Вежбе 10

-Стабла-

Ацикличан граф = граф који не садржи контуре

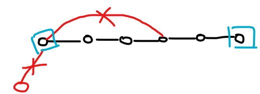
СТАБЛО = ПОВЕЗАН + АЦИКЛИЧАН граф

T_n - стабло са n чворова

T: Свака два чвора у стаблу су повезана јединственим путем.

тривијално стабло $\circ\ T_1$ $\Rightarrow$ Нетривијална стабла имају бар 2 чвора

T: Свако нетривијално стабло садржи бар 2 висећа чвора.



$\rightarrow$ Чворови на крајевима пута максималне дужине су висећи чворови.

T: Свако стабло са n чворова има тачно $n-1$ грану.

Стабла су:

1° Минимални повезани графови

$\Rightarrow$ $G-e$ неповезан, $\forall e \in E(G)$

2° Максимални ациклични графови

$\Rightarrow$ $G+e$ садржи контуру, $\forall e \notin E(G)$

1. Доказати да је свако стабло са бар два чвора бипартитан граф.

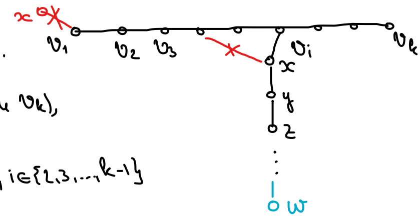
Знамо да је граф бипартитан акко не садржи непарне контуре.

Како стабла уопште не садрже контуре, па ни оне непарне, стабла су бипартитни графови.

II начин:

Посматрајмо пут максималне дужине у стаблу. Нека је то uv-пут. Знамо да је чвор u висећи чвор. Једну класу бипартитног графа чини чвор u и сви чворови који су на парном растојању од чвора u, а другу класу чине чворови који су на непарном растојању од чвора u.

2. Доказати да је стабло са тачно два висећа чвора пут.



Нека је $v_1 v_2 \dots v_k$ најдужи пут у датом стаблу T.
Довољно је доказати да стабло T нема више чворова.

Ако постоји још неки чвор x који је сусед чвора v_1 (или v_k), добијамо пут који је дужи од максималног ↯

$\Rightarrow$ Нови чвор x може бити само сусед неког чвора v_i, $i \in \{2,3,\dots,k-1\}$

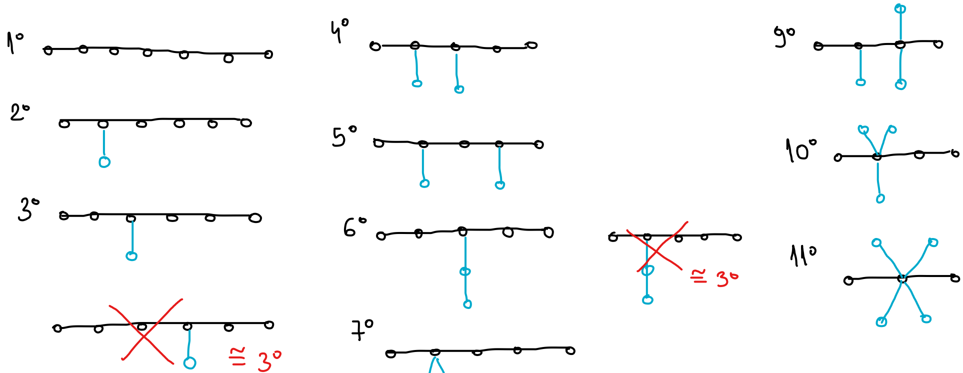
- x висећи чвор ↯ (3 висећа чвора: v_1, v_k и x)
- x има неког суседа y који мора бити нови чвор (иначе добијамо контуру)
- y висећи чвор ↯
- y има новог суседа z
- z висећи чвор ↯
- z има новог суседа

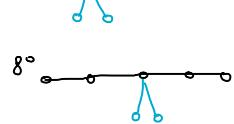
⋮

Описани поступак је коначан (радимо само са коначним графовима или смо у неком моменту добили пут који је дужи од максималног)

$\Rightarrow$ $\exists$ чвор w који је висећи ↯ (добили смо 3 висећа чвора у графу који има тачно 2 висећа чвора)

3. Наћи сва неизоморфна стабла са 7 чворова.





Постоји 11 неизоморфних стабала са 7 чворова.

4. Низ степена стабла је $5, 4, 3, 2, 1, 1, \ldots, 1$. Колико има јединица?

