

## PRINCIP UKLJUČENJA-ISKLUČENJA

1. U razredu ima 30 učenika. Ocenu 5 iz matematike ima njih 15, iz fizike 13, iz hemije 12, iz matematike i fizike 8, iz fizike i hemije 6, iz hemije i matematike 7, i iz sva 3 predmeta 3 učenika.
- (a) Koliko učenika nema peticu ni iz jednog od ovih predmeta?
- (b) Koliko učenika ima peticu iz tačno jednog predmeta?

*Rešenje:* Označimo sa  $M$ ,  $F$  i  $H$  skupove svih učenika sa peticom iz matematike, fizike i hemije, redom.

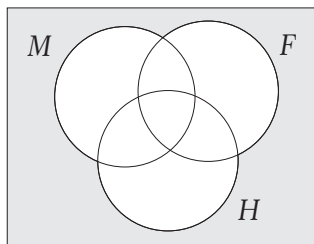
- (a) Traženi broj učenika koji nemaju peticu ni iz jednog od ovih predmeta dobijamo kada od ukupnog broja učenika u odeljenju oduzmemo broj učenika koji imaju peticu iz bar jednog od ova tri predmeta, tj.  $30 - |M \cup F \cup H|$ . Primenjujući princip uključenja-isključenja dobijamo da je taj broj jednak:

$$\begin{aligned} 30 - (|M| + |F| + |H| - |M \cap F| - |M \cap H| - |F \cap H| + |M \cap F \cap H|) \\ = 30 - (15 + 13 + 12 - 8 - 7 - 6 + 3) = 30 - 22 = 8. \end{aligned}$$

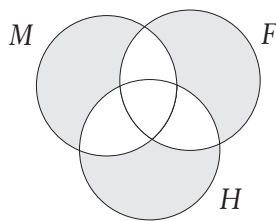
- (b) Broj učenika sa peticom iz tačno jednog predmeta ćemo naći kada od broja učenika sa peticom iz **bar jednog** predmeta oduzmemo broj onih koji imaju peticu iz **bar dva** predmeta. Broj učenika sa peticom iz **bar jednog** predmeta smo odredili u zadatku pod (a) i njihov broj je  $|M \cup F \cup H| = 22$ . Koliko ima učenika sa peticom iz **bar dva** predmeta ćemo izračunati na sledeći način:

$$|M \cap F| + |M \cap H| + |F \cap H| - 2|M \cap F \cap H| = 8 + 7 + 6 - 2 \cdot 3 = 15.$$

Dobijamo da je broj učenika sa peticom iz tačno jednog predmeta  $22 - 15 = 7$ .

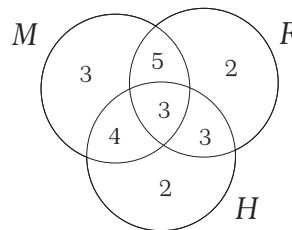


(a)



(b)

*Napomena:* Primetimo da smo do rešenja zadatka mogli doći i preko Venovog dijagrama. Čitamo sa Venovog dijagrama da je broj učenika koji imaju peticu bar iz jednog od ova tri predmeta  $3 + 5 + 2 + 4 + 3 + 3 + 2 = 22$ . Ostatak učenika, njih osmoro, nema peticu ni iz jednog od ova tri predmeta. Vidimo dalje da 3 učenika ima peticu samo iz matematike, 2 učenika samo iz fizike i 2 učenika samo iz hemije. Dakle, 7 učenika ima peticu iz tačno jednog predmeta.



2. Koliko ima prirodnih brojeva od 1 do 1000 koji nisu deljivi ni sa 2, ni sa 3, ni sa 5?

*Rešenje:* Neka su  $S_2$ ,  $S_3$  i  $S_5$  skupovi svih prirodnih brojeva manjih ili jednakih od 1000 koji su deljivi sa dva, tri i pet, redom. Broj elemenata ovih skupova označićemo sa  $N(S_2)$ ,  $N(S_3)$  i  $N(S_5)$ , respektivno, dok oznaku  $N(S_i S_j)$  koristimo za broj elemenata koji pripadaju preseku skupova  $S_i$  i  $S_j$ . Brojeva koji nisu deljivi ni sa 2, ni sa 3, ni sa 5, u oznaci  $N(S'_2 S'_3 S'_5)$ , ima

$$\begin{aligned} N(S'_2 S'_3 S'_5) &= 1000 - |S_2 \cup S_3 \cup S_5| \\ &= 1000 - N(S_2) - N(S_3) - N(S_5) \\ &\quad + N(S_2 S_3) + N(S_2 S_5) + N(S_3 S_5) - N(S_2 S_3 S_5) \\ &= 1000 - \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor \\ &\quad + \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor \\ &= 1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33 \\ &= 1000 - 734 = 266. \end{aligned}$$

