predmet: Matematička analiza 2

KRIVOLINIJSKI INTEGRAL

Primeri parametrizacije krive

Parametarski oblik jednačine krive: $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$.

1. Odrediti parametarski oblik jednačine duži $\overline{AB}$ zadate sa: $y = 2x + 1$, $0 \leq x \leq 1$.

   I Rešenje: Parametarski oblik jednačine duži $\overline{AB}$ je $x = t, y = 2t + 1, t \in [0, 1]$.

   II Rešenje: Jednačinu duži $\overline{AB}$ možemo zapisati u parametarskom obliku i na sledeći način: $x = t + 1, y = 2t + 3, t \in [-1, 0]$.

   III Rešenje: Jednačinu duži $\overline{AB}$ možemo zapisati u parametarskom obliku i na sledeći način: $y = t, x = \dfrac{t-1}{2}, t \in [1, 3]$.

2. Odrediti parametarski oblik jednačine kružnice $k : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

   Rešenje: Parametarski oblik jednačine kružnice k je: $x = x_0 + r \cdot \cos t, y = y_0 + r \cdot \sin t, t \in [0, 2\pi]$.

Krivolinijski integral I vrste

Neka je $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^2$, neprekidna funkcija na prostoj glatkoj krivoj L, koja je data parametrizacijom $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$, tada važi:

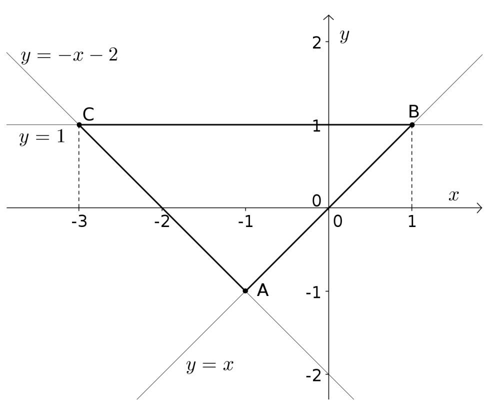
$$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Ako je L po delovima glatka kriva i $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$, tada:

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int\limits_{L_1} f(x, y)\, dl + \cdots + \int\limits_{L_n} f(x, y)\, dl$$

1. Izračunati $\int\limits_L (xy + y^2)\, dl$, gde je L rub trougla sa temenima $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$ i $C(-3, 1)$.

   Rešenje: Kriva L je unija 3 duži, $L = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$.



Odavde sledi da je

$$\int\limits_L (xy+y^2)\, dl = \int\limits_{\overline{AB}} (xy+y^2)\, dl + \int\limits_{\overline{BC}} (xy+y^2)\, dl + \int\limits_{\overline{CA}} (xy+y^2)\, dl.$$

Ako je parametrizacija duži $\overline{AB}$,

$$\overline{AB} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = t, t \in [-1, 1]\}$$

onda je $x'(t) = 1$ i $y'(t) = 1$. Prema tome

$$\int\limits_{\overline{AB}} (xy + y^2)\, dl = \int\limits_{-1}^{1} (t^2 + t^2)\sqrt{1^2 + 1^2}\, dt = 2\sqrt{2}\int\limits_{-1}^{1} t^2\, dt = 2\sqrt{2}\, \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 - (-1)) = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Ako je parametrizacija duži $\overline{BC}$, $\overline{BC} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 1, t \in [-3, 1]\}$, onda je $x'(t) = 1, y'(t) = 0$. Stoga,

$$\int\limits_{\overline{BC}} (xy + y^2)\, dl = \int\limits_{-3}^{1} (t+1)\sqrt{1^2 + 0^2}\, dt = \int\limits_{-3}^{1} (t+1)\, dt = \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{9}{2} - 3\right) = 0$$

Ako duž $\overline{CA}$ parametrizujemo na sledeći način,
$\overline{CA} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = -t - 2, t \in [-3, -1]$, onda je $x'(t) = 1, y'(t) = -1$. Stoga,

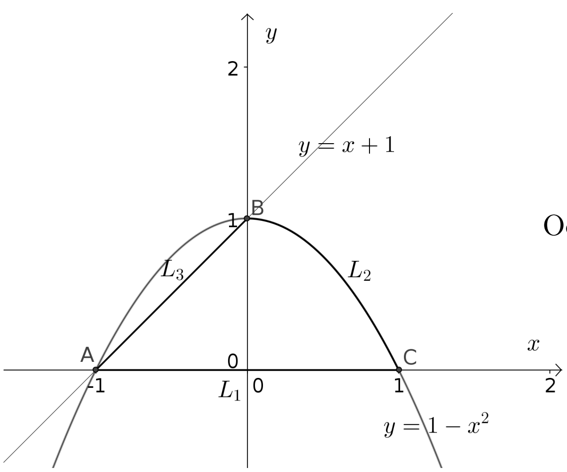
$$\int\limits_{\overline{CA}} (xy + y^2)\, dl = \int\limits_{-3}^{-1} (t(-t-2) + (-t-2)^2)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\int\limits_{-3}^{-1} (-t^2 - 2t + t^2 + 4t + 4)\, dt = \sqrt{2}\int\limits_{-3}^{-1} (2t + 4)\, dt$$

$$= \sqrt{2}\left(2\frac{t^2}{2} + 4t\right)\Bigg|_{-3}^{-1} = \sqrt{2}(1 - 4 - (9 - 12)) = 0$$

