Chapter 2

Teorija grafova

Za grafičko opisivanje mnogih problema iz primene korisno je uvesti skup čvorova i skup linija koje povezuju neke od njih, a koje pokazuju da među tim čvorovima postoje odgovarajuće veze. Za tu svrhu je u matematici uveden pojam grafa.

Definicija 49 *Usmeren multigraf (multidigraf) je uređena trojka* $G = (V, E, \psi)$, *gde je*

(i) $V \neq \emptyset$ *konačan skup čvorova,*

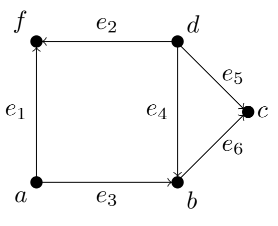
(ii) E *je skup grana, pri čemu je* $V \cap E = \emptyset$ *i*

(iii) $\psi : E \to \{(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$ *funkcija incidencije.*

Za grane e i e' sa osobinom $\psi(e) = \psi(e')$ kažemo da su paralelne. Treba napomenuti da ćemo proučavati samo konačne grafove, tj. grafove sa konačno mnogo čvorova, kao što je navedeno u prethodnoj definiciji. U literaturi postoji i pojam beskonačnog grafa, kao grafa sa beskonačnim skupom čvorova.

Primer 3 *Na slici je grafički prikazan graf* $G = (V, E, \psi)$ *u kojem je*

$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d, f\} \\ E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \\ \psi &= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ (a,f) & (d,f) & (a,b) & (d,b) & (d,c) & (b,c) \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Mi ćemo se uglavnom baviti grafovima u kojima grane nisu usmerene i u kojima nema paralelnih grana. Za takav graf ćemo kazati da je prost.

Definicija 50 *Prost (neusmeren) graf je uređen par $G = (V, E)$, gde je*

(i) $V \neq \emptyset$ konačan skup čvorova i

(ii) $E \subseteq \binom{V}{2}$ je skup grana.

Za dva čvora u i v prostog grafa kažemo da su susedni ako leže na krajevima iste grane e. Za takvu granu kažemo da je incidentna sa čvorovima u i v, a takođe i da povezuje čvorove u i v.

Definicija 51 *Neka je $G = (V, E)$ prost graf i neka je $v \in V$. Broj grana koje su incidentne sa čvorom v nazivamo stepenom čvora v u grafu G i označavamo* $\mathtt{deg}_G(v)$.

Znači, ako sa $\omega_G(v)$ skup čvorova koji su susedni sa v u grafu G, a sa $\Omega_G(v)$ skup grana koje su incidentne sa v, onda je

$$deg_G(v) = |\omega_G(v)| = |\Omega_G(v)|.$$

Uvodimo još tri oznake:

- Broj $\delta(G) = \min\{deg_G(v) : v \in V\}$ je najmanji stepen grafa G.
- Broj $\delta(G) = \min\{deg_G(v) : v \in V\}$ je najveći stepen grafa G.

Prilikom proučavanja osobina grafa $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$, često je korisno posmatrati multiskup stepena njegovih čvorova

$$\{\{deg_G(v_1), \ldots, deg_G(v_n)\}\}.$$

U literaturi se ovaj pojam pojavljuje i kao grafovski niz, tj. kao niz stepena grafa. Kako nije važno uređenje ovog niza, uobičajeno je koristiti neopadajući redosled. Iz istog razloga, smatramo da je korišćenje multiskupa u ovom slučaju odgovarajuće.

Definicija 52 *Za multiskup nenegativnih celih brojeva $\{\{d_1, \ldots, d_n\}\}$ kažemo da je grafovski multiskup ako postoji graf $G = (V, E)$ sa osobinom $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i $d_i = deg_G(v_i)$ za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Jedna va{vzna osobina grafovskog multiskupa formulisana je sledećom lemom.

