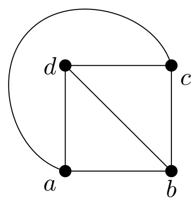
3.7 Planarni grafovi

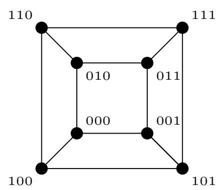
Kao šro smo do sada već primetili, jedan isti graf se može nacrtati na različite načine. Ako ga je moguće nacrtati tako da se grane ne seku, onda kažemo da je graf planaran.

Definicija 101 *Graf je planaran ako se može nacrtati u ravni tako da ne postoje grane koje se seku (osim eventualno zajednčkih čvorova). Za takvu grafičku reprezentaciju grafa reći ćemo da je planarna.*

Primer 22 *Grafovi K_4 i Q_3 su planarni. Njihove planarne reprezentacije su date na slici.*



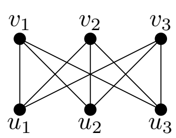
K_4



Q_3

Primer 23 *Kompletan bipartitan graf $K_{3,3}$ nije planaran. Dokazati!*

Dokaz. Pretpostavimo da je $K_{3,3}$ planaran graf.



$K_{3,3}$

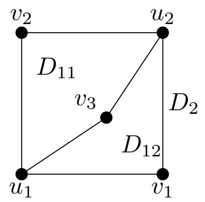
Primetimo da grane $\{u_1, v_1\}$, $\{v_1, u_2\}$, $\{u_2, v_2\}$, $\{v_2, u_1\}$ kreiraju zatvorenu krivu koja deli ravan na dve oblasti, označićemo ih sa D_1 i D_2. Imamo dve mogućnosti da nacrtamo čvor u_3.

(i) Ako čvor v_3 nacrtamo unutar oblasti D_1, za u_3 imamo jednu od tri mogućnosti:

(1) $u_3 \in D_{11}$: $\{u_3, v_1\}$ seče rub oblasti D_{11};

(2) $u_3 \in D_{12}$: $\{u_3, v_2\}$ seče rub oblasti D_{12};

(3) $u_3 \in D_2$: $\{u_3, v_3\}$ seče rub oblasti D_2.

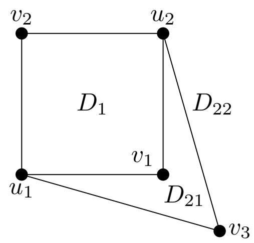


(ii) Ako čvor v_3 nacrtamo unutar oblasti D_2, za u_3 imamo jednu od tri mogućnosti:

(1) $u_3 \in D_1$: $\{u_3, v_3\}$ seče rub oblasti D_1;

(2) $u_3 \in D_{21}$: $\{u_3, v_2\}$ seče rub oblasti D_{21};

(3) $u_3 \in D_{22}$: $\{u_3, v_1\}$ seče rub oblasti D_{22}.



□

Planarna reprezentacija grafa deli ravan na konačan broj (ograničenih ili neograničenih) oblasti.

Teorema 102 (Ojlerova formula) *Neka je $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, povezan planaran prost graf i neka je f broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je*

$$f = |E| - |V| + 2.$$

Dokaz. Neka je $|E| = m$. Posmatrajmo planarnu reprezentaciju grafa. Neka je G_1 graf koji sadrži proizvoljnu granu grafa G i njoj incidentne čvorove. Ako je $m \geq 2$, konstruišimo dalje sukcesivno podgrafove $G_2, \ldots, G_m$ tako što ćemo svakom sledećem grafu dodati granu koja je incidentna sa jednim čvorom prethodnog podgrafa, kao i eventualno novi čvor incidentan sa tom granom. Takva grana sigurno postoji, zato što je graf povezan. Dokazaćemo da za svako $k \in \{1, \ldots, m\}$ važi

$$f_k = |E_k| - |V_k| + 2,$$

primenom matematičke indukcije.

<u>Baza $k = 1$:</u> $f_1 = |E_1| - |V_1| + 2 \Leftrightarrow 1 = 1 - 2 + 2$

<u>Induktivni korak $T_k \Rightarrow T_{k+1}$:</u> Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve vrednosti manje od k. Neka je $G_{k+1} = G_k + \{u, v\}$.