Konačno, imamo $\int\limits_{L} (xy + y^2)\, dl = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 0 + 0 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

2. Izračunati $\int\limits_{L} x\, dl$, gde je L rub oblasti ograničene sa $y = x + 1$, $y = 1 - x^2$ i x-osom.

Rešenje: Zadata kriva L je unija tri krive $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$



Odavde sledi da je $\int\limits_{L} x\, dl = \int\limits_{L_1} x\, dl + \int\limits_{L_2} x\, dl + \int\limits_{L_3} x\, dl.$

Parametrizacijom krive $L_1 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 0, t \in [-1, 1]\}$, gde je $x'(t) = 1, y'(t) = 0$, dobija se

$$\int\limits_{L_1} x\, dl = \int\limits_{-1}^{1} t\sqrt{1^2 + 0^2}\, dt = \int\limits_{-1}^{1} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Ako krivu L_2 parametrizujemo na sledeći način $L_2 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 1 - t^2, t \in [0, 1]\}$, pri čemu je $x'(t) = 1, y'(t) = -2t$, dobija se

$$\int\limits_{L_2} x\, dl = \int\limits_{0}^{1} t\sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \left| \begin{array}{c} \text{integral rešavamo smenom} \\ s = 1 + 4t^2 \end{array} \right| = \cdots = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

Krivu L_3 parametrizujemo na sledeći način $L_3 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = t+1, t \in [-1, 0]\}$, pri čemu je $x'(t) = 1$ i $y'(t) = 1$, i dobijamo

$$\int\limits_{L_3} x\,dl = \int\limits_{-1}^{0} t\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

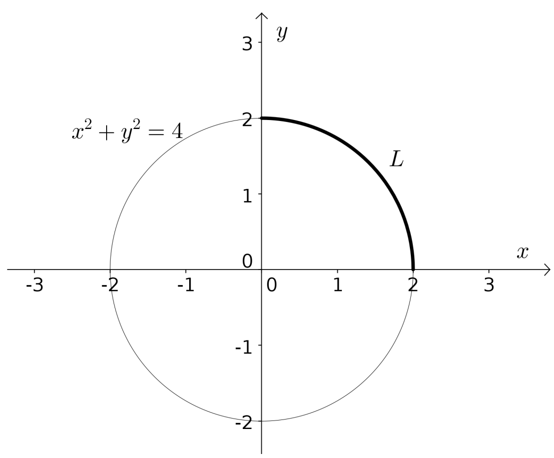
Konačno, imamo da je $\int\limits_{L} x\,dl = \dfrac{5\sqrt{5} - 1 - 6\sqrt{2}}{12}$.

Dužina luka krive

Dužina Δl krive $L \subseteq \mathbb{R}^2$ je $\Delta l = \int\limits_{L} 1\,dl$

3. Izračunati dužinu luka kružnice $x^2 + y^2 = 4$ u prvom kvadrantu.

   Rešenje:

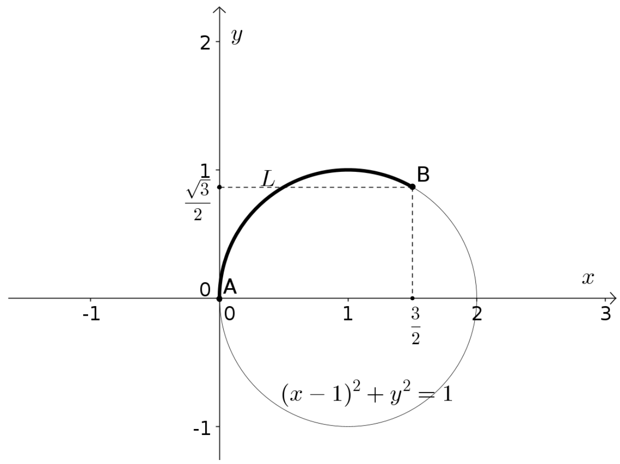


   Ako krivu L parametrizujemo na sledeći način
   $L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 2\cos t, y(t) = 2\sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\}$, onda je $x'(t) = -2\sin t, y'(t) = 2\cos t$. Prema tome

$$\Delta l = \int\limits_{L} dl = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\,dt = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4}\,dt = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt = 2\,t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$

4. Izračunati dužinu kraćeg luka kružnice $x^2 + y^2 = 2x$ između tačaka $A(0,0)$ i $B\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   Rešenje: Zadata kriva L je deo kružnice čija je jednačina $(x-1)^2 + y^2 = 1$.



