Analiza 2

Prvi Kolokvijum

Pripremio: Marko Gordić
Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

© 2024 - Marko Gordić

Contents

1 Uvod **3**

2 Predispitne Obaveze (PO) **3**
2.1 Kriterijum Divergencije . . . 3
2.2 Uporedni kriterijum prve vrste . . . 3
2.3 Uporedni kriterijum druge vrste . . . 3
2.4 Dalamberov (količnički) kriterijum . . . 4
2.5 Košijev (korenski) kriterijum . . . 5
2.6 Lajbnicov kriterijum . . . 5
2.7 Oblast konvergencije stepenih redova . . . 6
2.8 Dvostruki Integral - Definicija . . . 6
2.9 Dvostruki Integral - Promena redosleda integracije . . . 7
2.10 Polarne Koordinate - Definicija . . . 8
2.11 Polarne Koordinate - Prelazak na polarne koordinate . . . 8
2.12 Krivolinijski integral - L zadata kao duž . . . 9

3 Zadaci (Z) **10**
3.1 Ispitivanje konvergencije redova . . . 10
3.1.1 Ispitivanje konvergencije alternativnih redova . . . 10
3.2 Sumiranje stepenih redova i određivanje oblasti konvergencije . . . 10
3.2.1 Postupak određivanja oblasti konvergencije stepenih redova . . . 10
3.2.2 Sumiranje stepenih redova . . . 11
3.3 Razvijanje f-ja u Tejlorov i Maklorenov red . . . 11
3.3.1 Razvijanje funkcija u Maklorenov red . . . 11
3.4 Primena dvostrukog integrala - Zapremina . . . 11
3.5 Krivolinijski Integral 1. vrste . . . 13
3.5.1 Izračunavanje dužine luka kod krivih . . . 13
3.5.2 Izračunavanje dužine luka kod kružnice . . . 14

4 Dodatni Materijali **14**
4.1 Površi u $\mathbb{R}^3$ . . . 14
4.1.1 Cilindar $(x^2 + y^2 = r^2)$ . . . 14
4.1.2 Konus $(z = \sqrt{x^2 + y^2})$ . . . 15
4.1.3 Paraboloid $(z = x^2 + y^2)$ . . . 15
4.1.4 Sfera $(x^2 + y^2 + z^2 = r^2)$ . . . 16

© 2024 - Marko Gordić

1 Uvod

Ovde sam sakupio sve što je profesor naglasio kao bitno za prvi kolokvijum. Ipak, greške su moguće, pa vas molim da budete pažljivi.

2 Predispitne Obaveze (PO)

2.1 Kriterijum Divergencije

Za red $\sum a_n$ ako $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, red divergira. Drugim rečima, ako članovi reda ne teže nuli, red ne može biti konvergentan. Ovaj kriterijum je jednostavan način za brzo utvrdjivanje da li red divergira.

2.2 Uporedni kriterijum prve vrste

Uporedni kriterijum prve vrste koristi se za ispitivanje konvergencije redova. Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dva reda sa pozitivnim članovima $a_n \geq 0$ i $b_n \geq 0$, za svaki n.

Pretpostavimo da postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi:

$$a_n \leq b_n.$$

Tada važe sledeći zaključci:

- Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira, tada i red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mora konvergirati.
- Ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira, tada i red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ mora divergirati.

Drugim rečima, ako jedan red $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira i drugi red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je po članovima manji ili jednak odgovarajućim članovima prvog reda, tada i manji red mora konvergirati. Slično tome, ako red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira, a veći red je po članovima veći ili jednak, tada i on mora divergirati.

Primer

Razmotrimo redove:

$$a_n = \frac{1}{n^3}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Znamo da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira (poznat kao kvadratni red). Pošto je $\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$ za svaki $n \geq 1$, možemo zaključiti da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ takodje konvergira po uporednom kriterijumu prve vrste.

