

# Вежбе 6

## -Рекурентне релације-

РЕКУРЕНТНА РЕЛАЦИЈА РЕДА  $k$

$$f_{n+k} = F(n, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k-1})$$

$n \in \mathbb{N}_0$

$f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k}$  узасйтоти  
членови некот низа

Линеарна хомогена р.р. со константни кофициенти

$$c_k f_{n+k} + c_{k-1} f_{n+k-1} + \dots + c_2 f_{n+2} + c_1 f_{n+1} + c_0 f_n = 0$$

$$c_i = \text{const}, \quad i=0, \dots, k$$

1. Наћи општа решења рекурентних релација

a)  $f_{n+2} - 7f_{n+1} + 12f_n = 0, n \geq 0$

Числови  $f_n$  уврстимо  $t^n$  2. реда

$$t^{n+2} - 7t^{n+1} + 12t^n = 0 \quad | : t^n$$

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

КАРАКТЕРИСТИЧНА  
ЈЕДНАЧИНА

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 12}}{2} \\ &= \frac{7 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

$$t_1 = 3 \quad t_2 = 4$$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ

$$\begin{aligned} f_n &= A \cdot t_1^n + B \cdot t_2^n \\ &= A \cdot 3^n + B \cdot 4^n \end{aligned}$$

b)  $f_n + 3f_{n-1} - 10f_{n-2} = 0, n \geq 2$

$f_n \rightarrow t^n$  2. реда

$$t^n + 3t^{n-1} - 10t^{n-2} = 0 \quad | : t^{n-2}$$

$$t^2 + 3t - 10 = 0 \quad \text{карактеристична једначина}$$

$$(t+5)(t-2) = 0$$

$$t_1 = -5 \quad t_2 = 2$$

Опште решење

$$f_n = A \cdot (-5)^n + B \cdot 2^n$$

$$e) f_{n+2} - 4f_{n+1} + 13f_n = 0, n \geq 0$$

$$f_n \rightarrow t^n$$

2. реда

$$t^{n+2} - 4t^{n+1} + 13t^n = 0 / :t^n$$

$$t^2 - 4t + 13 = 0$$

$$\begin{aligned}t_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} \\&= \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \\&= \frac{4 \pm 6i}{2}\end{aligned}$$

$$t_1 = 2 - 3i \quad t_2 = 2 + 3i$$

$$f_n = A(2-3i)^n + B(2+3i)^n$$

$$z) f_{n+2} + 6f_{n+1} + 9f_n = 0, n \geq 0$$

карактеристична j-ти

2. реда

$$t^2 + 6t + 9 = 0$$

$$(t+3)^2 = 0$$

$$t_1 = t_2 = -3$$

$$\begin{aligned}[f_n &= A \cdot (-3)^n + B \cdot (-3)^n \\&= (A+B) \cdot (-3)^n = C \cdot (-3)^n]\end{aligned}$$

НЕ МОЖЕ  
ОВАКО!

У општем решењу рекурентне реализације  
2. реда морамо имати 2 различите  
контанте

$$\begin{aligned}f_n &= A \cdot (-3)^n + B \cdot n \cdot (-3)^n \\&= (A + Bn) \cdot (-3)^n\end{aligned}$$

$$d) f_{n+3} + 3f_{n+2} + 3f_{n+1} + f_n = 0, n \geq 0$$

карактеристична  $j-H\alpha$

$$t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$(t+1)^3 = 0$$

$$t_1 = t_2 = t_3 = -1$$

оціните розв'язок

$$\begin{aligned}f_n &= A \cdot (-1)^n + B \cdot n \cdot (-1)^n + C \cdot n^2 \cdot (-1)^n \\&= (A + Bn + Cn^2) (-1)^n\end{aligned}$$

3. pega

$$h) f_{n+4} + 4f_n = 0, n \geq 0$$

$$t^n \rightarrow t^4$$

$$t^{n+4} + 4t^n = 0$$

$$t^4 + 4 = 0 \quad \text{карактеристична } j-H\alpha$$

$$\text{смежна } x = t^2$$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm 2i$$

$$x = -2i \quad x = 2i$$

$$t = \pm \sqrt{-2i} \quad t = \pm \sqrt{2i}$$

оціните розв'язок

$$\begin{aligned}f_n &= A(-\sqrt{-2i})^n + B(\sqrt{-2i})^n \\&\quad + C(-\sqrt{2i})^n + D(\sqrt{2i})^n\end{aligned}$$