Krivu možemo parametrizovati na sledeći način $L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 1 + \cos t, y(t) = \sin t, t \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]\}$, pri čemu je $x'(t) = -\sin t, y'(t) = \cos t$. Dužinu luka krive računamo na sledeći način

$$\Delta l = \int\limits_L dl = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 1\, dt = t|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{2\pi}{3}.$$

Krivolinijski integral II vrste

Neka je putanja L data parametrizacijom $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$ (i orijentisana od tačke $A(x(\alpha), y(\alpha))$ do tačke $B(x(\beta), y(\beta))$), i neka su funkcije $P, Q : D \to \mathbb{R}^2$ neprekidne na putanji L, tada važi:

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta P(x(t), y(t)) \cdot x'(t)\,dt$$

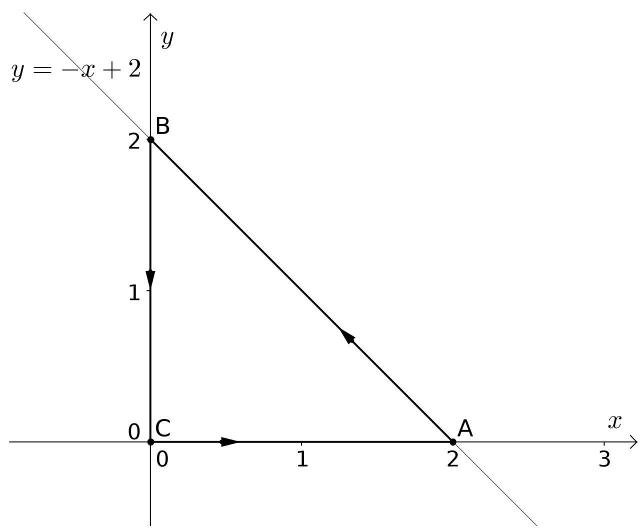
$$\int\limits_L Q(x,y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\,dt$$

Prilikom izračunavanja krivolinijskog integrala II vrste **bitna je orijentacija krive**.

---

1. Izračunati $\int\limits_L x\,dy$, gde je L pozitivno orijentisan rub trougla sa temenima $A(2,0)$, $B(0,2)$ i $C(0,0)$.

Rešenje:



Kriva L je unija tri duži,

$$L = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$$

odakle je

$$\int\limits_L x\,dy = \int\limits_{\overline{AB}} x\,dy + \int\limits_{\overline{BC}} x\,dy + \int\limits_{\overline{CA}} x\,dy$$

Duž $\overline{AB}$ parametrizujemo na sledeći način $\overline{AB} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = -t + 2, t \in \overleftarrow{[0,2]}$. Stoga je

$$\int\limits_{\overline{AB}} x\,dy = \int\limits_2^0 t \cdot (-1)\,dt = -\left.\frac{t^2}{2}\right|_2^0 = 2.$$

Duž $\overline{BC}$ parametrizujemo na sledeći način $\overline{BC} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 0, y(t) = t, t \in \overleftarrow{[0,2]}\}$. Stoga je

$$\int\limits_{\overline{BC}} x\,dy = \int\limits_2^0 0 \cdot 1\,dt = 0.$$

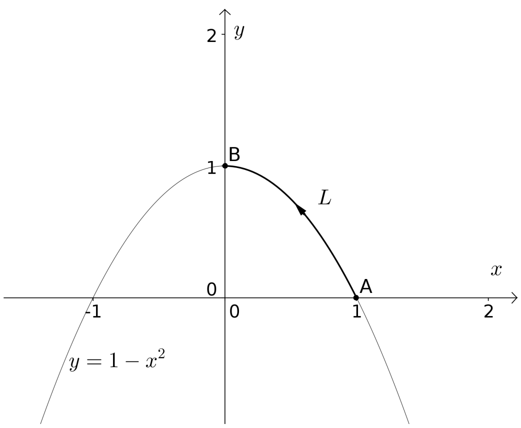
Duž $\overline{CA}$ parametrizujemo na sledeći način $\overline{CA} = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 0, t \in [0, 2]\}$. Stoga je

$$\int\limits_{\overline{CA}} x\,dy = \int\limits_0^2 t \cdot 0\,dt = 0.$$

Zaključujemo, $\int\limits_L x\,dy = 2 + 0 + 0 = 2$.

2. Izračunati integral $\int\limits_L (y+3)\,dx + (2x-1)\,dy$ duž krive $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2,\ 0 \le x \le 1\}$ orijentisane od tačke $A(1, 0)$ do tačke $B(0, 1)$.