Нека је k број висећих чворова у стаблу (тј. број јединица)

$n = 4 + k$

Ако је n број чворова у стаблу, онда је број грана $e = n - 1$.

$\Rightarrow e = n - 1 = k + 3$

основна теорема теорије графова

$$2e = \sum_{v \in V} d(v) = 5 + 4 + 3 + 2 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k \text{ јединица}} = 14 + k$$

$$2(k+3) = 14 + k$$

$$\Rightarrow k = 8$$

5. Колико компоненти повезаности има шума са 100 чворова и 90 грана?

Шума је ацикличан граф (граф који не садржи контуре)

$n = |V(G)| = 100$

$e = |E(G)| = 90$

Нека је $\omega(G) = k$.

Свака компонента повезаности шуме је стабло

G_i стабло у шуми, $i = 1, 2, \ldots, k$

Нека је $n_i = |V(G_i)|$, $e_i = |E(G_i)|$

Сада је $e_i = n_i - 1$

Добијамо
$$\begin{aligned} e &= e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_k \\ &= (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + \ldots + (n_k - 1) \\ &= n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k - k \\ &= n - k \end{aligned}$$

$90 = 100 - k \Rightarrow k = 10$

Број компоненти повезаности у шуми је 10.

Напомена:

Нека је G шума. Ако је G повезан граф, имамо само једно стабло, а уколико је G неповезан, онда имамо унију стабала.

6. Ако је G шума, тада важи $|V(G)| = |E(G)| + \omega(G)$.

7. Нека је G повезан граф.

а) Ако G има 17 грана, колико највише чворова може да има?

Сваки повезан граф са n чворова има $e \geq n-1$ грана.

$e = 17$

$17 \geq n-1$

$n \leq 18$

б) Ако G има 21 чвор, колико најмање грана може да има?

$n = 21$

$e \geq 21-1$

$e \geq 20$

8. Граф G има 4 компоненте и 24 гране. Колико највише чворова може G да има?

$\omega(G)=4$

$e=24$

Свака компонента повезаности неповезаног графа је један „мали" повезан граф.

Означимо са $n_i=|V(G_i)|$, $e_i=|E(G_i)|$, где су G_i, $i=1,2,3,4$, компоненте повезаности графа G

$$\left.\begin{array}{l} e_1 \geqslant n_1-1 \\ e_2 \geqslant n_2-1 \\ e_3 \geqslant n_3-1 \\ e_4 \geqslant n_4-1 \end{array}\right\} + \qquad e_1+e_2+e_3+e_4 \geqslant n_1+n_2+n_3+n_4-4$$

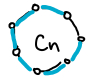
$$e \geqslant n-4$$

$$24 \geqslant n-4$$

$$n \leq 28$$

9. Колико висећих чворова има стабало дијаметра 3 са n чворова?

дијаметар графа $d(G) = \max\limits_{u,v \in V(G)} d_G(u,v)$

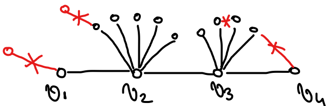


максималан пут је дужине $n-1$

$d(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Стабла не садрже контуре $\Rightarrow$ дијаметар стабла представља дужину максималног пута

Нека је $v_1v_2v_3v_4$ максималан пут у датом стаблу



Сви остали чворови у стаблу (њих $n-4$) су суседи чворова v_2 и v_3 и сви су висећи чворови. Уколико неки од ових чворова није висећи, добили бисмо пут који је дужи од максималног или контуру, што није могуће.

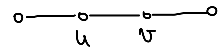
Број висећих чворова је $n-4+2=n-2$ (сви чворови у стаблу осим v_2 и v_3 су висећи)

напомена:

Овај граф зовемо ГУСЕНИЦА

10. Колико има неизоморфних стабала дијаметра 3 са 103 гране?

Пут максималне дужине у стаблу је пут дужине 3



$e = 103 \Rightarrow n = 104$

За пут максималне дужине смо „искористили" 4 чвора.

Преосталих 100 чворова су суседи или u или v и они су висећи чворови.

u	v
100	0
99	1
98	2
⋮	⋮
51	49
50	50
~~49~~	~~51~~
~~⋮~~	~~⋮~~
~~0~~	~~100~~

Изоморфни са претходно набројаним стаблима

$\Rightarrow$ Број неизоморфних стабала је 51.