3. Koliko ima celih brojeva od 1 do 1000 koji su deljivi sa 3, a nisu deljivi ni sa 5, ni sa 7? (domaći)

*Rešenje:* Neka je  $S$  skup celih brojeva od 1 do 1000 koji su deljivi sa 3, i označimo njihov broj sa  $N = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$ . Označimo dalje sa  $S_5$  i  $S_7$  podskupove skupa  $S$  koji sadrže sve brojeve koji su redom deljivi sa pet i sedam. Koristeći oznake uvedene u prethodnom zadatku, dobijamo da brojeva koji nisu deljivi ni sa 5, ni sa 7, u skupu  $S$  ima

$$\begin{aligned} N(S'_5 S'_7) &= N - N(S_5) - N(S_7) + N(S_5 S_7) \\ &= \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor \\ &= 333 - 66 - 47 + 9 = 229. \end{aligned}$$

4. Dati kombinatornu interpretaciju izračunavanja vrednosti promenljive  $s$  na kraju izvršavanja koda napisanog u programskom jeziku JAVA:

```
public class Deljivost{
    public static void main(String[] args) {
        int s=0;
        for (int i=1000; i<=9999; i++){
            int a=i/1000;
            int b=(i%1000)/100;
            int c=(i%100)/10;
            int d=i%10;
            int o=(a+b+c+d)%3;
        }
    }
}
```

```

        if (o!=0 && d!=0 && d!=5){
            s+=1;
            System.out.println(""+a+b+c+d);
        }
    }
    System.out.println("S= "+s);
}
}

```

*Rešenje:* Brojač  $i$  prolazi kroz skup prirodnih brojeva od 1000 do 9999, tj. kroz skup četvorocifrenih brojeva. Brojevi  $a, b, c$  i  $d$  predstavljaju redom cifru hiljada, stotina, desetica i jedinica broja  $i$ . Vidimo da u zadatku treba izbrojati koliko ima četvorocifrenih brojeva, koji nisu deljivi ni sa 3, ni sa 5. Četvorocifrenih brojeva ima  $N = 9 \cdot 10^3 = 9000$ . Neka su u skupu  $S_3$  svi četvorocifreni brojevi koji su deljivi sa 3, a u  $S_5$  svi četvorocifreni brojevi koji su deljivi sa 5. Na osnovu principa uključenja–isključenja dobijamo da će na kraju izvršavanja koda promenljiva  $s$  imati vrednost

$$\begin{aligned}
 N(S'_3 S'_5) &= N - N(S_3) - N(S_5) + N(S_3 S_5) \\
 &= 9000 - \left\lfloor \frac{9000}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{9000}{15} \right\rfloor \\
 &= 9000 - 3000 - 1800 + 600 = 4800.
 \end{aligned}$$

5. Koliko ima permutacija cifara 1, 2,...,9 u kojima cifra 1 nije na prvom, a cifra 9 nije na poslednjem mestu?

*Rešenje:* Označimo sa:

$S_1$ : skup svih permutacija u kojima je cifra 1 na prvom mestu;

$S_9$ : skup svih permutacija u kojima je cifra 9 na poslednjem mestu.