Rešenje:



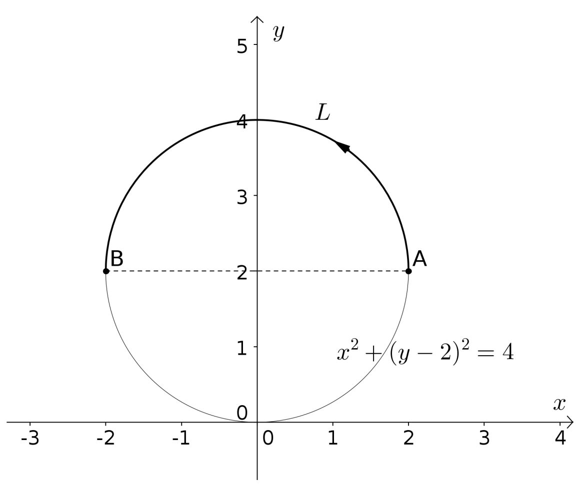
Ako krivu parametrizujemo na sledeći način $L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 1 - t^2, t \in \overleftarrow{[0, 1]}\}$, onda je $x'(t) = 1, y'(t) = -2t$.

$$\int\limits_L (y+3)\,dx + (2x-1)\,dy = \int\limits_1^0 ((1 - t^2 + 3) \cdot 1 + (2t - 1)(-2t))\,dt = \int\limits_1^0 (4 - 5t^2 + 2t)\,dt$$

$$= \left(4t - 5\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_1^0 = 0 - \left(4 - \frac{5}{3} + 1\right) = -\frac{10}{3}.$$

3. Izračunati $\int\limits_L y\,dx - x\,dy$ duž krive $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4y, y \ge 2\}$ orijentisane od tačke $A(2, 2)$ do tačke $B(-2, 2)$.

Rešenje: Kriva L je deo kružnice $x^2 + (y-2)^2 = 2^2$.



Parametrizacijom krive $L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 2\cos t, y(t) = 2 + 2\sin t, t \in [0, \pi]\}$, dobija se $x'(t) = -2\sin t$ i $y'(t) = 2\cos t$. Vrednost traženog integrala je

$$\int\limits_L y\,dx - x\,dy = \int\limits_0^\pi ((2+2\sin t)\cdot(-2\sin t) - (2\cos t)\cdot 2\cos t)\,dt = \int\limits_0^\pi (-4\sin t - 4\sin^2 t - 4\cos^2 t)\,dt$$
$$= \int\limits_0^\pi (-4\sin t - 4)\,dt = (4\cos t - 4t)|_0^\pi = 4\cos\pi - 4\pi - (4\cos 0 - 0) = -8 - 4\pi.$$

Nezavisnost integracije od putanje

Krivolinijski integral $\int P\,dx + Q\,dy$ ne zavisi od putanje integracije nad oblašću D ako i samo ako postoji funkcija $V : D \to \mathbb{R}$ takva da je $dV = P\,dx + Q\,dy$, tj. $V_x = P$ i $V_y = Q$, i tada važi

$$\int\limits_{L(AB)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{L(AB)} dV = V(B) - V(A)$$

Navedena funkcija V ovde igra ulogu primitivne funkcije.

Potreban i dovoljan uslov za nezavisnost integrala od putanje integracije: Integral $\int P\,dx + Q\,dy$ ne zavisi od putanje integracije ako i samo ako $P_y = Q_x$.

---

4. Odrediti realan parametar a tako da integral $\int\limits_{L(AB)} ay\,dx + 3x\,dy$ ne zavisi od putanje integracije.

   Zatim, izračunati integral od tačke $A(-3, -1)$ do tačke $B(1, 3)$

   (a) duž krive $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1, -3 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, -1 \leq y \leq 3\}$;

   (b) duž krive L, gde je L je duž koja spaja tačke A i B;

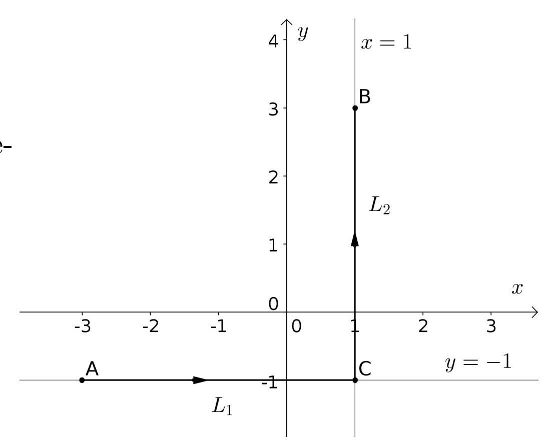
   (c) pomoću totalnog diferencijala.

Rešenje: Neka je $P = ay$ i $Q = 3x$. Tada je $P_y = a$ i $Q_x = 3$. Vrednost integrala ne zavisi od putanje integracije ako i samo ako $P_y = Q_x$, što u ovom slučaju važi za $a = 3$. Integral $\int\limits_{L(AB)} 3y\,dx + 3x\,dy$ ne zavisi od putanje integracije i računamo vrednost ovog integrala.