2.3 Uporedni kriterijum druge vrste

Uporedni kriterijum druge vrste koristi se za ispitivanje konvergencije redova na osnovu njihovog asimptotskog ponašanja. Neka su $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dva reda sa pozitivnim članovima $a_n \geq 0$ i $b_n \geq 0$.

Ako postoji konstanta $K \neq 0$ i $K \neq \infty$ tako da važi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K,$$

tada su oba reda ili istovremeno konvergentna ili istovremeno divergentna.

© 2024 - Marko Gordić

Drugim rečima, ako članovi redova a_n i b_n postaju proporcionalni kada $n \to \infty$, tada imaju isti ishod u pogledu konvergencije ili divergencije.

U ovim zadacima, mi u suštini puštamo red da ide u beskonačnost i posmatramo vodeće članove kako bi uprostili analizu. A zatim proveravamo konvergenciju tako uprošćenih redova.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-\sqrt{n}}{\sqrt{n^5+3n^2}} \sim \frac{2n}{\sqrt{n^5}} \dots$

Primer

Posmatrajmo redove:

$$a_n = \frac{1}{2n+1}, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Izračunajmo odnos članova redova:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Pošto je konstanta konačna i različita od nule, oba reda imaju isti ishod u pogledu konvergencije. Pošto red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira (harmonijski red), i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ mora divergirati.

2.4 Dalamberov (količnički) kriterijum

Dalamberov kriterijum koristi se za odredjivanje konvergencije beskonačnih redova sa pozitivnim članovima. Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ brojni red sa pozitivnim članovima.

Ako postoji granica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

tada važi:

- Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **konvergentan** ako je $l < 1$.
- Ako je $l = 1$, kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji ili divergenciji reda.
- Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **divergentan** ako je $l > 1$.

Za $l = 1$, ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji ili divergenciji reda, i moraju se koristiti drugi kriterijumi za procenu.

Dalamberov kriterijum je koristan jer omogućava procenu konvergencije redova na osnovu odnosa susednih članova reda. Ako odnos izmedju dva uzastopna člana postane manji od 1 za velike n, red konvergira.

Primer

Razmotrimo red:

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Izračunajmo količnik susednih članova:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \div \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1}.$$

Zato što:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergira prema Dalamberovom kriterijumu.

© 2024 - Marko Gordić

2.5 Košijev (korenski) kriterijum

Košijev kriterijum koristi se za ispitivanje konvergencije redova. Neka je $\sum a_n$ brojni red.

Ako postoji takav prirodan broj n_0 i konstanta q, $0 \leq q < 1$, da za sve $n \geq n_0$ važi $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, tj.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

tada red $\sum a_n$ konvergira.

Ako je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, onda red $\sum a_n$ divergira.

Ako je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, tada red $\sum a_n$ može da konvergira ili divergira.

Ako je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, onda red $\sum a_n$ konvergira.

Primer

Razmotrimo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Da bismo primenili Košijev kriterijum, posmatramo članove reda $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Izračunavamo koren n-tog stepena svakog člana:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Pošto je $\frac{1}{2} < 1$, imamo da

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1.$$

Prema Košijevom kriterijumu, pošto je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergira.

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergira prema Košijevom kriterijumu.

2.6 Lajbnicov kriterijum

Lajbnicov kriterijum koristi se za ispitivanje konvergencije naizmeničnih redova. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ naizmenični red, gde je svaki $a_n \geq 0$. Red konvergira ako su ispunjena dva uslova:

1. a_n je opadajući niz, tj. $a_{n+1} \leq a_n$ za svaki $n \geq N$, gde je N neki prirodan broj.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ako su oba uslova ispunjena, red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergira.

Primer

Razmotrimo naizmenični harmonijski red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

© 2024 - Marko Gordić

Da bismo primenili Lajbnicov kriterijum, ispitujemo da li su ispunjena dva uslova:

1. Niz $a_n = \frac{1}{n}$ je opadajući jer za svako n, važi $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$.
2. Granica $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dakle drugi uslov je takodje ispunjen.

