PITANJA ZA USMENI - BLOKADNA VERZIJA

(na svako pitanje dati precizan i detaljan odgovor)

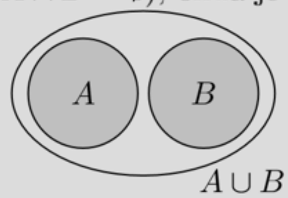
1. Osnovni principi prebrojavanja.

Osnovni principi prebrojavanja su princip proizvoda, princip sume, princip uključenja-isključenja, Dirihleov princip.

Princip sume koristimo kada prebrojavamo elemente dva disjunktna skupa.

**Lema 2** Ako su $A$ i $B$ disjunktni konačni skupovi ($A \cap B = \emptyset$), onda je

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$




**Teorema 3 (princip sume)** Neka je $n \geq 2$ i neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi sa osobinom

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Tada je

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

*Dokaz.* Indukcijom po $n$.
Baza $n = 2$ : Sledi na osnovu Leme 2.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da je $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|$.
Induktivni korak: Dokazaćemo da tvrđenje važi za $n + 1$ skupova. Na osnovu Leme 2, imamo

$$|(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}|.$$

Na osnovu induktivne pretpostavke dalje sledi

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |A_1| + \ldots + |A_n| + |A_{n+1}|,$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

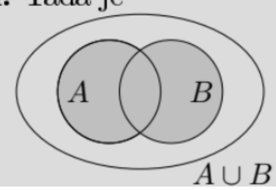
Princip uključenja-isključenja

### 1.2.2 Princip uključenja-isključenja

U slučaju kada se prebrojavaju elementi unije proizvoljnih skupova, može se desiti da neki parovi imaju zajedničke elemente. Tako kada određujemo broj elementa unije dva skupa, prebrojavanjem elemenata jednog, a zatim drugog, dva puta se prebroje elementi preseka tih skupova. Zato se oni na kraju moraju oduzeti, kao što je to formulisano lemom u nastavku.

**Lema 4** Neka su $A$ i $B$ proizvoljni konačni skupovi. Tada je

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$




*Dokaz.* Skupovi $A \cap B$ i $A \setminus B$ (kao i parovi $A \cap B$, $B \setminus A$ i $A \setminus B$, $B \setminus A$) su disjunktni i važe sledeće jednakosti (što sledi direktno iz definicija skupovnih operacija):

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B) \cup (A \setminus B), \\ B &= (A \cap B) \cup (B \setminus A), \\ A \cup B &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

Na osnovu principa sume sledi:

$$\begin{aligned} |A| &= |(A \cap B) \cup (A \setminus B)| = |A \cap B| + |A \setminus B|, \\ |B| &= |(A \cap B) \cup (B \setminus A)| = |A \cap B| + |B \setminus A|, \\ |A \cup B| &= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|. \end{aligned}$$

Odatle je

$$|A| + |B| = |A \cap B| + |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| = |A \cap B| + |A \cup B|, \text{ tj.}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

□

Posmatraćemo sada tri proizvoljna skupa, čime će biti ilustrovan induktivni korak Teoreme 6.

**Lema 5** Neka su $A, B$ i $C$ proizvoljni konačni skupovi. Tada je

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

**Teorema 6 (princip uključenja-isključenja)** . Neka je $n \geq 2$ i neka su $A_1$, $\ldots$, $A_n$ proizvoljni konačni skupovi. Tada je

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

(gde je $\cap A = A$).

*Dokaz.* Indukcijom po $n$.
Baza $n = 2$ : Sledi na osnovu Leme 4.
Induktivna pretpostavka: Za $n-1$ proizvoljnih konačnih skupova važi jednakost iz tvrđenja.
Induktivni korak: Primenom Leme 4 i induktivne pretpostavke dobijamo

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \left|A_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n} A_i\right| = |A_1| + \left|\bigcup_{i=2}^{n} A_i\right| - \left|\bigcup_{i=2}^{n} (A_1 \cap A_i)\right| \\
&= |A_1| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \\
&\quad - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} (A_1 \cap A_i)\right| \\
&= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.
\end{aligned}$$

□

**Posledica 7** *Neka je $n \geq 2$ i neka su $A_1$, $\ldots$, $A_n$ proizvoljni konačni skupovi. Tada je*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \leq |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Princip proizvoda

### 1.2.3 Princip proizvoda

Kada se prebrojavaju elementi nekog uređenog skupa, primenjuje se princip proizvoda. U nastavku je prvo data formulacija za slučaj dva skupa, tj. dat je broj elemenata Dekartovog proizvoda dva konačna skupa.

**Lema 8** Neka su $A$ i $B$ konačni skupovi. Broj elemenata skupa $A \times B$ jednak je

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

**Teorema 9 (princip proizvoda)** Neka je $n \geq 2$ i neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi. Tada je

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_n|.$$

*Dokaz.* Indukcijom po $n$.
Baza $n = 2$ : Sledi na osnovu Leme 8.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da je $|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.
Induktivni korak: Dokazaćemo da tvrđenje važi za Dekartov proizvod $n+1$ skupova. Na osnovu Leme 8, imamo

$$|(A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}| = |A_1 \times \ldots \times A_n| \cdot |A_{n+1}|.$$

Prema induktivnoj pretpostavci, dalje je

$$|A_1 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|.$$

Dirihleov princip

**Teorema 10 (Dirihleov princip)** Za $m, n \in \mathbb{N}$, neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi i neka je

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \{a_1, \ldots, a_m\}.$$

Ako je $m > n$, onda postoji $j \in \{1, \ldots, n\}$ sa osobinom $|A_j| \geq 2$.

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, da za svako $j \in \{1, \ldots, n\}$ važi

$$|A_j| \leq 1.$$

Tada za broj elemenata u uniji skupova važi

$$m = |A_1 \cup \ldots \cup A_n| \leq |A_1| + \ldots + |A_n| \leq n,$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $m > n$. Time zaključujemo da pretpostavka nije bila tačna. □

Dirihleov princip možemo dodatno uopštiti kao što je formulisano u sledećoj teoremi.

**Teorema 11 (Uopšteni Dirihleov princip)** *Za $n, m \in \mathbb{N}$, neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi i neka je*

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \{a_1, \ldots, a_m\}.$$

*Ako je $m > n \cdot q$, za neko $q \in \mathbb{N}$, onda postoji $j \in \{1, \ldots, n\}$ sa osobinom $|A_j| \geq q + 1$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, da za svako $j \in \{1, \ldots, n\}$ važi

$$|A_j| \leq q.$$

Tada za broj elemenata u uniji skupova važi

$$m = |A_1 \cup \ldots \cup A_n| \leq |A_1| + \ldots + |A_n| \leq n \cdot q,$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $m > n \cdot q$. □

2. Navesti sličnosti i razlike između skupa, multiskupa i uređene torke. Obrazložiti koje elemente sadrže multiskupovi $M = [b1,b2,...,bl]m,m,...,m$ i $M = [b1,b2,...,bl]m1,m2,...,ml$.

