Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 30. jun 2022.

$X_t: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_{X_t}(x_1) & p_{X_t}(x_2) & \dots \end{pmatrix}$, $p_{X_t}(x_1) = P(X_t = x_1)$

$X_{t+c}: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ P(X_{t+c}=x_1) & \dots \end{pmatrix}$

PREZIME I IME: ____________________

BROJ INDEKSA: ____________

Predispitne obaveze 2– 10 poena

$\boxed{m_X(t) = m_X(t+c)}$ увек $\Rightarrow$ $\boxed{m_X(t) = m_X(t+c) = const}$

1. [2 poena] Definisati strogo stacionaran slučajni proces i pokazati da je njegovo matematičko očekivanje jednako konstanti.

све коначнодим. расподеле су инваријантне у односу на транслацију времена

непр. $\varphi_{X_t}(x) = \varphi_{X_{t+c}}(x)$ $\forall x$

$m_X(t) = E(X_t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi_{X_t}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi_{X_{t+c}}(x)\, dx = E(X_{t+c}) = m_X(t+c), \forall c$

дискр. X_t и X_{t+c} имају исти закон расп.

$m_X(t) = E(X_t) = \sum x_i \cdot P(X_t = x_i) = \sum x_i P(X_{t+c} = x_i) = E(X_{t+c}) = m_X(t+c)$

2. [3 poena] Neka je X_t, $t \in [0, \infty)$, slučajni proces sa stacionarnim nezavisnim priraštajima, $X_0 = 0$ i $X_t - X_s$ ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\lambda(t-s))$ raspodelu za $t > s$. Izračunati matematičko očekivanje $m_X(t)$ i korelacionu funkciju $R_X(t,s)$ slučajnog procesa X_t.

$X: \mathcal{E}(a)$

$X_0 = 0$ стац. нез. прир.

$X_t - X_s : \mathcal{E}(\lambda(t-s))$, $t > s$

$X_t - X_0 : \mathcal{E}(\lambda(t-0))$

$E(X) = \frac{1}{a}$, $D(X) = \frac{1}{a^2}$

$m_X(t) = E(X_t) = E(X_t - \overbrace{X_0}^{=0}) = \frac{1}{\lambda t}$

$t > s$:

$R_X(t,s) = E(X_t \cdot X_s) = E((X_t - X_s + X_s) \cdot X_s)$

$= E((X_t - X_s)\cdot X_s + X_s^2) = \underbrace{E((X_t - X_s)\cdot X_s)}_{1} + \underbrace{E(X_s^2)}_{2}$

(1) $E((X_t - X_s)\cdot X_s) = E((X_t - X_s)\cdot(X_s - \overbrace{X_0}^{=0}))$

нез. $= E(X_t - X_s) \cdot E(X_s - X_0) = \frac{1}{\lambda(t-s)} \cdot \frac{1}{\lambda(s-0)}$

(2) $E(X_s^2) = ?$

$D(X_s) = D(X_s - X_0) = \frac{1}{(\lambda(s-0))^2} = \frac{1}{\lambda^2 s^2}$

$D(X_s) = E(X_s^2) - E(X_s)^2$

$E(X_s^2) = D(X_s) + E(X_s)^2 = \frac{1}{\lambda^2 \cdot s^2} + \left(\frac{1}{\lambda s}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2 s^2}$

3. [5 poena] Dat je lanac Markova čiji je skup stanja $S = \{s_1, s_2\}$ i čija je matrica prelaza $\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \end{array}\!\!\begin{array}{cc} s_1 & s_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}} \end{array}$. $\not> 0$

a) Da li postoje finalne verovatnoće za dati lanac Markova? Objasniti odgovor! Ako postoje finalne verovatnoće odrediti ih.

$$\mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/9 & 8/9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/9 & 8/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\left(\frac{8}{9}\right)^2 & \left(8/9\right)^2 \end{bmatrix} \not> 0$$

$$\mathbb{P}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\left(\frac{8}{9}\right)^n & \left(\frac{8}{9}\right)^n \end{bmatrix} \not> 0 \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{исте врсте}} = \mathbb{P}^*$$

постоје фин. вер $\left[\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^*\right]$

$$p^* = [1 \quad 0]$$

b) Ako je sistem sa tri puta većom verovatnoćom u početnom momentu bio u stanju s_2 nego u stanju s_1 verovatnoće stanja u početnom momentu 0 su

$\mathbf{p}(0) = \begin{array}{cc} [1/4 & 3/4] \\ s_1 & s_2 \end{array}$

c) Izračunati $P(X_1 = s_2, X_2 = s_2, X_3 = s_2, X_{50} = s_2) = p_2(1) \cdot p_{22}(1) \cdot p_{22}(1) \cdot p_{22}(47)$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{47}$$

$$p(1) = p(0) \cdot \mathbb{P} = [1/4 \quad 3/4] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/9 & 8/9 \end{bmatrix} = \left[* \quad \frac{2}{3} \right]$$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$

d) Odrediti, ako je to moguće, početni vektor $\mathbf{p}(0)$ tako da dati lanac Markova bude stacionaran. Objasniti odgovor!