Ukupan broj permutacija cifara 1, 2,..., 9 je  $N = 9!$ . Na osnovu principa uključenja–isključenja broj permutacija koje zadovoljavaju uslove zadatka jeste broj permutacija koje ne pripadaju uniji skupova  $S_1$  i  $S_9$  i iznosi:

$$N(S'_1 S'_9) = N - N(S_1) - N(S_9) + N(S_1 S_9).$$

Ukoliko se cifra 1 nalazi na prvom mestu u permutaciji, preostalih osam cifara možemo ispermutovati na  $8!$  načina, pa je  $N(S_1) = 8!$ . Na isti način se dobija da je  $N(S_9) = 8!$ . Treba još odrediti  $N(S_1 S_9)$ , broj permutacija u preseku skupova  $S_1$  i  $S_9$ . Ukoliko je cifra 1 na prvom mestu, a cifra 9 na poslednjem mestu, preostalih sedam cifara se može rasporediti na  $7!$  načina, te je  $N(S_1 S_9) = 7!$ . Traženi broj permutacija iznosi

$$N(S'_1 S'_9) = 9! - 8! - 8! + 7!.$$

6. Odrediti broj permutacija cifara 1, 2, ..., 9 u kojima je bar jedna od cifara 1, 2, 3, 4 "na svom mestu".

*Rešenje:* Neka su  $S_i$  skupovi permutacija cifara 1, 2, ..., 9 u kojima je cifra  $i$  na  $i$ -tom mestu, gde je  $i = 1, 2, 3, 4$ . U zadatku se traži  $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4|$ , što je na osnovu principa uključenja–isključenja

$$\begin{aligned} |S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| &= N(S_1) + N(S_2) + N(S_3) + N(S_4) \\ &\quad - N(S_1S_2) - N(S_1S_3) - N(S_1S_4) - N(S_2S_3) - N(S_2S_4) - N(S_3S_4) \\ &\quad + N(S_1S_2S_3) + N(S_1S_2S_4) + N(S_1S_3S_4) + N(S_2S_3S_4) \\ &\quad - N(S_1S_2S_3S_4). \end{aligned}$$

Na isti način kao što je to urađeno u prethodnom zadatku dobijamo da skupovi  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , imaju jednak broj elemenata. Zato uvodimo sledeću oznaku:

$$N(1) = N(S_i) = 8!, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Broj permutacija koje pripadaju preseku bilo koja dva od ovih skupova je isti i za njega uvodimo oznaku:

$$N(2) = N(S_iS_j) = 7!, \quad 1 \leq i < j \leq 4.$$

Analogno, neka je

$$N(3) = N(S_iS_jS_k) = 6!, \quad 1 \leq i < j < k \leq 4,$$

$$N(4) = N(S_1S_2S_3S_4) = 5!.$$

Dobili smo specijalan slučaj formule uključenja–isključenja, pa je rešenje:

$$\begin{aligned} |S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| &= \binom{4}{1} \cdot N(1) - \binom{4}{2} \cdot N(2) + \binom{4}{3} \cdot N(3) - \binom{4}{4} \cdot N(4) \\ &= 4 \cdot 8! - 6 \cdot 7! + 4 \cdot 6! - 5!. \end{aligned}$$

7. Naći broj permutacija cifara 1, 2, ..., 8 u kojima 2 nije neposredno iza 1, 3 nije neposredno iza 2, ..., 8 nije neposredno iza 7.

*Rešenje:* Označimo sa  $S_i$  skup permutacija cifara 1, 2, ..., 8 u kome se cifra  $i + 1$  nalazi neposredno iza cifre  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 7$ . Ukupan broj permutacija skupa  $\{1, 2, \dots, 8\}$  je  $N = 8!$ .

Ukoliko je cifra 2 neposredno (odmah) iza cifre 1, permutacija sadrži blok  $\boxed{12}$  i broj takvih permutacija je  $N(S_1) = 7!$ . Na isti način se dobija da svih sedam skupova imaju isti kardinalni broj, pa je

$$N(1) = N(S_i) = 7!, \quad i = 1, 2, \dots, 7.$$

Odredimo dalje koliko je, npr.  $N(S_1S_3)$ . U skupu  $S_1$  su permutacije koje sadrže blok  $\boxed{12}$ , a u skupu  $S_3$  sve one permutacije koje sadrže blok  $\boxed{34}$ . Broj načina da se preostale 4 cifre ispermutuju sa ova dva bloka jednak je  $N(S_1S_3) = 6!$ . Izračunajmo koliko je i  $N(S_1S_2)$ . Sada permutacija treba da sadrži i blok  $\boxed{12}$  i blok  $\boxed{23}$ , pa permutacija zapravo sadrži blok  $\boxed{123}$ . Ovaj blok od tri elementa se zajedno sa preostalim 5 cifara