**Skup**: Kolekcija različitih elemenata koji se ne mogu ponavljati, redosled nije bitan.

**Multiskup**: Kolekcija u kojoj se elementi mogu ponavljati, ali redosled nije bitan.

**Uredjena torka**: Niz elemenata gde se elementi mogu ponavljati i redosled je bitan.

Tumačenje datih multiskupova:

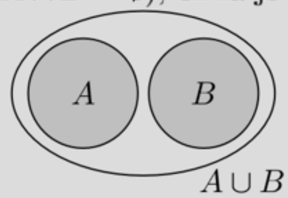
$M = [b1,b2,...,bl]m,m,...,m$ svaki elemenet se ponavlja m puta, ukupno ima l * m elemenata

$M = [b1,b2,...,bl]m1,m2,...,ml$ svaki element se pojavljuje $m_i$ puta

3. Princip sume za dva skupa.

**Lema 2** Ako su $A$ i $B$ disjunktni konačni skupovi ($A \cap B = \emptyset$), onda je

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$




4. Princip sume za dva ili više skupova, sa dokazom.

**Teorema 3 (princip sume)** Neka je $n \geq 2$ i neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi sa osobinom

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Tada je

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

*Dokaz.* Indukcijom po $n$.
Baza $n = 2$ : Sledi na osnovu Leme 2.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da je $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|$.
Induktivni korak: Dokazaćemo da tvrđenje važi za $n+1$ skupova. Na osnovu Leme 2, imamo

$$|(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}|.$$

Na osnovu induktivne pretpostavke dalje sledi

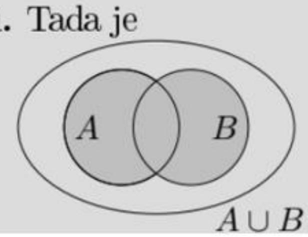
$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |A_1| + \ldots + |A_n| + |A_{n+1}|,$$

što je i trebalo dokazati. □

5. Princip uključenja-isključenja za dva i tri skupa, sa dokazom.

**Lema 4** Neka su $A$ i $B$ proizvoljni konačni skupovi. Tada je

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



*Dokaz.* Skupovi $A \cap B$ i $A \setminus B$ (kao i parovi $A \cap B$, $B \setminus A$ i $A \setminus B$, $B \setminus A$) su disjunktni i važe sledeće jednakosti (što sledi direktno iz definicija skupovnih operacija):

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B) \cup (A \setminus B), \\ B &= (A \cap B) \cup (B \setminus A), \\ A \cup B &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$

Na osnovu principa sume sledi:

$$\begin{aligned} |A| &= |(A \cap B) \cup (A \setminus B)| = |A \cap B| + |A \setminus B|, \\ |B| &= |(A \cap B) \cup (B \setminus A)| = |A \cap B| + |B \setminus A|, \\ |A \cup B| &= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|. \end{aligned}$$

Odatle je

$$|A| + |B| = |A \cap B| + |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| = |A \cap B| + |A \cup B|, \text{ tj.}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

□

Posmatraćemo sada tri proizvoljna skupa, čime će biti ilustrovan induktivni korak Teoreme 6.

**Lema 5** Neka su $A, B$ i $C$ proizvoljni konačni skupovi. Tada je

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

🔷 **Tvrdnja:**

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

✅ **Kratak dokaz:**

- Svaki element iz $A \cup B \cup C$ sabran je u $|A| + |B| + |C|$
- Ako se nalazi u dva skupa, brojimo ga **dva puta** – zato oduzimamo sve **presjeke po parovima**
- Ako se nalazi u **sva tri skupa**, oduzeli smo ga **tri puta**, pa ga treba jednom **dodati nazad**

6. Princip uključenja-isključenja za četiri skupa skupa.

A + B + C + D +
– (A∩B + A∩C + A∩D + B∩C + B∩D + C∩D) +
+ A∩B∩C + A∩B∩D + A∩C∩D + B∩C∩D +
– A∩B∩C∩D

Općeniti oblik formule uključivanja-isključivanja jest:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{1\le i\le n} |S_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |S_i \cap S_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |S_i \cap S_j \cap S_k| + \ldots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{1\le i\le n} S_i\right|$$

gdje je n broj skupova, a $S_i$ su tih n skupova.

7. Princip proizvoda za dva skupa, sa dokazom.

**Lema 8** Neka su $A$ i $B$ konačni skupovi. Broj elemenata skupa $A \times B$ jednak je

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

**Teorema 9 (princip proizvoda)** Neka je $n \geq 2$ i neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi. Tada je

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_n|.$$

*Dokaz.* Indukcijom po $n$.
Baza $n = 2$ : Sledi na osnovu Leme 8.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da je $|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.
Induktivni korak: Dokazaćemo da tvrđenje važi za Dekartov proizvod $n + 1$ skupova. Na osnovu Leme 8, imamo

$$|(A_1 \times \ldots \times A_n) \times A_{n+1}| = |A_1 \times \ldots \times A_n| \cdot |A_{n+1}|.$$

Prema induktivnoj pretpostavci, dalje je

$$|A_1 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|.$$

8. Princip proizvoda za dva ili više skupova, sa dokazom.

Isti dokaz kao i u prethodnom pitanju.

9. Dirihleov princip, sa primerom.
Ako raspodelimo **više objeka ta nego kutija**, bar **jedna kutija** će sadržati **više od jednog objekta**.

✅ **Primer:**

Imamo **13 pari čarapa** i **12 fioka**.
Ako svaku čarapu stavimo u neku fioku (bilo koju),
onda po **Dirihleovom principu**,
**najmanje jedna fioka** će sadržati **bar dve čarape**.

Zašto?

$$n = 13, \quad k = 12, \quad n > k \Rightarrow \text{neke dve čarape su u istoj fioci}$$

10. Klasifikacija uređenih izbora elemenata skupa i multiskupa.

📌 **I. KLASIFIKACIJA ZA SKUP (svi elementi različiti)**

| Tip izbora | Ponavljanje | Broj načina | Objašnjenje |
|---|---|---|---|
| **Permutacije n elemenata** | ❌ Ne | $n!$ | Svi elementi, redosled bitan |
| **k-permutacije bez ponavljanja** | ❌ Ne | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | Biramo k od n, bez ponavljanja |
| **k-permutacije sa ponavljanjem** | ✅ Da | $n^k$ | Biramo k od n, uz ponavljanje |

📌 **II. KLASIFIKACIJA ZA MULTISKUP (neki elementi se ponavljaju)**

Kod multiskupa imamo situaciju da se neki elementi **ponavljaju unapred određeni broj puta**.

| Tip izbora | Broj načina | Objašnjenje |
|---|---|---|
| **Permutacije multiskupa** | $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ | $n$ ukupno, $n_i$ ponavljanja istih elemenata |
| **Uređeni izbori k elemenata** | Zavisi od raspodele ponavljanja i ograničenja | Komplikovanje – koristi se generalizovani princip |

11. Šta je to *m*-permutacija elemenata multiskupa $M = [b_1,...,b_l]_{m,m,...,m}$ i koliko takvih *m*permutacija postoji?

