1.7 Rekurentne relacije nizova

Mnogi problemi prebrojavanja ne mogu biti rešeni koristeći do sada razmatrane kombinatorne objekte i metode. Još jedan koristan alat čine rekurentne relacije. Ako je dat neki broj početnih članova, a ostali članovi se mogu dobiti primenom relacije koja koristi neki broj prethodnih članova, onda kažemo da je niz opisan pomoću rekurentne relacije.

Definicija 42 *Neka je* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, \ldots)$ *niz kompleksnih brojeva. Ako postoji funkcija* $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *sa osobinom da za svako* $n \geq k$ *važi*

$$a_n = F(a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}), \tag{1.1}$$

onda kažemo da je (1.1) rekurentna relacija reda k *koja opisuje niz* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Ako su dati članovi niza $a_0, \ldots, a_{k-1}$, onda se na osnovu rekurentne relacije na jedinstven način mogu odrediti članovi niza $a_k, a_{k+1}, \ldots$.

U narednim primerima, bavićemo se samo kreiranjem, tj. generisanjem, rekurentnih relacija, ali ne i njihovim rešavanjem. Ponovićemo prvo dobro poznate rekurentne relacije koje opisuju aritmetičke nizove, geometrijske nizove i faktorijel.

Primer 3 *Napisati rekurentne relacije koje opisuju sledeće nizove:*

(i) aritmetički niz čiji prvi član je a*, a razlika je* d*;*

(ii) geometrijski niz čiji prvi član je a*, a količnik je* 1*;*

(iii) niz faktorijela $\{n!\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Rešenje.

(i) Za članove aritmetičkog niza važi

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ a_n &= a_{n-1} + d, n \geq 1. \end{aligned}$$

(ii) Za članove geometrijskog niza važi

$$\begin{aligned} a_0 &= b \\ a_n &= q \cdot a_{n-1}, n \geq 1. \end{aligned}$$

(iii) Za niz faktorijela važi

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_n &= n \cdot a_{n-1}, n \geq 1.
\end{aligned}
$$

□

Primer 4 *Niz brojeva*

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots\}$$

se naziva Fibonačijev niz. Prvi član jednak je 0, drugi 1, a svaki sledeći član jednak je zbiru prethodna dva. Napisati rekurentnu relaciju Fibonačijevog niza.

Rešenje. Označimo član na poziciji $n \in \mathbb{N}_0$ sa f_n. Tada je

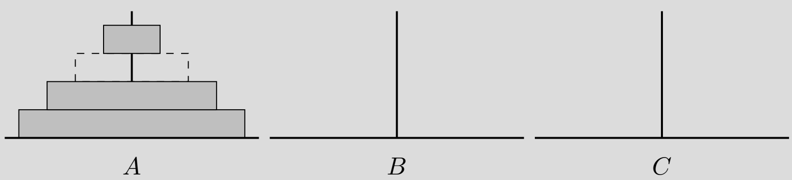
$$
\begin{aligned}
f_0 &= 0 \\
f_1 &= 1 \\
f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2.
\end{aligned}
$$

□

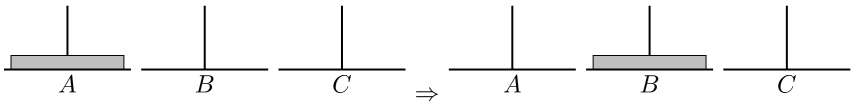
Primer 5 *Date su tri šipke i n diskova ($n \in \mathbb{N}$). Diskovi su poredani na jedan štap, od najvećeg do najmanjeg (uvek manji na veći). Dozvoljeno je*

- *pomeriti u svakom koraku tačno jedan disk;*
- *veći disk nikada ne sme da se stavi na manji.*

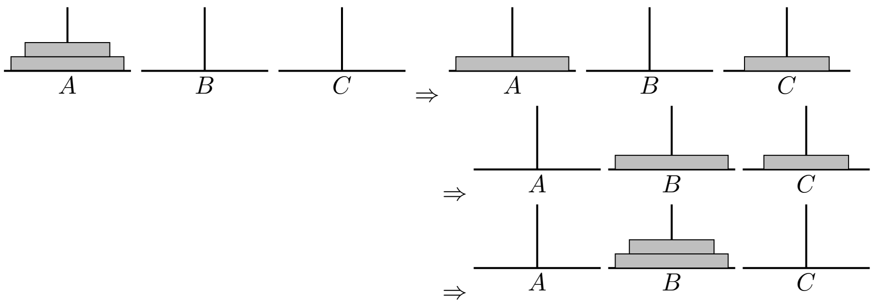
Koliko je najmanje koraka potrebno da se svi diskovi premeste na jedan od druga dva štapa?