Lema 53 *Neka je $G = (V, E)$ prost graf. Tada je*

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E|.$$

Dokaz. Treba primetiti da za svaku granu $\{u, v\} \in E$ važi

$$\{u, v\} \in \Omega_G(u) \quad \text{i} \quad \{u, v\} \in \Omega_G(v) \quad \text{i} \quad \{u, v\} \notin \Omega_G(w), w \notin \{u, v\},$$

odnosno

$$\{u, v\} \in^2 \biguplus_{w \in V} \Omega_G(w).$$

Odatle sledi

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = \sum_{v \in V} |\Omega_G(v)| = \left| \biguplus_{v \in V} \Omega_G(v) \right| = 2|E|.$$

Manje formlano, treba zaključiti da je svaka grana incidentna sa 2 čvora, što znači da sabiranjem stepena čvorova svaku granu brojimo dva puta. □

Teorema 54 *Prost graf ima paran broj čvorova neparnog stepena.*

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$ i $V = V_1 \cup V_2$, gde su V_1 i V_2 redom skupovi čvorova parnog i neparnog stepena. Tada je

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = \sum_{v \in V_1} deg_G(v) + \sum_{v \in V_2} deg_G(v)$$

$$2|E| - \sum_{v \in V_1} deg_G(v) = \sum_{v \in V_2} deg_G(v)$$

Kako je zbir (razlika) dva parna broja paran broj, suma sa desne strane mora biti paran broj, odakle direktno sledi tvrđenje. □

Posledica 55 *Ako je broj čvorova prostog grafa neparan, onda u njemu postoji bar jedan čvor parnog stepena.*

Dokaz. Kada bi svi čvorovi tog grafa bili neparnog stepena, onda bi u tom grafu bio neparan broj čvorova neparnog stepena, što je u kontradikciji sa prethodnim tvrđenjem. □

Posledica 56 *Neka je $G = (V, E)$ prost graf, u kojem je $|V| = n$ i $|E| < n$. Tada postoji čvor $v \in V$ sa osobinom $deg_G(v) \leq 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da za svaki čvor $v \in V$ važi $deg_G(v) \geq 2$. Tada, koristeći Lemu 53, zaključujemo da važi

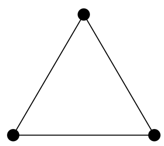
$$2|E| = \sum_{v \in V} deg_G(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2 \cdot |V| = 2n$$

tj. $|E| \geq n$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $|E| < n$. $\square$

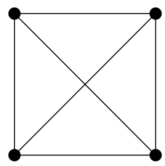
2.0.1 Neke specijalne klase prostih grafova

Kompletan graf K_n je prost graf u kojem je $E = \binom{V}{2}$, tj. za svaka dva čvora postoji tačno jedna grana u grafu koja im je incidenta.

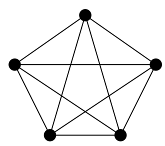
K_2



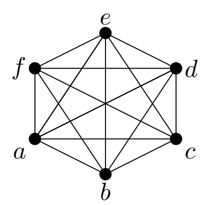
K_3



K_4



K_5



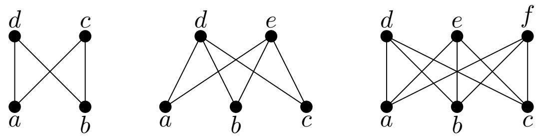
K_6

Bipartitan graf je graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$ sa osobinama:

1. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
2. $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.

To znači da se skup čvorova može razdeliti na dva disjunktna podskupa, tako da je svaka grana incidentna sa jednim čvorom iz jednog skupa i drugim iz drugog.

Ako E sadrži sve takve grane onda kažemo da je graf kompletan bipartitan i označavamo ga sa $K_{m,n}$ ako je $|V_1| = m$ i $|V_2| = n$.

