow A(z) = z^2\cdot D(z) = \frac{6z^2}{(1-z)^4}$$

4. Одредити генераторну функцију низа задатог са рекурентном релацијом

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n,\ n \geq 0,$$

ако је $a_0 = 2$ и $a_1 = -1$.

Нека је $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$

$a_n \quad a_{n+1} \quad a_{n+2}$

померање улево

$\sum_{n \geq 0} a_{n+2} z^n \to$ ген. ф-ја низа који је померен 2 корака улево $\dfrac{A(z) - a_0 - a_1 z}{z^2}$

$\sum_{n \geq 0} a_{n+1} z^n \to$ ген. ф-ја низа који је померен 1 корак улево $\dfrac{A(z) - a_0}{z}$

Сада је због линеарности $\dfrac{A(z) - a_0 - a_1 z}{z^2} = 2\,\dfrac{A(z) - a_0}{z} - 4A(z) \quad / \cdot z^2$

$$A(z) - 2 + z = 2z(A(z) - 2) - 4z^2 A(z)$$

$$A(z)(1 - 2z + 4z^2) = 2 - 5z$$

$$A(z) = \frac{2 - 5z}{1 - 2z + 4z^2}$$

5. Користећи генераторне функције решити рекурентне релације

a) $a_n = 2a_{n-1} + 1,\ n \geq 1$, ако је $a_0 = 0$;

Рекурентну релацију $a_n = 2a_{n-1}+1, n\geq 1$ можемо записати и на следећи начин $a_{n+1} = 2a_n + 1,\ n \geq 0$

$a_n \quad a_{n+1}$ померање улево

Нека је $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$

Добијамо $\dfrac{A(z)-a_0}{z} = 2A(z) + \dfrac{1}{1-z} \;\Big/ \cdot z(1-z)$

$$A(z)(1-z) = 2z(1-z)A(z) + z$$

$$A(z)(1-z)(1-2z) = z$$

Генераторна ф-ја $A(z) = \dfrac{z}{(1-z)(1-2z)}$ ← права рационална функција

$$A(z) = \frac{z}{(1-z)(1-2z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-2z} = \frac{A(1-2z)+B(1-z)}{(1-z)(1-2z)} = \frac{(A+B)+(-2A-B)z}{(1-z)(1-2z)}$$

Добијамо систем $\begin{array}{l} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{array} \iff \begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \end{array}$

$A(z) = -\dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{1-2z}$

$\dfrac{1}{1-z}$ генерише низ са општим чланом 1

$\dfrac{1}{1-2z}$ генерише низ са општим чланом 2^n

$\Rightarrow a_n = -1 + 2^n$

II начин:

$a_n = 2a_{n-1} + 1, n \geq 1$

$a_{n-1} \curvearrowright a_n$ померање удесно

$$a_n: \quad A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

$$a_{n-1}: \quad zA(z) = \qquad a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \dots$$

$$1: \quad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Из рекурентне релације имамо да је $a_n - 2a_{n-1} - 1 = 0$

Важи

$$A(z) - 2zA(z) - \frac{1}{1-z} = (a_0 - 1) + \underbrace{(a_1 - 2a_0 - 1)}_{=0} z + \underbrace{(a_2 - 2a_1 - 1)}_{=0} z + \underbrace{(a_3 - 2a_0 - 1)}_{=0} z^2 + \dots = -1$$

$$A(z)(1-2z) = -1 + \frac{1}{1-z} = \frac{z}{1-z}$$

$$A(z) = \frac{z}{(1-z)(1-2z)}$$

... задатак даље решавамо исто као малопре

Поступак проналажења генераторне функције низа задатог рекурентном релацијом $a_n = 2a_{n-1} + 1$, где је $n \geq 1$, формалније можемо записати на следећи начин

