Diskretna jednodimenzionalna slučajna promenljiva i njene transformacije

Zadatak 1

Postavka: U kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem 1, četiri kuglice označene brojem 3, i jedna kuglica označena brojem 5. Na slučajan način izvlačimo odjednom dve kuglice iz kutije. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja zbir izvučenih brojeva.

(a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.

(b) Izračunati $F_X(2)$, $F_X(4)$, $F_X(8)$ i $F_X(16.375)$.

(c) Naći funkciju raspodele, $F_X(x)$, za slučajnu promenljivu X i grafički je predstaviti.

Rešenje:

(a) Označimo sa $\langle m, n\rangle$, $m, n \in \{1, 3, 5\}$ događaj „izvučene su kuglice sa brojevima m i n" (pri čemu je nebitan redosled izvučenih kuglica). Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{2, 4, 6, 8\}$ pri čemu je

$\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(\langle 1, 1\rangle) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{21}$,

$\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(\langle 1, 3\rangle) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{8}{21}$,

$\mathsf{P}(X = 6) = \mathsf{P}(\langle 1, 5\rangle \cup \langle 3, 3\rangle) = \mathsf{P}(\langle 1, 5\rangle + \langle 3, 3\rangle) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{7}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{8}{21}$ i

$\mathsf{P}(X = 8) = \mathsf{P}(\langle 3, 5\rangle) = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4}{21}$,

tako da je $X : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ \frac{1}{21} & \frac{8}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}$.

(b) Na osnovu definicije funkcije raspodele imamo:

$F_X(2) = \mathsf{P}(X < 2) = 0$,

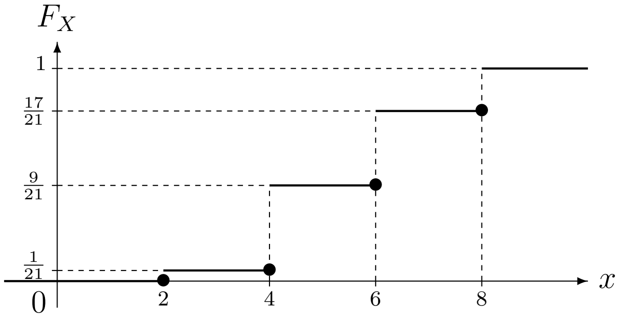
$F_X(4) = \mathsf{P}(X < 4) = \mathsf{P}(X = 2) = \frac{1}{21}$,

$F_X(8) = \mathsf{P}(X < 8) = 1 - \mathsf{P}(X = 8) = 1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21}$,

$F_X(16.375) = \mathsf{P}(X < 16.375) = 1$.

(c) Funkcija raspodele slučajne promenljive X i njen grafik su

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{1}{21}, & 2 < x \leq 4 \\ \frac{9}{21}, & 4 < x \leq 6 \\ \frac{17}{21}, & 6 < x \leq 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases},$$



Zadatak 2

Postavka: Strelac pogađa cilj sa verovatnoćom p, a gađa dok ne pogodi dva puta ili ne promaši tri puta. Naći raspodelu slučajnih promenljivih X i Y, gde je X broj gađanja, a Y broj pogodataka.

Rešenje:

Označimo sa $+$ događaj " cilj je pogođen", a sa $-$ " cilj nije pogođen". S obzirom na to da je verovatnoća pogotka p, označimo sa $q = 1 - p$ verovatnoću promašaja.

Skup vrednosti slučajne promenljive X je očigledno $\mathcal{R}_X = \{2, 3, 4\}$. Traženi zakon raspodele je tada

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix},$$

gde su odgovarajuće verovatnoće:

$p_2 = \mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(++) = p^2$,
$p_3 = \mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor +) + \mathsf{P}(---) = \binom{2}{1} pqp + q^3 = 2p^2q + q^3$,
$p_4 = \mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor -) + \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor +) = \binom{3}{1} pq^2q + \binom{3}{1} pq^2p = 3pq^2(q+p) = 3pq^2$.

Napomena: Oznaka $\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor$ označava sve moguće događaje gde je cilj jednom pogođen i dvaput promašen, tj. događaje $+--$, $-+-$ i $--+$(redosled je bitan). Takvih događaja ima $\binom{3}{1}$ jer od tri "mesta"biramo jedno na kome će biti $+$.

Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{0, 1, 2\}$. Traženi zakon raspodele je tada

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix},$$

gde su odgovarajuće verovatnoće:
$q_0 = \mathsf{P}(Y = 0) = \mathsf{P}(---) = q^3$,
$q_1 = \mathsf{P}(Y = 1) = \mathsf{P}(\lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor + \rfloor -) = \binom{3}{1} pq^2q = pq^3$,
$q_2 = \mathsf{P}(Y = 2) = \mathsf{P}(++) + \mathsf{P}(\lfloor - \rfloor \lfloor + \rfloor +) + \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor +) = p^2 + \binom{2}{1} pqp + \binom{3}{1} pq^2p = p^2 + 2p^2q + 3p^2q^2$.

Zadatak 3

Postavka: U svakoj od tri nezavisne igre igrač pobeđuje sa verovatnoćom p, a zatim igra još onoliko igara koliko je pobeda imao u prve tri igre. Naći raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja ukupan broj pobeda.

Rešenje:
Slično kao u prethodnom zadatku, označimo sa $+$ događaj " igrač je pobedio", a sa $-$ "igrač je izgubio ". S obzirom na to da je verovatnoća pobede p, označimo sa $q = 1-p$ verovatnoću poraza.

Skup vrednosti slučajne promenljive X je očigledno $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a odgovarajuće verovatnoće su:
$\mathsf{P}(X = 0) = q^3$,
$\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor -) = \binom{3}{1} pq^2q = 3pq^3$,
$\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor --) + \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor +) = \binom{3}{2} p^2qq^2 + \binom{3}{1} pq^2p = 3p^2q^3 + 3p^2q^2$,
$\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(+++---) + \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \quad \lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor) = p^3q^3 + \binom{3}{2} p^2q \binom{2}{1} pq = p^3q^3 + 6p^3q^2$,
$\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(+++\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor \lfloor - \rfloor) + \mathsf{P}(\lfloor + \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor ++) = p^3 \binom{3}{1} pq^2 + \binom{3}{2} p^2qp^2 = 3p^4q^2 + 3p^4q$,
$\mathsf{P}(X = 5) = \mathsf{P}(+++\lfloor + \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor) = p^3 \binom{3}{2} p^2q = 3p^5q$,
$\mathsf{P}(X = 6) = \mathsf{P}(++++++) = p^6$.

Napomena: Oznake $\lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor$, $\lfloor + \rfloor \lfloor + \rfloor \lfloor - \rfloor$ itd. imaju isto značenje kao u prethodnom zadatku.

Zadatak 4

Postavka:
Košarkaš gađa koš 1000 puta. Verovatnoća promašaja u svakom nezavisnom gađanju je 0.005.Naći raspodele slučajnih promenljivih X i Y koje predstavljaju redom tačan i približan broj promašaja.
Rešenje:
Verovatnoća promašaja je $p = 0.005$, a verovatnoća pogotka $q = 0.995$. Slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(1000, 0.005)$ raspodelu i odgovarajuće verovatnoće su:

$$\mathsf{P}(X = i) = \binom{1000}{i} 0.005^i \cdot 0.995^{1000-i}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, 1000\}.$$

Kako je $\lambda = 1000 \cdot 0.005 = 5$, slučajna promenljiva X se može aproksimirati Poasonovom slučajnom promenljivom tako da slučajna promenljiva Y ima Poasonovu $\mathcal{P}(5)$ raspodelu i tada su odgovarajuće verovatnoće:

$$\mathsf{P}(Y = i) = \frac{5^i}{i!} e^{-5}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Napomena: Kasnije ćemo videti još jednu aproksimaciju Binomne raspodele primenom Moavr-Laplasove teoreme.

Zadatak 5

Postavka: Kockica se baca do prve pojave šestice ali najviše četiri puta. Neka slučajna promenljiva X predstavlja ukupan broj izvedenih bacanja.

(a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.

(b) Izračunati $\mathsf{P}(2 \leq X < 4)$, $\mathsf{P}(2 < X < 4)$, $\mathsf{P}(X < 3)$, $\mathsf{P}(-4X < -5)$ i $\mathsf{P}(2X - 5 < 0)$.