(i) Ako je $u, v \in V(G_k)$, onda je

$$\begin{array}{lcl} f_{k+1} & = & f_k + 1 \\ |V(G_{k+1})| & = & |V(G_k)| \\ |E(G_{k+1})| & = & |E(G_k)| + 1. \end{array}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned} f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2 \quad &\Leftarrow \quad f_k + 1 = |E(G_k)| + 1 - |V(G_k)| + 2 \\ &\Leftarrow \quad f_k = |E(G_k)| - |V(G_k)| + 2. \end{aligned}$$

(ii) Ako je $u \in V(G_k)$ i $v \notin V(G_k)$, onda je

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k \\ |V(G_{k+1})| &= |V(G_k)| + 1 \\ |E(G_{k+1})| &= |E(G_k)| + 1. \end{aligned}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned} f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2 \quad &\Leftarrow \quad f_k = |E(G_k)| + 1 - |V(G_k)| - 1 + 2 \\ &\Leftarrow \quad f_k = |E(G_k)| - |V(G_k)| + 2. \end{aligned}$$

□

Definicija 103 *Stepen oblasti D, u oznaci $\mathtt{st}(D)$ je broj grana na rubu te oblasti. Ako se grana pojavljuje dva puta na rubu, ona se računa dva puta.*

Ako graf ima samo dva čvora i jednu granu, onda taj graf određuje samo jednu oblast koja ima stepen dva. U slučaju da postoje bar tri čvora u povezanom grafu, stepen svake oblasti je bar tri.

Pretpostavimo da planarna reprezentacija grafa $G = (V, E)$ deli ravan na oblasti $D_1, \ldots, D_l$. Kako se svaka grana računa dva puta u sumi rubova oblasti, sledi

$$\sum_{1 \le i \le l} \mathtt{st}(D_i) = 2|E(G)|. \tag{3.2}$$

Corollary 104 *Neka je $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$, povezan planaran prost graf i neka je f broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Dokaz. Koristeći 3.3 i činjenicu da je za svak roblast $\mathtt{st}(D) \geq 3$ dobijamo

$$2|E| = \sum_{1 \le i \le l} \mathtt{st}(D_i) \geq 3 \cdot f \Rightarrow f \leq \frac{2}{3}|E|.$$

Iz Ojlerove formule dobijamo,oblast

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{2}{3}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6.$$

$\square$

Primer 24 *Kompletan graf K_5 nije planaran. Dokazati!*

Dokaz. Pretpostavimo da je K_5 planaran. Kako je $|V(K_5)| = 5$ i $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10$, na osnovu Posledice 112,

$$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \Leftrightarrow 10 \leq 9$$

što dovodi do kontradikcije. $\square$

Corollary 105 *Neka je $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$, povezan planaran prost graf bez kontura dužine 3. Tada je*

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

Dokaz. Ako u grafu ne postoje konture dužine tri, onda je stepen svake oblasti bar četiri. Odatle je

$$2|E| = \sum_{1 \leq i \leq l} \mathtt{st}(D_i) \geq 4 \cdot f \Rightarrow f \leq \frac{1}{2}|E|.$$

Iz Ojlerove formule dobijamo

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{1}{2}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 2|V| - 4.$$

Primer 25 *Kompletan graf $K_{3,3}$ nije planaran.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $K_{3,3}$ planaran. Kako je $|V(K_5)| = 6$ i $|E(K_{3,3})| = 3 \cdot 3 = 9$, na osnovu Posledice 112,

$$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 8$$

što dovodi do kontradikcije. $\square$

Corollary 106 *U svakom povezanom prostom grafu $G = (V, E)$ postoji čvor stepena manjeg od šest.*

Dokaz. Ako graf ima jedan ili dva čvora, tvrđenje direktno sledi. Ako graf ima bar tri čvora, pretpostavimo suprotno, da je stepen svakog čvora bar 6, onda je

