Informacioni inžnjering predmet: **Analiza 2** datum: 16.12.2023.

PREZIME I IME: ______________________________ BROJ INDEKSA: ____________

PREDISPITNE OBAVEZE 1

1. Izračunati sume brojnih redova:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$, po definiciji.

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$

$$=1-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{9}}+\cancel{\frac{1}{9}}-\cancel{\frac{1}{16}}+\cancel{\ldots}+\cancel{\frac{1}{k^2}}-\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$=1-\frac{1}{(k+1)^2}\xrightarrow[k\to\infty]{}1 \Rightarrow \boxed{S=1}$$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n}$, koristeći osobine konvergentih redova i formulu za sumu geometrijskog reda.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

2. Formulisati Dalamberov kriterijum za konvergenciju redova.

Neka je $\sum a_n$, $a_n\geq 0$ za sve $n\geq n_0$

Tada ako je: 1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ polazni red (K)

2) i 3) ...

Primenom Dalamberovog kriterijuma ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$. $=a_n$ (K)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)\cancel{!}}}{\frac{n^2}{\cancel{n!}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2(n+1)}=0<1$$

3. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}+2^n}{n^n}$. (D)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{n^{n-1}}}{\cancel{n^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ (D)} \quad (+) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{2}{n}\right)^n}_{a_n} \quad \sqrt[n]{a_n}=\frac{2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0<1$$

Koši (K)

4. Formulisati Vajerštrasov kriterijum za konvergenciju funkcionalnih redova.

predavanja

5. Ispitati da li važe sledeće jednakosti:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ne postoji a suma reda sa desne strane je 0 NE

DA jer važi zakon komutativnosti za AK redove

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-n}{2n+1}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-p(n)}{2p(n)+1}\right)^{p(n)}$ za proizvoljnu permutaciju p skupa $\mathbf{N}$.

$$a_n=\left(\frac{-n}{2n+1}\right)^n \Rightarrow |a_n|=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \qquad \sqrt[n]{|a_n|}=\frac{n}{2n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}<1$$

Koši $\Rightarrow$ A.K

6. Dat je stepeni red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,3^{n-1}}$.

a) Odrediti poluprečnik i interval konvergencije.

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}} \qquad r=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\,3^{n-1}}}{\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{n}=3$$

$-3 \quad 0 \quad 3$

$I=(-3,3)$

b) Ispitati konvergenciju na krajevima intervala i napisati oblast konvergencije.

$$x=3 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n} \quad \text{D} \qquad O=[-3,3)$$

$$x=-3 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n\cdot 3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n}{n} \quad \text{K (Lajbnic)}$$

7. Funkciju $f(x)=\cos(\frac{3\pi}{2}-5x)$ razviti u Maklorenov red u i napisati gde dobijeni razvoj konvergira.

$$f(x)=\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0}\cos 5x+\sin\frac{3\pi}{2}\sin 5x=-\sin 5x=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(5x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x\in\mathbb{R}$$

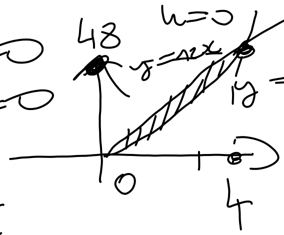
8. U sledećim dvostrukim integralima

a) promeniti redosled integracije:

$$I=\int_0^4 dx\int_{3x^2}^{12x}f(x,y)dy$$

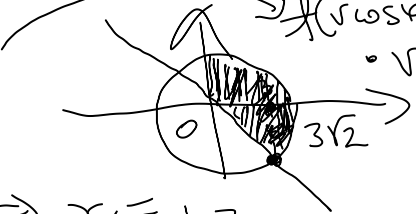
$$\cancel{12}x=\cancel{3}x^2 \qquad x^2-4x=0 \qquad x(x-4)=0$$

$$=\int_0^{48}dy\int_{y/12}^{\sqrt{y}/\sqrt{3}}f(x,y)dx$$



b) preći na polarne koordinate:

$$\int_0^3 dx\int_{-x}^{\sqrt{18-x^2}}f(x,y)dy+\int_3^{3\sqrt{2}}dx\int_{-\sqrt{18-x^2}}^{\sqrt{18-x^2}}f(x,y)dy=\int_0^{3\sqrt{2}}dr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,d\varphi$$



$$x^2+y^2=18 \qquad y=-x$$

$$x^2+(-x^2)=18$$

$$2x^2=18 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

9. Izračunavanje krivolinijskog integrala I vrste.

Neka je L. $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[a,b]$.

$$\int_L f(x,y)dl=\int_a^b f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{(x'(t))^2+y'(t)^2}\,dt$$

10. Primenom krivolinijskog integrala I vrste izračunati dužinu luka krive $L=L_1\cup L_2$ pri čemu je L_1 deo kružnice $(x-1)^2+y^2=1$ iznad x-ose, a $L_2=AB$, $A(0,0)$, $B(1,1)$.

$$\int_L=\int_{L_1}+\int_{L_2}=\pi+\sqrt{2}$$

L_1 $x=1+\cos t$, $y=\sin t$, $t\in[0,\pi]$

L_2 . $x=t$, $y=t$, $t\in[0,1]$