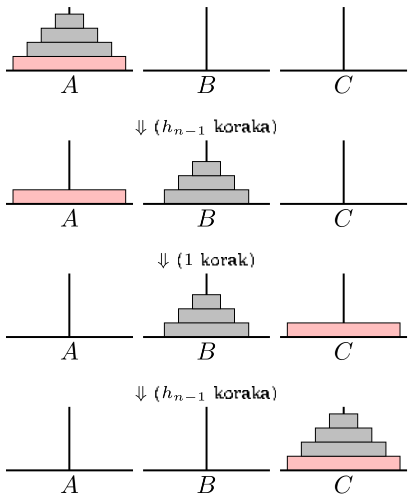
Rešenje. Neka je h_n najmanji broj koraka da se n diskova prebaci sa A na B ili C. Slučajevi za $n = 1$ i $n = 2$ ilustrovani su na sledećim slikama.
$n = 1$: $h_1 = 1$



$n = 2$: $h_2 = 3$



Ilsutrovaćemo sada rešenje za proizvoljno $n \geq 2$. Treba primetiti da na najveći disk uvek može da se stavi bilo koji od preostalih $n - 1$ diskova.



Na osnovu prethodne analize dolazimo do zaključka da se niz može opisati na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= 1 \\
h_n &= 2h_{n-1} + 1, \quad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

□

Rešenje rekurentne relacije. Rešiti rekurentnu relaciju niza znači izraziti opšti član niza a_n kao fukciju koja zavisi od n tj. odrediti funkciju $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$

tako da za svako $n \in \mathbb{N}_0$ važi

$$a_n = a(n).$$

Primer 6 *Neka je* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *zadat na sledeći način:*

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_n &= 5a_{n-1} + 2, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Odrediti rešenje rekurentne relacije metodom zamene unazad.

Rešenje. Primenom rekurentne relacije unazad, za $n \geq 1$, možemo zaključiti da važi sledeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} a_n &= 5a_{n-1} + 2 \\ &= 5(5a_{n-2} + 2) + 2 = 5^2 a_{n-2} + 5 \cdot 2 + 2 \\ &= 5^2(5a_{n-3} + 2) + 5 \cdot 2 + 2 = 5^3 a_{n-3} + 5^2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 2 \\ & \ldots \\ &= 5^n a_0 + 2 \cdot (5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 5 + 1) \\ &= 2 \cdot (5^n + 5^{n-1} + \ldots + 5 + 1) = 2 \cdot \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

□

U prethodnom primeru, došli smo do pretpostavke kog oblika je rešenje rekurentne relacije. Naredni primer ilustruje kako se može formalno verifikovati da nije došlo do greške u zaključivanju (posebno u delu redu koji sadrži „...").

Primer 7 *Neka je* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *zadat na sledeći način:*

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_n &= 5a_{n-1} + 2, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Dokazati da je $a_n = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1)$ *za svako* $n \in \mathbb{N}_0$.

Rešenje. Indukcijom po n.

<u>Baza $n = 0$:</u> $a_0 = \frac{1}{2}(5^{0+1} - 1) = 2$

<u>Induktivna pretpostavka (T_n):</u> $a_n = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1)$

<u>Induktivni korak $(T_n \Rightarrow T_{n+1})$:</u>

Koristeći datu rekurentnu relaciju i induktivnu pretpostavku, pokazaćemo da je $a_{n+1} = \frac{1}{2}(5^{n+2} - 1)$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 5a_n + 2 \\ &= 5 \cdot \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1) + 2 \\ &= \frac{1}{2}5^{n+2} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{1}{2}(5^{n+2} - 1). \end{aligned}$$

□

1.7.1 Homogene, linearne, sa konstantnim koeficijentima

Postupak rešavanja rekurentnih relacija postupkom zamene unazad nije uvek pogodan za određivanje rešenja. Takav je, na primer, slučaj sa rekurentnom relacijom za Fibonačijev niz. U ovom delu ćemo posmatrati jednu posebnu klasu rekurentnih relacija koja se može rešiti postupkom koji podseća na rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina višeg reda sa konstantnim koeficijentima.

