

$$(\neg\neg C \Rightarrow A) \Rightarrow ((C \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg C))$$

HILBERTOV SISTEM

Prema teoriji o dedukciji data formula je teorema ako važi

$$\neg C \Rightarrow A, C \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A), \neg B \vdash \neg C$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \neg C \Rightarrow A \\ 2. C \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \\ 3. \neg B \end{array} \right\} \text{Hyp}$$

$$4. (C \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow ((C \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)) \quad \text{Ax2}$$

$$5. (C \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A) \quad \text{MP}(2,4)$$

$$6. \neg B \Rightarrow (C \Rightarrow \neg B) \quad \text{Ax1}$$

$$7. C \Rightarrow \neg B \quad \text{MP}(3,6)$$

$$8. C \Rightarrow \neg A \quad \text{MP}(7,5)$$

$$9. C \Rightarrow \neg\neg C \quad \text{Th1}$$

$$10. C \Rightarrow A \quad \text{Th2 } (A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C)$$

$$11. (C \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow \neg C) \quad \text{Ax3}$$

$$12. (C \Rightarrow A) \Rightarrow \neg C \quad \text{MP}(8,11)$$

$$13. \neg C \quad \text{MP}(10,12)$$

$$(\neg \neg C \Rightarrow A) \Rightarrow ((C \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg C))$$

PRIRODNA DEDUKCIJA

1. $\neg \neg C \Rightarrow A$	pretp
2. $C \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	pretp
3. $\neg B$	pretp
4. C	pretp
5. $\neg B \Rightarrow \neg A$	$\Rightarrow E (4, 2)$
6. $\neg A$	$\Rightarrow E (3, 5)$
7. $\neg C$	$\neg I (4)$
8. A	$\Rightarrow E (7, 1)$
9. \perp	$\neg E (6, 8)$
10. $\neg C$	$\neg I (4-9)$
11. $\neg B \Rightarrow \neg C$	$\Rightarrow I (3-10)$
12. $(C \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg C)$	$\Rightarrow I (2-11)$

13. F

$\Rightarrow I (1-12)$

$$C \vdash \neg \neg C$$

1. C premissa

2. $\neg C$ pretp.

3. \perp $\neg E (1, 2)$

4. $\neg \neg C$ $\neg I (2-3)$