REŠENJE:
Označimo sa D događaj da se u jednom bacanju kockice pojavi broj 6, a sa $\bar{D}$ da se u jednom bacanju kockice ne pojavi broj 6. Tada je $\mathsf{P}(D) = \frac{1}{6}$ i $\mathsf{P}(\bar{D}) = \frac{5}{6}$. Primetimo da su bacanja kockice međusobno nezavisna.

(a) Očigledno je da je $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, 4\}$, a odgovarajuće verovatnoće su
$\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(D) = \frac{1}{6}$,
$\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(\bar{D}D) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$,
$\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}D) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$,
$\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}\bar{D}D + \bar{D}\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$,
tako da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{25}{216} & \frac{125}{216} \end{pmatrix}$.

(b) Tražene verovatnoće su
$\mathsf{P}(2 \leq X < 4) = \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) = \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{55}{216}$,
$\mathsf{P}(2 < X < 4) = \mathsf{P}(X = 3) = \frac{25}{216}$,
$\mathsf{P}(X < 3) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$,
$\mathsf{P}(-4X < -5) = \mathsf{P}(X > \frac{5}{4}) = 1 - \mathsf{P}(X \leq \frac{5}{4}) = 1 - \mathsf{P}(X = 1) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$,
$\mathsf{P}(2X - 5 < 0) = \mathsf{P}(X < \frac{5}{2}) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = \frac{11}{36}$

Zadatak 6

POSTAVKA: Baca se kockica za igru „Ne ljuti se čoveče”. Ako se pojavi broj manji od tri izvlače se dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze tri zelene i dve bele kuglice. U suprotnom se izvlače dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze dve zelene i jedna bela kuglica. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj izvučenih zelenih kuglica. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.
REŠENJE:
Obeležimo sa H_1 događaj da se pri bacanju kockice pojavio broj manji od tri, a sa H_2 događaj da se pojavio broj veći ili jednak sa tri, koji čine potpun sistem događja. Njihove verovatnoće su $\mathsf{P}(H_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ i $\mathsf{P}(H_2) = 1 - \mathsf{P}(H_1) = \frac{2}{3}$. Raspodelu slučajne promenljive X, odnosno odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(X = j)$, $j \in \mathcal{R}_X = \{0, 1, 2\}$ možemo izračunati primenom formule totalne verovatnoće

$$\mathsf{P}(X = j) = \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}\left(X = j|H_1\right) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}\left(X = j|H_2\right), \quad j \in \mathcal{R}_X,$$

pri čemu je

$$\mathsf{P}\left(X = 0|H_1\right) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}, \qquad \mathsf{P}\left(X = 0|H_2\right) = \frac{0}{\binom{3}{2}} = 0,$$

$$\mathsf{P}\left(X = 1|H_1\right) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}, \quad \mathsf{P}\left(X = 1|H_2\right) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{3}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$\mathsf{P}\left(X = 2|H_1\right) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}, \qquad \mathsf{P}\left(X = 2|H_2\right) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Uvrštavanjem u formulu totalne verovatnoće dobijamo
$\mathsf{P}(X = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{30}$,
$\mathsf{P}(X = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{29}{45}$,
$\mathsf{P}(X = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{29}{90}$,
tako da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{30} & \frac{29}{45} & \frac{29}{90} \end{pmatrix}$.

Zadatak 7

Postavka: Strelac gađa metu tri puta. Verovatnoća pogotka u svakom nezavisnom gađanju je 0.9. Ako je meta pogođena najviše jednom strelac dobija -5 poena, ako ostvari dva pogotka dobija 5 poena, a u preostalom slučaju dobija 10 poena. Slučajna promenljiva X predstavlja broj osvojenih poena. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.