(a)

Kriva L je unije dve krive $L = L_1 \cup L_2$, koje parametrizujemo na sledeći način

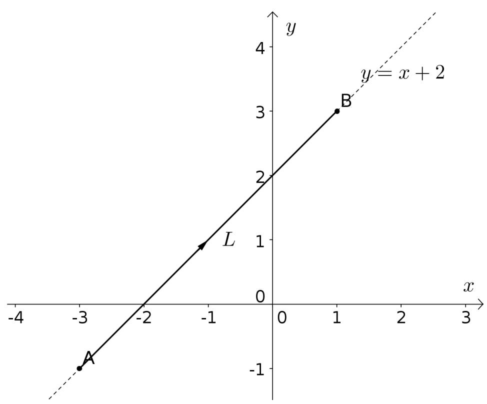
$$L_1 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = -1, t \in [-3, 1]\}$$
$$L_2 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 1, y(t) = t, t \in [-1, 3]\}$$



Koristeći navedenu parametrizaciju računamo traženi integral

$$\begin{aligned}\int\limits_{L(AB)} 3y\,dx + 3x\,dy &= \int\limits_{L_1(AC)} 3y\,dx + 3x\,dy + \int\limits_{L_2(CB)} 3y\,dx + 3x\,dy \\ &= \int\limits_{-3}^{1} (3\cdot(-1)\cdot 1 + 3t\cdot 0)\,dt + \int\limits_{-1}^{3} (3t\cdot 0 + 3\cdot 1)\,dt \\ &= -3\int\limits_{-3}^{1} dt + 3\int\limits_{-1}^{3} dt \\ &= -3\,t\big|_{-3}^{1} + 3\,t\big|_{-1}^{3} = -3(1-(-3)) + 3(3-(-1)) = 0.\end{aligned}$$

(b)



Duž $\overline{AB}$ je deo prave $y = x + 2$, te je možemo parametrizovati na sledeći način
$L = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = t + 2, t \in [-3, 1]\}$.

Na osnovu date parametrizacije, računamo integral

$$\begin{aligned}\int\limits_{L(AB)} 3y\,dx + 3x\,dy &= \int\limits_{-3}^{1} (3(t+2)\cdot 1 + 3t\cdot 1)\,dt = \int\limits_{-3}^{1} (6t+6)\,dt = \left(6\frac{t^2}{2} + 6t\right)\Bigg|_{-3}^{1} \\ &= 3 + 6 - (27 - 18) = 0.\end{aligned}$$

(c) Kako dati integral ne zavisi od putanje integracije, možemo ga izračunati pomoću funkcije V takve da je $dV = 3y\,dx + 3x\,dy$. Dakle, tražimo funkciju V takvu da je $V_x = 3y$ i $V_y = 3x$. Stoga

$$V = \int V_x\,dx = \int 3y\,dx = 3xy + \varphi(y)$$

Odakle je $V_y = 3x + \varphi'(y)$. Kako tražimo funkciju V takvu da je $V_y = 3x$, dobijamo da mora da važi $\varphi'(y) = 0$, odakle je $\varphi(y) = \int \varphi'(y)\,dy = \int 0\,dy = 0 + C = C$. Tražena funkcija je $V = 3xy + C$, te je vrednost integrala

$$\int\limits_{L(AB)} 3y\,dx + 3x\,dy = V(B) - V(A) = 3\cdot 1\cdot 3 + C - (3\cdot(-1)\cdot(-3) + C) = 0.$$

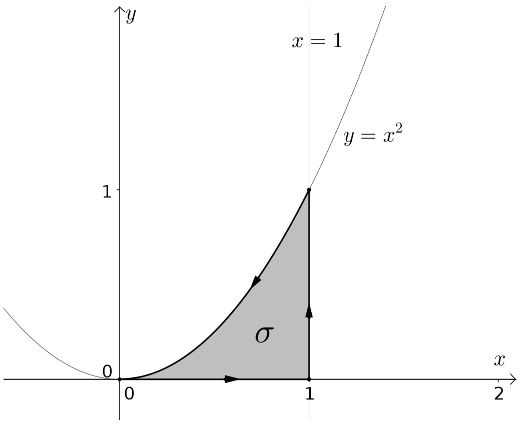
Formula Grina

Neka je $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ zatvorena oblast ograničena zatvorenom putanjom L. Ako su funkcije P, Q, P_y, Q_x neprekidne nad nekom otvorenom oblasti koja sadrži σ i ako je kriva L pozitivno orijentisana, tada važi

$$\oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\sigma} (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

5. Primenom formule Grina, izračunati vrednost krivolinijskog integrala $\oint\limits_L xy\,dx + (x+y)\,dy$ ako je kriva $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, 0 \le x \le 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, 0 \le y \le 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \le x \le 1\}$ pozitivno orijentisana.