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq 6|V|$$

Na osnovu Posledice 112 sledi

$$|E| \leq 3|V| - 6 \Leftrightarrow 2|E| \leq 6|V| - 12.$$

Tako smo dobili da je

$$6|V| \leq 2|E| \leq 6|V| - 12 \Leftrightarrow 0 \leq -12,$$

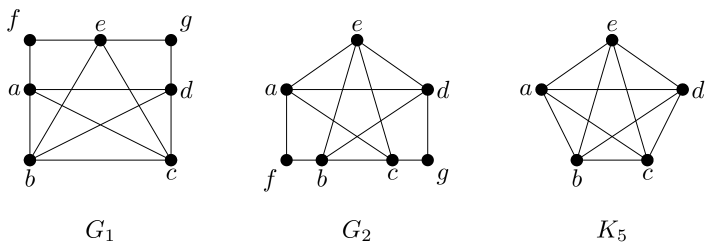
što dovodi do kontradikcije.

Prethodno smo pokazali da grafovi K_5 i $K_{3,3}$ nisu planarni. Jasno je da graf koji sadrži neki neplanaran graf ne može ni sam biti planaran, zato što bi njegova planarna reprezentacija uključivala planarnu reprezentaciju svakog njegovog pografa.Tako možemo zaključiti da graf koji kao podgraf ima K_5 ili $K_{3,3}$ ni sam nije planaran. U nastavku ćemo pokazati da slično tvđenje važi čak i ako ti podgrafovi nisu potpuno jednaki K_5 i $K_{3,3}$, ali se na neki poseban način mogu na njih svesti.

Ako u prostom planarnom grafu izvršimo deobu proizvoljne grane $\{u, v\}$ ubacivanjem novog čvora w i zamenom grane $\{u, v\}$ granama $\{u, w\}$ i $\{w, v\}$, graf ostaje planaran. Na taj način uvek dodajemo čvor stepena 2.

Definicija 107 *Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su homeomorfni ako mogu dobijeni od istog graf primenom konačno mnogo elementarnih deoba grana.*

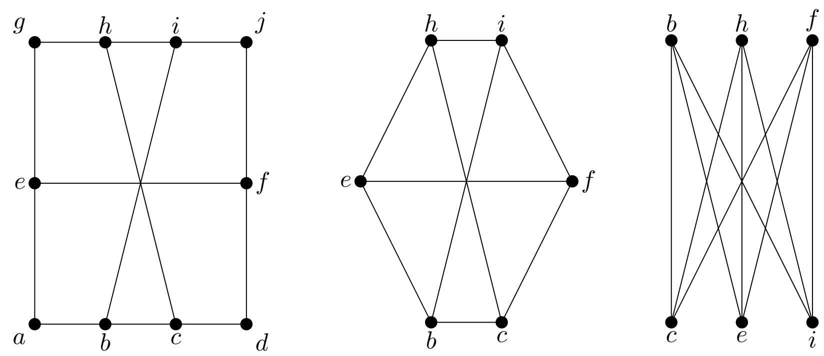
Primer 26 *Grafovi G_1 i G_2 su homeomorfni, zato što je G_1 dobijen od K_5 deobom grana $\{a, e\}$ i $\{e, d\}$, dok je G_2 dobijen od K_5 deobom grana $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$.*



Naredno tvđenje dajemo bez dokaza.

Teorema 108 (Kuratovski) *Graf $G = (V, E)$ nije planaran ako sadrži podgraf koji je homeomorfan sa $K_{3,3}$ ili K_5.*

Primer 27 *Pokazaćemo da graf G nije planaran, zato što je homeomorfan grafu $K_{3,3}$. Graf G je dobijen od grafa G_1 deobom grana $\{e,h\}$, $\{i,j\}$, $\{b,e\}$ i $\{f,c\}$. Kada dalje posmatramo G_1, možemo primetiti da skupovi $\{c,e,i\}$ i $\{b,f,h\}$ imaju osobinu da par čvorova iz istog skupu nije povezan granom, dok su parovi koji pripadaju različitim skupovima povezani granom. Ako čvorove drugačije rasporedimo onda graf G_1 možemo grafički predstaviti kao G_2. Sada se vidi da je G homeomorfan sa $K_{3,3}$, odakle zaključujemo da nije planaran.*



G G_1 G_2

3.7.1 Zadaci za vežbu

1. Neka je G povezan planaran graf sa m grana i $n \geq 4$ čvorova, koji ne sadrži konture dužine manje od 5. Pokazati da je $m \leq \frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$.

