

IME I PREZIME _____

BROJ INDEKSA _____

Predispitne obaveze 1
20 poena

1. [2 poena] Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) prostor verovatnoće i $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$.

Događaji A_1, A_2, \dots su nezavisni u parovima

ako za $\forall i, j \in \{1, 2, \dots\}$ $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, tj

Događaji A_1, A_2, \dots su nezavisni u ukupnosti (totalno nezavisni) $\forall m \geq 2 \quad \forall i_1, \dots, i_m$ u nekoj odboj
razlomljen $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_m})$

Objasniti vezu između nezavisnosti u parovima i nezavisnosti u ukupnosti.

Uz nezavisnosti u ukupnosti sledi nezavisnost u parovima

2. [2 poena] Definirati funkciju raspodele jednodimenzionalne slučajne promenljive i navesti njene osobine

NEKA JE X SLUČAJNA PROMENLJIVA NA (Ω, \mathcal{F}, P) . Φ -JA $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

Def. KA $F_X(x) = P(X \leq x)$ SE NAZIVA Φ -JA RASPODELE SL. PROM. X

- 1) $F_X(-\infty) = 0$ 3) MONOTONO NEOPADAJUĆA 5) $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$
2) $F_X(+\infty) = 1$ 4) NEPREKIDNA SA LEVA

3. [5 poena] Neka je $F_X(x) = \begin{cases} a, & x \leq 0 \\ bx, & 0 < x \leq 1 \\ cx^2, & 1 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$ Odrediti vrednosti realnih parametara a, b i c tako da $F(x)$ bude

funkcija raspodele neke slučajne promenljive.

$\frac{a}{a} \quad \frac{bx}{1} \quad \frac{cx^2}{3} \quad \frac{1}{1}$

$F_X(-\infty) = 0$

$a = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F_X(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} bx = \lim_{x \rightarrow 1^+} cx^2$
 $b = c$

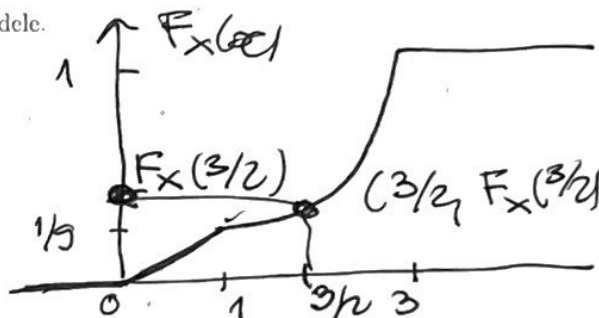
$\lim_{x \rightarrow 3^-} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} F_X(x)$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} cx^2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} 1$
 $9c = 1$

$\Rightarrow c = 1/9 \wedge b = 1/9$

Izračunati verovatnoću $P(X < \frac{3}{2})$ i predstaviti je na grafiku funkcije raspodele.

$P(X < \frac{3}{2}) = F_X(\frac{3}{2}) = \frac{1}{9} \cdot (\frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$



Da li je X slučajna promenljiva neprekidnog tipa? Objasniti odgovor! Ako jeste, odrediti funkciju gustine slučajne promenljive X .

Ne! p

$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & x \in (0, 1] \\ \frac{2}{9}x, & x \in (1, 3) \\ 0, & \text{u svakom drugom slučaju} \end{cases}$

4. [2 poena] U kutiji se nalaze 2 kuglice bele boje i 1 kuglica zelene boje.

Ako Pera izvlači jednu po jednu kuglicu, **sa vraćanjem** izvučene kuglice u kutiju, dok ne izvuče kuglicu zelene boje, izračunati očekivani broj izvlačenja.

$$X: g(1/3) \quad E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/3} = 3$$

Ako Pera izvlači jednu po jednu kuglicu, **bez vraćanja** izvučene kuglice u kutiju, dok ne izvuče kuglicu zelene boje, izračunati očekivani broj izvlačenja.

$$Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$p(1) = p(2) = \frac{1}{3}$$

$$p(2) = P(BZ) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$P(3) = P(BBZ) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

5. [1 poen] Definirati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y .

Ako je $z \in \mathbb{R}^2$ $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ na svim x i y nezavisne, tje su $F_{X,Y}$, F_X i F_Y ϕ -7e razbijene n. n. (X,Y) , X i Y , ρ -son

6. [2 poena] Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele verovatnoća $X: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$. Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive $Y = |X|$.

$$Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.1+0.1 & 0.2+0.6 \end{pmatrix}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1 \\ 0.2, & 1 < y \leq 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

7. [6 poena] Tačka (X,Y) se na slučajan način bira iz trougla sa temenima u tačkama $O(0,0)$, $A(2,0)$ i $B(2,1)$.

Odrediti funkciju gustine slučajne promenljive $(X,Y): \mathcal{U}(T)$

$$\varphi_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Pov}(T)} = \frac{1}{1} = 1, & (x,y) \in T \\ 0, & \text{uHCHe} \end{cases}$$

Odrediti marginalnu funkciju gustine slučajne promenljive Y .

$$y \in (0,1): \varphi_Y(y) = \int_{2y}^2 1 \, dx = 2 - 2y$$

$$y \notin (0,1): \varphi_Y(y) = 0$$

Odrediti funkciju gustine slučajne promenljive $X|Y=y$.

3c $y \in (0,1)$

$$\varphi_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-2y}, & x \in (2y, 2) \\ 0, & \text{uHCHe} \end{cases}$$

Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive $X|Y=y$.

$$F_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2y \\ \int_{2y}^x \frac{1}{2-2y} \, dt, & 2y < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Izračunati matematičko očekivanje slučajne promenljive $X|Y=y$.

$$E(X|Y=y) = \int_{2y}^2 x \cdot \frac{1}{2-2y} \, dx$$