Definicija 43 *Rekurentna relacija niza* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *je homogena linearna rekurentna relacija reda* k *sa konstantnim koeficijentima ako je oblika*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k},$$

gde su $c_1, \ldots, c_k$ *konstante,* $k \geq 1$ *i* $c_k \neq 0$.

Svaka homogena linearna rekurentna relacija sa konstantnim koeficijentima ima trivijalno rešenje $a_n = 0$, $n \geq 0$.

Karakteristična jednačina. Neka je (ne nula) niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dat homogenom linearnom rekurentnom relacijom sa konstantnim koeficijentima:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \tag{1.2}$$

Pretpostavimo da postoji broj $x \neq 0$ sa osobinom da je rešenje posmatrane rekurentne relacije oblika

$$a_n = x^n, \text{ za svako } n \geq 0.$$

Zamenom u rekurentnu relaciju, dobijamo

$$\begin{aligned} x^n = c_1 x^{n-1} + \ldots + c_k x^{n-k} \quad &\Leftrightarrow \quad x^n = x^{n-k}(c_1 x^{k-1} + \ldots + c_k) \\ &\Leftrightarrow \quad x^k = c_1 x^{k-1} + \ldots + c_k \end{aligned}$$

Za jednačinu

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

kažemo da je karakteristična jednačina relacije (1.2).

Teorema 44 *Ako karakteristična jednačina rekurentne relacije*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

ima k korena $x_1, \ldots, x_k$ sa osobinom

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, k\}\ i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j,$$

onda važi

(i) za sve $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$,

$$a(n) = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \ldots \alpha_k x_k^n$$

je rešenje posmatrane rekurentne relacije;

(ii) konstante $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ su jedinstveno odredene početnim uslovima

$$a(0) = a_0, \ldots, a(k-1) = a_{k-1}.$$

Dokaz.

(i) Ako posmatrani izraz zamenimo u rekurentnu relaciju, dobijamo sledeći niz ekvivalentnih jednakosti:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 x_1^n + \ldots \alpha_k x_k^n = c_1(\alpha_1 x_1^{n-1} + \ldots \alpha_k x_k^{n-1}) \\ & \ldots\ldots \\ & \qquad\qquad + c_k(\alpha_1 x_1^{n-1} + \ldots \alpha_k x_k^{n-1}) \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_1 x_1^{n-k}(x_1^k - c_1 x_1^{k-1} - \ldots - c_k) + \ldots \\ & \qquad\qquad + \alpha_k x_k^{n-k}(x_k^k - c_1 x_k^{k-1} - \ldots c_k) = 0 \end{aligned}$$

Kako su $x_1, \ldots, x_k$ koreni karakteristične jednačine, izrazi u zagradama su jednaki 0, čime je dokaz završen.

(ii) Kako bi zadate početne vrednosti pripadale nizu opisanom datom rekurentnom relacijom, one moraju zadovoljavati rešenje rekurentne relacije koje je dato pod (i). Tako dobijamo

$$\begin{array}{lllllllll} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \ldots & + & \alpha_k & = & a_0 \\ \alpha_1 x_1 & + & \alpha_2 x_2 & + & \ldots & + & \alpha_k x_k & = & a_1 \\ \ldots & & & & \ldots & & \ldots & & \\ \alpha_1 x_1^{k-1} & + & \alpha_2 x_2^{k-1} & + & \ldots & + & \alpha_k x_k^{k-1} & = & a_{k-1} \end{array}$$

Determinanta datog sistema jednačina je Vandermondova determinanta

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \dots & & \dots & \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le k} (x_j - x_i) \neq 0.$$

Odatle direktno sledi da je posmatrani sistem linearnih jednačina odreden i da ima jedinstveno rečenje. □

