…me, ime, br. indeksa: REŠENJA I BODOVANJE 05.12.2021.

…jski program E1 E2 PR SW IT IN (zaokruži) **KOLOKVIJUM 1**

…adacima dato je više odgovora, a treba zaokružiti brojeve ispred tačnih odgovora. U jednom istom zadatku broj tačnih odgovora može biti 0,1,2,3,…,svi. U nekim zadacima ostavljena su prazna mesta za upisivanje odgovora. Na kraju testa su tri zadatka koji se rade u datoj svesci. Obavezno se predaje ovaj test i sveska.

4(2+2)

- Neka je $S = \{a, b\}$ i $f : S \to S$ i $(\forall x \in S)\ f(f(x)) = x$. Tada je $f : S \to S$ bijekcija. DA NE i njihov broj je 2

6 4 2 0

- $f \in \mathbb{R}[x]$ i $f(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) = 0$. Zaokruži tačno: **1)** $x^2 + 2x + 1 \mid f(x)$ **2)** $x - e^{i\frac{\pi}{4}} \mid f(x)$ **3)** $x - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \mid f(x)$ **4)** $x^2 - 2x + 2 \mid f(x)$ **5)** $x - 1 + i \mid f(x)$ **6)** $x - \sqrt{2}\, e^{i \operatorname{arctg} 1} \mid f(x)$ **7)** $x - i - 1 \mid f(x)$

4(2+2)

- Skup svih stepena sigurno svodljivih polinoma nad poljem $\mathbb{R}$ je $\{$ 3, 4, … $\}$, a nad poljem $\mathbb{C}$ je $\{$ 2, 3, 4, … $\}$.

4(2+2)

- Pri deljenju polinoma $x^4 - 2x^2 + 3$ sa $x^2 + 1$ nad $\mathbb{R}$, količnik je $x^2 - 3$, a ostatak je 6.

12

6×2

- Napisati Kejlijevu tablicu grupoida $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ i izračunati sledeće inverzne elemente:

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$(4 + 2^3)^{-1} =$ 3, $((-2)^{-1} + 3^3)^{-1} =$ 4, $1^{-1} =$ 1, $4^{-1} =$ 4, ~~$(2 + 2^3)^2 =$ 0~~ DA.

8 7 6 4 2 0

- Asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom koji nisu grupa su: **1)** $((0, 1), \cdot)$ **2)** $\left(\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}, \circ\right)$ **3)** $([0, 1], \cdot)$ **4)** $(\mathbb{C}, \cdot)$ **5)** $(\{0, 1\}, \cdot)$ **6)** $(\{-1, 1\}, \cdot)$ **7)** $(\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\}, \cdot)$ **8)** $((-1, 1), \cdot)$ **9)** $((0, \infty), \cdot)$ **10)** $([0, \infty), +)$

4 2 0

- Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ definisana sa $f(x) = 2^x$. Tada je: **1)** $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x^{-1}$ **2)** $f^{-1}(x) = \log_2 x$ **3)** $f^{-1}(x) = 2^{-x}$ **4)** $f^{-1}(x) = \frac{2}{x}$ **5)** $f^{-1}(x) = x^2$ **6)** $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ **7)** $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

11, …, 0

- Neka su ρ_i relacije skupa $\mathbb{R}$: $\rho_1 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R},\ y \in [x - 1, x + 1]\}$, $\rho_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \ \wedge\ y \geq 0\}$, $\rho_3 = \{(x, x + 1) | x \in \mathbb{R}\}$, $\rho_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^2 = x^2\}$,
Iza oznake svake od tih relacija zaokružiti samo ona slova koja označavaju svojstvo relacije koju ona poseduje: R- refleksivnost, S- simetričnost, A- antisimetričnost, T- tranzitivnost. F- funkcija.
ρ_1 : R S A T F ρ_2 : R S A T F ρ_3 : R S A T F ρ_4 : R S A T F

4(2+2)