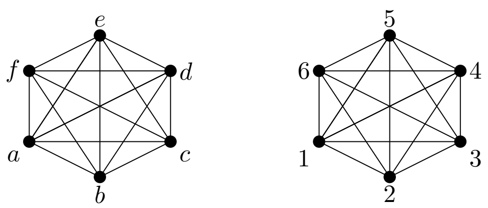


$K_{2,2}$ $K_{3,2}$ $K_{3,3}$

2.0.2 Jednakost i izomorfizam grafova

Jednaki grafovi. Možemo reći da iz definicije grafa direktno sledi da su dva grafa jednaka akko imaju jednake skupove čvorova i jednake skupove grana. Tako možemo reći da grafovi u sledećem primeru nisu jednaki.

Primer 4 *Grafovi G_1 i G_2 na slici nisu jednaki, zato što nemaju jednake skupove čvorova, tj.* $V(G_1) = \{a, b, c, d, e, f\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = V(G_2)$.



G_1 G_2

Možemo primetiti da oba grafa predstavljaju kompletan graf K_6 i da se razlikuju samo u oznakama čvorova.

Izomorfni grafovi. Za grafove koji imaju osobinu da preimenovanjem čvorova postaju jednaki kažemo da su izomorfni.

Definicija 57 *Neka su $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ prosti grafovi. Kažemo da je G_1 izomorfan sa G_2 ako postoji bijektivno preslikavanja $h : V_1 \to V_2$ sa osobinom*

$$\{u, v\} \in E_1 \text{ akko } \{h(u), h(v)\} \in E_2. \tag{2.1}$$

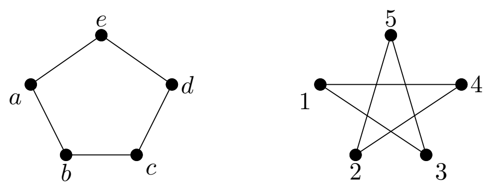
Za takvu funkciju h kažemo da je izomorfizam grafa G_1 u graf G_2.

Primer 5 *Grafovi iz prethodnog primera su izomorfni. Jedan izomorfizam je*

$$h = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Postoji ukupno 6! *bijektivnih preslikavanja* V_1 *u* V_2 *i sva ta preslikavanja su izomorfizmi* G_1 *u* G_2.

Primer 6 *Direktnom proverom, može se pokazati da su grafovi* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$ *izomorfni.*



G_1 G_2

Jedan izomorfizam je

$$h = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Teorema 58 *Relacija "je izomorfan" je relacija ekvivalencije na skupu grafova.*

Da bismo pokazali da su dva grafa izomorfna, dovoljno je konstruisati jedan izomorfizam. Mnogo je teže utvrditi da grafovi nisu izomorfni. Ako grafovi imaju jednak broj čvorova $|V_1| = |V_2| = n$, direktna primena definicije bi značila da se za svako od $n!$ bijektivnih preslikavanja skupa V_1 u skup V_2 pokaže da ekvivalencija (2.1) nije tačna. Jasno je da to zahteva mnogo koraka, čak i u slučajevima kada broj čvorova nije tako veliki. Naredna osobina daje neke potrebne uslove koji mogu pomoći pri ispitivanju da li su dva grafa izomorfna.

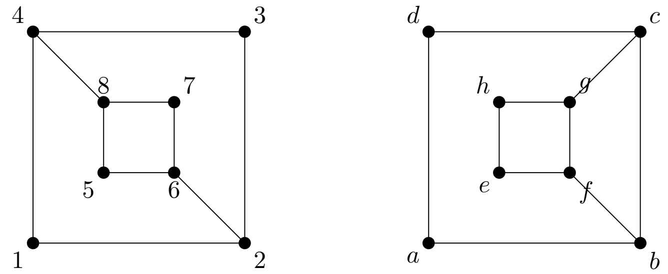
Teorema 59 *Neka su dati izomorfni grafovi* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$. *Tada je*

1. $|V_1| = |V_2|$,
2. $|E_1| = |E_2|$, *i*
3. $deg_{G_1}(v) = deg_{G_2}(h(v))$, *za svaki čvor* $v \in V_1$.