Po Lajbnicovom kriterijumu, ovaj red konvergira, iako nije apsolutno konvergentan. Zanimljivo je da suma ovog reda konvergira ka vrednosti $\ln(2)$.

Dakle, naizmenični harmonijski red je konvergentan prema Lajbnicovom kriterijumu.

2.7 Oblast konvergencije stepenih redova

Dat je stepeni red
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$
Broj $R > 0$ takav da za sve x za koje važi $|x - x_0| < R$ dati red konvergira, a za sve x za koje važi $|x - x_0| > R$ divergira, naziva se **poluprečnik konvergencije**.

Za x za koje važi $|x - x_0| = R$, moguća je i konvergencija i divergencija.

Specijalno:

- Ako je $R = 0$, oblast konvergencije je tačka $x = x_0$.
- Ako je $R = \infty$, oblast konvergencije je $\mathbb{R}$.

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \to \text{Adamarova formula.}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \to \text{D'Alembertova formula.}$$

2.8 Dvostruki Integral - Definicija

Neka je L po delovima, zatvorena, glatka kriva koja ograničava oblast $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Definišemo dvostruki integral funkcije $f(x, y)$ preko oblasti G kao:

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta G_i$$

Ovde važe sledeća objašnjenja:

- $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ predstavlja podelu oblasti G na manje oblasti G_i, pri čemu je svaka oblast G_i pravougaonik.
- M_i je tačka unutar oblasti G_i, često birana kao centar pravougaonika.
- ΔG_i je površina oblasti G_i.

Pod uslovom da je podela G takva da:

$$\max_{1\leq i\leq n} d(G_i) \to 0 \quad \text{za} \quad n \to \infty,$$

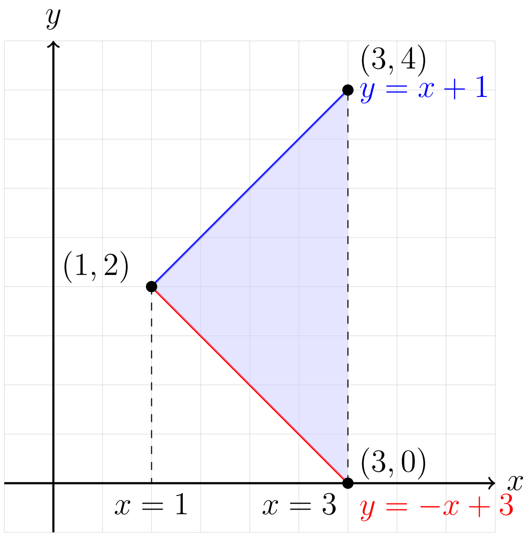
gde je $d(G_i) = \max_{A,B\in G_i} d(A, B)$ dijametar oblasti G_i, integral postoji i nezavistan je od izbora podele i tačaka M_i.

© 2024 - Marko Gordić

2.9 Dvostruki Integral - Promena redosleda integracije

Razmatraćemo primer gde je potrebno promeniti redosled integracije za dvostruki integral. Razmotrite integral:

$$\int_1^3 dx \int_{-x+3}^{x+1} f(x,y)\,dy$$

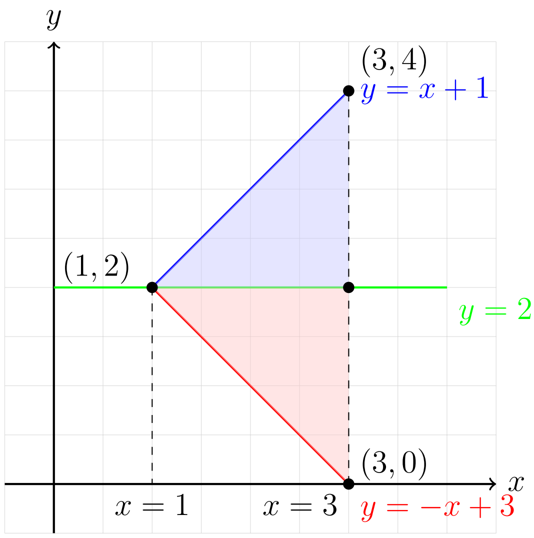


Proces promene redosleda integracije :

Možemo posmatrati sliku, i gledati kako bi promenili pogled na oblast integracije. Kada redimo promenu redosleda integracije, to nije promena mesta x i y, već promena pogleda sa kog zapisujemo integral.