### 1.3.1 Broj $m$-permutacija elemenata multiskupa

Neka je dat skup $B = \{b_1, \ldots, b_l\}$ sa $l \geq 1$ elemenata i neka je

$$M = [b_1, \ldots, b_l]_{m,\ldots,m}$$

multiskup u kojem se svaki element iz $B$ pojavljuje tačno $m$ puta. Broj elemenata u multiskupu $M$ je $n = m \cdot l$. Ako izaberemo $m$-točlani podmultiskup od $M$ i uredimo ga dobijamo jednu $m$-permutaciju multiskupa.

**Definicija 12** *$m$-permutacija elemenata multiskupa $M = [b_1, \ldots, b_l]_{m,\ldots,m}$ je bilo koja uređena $m$-torka elemenata iz $M$, tj. bilo koja uređena $m$-torka u kojoj je svaka komponenta element iz skupa $B$.*

Broj $m$-permutacija multiskupa $M = [b_1, \ldots, b_l]_{m,\ldots,m}$ označavaćemo sa

$$\overline{P}(l; m).$$

Jasno je da je broj načina da se formiraju $m$-torke elemenata sa osobinom da je svaka komponenta element skupa $B$ jednak broju elemenata u $B^m$.

**Teorema 13** *Broj $m$-permutacija elemenata multiskupa $M = [b_1, \ldots, b_l]_{m,\ldots,m}$ elemenata jednak je $l^m$,*

$$\overline{P}(l; m) = l^m.$$

*Dokaz.* Prema Definiciji 12, svaki element skupa $B \times \ldots \times B$ predstavlja jednu $m$-permutaciju multiskupa $M$. Broj takvih $m$-torki elemenata iz $B$ je na osnovu principa proizvoda:

$$|B \times \ldots \times B| = |B|^m = l^m.$$

12. Šta je to *m*-permutacija elemenata skupa $B = \{b_1,...,b_n\}$ i koliko takvih *m*-permutacija postoji ($1 \leq m \leq n$)?

**Definicija 15** *$m$-permutacija elemenata skupa $B$ je bilo koja $m$-torka elemenata skupa $B$ u kojoj su svaka dva elementa međusobno različita.*

Broj $m$-permutacija skupa od $n$ elemenata označavaćemo sa

$$P(n; m).$$

**Teorema 16** *Broj $m$-permutacija skupa $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ jednak je*

$$P(n; m) = n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

13. Šta je to *n*-permutacija elemenata skupa $B = \{b_1,...,b_n\}$ i koliko takvih *n*-permutacija postoji?

### 1.3.3 Broj permutacija elemenata skupa

Neka je $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. U slučaju kada je $m = n$, za $m$-permutaciju skupa $B$ se kaže da je permutacija. Broj permutacija skupa $B$ označava se sa

$$P(n).$$

**Teorema 1** *Broj permutacija skupa B jednak je*

$$P(n) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

14. Šta je to *n*-permutacija elemenata multiskupa $M = [b_1,b_2,...,b_l]_{m1,m2,...,ml}$ i koliko takvih *n*-permutacija postoji, ako je $n = m_1 + m_2 + ... + m_l$?

- Multiskup ima l različitih elemenata
- Svaki element $b_i$ se pojavljuje tačno $m_i$
- Ukupno elemenata je: n=m1+m2+…+ml

$$\frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_l!}$$

To je **uređeno raspoređivanje svih n elemenata**, uzimajući u obzir **ponavljanja** (neki elementi se više puta ponavljaju).

15. Klasifikacija neuređenih izbora elemenata.

Šta znači "neuređeni izbor"?

- Redosled elemenata nije bitan
- Pitanje je **šta je izabrano**, a ne **kako je poređano**
- Biramo elemente **sa ili bez ponavljanja**

| Tip izbora | Ponavljanje | Redosled | Broj izbora (formula) |
|---|---|---|---|
| **Kombinacije bez ponavljanja** | ❌ Ne | ❌ Ne | $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ |
| **Kombinacije sa ponavljanjem** | ✅ Da | ❌ Ne | $\binom{n+k-1}{k}$ |

16. Šta je to *m*-kombinacija elemenata multiskupa $M = [b_1,...,b_l]_{m,m,...,m}$ i koliko takvih *m*permutacija postoji?

Neka je dat multiskup

$$M = [b_1, \dots, b_l]_{m,\dots,m} = \{\{\underbrace{b_1, \dots, b_1}_{m}, \dots, \underbrace{b_l, \dots, b_l}_{m}\}\}.$$

Svaki $m$-točlani podmultiskup multiskupa $M$ je $m$-kombinacija tog multiskupa.

**Teorema 22** *Broj m-kombinacija multiskupa* $M = [b_1, \dots, b_l]_{m,\dots,m}$ *jednak je*

$$\overline{C}(l;m) = \frac{(m+l-1)!}{m!(l-1)!}.$$

17. Šta je to $m$-kombinacija elemenata skupa $B = \{b_1,...,b_n\}$ i koliko takvih $m$-kombinacija postoji ($1 \leq m \leq n$)?

**Definicija 19** *$m$-kombinacija (ili kombinacija klase $m$ bez ponavljanja) elemenata skupa $B$ je bilo koji podskup od $m$ elemenata skupa $B$.*

Broj $m$-kombinacija elemenata skupa $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ elemenata označavaćemo sa

$$C(n; m).$$

Ako skup svih $m$-točlanih podskupova skupa $M$ označimo sa $\binom{B}{m}$, tada je

$$C(n; m) = \left|\binom{B}{m}\right|.$$

**Teorema 20** *Broj $m$-kombinacija elemenata skupa $B$ jednak je*

$$C(n; m) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!}.$$

18. Definicija i osobine binomnog koeficijenta.

Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ predstavlja broj načina da se iz skupa od n različitih elemenata **izabere k elemenata bez ponavljanja i bez redosleda**.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Osobine: simetricnost, vrednost na granicama jednak 1, rekurzivnost

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1 = \binom{n}{0}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

**Lema 32 (simetričnost)** *Za cele brojeve $n$ i $m$ sa osobinom $0 \leq m \leq n$, važi*

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

*Dokaz.* Sledi direktno na osnovu prethodne leme:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