može rasporediti na takođe 6! načina, pa je  $N(S_1S_2) = N(S_1S_3) = 6!$ . Analogno dobijamo da je u preseku svaka dva od ovih sedam skupova isti broj permutacija, te je

$$N(2) = N(S_iS_j) = 6!, \quad 1 \leq i < j \leq 7.$$

Na isti način se dobija da se u preseku po tri skupa nalazi 5! permutacija, tj. da je  $N(3) = N(S_iS_jS_k) = 5!$ ,  $1 \leq i < j < k \leq 7$ . (Posmatrati npr. sledeće tri situacije: permutacije koje sadrže blokove  $\boxed{12}$ ,  $\boxed{34}$  i  $\boxed{56}$ , zatim permutacije koje sadrže blokove  $\boxed{123}$  i  $\boxed{45}$ , i na kraju skup svih permutacija sa blokom  $\boxed{1234}$ .) Sada je

$$N(4) = 4!, \quad N(5) = 3!, \quad N(6) = 2!, \quad N(7) = 1!.$$

Rešenje zadatka je broj permutacija koje ne pripadaju ni jednom od gore formiranih skupova:

$$\begin{aligned} N(S'_1S'_2 \dots S'_7) &= N - \binom{7}{1} N(1) + \binom{7}{2} N(2) - \binom{7}{3} N(3) + \binom{7}{4} N(4) \\ &\quad - \binom{7}{5} N(5) + \binom{7}{6} N(6) - \binom{7}{7} N(7) \\ &= 8! - 7 \cdot 7! + 21 \cdot 6! - 35 \cdot 5! + 35 \cdot 4! - 21 \cdot 3! + 7 \cdot 2! - 1. \end{aligned}$$

8.\* Patuljci Uča, Srećko, Kijavko, Pospanko, Stidljivko, Ljutko i Tupko trebaju da urade u rudniku poslove  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  i  $P_7$ . Ako se zna da svaki patuljak radi tačno jedan posao i da Pospanko ne može da radi  $P_2$ , Stidljivko ne može  $P_6$ , Uča ne može  $P_1$  i Ljutko ne može  $P_3$  i  $P_7$ , odrediti na koliko načina patuljci mogu da završe poslove u rudniku.

*Rešenje:* Uvedimo sledeće oznake:

$$\begin{array}{ll} S_1: \text{Pospanko radi posao } P_2 & S_4: \text{Ljutko radi posao } P_3 \\ S_2: \text{Stidljivko radi posao } P_6 & S_5: \text{Ljutko radi posao } P_7 \\ S_3: \text{Uča radi posao } P_1 & \end{array}$$

Treba odrediti na koliko načina patuljci mogu obaviti poslove u rudniku tako da nijedan patuljak ne radi posao koji mu je problematičan, tj. tražimo  $N(S'_1S'_2S'_3S'_4S'_5)$ . Ukupan broj načina da patuljci obave poslove u rudniku je 7!. Ukoliko Pospanko radi posao  $P_2$ , ostali patuljci trebaju da završe preostalih šest poslova i to mogu uraditi na 6! načina. Isto rešenje se dobija i ako nekog drugog patuljka fiksiramo na neki posao, pa je  $N(1) = 6!$ . Izračunajmo sada koliko je  $N(S_iS_j)$ , za  $i \neq j$ . Ako fiksiramo za dva patuljka koje poslove rade, ostali patuljci će na 5! načina završiti svoje poslove. Problematičan je samo presek skupova  $S_4$  i  $S_5$  pošto Ljutko ne može da radi dva posla istovremeno, pa je  $N(S_4S_5) = 0$ . Na isti način zaključujemo da je  $N(S_iS_jS_k) = 4!$ , osim u slučaju kada su u preseku oba skupa  $S_4$  i  $S_5$ , pošto je i taj presek prazan skup.

