

## Основи теорије графова и комбинаторике, ИИ

## Колоквијум I

1. На колико начина 9 студената можемо поделити у три тима за израду пројектног задатка, ако у сваком тиму треба да буде бар два студента? (Редослед избора тимова није битан.)
2. Доказати да важи 
$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = -\frac{1}{n+1}.$$
3. Колико има пермутација скупа  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  које не садрже два узастопна природна броја у растућем поретку? (На пример, пермутација 52431 је добра пермутација, али пермутација 52341 није добра.)
4. Решити рекурентну релацију

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}, \text{ за } n \geq 3,$$

ако је  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = -1$  и  $a_2 = 3$ .

## Колоквијум II

1. Нека је  $G$  повезан граф у ком сви чворови имају паран степен. Доказати да за сваки чвор  $v \in V(G)$ , граф  $G - v$  има највише  $\frac{1}{2} d_G(v)$  компоненти повезаности.
2. Испитати да ли постоји стабло са 15 чворова у ком три чвора имају степен 6.
3. Радна група има 10 чланова. На претходним састанцима радне групе су сви чланови седели поред највише четири друга члана. Доказати да ће на наредном састанку бити могуће да чланови радне групе седну око округлог стола тако да нико не седи поред особа поред којих је седео на претходним састанцима.
4. Граф  $G$  се добија уклањањем две гране из комплетног графа  $K_6$ . Доказати да граф  $G$  није планаран граф.

Колоквијум I

1. Колико се природних бројева између 2000 и 5000 може написати помоћу цифара 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, ако се
  - а) цифре не могу понављати;
  - б) цифре могу понављати и добијени број је непаран?
2. На колико начина 6 студената можемо поделити у два тима за израду пројектног задатка, ако у сваком тиму треба да буде бар два студента? (Редослед избора тимова није битан.)
3. а) Доказати да важи 
$$\binom{n}{m-1} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} = \binom{n+1}{m}.$$
б) Израчунати 
$$\sum_{k=0}^n (2^k + (-1)^k) \binom{n}{k}.$$
4. Два броја су узајамно проста уколико немају заједничке делиоце. Одредити колико бројева из скупа  $\{1, 2, 3, \dots, 420\}$  је узајамно просто са бројем 210.

Колоквијум II

1. Испитати да ли је могуће пронаћи групу од седам људи, тако да свака особа у групи познаје тачно три друге особе.
2. Нека је  $G$  повезан граф. Доказати да за сваки чвор  $v \in V(G)$ , граф  $G - v$  има највише  $d_G(v)$  компоненти повезаности.
3. Да ли је могуће конструисати стабло са 9 чворова, при чему чворови стабла имају следеће степене 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1? (Одговор је потребно образложити!)
4. Нека је дат граф  $G$  са 12 чворова. Ако за максималан степен чворова графа  $G$  важи  $\Delta(G) \leq 5$ , доказати да је граф  $\overline{G}$  Хамилтонов.