19. Paskalov identitet, sa dokazom.

**Lema 33 (Paskalov identitet)** *Za cele brojeve $n$ i $m$, $1 \leq m \leq n-1$, važi*

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} &= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} \\ &= \frac{m \cdot (n-1)! + (n-m) \cdot (n-1)!}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{(m+n-m) \cdot (n-1)!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m} \end{aligned}$$

20. Paskalov trougao, za $0 \le m \le 7$. Navesti osobine koje se koriste za njegovo formiranje.

```
m\k | 0   1   2   3   4   5   6   7
-------------------------------
 0  | 1
 1  | 1   1
 2  | 1   2   1
 3  | 1   3   3   1
 4  | 1   4   6   4   1
 5  | 1   5  10  10   5   1
 6  | 1   6  15  20  15   6   1
 7  | 1   7  21  35  35  21   7   1
```

**Osobine koje se koriste za formiranje Paskalovog trougla:**

1. **Rub trougla je uvek 1**:

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$$

2. **Svaki broj unutar trougla jednak je zbiru dva broja iz prethodnog reda**:

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$$

   → Ovo je upravo **Paskalov identitet**.

3. **Simetričnost**:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

21. Binomna formula.

**Teorema 34 (binomna formula)** *Neka je $x, y \in \mathbb{R}$ i neka je $\mathbb{N}$.. Tada važi*

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m.$$

22. Definicija i osobine polinomnog koeficijenta.

### ✅ Definicija polinomnog koeficijenta

Polinomni koeficijent (takođe poznat i kao **multinomialni koeficijent**) predstavlja broj načina da se $n$ elemenata rasporedi u više grupa određenih veličina.

Ako su $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takvi da:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n,$$

onda je **polinomni (multinomialni) koeficijent** definisan kao:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}$$

Koliko ima načina da se reč od 6 slova sastavi od 2 A, 3 B i 1 C?

$$\binom{6}{2,3,1} = \frac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{720}{2 \cdot 6 \cdot 1} = 60$$

**Teorema 37** *Neka su dati brojevi $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}_0$ i neka je $n = m_1 + \ldots + m_l$. Tada je*

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-(m_1+m_2)}{m_3}\cdots\binom{m_l}{m_l}.$$

*Dokaz.* Ako se primeni definicija binomnih koeficijenata na desnu stranu, po jedan činilac iz imenioca se uvek skrati sa brojiocem iz narednog razlomka.

$$\begin{aligned}\binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\cdots\binom{m_l}{m_l} &= \frac{n!}{m_1!(n-m_1)!}\frac{(n-m_1)!}{m_2!(n-m_1-m_2)!}\cdots\frac{m_l!}{m_l!0!}\\ &= \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l}\end{aligned}$$

23. Polinomna formula, u opštem obliku ili na primeru.

**Napisati u razvijenom obliku** $(x+y+z)^3$.

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 \;=\; &\binom{3}{3,0,0}x^3y^0z^0 + \binom{3}{0,3,0}x^0y^3z^0 + \binom{3}{0,0,3}x^0y^0z^3\\ &+\binom{3}{0,1,2}x^0y^1z^2 + \binom{3}{0,2,1}x^0y^2z^1 + \binom{3}{1,0,2}x^1y^0z^2\\ &+\binom{3}{1,2,0}x^1y^2z^0 + \binom{3}{2,0,1}x^2y^0z^1 + \binom{3}{2,1,0}x^2y^1z^0\\ &+\binom{3}{1,1,1}x^1y^1z^1\\ &= x^3+y^3+z^3+3yz^2+3y^2z+3xz^2+3xy^2+3x^2z+3x^2y+6xyz.\end{aligned}$$

24. Napisati opšti oblik i jedan primer homogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima.

$$a_n + c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} = 0, \quad \text{za } n \geq k$$

2. Решити рекурентне релације

*а)* $f_n = 5f_{n-1} - 6f_{n-2}$, $n \geq 2$ ако је $f_0 = 1$ и $f_1 = 1$

$f_n - 5f_{n-1} + 6f_{n-2} = 0$

карактеристична ј-на

$t^2 - 5t + 6 = 0$

$(t-2)(t-3) = 0$

$t_1 = 2 \quad t_2 = 3$

опште решење

$\boxed{f_n = A\cdot 2^n + B\cdot 3^n}$

$1 = f_0 = A\cdot 2^0 + B\cdot 3^0 \quad (n=0)$

$1 = f_1 = A\cdot 2^1 + B\cdot 3^1 \quad (n=1)$

Добијамо систем $\begin{matrix} A+B=1 \\ 2A+3B=1 \end{matrix}$

$2(A+B)+B=1 \qquad A = 1-B$

$2\cdot 1 + B = 1 \qquad\quad = 2$

$\Rightarrow B = -1$

Решење рекурентне релације

$f_n = 2\cdot 2^n + (-1)\cdot 3^n = 2^{n+1} - 3^n$

25. Napisati opšti oblik i jedan primer nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima.

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n), \quad \text{za } n \geq k$$

**10. Rešiti rekurentnu relaciju** $a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2}) + 2^n$, $n \geq 2$, **ako je** $a_0 = 0$ **i** $a_1 = 3$.

*Rešenje.* Odgovarajuća homogena rekurentna relacija je

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0.$$

Karakteristična jednačina je

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \Leftrightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = 2,$$

a opšte rešenje odgovarajuće homogene rekurentne relacije

$$a_n^{(h)} = (\alpha n + \beta) \cdot 2^n.$$

Kako je $x = 2$ dvostruki koren karakteristične jednačine, partikularno rečenje ćemo tražiti u obliku

$$a_n^{(p)} = A \cdot n^2 \cdot 2^n.$$

Zamenom u zadatu rekurentnu relaciju, dobijamo $A = \frac{1}{2}$,

$$a_n^{(p)} = n^2 \cdot 2^{n-1},$$

i konačno

$$a_n = (\alpha n + \beta) \cdot 2^n + n^2 \cdot 2^{n-1}.$$

Uvrštavanjem inicijalnih vrednosti $a_0 = 0$ i $a_1 = 3$ u opšte rešenje, dobijamo $\alpha = 1$, $\beta = 0$ i

$$a_n = (n^2 + 2n) \cdot 2^{n-1}.$$

26. Rešiti rekulrentnu relaciju $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2$, ako je $f_0 = 0$ i $f_1 = 1$.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad f_0 = 0, \ f_1 = 1$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$f_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$A(\alpha - \beta) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

$$\boxed{f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

27. Rešiti rekulrentnu relaciju $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, n \geq 2$, ako je $a_0 = 2$ i $a_1 = 1$.

