predmet: Matematička analiza 2

Alternativni redovi

1. Ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{5n+6}$, c) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n\sqrt{n}-1}$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$.

Rešenje:

a) Prvo ćemo ispitati apsolutnu konvergenciju. $|a_n| = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$, a $\sum \frac{1}{n}$ je harmonijski red koji divergira, zaključujemo da i početni red divergira apsolutno.

Ostaje nam da ispitamo da li red konvergira uslovno. Kako je $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ alternativni red, običnu konvergenciju ispitujemo Lajbnicovim kriterijumom:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$

2) $|a_{n+1}| \overset{?}{\leq} |a_n|$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow (n+1)(n^2+1) \leq n+n(n+1)^2 \Leftrightarrow n^3+n^2+n+1 \leq n^3+2n^2+2n \Leftrightarrow 1 \leq n^2+n$$

Dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ obično konvergira, a divergira apsolutno, pa stoga konvergira uslovno.

b) Kako je $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{5n+6} = \frac{2}{5}$, i kako $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ne postoji (niz $\{a_n\}$ ima dve tačke nagomilavanja: $\frac{2}{5}$ i $-\frac{2}{5}$), zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{5n+6}$ divergira obično, pa samim tim i apsolutno.

c) Prvo ćemo ispitati apsolutnu konvergenciju. $|a_n| = \frac{n}{n\sqrt{n}-1} \sim \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}} = n^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$, a $\sum\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ divergira($\frac{1}{2} < 1$), zaključujemo da i početni red divergira apsolutno.

Ostaje nam da ispitamo da li red konvergira uslovno. Kako je $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n\sqrt{n}-1}$ alternativni red, običnu konvergenciju ispitujemo Lajbnicovim kriterijumom:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{n}-1} = 0$

2) $|a_{n+1}| \overset{?}{\leq} |a_n|$

$$\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \leq \frac{n}{n\sqrt{n}-1} \Leftrightarrow (n+1)(n\sqrt{n}-1) \leq n(n+1)\sqrt{n+1}-n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (n+1)(n\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}) \leq 1 \Leftrightarrow n(n+1)(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}) \leq 1$$

Dakle, red $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n\sqrt{n}-1}$ obično konvergira, a divergira apsolutno, pa stoga konvergira uslovno.

d) Prvo ćemo ispitati apsolutnu konvergenciju. Na osnovu Dalamberovog kriterijuma, red $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ konvergira:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Odatle zaključujemo da početni red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$ konvergira apsolutno, pa samim tim i obično.

e) Prvo ćemo ispitati apsolutnu konvergenciju. Na osnovu Košijevog korenskog kriterijuma, red $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ konvergira:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Odatle zaključujemo da početni red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ konvergira apsolutno, pa samim tim i obično.

2. U zavisnosti od parametra, ispitati apsolutnu i uslovnu konvergenciju sledećih redova:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)a^{2n}}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Rešenje:

a) Iz $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha>0\\ 1, & \alpha=0\\ \infty, & \alpha<0\end{cases}$ zaključujemo:

- za $\alpha\le 0$ red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha}$ divergira obično, a samim tim i apsolutno (opšti član mu ne teži nuli),
- za $\alpha>1$, red $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ konvergira, pa red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha}$ konvergira apsolutno, a samim tim i obično.
- za $0<\alpha\le 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ divergira, pa red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha}$ divergira apsolutno. Lajbnicovim kriterijumom ispitujemo običnu konvergenciju:

  1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$
  2) $\frac{1}{(n+1)^\alpha}\le\frac{1}{n^\alpha}$

  Dakle, za $0<\alpha\le 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha}$ obično konvergira, a divergira apsolutno, pa stoga konvergira uslovno.

b) Iz $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)a^{2n}} = \begin{cases} 0, & \frac{1}{a^2}\le 1\\ \infty, & \frac{1}{a^2}>1\end{cases} = \begin{cases} 0, & a\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\\ \infty, & a\in(-1,0)\cup(0,1)\end{cases}$ zaključujemo:

- za $a\in(-1,0)\cup(0,1)$, red $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)a^{2n}}$ divergira i obično i apsolutno jer mu opšti član ne teži nuli.
- za $a\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)a^{2n}}=0$ što je potreban, ali ne i dovoljan uslov za konvergenciju. Na osnovu Dalamberovog kriterijuma:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+2)a^{2n+2}}}{\frac{1}{(n+1)a^{2n}}} = \frac{1}{a^2} < 1$$

zaključujemo da red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)a^{2n}}$ konvergira, što znači da red $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)a^{2n}}$ konvergira apsolutno, a samim tim i obično.

– za $a = \pm 1$ dobija se red $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1}$ koji divergira apsolutno. Lajbnicovim kriterijumom ispitujemo običnu konvergenciju:

  1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$

  2) $\frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1}$

  Dakle, za $a = \pm 1$ red $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)a^{2n}}$ obično konvergira, a divergira apsolutno, pa stoga konvergira uslovno.

3. Pokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ konvergira i naći sumu sa tačnošću 0.01.

Rešenje:

Kako je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ alternativni red, običnu konvergenciju ispitujemo Lajbnicovim kriterijumom:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = 0$

2) $\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \leq \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{n}$

Ispunjena su oba uslova pa zaključujemo da dati red konvergira.

Da bismo našli sumu sa tačnošću 0.01, treba da važi:

$$|S - S_n| \leq |a_{n+1}| < 0.01 \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} < 0.01 \Leftrightarrow (n+1)(n+2)(n+3) > 100.$$

Odatle zaključujemo da su potrebna prva tri sabirka da bi se postigla tražena tačnost $(4 \cdot 5 \cdot 6 = 120)$ i dobijamo $S_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{60} = \frac{17}{120}$.