Teorema 45 *Ako karakteristična jednačina*

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_{k-1} x - c_k = 0.$$

ima korene $x_1, \dots, x_l$ *redom višestrukosti* $k_1, \dots, k_l$, *onda je*

(i) opšte rešenje posmatrane rekurentne relacije

$$\begin{aligned} a(n) \;\; = \;\; & (\alpha_{11} + n\alpha_{12} + \dots + n^{k_1-1}\alpha_{1k_1})x_1^n + \\ & (\alpha_{21} + n\alpha_{22} + \dots + n^{k_2-1}\alpha_{2k_2})x_2^n + \\ & \dots \\ & +(\alpha_{l1} + n\alpha_{l2} + \dots + n^{k_l-1}\alpha_{lk_l})x_l^n \end{aligned}$$

(ii) konstante $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{lk_l}$ *su jedinstveno odredene početnim uslovima.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu tvrdenja za jednostruke korene. □

1.7.2 Nehomogene, linearne, sa konstantnim koeficijentima

U ovom delu ćemo posmatrati rekurentne relacije oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + f(n), \tag{1.3}$$

gde su $c_1, \dots, c_k$ konstante, $k \ge 1$, $c_k \neq 0$, a f funkcija skupa $\mathbb{N}_0$.

Za rekurentnu relaciju koju dobijemo kada funkciju $f(n)$ zamenimo nulom,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}, \tag{1.4}$$

kazaćemo da je odgovarajuća homogena rekurentna relacija.

Sledeće tvrdenje pokazuje da je, osim (opšteg) rešenja odgovarajuće homogene jednačine, dovoljno naći jedno rešenje nehomogene jednačine, da bismo odredili rešenje polazne nehomogene rekurentne relacije. Sa sličnim tvrdenjem čitaoc se susreo prilikom rešavanja nehomogenih sistema linearnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, nehomogenih diferencijalnih jednačina višeg reda sa konstantnim koeficijentima i sl.

Teorema 46 *Ako je $a_n^{(p_1)}$ partikularno rešenje nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima, tada za svako rešenje a_n jednačine (1.3) postoji rešenje $a_n^{(h)}$ odgovarajuće homogene rekurentne relacije sa osobinom*

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p_1)}, \quad n \geq 0.$$

Dokaz. Neka je $a_n^{(p_1)}$ dato (partikularno) rešenje jednačine (1.3). Tada za svako $n \in \mathbb{N}_0$ važi

$$a_n^{(p_1)} = c_1 a_{n-1}^{(p_1)} + c_2 a_{n-2}^{(p_1)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p_1)} + f(n). \tag{1.5}$$

Posmatrajmo sada proizvoljno rešenje $a_n^{(p)}$ jednačine (1.3). Za njega važi

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p)} + f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.6}$$

Ako od relacije (1.6) oduzmemo relaciju (1.5), dobijamo

$$a_n^{(p)} - a_n^{(p_1)} = c_1(a_{n-1}^{(p)} - a_{n-1}^{(p_1)}) + c_2(a_{n-1}^{(p)} - a_{n-1}^{(p_1)}),$$

što znači da je $a_n^{(p_1)} - a_n^{(p)}$ rešenje rekurentne relacije (1.4), tj. za svako rešenje nehomogene rekurentne relacije a_n postoji rečenje $a_h^{(n)}$ homogene jednačine tako da se $a_n^{(p)}$ može izraziti pomoću $a_n^{(h)}$ i $a_n^{(p_1)}$ koristeći obrazac

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p_1)}.$$

□

Prethodno tvrđenje direktno indukuje jedan metod za određivanja opšteg rešenja nehomogene rekurentne relacije. Ako se na bilo koji način može odrediti jedno rešenje nehomogene relacije, onda oblik opšteg rešenja direktno sledi. Sledeće tvrđenje daje metod za određivanje tog jednog partikularnog rešenja u slučaju kada nehomogeni deo ima jedan određeni specifičan oblik. U svim ostalim slučajevima metod nije primenjiv.