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad a_0 = 2,\ a_1 = 1$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r-2)^2 = 0 \Rightarrow r = 2 \text{ (dvostruko rešenje)}$$

$$a_n = (A + Bn) \cdot 2^n$$

$$a_0 = (A + B \cdot 0) \cdot 2^0 = A = 2$$

$$a_1 = (A + B \cdot 1) \cdot 2^1 = (2 + B) \cdot 2 = 1$$

$$2(2+B) = 1 \Rightarrow 2 + B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{3}{2}$$

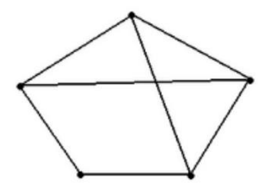
$$\boxed{a_n = \left(2 - \frac{3}{2}n\right) \cdot 2^n}$$

28. Definicija i primer prostog grafa.

**Definicija 50** *Prost (neusmeren) graf je uređen par $G = (V, E)$, gde je*

*(i) $V \neq \emptyset$ konačan skup čvorova i*

*(ii) $E \subseteq \binom{V}{2}$ je skup grana.*



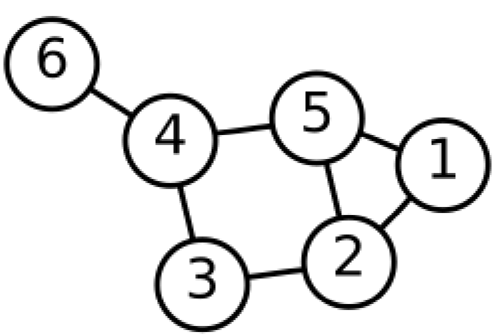
**Lema 53** *Neka je $G = (V, E)$ prost graf. Tada je*

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E|.$$

**Teorema 54** *Prost graf ima paran broj čvorova neparnog stepena.*

29. Šta je to stepen čvora u prostom grafu? Kreirati proizvoljan graf i oderediti multiskup stepena njegovih čvorova.

**Definicija 51** *Neka je $G = (V, E)$ prost graf i neka je $v \in V$. Broj grana koje su incidentne sa čvorom $v$ nazivamo stepenom čvora $v$ u grafu $G$ i označavamo* $\deg_G(v)$.



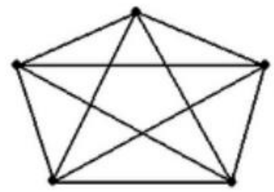

| чвор | степен |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |
| 4 | 3 |
| 5 | 3 |
| 6 | 1 |

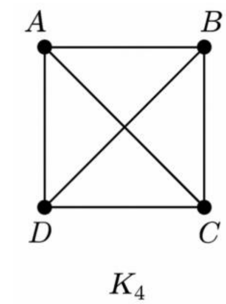
30. Kada je prost graf kompletan? Napisati primere.

Prost graf je **kompletan** ako **svaki par različitih čvorova** ima **tačno jednu ivicu** koja ih povezuje.
Za n čvorova, **kompletan graf** sadrži sve moguće ivice između njih, bez petlji i višestrukih ivica.

✅ **Broj ivica u kompletnom grafu sa $n$ čvorova:**

$$|E| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$



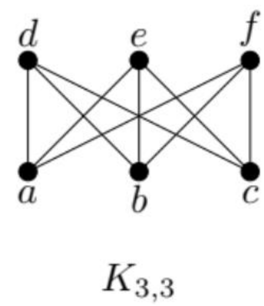



31. Šta je to bipartitan graf? Skicirati $K_{3,3}$ i za njega napisati skup čvorova i skup grana.

**Bipartitan graf** je graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$ sa osobinama:

1. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
2. $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.

To znači da se skup čvorova može razdeliti na dva disjunktna podskupa, tako da je svaka grana incidentna sa jednim čvorom iz jednog skupa i drugim iz drugog.

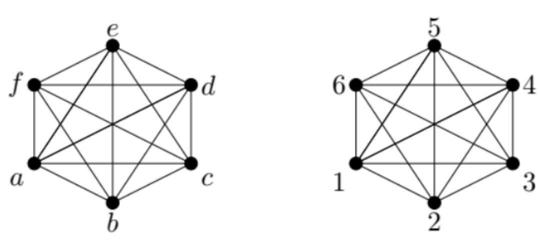



Skup čvorova V϶ {a, b,  c, d, e, f}; skup grana E ϵ {(a,d),(a,e),(a,f), (b,d),(b,e),(b,f), (c,d),(c,e),(c,f)}

32. Kada za dva prosta grafa kažemo da su jednaki?

**Jednaki grafovi.** Možemo reći da iz definicije grafa direktno sledi da su dva grafa jednaka akko imaju jednake skupove čvorova i jednake skupove grana. Tako možemo reći da grafovi u sledećem primeru nisu jednaki.

**Primer 4** *Grafovi $G_1$ i $G_2$ na slici nisu jednaki, zato što nemaju jednake skupove čvorova, tj.* $V(G_1) = \{a, b, c, d, e, f\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = V(G_2)$.




$G_1$ $G_2$

33. Definicija izomorfizma za grafove. Kreirati dva neizomorfna grafa sa jednakom brojem čvorova, jednakim brojem grana i jednakim multiskupovima stepena čvorova.

**Definicija 57** *Neka su* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$ *prosti grafovi. Kažemo da je* $G_1$ *izomorfan sa* $G_2$ *ako postoji bijektivno preslikavanja* $h : V_1 \to V_2$ *sa osobinom*

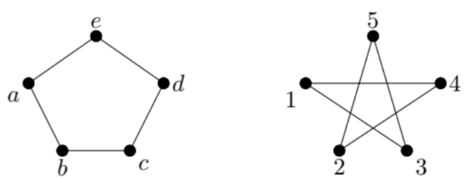
$$\{u, v\} \in E_1 \text{ akko } \{h(u), h(v)\} \in E_2. \tag{2.1}$$

*Za takvu funkciju* $h$ *kažemo da je izomorfizam grafa* $G_1$ *u graf* $G_2$.

**Teorema 59** *Neka su dati izomorfni grafovi* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$. *Tada je*

1. $|V_1| = |V_2|$,
2. $|E_1| = |E_2|$, *i*
3. $deg_{G_1}(v) = deg_{G_2}(h(v))$, *za svaki čvor* $v \in V_1$.