2. Решити рекурентне релације

a)  $f_n = 5f_{n-1} - 6f_{n-2}$ ,  $n \geq 2$  ако је  $f_0 = 1$  и  $f_1 = 1$

$$f_n - 5f_{n-1} + 6f_{n-2} = 0$$

карактеристична једнородна

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t-2)(t-3) = 0$$

$$t_1 = 2 \quad t_2 = 3$$

остварено решение

$$f_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$

$$1 = f_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0 \quad (n=0)$$

$$1 = f_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 \quad (n=1)$$

$$\begin{aligned} &\text{ добијамо систем} & A+B=1 \\ &2A+3B=1 \end{aligned}$$

$$2(A+B)+B=1 \quad A=1-B$$

$$2 \cdot 1 + B = 1 \quad = 2$$

$$\Rightarrow B = -1$$

Решение рекурентните релације

$$f_n = 2 \cdot 2^n + (-1) \cdot 3^n = 2^{n+1} - 3^n$$

6)  $f_n = 6f_{n-1} - 9f_{n-2}$ ,  $n \geq 2$  ако је  $f_0 = f_1 = 2$

$$f_n - 6f_{n-1} + 9f_{n-2} = 0$$

карактерисанична  $j^{th}$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0$$

$$t_1 = t_2 = 3$$

$$2 = f_0 = (A + B \cdot 0) \cdot 3^0$$

$$2 = f_1 = (A + B \cdot 1) \cdot 3^1$$

$$\begin{array}{l} \text{Додјамо} \\ 3A + 3B = 2 \end{array}$$

$$3 \cdot 2 + 3B = 2 \Rightarrow B = -\frac{4}{3}$$

Односне решете

$$f_n = (A + Bn) \cdot 3^n$$

Решете p.p.

$$f_n = \left(2 - \frac{4}{3}n\right) \cdot 3^n$$

$$= 2 \cdot 3^n - 4 \cdot n \cdot 3^{n-1}$$

б)  $f_n = 5f_{n-1} - 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + 8f_{n-4}$ ,  $n \geq 4$  ако је  $f_0 = 1$ ,  $f_1 = 8$ ,  $f_2 = 12$  и  $f_3 = 38$

$$f_n - 5f_{n-1} + 6f_{n-2} + 4f_{n-3} - 8f_{n-4} = 0$$

$$t^n - 5t^{n-1} + 6t^{n-2} + 4t^{n-3} - 8t^{n-4} = 0$$

Постављајући тачке  $t = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

ХОРНЕРОВА ШЕМА

	1	-5	6	4	-8
1	1	-4	2	6	-2
-1	1	-6	12	-8	0
-1	1	-7	19	-27	x
2	1	-4	4	0	✓

$$t^n - 5t^{n-1} + 6t^{n-2} + 4t^{n-3} - 8t^{n-4} = (t+1)(t^3 - 6t^2 + 12t - 8)$$

$$= (t+1)(t-2) \underbrace{(t^2 - 4t + 4)}_{(t-2)^2} = (t+1)(t-2)^3$$

$$t_1 = -1 \quad t_2 = t_3 = t_4 = 2$$

Ч.реда

оимаше решење

$$f_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n + C \cdot n \cdot 2^n + D \cdot n^2 \cdot 2^n$$

$$1 = f_0 = A \cdot (-1)^0 + B \cdot 2^0 + C \cdot 0 \cdot 2^0 + D \cdot 0^2 \cdot 2^0$$

$$8 = f_1 = A \cdot (-1)^1 + B \cdot 2^1 + C \cdot 1 \cdot 2^1 + D \cdot 1^2 \cdot 2^1$$

$$12 = f_2 = A \cdot (-1)^2 + B \cdot 2^2 + C \cdot 2 \cdot 2^2 + D \cdot 2^2 \cdot 2^2$$

$$38 = f_3 = A \cdot (-1)^3 + B \cdot 2^3 + C \cdot 3 \cdot 2^3 + D \cdot 3^2 \cdot 2^3$$

$$A + B = 1$$

$$-A + 2B + 2C + 2D = 8$$

$$A + 4B + 8C + 16D = 12$$

$$-A + 8B + 24C + 72D = 38$$

Решавајући систем  
 добијамо

$$A = -2 \quad B = 3$$

$$C = -\frac{1}{4} \quad D = \frac{1}{4}$$

Решење p.p.