Zapisujemo novi integral sa promenjenim granicama. ovog puta, pošto posmatramo oblast po y, oblast ćemo podeliti na 2 manje oblasti, gde je prva oblast ispod prave $y = 2$, a druga iznad prave $y = 2$ i ispod prave $y = 4$.

$$I_1 = \int_0^2 dy \int_{-y+3}^{3} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y-1}^{3} f(x,y)\,dx$$



2.10 Polarne Koordinate - Definicija

Položaj tačke u ravni može se opisati koristeći polarne koordinate (r, θ), gde su:

- r rastojanje tačke od koordinatnog početka (radijalna koordinata),

- θ ugao između pozitivne x-ose i pravca koji spaja tačku sa koordinatnim početkom (uglovna koordinata).

Ove koordinate su povezane sa pravougaonim koordinatama (x, y) na sledeći način:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

Kod dvostrukih integrala, prelaz iz pravougaonih u polarne koordinate uvodi dodatni faktor r zbog promene jakobijana. Tako dvostruki integral u polarnoj formi glasi:

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta,$$

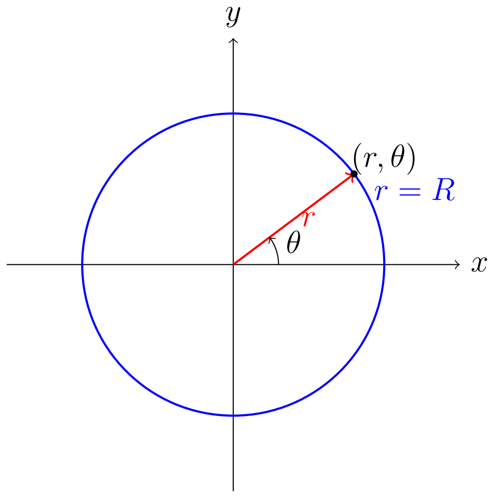
gde je G oblast integracije opisana u polarnoj ravni.

Geometrijska interpretacija

Polarnim koordinatama je moguće opisati krug ili delove kruga.

Polarno opisivanje koristi se za oblasti koje su simetrične ili kružne. Na primer, oblast opisana kao krug radijusa R centriran u koordinatnom početku ima granice:

$$0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$



2.11 Polarne Koordinate - Prelazak na polarne koordinate

Razmotrićemo prelazak dvostrukog integrala iz pravougaonih u polarne koordinate. Dati integral je:

$$I = \int_0^3 dy \int_{-\sqrt{18-y^2}}^{-y} f(x, y)\, dx$$

© 2024 - Marko Gordić

Korak 1: Razumevanje granica i funkcije u pravougaonim koordinatama

Granice integracije su sledeće: - y se kreće od 0 do 3, - x se kreće od $-\sqrt{18-y^2}$ do $-y$.

Ovo opisuje četvrtinu kruga u prvom kvadrantu sa centrom u koordinatnom početku i radijusom $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Korak 2: Oblast u polarne koordinate

U polarne koordinate prelazimo koristeći transformacije:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta.$$

Oblast integracije postaje: - $r \in [0, 3]$, što odgovara radijusu, - $\theta \in [0, \pi/2]$, što odgovara prvom kvadrantu.

Korak 3: Prepisivanje integrala u polarne koordinate

U polarnoj formi integral postaje:

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\,dr\,d\theta$$

Ovde: - $f(x, y)$ se transformiše u $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, - Faktor r dolazi od jakobijana prelaska na polarne koordinate.