**Primer 6** *Direktnom proverom, može se pokazati da su grafovi* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$ *izomorfni.*

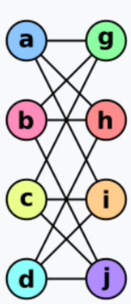
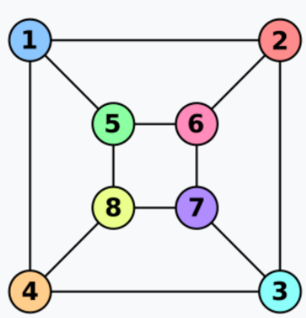



$G_1$ $G_2$

*Jedan izomorfizam je*

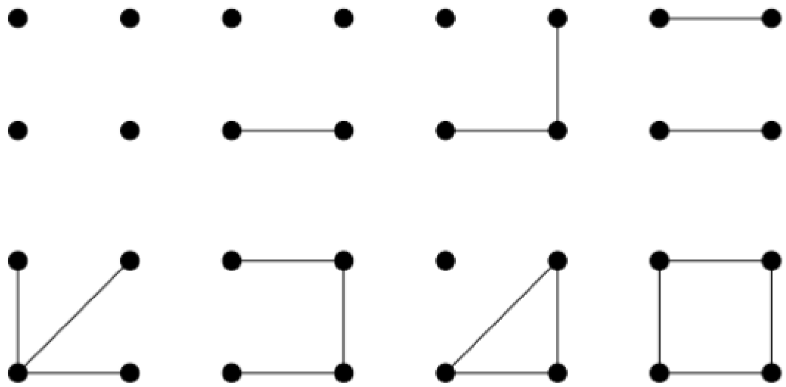
$$h = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

multiskup grana {2,2,2,2,2}

| Граф Г | Граф Х | Изоморфизам између Г и Х |
|---|---|---|
|  |  | *ф*(*а*) = 1<br>*ф*(*б*) = 6<br>*ф*(*ц*) = 8<br>*ф*(*д*) = 3<br>*ф*(*г*) = 5<br>*ф*(*х*) = 2<br>*ф*(*и*) = 4<br>*ф*(*ј*) = 7 |

multiskup grana {3,3,3,3,3,3,3,3}

34. Skicirati sve (po parovima) neizomorfne grafove sa 4 čvora.



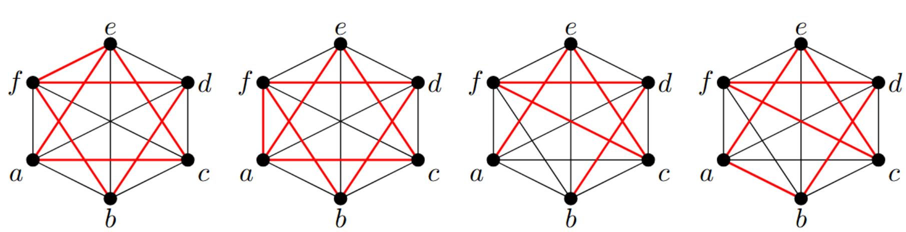
35. Definicija šetnje, puta i staze. Kreirati jedan graf i dati primere za sve tri definicije.

ШЕТЊА $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \ldots v_{k-1} e_k v_k$ (произвољан низ чворова и грана)
Пошто радимо само са простим графовима, довољно је навести низ чворова
$\Rightarrow W = v_0 v_1 v_2 v_3 \ldots v_{k-1} v_k$

СТАЗА = шетња код које нема понављања грана (trail)
ПУТ = шетња код које нема понављања чворова (path)

Za graf $G_6$ na slici, dajemo po jedan primer za svaku kategoriju.

1. šetnja: $aecaefdbf$;
2. staza: $aecafdbf$;
3. put: $aecfdb$;
4. kontura: $aecfdba$.



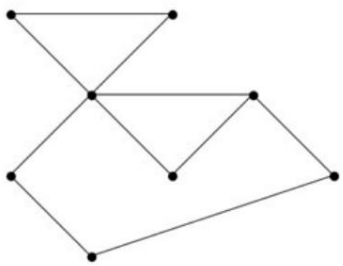

$aecaefdbf$ $aecafdbf$ $aecfdb$ $aecfdba$

36. Kada je graf povezan? Dati primer jednog povezanog i jednog nepovezanog grafa.

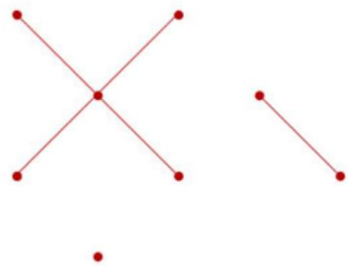
*Kažemo da su čvorovi $u$ i $v$ povezani ako je*

- $u = v$ *ili*
- $u \neq v$ *i postoji* $uv$*-put u* $G$.

*Kažemo da je* $G$ *povezan akko* $|V| = 1$ *ili za svako* $u, v \in V$ *važi da su* $u$ *i* $v$ *povezani.*



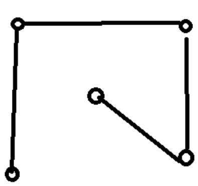
povezan graf



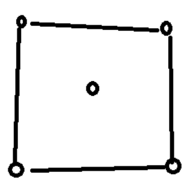
nepovezan graf

37. Da li je svaki graf sa *n* čvorova i *n* − 1 grana povezan? Odgovor ilustrovati primerima.

**Teorema 66** *Neka je* $n \geq 2$.
*Graf sa* $n$ *čvorova i manje od* $n - 1$ *grana nije povezan.*



Povezan graf



Nepovezan graf

38. Da li graf može imati 10 čvorova i 8 grana?

Da, **graf može imati 10 čvorova i 8 grana**, ali **onda sigurno nije povezan.**

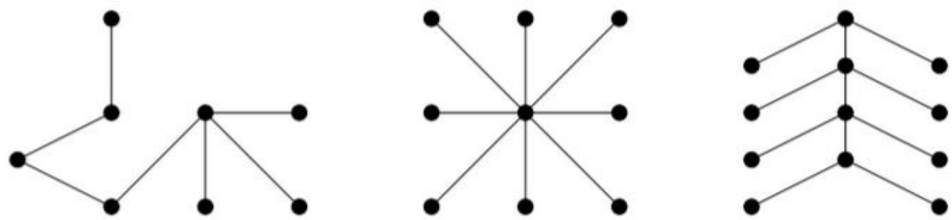
39. Definicija i primer stabla.

**Definicija 69** *Za prost graf $G = (V, E)$ kažemo da je stablo ako važi:*

*(i) $G$ je povezan graf i*

*(ii) $G$ je acikličan graf.*

Na sledećoj slici su prikazana tri stabla.



U nastavku ćemo dati niz ekvivalentnih tvrđenja koja karakterišu stablo.

