

Klasifikacija singulariteta

1. Ispitati prirodu singulariteta sledećih funkcija i naći ostatke u njima:

$$\text{a) } f(z) = \frac{e^z - 1}{z}; \quad \text{b) } f(z) = \frac{1}{z^5 + z^3}; \quad \text{c) } f(z) = \frac{\sin z}{z^2}; \quad \text{d) } f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}.$$

Rešenje:

a) Singularitet funkcije $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ je $z = 0$.

1. način: Nula imenioca i brojioca funkcije $f(z)$ je $z = 0$ jednostruka nula, tako da dobijamo da je $z = 0$ prividan singularitet, a ostatak je $\text{Res}(f(z), 0) = 0$.

2. način: Razvijemo funkciju u Loranov red u okolini te tačke:

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \cdot e^z - \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!},$$

odavde sledi da je $z = 0$ prividan singularitet i $\text{Res}(f(z), 0) = 0$.

3. način: Kako je

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

sledi da je $z = 0$ prividan singularitet i $\text{Res}(f(z), 0) = 0$.

b) Singulariteti funkcije $f(z) = \frac{1}{z^3(z-i)(z+i)}$ su $z = 0$, $z = i$ i $z = -i$.

Nule imenioca racionalne funkcije $f(z)$ su $z = 0$ trostruka nula, $z = i$ i $z = -i$ jednostruke nule, pa kako u ovim tačkama brojilac nije nula, dobijamo da je $z = 0$ pol trećeg reda, a $z = i$ i $z = -i$ polovi prvog reda.

$$\text{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left(z^3 \cdot \frac{1}{z^3(z-i)(z+i)} \right)'' = \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{z^2 + 1} \right)'' \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2(3z^2 - 1)}{(z^2 + 1)^3} = -1$$

$$\text{Res}(f(z), i) = \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z \rightarrow i} \left((z-i) \cdot \frac{1}{z^3(z-i)(z+i)} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z^3(z+i)} = \frac{1}{i^3 \cdot 2i} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Res}(f(z), -i) = \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z \rightarrow -i} \left((z+i) \cdot \frac{1}{z^3(z-i)(z+i)} \right) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{z^3(z-i)} = \frac{1}{(-i)^3 \cdot (-2i)} = \frac{1}{2}$$

$$(*) \left(\frac{1}{z^2 + 1} \right)' = \frac{-2z}{(z^2 + 1)^2}$$

$$\left(\frac{1}{z^2 + 1} \right)'' = \left(\frac{-2z}{(z^2 + 1)^2} \right)' = \frac{-2(z^2 + 1)^2 + 2z \cdot 2(z^2 + 1) \cdot 2z}{(z^2 + 1)^4} = \frac{-2z^2 - 2 + 8z^2}{(z^2 + 1)^3} = \frac{2(3z^2 - 1)}{(z^2 + 1)^3}$$

c) Singularitet funkcije $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ je $z = 0$.

Nula imenioca funkcije $f(z)$ je $z = 0$ dvostruka nula, a nula brojioca je $z = 0$ jednostruka nula, tako da dobijamo da je $z = 0$ pol prvog reda.

$$\text{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \cdot \frac{\sin z}{z^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

d) Singularitet funkcije $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ je $z = 0$.

Nula imenioca i brojioca funkcije $f(z)$ je $z = 0$ dvostruka nula, tako da dobijamo da je $z = 0$ prividan singularitet, a ostatak je $\text{Res}(f(z), 0) = 0$.

2. Ispitati prirodu singulariteta sledećih funkcija u proširenoj kompleksnoj ravni i naći ostatke u njima:

$$\text{a) } f(z) = \frac{z^2 + 2z + 5}{z}; \quad \text{b) } f(z) = e^{\frac{2z-1}{2-z}}.$$

Rešenje:

- a) Funkcija $f(z) = \frac{z^2 + 2z + 5}{z} = z + 2 + \frac{5}{z}$ ima pol prvog reda u tački $z = 0$ i njen ostatak je $\text{Res}(f(z), 0) = 5$.

Tačka $z = \infty$ je singularna, jer funkcija $f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u} + 2 + 5u$ ima pol prvog reda u tački $u = 0$, samim tim funkcija $f(z)$ ima pol prvog reda u $z = \infty$ i njen ostatak je $\text{Res}(f(z), \infty) = -\text{Res}(f(z), 0) = -5$.

- b) Funkcija $f(z) = e^{\frac{2z-1}{2-z}}$ ima esencijalni singularitet u tački $z = 2$ što se vidi iz njenog razvoja u Loranov red u okolini te tačke:

$$f(z) = e^{\frac{2z-1}{2-z}} = e^{\frac{-2(2-z)+3}{2-z}} = e^{-2} \cdot e^{\frac{3}{2-z}} = e^{-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{(-3)^n}{(z-2)^n},$$

i njen ostatak je $\text{Res}(f(z), 2) = a_{-1} = -\frac{3}{e^2}$.

Tačka $z = \infty$ je regularna, jer je $f\left(\frac{1}{u}\right) = e^{\frac{\frac{2}{u}-1}{2-\frac{1}{u}}} = e^{\frac{2-u}{2u-1}}$ analitička funkcija u tački $u = 0$ i njen ostatak je $\text{Res}(f(z), \infty) = -\text{Res}(f(z), 2) = \frac{3}{e^2}$.