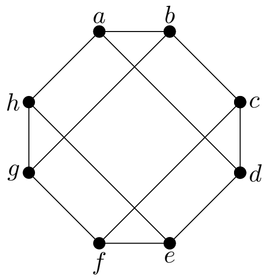
2. Neka je G povezan planaran graf sa 8 čvorova stepena 3. Na koliko oblasti planarna reprezentacija grafa G deli ravan?

3. Ispitati da li je $K_{2,7}$ planaran graf. Ako jeste, dati njegovu planarnu reprezentaciju i odrediti na koliko oblasti deli ravan. Ako nije, obrazložiti.

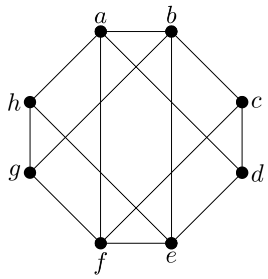
4. Ispitati da li je G_1 planaran graf. Ako jeste, dati njegovu planarnu reprezentaciju i odrediti na koliko oblasti deli ravan. Ako nije, obrazložiti.

5. Ispitati da li je G_2 planaran graf. Ako jeste, dati njegovu planarnu reprezentaciju i odrediti na koliko oblasti deli ravan. Ako nije, obrazložiti.

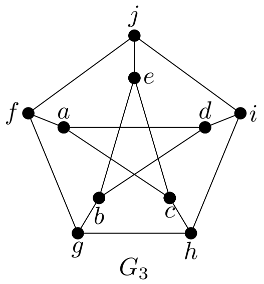
6. Pokazati da Petersenov graf G_3 nije planaran.



G_1



G_2



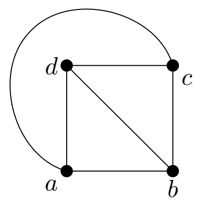
G_3

3.8 Planarni grafovi

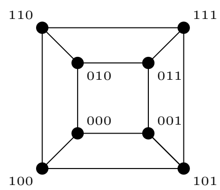
Kao šro smo do sada već primetili, jedan isti graf se može nacrtati na različite načine. Ako ga je moguće nacrtati tako da se grane ne seku, onda kažemo da je graf planaran.

Definicija 109 *Graf je planaran ako se može nacrtati u ravni tako da ne postoje grane koje se seku (osim eventualno zajednčkih čvorova). Za takvu grafičku reprezentaciju grafa reći ćemo da je planarna.*

Primer 28 *Grafovi K_4 i Q_3 su planarni. Njihove planarne reprezentacije su date na slici.*



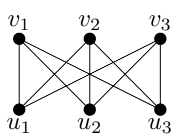
K_4



Q_3

Primer 29 *Kompletan bipartitan graf $K_{3,3}$ nije planaran. Dokazati!*

Dokaz. Pretpostavimo da je $K_{3,3}$ planaran graf.



$K_{3,3}$

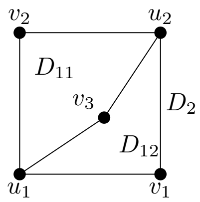
Primetimo da grane $\{u_1, v_1\}$, $\{v_1, u_2\}$, $\{u_2, v_2\}$, $\{v_2, u_1\}$ kreiraju zatvorenu krivu koja deli ravan na dve oblasti, označićemo ih sa D_1 i D_2. Imamo dve mogućnosti da nacrtamo čvor u_3.

(i) Ako čvor v_3 nacrtamo unutar oblasti D_1, za u_3 imamo jednu od tri mogućnosti:

(1) $u_3 \in D_{11} : \{u_3, v_1\}$ seče rub oblasti D_{11};

(2) $u_3 \in D_{12} : \{u_3, v_2\}$ seče rub oblasti D_{12};

(3) $u_3 \in D_2 : \{u_3, v_3\}$ seče rub oblasti D_2.