Rešenje:



Neka je $P = xy$ i $Q = x + y$. Tada je $P_y = x$ i $Q_x = 1$. Kriva L je zatvorena pozitivno orijentisana kriva. Kako je oblast

$$\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$$

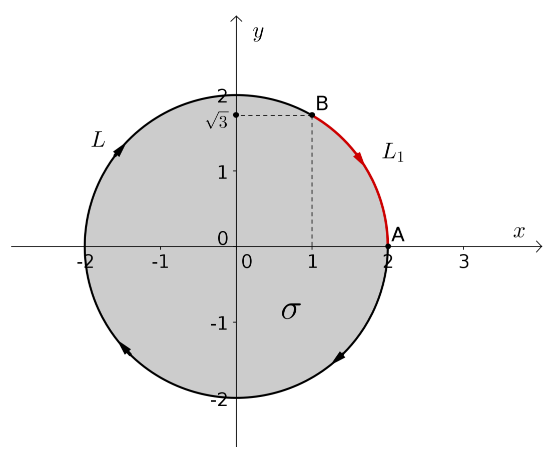
ograničena krivom L i funkcije P, Q, P_y i Q_x neprekidne nad $\sigma \subset \mathbb{R}^2$, ispunjeni su uslovi teoreme Grina i sledi

$$\begin{aligned}
\oint\limits_L xy\,dx + (x+y)\,dy &= \iint\limits_\sigma (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint\limits_\sigma (1-x)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx = \int\limits_0^{x^2} (1-x)\,dy \\
&= \int\limits_0^1 (1-x)\,y\Big|_0^{x^2}\,dx \int\limits_0^1 (1-x)x^2\,dx = \int\limits_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

6. Primenom formule Grina, izračunati vrednost krivolinijskog integrala $\int\limits_L -y^3\,dx + x^3\,dy$, ako je kriva L duži luk kružnice $x^2 + y^2 = 2^2$ od tačke $A(2,0)$ do tačke $B(1,\sqrt{3})$.

Rešenje:

Kriva L nije zatvorena. Ako na krivu L dodamo krivu L_1 dobijamo novu krivu $L^\star = L \cup L_1$, koja je zatvorena i negativno orijentisana, te je kriva $-L^\star$ zatvorena, pozitivno orijentisana kriva.



Ako je $P = -y^3$ i $Q = x^3$, onda je $P_y = -3y^2$ i $Q_x = 3x^2$. Kako je oblast $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2^2\}$ ograničena krivom $-L^\star$ i funkcije P, Q, P_y, Q_x su neprekidne nad σ, kriva $-L^\star$, funkcije P, Q, P_y, Q_x i oblast σ zadovoljavaju uslove teoreme Grina i važi

$\int\limits_{-L^\star} -y^3\,dx + x^3\,dy = \iint\limits_\sigma (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint\limits_\sigma (3x^2 + 3y^2)\,dx\,dy$. Odakle je

$\displaystyle\int\limits_{L^\star} -y^3\,dx + x^3\,dy = -\iint\limits_{\sigma} (3x^2+3y^2)\,dx\,dy$. Dalje, kako je $L^\star = L \cup L_1$, sledi

$$\int\limits_{L} -y^3\,dx + x^3\,dy = -\iint\limits_{\sigma} (3x^2+3y^2)\,dx\,dy - \int\limits_{L_1} -y^3\,dx + x^3\,dy.$$

Dvostruki integral nad σ računamo uvodeći smenu polarnim koordinatama $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho \in [0,2]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, odakle sledi

$$\iint\limits_{\sigma} (3x^2+3y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} 3\rho^2\cdot\rho\,d\rho = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^3\,d\rho = 3\int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2\,d\varphi = 3\int\limits_0^{2\pi} 4\,d\varphi = 12\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 24\pi.$$

Ako krivu L_1 parametrizujemo na sledeći način $L_1 = \{(x(t),y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 2\cos t, y(t) = 2\sin t, t \in \overleftarrow{\left[0,\frac{\pi}{3}\right]}\}$, onda je

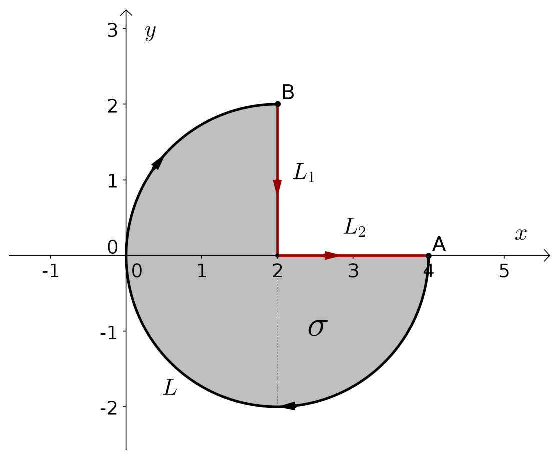
$$\begin{aligned}
\int\limits_{L_1} -y^3\,dx + x^3\,dy &= \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} (-(2\sin t)^3\cdot(-2\sin t) + (2\cos t)^3\cdot(2\cos t))\,dt = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} (16\sin^4 t + 16\cos^4 t)\,dt \\
&= 16\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} \left((\sin^2 t)^2 + (\cos^2 t)^2\right)\,dt = 16\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\right)\,dt \\
&= 16\cdot\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t + 1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t)\,dt = 4\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} (2 + 2\cos^2 2t)\,dt \\
&= 8\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} (1+\cos^2 2t)\,dt = 8\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} \left(1 + \frac{1+\cos 4t}{2}\right)\,dt = 8\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 4t\right)\,dt \\
&= 12\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} dt + 4\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{0} \cos 4t\,dt = 12\,t|_{\frac{\pi}{3}}^{0} + 4\cdot\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{0} \\
&= 12\left(0 - \frac{\pi}{3}\right) + \sin 0 - \sin\frac{4\pi}{3} = -4\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\int\limits_{L} -y^3\,dx + x^3\,dy = -\iint\limits_{\sigma} (3x^2+3y^2)\,dx\,dy - \int\limits_{L_1} -y^3\,dx + x^3\,dy = -24\pi - \left(-4\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -20\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7. Primenom formule Grina, izračunati vrednost krivolinijskog integrala $\displaystyle\int\limits_{L} -2y\,dx + x\,dy$ ako je kriva L duži luk kružnice $x^2+y^2 = 4x$ od tačke $A(4,0)$ do tačke $B(2,2)$.