Teorema 47 *Neka je*

$$f(n) = (b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0)s^n, \quad b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}.$$

Ako je s koren karakteristične jednačine višestrukosti l (ako nije koren, tada je $l = 0$), onda postoji partikularno rešenje oblika

$$a_n^{(p)} = n^l (c_m n^m + c_{n-1} n^{m-1} + \ldots + c_1 n + c_0)s^n.$$

Teorema 48 *Ako su* $a_n^{(p_1)}$ *i* $a_n^{(p_2)}$ *redom rešenja nehomogenih rekurentnih relacija*

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_1(n) \quad i \\ a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_2(n), \end{aligned}$$

onda je $a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)}$ *rešenje nehomogene rekurentne relacije*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_1(n) + f_2(n).$$

Dokaz. Ako su $a_n^{(p_1)}$ i $a_n^{(p_2)}$ redom rešenja navedenih rekurentnih relacija, onda važi

$$\begin{aligned} a_n^{(p_1)} &= c_1 a_{n-1}^{(p_1)} + c_2 a_{n-2}^{(p_1)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p_1)} + f_1(n) \text{ i} \\ a_n^{(p_2)} &= c_1 a_{n-1}^{(p_2)} + c_2 a_{n-2}^{(p_2)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p_2)} + f_2(n). \end{aligned}$$

Sabiranjem prethodne dve jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)} &= c_1(a_{n-1}^{(p_2)} + a_{n-1}^{(p_1)}) + c_2(a_{n-2}^{(p_1)} + a_{n-2}^{(p_2)}) + \ldots + \\ & \quad c_k(a_{n-k}^{(p_1)} + a_{n-k}^{(p_2)}) + f_1(n) + f_2(n), \end{aligned}$$

čime je direktno pokazano da je $a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)}$ rešenje rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_1(n) + f_2(n).$$

$\square$

1.7.3 Zadaci za vežbu

1. **Koliko ima različitih reči dužine n, $n \geq 1$, nad azbukom $\{0,1\}$ koje ne sadrže podreč** 111.

   Rešenje. Neka je a_n broj reči dužine n koje ne sadrže podreč 111.
   Ako je $n = 1$, onda je $a_1 = 2$ (reči su 0 i 1).
   Ako je $n = 2$, onda je $a_2 = 4$ (reči su $00, 01, 10, 11$).
   Ako je $n = 3$, onda je $a_3 = 7$ (jedina nedozvoljena reč je 111).
   Za proizvoljno $n \geq 4$ može se zakljčiti da reč koja ne sadrž kao podreč 111 ima jednu sledeće tri osobine:

   - počinje sa 0 i u nastavku nema podniz 111 ili
   - počinje sa 10 i u nastavku nema podniz 111 ili
   - počinje sa 110 i u nastavku nema podniz 111.

   Znači,

   $$\begin{array}{rcl} a_1 &=& 2 \\ a_2 &=& 4 \\ a_3 &=& 7 \\ a_n &=& a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, n \geq 4. \end{array} \qquad \square$$

2. **Rešiti rekurentnu relaciju koja opisuje Fibonačijev niz**

   $$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2.$$

   Rešenje. Karakteristična jednačina je

   $$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \wedge x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

   Rešenje rekurentne relacije je oblika

   $$f(n) = \alpha_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

   Zamenom početnih vrednosti u prethodnu jednakost, dobijamo sistem jednačina

   $$\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 &+& \alpha_2 &=& 0 \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\alpha_1 &+& \alpha_2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) &=& 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}$$

   iz kojeg sledi da je rešenje date rekurentne relacije

   $$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \geq 0.$$

$\square$

3. **Rešiti rekurentnu relaciju**

$$\begin{array}{ll} a_0 = 2 & a_1 = 1 \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, & n \geq 2. \end{array}$$

Rešenje. Karakteristična jednačina je

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = 2,$$

odakle je njeno rešenje oblika

$$a(n) = (\alpha_1 + n\alpha_2) \cdot 2^n.$$

Ako zamenimo inicijalne vrednosti u prethodnu jednakost, dobijamo

$$\begin{array}{c} \alpha_1 = 2 \\ (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot 2 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -\frac{3}{2}. \end{array}$$

Odatle je rešenje rekurentne relacije

$$a_n = \left(2 - \frac{3}{2}n\right) \cdot 2^n.$$

□

4. **Odrediti broj a_n reči dužine n nad azbukom $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ koje imaju paran broj nula.**

   (i) Postaviti rekurentnu relaciju za broj a_n.

