Def. f je diferencijabilna u tački z_0 ako postoji

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \qquad \Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

· Koši-Rimanove jednačine

(T) Ako je $f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$ tada je f diferencijabilna u $z_0=x_0+iy_0$ ako su funkcije P, Q, P_x, P_y, Q_x, Q_y neprekidne u (x_0,y_0) i važi

$$\boxed{\begin{aligned} P_x(x_0,y_0) &= Q_y(x_0,y_0) \\ Q_x(x_0,y_0) &= -P_y(x_0,y_0) \end{aligned}}$$

Dodatno važi $f'(z_0)=P_x(x_0,y_0)+iQ_x(x_0,y_0)=$
$=Q_y(x_0,y_0)-iP_y(x_0,y_0)$.

Pr. Koristeći Koši-Rimanove jednačine odrediti oblast $D\subseteq\mathbb{C}$ na kojoj su sledeće funkcije diferencijabilne.

a) $f(z)=(1+i)\cdot z=(1+i)\cdot(x+iy)=x+ix+iy-y=$
$=x-y+i(x+y)$ $\quad P(x,y)=x-y$
$P_x=Q_y \quad 1=1$ ✓ $\quad Q(x,y)=x+y$
$Q_x=-P_y \quad 1=-(-1)=1$ ✓
$\Rightarrow f$ je diferencijabilna nad $\mathbb{C}$.
$f'(z)=1+i$ ili $f'(z)=P_x+iQ_x=$
$=1+i\cdot 1=1+i$

b) $f(z)=\bar{z}-1=\overline{x+iy}-1=x-iy-1=x-1-iy$
$P(x,y)=x-1 \quad P_x=1 \neq Q_y=-1$
$Q(x,y)=-y$ nije diferencijabilna ni u jednoj tački $\mathbb{C}$.

c) $f(z)=|z|^2=|x+iy|^2=x^2+y^2$
$P(x,y)=x^2+y^2 \quad P_x=2x \quad Q_y=0$
$Q(x,y)=0 \quad Q_x=0 \quad P_y=2y$
$2x=0 \Rightarrow x=0$
$-2y=0 \Rightarrow y=0$
$\Rightarrow f$ je diferencijabilna samo u $z_0=0$.

$f'(z_0)=P_x(0,0)+iQ_x(0,0)=0$.

Napomena: Diferencijabilnost u $\mathbb{C}$ nije lokalna osobina! Može da se desi da f ima izvod samo u jednoj tački $z_0\in\mathbb{C}$.

d) $f(z)=\frac{1}{z}+1=\frac{1}{x+iy}+1=\frac{x-iy}{x^2+y^2}+1=$
$=\frac{x}{x^2+y^2}+1-i\frac{y}{x^2+y^2}$ $\quad P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}+1$
$Q(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$

$P_x=\frac{x^2+y^2-x\,2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad P_x=Q_y$ uz uslov da je $x\neq 0$ i $y\neq 0$

$Q_y=-\frac{x^2+y^2-y\,2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Važi $Q_x=-P_y$, $x\neq 0, y\neq 0$
$\Rightarrow f$ je diferencijabilna nad $\mathbb{C}\setminus\{0\}$
$f'(z)=\left(\frac{1}{z}+1\right)'=-\frac{1}{z^2}$, $z\neq 0$.

Def. Funkcija $f: D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je analitička u tački $z_0\in D$ ako postoji okolina tačke z_0 u $\mathbb{C}$ tako da je f diferencijabilna u svakoj tački iz te okoline.

okolina tačke z_0 u $\mathbb{C}$

· U je okolina tačke z_0 u $\mathbb{C}$ ako postoji $r>0$
$L(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|<r\}\subseteq U$
↑ krug sa centrom u z_0 p.p. r.

Pr. Odrediti oblasti na kojima su sledeće funkcije analitičke:

a) $f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$
$=e^x\cos y+ie^x\sin y$ $\quad P(x,y)=e^x\cos y$
$Q(x,y)=e^x\sin y$

$$\underbrace{\begin{aligned} P_x&=e^x\cos y & Q_y&=e^x\cos y \\ Q_x&=e^x\sin y & P_y&=-e^x\sin y \end{aligned}}_{\begin{aligned} P_x&=Q_y \\ Q_x&=-P_y \end{aligned} \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2}$$

$\Rightarrow f$ je diferencijabilna nad $\mathbb{C}$
$\Rightarrow f$ je analitička nad $\mathbb{C}$.
(po def)

b) $f(z)=|z|^2=|x+iy|=x^2+y^2$
prethodni primer $\Rightarrow f$ diferencijabilna samo u $z_0=0$.

izvod postoji samo u 0!

$\Rightarrow f$ nije analitička ni u jednoj tački iz $\mathbb{C}$.

(T) Ako je f analitička u z_0 tada je i diferencijabilna u z_0. Obrnuto ne važi! (prethodni primer pod b)).

· Osobine analitičkih funkcija

1) Ako je f analitička u z_0 tada ona ima $\boxed{\text{sve izvode}}$ u z_0 i važi

Tejlorov red funkcije f u z_0 → $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, $|z-z_0|<r$,
za neko $r>0$.

Napomena. Svi Maklorenovi razvoji za jednostavne funkcije važe i u $\mathbb{C}$

$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \quad |z|<1$, $\quad e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad z\in\mathbb{C}$, $\quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad z\in\mathbb{C}$ ... itd.

2) Ako je f analitička i ograničena nad $\mathbb{C}$ tada $f(z)=0 \quad \forall z\in\mathbb{C}$

· f je ograničena nad $\mathbb{C}$ ako postoji $C>0$ tako da
$|f(z)|\leq C, \quad \forall z\in\mathbb{C}$.

Pr. Da li važi $|\sin z|\leq 1$ nad $\mathbb{C}$?

NE! $\sin z$ je analitička funkcija nad $\mathbb{C}$.
$(\sin z)'=\cos z$, $z\in\mathbb{C} \Rightarrow$ dif. nad $\mathbb{C} \Rightarrow$ analitička nad $\mathbb{C}$.

Ako važi $|\sin z|\leq 1 \overset{2)}{\Rightarrow} \sin z=0, \ \forall z\in\mathbb{C}$ ↯
(npr. $\sin\frac{\pi}{2}=1\neq 0$).

· $|\sin z|\leq 1$ i $|\cos z|\leq 1$ ne važe u $\mathbb{C}$!

3) $f(z)$ je analitička u tački ∞ ako je funkcija $f\left(\frac{1}{z}\right)$ analitička u tački 0.

Pr. Ispitati da li je f-ja $f(z)=\frac{1}{z}$ analitička u ∞.

$f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{\frac{1}{z}}=z=x+iy \quad P=x$
$Q=y$

$\left.\begin{aligned} P_x&=1 & Q_y&=1 \\ Q_x&=0 & P_y&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} P_x&=Q_y \\ Q_x&=-P_y \end{aligned}$ ✓

$\Rightarrow$ dif. nad $\mathbb{C} \Rightarrow$ analitička nad $\mathbb{C}$ pa i za $z_0=0$.
$\Rightarrow f(z)$ je analitička u ∞.