

Predispitne obaveze 1 – 20 poena

1. [3 poena] Napisati klasičnu (Laplasovu) definiciju verovatnoće.

— Ω končan
elem. sol. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Kockica za "Ne ljuti se čoveče" baca se jednom. Ispisati skup elementarnih događaja $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

Izračunati verovatnoću da prilikom bacanja kockice padne neparan broj tačkica $P(A) = \frac{3}{6}$ $A = \{1, 3, 5\}$

- Ako je prilikom bacanja kockice pao neparan broj tačkica izračunati verovatnoću da je taj broj manji od 5.

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$AB = \{1, 3\}$$

2. [3 poena] Napisati za koje slučajne promenljive važe navedene jednakosti

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{yBek}$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad \text{Ako X i Y su nezavisne}$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) \quad \text{Hezikracije}$$

Koristeći osobine matematičkog očekivanja i disperzije napisati jednakosti koje važe

$$E(1 - X) = 1 - E(X)$$

$$D(1 - X) = D(-X) = (-1)^2 D(X) = D(X)$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 P(x) \quad \text{(za diskretan ili neprekidan slučaj)}$$

$$\sum x^2 q_x(x) dx$$

TEOREM

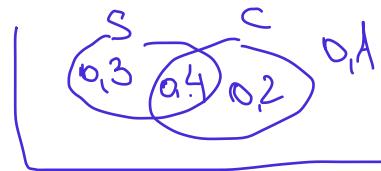
Harmonički

3. [3 poena] Verovatnoća da dete jede sladoled je 0.7, a verovatnoća da jede čokoladu je 0.6. Verovatnoća da jede bar jednu poslasticu je 0.9.

$$P(S) = 0.7 \quad P(C) = 0.6 \quad P(S \cup C) = 0.9$$

Izračunati verovatnoću da će dete jesti obe poslastice.

$$P(S \cap C) = P(S) + P(C) - P(S \cup C) \\ 0.9 = 0.7 + 0.6 - P(S \cap C) \\ P(S \cap C) = 0.4$$



Izračunati verovatnoću da će dete jesti tačno jednu poslasticu.

$$P(A) = 0.3 + 0.2 = 0.5$$

$$B$$

Ako je dete jesti tačno jednu poslasticu izračunati verovatnoću da je jesti sladoled.

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5}$$



4. [1 poen] Slučajna promenljiva X ima binomnu $B(30, \frac{1}{3})$ raspodelu. Napisati standardizovanu (normalizovanu) slučajnu promenljivu i njeno matematičko očekivanje i disperziju.

$$E(X) = np = 30 \cdot \frac{1}{3} = 10$$

$$X^* = \frac{X - 10}{\sqrt{20/3}}$$

$$D(X) = npq = 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

$$E(X^*) = 0$$

$$D(X^*) = 1$$

① Da mu ay going to a ~~work~~ ~~to go~~ ~~can go~~
u ~~where~~ ~~like~~ ~~you can say~~ ~~say~~ ~~like~~ ?

② — WTO —
— Hezaburukure ?

① $P(S \cup C) \stackrel{?}{=} P(S) + P(C)$
 $0.9 \neq 0.4 + 0.6 \Rightarrow$ ~~they~~ ~~say~~

② $P(S \cap C) \stackrel{?}{=} P(S)P(C)$
 $0.4 \neq 0.4 \cdot 0.6 \Rightarrow$ ~~they~~ ~~say~~

5. [5 poen] Slučajna promenljiva X data je gustom raspodele verovatnoća $\varphi_X(x) = \begin{cases} ax^3, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases}$.

Odrediti konstantu a . (Izračunati integral!)