   (ii) Rešiti datu rekurentnu relaciju.

Rešenje.

(i) Ako je $n = 1$,

$$a_1 = 9.$$

Ako je $n = 2$, onda su ili obe cifre jednake nuli ili su obe različite od nule.. Takvih reči ima

$$a_2 = 1 + 9^2 = 82.$$

U opštem slučaju, možemo posmatrati broj reč a_n u zavisnost od a_{n-1}, posmatrajući slučajeve kada je na prvom mestu 0 i kada na prvom mestu nije 0.

Ako na prvom mestu nije 0, imamo 9 mogućnosti da izaberemo prvi znak. U takvoj reči ima paran broj nula ako ih na preostalih $n - 1$ mesta ima toliko. Broj takvih reči dužine n jednak je $9 \cdot a_{n-1}$.

Ako je na prvom mestu nula, na preostalih $n - 1$ mesta mora biti neparan broj parnih cifara, a njih ćemo izračunati oduzimanjem od broja svih reči dužine $n-1$ (kreiranih od proizvoljnih cifara) broj reči koje imaju paran nula. Takvih reči ima $(10^{n-1} - a_{n-1})$. Odatle je rekurentna relacija

$$a_n = 9 \cdot a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}), \qquad a_1 = 9, \text{ tj.}$$

$$a_n = 8 \cdot a_{n-1} + 10^{n-1}, \qquad a_1 = 9.$$

(ii) Homogena rekurentna relacija je oblika $a_n - 8a_{n-1} = 0$, a njena karakteristična $x - 8 = 0$, sa rešenjem $x = 8$. Njeno rešenje je

$$a_n^{(h)} = \alpha \cdot 8^n.$$

Partikularno rešenje ćemo odrediti metodom neodređenih koeficijenata. Za $f(n) = 10^{n-1}$ imamo $a_n^{(p)} = A \cdot 10^{n-1}$. Zamenom u rekurentnu relaciju dobijamo

$$A \cdot 10^{n-1} = 8A \cdot 10^{n-2} + 10^{n-1} \Leftrightarrow A = 5.$$

Znači, opšte rešenje rekurentne relacije je

$$a_n = \alpha \cdot 8^n + 5 \cdot 10^{n-1}.$$

Ako u tu jednačinu zamenimo $a_1 = 9$, dobijamo $\alpha = \frac{1}{2}$ i dalje

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 8^n + \frac{1}{2} \cdot 10^n.$$

□

5. **Na raspolaganju su pločice dimenzije 1×1 u dve različite boje i dimenzije 1×2 u tri različite boje. Odrediti koliko se različitih staza dimenzije $1 \times n$ može popločati takvim pločicama.**

   (i) Postaviti rekurentnu relaciju za broj a_n različitih staza dimenzije $1 \times n$.

   (ii) Rešiti datu rekurentnu relaciju.

Rešenje.

(i) Ako je $n = 1$, imamo dva načina da stavimo dve različite pločice veličine 1×1, odakle je $a_1 = 2$. Ako je $n = 2$, imamo 2^2 načina da stazu popločamo pločicama dimenzije 1×1 i tri načina da to uradimo pločicama dimenzije 1×2, odakle je $a_2 = 7$.
U opštem slučaju, za $n \geq 3$, imamo dve mogućnosti da započnemo pokrivanje staze: stavljanjem prve pločice dimenzije 1×1 ili stavljanjem prve pločice dimenzije 1×2. U prvom slučaju i mamo $2 \cdot a_{n-1}$ načina da to uradimo, a u drugom $3 \cdot a_{n-2}$, tako da je tražena rekurentna relacija

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2}, \qquad a_1 = 2, a_2 = 7.$$

Sada se direktnom zamenom može zaključiti da je $a_0 = 1$.

(ii) Karakteristična jednačina je

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = -1.$$

Odatle je

$$a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta(-1)^n.$$

Nakon uvrštavanja inicijalnih vrednosti, dobijamo $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$ **i** konačno

$$a_n = \frac{3}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4} \cdot (-1)^n.$$

□

6. **Rešiti rekurentnu relaciju** $a_n = 4a_{n-1} + a_{n-2} - 4a_{n-3}, n \geq 3$, **ako je** $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ **i** $a_2 = 3$.

