★ Sistem prirodne dedukcije za predikatsku logiku ★

Sistem prirodne dedukcije za predikatsku logiku je proširenje sistema prirodne dedukcije za iskaznu logiku pravilima na slici 1.

$$\frac{\mathcal{A}[x \mapsto y]}{(\forall x)\mathcal{A}}\ \forall I \qquad\qquad \frac{(\forall x)\mathcal{A}}{\mathcal{A}[x \mapsto t]}\ \forall E$$

uz dodatni uslov

$$\frac{\mathcal{A}[x \mapsto t]}{(\exists x)\mathcal{A}}\ \exists I \qquad\qquad \frac{(\exists x)\mathcal{A} \qquad \begin{array}{c}[\mathcal{A}[x \mapsto y]]^u \\ \vdots \\ \mathcal{B}\end{array}}{\mathcal{B}}\ \exists E, u$$

uz dodatni uslov

Slika 1:

Dodatni uslovi:

- u pravilima $\forall E$ i $\exists I$ je t proizvoljan term;
- u pravilu $\forall I$ za promenljivu y važi da je ili $x = y$ ili nije slobodna u formuli A, kao i da nije slobodna ni u jednoj neoslobođenoj pretpostavci u izvođenju formule $A[x \mapsto y]$;
- u pravilu $\exists E$ za promenljivu y važi da je ili $x = y$ ili nije slobodna u formuli A, kao i da ne sme biti slobodna ni u formuli B niti u nekoj neoslobođenoj pretpostavci u izvođenju formule B, osim eventualno u formuli $A[x \mapsto y]$.

Način zapisa dokaza je kao i u iskaznoj logici. Dokaz možemo predstaviti u linearnom zapisu ili u obliku stabla, u čijem korenu je formula koju izvodimo. Ako nema neoslobođenih pretpostavki onda je izvedena formula teorema. Ako imamo formule koje su neoslobođene pretpostavke onda je izvedena formula deduktivna posledica tih formula.

1. **Dokazati da je naredna formula teorema u sistemu prirodne dedukcije za logiku prvog reda**

$$\Big((\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)\Big) \Rightarrow \Big((\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)\Big).$$

Rešenje:

Dokaz možemo zapisati na sledeći način:

1	$(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$	pretpostavka
2	$(\forall x)P(x)$	pretpostavka
3	$P(x') \Rightarrow Q(x')$	$\forall E$, 1
4	$P(x')$	$\forall E$, 2
5	$Q(x')$	$\Rightarrow E$, 4, 3
6	$(\forall x)Q(x)$	$\forall I$, 5
7	$(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)$	$\Rightarrow I$, $2-6$
8	$\Big((\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)\Big) \Rightarrow \Big((\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)\Big)$	$\Rightarrow I$, $1-7$

ili u obliku stabla:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\big[(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)\big]^1}{P(x') \Rightarrow Q(x')}\,\forall E \qquad \dfrac{[(\forall x)P(x)]^2}{P(x')}\,\forall E}{Q(x')}\Rightarrow E}{(\forall x)Q(x)}\,\forall I}{(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)}\Rightarrow I, 2}{\Big((\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)\Big) \Rightarrow \Big((\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)\Big)}\Rightarrow I, 1$$

Objašnjenje. Zbog strukture formule, najpre uvedemo dve pretpostavke

$$\big[(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)\big]^1 \quad \text{i} \quad [(\forall x)P(x)]^2.$$

Za proizvoljnu promenljivu x' (koja nije slobodna u formulama $Q(x)$, $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ i $(\forall x)P(x)$), iz prve pretpostavke možemo izvesti $P(x') \Rightarrow Q(x')$ na osnovu pravila $\forall E$, slično i za drugu pretpostavku. Sada na osnovu pravila $\Rightarrow E$, možemo da izvedemo $Q(x')$. Međutim, kako je x' proizvoljna promjenljiva, na poslednju formulu možemo da primenimo pravilo $\forall I$ i dobijamo formulu $(\forall x)Q(x)$. Na kraju dva puta primenimo pravilo uvođenje implikacije, pri čemu se oslobađamo pretpostavki koje smo uveli na početku. Kako nema neoslobođenih pretpostavki, izvedena formula je teorema u sistemu prirodne dedukcije za logiku prvog reda.