Rešenje:

Na osnovu uslova zadatka skup vrednosti tražene slučajne promenljive je $\mathcal{R}_X = \{-5, 5, 10\}$, a odgovarajuće verovatnoće su:
$\mathsf{P}(X=-5) = \mathsf{P}($"Strelac ima 3 promašaja, ili 2 promašaja i 1 pogodak"$)=$
$= 0.1^3 + \binom{3}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9 = 0.028,$
$\mathsf{P}(X=5) = \mathsf{P}($"Strelac ima 2 pogodka i 1 promašaj"$)= \binom{3}{2} \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.243$
$\mathsf{P}(X=10) = \mathsf{P}($"Strelac ima 3 pogodka"$)= 0.9^3 = 0.729.$

Traženi zakon raspodele je onda:

$$X : \begin{pmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 0.028 & 0.243 & 0.729 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 8

Postavka: Slučajna promenljiva X je data zakonom raspodele $X : \begin{pmatrix} -\pi & -\frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} \end{pmatrix}$.
Naći zakon raspodele slučajne promenljive $Y = \sin X$.

Rešenje: Kako je $Y = \sin(X) = g(X)$, skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = g(\mathcal{R}_X) = \{-1, 0, 1\}$, a odgovarajuće verovatnoće računamo na sledeći način:
$\mathsf{P}(Y=-1) = \mathsf{P}\left(X = -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8},$
$\mathsf{P}(Y=0) = \mathsf{P}(X=-\pi) + \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=\pi) = \frac{6}{8},$
$\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}\left(X = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8},$
tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Zadatak 9

Postavka: Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele $X : \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$. Neka je $Y = 2X+3, \quad Z = X^2$ i $T = X^3 - X^2$. Naći zakon raspodele za slučajne promenljive Y, Z i T.

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive $Y = 2X+3$ je $\mathcal{R}_Y = \{1, 9, 11\}$. Odgovarajuće verovatnoće su tada:

$\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}(X=-1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(Y=9) = \mathsf{P}(X=3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(Y=11) = \mathsf{P}(X=4) = 0.1,$

tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Za slučajnu promenljivu $Z = X^2$ imamo da je $\mathcal{R}_Z = \{1, 9, 16\}$ njen skup vrednosti, pa dobijamo da su odgovarajuće verovatnoće:

$\mathsf{P}(Z = 1) = \mathsf{P}(X = -1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(Z = 9) = \mathsf{P}(X = 3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(Z = 16) = \mathsf{P}(X = 4) = 0.1,$

tako da je zakon raspodele slučajne promenljive $Z : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 16 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Analogno, za slučajnu promenljivu $T = X^3 - X^2$ imamo da je $\mathcal{R}_T = \{-2, 18, 48\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(T = -2) = \mathsf{P}(X = -1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(T = 18) = \mathsf{P}(X = 3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(T = 48) = \mathsf{P}(X = 4) = 0.1,$

i tražena slučajna promenljiva je $T : \begin{pmatrix} -2 & 18 & 48 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Zadatak 10

Postavka: Strelac gađa metu dok ne promaši. Verovatnoća promašaja u svakom nezavisnom gađanju je $\frac{1}{20}$. Slučajna promenljiva T uzima vrednost 1 ako je strelac promašio metu u parnom po redu gađanju, a vrednost -1 ako je strelac promašio metu u neparnom po redu gađanju. Naći zakon raspodele za T.

Rešenje: Posmatrajmo najpre slučajnu promenljivu Z koja predstavlja broj gađanja. Ova slučajna promenljiva ima $\mathcal{G}(\frac{1}{20})$ raspodelu. Sada slučajnu promenljivu T možemo posmatrati kao transformaciju slučajne promenljive Z. Očigledno je njen skup vrednosti $\mathcal{R}_T = \{-1, 1\}$, a odgovarajuće verovatnoće su:

$\mathsf{P}(T = -1) = \mathsf{P}(Z = 1) + \mathsf{P}(Z = 3) + \mathsf{P}(Z = 5) + \cdots =$

$= \frac{1}{20} + (\frac{19}{20})^2 \cdot \frac{1}{20} + (\frac{19}{20})^4 \cdot \frac{1}{20} + \cdots =$

$= \frac{1}{20} \cdot (1 + (\frac{19}{20})^2 + (\frac{19}{20})^4 + \cdots) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{1-(\frac{19}{20})^2} = \frac{20}{39},$

$\mathsf{P}(T = 1) = 1 - \mathsf{P}(T = -1) = \frac{19}{39},$

tako da slučajna promenljiva T ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{20}{39} & \frac{19}{39} \end{pmatrix}$.