Konačni integral u polarnoj formi glasi:

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r\,dr\,d\theta$$

2.12 Krivolinijski integral - L zadata kao duž

Postoje zadaci koji mogu tražiti od nas da izračunamo krivolinijski integral duž krive L koja je zadana kao duž. U ovom slučaju, kriva L je zadana kao prava linija između dve tačke A i B u ravni.

$\int_L (2x - 3y)dl, L : A(1, 2), B(1, 3)$

Ukoliko obratimo pažnju, a to će biti slučaj u većini zadataka, tačke A i B dele jednu koordinatnu osu. U ovom slučaju, tačke A i B dele x-osu. To znači da smenu možemo izvršiti na sledeći način:

$$x(t) = 1, \quad y(t) = t, \quad t \in [2, 3]$$

$$x'(t) = 0, \quad y'(t) = 1$$

Zatim zadatak završavamo kao običan krivolinijski integral.

$\int_2^3 (2 \times 1 - 3 \times t) \times \sqrt{1^2 + 0^2} dl = \ldots$

3 Zadaci (Z)

3.1 Ispitivanje konvergencije redova

3.1.1 Ispitivanje konvergencije alternativnih redova

Postoje 2 različita načina konvergencije kod alternativnih redova, a to su apsolutna konvergencija i uslovna konvergencija.

Alternativni red možemo uvek prepoznati po tome što se članovi reda smenjuju po znaku. Svaki alternativni red u sebi sadrži $(-1)^n$.

Provera apsolutna konvergencije

Da bi smo proverili apsolutnu konvergenciju, uzimamo apsolutnu vrednost svakog člana reda i proveravamo konvergenciju tog reda.

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{\sqrt{n^4+n^2+100}}$ => $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^4+n^2+100}}$

3.2 Sumiranje stepenih redova i određivanje oblasti konvergencije

3.2.1 Postupak određivanja oblasti konvergencije stepenih redova

Za određivanje oblasti konvergencije stepenih redova, potrebno je pratiti sledeće korake:

1. **Identifikacija stepenog reda:** Posmatra se dati stepeni red i identifikuje se njegova opšta forma. Na primer, uzimamo red:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}(2x+1)^n.$$
2. **Substitucija promenljive:** Kako bismo olakšali postupak, vrši se zamena promenljive. Ovde postavljamo:
$$t = 2x+1,$$
što transformiše red u:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}t^n.$$
3. **Određivanje poluprečnika konvergencije:** Koristi se formula za poluprečnik konvergencije. U ovom slučaju, možemo koristiti Adamarovu formulu:
$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$
$$a_n = \frac{3^n}{n}, \quad \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 3 \implies R = \frac{1}{3}.$$
4. **Određivanje intervala konvergencije:** Postavljamo uslov $|t| < R$ da red konvergira:
$$|2x+1| < \frac{1}{3}.$$

© 2024 - Marko Gordić

Razvijanjem nejednačine dobijamo:

$$-\frac{1}{3} < 2x + 1 < \frac{1}{3}.$$

Nakon rešavanja za x, dobijamo interval:

$$-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3}.$$

5. **Provera krajeva intervala:** Krajnje tačke intervala zahtevaju dodatnu proveru.
   - Za $x = -\frac{2}{3}$, red postaje:
     $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$
     što je *alternativni harmonijski red*, i on konvergira.
   - Za $x = -\frac{1}{3}$, red postaje:
     $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$
     što je *harmonijski red*, i on divergira.

Na osnovu prethodnih koraka, oblast konvergencije datog stepenog reda je:

$$\left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

3.2.2 Sumiranje stepenih redova

Važne napomene za rad sa stepenim redovima:

- Kada pomeramo brojač unazad za jedno mesto, možemo oduzeti taj element koji smo upravo dodali.
- Kada se brojač smanjuje, pod sumom se povećava svako n za jedan.
- Kada radimo množenje sa n, koristimo izvod:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'.$$
- Kada radimo deljenje sa n, koristimo integral:
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln|1-t|\Big|_0^x.$$

3.3 Razvijanje f-ja u Tejlorov i Maklorenov red

U ovom tipu zadatka, dobićemo neku funkciju i imaćemo zadatak da je razvijemo ili u Maklorenov ili u Tejlorov red.

