· Prošli put: Ako je f analitička na oblasti D

tada $\oint_L f(z)dz = 0$ nad proizvoljnom zatvorenom orijentisanom krivom L u D.

Pr. Izračunati sledeće integrale:

Kružnica $|z-z_0|=r$ sa centrom u z_0 p.p. r

a) $\oint_L (z^2+2z-2i)dz \quad L: |z|=1.$

$f(z)=z^2+2z-2i$

$f'(z)=2z+2$ postoji nad $\mathbb{C} \Rightarrow f$ je analitička nad $\mathbb{C}$.

$\oint_L = 0$

b) $I=\int_L (z^3+2iz^2)dz$ gde je L putanja od $A(1,0)$ do $B(2,1)$.

$f(z)=z^3+2iz^2$

$f'(z)=3z^2+4iz$ postoji nad $\mathbb{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ je analitička nad $\mathbb{C}$

integral po proizvoljnoj zatvorenoj krivoj je 0. $\Rightarrow \int_L$ ne zavisi od putanje integracije.

$$I=\int_A^B (z^3+2iz^2)dz = \frac{z^4}{4}\Big|_A^B + 2i\frac{z^3}{3}\Big|_A^B = \frac{1}{4}((2+i)^4-1) + \frac{2i}{3}((2+i)^3-1).$$

c) $I=\int_A^B (2 e^z+3i+2z)dz \quad A(0,1) \quad B(1,1).$

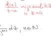
$f(z)=2\cdot e^z+3i+2z$

$f'(z)=2\cdot e^z+2$ postoji nad $\mathbb{C} \Rightarrow f$ je analitička nad $\mathbb{C}$

$$I = 2\cdot e^z\Big|_A^B + 3i\cdot z\Big|_A^B + \cancel{2}\frac{z^2}{\cancel{2}}\Big|_A^B = 2\cdot(e^{1+i}-e^i) + 3i(1+\cancel{i}-\cancel{i}) + (1+i)^2 - i^2 = 2\cdot e^i(e-1)+3i+2i+1 = 2\cdot e^i(e-1)+5i+1$$

Košijeve integralne formule

Neka je f analitička nad oblasti $D \subseteq \mathbb{C}$ i neka je L zatvorena orijentisana kriva u D. Tada,



$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z-a}dz,$$

gde je a tačka unutar oblasti koju ograničava kriva L.

$\frac{f(z)}{z-a}$ nije analitička u $z=a$

Šta više, važi:

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Pr. Izračunati sledeće integrale.

a) $I=\oint_L \frac{e^z}{z-3}dz \quad L: |z|=4$

$f(z)=e^z$ je analitička

$I = 2\pi i\, f(3) = 2\pi i\, e^3$

b) $I=\oint_L \frac{z^3}{(z-1)^2}dz \quad L: |z-i|=4$

$f(z)=z^3$

$I=\frac{2\pi i}{1!}\cdot f'(z)\Big|_{z=1} = 2\pi i\, 3\cdot z^2\Big|_{z=1} = 6\pi i$

Pr. Izračunati $I=\oint_L \frac{dz}{(z-1)^2(z-2)}$ ako je L

a) $L: |z|=\frac{1}{2}$ $\quad f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z-2)}$ je analitička nad oblasti $|z|\le\frac{1}{2}$

$\Rightarrow I=0$

b) $L: |z|=\frac{3}{2}$

$I=\oint_L \frac{\frac{dz}{z-2}}{(z-1)^2} \quad f(z)=\frac{1}{z-2}=(z-2)^{-1}$

$I=\frac{2\pi i}{1!}f'(z)\Big|_{z=1} = 2\pi i\left(\frac{-1}{(z-2)^2}\right)\Big|_{z=1} = \frac{-2\pi i}{(1-2)^2}$

c) $L: |z|=3$

$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{C}{z-2}$ (rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka...)

$A=-1 \quad B=-1 \quad C=1$

$$I=-\oint_L\frac{1\cdot dz}{z-1}-\oint_L\frac{1\cdot dz}{(z-1)^2}+\oint_L\frac{1\cdot dz}{z-2} = -\cancel{2\pi i\cdot 1} - 2\pi i(1)'\Big|_{z=1} + \cancel{2\pi i\cdot 1} = 0.$$

· Posledica Košijevih integralnih formula

Neka je f-ja f analitička u oblasti ograničenoj krivom L osim u tačkama $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tada

$$\oint_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\oint_{L_k} f(z)dz$$ gde su L_k konture oko tačaka a_k koje nasleđuju orijentaciju krive L.

Pr. Izračunati $I=\oint_L \frac{\cos z}{(z-i)(z+1)}dz$ ako je $L: |z|=2$

$$\oint_L = \oint_{L_1} + \oint_{L_2} = \frac{2\pi i}{1+i}(\cos(i)-\cos(1))$$

$$\oint_{L_1}\frac{\frac{\cos z}{z+1}}{z-i}dz = 2\pi i\cdot\frac{\cos z}{z+1}\Big|_{z=i} = 2\pi i\,\frac{\cos i}{1+i}$$

$$\oint_{L_2}\frac{\frac{\cos z}{z-i}}{z+1}dz = 2\pi i\,\frac{\cos z}{z-i}\Big|_{z=-1} = 2\pi i\,\frac{\cos(-1)}{-1-i} = -2\pi i\,\frac{\cos 1}{1+i}$$

Pr. Izračunati $\oint_L \frac{dz}{z^2-4} \quad L: |z+2|=2.$

$$I=\oint_L\frac{dz}{(z-2)(z+2)} = \oint_L \frac{\frac{dz}{z-2}}{z+2} = 2\pi i\,\frac{1}{z-2}\Big|_{z=-2} = \frac{2\pi i}{-4} = -\frac{\pi i}{2}.$$