$$f_n = (-2)(-1)^n + \left(3 - \frac{n}{4} + \frac{n^2}{4}\right) \cdot 2^n$$

в)  $f_{n+3} = 4f_{n+2} - f_{n+1} - 6f_n$ ,  $n \geq 0$  ако је  $f_0 = 1$ ,  $f_1 = 2$  и  $f_2 = 4$ .

### 3. Решити систем рекурентних релација

$$f_{n+1} = 2f_n - g_n \quad (1)$$

$$g_{n+1} = f_n + 4g_n \quad (2)$$

уз почетне услове  $f_0 = 2, g_0 = 1$ .

$$(1): g_n = 2f_n - f_{n+1}$$

$$(2): \frac{2f_{n+1} - f_{n+2}}{g_{n+1}} = f_n + 4(2f_n - f_{n+1})$$

$$2 = f_0 = A$$

$$3 = f_1 = 3A + 3B \Rightarrow B = -1$$

Добијамо  $f_n = (2-n) \cdot 3^n$

Добијамо в.п.  $f_{n+2} - 6f_{n+1} + 9f_n = 0$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0 \quad t_1 = t_2 = 3$$

$$f_n = (A + Bn) \cdot 3^n$$

Знамо  $f_0 = 2$ , а из (1) имамо

$$f_1 = 2f_0 - g_0 = 4 - 1 = 3$$

Сада  $g_n$  можемо одредити на следећи начин

$$\begin{aligned} g_n &= 2f_n - f_{n+1} = 2 \cdot (2-n) \cdot 3^n - (2-(n+1)) \cdot 3^{n+1} \\ &= 3^n (4 - 2n - 3(1-n)) = 3^n (4 - 2n - 3 + 3n) \\ &= (1+n) \cdot 3^n \end{aligned}$$

4. Нека су  $a_n$  и  $b_n$  вредности које променљиве  $a$  и  $b$  имају након  $n$ -тог проласка кроз while петљу написану у програмском језику JAVA.  
(Променљива  $t$  је помоћна променљива.)
- 

```
public class Rekurentna{  
    public static void main(String []args) {  
        int i=0;  
        int t;  
        int a=1;  
        int b=1;  
  
        while (a>0 && b>0){  
            t = a;  
            a = b;  
            b += 2*t;  
  
            i += 1;  
            System.out.println("Nakon " + i + ". iteracije rezultat je: a= " +  
                a + ", b= " + b);  
        }  
    }  
}
```

---

a) Генерисати систем рекурентних релација који описује низове  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  и  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

$$t_n = a_{n-1}$$

$$a_n = b_{n-1}$$

$$b_n = b_{n-1} + 2t_n = b_{n-1} + 2a_{n-1}$$

Систем:

$$a_n = b_{n-1}$$

$$b_n = b_{n-1} + 2a_{n-1}$$

$$a_0 = 1, b_0 = 1$$

b) Генерисати рекурентну релацију која описује низ  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

$$b_n = b_{n-1} + 2a_{n-1} = b_{n-1} + 2b_{n-2}$$

$$b_1 = b_0 + 2a_0 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}$$

$$b_0 = 1, b_1 = 3$$

2. реда Р.Р.

в) Решити рекурентну релацију добијену под б).

$$t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1) = 0$$

карактеристична једначина

$$b_n = A(-1)^n + B \cdot 2^n$$

$$1 = b_0 = A + B$$

$$3 = b_1 = -A + 2B$$

$$4 = 3B \Rightarrow B = \frac{4}{3} \quad A = -\frac{1}{3}$$

$$b_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{4}{3} \cdot 2^n = \frac{(-1)^{n+1} + 2^{n+2}}{3}$$

5. Нади опште решење једначине  $a_{n+2}^2 = 5a_{n+1}^2 - 4a_n^2$ ,  $n \geq 0$ . НЕЛИНЕАРНА Р.Р.

