★ METOD REZOLUCIJE ★

1. **Primenom metoda rezolucije ispitati zadovoljivost formule:**

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg r$$

Rešenje: $S = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$

$C_1 = \{\neg p, \neg q, r\}$

$C_2 = \{\neg p, q\}$

$C_3 = \{p\}$

$C_4 = \{\neg r\}$

$C_5 = \{\neg p, r\}$ $(C_1; C_2)$

$C_6 = \{r\}$ $(C_3; C_5)$

$C_7 = \square$ $(C_4; C_6)$

Pošto smo primenom pravila rezolucije dobili praznu klauzu, polazni skup klauza S je nezadovoljiv.

2. **Ispitati zadovoljivost formule**

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge p$$

Rešenje: $S = \{C_1, C_2, C_3\}$

$C_1 = \{\neg p, \neg q, r\}$

$C_2 = \{\neg p, q\}$

$C_3 = \{p\}$

$C_4 = \{\neg q, r\}$ $(C_1; C_3)$

$C_5 = \{q\}$ (C_2, C_3)

$C_6 = \{r\}$ $(C_4; C_5)$

$C_7 = \{\neg p, r\}$ $(C_1; C_2)$

$(C_1; C_5) \to \{\neg p, r\}$

$(C_2; C_4) \to \{\neg p, r\}$

$(C_3; C_7) \to \{r\}$

Pošto nije moguće dobiti klauzu koja se već ne nalazi u skupu, sledi da je skup S zadovoljiv

3. **Primenom metoda rezolucije ispitati da li je formula tautologija:**

$$F : q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Rešenje:

Data formula je tautologija ako je njena negacija nezadovoljiva.

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv \neg(q \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \\
&\equiv \neg(\neg q \vee (p \Rightarrow q)) \\
&\equiv \neg(\neg q \vee (\neg p \vee q)) \\
&\equiv \neg\neg q \wedge \neg\neg p \wedge \neg q \\
&\equiv q \wedge p \wedge \neg q
\end{aligned}$$

$S = \{C_1, C_2, C_3\}$

$C_1 = \{q\}$

$C_2 = \{p\}$

$C_3 = \{\neg q\}$

$C_4 = \square \qquad (C_1; C_3)$

Sledi da je skup S, odnosno formula $\neg F$ nezadovoljiva, pa je formula F tautologija.

4. **Primenom metoda rezolucije ispitati da li je formula tautologija:**

$$F : (p \Rightarrow (q \vee r)) \Rightarrow r$$

Rešenje:

Posmatramo negaciju date formule i transformišemo je u KNF

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv \neg((p \Rightarrow (q \vee r)) \Rightarrow r) \\
&\equiv \neg(\neg(p \Rightarrow (q \vee r)) \vee r) \\
&\equiv \neg(\neg(\neg p \vee (q \vee r)) \vee r) \\
&\equiv \neg\neg(\neg p \vee q \vee r) \wedge \neg r \\
&\equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge \neg r
\end{aligned}$$

$S = \{C_1, C_2\}$

$C_1 = \{\neg p, q, \underline{\underline{r}}\}$

$C_2 = \{\underline{\underline{\neg r}}\}$

$C_3 = \{\neg p, q\}$ $\quad (C_1; C_2)$

Ne možemo više da primenimo pravilo rezolucije, a nismo dobili praznu klauzu. To znači da je skup S zadovoljiv, pa je i formula $\neg F$ zadovoljiva, odakle je formula F poreciva, tj. nije tautologija.

5. **Primenom metoda rezolucije ispitati da li je formula tautologija:**

$$F : ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Rešenje:

Posmatramo negaciju formule F i transformišemo je u KNF

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv \neg(((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \\
&\equiv \neg(\neg((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \vee (p \Rightarrow r)) \\
&\equiv \neg(\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \vee (\neg p \vee r)) \\
&\equiv \neg\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)) \wedge \neg(\neg p \vee r) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg\neg p \wedge \neg r) \\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg r
\end{aligned}$$

$S = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$

$C_1 = \{\neg p, q\}$

$C_2 = \{\neg q, r\}$

$C_3 = \{p\}$

$C_4 = \{\neg r\}$

$C_5 = \{\neg p, r\}$ $(C_1; C_2)$

$C_6 = \{r\}$ $(C_3; C_5)$

$C_7 = \square$ $(C_4; C_6)$

Pošto smo dobili praznu klauzu, skup S je nezadovoljiv, što važi i za formulu $\neg F$, pa je formula F tautologija

★ Hilbertov (aksiomatski) sistem ★

1. **Za proizvoljnu iskaznu formulu A dokazati da je $A \Rightarrow A$ teorema u Hilbertovom sistemu.**

Rešenje:

1.	$\boxed{A \Rightarrow (A \Rightarrow A)}$	(A1)	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$; $A = A$, $B = A$
2.	$\boxed{(A \Rightarrow (\underbrace{(A \Rightarrow A)}_{B} \Rightarrow \underbrace{A}_{C}))} \Rightarrow ((A \Rightarrow \underbrace{(A \Rightarrow A)}_{B}) \Rightarrow (A \Rightarrow \underbrace{A}_{C}))$	(A2)	$A = A$, $B = A \Rightarrow A$, $C = A$
3.	$\boxed{A \Rightarrow (\underbrace{(A \Rightarrow A)}_{B} \Rightarrow A)}$	(A1)	$A = A$, $B = A \Rightarrow A$
4.	$(\boxed{A \Rightarrow (A \Rightarrow A)}) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$	MP(3,2)	
5.	$A \Rightarrow A$	MP(1,4)	