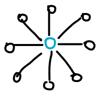
11. За које природне бројеве s $(s>1)$ постоји стабло са

а) 1998 *б)* 2008 (домаћи)

чворова код ког су сви чворови који нису висећи степена s?

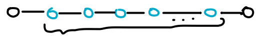
Тражимо сва полурегуларна стабла са 1998 чворова.

• $\boxed{s=1997}$



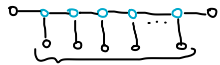
звезда $K_{1,1997}$

• $\boxed{s=2}$ пут P_{1998}



1996 чворова степена 2

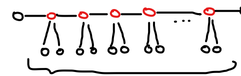
• $\boxed{s=3}$



$$\frac{1998-2}{2}=\frac{1996}{2}=998$$

чворова степена 3

• ~~$s=4$~~ немогуће



$$\frac{1998-2}{3}=\frac{1996}{3}\notin\mathbb{Z} \quad ↯$$

Стратегија: Посматрајмо пут са $k+2$ чворова и на k „унутрашњих" чворова додаћемо још по $s-2$ висећа чвора

$$2\cdot(1998-1)=2\cdot 1997=\sum_{v\in V} d(v)=k\cdot s+(n-k)\cdot 1=k\cdot s+1998-k=k(s-1)+1998$$

$k\cdot(s-1)=1996$

$\Rightarrow$ Задатак се своди на одређивање делилаца броја 1996

1996	2
998	2
499	

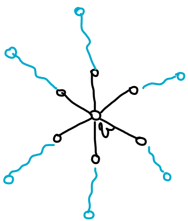
$k,\ s-1\in\{1,2,4,499,998,1996\}$

$\Rightarrow s\in\{2,3,5,500,999,1997\}$

12. Нека је T стабло и $\Delta(T) = k$. Доказати да T има бар k висећих чворова.

$\Delta(T) = k \Rightarrow \exists v \in V(T)$ такав да је $d(v) = k$

Нека су $v_1, v_2, \ldots, v_k$ суседи чвора v



Посматрајмо чвор v_i.

Нека је P_i пут максималне дужине чији је почетни чвор v_i и који не садржи чвор v.

Сада се на другом крају пута P_i налази висећи чвор стабла T

(пут P_i може бити и само чвор v_i, уколико је v_i висећи чвор)

$\Rightarrow$ Стабло T има барем k висећих чворова

II начин:

Нека је $n=|V(T)|$ и нека је l број висећих чворова у T.

Претпоставимо супротно, да је $l<k$.

Важи

$$2\cdot(n-1)=\sum_{v\in V} d(v) = \underbrace{l\cdot 1}_{\text{висећи}} + \underbrace{\sum d(v)}_{\substack{2\le d(v)\le k \\ n-l-1 \text{ сабирака}}} + \underbrace{1\cdot k}_{\substack{\text{чвор максималног} \\ \text{степена}}} \geq l+2\cdot(n-l-1)+k = 2(n-1)+\underbrace{k-l}_{>0} > 2(n-1) \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ Стабло T садржи бар k висећих чворова.

13. Доказати да је број висећих чворова у стаблу

$$2 + \sum_{d(v)\geq 3} (d(v) - 2).$$

Нека је n_i број чворова степена i у датом графу

$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_\Delta = n_1 + n_2 + k$ $\quad$ k - број чворова степена ≥ 3

$$2e = \sum_{v\in V} d(v) = n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot 3 + \ldots + n_\Delta \cdot \Delta$$
$$= n_1 + 2n_2 + \sum_{d(v)\geq 3} d(v)$$

Знамо да је $e = n - 1 = n_1 + n_2 + k - 1$

$$2(n_1 + n_2 + k - 1) = n_1 + 2n_2 + \sum_{d(v)\geq 3} d(v)$$

$$2n_1 + \cancel{2n_2} + 2k - 2 = n_1 + \cancel{2n_2} + \sum_{d(v)\geq 3} d(v)$$

$$n_1 = 2 + \sum_{d(v)\geq 3} d(v) - 2k = 2 + \sum_{d(v)\geq 3} d(v) \underbrace{-2-2-2-\ldots-2}_{k \text{ пута}} = 2 + \sum_{d(v)\geq 3} (d(v) - 2)$$

k сабирака

14. Доказати да је граф G шума акко сваки његов индукован подграф садржи чвор чији је степен мањи или једнак од један.

($\Rightarrow$) Нека је G шума и нека је H произвољан индукован подграф графа G.