3.3.1 Razvijanje funkcija u Maklorenov red

3.4 Primena dvostrukog integrala - Zapremina

Dvostruki integrali se koriste za izračunavanje zapremine oblasti u prostoru iznad neke površine $z = f(x, y)$ i ispod projektovane oblasti G na xy-ravni.

© 2024 - Marko Gordić

Definicija

Neka je površina u prostoru opisana funkcijom $z = f(x, y) \geq 0$ iznad projektovane oblasti G u xy-ravni. Zapremina V iznad G i ispod površine $z = f(x, y)$ računa se kao:

$$V = \iint_G f(x, y)\, dx\, dy$$

Postupak rešavanja

U ovim zadacima potrebno je ispratiti niz koraka kako bi što lakse došli do tražene zapremine.

1. Izračunati preseke svih tela

U zadatku ćemo dobiti više tela u prostoru $\mathbb{R}^3$, ta tela će u većini slučajeva biti data kao nejednačine. Potrebno je zapisati te nejednačine kao jednakosti na graničnim vrednostima a zatim odrediti preseke svih zadatih tela.

2. Crtanje skice

Sada je potrebno prepoznati koja tela su u pitanju i na osnovu toga formirati slobodnu skicu. Jako je bitno da se lepo vidi koje telo je iznad a koje ispod drugog jer ćemo na osnovu skice formirati granice za dvostruki integral.

3. Projekcija

Poslednja stvar koju radimo pre izračunavanja samog integrala, je da formiramo 2D skicu projekcije tela na xy-ravan. Ovo nam pomaže da lakše pređemo na polarne koordinate.

4. Polarne koordinate

Kada smo formirali projekciju, prelazimo na polarne koordinate. Ovde je potrebno zameniti x i y sa $r\cos\theta$ i $r\sin\theta$, a zatim izračunati Jakobijan

Primer: Izračunati zapreminu tela $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\}$;

Prvo moramo da analiziramo tela koja su nam data. Uočavamo ukupno 3 površi:

1. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ sa radijusom $r = 2$, unutrašnjost
2. Cilindar $x^2 + y^2 \leq 1$ sa radijusom $r = 1$, unutrašnjost
3. Ravan $z = 0$ koja predstavlja xy-ravan (osnovu), iznad.

Sada želimo da odredimo preseke ovih površi (1) i (2), kao i površi (2) i (3). Ovo će nam pomoći da odredimo oblast G, čiju zapreminu želimo da izračunamo.

Kada iscrtamo celu skicu i preseke, iz skice treba da podelimo oblast G na manje oblasti, kako bismo mogli da izračunamo integral.

Kao i uvek, cilj nam je da od gornje funkcije oduzmemo donju i to integrališemo. U ovom slučaju imamo sferu i cilindar u njoj. Ono što je ovde bitno je da ukoliko uzmemo formulu sfere sa jednakošću tj. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, možemo zaključiti da je $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Kada izračunamo ovaj koren, dobićemo pozitivnu i negativnu vrednost. Pozitivna vrednost se odnosi na zapreminu iznad xy-ravni, a negativna vrednost na zapreminu ispod xy-ravni.

© 2024 - Marko Gordić

U ovom slučaju, mi želimo da izračunamo zapreminu iznad xy-ravni, pa ćemo koristiti pozitivnu vrednost.