Rešenje. Karakteristična jednačina je

$$x^3 = 4x^2 + x - 4 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4 \wedge x_2 = 1 \wedge x_3 = -1,$$

odakle je opšte rešenje

$$a_n = \alpha 4^n + \beta + \gamma(-1)^n.$$

Uvrštavanjem inicijalnih vrednosti, dobijamo sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ 4\alpha & + & \beta & - & \gamma & = & 2 \\ 16\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ 5\alpha & + & 2\beta & & & = & 3 \\ 15\alpha & & & & & = & 2 \end{array}$$

Rešenje sistema je $\alpha = \frac{2}{15}$, $\beta = \frac{7}{6}$, $\gamma = -\frac{3}{10}$ **i**

$$a_n = \frac{2}{15} \cdot 4^n + \frac{7}{6} - \frac{3}{10} \cdot (-1)^n.$$

□

7. **Rešiti rekurentnu relaciju** $a_n = 2a_{n-1} + 5, n \geq 1$, **ako je** $a_0 = 3$.

Rešenje. Datu rekurentnu relaciju možemo rešiti metodom direktne zamene unazad

$$\begin{aligned} a_n =& 2a_{n-1} + 5 \\ =& 2(2a_{n-2} + 5) + 5 = 2^2 \cdot a_{n-2} + 2 \cdot 5 + 5 \\ =& 2^2(2a_{n-3} + 5) + 2 \cdot 5 + 5 = 2^3 \cdot a_{n-3} + 2^2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 5 \\ =& \ldots \\ =& 2^n a_0 + 5 \cdot \left(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1\right) \\ =& 3 \cdot 2^n + 5 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ =& 8 \cdot 2^n - 5. \end{aligned}$$

□

8. **Rešiti rekurentnu relaciju** $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} - 4a_{n-4}$, **ako je** $a_0 = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 11$ **i** $a_3 = 34$.

Rešenje. Karakteristična jednačina je

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2(x^2+x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = 2 \wedge x_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \wedge x_4 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Odatle je opšte rešenje rekurentne relacije

$$a_n = (\alpha n + \beta)2^n + \gamma \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \delta \cdot \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Zamenom inicijalnih vrednosti, dobijamo $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ i rešenje zadate rekurentne relacije je

$$a_n = (n+1)2^n + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

□

9. **Odrediti oblik partikularnog rešenja linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima**

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + f(n)$$

ako je

(i) $f(n) = 3^n$,

(ii) $f(n) = n3^n$,

(iii) $f(n) = n^2 2^n$,

(iv) $f(n) = (n^2+1)3^n$.

Rešenje. Odgovarajuće homogena rekurentna relacija je oblika

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}.$$

Njena karakteristična jednačina je

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = 3.$$

Treba konstatovati da je $x = 3$ dvostruki koren karakteristične jednačine i da $x = 2$ nije njen koren. Na osnovu toga i oblika stepena polinoma koji množi 3^n ili 2^n, dobijamo

(i) $a_n^{(p)} = A \cdot n^2 \cdot 3^n$;

(ii) $a_n^{(p)} = (An + B) \cdot n^2 \cdot 3^n$;

(iii) $a_n^{(p)} = (An^2 + Bn + C) \cdot 2^n$,

(iv) $a_n^{(p)} = (An^2 + Bn + C) \cdot n^2 \cdot 3^n$.

□

10. **Rešiti rekurentnu relaciju** $a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) + 2^n$, $n \geq 2$, **ako je** $a_0 = 0$ **i** $a_1 = 3$.