Dokaz. Sve tri osobine slede direktno iz definicije izomorfnih grafova. □

Ako jedna od tri osobine iz Teoreme 59 ne važi, odmah se može tvrditi da grafovi nisu izomorfmni. Važno je primetiti da obratno tvrđenje ne važi. Grafovi mogu zadovoljavati sve tri osobine, a da nisu izomorfni. To je ilustrovano sledećim primerom.

Primer 7 *Grafovi* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$ *su dati svojim grafičkim reprezentacijama na sledećoj slici.*



G_2 G_2

Može se uočiti da je $|V_1| = |V_2| = 8$ *i* $|E_1| = |E_2| = 10$*, dok su grafovski multiskupovi datih grafova* $\{\{3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2\}\}$*. Međutim, ova dva grafa nisu izomorfna. Čvor 2 u grafu* G_1 *je stepena 3 i ima dva suseda stepena 2 i jednog suseda stepena 3. Te osobine moraju biti očuvane prilikom bijektivnog preslikavanja čvorova* V_1 *na* V_2*. Zbog njegovog stepena, čvor 2 moramo preslikati na* b, c, f *ili* g*. Svaki od ova četiri čvora ima dv suseda stepena* 3 *i jednog suseda stepen 2.*

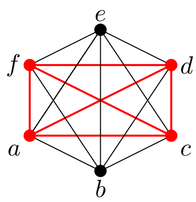
2.0.3 Operacije sa/na grafovima

U praksi se često javlja potreba za posmatranjem izdvojenih delova grafa, dodavanjem ilii čvorova/grana, spajanjem grafova i slično. Iz tog razloga u ovom delu ćemo uvesti neke dodatne pojmove.

Podgraf $G_1 = (V_1, E_1)$ grafa $G = (V, E)$ je graf sa osobinom $V_1 \subseteq V$ i $E_1 \subseteq E$. G_1 je pravi podgraf grafa G_2 ako je $V \neq V_1$. Ovde treba primetiti da je G_1 takođe graf, što znači da je $E_1 \subseteq \binom{V_1}{2}$.

Podgraf indukovan skupom čvorova $V_1 \subseteq V$ grafa $G = (V, E)$ je graf $G_1 = (V_1, E_1)$ sa osobinom $E_1 = \binom{E}{2} \cap \binom{V_1}{2}$, tj. sa osobinom da je $\{u, v\}$ grana u G_1 akko $u, v \in V_1$ i $\{u, v\} \in E$.

Primer 8 *Na slici je prikazan podgraf grafa* K_6 *koji je indukovan skupom čvorova* $\{a, c, d, f\}$.



K_6

Oduzimanjem grane $e \in E$ grafa $G = (V, E)$, u oznaci $G - e$, dobijamo graf

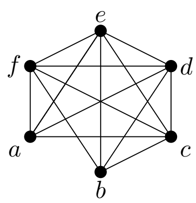
$$G - e = (V, E \setminus \{e\}).$$

Slično definišemo dodavanje grane e grafu G, u oznaci $G + e$, kao graf $G = (V, E \cup \{e\})$.

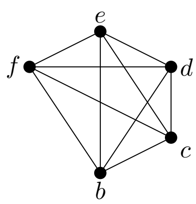
Oduzimanjem čvora $v \in V$ grafa $G = (V, E)$, u oznaci $G - v$ dobijamo graf

$$G - v = (V \setminus \{v\}, E_1), \quad E_1 = E \setminus \{\{u, v\} : \{u, v\} \in E\}.$$

Primer 9 *Na slici su prokazani grafovi* $K_6 - \{a, b\}$ *i* $K_6 - a$.



$K_6 - \{a, b\}$



$K_6 - a$

2.0.4 Zadaci za vežbu

1. **Odrediti broj čvorova, broj grana i grafički niz grafova** $K_n, K_{m,n}, Q_n$.

   Rešenje.

   (a) Kompletan graf K_n ima n čvorova, $\binom{n}{2}$ grane i grafovski multiskup $\{\{n-1, \ldots, n-1\}\}$.