Projekcija opisanog tela na xOy ravan je unutrašnjost kružnice sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika 1. To je zapravo deo naše ravni $z = 0$. Znamo da možemo da uvedemo smenu polarnim koordinatama:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Sada uvodimo smenu i rešavamo dvostruki integral:

$$V = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \cdot r\,dr$$

3.5 Krivolinijski Integral 1. vrste

Ovde mogu doći 2 tipa zadatka na kolokvijum. Obična oblast koja je ograničena određenim krivama, ili druga varijanta kružnica. U oba slučaja, potrebno je koristiti parametrizaciju krivih kako bismo mogli da izračunamo integral. Glavna razlika je što ćemo kada je kružnica u pitanju koristiti drugačiju smenu.

3.5.1 Izračunavanje dužine luka kod krivih

Primer teksta zadatka bez rešenja

Izračunati $I = \int_L xydl$ gde je L rub oblasti ograničene x-osom, $y = x + 1$ i $y = 1 - x^2$, $x \geq 0$

1. Definisanje krive L:

Kriva L može biti definisana kao deo ravni ograničen određenim funkcijama ili krivama. Na primer, oblast može biti ograničena linijskim ili paraboličnim funkcijama, kao što su $y = x + 1$, $y = 1 - x^2$, i x-osom.

2. Parametrizacija krive:

Svaka od funkcija koje čine krivu L treba biti parametrizovana. Na primer:

- Za $y = x + 1$: postavljamo $x = t$, $y = t + 1$, pri čemu je t unutar određenog intervala (npr. $t \in [0, 1]$).
- Za $y = 1 - x^2$: postavljamo $x = t$, $y = 1 - t^2$, pri čemu t odgovara intervalu gde kriva važi.

3. Izračunavanje diferencijalnog elementa dl:

Diferencijal dužine luka dl se računa kao:

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Ovde koristimo parametre t da bismo računali parcijalne izvode dx/dt i dy/dt.

© 2024 - Marko Gordić

4. Postavljanje integrala:

Krivolinijski integral 1. vrste ima formu:

$$\int_L f(x, y)\, dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \cdot dl.$$

Funkcija $f(x, y)$ se parametrizuje kroz $x(t)$ i $y(t)$, a dl se izražava kroz t.

3.5.2 Izračunavanje dužine luka kod kružnice

1. Jednačina kružnice

Kružnica u ravni se obično zadaje jednačinom:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

gde je r poluprečnik kružnice.

2. Parametrizacija kružnice

Kružnica se parametrizuje korišćenjem trigonometrijskih funkcija:

$$x(t) = r \cos t, \quad y(t) = r \sin t, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Ovde su t_1 i t_2 granice koje određuju deo kružnice (npr. za prvi kvadrant, $t \in [0, \pi/2]$).

3. Diferencijal dužine luka

Dužina luka se računa pomoću diferencijalnog elementa dl, koji se izražava kao:

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Za parametrizaciju kružnice, parcijalni izvodi su:

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = r \cos t.$$

Stoga je:

$$dl = \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = r\, dt.$$

4. Postavljanje integrala

Dužina luka L kružnice se računa integracijom:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} dl = \int_{t_1}^{t_2} r\, dt = r \int_{t_1}^{t_2} dt.$$