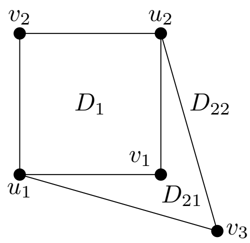


(ii) Ako čvor v_3 nacrtamo unutar oblasti D_2, za u_3 imamo jednu od tri mogućnosti:

(1) $u_3 \in D_1 : \{u_3, v_3\}$ seče rub oblasti D_1;

(2) $u_3 \in D_{21} : \{u_3, v_2\}$ seče rub oblasti D_{21};

(3) $u_3 \in D_{22} : \{u_3, v_1\}$ seče rub oblasti D_{22}.



□

Planarna reprezentacija grafa deli ravan na konačan broj (ograničenih ili neograničenih) oblasti.

Teorema 110 (Ojlerova formula) *Neka je $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, povezan planaran prost graf i neka je f broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je*

$$f = |E| - |V| + 2.$$

Dokaz. Neka je $|E| = m$. Posmatrajmo planarnu reprezentaciju grafa. Neka je G_1 graf koji sadrži proizvoljnu granu grafa G i njoj incidentne čvorove. Ako je $m \geq 2$, konstruišimo dalje sukcesivno podgrafove $G_2, \ldots, G_m$ tako što ćemo svakom sledećem grafu dodati granu koja je incidentna sa jednim čvorom prethodnog podgrafa, kao i eventualno novi čvor incidentan sa tom granom. Takva grana sigurno postoji, zato što je graf povezan. Dokazaćemo da za svako $k \in \{1, \ldots, m\}$ važi

$$f_k = |E_k| - |V_k| + 2,$$

primenom matematičke indukcije.

Baza $k = 1$: $f_1 = |E_1| - |V_1| + 2 \Leftrightarrow 1 = 1 - 2 + 2$

Induktivni korak $T_k \Rightarrow T_{k+1}$: Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve vrednosti manje od k. Neka je $G_{k+1} = G_k + \{u, v\}$.

(i) Ako je $u, v \in V(G_k)$, onda je

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k + 1 \\ |V(G_{k+1})| &= |V(G_k)| \\ |E(G_{k+1})| &= |E(G_k)| + 1. \end{aligned}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{array}{rcl} f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2 & \Leftarrow & f_k + 1 = |E(G_k)| + 1 - |V(G_k)| + 2 \\ & \Leftarrow & f_k = |E(G_k)| - |V(G_k)| + 2. \end{array}$$

(ii) Ako je $u \in V(G_k)$ i $v \notin V(G_k)$, onda je

$$\begin{array}{rcl} f_{k+1} & = & f_k \\ |V(G_{k+1})| & = & |V(G_k)| + 1 \\ |E(G_{k+1})| & = & |E(G_k)| + 1. \end{array}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{array}{rcl} f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2 & \Leftarrow & f_k = |E(G_k)| + 1 - |V(G_k)| - 1 + 2 \\ & \Leftarrow & f_k = |E(G_k)| - |V(G_k)| + 2. \end{array}$$

□

Definicija 111 *Stepen oblasti D, u oznaci $\mathtt{st}(D)$ je broj grana na rubu te oblasti. Ako se grana pojavljuje dva puta na rubu, ona se računa dva puta.*

Ako graf ima samo dva čvora i jednu granu, onda taj graf određuje samo jednu oblast koja ima stepen dva. U slučaju da postoje bar tri čvora u povezanom grafu, stepen svake oblasti je bar tri.