**Teorema 70** *Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je $G$ stablo ako i samo ako za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji jedinstven $uv$-put.*

40. Karakterizacija stabla - napisati neke osobine.

**Lema 72** *Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 2$, i neka je $d_G(u) = 1$ za neki čvor $u \in V$. Tada je $G$ stablo ako i samo ako je $G - u$ stablo.*

**Teorema 73** *Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je $G$ stablo ako i samo ako je $G$ povezan graf i $|E| = n - 1$.*

**Teorema 75** *Neka je $G = (V, E)$, gde je $|V| = n \geq 2$ i $|E| \geq n$. Tada $G$ sadrži konturu.*

**Teorema 76** *Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je $G$ stablo akko je $G$ povezan i brisanjem proizvoljne grane se dobija nepovezan graf.*

**Teorema 77** *Neka je $G = (V, E)$ i $|V| = n \geq 2$. Tada je $G$ stablo akko je $G$ acikličan i dodavanjem grane se dobija graf koji sadrži konturu.*

**Teorema 78 (Karakterizacija stabla)** *Neka je $G = (V, E)$ prost graf. Sledeća tvrđenja sa ekvivalentna:*

*(i) $G$ je stablo.*

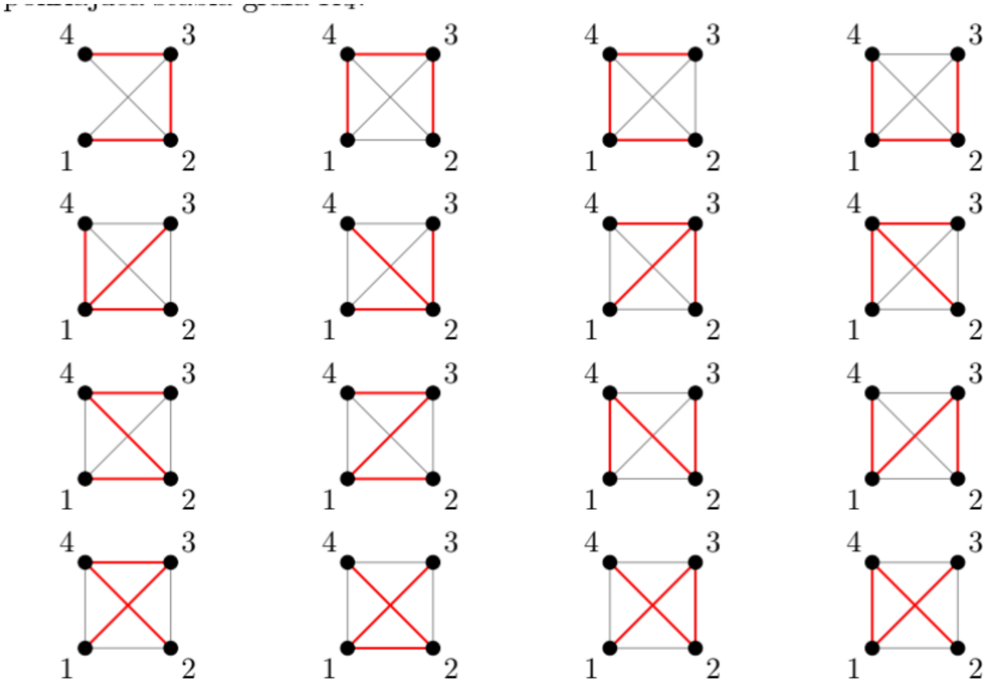
*(ii) Za svaka dva čvora $u, v \in V(G)$ postoji jedinstven put od $u$ do $v$.*

*(iii) $G$ je povezan i $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*

*(iv) $G$ je povezan i brisanjem proizvoljne grane dobija se nepovezan graf (tj. $G$je minimalan povezan graf).*

*(v) $G$ je acikličan i dodavanjem grane se dobija graf koji sadrži konturu (tj. $G$ je maksimalan acikličan graf).*

41. Koliko ima različitih pokrivajućih stabala grafa $K_4$?



Tako smo dobili konstruisali svih 16 pokruvajućih stabala grafa $K_4$, među kojima ima 4 neizomorfna stabla. □

42. Koliko ima različitih pokrivajućih stabala grafa $K_5$?

Za kompletan graf $K_n$, broj pokrivajućih stabala je:

$$n^{n-2}$$

Ova formula se zove **Kirchhoffova teorema** (u ovom specijalnom slučaju).

Za $K_5$ postoji $5^3$ odnosno 125 pokrivajucih stabala.

43. Koliko ima različitih stabala čiji skup čvorova je $V = \{1,2,3,4\}$?

Isti odgovor kao i 41.

44. Koliko ima različitih stabala čiji skup čvorova je $V = \{1,2,3,4,5\}$?

Isti odgovor kao i 42.

45. Šta su to Ojlerov put i Ojlerova tura u grafu? Kreirati primere.

**Definicija 88** *Neka je G graf bez petlji. Ojlerov put (ili Ojlerov staza) je staza u grafu koja sadrži sve čvorove i grane tog grafa. Ojlerova tura je Ojlerova staza u kojoj su početni i krajnji čvor jednaki.*

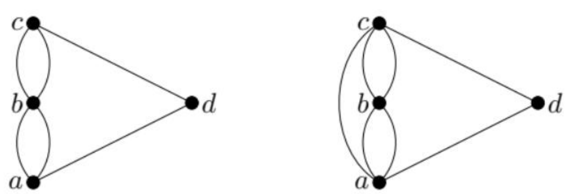
Znači, za šetnju u grafu ćemo reći da je Ojlerov put, ako zadovoljava sledeća dva uslova:

(i) šetnja sadrži sve čvorove grafa;

(ii) ne postoje dve jednake grane u šetnji;

(ii) svaka grana grafa se pojavljuje u šetnji.

**Primer 13** *Posmatrajmo multigrafove $G_1$ i $G_2$ predstavljene na slici.*




*Primer jednog Ojlerovog puta u $G_1$ je $adcbabc$ dok je primer Ojlerove ture u $G_2$ staza $adcbabca$.*

46. Definicija Ojlerovog i polu Ojlerovog grafa.

**Definicija 89** *Graf je Ojlerov ako sadrži Ojlerovu turu. Graf je polu Ojlerov ako sadrži Ojlerov put.*

47. Napisati potreban i dovoljan uslov da graf bude Ojlerov.

Директно из дефиниције добијамо да сваки Ојлеров граф мора бити ПОВЕЗАН.

Т: Повезан граф је Ојлеров АККО су СВИ чворови ПАРНОГ степена.

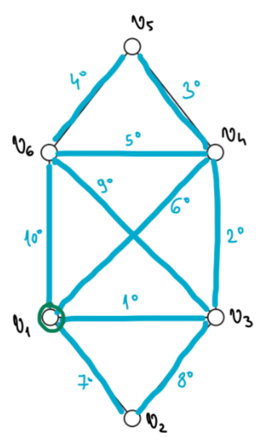
Т: Повезан граф је полуојлеров АККО су НАЈВИШЕ ДВА чвора НЕПАРНОГ степена.

ТАЧНО ДВА

48. Napisati potreban i dovoljan uslov da graf koji nije Ojlerov bude polu Ojlerov. Dati jedan primer grafa koji jeste Ojlerov i jedan primer grafa koji nije Ojlerov.

Kako je svaki Ojlerov graf isovremeno i polu Ojlerov graf, u sledeće tvrđenje izdvaja potreba i dovoljan uslov za postojanje Ojelrovog puta u grafu koji nema Ojlerovu turu.