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \quad n \geq 1$$

Када помножимо претходну једнакост са z^n и сумирамо по $n \geq 1$ добијамо

$$\sum_{n\geq 1} a_n z^n = 2\sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n + \sum_{n\geq 1} z^n$$

$$\sum_{n\geq 1} a_n z^n = 2z\sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^{n-1} + \sum_{n\geq 1} z^n$$

смена $k = n-1$

$$\sum_{n\geq 1} a_n z^n = 2z\sum_{k\geq 0} a_k z^k + \sum_{n\geq 1} z^n$$

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n - a_0 = 2z\sum_{\cancel{k}\, n\geq 0} a_{\cancel{k}\, n} z^{\cancel{k}\, n} + \sum_{n\geq 0} z^n - 1$$

Бројач можемо означити и са n

Ако је тражена генераторна функција

$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, онда је

$$A(z) = 2zA(z) + \frac{1}{1-z} - 1$$

Одавде је $A(z) = \dfrac{z}{(1-z)(1-2z)}$

б) $a_{n+1} = 2a_n + n,\ n \geq 0,$ ако je $a_0 = 1;$ померање улево

Нека је $A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$

$$\frac{A(z) - a_0}{z} = 2A(z) + \frac{z}{(1-z)^2} \quad / \cdot z$$

$$A(z) - 1 = 2z A(z) + \frac{z^2}{(1-z)^2}$$

$$A(z)(1-2z) = 1 + \frac{z^2}{(1-z)^2}$$

$$A(z) = \frac{1}{1-2z} + \frac{z^2}{(1-2z)(1-z)^2}$$

$$\frac{z^2}{(1-2z)(1-z)^2} = \frac{A}{1-2z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{A(1-z)^2 + B(1-2z)(1-z) + C(1-2z)}{(1-2z)(1-z)^2}$$

$$= \frac{A - 2Az + Az^2 + B - 3Bz + 2Bz^2 + C - 2Cz}{(1-2z)(1-z)^2}$$

Добијамо систем

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -2A - 3B - 2C &= 0 \\ A + 2B \quad &= 1 \end{aligned} \iff A = 1,\ B = 0,\ C = -1$$

$$A(z) = \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{1-2z} - \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$= \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{(1-z)^2}$$

Добијамо да је решење р.р. $a_n = 2 \cdot 2^n - (n+1) = 2^{n+1} - n - 1$

в) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2^n \; n \geq 2$, ако је $a_0 = 6,\ a_1 = 4$. померање УДЕСНО

Нека је $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$

Помножимо једнакост са z^n и сумирамо по $n \geq 2$

$$\sum_{n \geq 2} a_n z^n = \sum_{n \geq 2} a_{n-1} z^n + 6 \sum_{n \geq 2} a_{n-2} z^n + \sum_{n \geq 2} 2^n z^n$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n - a_0 - a_1 z = z\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n - a_0\right) + 6z^2 \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} (2z)^n - 2z - 1$$

$$A(z) - 6 - 4z = z\left(A(z) - 6\right) + 6z^2 A(z) + \frac{1}{1-2z} - 2z - 1$$

$$A(z)(1 - z - 6z^2) = \frac{1}{1-2z} - 4z + 5 = \frac{6 - 14z + 8z^2}{1-2z}$$

$$1 - z - 6z^2 = (1-3z)(1+2z)$$

$$A(z) = \frac{6 - 14z + 8z^2}{(1-2z)(1+2z)(1-3z)} = \frac{A}{1-2z} + \frac{B}{1+2z} + \frac{C}{1-3z}$$

Добијамо систем

$$A + B + C = 6$$
$$-A - 5B = -14$$
$$-6A + 6B - 4C = 8$$

$$A = -1,\ B = 3,\ C = 4$$

$$A(z) = -\frac{1}{1-2z} + \frac{3}{1+2z} + \frac{4}{1-3z}$$

$$a_n = -2^n + 3(-2)^n + 4 \cdot 3^n$$
$$= 4 \cdot 3^n + \left(-1 + 3(-1)^n\right) \cdot 2^n$$