$p(0) = p^* = [1 \quad 0]$ могуће фин. вер

e) Kako se naziva stanje s_1 datog lanca Markova?

Апсорбујуће

Informacioni inženjering
Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 30. jun 2022.

Deo završnog ispita 2

Zadaci – raditi u svesci

1. [6 poena] Dat je slučajni proces $X_t = \sqrt{3}\cos tU + \sin tV, t \in \mathbb{R}$, gde su U i V su nezavisne slučajne promenljive, slučajna promenljiva U ima uniformnu $\mathcal{U}(-1,1)$ raspodelu, i slučajna promenljiva V je data zakonom raspodele $V : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   (a) Izračunati srednju vrednost, korelacionu funkciju i disperziju slučajnog procesa X_t.
   (b) Ispitati slabu stacionarnost slučajnog procesa X_t.
2. [7 poena] Jana svakog dana jede jednu od tri vrste sladoleda: od vanile, od čokolade i od jagode. Ako jednog dana jede sladoled od vanile, onda sutradan podjednako verovatno jede bilo koju od te tri vrste sladoleda. Poznato je da ako jednog dana jede sladoled od čokolade, onda sutradan dva puta verovatnije jede sladoled od jagode nego od vanile, kao i da sladoled od čokolade ne jede dva dana uzastopno. Ako jednog dana jede sladoled od jagode, sutradan sigurno ne jede slodeled od jagode, a jednako verovatno jede sladoled od čokolade i vanile. Jana na na slučajan način bira sladoled koji će jesti u ponedeljak.
   (a) Sastaviti matricu prelaza za jedan korak.
   (b) Izračunati verovatnoću da će Jana u sredu jesti sladoled od čokolade.
   (c) Ako se posmatra dovoljno dug vremenski period, koju vrstu sladoleda Jana najčečće jede?
   (d) Izračunati $P(X_4 = v, X_6 = v, X_8 = v, \ldots | X_0 = j, X_2 = v)$.
3. [7 poena] U marketu postoje dve kase i na svakoj radi po jedna kasirka. U market tokom jednog sata dođe prosečno 20 kupaca, pri čemu broj kupaca koji dođu u market ima Poasonovu raspodelu. Vreme usluživanja jednog kupca ima eksponencijalnu raspodelu i prosečno traje 5 minuta. Red čekanja nema ograničenja.
   (a) Odrediti λ, μ, i Λ.
   (b) Pokazati postojanje finalnih verovatnoa i izračunati ih.
   (c) Izračunati očekivani broj kupaca u marketu.
   (d) Koliko prosečno vremena tokom desetočasovnog radnog vremena, kasirke mogu da utroše na ispijanje kafe na kojem učestvuju obe kasirke?
   (e) Šta je verovatnije, da su obe kasirke slobodne, ili da su obe kasirke zauzete?

Informacioni inženjering
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 30. jun 2022.

Deo završnog ispita 1 – 40 poena

Zadaci – raditi u svesci

1. [8 poena] Iz intervala $(0, 5)$ se na slučajan način biraju brojevi x i y.
   (a) Izračunati verovatnoću da je minimum izabranih brojeva veći od 3.
   (b) Ako je minimum izabranih brojeva veći od 3, izračunati verovatnoću da je razlika izabranih brojeva manja od 4.

2. [10 poena] Na stolu se nalaze tri kutije. U prvoj kutiji su 2 kuglice bele boje i 3 kuglice crne boje, u drugoj kutiji su 3 kuglice bele boje i jedna kuglica crna boje, a u trećoj kutiji su po jedna kuglica bele i crne boje. Veca na slučajan način izvlači po jednu kuglicu iz prve i iz druge kutije i prebacuje ih u treću kutiju. Odrediti zakon raspodele i funkciju raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj kuglica bele boje u trećoj kutiji nakon opisanih prebacivanja kuglica. Izračunati verovatnoću da u trećoj kutiji, nakon opisanih prebacivanja kuglica, ima tri puta više kuglica bele boje nego kuglica crne boje.

