PREDIKATSKA LOGIKA

- **Predikatska logika** (**predikatski račun**) – ističe činjenicu da se ova logika bavi pre svega **predikatima**. To su u matematičkom smislu **relacije**, koje opisuju činjenicu da *određeni objekat ima neku osobinu* (relacije dužine 1) ili da su *dati objekti u nekom odnosu* (relacije dužine 2 ili više).

- **Kvantifikatorski račun** – ističe da se u ovim logikama (pored logičkih veznika koje „nasleđujemo” iz iskazne logike) javljaju specifični operatori, koji govore o „kvantitetu” objekata sa nekom osobinom. To su tzv. **univerzalni kvantifikator** $\forall$ (*za sve* ili *svaki*) i **egzistencijalni kvantifikator** $\exists$ (*postoji*).

- **Logika prvog reda** – sugeriše da postoje i logike reda dva, tri i više. Grubo rečeno, logika prvog reda ima moć da opiše samo osobine objekata na „prvom nivou”. Preciznije, u logici prvog reda predikati i funkcije kao argumente mogu uzimati samo promenljive i samo promenljive je moguće kvantifikovati, dok u logikama višeg reda predikati i funkcije kao argumente mogu imati druge predikate i funkcije i dozvoljeno je njihovo kvantifikovanje.

Predikatski račun – uvod

- Jezik predikatskog računa nastao je kao **prirodno uopštenje jezika matematičkih formula**, tj. matematičkog jezika koji obuhvata simbole za konstante i promenljive, operacije, relacije i kvantifikatore.
- **Izražajne mogućnosti ovog jezika su znatno veće** od mogućnosti koje pruža jezik iskaznog računa.
- Jezik predikatskog računa dopušta i **izražavanje objekata, operacija i relacija** koje su van posebnih matematičkih teorija, što ga čini univerzalnim sredstvom predstavljanja znanja o operacijama i relacijama sa objektima iz raznih domena.

Iskazna vs. predikatska logika – izražajnost

U iskaznoj logici osnovna jedinica građe formula je bio iskaz, dok u predikatskoj logici razmatramo strukturu iskaza.

Primer

Posmartamo sledeće rečenice:

(R1) Ako je $a > b$, onda nije $b > a$.

(R2) Postoji najmanji prirodan broj.

Prva rečenica bi se kao iskazna formula mogla zapisati u obliku $p \Rightarrow q$, ali se tim zapisom ne može iskazati njen smisao. Druga rečenica ne bi se ni u toj meri mogla zapisati iskaznom formulom.

U predikatskoj logici gornje rečenice možemo izraziti sledećim formulama:

(R1) $P(a, b) \Rightarrow \neg P(b, a)$;

(R2) $(\exists x)(\forall y)\, Q(x, y)$.

Predikatska logika

Predikatska logika, kao i svaki logički sistem ima tri aspekta:

I **Sintaksa** *(jezik)*

II **Semantika** *(značenje jezika)*

III **Deduktivni sistem** *(formalna teorija)*

Centralni problemi u predikatskoj logici, kao i u iskaznoj, su ispitivanje da li je data formula:

- **valjana**
- **zadovoljiva**

Iskazna vs. predikatska logika – odlučivost

iskazna logika $=$ predikatska logika

Formula je valjana (semantička kategorija) akko je teorema (deduktivna kategorija).

iskazna logika $\neq$ predikatska logika

Predikatska logika, za razliku od iskazne logike, **nije odlučiva**, tj. ne postoji procedura koja će za proizvoljnu formulu dati odgovor DA ako je valjana, a NE ako nije.

Međutim, predikatska logika je **poluodlučiva**:

- ako je formula valjana, postoji algoritam koji će u konačnom broju koraka pronaći dokaz i zaustaviti se;
- ako formula nije valjana, može se desiti da se algoritam nikad ne zaustavi.

Simboli jezika predikatskog računa

Alfabet čine:

- Logički simboli:
  1. promenljive $x, y, z, \ldots$, ili $x_1, x_2, x_3, \ldots$
  2. logički veznici $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
  3. kvantifikatori $\forall$, $\exists$
  4. logičke konstante $\top, \bot$
  5. pomoćni znaci (,), ,

- Nelogički simboli:
  6. *n*-arni funkcijski simboli (operacijska slova) f_k^n, $n \geq 0$, $k \geq 1$. (Specijalno, funkcijske simbole arnosti 0 zovemo simbolima konstanti i označavamo sa $a, b, c, \ldots$.)
  7. *m*-arni predikatski simboli (relacijska slova) R_k^m, $n \geq 1$, $k \geq 1$.