- Ako su P i Q polinomi i $dg(P) = 3$ i $dg(Q) = 2$, tada je $dg(PQ) =$ 5 i $dg(P + Q) =$ 3

3

- Za svaku injektivnu funkciju f postoje skupovi A i B, takvi da je funkcija $f : A \to B$ bijektivna? **1)** uvek **2)** nikada **3)** samo pod još nekim uslovima

6 5 3 1 0

- Zaokružiti brojeve ispred tvrđenja koja su tačna u Bulovoj algebri. **1)** $(a + b)' = a' + b'$ **2)** $c + ab = (b + c)(a + c)$ **3)** $(a + a)' = a' + a'$ **4)** $1 + 1 = 0$ **5)** $(aa)' = a' + a'$ **6)** $1 + a = 0'$ **7)** $1 + a = 1 \cdot a$ **8)** $(ab)' = a' + b'$

6, …, 0

- $\arg(-3\pi) = \pi$ $\arg(2\pi) = 0$ $\arg(e^{i\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2}$ $\arg(3e^{3i}) = 3$ $\arg(5e^{5i}) = 5 - 2\pi$ $\arg(-2e^{i\frac{\pi}{2}}) = -\frac{\pi}{2}$ $\arg(e^{-i\pi}) = \pi$ $\arg(-13i) = -\frac{\pi}{2}$ $\arg(2i) = \pi/2$ $\arg(6) = 0$ $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$ $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$ $\arg(0) =$ / $\arg(-9) = \pi$

6 3 0

- Zaokružiti brojeve ispred tačnih jednakosti, gde je $z \in \mathbb{C}$: **1)** $\{z | -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\} = \{z | R_e(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$ **2)** $\{z | -\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{\pi}{2}\} = \{z | R_e(z) > 0\} \cup \{xi | x < 0\}$ **3)** $\{z | \arg z \geq 0\} = \{z | I_m(z) \geq 0\} \setminus \{0\}$

12

6×2

−11, na

- Navesti geometrijsku interpretaciju skupova A, B, C, D i sledećih kompleksnih funkcija $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kao i odgovoriti na pitanje injektivnosti i sirjektivnosti funkcija f i g.
$A = \{z | \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{z-\bar{z}}{2i}\}$ je prava - simetrala 1-og i 3-eg kvadranta: a = b
$B = \{z | z^2 = \bar{z} \ \wedge\ z \neq 0\}$ je $\{1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$
$C = \{z | |z| \leq 2 \ \wedge\ 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ je gornja ~~polukrug~~ $\setminus \{0\}$ (K(0, 2))
$D = \{z | |z| = |\bar{z}|\}$ je $\mathbb{C}$
$f(z) = -\bar{z}$ je osna simetrija u odnosu na Im-osu 1–1 na
$g(z) = z \cdot (-i)$ je rotacija oko 0 za $-\pi/2$ 1–1 na

4

- Ako je $z \in \mathbb{C}$ tada je $z^6 = 64 \Leftrightarrow z \in \{2, -2, 1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3},$ $1 - i\sqrt{3}$ $\}$

6 4 2 0

- Zaokružiti brojeve ispred injektivnih funkcija: **1)** $f : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = x^2$ **2)** $f : \mathbb{R} \to [0, \infty),\ f(x) = x^2$ **3)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3 - x$ **4)** $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to (0, \infty),\ f(x) = \operatorname{tg} x$ **5)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$ **6)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

$\boxed{\text{B}}$ **ALGEBRA - KOLOKVIJUM 1** **05.12.2021.**

1. Za skup $A = \{1, 2, 3, 4\}$ su permutacije $s_i : A \to A$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ definisane sa
$s_1 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}$, $s_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 \end{pmatrix}$, $s_4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$.
Ispitati sve aksiome komutativne grupe na $(S, \circ)$, gde je $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, a $\circ$ je kompozicija funkcija.