Pretpostavimo da planarna reprezentacija grafa $G = (V, E)$ deli ravan na oblasti $D_1, \ldots, D_l$. Kako se svaka grana računa dva puta u sumi rubova oblasti, sledi

$$\sum_{1 \le i \le l} \mathtt{st}(D_i) = 2|E(G)|. \tag{3.3}$$

Corollary 112 *Neka je $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$, povezan planaran prost graf i neka je f broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Dokaz. Koristeći 3.3 i činjenicu da je za svak roblast $\mathtt{st}(D) \geq 3$ dobijamo

$$2|E| = \sum_{1 \le i \le l} \mathtt{st}(D_i) \geq 3 \cdot f \Rightarrow f \leq \frac{2}{3}|E|.$$

Iz Ojlerove formule dobijamo,oblast

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{2}{3}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6.$$

□

Primer 30 *Kompletan graf K_5 nije planaran. Dokazati!*

Dokaz. Pretpostavimo da je K_5 planaran. Kako je $|V(K_5)| = 5$ i $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10$, na osnovu Posledice 112,

$$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \Leftrightarrow 10 \leq 9$$

što dovodi do kontradikcije. □

Corollary 113 *Neka je $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$, povezan planaran prost graf bez kontura dužine 3. Tada je*

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

Dokaz. Ako u grafu ne postoje konture dužine tri, onda je stepen svake oblasti bar četiri. Odatle je

$$2|E| = \sum_{1 \leq i \leq l} \mathtt{st}(D_i) \geq 4 \cdot f \Rightarrow f \leq \frac{1}{2}|E|.$$

Iz Ojlerove formule dobijamo

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{1}{2}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 2|V| - 4.$$

Primer 31 *Kompletan graf $K_{3,3}$ nije planaran.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $K_{3,3}$ planaran. Kako je $|V(K_5)| = 6$ i $|E(K_{3,3})| = 3 \cdot 3 = 9$, na osnovu Posledice 112,

$$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 8$$

što dovodi do kontradikcije. □

Corollary 114 *U svakom povezanom prostom grafu $G = (V, E)$ postoji čvor stepena manjeg od šest.*

Dokaz. Ako graf ima jedan ili dva čvora, tvrdenje direktno sledi. Ako graf ima bar tri čvora, pretpostavimo suprotno, da je stepen svakog čvora bar 6, onda je

$$2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq 6|V|$$

Na osnovu Posledice 112 sledi

$$|E| \leq 3|V| - 6 \Leftrightarrow 2|E| \leq 6|V| - 12.$$

Tako smo dobili da je

$$6|V| \leq 2|E| \leq 6|V| - 12 \Leftrightarrow 0 \leq -12,$$

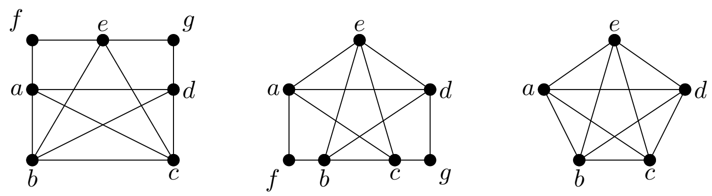
što dovodi do kontradikcije.

Prethodno smo pokazali da grafovi K_5 i $K_{3,3}$ nisu planarni. Jasno je da graf koji sadrži neki neplanaran graf ne može ni sam biti planaran, zato što bi njegova planarna reprezentacija uključivala planarnu reprezentaciju svakog njegovog pografa.Tako možemo zaključiti da graf koji kao podgraf ima K_5 ili $K_{3,3}$ ni sam nije planaran. U nastavku ćemo pokazati da slično tvdenje važi čak i ako ti podgrafovi nisu potpuno jednaki K_5 i $K_{3,3}$, ali se na neki poseban način mogu na njih svesti.

Ako u prostom planarnom grafu izvršimo deobu proizvoljne grane $\{u, v\}$ ubacivanjem novog čvora w i zamenom grane $\{u, v\}$ granama $\{u, w\}$ i $\{w, v\}$, graf ostaje planaran. Na taj način uvek dodajemo čvor stepena 2.