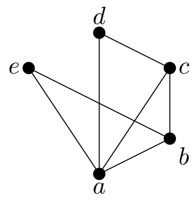
   (b) Kompletan bipartitan graf $K_{m,n}$ ima $m+n$ čvorova, $m \cdot n$ grana i grafovski multiskup $\{\{m, \ldots, m, n, \ldots, n\}\}$.

   (c) Hiperkocka Q_n ima 2^n čvorova, $n \cdot 2^{n-1}$ grana i grafovski multiskup $\{\{n, \ldots, n\}\}$.

   □

2. **Nacrtati prost graf čiji grafovski multiskup je** $\{\{4, 3, 3, 2, 2\}\}$.

   Rešenje.



G

   □

3. **Ispitati da li su sledeći multiskupovi grafovski:**

   (a) $\{\{5, 4, 3, 2, 1, 0\}\}$;

   (b) $\{\{5, 3, 2, 1, 1, 1\}\}$;

   (c) $\{\{2, 2, 2, 2, 2, 2\}\}$;

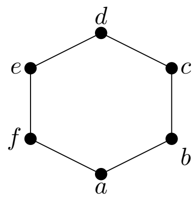
   (d) $\{\{5, 3, 3, 3, 3, 3\}\}$.

   Rešenje.

   (a) Nije grafovski. Da bi od 6 čvorova jedan imao stepen 5, morala bi postojati grana od njega do svakog drugog čvora. Kako jedan čvor ima stepen 0, to je nemoguće.

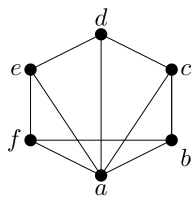
   (b) Nije grafovski, zato što ima neparan broj čvorova neparnog stepena, a takav prost graf ne postoji.

   (c) Jeste grafovski niz sledećeg grafa:



G_2

(d) Jeste grafovski multiskup sledećeg grafa:



G_3

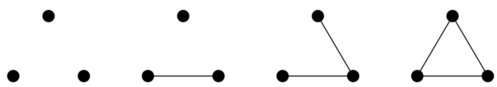
□

4. **Odrediti broj neizomofnih prostih grafova sa** $2, 3$ **i** 4 **čvora.**

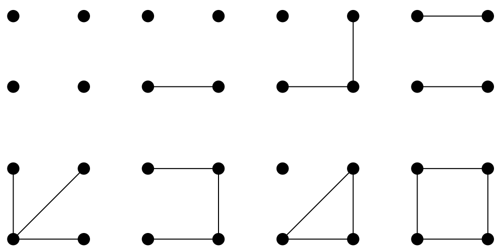
Rešenje. Broj neizomorfnih grafova sa $2, 3$ i 4 čvora je redom $2, 4$ i 11.

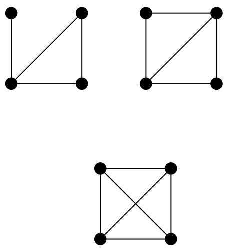
(a) $n = 2:$

(b) $n = 3:$



(c) $n = 4:$

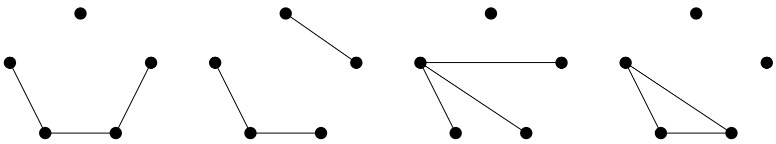




□

5. Odrediti broj neizomofnih prostih grafova sa 5 čvorova i 3 grane.

Rešenje.



□

6. Odrediti broj različitih grafova sa 4 čvora.

Rešenje. Broj mogućih grana označenog grafa sa 4 čvora je $\binom{4}{2} = 6$. Ukupan broj grafova jednak je broju načina da izaberemo $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ili 6 grana, a to je

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6 = 64.$$

□