2. **Dokazati da je naredna formula teorema u sistemu prirodne dedukcije za logiku prvog reda**
$$(\forall x)(A \land B) \Rightarrow \Big((\forall x)A \land (\forall x)B\Big).$$

Rešenje:

Formule A i B ćemo zapisati kao $A(x)$ i $B(x)$, te ćemo za formulu

$$(\forall x)\big(A(x) \land B(x)\big) \Rightarrow \Big((\forall x)A(x) \land (\forall x)B(x)\Big)$$

pokazati da je teorema. Umesto $A[x \mapsto x']$ ćemo pisati $A(x')$ i slično za formulu B, gde je x' proizvoljna promenljiva koja nije slobodna u formulama A i B.

Dokaz ove teoreme je sledeći niz:

1	$(\forall x)\big(A(x) \land B(x)\big)$	pretpostavka
2	$A(x') \land B(x')$	$\forall E$, 1
3	$A(x')$	$\land E_1$, 2
4	$B(x')$	$\land E_2$, 2
5	$(\forall x)A(x)$	$\forall I$, 3
6	$(\forall x)B(x)$	$\forall I$, 4
7	$(\forall x)A(x) \land (\forall x)B(x)$	$\land I$, 5, 6
8	$(\forall x)\big(A(x) \land B(x)\big) \Rightarrow \Big((\forall x)A(x) \land (\forall x)B(x)\Big)$	$\Rightarrow I$, $1-7$

ili kao stablo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\big[(\forall x)\big(A(x) \land B(x)\big)\big]^1}{A(x') \land B(x')}\,\forall E}{A(x')}\,\land E}{(\forall x)A(x)}\,\forall I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\big[(\forall x)\big(A(x) \land B(x)\big)\big]^1}{A(x') \land B(x')}\,\forall E}{B(x')}\,\land E}{(\forall x)B(x)}\,\forall I}{(\forall x)A(x) \land (\forall x)B(x)}\,\land I}{(\forall x)\big(A(x) \land B(x)\big) \Rightarrow \Big((\forall x)A(x) \land (\forall x)B(x)\Big)}\,\Rightarrow I, 1$$

Kako nema neoslobođenih pretpostavki, izvedena formula je teorema.

3. **Dokazati da je naredna formula teorema u sistemu prirodne dedukcije za logiku prvog reda**

$$(\forall x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\exists x)A \Rightarrow (\exists x)B).$$

Rešenje:

Kao i u prethodnom zadatku formulu A zapisujemo kao $A(x)$, pa umesto $A[x \mapsto x']$ pišemo $A(x')$. Slično za formulu B.

Dokaz je sledeći niz:

1	$(\forall x)\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)$	pretpostavka
2	$(\exists x)A(x)$	pretpostavka
3	$A(x')$	pretpostavka
4	$A(x') \Rightarrow B(x')$	$\forall E$, 1
5	$B(x')$	$\Rightarrow E$, $3, 4$
6	$(\exists x)B(x)$	$\exists I$, 5
7	$(\exists x)B(x)$	$\exists E$, $2, 3-6$
8	$(\forall x)A(x) \Rightarrow (\forall x)B(x)$	$\Rightarrow I$, $2-7$
9	$(\forall x)\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big) \Rightarrow \Big((\exists x)A(x) \Rightarrow (\exists x)B(x)\Big)$	$\Rightarrow I$, $1-8$

odnosno stablo:

$$\dfrac{\dfrac{[(\exists x)A(x)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\big[(\forall x)\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)\big]^1}{A(x') \Rightarrow B(x')}\,\forall E \qquad [A(x')]^3}{B(x')}\,\Rightarrow E}{(\exists x)B(x)}\,(\exists I)}{\dfrac{(\exists x)B(x)}{(\exists x)A(x) \Rightarrow (\exists x)B(x)}\,\Rightarrow I, 2}\,\exists E, 3}{(\forall x)\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big) \Rightarrow \Big((\exists x)A(x) \Rightarrow (\exists x)B(x)\Big)}\,\Rightarrow I, 1$$

Kao i ranije promjenljivu x' smo izabrali tako da nije slobodna u formulama A i B, i ona zaista zadovoljava sve dodatne uslove kod pravila kod kojih postoje dodatni uslovi.

U stablu nema neoslobođenih pretpostavki, te je izvedena formula teorema u sistemu prirodne dedukcije za logiku prvog reda.