Ovakvih preseka imamo  $\binom{3}{1}$  (od preostala tri skupa biramo jedan i posmatramo njegov presek sa skupovima  $S_4$  i  $S_5$ ). Koristeći isti rezon pri zaključivanju, na osnovu principa uključenja–isključenja, dobijamo da je broj načina da se obave poslovi u rudniku

$$\begin{aligned}
N(S'_1 S'_2 S'_3 S'_4 S'_5) &= N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3) - N(S_4) - N(S_5) \\
&\quad + N(S_1 S_2) + N(S_1 S_3) + \dots \\
&\quad - N(S_1 S_2 S_3) - N(S_1 S_2 S_4) - \dots \\
&\quad + N(S_1 S_2 S_3 S_4) + N(S_1 S_2 S_3 S_5) + \dots \\
&\quad - N(S_1 S_2 S_3 S_4 S_5) \\
&= 7! - \binom{5}{1} 6! + \left( \binom{5}{2} - 1 \right) 5! - \left( \binom{5}{3} - \binom{3}{1} \right) 4! \\
&\quad + \left( \binom{5}{4} - \binom{3}{2} \right) 3! - 0.
\end{aligned}$$

9. Koliko ima  $n$ -tocifrenih prirodnih brojeva kod kojih je zbir cifara

(a) 9; (b) 10; (c\*) 11?

*Rešenje:*

- (a) Svakom  $n$ -tocifrenom prirodnom broju kome je zbir cifara 9 odgovara jedno rešenje jednačine

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 9.$$

Međutim, obrnuto ne važi uvek, pošto ne daju sva rešenja gornje jednačine neki  $n$ -tocifreni broj. Tačnije sva rešenja kod kojih je  $x_1 = 0$  nisu odgovarajuća i skup takvih rešenja ćemo označiti sa  $S_1$ . Znamo da je ukupan broj rešenja date jednačine na skupu nenegativnih celih brojeva  $N = \binom{9+n-1}{9}$ . Broj rešenja za koja je  $x_1 = 0$  ima koliko i rešenja jednačine  $x_2 + x_3 + \dots + x_n = 9$ , odnosno  $N(S_1) = \binom{9+n-2}{9}$ . Traženi broj je:

$$N(S'_1) = N - N(S_1) = \binom{n+8}{9} - \binom{n+7}{9}.$$

- (b) Od svih rešenja jednačine  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 10$  na skupu nenegativnih celih brojeva oduzimamo sva neodgovarajuća rešenja. Neka je:

$S_1$ : skup svih rešenja u kojima je  $x_1 = 0$ ;

$S_2$ : skup svih rešenja u kojima je  $x_i = 10$ , za neko  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Na isti način kao u prvom delu zadatka dobijamo da je  $N = \binom{10+n-1}{10}$  i  $N(S_1) = \binom{10+n-2}{10}$ . Odredimo sada koliko je  $N(S_2)$ . Ukupan broj rešenja posmatrane jednačine odgovara broju načina da se 10 kuglica rasporede u  $n$  kutija, pa je broj načina da odaberemo kutiju u kojoj će biti svih 10 kuglica  $N(S_2) = n$ . Slično, ako je  $x_1 = 0$ , na raspolaganju imamo  $n - 1$  kutiju, te je  $N(S_1 S_2) = n - 1$ . Dobijamo da je rešenje:

$$\begin{aligned}
N(S'_1 S'_2) &= N - N(S_1) - N(S_2) + N(S_1 S_2) \\
&= \binom{n+9}{10} - \binom{n+8}{10} - n + (n - 1).
\end{aligned}$$

- (c\*) Posmatrajmo rešenja jednačine  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 11$ . Označimo sa:

$S_1$ : skup svih rešenja u kojima je  $x_1 = 0$ ;

$S_2$ : skup svih rešenja u kojima je  $x_i = 10$ , za neko  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ;

$S_3$ : skup svih rešenja u kojima je  $x_i = 11$ , za neko  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Broj rešenja jednačine  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 11$ , kao i broj elemenata u skupovima  $S_1$  i  $S_3$  određujemo na isti način kao u prethodnim delovima zadatka, tj.