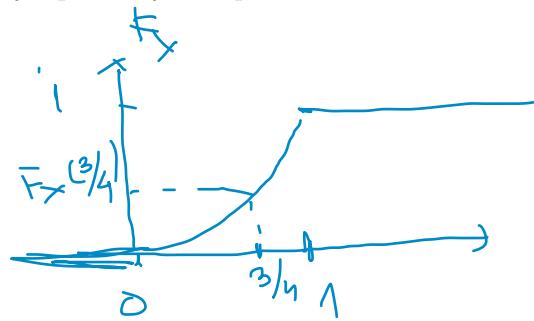
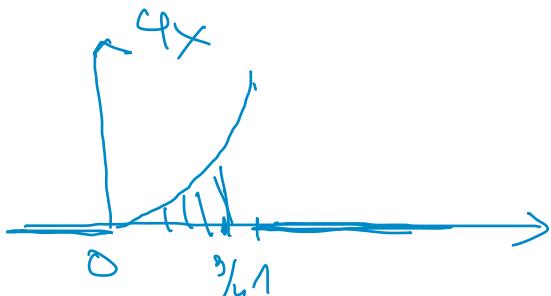
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x) dx = \int_0^1 ax^3 dx = a \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 4$$

Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X .

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt = \begin{cases} x \leq 0: 0 \\ 0 < x \leq 1: \int_0^x 4t^3 dt = t^4 \Big|_0^x = x^4 \\ x > 1: 1 \end{cases}$$

$$P(X = \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2})$$

Na grafiku gustine i na grafiku funkcije raspodele slučajne promenljive X predstaviti verovatnoću $P(X < \frac{3}{4})$ i izračunati je.



6. [6 poena] Slučajna promenljiva (X, Y) data je zakonom raspodele verovatnoća

X/Y	0	1	2	
1	0.1	0.3	0	0.4
2	0.2	0.3	0.1	0.6
			0.1	

Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive X .

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y .

$$P(X=x_i, Y=y_j) \stackrel{?}{=} P(X=x_i) P(Y=y_j)$$

$$P(X=1, Y=2) \stackrel{?}{=} P(X=1) P(Y=2)$$

$$0 \neq 0.4 \cdot 0.1 \quad \text{Nije nezavisno.}$$

Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive $Y|X=2$.

$$Y|X=2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2/6 & 3/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$P(Y=0|X=2) = \frac{P(X=2, Y=0)}{P(X=2)} = \frac{0.2}{0.6} = 2/6$$

$$P(Y=1|X=2) = \frac{P(X=2, Y=1)}{P(X=2)} = \frac{0.3}{0.6} = 3/6$$

Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive $Y|X=2$.

$$F_{Y|X=2}(y) = \begin{cases} y \leq 0: 0 \\ 0 < y \leq 1: 2/6 \\ 1 < y \leq 2: 5/6 \\ y > 2: 1 \end{cases} \quad (= 2/6 + 3/6)$$

Izračunati matematičko očekivanje slučajne promenljive $Y|X=2$.

$$E(Y|X=2) = 0 \cdot \frac{2}{6} + 1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6}$$

Deo završnog ispita 1 – 40 poena

1. [10 poena] Na stolu se nalaze dve kutije. U prvoj kutiji su dve kuglice zelene boje i tri kuglice crvene boje, a u drugoj kutiji jedna kuglica zelene boje i dve kuglice crvene boje. Peca na slučajan način bira jednu kuglicu iz prve kutije i prebacuje je u drugu kutiju. Nakon prebacivanja kuglice, iz druge kutije Peca na slučajan način bira **odjednom** dve kuglice. Izračunati verovatnoću da će Peca izvući kuglice različitih boja. Ako je Peca iz druge kutije izvukao kuglice istih boja izračunati verovatnoću da je iz prve u drugu kutiju prebacio kuglicu zelene boje.
2. [10 poena] Novčić se baca tri puta i ako sva tri puta padne ista strana izvodi se još jedno bacanje novčića. Slučajna promenljiva X predstavlja broj palih pisama, a slučajna promenljiva Y broj izvedenih bacanja novčića.
 - a) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive (X, Y) .
 - b) Odrediti zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive X i njenu funkciju raspodele.
 - c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Z = \min\{X, Y\}$.
3. [10 poena] Slučajna promenljiva X je data funkcijom gustine $\varphi_X(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$.
 - a) Izračunati konstantu a .
 - b) Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X .
 - c) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y = \max\{X, \frac{1}{2}\}$. Da li je Y slučajna promenljiva neprekidnog tipa?
4. [10 poena] Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive, pri čemu X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(2)$ raspodelu, a Y uniformnu $\mathcal{U}(1, 3)$ raspodelu. Odrediti raspodelu (funkciju gustine ili funkciju raspodele) slučajne promenljive $Z = X - Y$.