2. **Dokazati**

   a) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$

   b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), B \vdash A \Rightarrow C$

Rešenje:

a) Pokazaćemo da važi $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \vdash C$

1.	$A \Rightarrow B$	Hyp
2.	$B \Rightarrow C$	Hyp
3.	A	Hyp
4.	B	MP(3,1)
5.	C	MP(4,2)

Dokazali smo $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \vdash C$, pa na osnovu teoreme o dedukciji važi $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$.

b) Dokažimo da važi $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), B, A \vdash C$

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ Hyp
2. B Hyp
3. A Hyp
4. $B \Rightarrow C$ MP(3,1)
5. C MP(2,4)

Sada na osnovu t-me o dedukciji važi

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C), B \vdash A \Rightarrow C$$

3. **Dokazati** $\neg\neg B \Rightarrow B$**.**

Rešenje:

Pokazujemo $\neg\neg B \vdash B$

1. $\neg\neg B$ Hyp
2. $(\neg B \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B)$ (A3) $B = B$, $A = \neg B$
3. $\neg\neg B \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg\neg B)$ (A1) $A = \neg\neg B$, $B = \neg B$
4. $\neg B \Rightarrow \neg\neg B$ MP(1,3)
5. $(\neg B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B$ MP(4,2)
6. $\neg B \Rightarrow \neg B$ Tn (zad 1)
7. B MP(6,5)

$\neg\neg B \vdash B \Rightarrow$ prema t-mi o dedukciji važi $\vdash \neg\neg B \Rightarrow B$

4. **Dokazati** $\vdash B \Rightarrow \neg\neg B$

Rešenje:

Pokazujemo $B \vdash \neg\neg B$

1.	B	Hyp	
2.	$(\neg\neg\neg B \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg\neg\neg B \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\neg B)$	(A3)	$B = \neg\neg B$, $A = B$
3.	$\neg\neg\neg B \Rightarrow \neg B$	Th (zad 3)	
4.	$(\neg\neg\neg B \Rightarrow B) \Rightarrow \neg\neg B$	MP(3,2)	
5.	$B \Rightarrow (\neg\neg\neg B \Rightarrow B)$	(A1)	$A = B$, $B = \neg\neg\neg B$
6.	$\neg\neg\neg B \Rightarrow B$	MP(1,5)	
7.	$\neg\neg B$	MP(6,4)	

$B \vdash \neg\neg B \rightsquigarrow \vdash B \Rightarrow \neg\neg B$

5. **Dokažimo**

$$\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Rešenje:

Pokazujemo $\neg A, A \vdash B$

1.	$\neg A$	Hyp	
2.	A	Hyp	
3.	$A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$	(A1)	$A = A$, $B = \neg B$
4.	$\neg B \Rightarrow A$	MP(2,3)	
5.	$\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	(A1)	$A = \neg A$, $B = \neg B$
6	$\neg B \Rightarrow \neg A$	MP(1,5)	
7	$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$	(A3)	
8.	$(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B$	MP(6,7)	
9	B	MP(4,8)	

$\neg A, A \vdash B \longrightarrow \vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

6. Dokazati:

   a) $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

   b) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Rešenje:

a) Dokažimo $\neg B \Rightarrow \neg A, A \vdash B$

1. $\neg B \Rightarrow \neg A$	Hyp
2. A	Hyp
3. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$	(A3)
4. $(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B$	MP (1,3)
5. $A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$	(A1) $A = A$, $B = \neg B$
6. $\neg B \Rightarrow A$	MP(2,5)
7. B	MP (6,4)

Prema t-mi o dedukciji sledi $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

b) Dokažimo $A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A$

1. $A \Rightarrow B$	Hyp
2. $\neg\neg A \Rightarrow A$	Th (zad 3)
3. $\neg\neg A \Rightarrow B$	zad 2(a) (2,1)
4. $B \Rightarrow \neg\neg B$	Th (zad 4)
5. $\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B$	zad 2(a) (3,4)
6. $(\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	Th (zad 6(a))
7. $\neg B \Rightarrow \neg A$	MP(5,6)

$A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A \longrightarrow \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

7. Dokazati: $A \Rightarrow B, \neg A \Rightarrow B \vdash B$

Rešenje:

1. $A \Rightarrow B$ — Hyp
2. $\neg A \Rightarrow B$ — Hyp
3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ — Th (zad 6(b))
4. $\neg B \Rightarrow \neg A$ — MP (1,3)
5. $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg\neg A)$ — Th (zad 6(b))
6. $\neg B \Rightarrow \neg\neg A$ — MP (2,5)
7. $(\neg B \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow B)$ — (A3) $A = \neg A$, $B = B$
8. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow B$ — MP(6,7)
9. B — MP(4,8)