Rešenje:



Kriva L nije zatvorena. Ako na krivu L, dodamo krive L_1 i L_2 dobijamo krivu $L^\star = L \cup L_1 \cup L_2$, koja je zatvorena, negativno orijentisana kriva. Stoga, kriva $-L^\star$ je zatvorena, pozitivno orijentisana kriva i oblast σ je ogranična krivom $-L^\star$.

Funkcije $P = -2y$, $Q = x$, $P_y = -2$ i $Q_x = 1$ su neprekidne nad σ, te su zadovoljeni uslovi Grinove teoreme i važi

$$\int\limits_{-L^\star} -2y\,dx + x\,dy = \iint\limits_{\sigma} (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma} (1-(-2))\,dx\,dy = 3\iint\limits_{\sigma} dx\,dy$$

$$= 3 \cdot P(\sigma) = 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2^2\pi = 9\pi.$$

Odakle je $\int\limits_{L^\star} -2y\,dx + x\,dy = -9\pi$. Kako je $L^\star = L \cup L_1 \cup L_2$, važi

$$\int\limits_{L} -2y\,dx + x\,dy = -9\pi - \int\limits_{L_1} -2y\,dx + x\,dy - \int\limits_{L_2} -2y\,dx + x\,dy$$

Krivu L_1 parametrizujemo na sledeći način $L_1 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = 2, y(t) = t, t \in \overleftarrow{[0,2]}\}$ i dobijamo

$$\int\limits_{L_1} -2y\,dx + x\,dy = \int\limits_{2}^{0} (-2t \cdot 0 + 2 \cdot 1)\,dt = 2\int\limits_{2}^{0} dt = 2\,t\big|_2^0 = -4.$$

Krivu L_2 parametrizujemo na sledeći način $L_2 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 0, t \in [2,4]\}$ i dobijamo

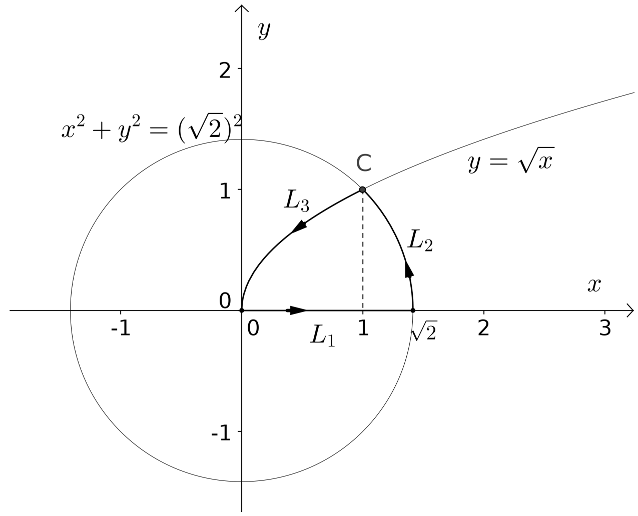
$$\int\limits_{L_2} -2y\,dx + x\,dy = \int\limits_{2}^{4} (0+0)\,dt = 0.$$

Konačno, vrednost traženog integrala je $\int\limits_{L} -2y\,dx + x\,dy = -9\pi - (-4) - 0 = 4 - 9\pi.$

Dodatni zadaci za vežbu:

1. Izračunati integral $\int\limits_{L} dx + y\,dy$ duž pozitivno orijentisane krive $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, 0 \le x \le \sqrt{2}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2, 1 \le x \le \sqrt{2}, y \ge 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{x}, 0 \le x \le 1\}$.