★ **Signatura** $\mathcal{L}$ - nelogički simboli i preslikavanje *ar*

Jezik - osnovne definicije

- TERMI
  1. Simboli konstanti i promenljive su termi.
  2. Ako su $t_1, t_2, \ldots, t_n$, $n \geq 1$ termi i znak f n-arni funkcijski simbol, onda je izraz $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ takođe term.
  3. Termi se mogu dobiti samo konačnim brojem primena pravila 1 i 2.

Primer

Termi su: $x, a, f(x, x), g(a, x, y), h\big(f(y, y), g(a, x, z)\big), \ldots$

- ELEMENTARNA (ATOMIČKA) FORMULA
  1. Logičke konstante $\top, \bot$ su elementarne formule.
  2. Ako je R m-arni predikatski simbol, a $t_1, t_2, \ldots, t_m$ termi, onda je $R(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ elementarna formula.

Primer

Elementarne formule su: $\top, \bot, P(x), Q(a, b, y), R\big(x, f(x, y), y, g(a, z, z)\big), \ldots$

- DOBRO ZASNOVANE FORMULE – FORMULE
  1. Svaka elementarna formula je dobro zasnovana formula.
  2. Ako su A i B dobro zasnovane formule, onda su i $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ dobro zasnovane formule.
  3. Ako je A dobro zasnovana formula i x promenljiva, onda su i $\big((\forall x)\, A\big)$, $\big((\exists x)\, A\big)$ dobro zasnovane formule.

Primer

$(\forall x)\left(Q(y) \Rightarrow (\exists y)\, P\big(x, f(y)\big)\right)$ je formula.

Objašnjenje: x, y i $f(y)$ su termi, pa su $Q(y)$ i $P\big(x, f(y)\big)$ elementarne formule; tada je $(\exists y)\, P\big(x, f(y)\big)$ formula, kao i $\left(Q(y) \Rightarrow (\exists y)\, P\big(x, f(y)\big)\right)$; konačno, dodavanjem kvantifikatora dobijamo polaznu formulu.

★ Dogovor o brisanju zagrada:

- brišemo spoljne zagrade;
- prioritet znakova je sledeći: $\forall, \exists \mid \neg \mid \wedge, \vee \mid \Rightarrow, \Leftrightarrow$

▷ LITERAL – elementarna formula ili njena negacija.

▷ KLAUZA – disjunkcija literala.

▷ JEZIK PREDIKATSKOG RAČUNA – skup svih (dobro zasnovanih) formula.

Slobodna i vezana pojavljvanja promenljive

Neka je A formula predikatskog računa i x promenljiva.

- U formulama $(\forall x)\,A$ i $(\exists x)\,A$ **oblast dejstva kvantifikatora** $(\forall x)$ odnosno $(\exists x)$ je formula A.
- Pojavljivanje promenljive x u nekoj formuli je **vezano** ako je to pojavljivanje u oblasti dejstva kvantifikatora $(\forall x)$ ili $(\exists x)$. U tom slučaju kažemo i da je to pojavljivanje promenljive x **pod dejstvom kvantifikatora** $(\forall x)$ ili $(\exists x)$. U suprotnom, to pojavljivanje promenljive x je **slobodno**.
- Promenljiva x je **slobodna** u formuli A ako ima bar jedno slobodno pojavljivanje u formuli A. Za formule koje nemaju slobodnih promenljivih kažemo da su **zatvorene** (**rečenice**).

Primer

Posmatramo formulu

$$(\forall x)\Big(Q(y) \Rightarrow (\exists y)\, P\big(x, f(y)\big)\Big).$$

Oba pojavljivanja promenljive x su vezana (pod dejstvom kvantifikatora $(\forall x)$). Prvo pojavljivenje promenljive y je slobodno, a druga dva su vezana (pod dejstvom kvantifikatora $(\exists y)$). Promenljiva y je slobodna u datoj formuli jer ima slobodno pojavljivanje.