2. Naći normirani polinom $P(x)$ nad $\mathbb{R}$ petog stepena koji je deljiv sa $Q(x) = x^2 + 9$, jedan koren mu je $2i$, a ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x - 2$ je -10. Zatim polinom $P(x)$ faktorisati nad poljima realnih i kompleksnih brojeva.

3. Rešiti po $w \in \mathbb{C}$ jednačinu $w \cdot \overline{w} + 1 = i(w + \overline{w})$.

REŠENJA

1. Računajući kompozicije navedenih funkcija, dobijamo Kejlijevu tablicu grupoida $(S, \circ)$, gde se iz tablice vidi zatvorenost operacije $\circ$ na skupu S.

$\circ$	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4
s_2	s_2	s_3	s_4	s_1
s_3	s_3	s_4	s_1	s_2
s_4	s_4	s_1	s_2	s_3

Kompozicija funkcija je uvek asocijativna operacija (što je teorema), a komutativna je na skupu S jer je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. Neutralni element je s_1 jer je to identička funkcija skupa S, a vidi se i po tome što su mu vrsta i kolona jednaki graničnoj vrsti tj. koloni. Iz tablice vidimo da je $s_1^{-1} = s_1$, $s_2^{-1} = s_4$, $s_3^{-1} = s_3$ i $s_4^{-1} = s_2$. Dakle, $(S, \circ)$ je komutativna grupa.

2. Kako je $2i$ koren polinoma $P(x)$, to i $\overline{2i} = -2i$ mora biti koren polinoma $P(x)$, te je $P(x)$ deljiv i sa $(x - 2i)(x + 2i) = x^2 + 4$. Dakle, deljiv je sa $\left(x^2 + 9\right)\left(x^2 + 4\right)$. Kako je $P(x)$ polinom 5-og stepena, sledi da je oblika $P(x) = \left(x^2 + 9\right)\left(x^2 + 4\right)(x - \alpha)$. Ostatak pri deljenju $P(x)$ sa $x - 2$ je -10, što znači da je $P(2) = -10$. Uvrštavajući 2 u $P(x) = \left(x^2 + 9\right)\left(x^2 + 4\right)(x - \alpha)$ dobijamo
$P(2) = \left(2^2 + 9\right)\left(2^2 + 4\right)(2 - \alpha) = 208 - 104\alpha = -10$, odakle dobijamo $\alpha = \dfrac{218}{104} = \dfrac{109}{52}$.
Kako su koreni polinoma $x^2 + 9$ kompleksni brojevi $\pm 3i$, i s druge strane koreni polinoma $x^2 + 4$ su kompleksni brojevi $\pm 2i$, sledi da je $P(x) = \left(x^2 + 9\right)\left(x^2 + 4\right)\left(x - \dfrac{109}{52}\right)$ faktorizacija polinoma $P(x)$ nad $\mathbb{R}$, a faktorizacija nad $\mathbb{C}$ glasi $P(x) = (x - 3i)(x + 3i)(x - 2i)(x + 2i)\left(x - \dfrac{109}{52}\right)$. Pri tome je
$P(x) = x^5 - \dfrac{109}{52}x^4 + 13x^3 - \dfrac{109}{4}x^2 + 36x - \dfrac{981}{13}$.

3. Za $w = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ je
$w \cdot \overline{w} + 1 = i(w + \overline{w}) \quad \Leftrightarrow \quad (x + iy) \cdot (x - iy) + 1 = i((x + iy) + (x - iy))$
$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 1 = 2xi \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 + y^2 + 1\right) - 2xi = 0$
$\Leftrightarrow \quad \left(x^2 + y^2 + 1 = 0 \;\wedge\; -2x = 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x = 0 \;\wedge\; y^2 + 1 = 0\right)$,
gde ne postoji $y \in \mathbb{R}$ takvo da je $y^2 + 1 = 0$, te polazna jednačina nema rešenja po $z = x + iy \in \mathbb{C}$.