$$N = \binom{11+n-1}{11}, \quad N(S_1) = \binom{11+n-2}{11}, \quad N(S_3) = n.$$

Kardinalni broj skupa  $S_2$ ,  $N(S_2)$ , je jednak broju rešenja jednačine u kojima postoji neko  $x_i = 10$ , a samim tim i neko  $x_j = 1$ , za  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ . Na  $n$  načina biramo  $x_i$  koje će biti jednako 10, te preostaje  $n-1$  mogućnosti za izbor još jednog broja koji će biti jednak 1, pa je  $N(S_2) = n(n-1)$ . Sličnom analizom dobijamo da je  $N(S_1 S_2) = (n-1)(n-2)$  i  $N(S_1 S_3) = n-1$ . Primitimo da je presek skupova  $S_2$  i  $S_3$  prazan skup, tj.  $N(S_2 S_3) = 0$ , odakle sledi  $N(S_1 S_2 S_3) = 0$ . Traženi broj je:

$$\begin{aligned} N(S'_1 S'_2 S'_3) &= N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3) \\ &\quad + N(S_1 S_2) + N(S_1 S_3) + N(S_2 S_3) - N(S_1 S_2 S_3) \\ &= \binom{n+10}{11} - \binom{n+9}{11} - n(n-1) - n + (n-1)(n-2) + (n-1). \end{aligned}$$

10. Na koliko načina se u vrstu mogu poredati 3 Engleza, 3 Francuza i 3 Nemca, tako da nikoja 3 sunarodnika ne stoje zajedno?

*Rešenje:* Označimo sa:

$S_1$ : skup svih rasporeda u kojima sva tri Engleza stoje jedan do drugog;

$S_2$ : skup svih rasporeda u kojima sva tri Francuza stoje jedan do drugog;

$S_3$ : skup svih rasporeda u kojima sva tri Nemca stoje jedan do drugog.

Broj načina na koji ovih devet **različitih** ljudi mogu da stanu u vrstu je  $N = 9!$ . Uvodimo oznaku  $N(1) = N(S_1) = N(S_2) = N(S_3)$ , jer su kardinalni brojevi ovih skupova isti. Taj broj računamo tako što 3 sunarodnika stavimo u blok, a zatim taj blok zajedno sa 6 preostalih ljudi permutujemo. To možemo uraditi na  $7!$  načina. Dodatno treba uračunati i permutacije ta 3 sunarodnika u bloku, što je  $3!$ . Odnosno,  $N(1) = 7! \cdot 3!$ .

Oznaku  $N(2)$  koristićemo za broj elemenata koji se nalaze u preseku neka dva od ova tri skupa. Kako imamo dva bloka od po 3 sunarodnika, broj koji tražimo jednak je  $5! \cdot 3! \cdot 3!$ . Broj rasporeda koji se nalaze u preseku sva tri skupa je  $N(3) = N(S_1 S_2 S_3) = 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! = (3!)^4$ . Traženo rešenje je

$$\begin{aligned} N(S'_1 S'_2 S'_3) &= N - \binom{3}{1} N(1) + \binom{3}{2} N(2) - \binom{3}{3} N(3) \\ &= 9! - 3 \cdot 7! \cdot 3! + 3 \cdot 5! \cdot (3!)^2 - (3!)^4. \end{aligned}$$

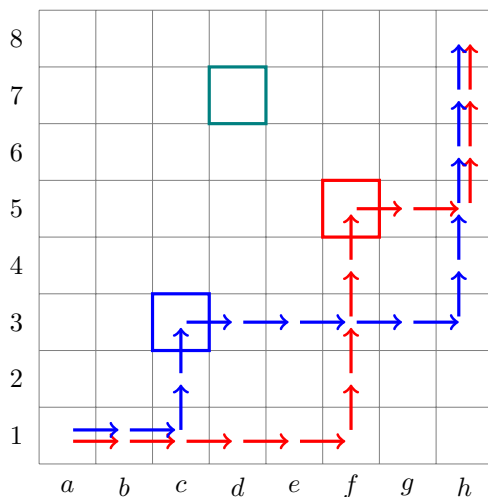
11. Odrediti koliko ima najkraćih puteva koje top može preći kretajući se po šahovskoj tabli od polja  $a1$  do polja  $h8$  ako

(a) ne sme da pređe preko  $c3$ ;

(b) ne sme da pređe ni preko  $c3$ , ni preko  $f5$ ;

(c) ne sme da pređe ni preko  $c3$ , ni preko  $d7$ , ni preko  $f5$ . (domaći)

*Rešenje:* Prvo ćemo odrediti koliko ima najkraćih puteva po kojima top može da se kreće se po šahovskoj tabli od polja  $a1$  do polja  $h8$ . Pošto nam trebaju najkraći putevi, top može da se kreće samo nagore i nadesno. Svaki od ovih najkraćih puteva sadrži 14 koraka, od toga 7 koraka nagore i 7 koraka nadesno, pa je ukupan broj najkraćih puteva od jednog do drugog ćoška šahovske table  $N = \binom{14}{7}$ .



