Binomni Koeficijenti

Marko Gordić - IN 37/2023

Osnovni principi binomnih koeficijenata

Definicija binomnog koeficijenta

Binomni koeficijent označava broj načina izbora k elemenata iz skupa sa n elemenata:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Svojstvo simetrije

Za svaki n i k važi:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Pascalov identitet

Binomni koeficijenti ispunjavaju sledeću rekurzivnu formulu:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Zbir svih binomnih koeficijenata

Suma svih binomnih koeficijenata za zadati n iznosi:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Zbir sa koeficijentima

Zbir binomnih koeficijenata pomnoženih sa k je:

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

Binomna teorema

Osnovna formula binomne teoreme

Za svaki n i x, y, proširenje binoma glasi:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Specijalni slučaj binomne teoreme

Ako je $x = 1$ i $y = 1$:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Newtonova teorema

Proširenje za negativne eksponente

Za $|x| < 1$ i svaki realan r:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k, \quad \text{gde je} \quad \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}$$

Identiteti sa binomnim koeficijentima

Vandermondova formula

Za sve m i n:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$$

Identitet sa produktom

Produkt uzastopnih binomnih koeficijenata:

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \cdot \binom{n-m}{k-m}$$

Aplikacija u kombinatorici

Broj podskupova

Broj podskupova veličine k iz skupa od n elemenata:

$$\binom{n}{k}$$

Broj načina raspodele kuglica u kutije

Broj načina da se n identičnih kuglica raspodeli u k različitih kutija:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Kombinacije sa ponavljanjem

Broj neuredjenih izbora k elemenata iz n elemenata (sa ponavljanjem):

$$\binom{n+k-1}{k}$$