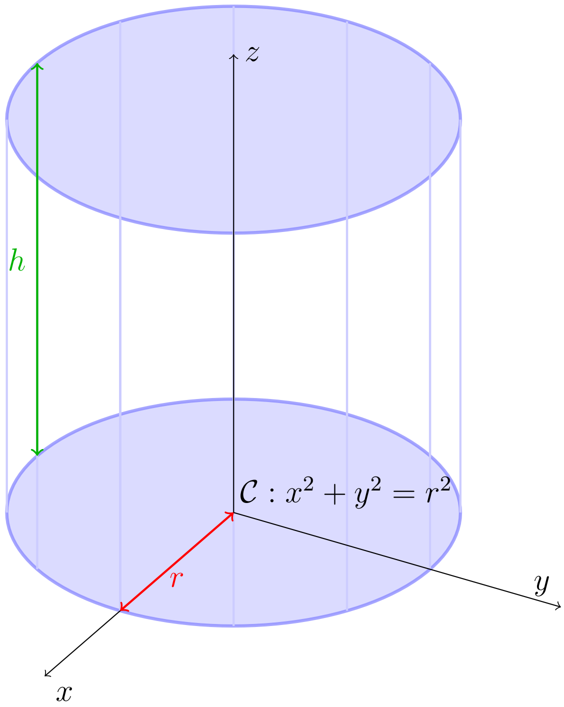
4 Dodatni Materijali

4.1 Površi u $\mathbb{R}^3$

4.1.1 Cilindar $(x^2 + y^2 = r^2)$

Razmatramo cilindar definisan jednačinom $x^2 + y^2 = r^2$, koji predstavlja beskonačnu površ u $\mathbb{R}^3$. Ovde je predstavljen cilindar sa visinom ograničenom u intervalu $z \in [0, h]$.

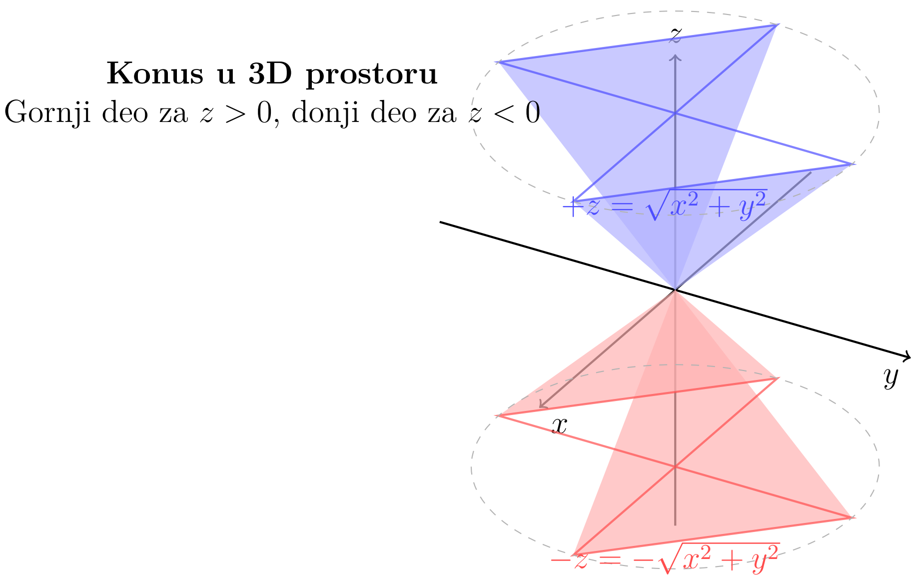
© 2024 - Marko Gordić



4.1.2 Konus ($z = \sqrt{x^2 + y^2}$)

Razmatramo konus definisan jednačinom $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, koji predstavlja površ sa zapreminom. Ovde su prikazane dve verzije:

Prva slika: Konus sa pozitivnim i negativnim vrednostima z



4.1.3 Paraboloid ($z = x^2 + y^2$)

Paraboloid je površ u $\mathbb{R}^3$ definisan jednačinom $z = x^2 + y^2$, koji predstavlja površ sa zapreminom. Možemo ga posmatrati ispod ili iznad visine 0.

Ukoliko je u pozitivnom delu formula je $z = x^2 + y^2$, a u negativnom delu formula je $z = -x^2 - y^2$.

Takođe, možemo pomeriti paraboloid od koordinatnog početka, dodavanjem neke konstante, pa će na primer, za pozitivan deo formula biti $z = a + x^2 + y^2$. Dok će za negativan deo biti $z = b - x^2 - y^2$.

4.1.4 Sfera ($x^2 + y^2 + z^2 = r^2$)

Sfera je površ u $\mathbb{R}^3$ definisana jednačinom $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$, gde su a, b, i c koordinate centra sfere, a r poluprečnik sfere. Opšta formula je $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

© 2024 - Marko Gordić