Уводимо смету  $b_n = a_n^2$

Добијамо р.р.  $b_{n+2} = 5b_{n+1} - 4b_n$

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 4b_n = 0$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$(t-1)(t-4) = 0$$

$$b_n = A \cdot 1^n + B \cdot 4^n = A + B \cdot 4^n$$

На крају братимо смету

$$b_n = a_n^2 \rightarrow a_n = \pm \sqrt{b_n} = \pm \sqrt{A + B \cdot 4^n}$$

6. Ако се зна да су сви чланови низа  $a_n$  почев од  $a_2$  различни решити

a)  $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2}$ ,  $n \geq 0$ , ако је  $a_0 = 1$  и  $a_1 = 2$  НЕЛИНЕАРНА р.р.

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2} / \log_2$$

$$\log_2 a_{n+2} = \log_2 \frac{a_{n+1}^3}{a_n^2}$$

$$\log_2 a_{n+2} = \log_2 a_{n+1}^3 - \log_2 a_n^2$$

$$\log_2 a_{n+2} = 3 \log_2 a_{n+1} - 2 \log_2 a_n$$

смена  $b_n = \log_2 a_n$

Добијамо р.р.  $b_{n+2} = 3b_{n+1} - 2b_n$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) = 0$$

$$b_n = A + B \cdot 2^n$$

$$b_0 = \log_2 a_0 = \log_2 1 = 0$$

$$b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1 \leftarrow \begin{array}{l} \text{због овога смо} \\ \text{изабрали да основа} \\ \text{логаритма буде 2} \end{array}$$

Додијамо систем

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A + 2B &= 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

$$b_n = \log_2 a_n \Rightarrow a_n = 2^{b_n} = 2^{2^n - 1}$$

Сада је  $b_n = -1 + 2^n$

\*Увид је да су сви чланови низа почев од  $a_2$  различни  
одредитељ је да увећана смена буде једноставнија

б)  $a_n = a_{n-1} a_{n-2}^2$ ,  $n \geq 2$ , ако је  $a_0 = a_1 = 2$ .

ПОДСЕТНИК

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log x \cdot y = \log x + \log y$$

$$\log x^k = k \log x$$

7. Нахи општу формулу за следећи низ  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$ ,  $n \geq 0$ , где је  $a_0 = a_1 = 0$ .

НЕХОМОГЕНА Р.Р.

Решение рекурентните редакције је  $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$

1° ХОМОГЕНА Р.Р.

$$a_{n+2}^{(h)} - 4a_{n+1}^{(h)} + 4a_n^{(h)} = 0$$

Каррактерисајућа J-HQ

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t-2)^2 = 0$$

$$a_n^{(h)} = (A+Bn) \cdot 2^n$$

2° ЈПРатимо једно ПАРТИКУЛАРНО решење  $a_n^{(p)}$  нехомогене Р.Р.

$$a_n^{(p)} = C \cdot 2^n$$

$$\begin{aligned} 2^n &= a_{n+2}^{(p)} - 4a_{n+1}^{(p)} + 4a_n^{(p)} \\ &= C \cdot 2^{n+2} - 4 \cdot C \cdot 2^{n+1} + 4 \cdot C \cdot 2^n \\ &= 2^n \cdot C \cdot (4-8+4) = 0 \quad \text{зашто } 2^n \neq 0, \forall n \end{aligned}$$

НЕ МОЖЕ  
ОВАКО!

Приближем је што већ имамо  $A \cdot 2^n$  у хомогеном делу решења, као и  $B \cdot n \cdot 2^n$ .