- (a) Označimo sa  $S_{c3}$  skup svih najkraćih puteva koji prelaze preko polja  $c3$ . Treba odrediti  $N(S'_{c3}) = N - N(S_{c3})$ . Od polja  $a1$  do polja  $c3$  imamo puteve od 4 koraka, 2 na gore i 2 na desno, odnosno  $\binom{4}{2}$  najkraćih puteva. Slično, od polja  $c3$  do  $h8$  možemo doći na  $\binom{10}{5}$  načina, pa je  $N(S_{c3}) = \binom{4}{2} \binom{10}{5}$ . Sledi da je broj najkraćih puteva koji ne prelaze preko polja  $c3$  jednak

$$N(S'_{c3}) = N - N(S_{c3}) = \binom{14}{7} - \binom{4}{2} \binom{10}{5}.$$

- (b) Neka je sada  $S_{f5}$  skup svih najkraćih puteva koji prelaze preko polja  $f5$ . Potrebno je odrediti  $N(S'_{c3}S'_{f5})$ . Svi najkraći putevi od  $a1$  do  $f5$  sadrže 5 koraka nadesno i 4 koraka nagore, pa tih puteva ima  $\binom{9}{4}$ . Dalje, od  $f5$  do  $h8$  možemo doći na  $\binom{3+2}{3}$  načina. Zaključujemo da je  $N(S_{f5}) = \binom{9}{4} \binom{5}{3}$ . Odredimo sada broj svih najkraćih puteva koje prelaze i preko  $c3$  i preko  $f5$ , tj. broj  $N(S_{c3}S_{f5})$ . Prebrojimo po segmentima koliko ima načina da se dođe od  $a1$  do  $c3$ , zatim od  $c3$  do  $f5$  i na kraju od  $f5$  do  $h8$ , pa je  $N(S_{c3}S_{f5}) = \binom{4}{2} \binom{5}{2} \binom{5}{3}$ . Koristeći princip uključenja–isključenja dobijamo da je broj najkraćih puteva koji ne prelaze ni preko polja  $c3$ , ni preko polja  $f5$ :

$$\begin{aligned} N(S'_{c3}S'_{f5}) &= N - N(S_{c3}) - N(S_{f5}) + N(S_{c3}S_{f5}) \\ &= \binom{14}{7} - \binom{4}{2} \binom{10}{5} - \binom{9}{4} \binom{5}{3} + \binom{4}{2} \binom{5}{2} \binom{5}{3}. \end{aligned}$$

- (c) Uvodimo i treći skup  $S_{d7}$ , skup svih najkraćih puteva koji prelaze preko polja  $d7$ . Analogno kao u prethodnim primerima tražimo  $N(S'_{c3}S'_{f5}S'_{d7})$ . Primetimo da je nemoguće da top istovremeno pređe preko polja  $f5$  i  $d7$  i da je  $N(S_{f5}S_{d7}) = 0$ , a



samim tim je i  $N(S_{c3}S_{f5}S_{d7}) = 0$ . Traženi broj najkraćih puteva je:

$$\begin{aligned} N(S'_{c3}S'_{f5}S'_{d7}) &= N - N(S_{c3}) - N(S_{f5}) - N(S_{d7}) \\ &\quad + N(S_{c3}S_{f5}) + N(S_{c3}S_{d7}) + N(S_{f5}S_{d7}) - N(S_{c3}S_{f5}S_{d7}) \\ &= \binom{14}{7} - \binom{4}{2} - \binom{10}{5} - \binom{9}{4} - \binom{5}{3} - \binom{9}{6} - \binom{5}{1} \\ &\quad + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{5}{4} + \binom{5}{1}. \end{aligned}$$

12. Odrediti broj celobrojnih rešenja jednačine  $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ , ako važi

- (a)  $0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 7$ ;  
 (b)  $2 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 6, 3 \leq x_3 \leq 7$ .