Definicija 115 *Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su homeomorfni ako mogu dobijeni od istog graf primenom konačno mnogo elementarnih deoba grana.*

Primer 32 *Grafovi G_1 i G_2 su homeomorfni, zato što je G_1 dobijen od K_5 deobom grana $\{a, e\}$ i $\{e, d\}$, dok je G_2 dobijen od K_5 deobom grana $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$.*

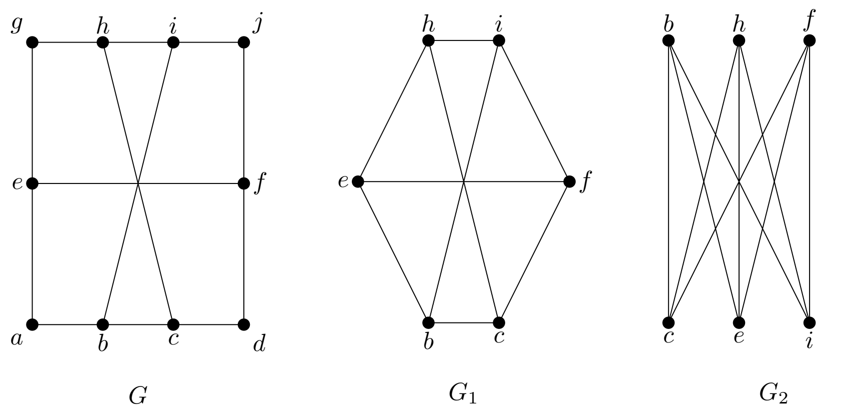


G_1 G_2 K_5

Naredno tvđenje dajemo bez dokaza.

Teorema 116 (Kuratovski) *Graf $G = (V, E)$ nije planaran ako sadrži podgraf koji je homeomorfan sa $K_{3,3}$ ili K_5.*

Primer 33 *Pokazaćemo da graf G nije planaran, zato što je homeomorfan grafu $K_{3,3}$. Graf G je dobijen od grafa G_1 deobom grana $\{e, h\}$, $\{i, j\}$, $\{b, e\}$ i $\{f, c\}$. Kada dalje posmatramo G_1, možemo primetiti da skupovi $\{c, e, i\}$ i $\{b, f, h\}$ imaju osobinu da par čvorova iz istog skupu nije povezan granom, dok su parovi koji pripadaju različitim skupovima povezani granom. Ako čvorove drugačije rasporedimo onda graf G_1 možemo grafički predstaviti kao G_2. Sada se vidi da je G homeomorfan sa $K_{3,3}$, odakle zaključujemo da nije planaran.*



3.8.1 Zadaci za vežbu

1. Neka je G povezan planaran graf sa m grana i $n \geq 4$ čvorova, koji ne sadrži konture dužine manje od 5. Pokazati da je $m \leq \frac{5}{3}n - \frac{10}{3}$.

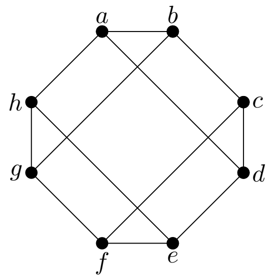
2. Neka je G povezan planaran graf sa 8 čvorova stepena 3. Na koliko oblasti planarna reprezentacija grafa G deli ravan?

3. Ispitati da li je $K_{2,7}$ planaran graf. Ako jeste, dati njegovu planarnu reprezentaciju i odrediti na koliko oblasti deli ravan. Ako nije, obrazložiti.

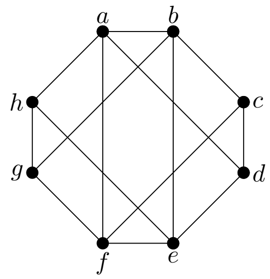
4. Ispitati da li je G_1 planaran graf. Ako jeste, dati njegovu planarnu reprezentaciju i odrediti na koliko oblasti deli ravan. Ako nije, obrazložiti.

5. Ispitati da li je G_2 planaran graf. Ako jeste, dati njegovu planarnu reprezentaciju i odrediti na koliko oblasti deli ravan. Ako nije, obrazložiti.

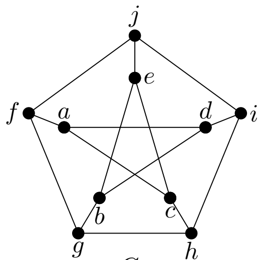
6. Pokazati da Petersenov graf G_3 nije planaran.



G_1



G_2



G_3