Rešenje: Kriva L je unija tri krive $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$.



$$\int_L dx + y\,dy = \int_{L_1} dx + y\,dy + \int_{L_2} dx + y\,dy + \int_{L_3} dx + y\,dy$$

Krivu L_1 možemo parametrizovati na sledeći način
$L_1 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = 0, t \in [0, \sqrt{2}]$, pri čemu je $x'(t) = 1, y'(t) = 0$. Stoga,

$$\int_{L_1} dx + y\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} (1 \cdot 1 + 0 \cdot 0)\,dt = \int_0^{\sqrt{2}} 1\,dt = \sqrt{2}.$$

Krivu L_2 parametrizujemo na sledeći način
$L_2 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = \sqrt{2}\cos t, y(t) = \sqrt{2}\sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\}$, pri čemu je $x'(t) = -\sqrt{2}\sin t, y'(t) = \sqrt{2}\cos t$. Prema tome

$$\int_{L_2} dx + y\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 \cdot (-\sqrt{2}\sin t) + \sqrt{2}\sin t \cdot \sqrt{2}\cos t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\sqrt{2}\sin t + \sin 2t)\,dt$$

$$= \sqrt{2}\,\cos t|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\cos 2t|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

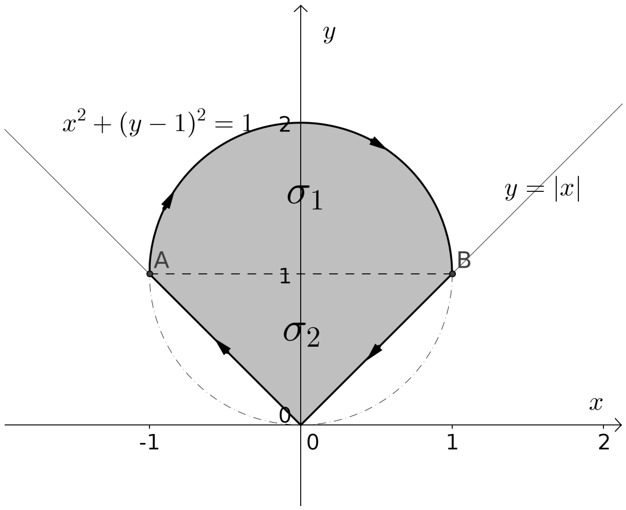
Parametrizujmo krivu L_3 na sledeći način $L_3 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : x(t) = t, y(t) = \sqrt{t}, t \in \overleftarrow{[0,1]}\}$, pri čemu je $x'(t) = 1, y'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$. Tada je

$$\int_{L_3} dx + y\,dy = \int_1^0 (1 + \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}})\,dt = \int_1^0 (1 + \frac{1}{2})\,dt = \frac{3}{2}\,t|_1^0 = -\frac{3}{2}.$$

Konačno, $\displaystyle\int_L dx + y\,dy = \sqrt{2} + \frac{3}{2} - \sqrt{2} - \frac{3}{2} = 0.$

2. Primenom formule Grina, izračunati vrednost krivolinijskog integrala $\displaystyle\int_L x^2\,dy$ ako je kriva $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2y, y \geq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|, -1 \leq x \leq 1\}$ negativno orijentisana.

Rešenje:



Kriva L je zatvorena, negativno orijentisana kriva, te je $-L$ zatvorena, pozitivno orijentisana kriva. Kako je oblast σ ograničena krivom $-L$ i funkcije $P=0$, $Q=x^2$, $P_y=0$ i $Q_x=2x$ neprekidne nad σ, zadovoljeni su uslovi Grinove teoreme i važi $\int\limits_{-L} x^2\,dy = \iint\limits_{\sigma} 2x\,dx\,dy$, odakle je $\int\limits_{L} x^2\,dy = -2\iint\limits_{\sigma} x\,dx\,dy$. Oblast σ možemo posmatrati kao uniju dve oblasti $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$, odakle je $\iint\limits_{\sigma} x\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma_1} x\,dx\,dy + \iint\limits_{\sigma_2} x\,dx\,dy$. Vrednost dvostrukog integrala nad σ_1 računamo uvodeći smenu polarnim koordinatama, $x=\rho\cos\varphi, y=1+\rho\sin\varphi, \rho\in[0,1], \varphi\in[0,\pi]$, i dobijamo

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\sigma_1} x\,dx\,dy &= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\cos\varphi\cdot\rho\,d\rho = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \cos\varphi\rho^2\,d\rho = \int\limits_0^{\pi} \cos\varphi\,\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1\,d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi\\ &= \frac{1}{3}\sin\varphi\Big|_0^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

Vrednost dvostrukog integrala nad σ_2 računamo na sledeći način

$$\iint\limits_{\sigma_2} x\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_{-y}^{y} x\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}\Big|_{-y}^{y}\,dy = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}(y^2-(-y)^2)\,dy = 0.$$

Zaključujemo da je $\int\limits_L x^2\,dy = -2\cdot\iint\limits_{\sigma} x\,dx\,dy = -2\cdot\left(\iint\limits_{\sigma_1} x\,dx\,dy + \iint\limits_{\sigma_2} x\,dx\,dy\right) = -2\cdot(0+0)=0.$