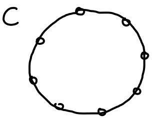
Претпоставимо да H не садржи чвор степена ≤ 1, тј. $\delta(H) \geq 2$.

$\overset{B8}{\underset{7}{\Longrightarrow}}$ H садржи контуру C

Граф G такође садржи контуру C $\lightning$ (G је ацикличан граф)

($\Leftarrow$) Нека у графу G сваки индукован подграф садржи чвор степена ≤ 1.

C



Претпоставимо да G није шума, тј. да постоји контура C у графу G.

Нека је $C = v_1 v_2 v_3 \dots v_k v_1$.

Посматрајмо подграф H који индукују чворови са контуре, $H = G[v_1, v_2, \dots, v_k]$

Подграф H садржи све гране са контуре C и евентуално још неке тетиве те контуре.

$\Rightarrow d_H(v) \geq 2,\ \forall v \in V(H)$ $\lightning$ (са претпоставком смера)

-Покривајућа стабла-

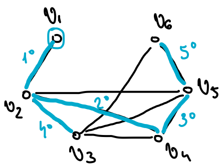
Т је покривајуће стабло за граф G ако важи

1° T је покривајући подграф графа G, $V(T)=V(G)$

2° T је стабло

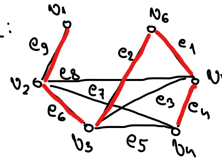
T: Граф има покривајуће стабло акко је повезан

A1:



У сваком кораку додајемо један нови чвор и једну нову грану

A2:



Произвољно нумеришемо гране и водимо рачуна да не формирамо контуру

-МИНИМАЛНО ПОКРИВАЈУЋЕ СТАБЛО-

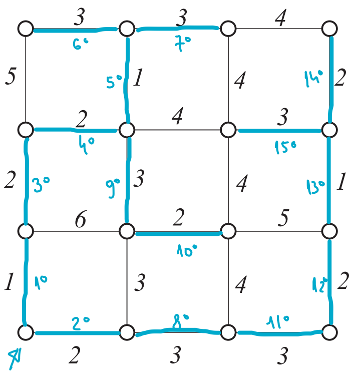
Тежински граф $\to$ свакој грани $e\in E(G)$ придружујемо број $w(e)$, тежину гране e

$$w(G)=\sum_{e\in E(G)} w(e)$$ тежина графа G

ПРОБЛЕМ МИНИМАЛНОГ ПОКРИВАЈУЋЕГ СТАБЛА:

За дати повезан тежински граф одредити покривајуће стабло најмање тежине

15. Наћи минимално покривајуће стабло тежинског графа са слике



Примов алгоритам (A1)

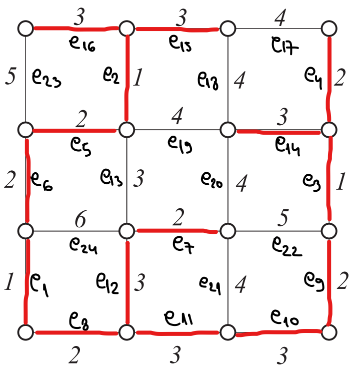
(Борувка - Јарник - Прим)

Крећемо из произвољног чвора.

У сваком кораку бирамо најлакшу грану која повезује добијено подстабло са новим чвором.

Стајемо када покупимо све чворове графа.

Још један алгоритам за одређивање минималног покривајућег стабла:



Нумеришемо гране од лакших ка тежим.

Водимо рачуна да не направимо контуру.

Стајемо када изаберемо n−1 грану (ако граф има n чворова).

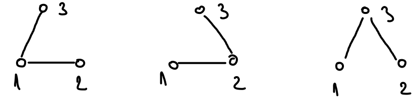
КРУСКАЛОВ АЛГОРИТАМ (A2)

<u>Напомена</u>:

Приметимо да смо добили 2 различита минимална покривајућа стабла ИСТЕ ТЕЖИНЕ.