3. Ispitati prirodu singulariteta funkcije $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ i naći ostatke u njima.

Rešenje: Funkcija $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ ima singularitet u tačkama gde je $z(e^z - 1) = 0$, odnosno kada je $z = 0$ ili $e^z - 1 = 0$. Tako dobijamo u tački $z = 0$ pol drugog reda, i u tačkama $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ polovi prvog reda. Njihovi ostaci su:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), 0) &= \frac{1}{1!} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left(z^2 \cdot \frac{1}{z(e^z - 1)} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{e^z - 1} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1 - z \cdot e^z}{(e^z - 1)^2} \\ &\stackrel{LP}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - e^z - z \cdot e^z}{2(e^z - 1) \cdot e^z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z}{2(e^z - 1)} \stackrel{LP}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{2e^z} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), 2k\pi i) &= \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z \rightarrow 2k\pi i} \left((z - 2k\pi i) \cdot \frac{1}{z(e^z - 1)} \right) = \lim_{z \rightarrow 2k\pi i} \frac{z - 2k\pi i}{z(e^z - 1)} \stackrel{LP}{=} \lim_{z \rightarrow 2k\pi i} \frac{1}{e^z + ze^z - 1} \\ &= \frac{1}{2k\pi i \cdot e^{2k\pi i}} = -\frac{i}{2k\pi}. \end{aligned}$$

4. Izračunati $\int_C \frac{e^z}{z \cdot (z^2 + 16)} dz$, ako je $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = r, r > 0, r \neq 3, r \neq 5\}$ pozitivno orijentisana.

Rešenje: Neka je $f(z) = \frac{e^z}{z \cdot (z^2 + 16)}$. Singulariteti funkcije $f(z)$ su $z_1 = 0$, $z_2 = 4i$ i $z_3 = -4i$. Sva tri singulariteta su polovi prvog reda (jednostruka nula imenioca funkcije $f(z)$ i nije nula brojioca funkcije $f(z)$). Odgovarajući reziduumi u singularitetima su:

$$\text{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \cdot \frac{e^z}{z(z^2 + 16)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{z^2 + 16} = \frac{1}{16};$$

$$\text{Res}(f(z), 4i) = \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z \rightarrow 4i} \left((z - 4i) \cdot \frac{e^z}{z(z - 4i)(z + 4i)} \right) = \lim_{z \rightarrow 4i} \frac{e^z}{z(z + 4i)} = \frac{e^{4i}}{4i \cdot 8i} = -\frac{e^{4i}}{32};$$

$$\text{Res}(f(z), -4i) = \frac{1}{0!} \cdot \lim_{z \rightarrow -4i} \left((z + 4i) \cdot \frac{e^z}{z(z - 4i)(z + 4i)} \right) = \lim_{z \rightarrow -4i} \frac{e^z}{z(z - 4i)} = \frac{e^{-4i}}{-4i \cdot (-8i)} = -\frac{e^{-4i}}{32}.$$

U zavisnosti od vrednosti za r razlikujemo sledeće slučajeve.

Za $0 < r < 3$:

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (f(z) \text{ je analitička u oblasti } C \cup \text{int}(C));$$

za $3 < r < 5$:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) = \frac{2\pi i}{16} = \frac{\pi i}{8};$$

za $r > 5$:

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f(z), 0) + \operatorname{Res}(f(z), 4i) + \operatorname{Res}(f(z), -4i)) = 2\pi i \left(\frac{1}{16} - \frac{e^{4i}}{32} - \frac{e^{-4i}}{32} \right) \\ &= \pi i \cdot \frac{2 - e^{4i} - e^{-4i}}{16} = \frac{\pi i (1 - \cos 4)}{8}. \end{aligned}$$

5. Izračunati $\int_C \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-1)^2} dz$, ako je $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ pozitivno orijentisana.

Rešenje: Neka je $f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-1)^2}$. Singulariteti funkcije $f(z)$ su $z_1 = 1$ i $z_2 = 0$. Tačka $z_1 = 1$ je pol drugog reda (dvostruka nula imenioca funkcije $f(z)$ i nije nula brojioca funkcije $f(z)$). Tačka $z_2 = 0$ je esencijalni singularitet. Odgovarajući reziduumi u singularitetima su:

$$\operatorname{Res}(f(z), 1) = \frac{1}{1!} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \left((z-1)^2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-1)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\sin \frac{1}{z} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \sin \frac{1}{z} = -\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{1}{z}}{z^2} = -\cos 1;$$

Da bi našli $\operatorname{Res}(f(z), 0)$ moramo naći koeficijent a_{-1} uz $\frac{1}{z}$ u Loranovom razvoju. Stoga imamo

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \left(\frac{1}{z-1} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot z^n,$$

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}},$$

$$f(z) = (1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots) \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3! \cdot z^3} + \frac{1}{5! \cdot z^5} - \frac{1}{7! \cdot z^7} + \dots \right).$$

Oдавde dobijamo da je:

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = a_{-1} = 1 - \frac{3}{3!} + \frac{5}{5!} - \frac{7}{7!} + \dots = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \cos 1.$$

Tako da je

$$\int_C \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f(z), 1) + \operatorname{Res}(f(z), 0)) = 2\pi i (-\cos 1 + \cos 1) = 0.$$