Rešenje. Odgovarajuća homogena rekurentna relacija je

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0.$$

Karakteristična jednačina je

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \Leftrightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = 2,$$

a opšte rešenje odgovarajuće homogene rekurentne relacije

$$a_n^{(h)} = (\alpha n + \beta) \cdot 2^n.$$

Kako je $x = 2$ dvostruki koren karakteristične jednačine, partikularno rečenje ćemo tražiti u obliku

$$a_n^{(p)} = A \cdot n^2 \cdot 2^n.$$

Zamenom u zadatu rekurentnu relaciju, dobijamo $A = \frac{1}{2}$,

$$a_n^{(p)} = n^2 \cdot 2^{n-1},$$

i konačno

$$a_n = (\alpha n + \beta) \cdot 2^n + n^2 \cdot 2^{n-1}.$$

Uvrštavanjem inicijalnih vrednosti $a_0 = 0$ i $a_1 = 3$ u opšte rešenje, dobijamo $\alpha = 1$, $\beta = 0$ i

$$a_n = (n^2 + 2n) \cdot 2^{n-1}.$$

□

11. **Rešiti rekurentnu relaciju** $a_n = 3a_{n-1} - 4n + 3 \cdot 2^n$, $n \geq 1$, **ako je** $a_0 = 0$.

Rešenje. Odgovarajuća homogena rekurentna relacija ima oblik

$$a_n - 3a_{n-1} = 0,$$

dok je njena karakteristična jednačina

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Sada je opšte rešenje odgovarajuće homogene rekurentne relacije

$$a_n^{(h)} = \alpha \cdot 3^n.$$

Partikularno rešenje zadate rekurentne relacije ćemo odrediti kao zbir partikularnih rešenja sledeće dve rekurentne relacije:

$$a_n = 3a_{n-1} - 4n$$
$$a_n = 3a_{n-1} + 3 \cdot 2^n.$$

U prvom slučaju, rešenje tražimo u obliku $a_n^{(p_1)} = An + B$, a u drugom u obliku $a_n^{(p_2)} = C \cdot 2^n$. Odatle je

$$\begin{array}{rcll} An + B & = & 3(An - A + B) - 4n & \Leftrightarrow \quad 2An - 3A + 2B = 4n \\ C \cdot 2^n & = & 3 \cdot C \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^n & \Leftrightarrow \quad 2C = 3C + 6 \end{array}$$

U prvom slučaju imamo $A = 2, B = 3$ i $a_n^{(p_1)} = 2n + 3$. U drugom slučaju je $C = -6$ i $a_n^{(p_2)} = -6 \cdot 2^n$. Sada možemo formirati opšte rešenje polazne rekurentne relacije:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)} = \alpha \cdot 3^n + 2n + 3 - 6 \cdot 2^n.$$

Nakon zamene inicijalnog uslova, dobijamo $\alpha = 3$ i

$$a_n = 3^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} + 2n + 3, n \geq 0.$$

□

12. **Odrediti broj a_n, $n \geq 0$, brojeva koji imaju $n+2$ cifre i paran broj parnih cifara.**

    (i) Postaviti rekurentnu relaciju za broj a_n.

    (ii) Rešiti datu rekurentnu relaciju.

Rešenje.

(i) Neka je b_n broj brojeva koje imaju $n + 2$ cifre i neparan broj parnih cifara. Tada je $a_0 = 45$ i $b_0 = 45$. Formiraćemo svaki novi broj dodavanjem nove cifre na mesto jedinica. Ako broj ima paran broj parnih cifara, dodavanjem neparnog broja na kraj, on se ne menja, dok dodavanjem parnog broja na kraj on postaje neparan. Takvim rezonovanjem, za $n \geq 0$, dobijamo sledeći sistem rekurentnih relacija:

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 5a_n + 5b_n \\ b_{n+1} & = & 5a_n + 5b_n \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} b_n & = & \frac{1}{5}a_{n+1} - a_n \\ b_{n+1} & = & a_{n+1} \end{array}$$

Kako je $a_0 = b_0$, a prethodni sistem jednačina važi za svako $n \geq 0$, iz drgue jednačine dobijamo da je $a_n = b_n$ za svako $n \geq 0$. Iz prve jednačine sada direktno sledi rekurentna relacija

$$a_n - 10a_{n-1} = 0, n \geq 1, \quad a_0 = 45$$

(ii) Karakteristična jednačina je

$$x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10,$$

odakle je

$$a_n = \alpha \cdot 10^n.$$

Nakon uvrštavanja inicijalne vrednosti, dobijamo $45 = \alpha$ i

$$a_n = 45 \cdot 10^n, \quad n \geq 0.$$

□