*Rešenje:*

- (a) Jedno rešenje jednačine  $x_1 + x_2 + x_3 = 15$  u skupu nenegativnih celih brojeva je  $x_1 = 6, x_2 = 7$  i  $x_3 = 2$ . Međutim to rešenje ne ispunjava prva dva uslova. Ideja je da od broja svih rešenja jednačine u skupu nenegativnih celih brojeva, kojih ima  $N = \binom{15+2}{2} = \binom{17}{2}$ , oduzmemo broj svih "loših" rešenja. Označimo sa:

$S_1$ : skup svih rešenja jednačine u kojima je  $x_1 \geq 6$ ;

$S_2$ : skup svih rešenja jednačine u kojima je  $x_2 \geq 7$ ;

$S_3$ : skup svih rešenja jednačine u kojima je  $x_3 \geq 8$ .

Za nalaženje  $N(S_1)$  uvodimo novu promenljivu  $y_1 = x_1 - 6$ , čime se problem svodi na problem nalaženja broja nenegativnih celobrojnih rešenja jednačine  $y_1 + x_2 + x_3 = 15 - 6 = 9$ . Dakle,  $N(S_1) = \binom{9+2}{2} = \binom{11}{2}$ . Na sličan način dobijamo

$$\text{da je } N(S_2) = \binom{8+2}{2} = \binom{10}{2} \text{ i } N(S_3) = \binom{7+2}{2} = \binom{9}{2}.$$

Broj rešenja koja pripadaju preseku skupova  $S_1$  i  $S_2$ ,  $N(S_1S_2)$ , dobijamo uvodeći dve nove promenljive  $y_1 = x_1 - 6$  i  $y_2 = x_2 - 7$ . Tražimo broj rešenja jednačine  $y_1 + y_2 + x_3 = 15 - 6 - 7 = 2$  u skupu nenegativnih celih brojeva i dobijamo  $N(S_1S_2) = \binom{2+2}{2} = \binom{4}{2}$ . Slično dolazimo do  $N(S_1S_3) = \binom{3}{2}$ ,  $N(S_2S_3) = \binom{2}{2}$  i  $N(S_1S_2S_3) = 0$ . Broj rešenja jednačine koja ispunjavaju tražene uslove je

$$\begin{aligned} N(S'_1S'_2S'_3) &= N - N(S_1) - N(S_2) - N(S_3) \\ &\quad + N(S_1S_2) + N(S_1S_3) + N(S_2S_3) - N(S_1S_2S_3) \\ &= \binom{17}{2} - \binom{11}{2} - \binom{10}{2} - \binom{9}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

*II način:* Uvodeći nove promenljive  $y_1 = 5 - x_1, y_2 = 6 - x_2, y_3 = 7 - x_3$  problem se svodi na nalaženje broja celobrojnih rešenja jednačine

$$y_1 + y_2 + y_3 = 18 - (x_1 + x_2 + x_3) = 3,$$

u kojima je zadovoljeno  $0 \leq y_1 \leq 5, 0 \leq y_2 \leq 6$  i  $0 \leq y_3 \leq 7$ . Kako su sva tri uslova uvek ispunjena, sva rešenja gornje jednačine su dozvoljena i njihov broj je  $\binom{2+3}{2} = 10$ .

---

*Napomena:* Prvi način na koji smo rešili zadatak je univerzalni postupak za rešavanje ovakvog tipa zadataka, dok se drugi način može iskoristiti samo za rešavanje pogodno izabranih primera. Drugi način se koristi u zadacima kod kojih se nakon uvođenja smene dobija jednačina čija su sva rešenja odgovarajuća, ili eventualno treba isključiti samo nekoliko rešenja.

- (b) Zadati problem treba svesti na problem koji ima oblik kao problem iz prvog dela zadatka. Smenom  $y_1 = x_1 - 2$ ,  $y_2 = x_2$ ,  $y_3 = x_3 - 3$  dobijamo nove promenljive za koje važi  $0 \leq y_1 \leq 3$ ,  $0 \leq y_2 \leq 6$  i  $0 \leq y_3 \leq 4$  i

$$y_1 + y_2 + y_3 = (x_1 + x_2 + x_3) - 5 = 10.$$

Za domaći rešiti novodobijeni problem na oba načina prikazana u rešenju prethodnog primera.