$$\text{Зашто узимамо } a_n^{(p)} = C \cdot n^2 \cdot 2^n$$

$$\begin{aligned} 2^n &= a_{n+2}^{(p)} - 4a_{n+1}^{(p)} + 4a_n^{(p)} = C \cdot (n+2)^2 \cdot 2^{n+2} - 4 \cdot C \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{n+1} + 4 \cdot C \cdot n^2 \cdot 2^n \\ &= C \cdot 2^n \cdot (4(n^2 + 4n + 4) - 8(n^2 + 2n + 1) + 4n^2) \\ &= C \cdot 2^n \cdot (4n^2 + 16n + 16 - 8n^2 - 16n - 8 + 4n^2) = 8C \cdot 2^n \end{aligned}$$

$$\text{Сада је } 8C = 1, \text{ тај је } C = \frac{1}{8}$$

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{8} \cdot n^2 \cdot 2^n$$

$$0 = a_0 = a_0^{(h)} + a_0^{(p)} = A \cdot 2^0 + B \cdot 0 \cdot 2^0 + \frac{1}{8} \cdot 0^2 \cdot 2^0 \Rightarrow A = 0$$

$$0 = a_1 = a_1^{(h)} + a_1^{(p)} = A \cdot 2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1 + \frac{1}{8} \cdot 1^2 \cdot 2^1 \Rightarrow 2B + \frac{1}{8} = 0$$

$$B = -\frac{1}{16}$$

РЕШЕЊЕ Р.Р.

$$\begin{aligned} a_n &= a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = -\frac{1}{8}n2^n + \frac{1}{8}n^22^n \\ &= (n^2 - n)2^{n-3} \end{aligned}$$

НАПОМЕНЕ:

$$1. \quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n$$

$$a_n^{(h)} = (A + Bn) \cdot 2^n$$

$a_n^{(p)} = C \cdot 3^n$  Сада имамо већи облик решета у хомојеном случају

$$2. \quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 5$$

Хомојена p.p. је  $a_{n+2}^{(h)} - 4a_{n+1}^{(h)} + 4a_n^{(h)} = 0$ , и њена карактеристична ј-ка је  $t^2 - 4t + 4 = 0$

Линарникуларно решење је  $a_n^{(h)} = C \cdot 1^n$

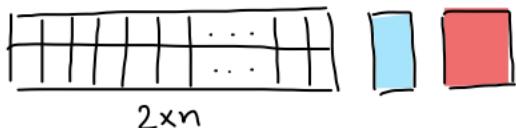
$$3. \quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n + 4^n$$

Зреште пратимо у облику  $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)}$ , тада је

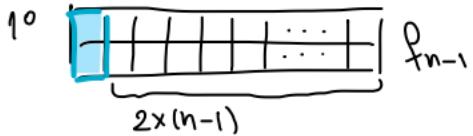
$a_n^{(p_1)}$  решење p.p.  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n$

$a_n^{(p_2)}$  решење p.p.  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 4^n$

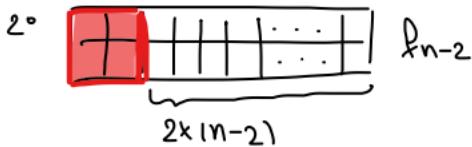
8. Правоугаоник величине  $2 \times n$  издељен је на  $2n$  једнаких квадрата. На располагању имамо домине правоугаоног облика  $2 \times 1$  и  $2 \times 2$ . На колико начина се цео правоугаоник  $2 \times n$  може прекрити са овим доминама?



Нека је  $f_n$  број начина да се датим доминама прекрије правоугаоник димензије  $2 \times n$



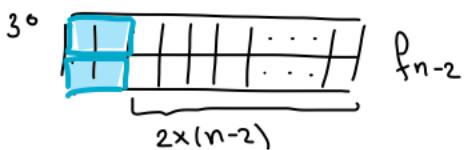
$$\text{Сада је } f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-2}, \text{ тј. } f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2}$$



$f_0 = 1$  (помоћу немашо чита да прекријеш, рачунашо да имаш један начин да не уђешаши ниједну домину)

$$f_1 = 1 \quad \square$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Учесао } f_0 \text{ и } f_1, \text{ можемо начини } f_1 \text{ и } f_2 \\ f_2 = 3 \end{array} \right)$$



За домини  
речених добијену  
Р.Р. када је  
 $f_0 = 1$  и  $f_1 = 1$

9. Колико има речи дужине  $n$  над азбуком  $A = \{1, 2, 3\}$  у којима се не појављује подреч 11?