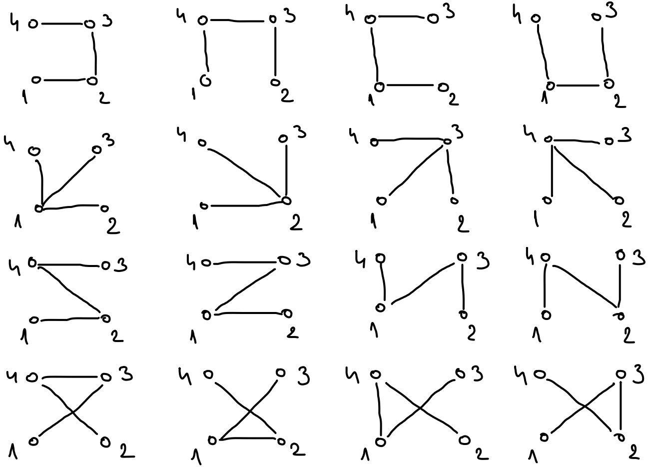
Решење је јединствено уколико све гране тежинског графа имају различиту тежину, или уколико је граф који посматрамо стабло.

Означена стабла са 3 чвора:



→ 3 означена стабла са 3 чвора

Означена стабала са 4 чвора:

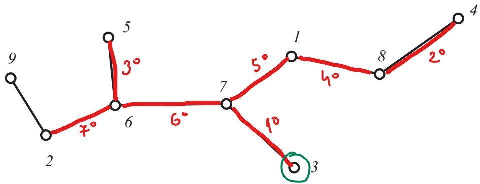


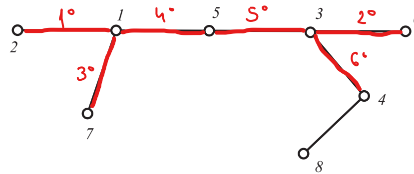
→ 16 означених стабала са 4 чвора

T: Број различитих означених стабала са n чворова је n^{n-2}

→ број различитих Приферових низова

16. Конструисати Приферов низ следећих стабала





Приферов низ: (7,8,6,1,7,6,2)

(1,3,1,5,3,4)

Тражимо висећи чвор са најмањом ознаком.
Пишемо ознаку његовог суседа, а њега „бришемо".
Стојемо када нам остане само једна грана.

Приферов низ је јединствен за свако стабло T_n и има дужину $n-2$.
Број појављивања чвора у низу је $d(v)-1$.

17. Конструисати означено стабло чији је Приферов низ

a) $(4, 5, 7, 2, 1, 1, 6, 6, 7)$

Приферов низ је дужине 9 ⇒ стабло има 11 чворова

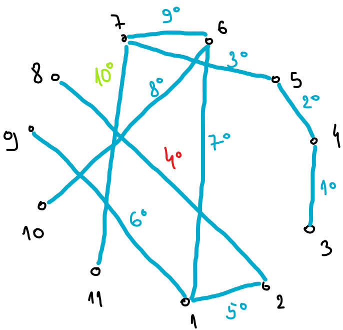
$(\cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{2}, \cancel{1}, \cancel{1}, \cancel{6}, \cancel{6}, \cancel{7})$

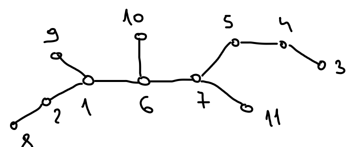
$\{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11\}$

– За почетак тражимо најмањи број из скупа који није у Приферовом низу (одговара висећем чвору са најмањом ознаком) и повезујемо га са првим чвором из Приферовог низа.

– Понављамо поступак за све непрецртане бројеве.

– На крају нам остају 2 непрецртана броја у скупу која ћемо повезати граном.



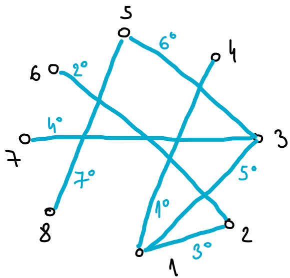


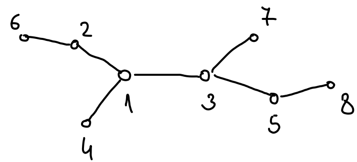
б) $(1, 2, 1, 3, 3, 5)$

Низ дужине 6 $\Rightarrow$ стабло са 8 чворова

$(\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{1}, \cancel{3}, \cancel{3}, \cancel{5})$

$\{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, \cancel{7}, 8\}$



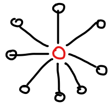


в) $(7, 8, 3, 2, 4, 1, 1)$

18. Одредити сва стабла код којих

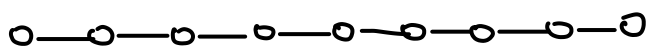
а) су сви елементи Приферовог низа једнаки

звезда



б) су сви елементи Приферовог низа различити

пут



в) се у Приферовом низу појављују тачно две различите вредности.

гусеница