Primer

U formuli

$$(\exists x)\big(P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x)\big)$$

sva pojavljivanja promenljive x su vezana, s tim što su prva dva pod dejstvom kvantifikatora $(\exists x)$, a druga dva pod dejstvom kvantifikatora $(\forall x)$. Data formula je rečenica.

$V(t)$ - skup promenljivih terma t

$FV(A)$ - skup slobodnih promenljivih formule A

$V(x) = \{x\}$

$V(a) = \emptyset$

$V(f_i^n(t_1, \dots, t_n)) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$

$FV(R_i^n(t_1, \dots, t_n)) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$

$FV(\neg B) = FV(B)$

$FV(B \wedge C) = FV(B) \cup FV(C)$ $\quad$ $FV(B \vee C) = FV(B) \cup FV(C)$

$FV(B \Rightarrow C) = FV(B) \cup FV(C)$ $\quad$ $FV(B \Leftrightarrow C) = FV(B) \cup FV(C)$

$FV((\forall x)\, B) = FV(B) \setminus \{x\}$ $\quad$ $FV((\exists x)\, B) = FV(B) \setminus \{x\}$

$A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - formula A ima slobodne promenljive $x_1, x_2, \dots, x_n$

$\downarrow$

$A(t_1, t_2, \dots, t_n)$ - formula dobijenu zamenom svih slobodnih pojavljivanja promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ redom termovima $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Ako formula A ne sadrži kvantifikatore, kao ni slobodne promenljive osim (eventualno) promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_k$, tada za formulu oblika

$$(\forall x_1)(\forall x_2) \cdots (\forall x_k)\, A$$

kažemo da je **univerzalno zatvorena**, dok za formulu oblika

$$(\exists x_1)(\exists x_2) \cdots (\exists x_k)\, A$$

kažemo da je **egzistencijalno zatvorena**.

Za datu signaturu $\mathcal{L}$, **$\mathcal{L}$-struktura** (**model**) $\mathcal{D}$ je par $\langle D, I \rangle$, gde je D neprazan skup koji zovemo **domen** (**nosač**) **modela**, a I je preslikavanje (**interpretacija**) za koje važi sledeće:

- ako je c simbol konstante, onda $I(c) \in D$;
- ako je f funkcijski simbol, $ar(f) = n$, $n > 0$, onda je $I(f) : D^n \to D$;
- ako je R relacijski simbol, $ar(R) = m$, $m > 0$, onda je $I(R) \subseteq D^m$.

★ Ako je $\mathcal{D} = \langle D, I \rangle$ neki model, a s neki simbol, onda ćemo interpretaciju tog simbola u modelu $\mathcal{D}$ umesto sa $I(s)$ obeležavati sa s_I.

Valuacija i interpretacija

- Neka je $\mathcal{D} = \langle D, I \rangle$ neki model i V neki skup promenljivih. **Valuacija modela** $\mathcal{D}$ je svako preslikavanje $\upsilon : V \to D$.
- Ako su υ i ω valuacije za isti skup promenljivih i u odnosu na isti domen, onda sa $\upsilon \sim_x \omega$ označavamo da je $\upsilon(y) = \omega(y)$ za svaku promenljivu y različitu od x.
- Ako je υ valuacija modela $\mathcal{D} = \langle D, I \rangle$, onda par $(\mathcal{D}, \upsilon)$ određuje interpretaciju, tj. funkciju I_υ, koja preslikava
  - skup $\mathcal{L}$-termova nad skupom promenljivih V u skup D;
  - skup $\mathcal{L}$-formula nad skupom promenljivih V u skup $\{0, 1\}$.

Interpretacija terma

Vrednost terma t u interpretaciji I_υ, određenoj modelom $\mathcal{D}$ i valuacijom υ, označavamo sa $I_\upsilon(t)$ i definišemo na sledeći način:

- ako je $t = x$, onda je $I_\upsilon(t) = \upsilon(x)$;
- ako je $t = c$, onda je $I_\upsilon(t) = c_I$;
- ako je $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ i ako je $I_\upsilon(t_i) = d_i \in D$, $i = 1, 2, \ldots, n$, onda je $I_\upsilon(t) = f_I(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Primer