3. [12 poena] Slučajna promenljiva X data je funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} ax+1, & x \in (-1, 0], \\ -x+1, & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.
   (a) Izračunati konsantu a i odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X.
   (b) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = |X - \frac{1}{4}|$.

4. [10 poena] Strelac gađa metu tri puta. Verovatnoća pogotka u svakom nezavisnom gađanju je $\frac{1}{3}$. Ukoliko pogodi bar dva puta, gađa još jednom. Slučajna promenljiva X predstavlja broj pogodaka, a slučajna promenljiva Y broj gađanja.
   (a) Odrediti zakon raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) i marginalne zakone raspodela.
   (b) Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.
   (c) Odrediti zakon raspodele i funkciju raspodele slučajne promenljive $Z = XY$.

Računarstvo i automatika
predmet: **Verovatnoća i slučajni procesi**
datum: 30. jun 2022.

Deo završnog ispita

Zadaci – raditi u svesci

1. Iz intervala $(0,5)$ se na slučajan način biraju brojevi x i y.
   (a) Izračunati verovatnoću da je minimum izabranih brojeva veći od 3.
   (b) Ako je minimum izabranih brojeva veći od 3, izračunati verovatnoću da je razlika izabranih brojeva manja od 4.
2. Na stolu se nalaze tri kutije. U prvoj kutiji su 2 kuglice bele boje i 3 kuglice crne boje, u drugoj kutiji su 3 kuglice bele boje i jedna kuglica crna boje, a u trećoj kutiji su po jedna kuglica bele i crne boje. Veca na slučajan način izvlači po jednu kuglicu iz prve i iz druge kutije i prebacuje ih u treću kutiju. Odrediti zakon raspodele i funkciju raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj kuglica bele boje u trećoj kutiji nakon opisanih prebacivanja kuglica. Izračunati verovatnoću da u trećoj kutiji, nakon opisanih prebacivanja kuglica, ima tri puta više kuglica bele boje nego kuglica crne boje.
3. Slučajna promenljiva X data je funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} ax+1, & x \in (-1,0], \\ -x+1, & x \in (0,1), \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.
   (a) Izračunati konsantu a i odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X.
   (b) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = |X - \frac{1}{4}|$.
4. Strelac gađa metu tri puta. Verovatnoća pogotka u svakom nezavisnom gađanju je $\frac{1}{3}$. Ukoliko pogodi bar dva puta, gađa još jednom. Slučajna promenljiva X predstavlja broj pogodaka, a slučajna promenljiva Y broj gađanja.
   (a) Odrediti zakon raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y) i marginalne zakone raspodela.
   (b) Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.
   (c) Odrediti zakon raspodele i funkciju raspodele slučajne promenljive $Z = XY$.
5. Jana svakog dana jede jednu od tri vrste sladoleda: od vanile, od čokolade i od jagode. Ako jednog dana jede sladoled od vanile, onda sutradan podjednako verovatno jede bilo koju od te tri vrste sladoleda. Poznato je da ako jednog dana jede sladoled od čokolade, onda sutradan dva puta verovatnije jede sladoled od jagode nego od vanile, kao i da sladoled od čokolade ne jede dva dana uzastopno. Ako jednog dana jede sladoled od jagode, sutradan sigurno ne jede slodeled od jagode, a jednako verovatno jede sladoled od čokolade i vanile. Jana na na slučajan način bira sladoled koji će jesti u ponedeljak.
   (a) Sastaviti matricu prelaza za jedan korak.
   (b) Izračunati verovatnoću da će Jana u sredu jesti sladoled od čokolade.
   (c) Ako se posmatra dovoljno dug vremenski period, koju vrstu sladoleda Jana najčečće jede?
   (d) Izračunati $P(X_4 = v, X_6 = v, X_8 = v, \ldots | X_0 = j, X_2 = v)$.
6. U marketu postoje dve kase i na svakoj radi po jedna kasirka. U market tokom jednog sata dođe prosečno 20 kupaca, pri čemu broj kupaca koji dođu u market ima Poasonovu raspodelu. Vreme usluživanja jednog kupca ima eksponencijalnu raspodelu i prosečno traje 5 minuta. Red čekanja nema ograničenja.
   (a) Odrediti λ, μ, i Λ.
   (b) Pokazati postojanje finalnih verovatnoa i izračunati ih.
   (c) Izračunati očekivani broj kupaca u marketu.
   (d) Koliko prosečno vremena tokom desetočasovnog radnog vremena, kasirke mogu da utroše na ispijanje kafe na kojem učestvuju obe kasirke?
   (e) Šta je verovatnije, da su obe kasirke slobodne, ili da su obe kasirke zauzete?