$f_n$  - број једнотактичих речи дужине  $n$

$$1^{\circ} \quad 1 \frac{2}{3} | \boxed{n-2} \quad 2 \cdot f_{n-2}$$

Добијамо рекурентну рекаџију

$$2^{\circ} \quad 2 | \boxed{n-1} \quad f_{n-1}$$

$$f_n = 2f_{n-2} + 2f_{n-1}$$

$$3^{\circ} \quad 3 | \boxed{n-1} \quad f_{n-1}$$

Лочетни услови:

$$f_0 = 1 \quad (\text{празна реч})$$

За додатки решити  
добијену р.р.

$$f_1 = 3 \quad (\text{речи } 1, 2, 3)$$

$$\left( f_2 = 3^2 - 1 = 8 \quad \begin{array}{c} 11 \\ 21 \quad 31 \\ 12 \quad 22 \quad 32 \\ 13 \quad 23 \quad 33 \end{array} \right)$$

10.\* Колико има речи дужине  $n$  над азбуком  $\{0, 1, 2\}$  које садрже паран број нула?

$f_n$  - број речи дужине  $n$  које садрже ПАРАН број нула

$g_n$  - број речи дужине  $n$  које садрже НЕПАРАН број нула

$$1^{\circ} 1 \boxed{n-1} f_{n-1}$$

$$2^{\circ} 2 \boxed{n-1} f_{n-1}$$

$$3^{\circ} 0 \boxed{n-1} g_{n-1}$$

Добијамо  $f_n = 2f_{n-1} + g_{n-1}$ . Јако сада усматрамо речи дужине  $n$  са НЕПАРАНИМ бројем нула, слично као мадонре добијамо да је  
 $g_n = 2g_{n-1} + f_{n-1}$

Систем

$$f_n = 2f_{n-1} + g_{n-1} \quad (1)$$

$$g_n = 2g_{n-1} + f_{n-1} \quad (2)$$

Почетни услови:

$$f_0 = 1, g_0 = 0$$

(празна реч има 0 нула, па има паран број нула)

$$(1): g_{n-1} = f_n - 2f_{n-1}$$

$$(2): (f_{n+1} - 2f_n) = 2(f_n - 2f_{n-1}) + f_{n-1}$$

$$f_{n+1} - 4f_n + 3f_{n-1} = 0 \text{ линеарна, хомотетна, са k.k. } 2. \text{ реда } (n \geq 1)$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) = 0$$

$$f_n = A + B \cdot 3^n$$

$$\text{Уз (1) је } f_1 = 2f_0 + g_0 = 2$$

$$\begin{aligned} 1 &= f_0 = A + B \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \\ 2 &= f_1 = A + 3B \Leftrightarrow B = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f_n = \frac{1}{2} (1 + 3^n)$$

Једначину  $f_n = 2f_{n-1} + g_{n-1}$  добијамо исто као што пре

Другу жеоизадну једначину можемо одредити на слични начин. Укупни број речи дужине  $n$  на ћијим азбуцијама  $\{0,1,2\}$  је  $3^n$ . Ќако свака реч дужине  $n$  има или тврд или нећијарант број чука, ванти  $f_n + g_n = 3^n$

$$f_n = 2f_{n-1} + g_{n-1}$$

$$f_n + g_n = 3^n \Rightarrow g_n = 3^n - f_n$$

$$f_n = 2f_{n-1} + 3^{n-1} - f_{n-1} = f_{n-1} + 3^{n-1}$$

Добијамо жеоизадну р.p. 1. реда  $f_n - f_{n-1} = 3^{n-1}$ ,  $n \geq 0$ , која је еквивалентна рекурентној релацији  $f_{n+1} - f_n = 3^n$ ,  $n \geq 1$

Хомогени део:

$$f_n^{(h)} - f_m^{(h)} = 0$$

$$t-1=0$$

$$f_n^{(h)} = A \cdot 1^n = A$$

једно парцијално решење:

$$f_n^{(p)} = B \cdot 3^n$$

$$B \cdot 3^{n+1} - B \cdot 3^n = 3^n$$

$$\begin{aligned} 3B - B &= 1 \\ 2B &= 1 \end{aligned}$$

$$1 = f_0 = f_0^{(h)} + f_0^{(p)} = A + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\text{решење: } f_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^n = \frac{1}{2}(1 + 3^n)$$