Dat je term $t = g\big(f(x, c), y\big)$. Ako je $D = \mathbb{N}$, funkcija $I = \begin{pmatrix} f & g & c \\ + & \cdot & 2 \end{pmatrix}$ i valuacija $\upsilon = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, onda je vrednost terma t u interpretaciji I_υ

$$I_\upsilon(t) = (1 + 2) \cdot 5 = 15.$$

Interpretacija formule

Vrednost formule F u interpretaciji I_υ označavamo sa $I_\upsilon(F)$ i definišemo na sledeći način:

- $I_\upsilon(\top) = 1$ i $I_\upsilon(\bot) = 0$;
- Ako je $F = R(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ i ako je $I_\upsilon(t_i) = d_i \in D$, $i = 1, 2, \ldots, m$, onda je $I_\upsilon(F) = 1$ ako važi $R_I(d_1, d_2, \ldots, d_m)$, a $I_\upsilon(F) = 0$ inače;
- $I_\upsilon(\neg A) = 1$ ako je $I_\upsilon(A) = 0$ i $I_\upsilon(\neg A) = 0$ ako je $I_\upsilon(A) = 1$;
- $I_\upsilon(A \wedge B) = 1$ ako je $I_\upsilon(A) = 1$ i $I_\upsilon(B) = 1$, a $I_\upsilon(A \wedge B) = 0$ inače;
- $I_\upsilon(A \vee B) = 0$ ako je $I_\upsilon(A) = 0$ i $I_\upsilon(B) = 0$, a $I_\upsilon(A \vee B) = 1$ inače;

- $I_\upsilon(A \Rightarrow B) = 0$ ako je $I_\upsilon(A) = 1$ i $I_\upsilon(B) = 0$, a $I_\upsilon(A \Rightarrow B) = 1$ inače;
- $I_\upsilon(A \Leftrightarrow B) = 1$ ako je $I_\upsilon(A) = I_\upsilon(B)$, a $I_\upsilon(A \Leftrightarrow B) = 0$ inače;
- ako je $F = (\forall x)\, A$, onda je $I_\upsilon(F) = 0$ ako postoji valuacija ω sa domenom D takva da je $\omega \sim_x \upsilon$ i $I_\omega(A) = 0$, inače je $I_\upsilon(F) = 1$;
- ako je $F = (\exists x)\, A$, onda je $I_\upsilon(F) = 1$ ako postoji valuacija ω sa domenom D takva da je $\omega \sim_x \upsilon$ i $I_\omega(A) = 1$, inače je $I_\upsilon(F) = 0$.

★ Vrednost $I_\upsilon(F)$ zavisi samo od slobodnih promenljivih u formuli F. Specijalno, ako je F rečenica, vrednost $I_\upsilon(F)$ uopšte ne zavisi od υ, pa tada umesto $I_\upsilon(F)$ pišemo kraće $I(F)$.

Valjane formule

- $(\mathcal{D}, v) \models A$ – $\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{D}$ sa valuacijom v je **model** za formulu A, tj. važi $I_v(A) = 1$ za interpretaciju I_v određenu sa $\mathcal{D}$ i v.
  Ako važi $(\mathcal{D}, v) \models A$, formula A je **zadovoljiva**.
- Ako formula nije zadovoljiva, onda je **kontradikcija.**
- $\mathcal{D} \models A$ – $\mathcal{L}$-struktura $\mathcal{D}$ je **model** za formulu A, tj. u $\mathcal{L}$-strukturi $\mathcal{D}$ formula A je tačna za svaku valuaciju.
- $\models A$ – važi $\mathcal{D} \models A$ za svaku $\mathcal{L}$-strukturu $\mathcal{D}$. Tada je formula A **valjana**.
- Ako formula nije valjana, onda kažemo da je ona **poreciva**.
- Ako nije $\mathcal{D} \models A$, onda pišemo $\mathcal{D} \not\models A$ i kažemo da je $\mathcal{D}$ **kontramodel** za A.

Osobine

- Formula A je valjana ako i samo ako je formula $(\forall x)\, A$ valjana.
- Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sve slobodne promenljive formule A, tada važi: formula A je valjana ako i samo ako je njeno univerzalno zatvorenje $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\, A$ valjana formula.
- Formula A je zadovoljiva ako i samo ako je formula $(\exists x)\, A$ zadovoljiva.
- Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sve slobodne promenljive formule A, tada važi: formula A je zadovoljiva ako i samo ako je njeno egzistencijalno zatvorenje $(\exists x_1) \cdots (\exists x_n)\, A$ zadovoljiva formula.