**Teorema 91** *Neka je $G = (V, E)$ graf koji nije Ojlerov. Graf $G$ je polu Ojlerov ako i samo ako je $G$ povezan i ima tačno dva čvora neparnog stepena.*

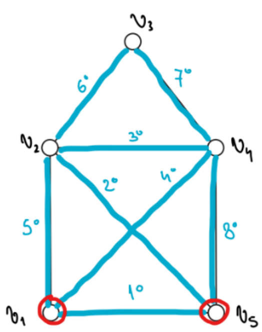



Сви чворови су парног степена

⇒ Ојлеров граф

Ојлерова (кон)тура

$v_1 v_3 v_4 v_5 v_6 v_4 v_1 v_2 v_3 v_6 v_1$



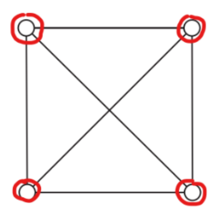

2 чвора степена 3

⇒ полуојлеров граф

Ојлеров пут

$v_1 v_5 v_2 v_4 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$

Почињемо у једном непарном чвору, а завршавамо у другом



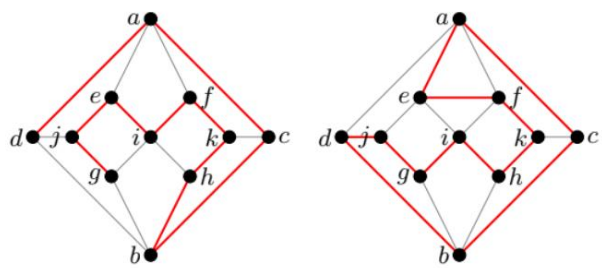
Сва 4 чвора су степена 3

⇒ Граф није ни Ојлеров, ни полуојлеров

49. Šta su to Hamiltonov put i Hamiltonova kontura u grafu? Kreirati primere.

**Definicija 92** *Neka je G graf. Hamiltonov put u G je put koji sadrži sve čvorove tog grafa. Hamiltonova kontura je Hamiltonov put koji je ujedno i kontura.*

**Primer 14** *Hamiltonov put u grafu $G_1$ je $dacbhkfiejg$, dok je $dacbhkfiejg$ Hamiltonova kontura u grafu $G_2$.*




$G_1$ $G_2$

50. Da li je kompletan graf sa *n* čvorova Hamiltonov? Obrazložiti.

**Primer 15** *Kompletan graf $K_n$ je Hamiltonov graf za svako $n \geq 3$. Dokazati!*

*Dokaz.* Neka su čvorovi grafa $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \geq 3$. Jedna Hamiltonova kontura je

$$v_1\, v_2 \quad \ldots v_n\, v_1.$$

□

Za postojanje Hamiltonove konture u grafu jošuvek ne postoji tvrđenje koje obuhvata i potrebne i dovoljne uslove. Postoji veliki broj tvrđenja koje daju različite potrebne odnosno dovoljne uslove za postojanje Hamiltonove konture. Neke od njih ćemo razmotriti u nastavku.

$\boxed{\text{HAMILTONOV GRAF}} \Leftarrow \boxed{\text{DOVOLJNI USLOVI}}$

Ako dovoljni uslovi nisu zadovoljeni, to ne znači da graf nije Hamiltonov.

Izdvajamo tvrđenje Diraka iz 1952. godine i tvrđenje Orea iz 1960. godine. Oba tvrđenja razmatraju stepene čvorova u grafu. Da bismo dokazali tvrđenje Diraka, uvodimo prvo jednu pomoćnu lemu.

**Lemma 138** *Neka je $G$ prost graf sa $n$, $n \geq 3$, čvorova u kojem postoje nesusedni čvorovi $u, v \in V(G)$ sa osobinom*

$$d_G(u) + d_G(v) \geq n.$$

*Tada je $G$ Hamiltonov ako i samo ako je $G + \{u, v\}$ Hamiltonov.*

Потребни услови:

Тривијални услови да граф буде Хамилтонов: $G$ је повезан, $\delta(G) \geq 2$

Т: Ако је $G$ Хамилтонов граф, тада за сваки скуп $S \neq \emptyset$, $S \subseteq V(G)$ важи $\omega(G-S) \leq |S|$

(полухамилтонов: $\omega(G-S) \leq |S|+1$)

Довољни услови:

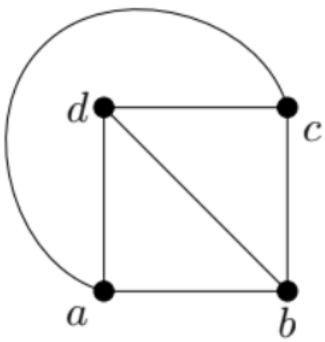
Т: (Оре) Ако је у графу $G$ са $n$ чворова ($n \geq 3$) испуњено да за свака 2 несуседна чвора $u$ и $v$ важи $d(u)+d(v) \geq n$, тада је $G$ Хамилтонов граф. (полухамилтонов: $d(u)+d(v) \geq n-1$)

Т: (Дирак) Ако је у графу $G$ са $n$ чворова ($n \geq 3$) испуњено $d(v) \geq \frac{n}{2}$, $\forall v \in V$, онда је $G$ Хамилтонов.

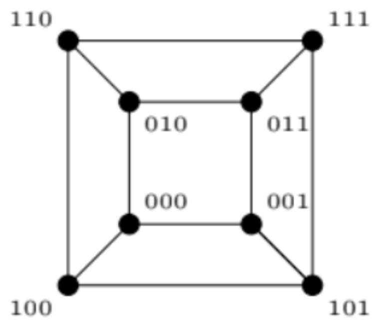
(полухамилтонов: $d(v) \geq \frac{n-1}{2}$)

51. Definicija i primer planarnog grafa.

**Definicija 101** *Graf je planaran ako se može nacrtati u ravni tako da ne postoje grane koje se seku (osim eventualno zajednčkih čvorova). Za takvu grafičku reprezentaciju grafa reći ćemo da je planarna.*



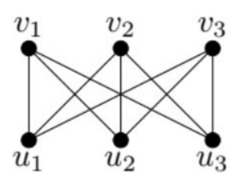

$K_4$




$Q_3$

52. Dati dva primera grafova koji nisu planarni.

**Primer 23** *Kompletan bipartitan graf $K_{3,3}$ nije planaran.*




$K_{3,3}$

1. Граф $G$ има 1000 чворова и 3000 грана. Да ли је $G$ планаран?

Нека је $|V(G)| = n = 1000$
$|E(G)| = e = 3000$

Знамо да за планарне графове важи $e \leq 3n-6$

$3n-6 = 3 \cdot 1000 - 6 = 2994 < 3000 = e$

$\Rightarrow$ Граф $G$ није планаран