

January 8, 2024

## 0.0.1 Obrada informacija

# 1 4. Laboratorijska vježba: Multivarijatni financijski vremenski nizovi

*Prosinac 2023.*

## 1.1 Upute

U ovoj bilježnici dana je priprema sa svim uputama za 4. laboratorijsku vježbu iz predmeta Obrada informacija - uz bilježnicu su dostupni i podatci u datoteci `prices.csv`.

Vaš zadatak je u bilježnicu na odgovarajuća mjesta dopisati kod Vašeg rješenja,.

**Riješenu bilježnicu potrebno je predati kao izvještaj u .pdf formatu na Moodle najkasnije do 14.1.2024. u 23:59h. Datoteka koju predajete se mora zvati *PrezimeImeJMBAG.pdf*.**

## 1.2 Uvod

U laboratorijskoj vježbi razmatra se dinamika cijena vrijednosnica na financijskim tržištima. Dane su povijesne dnevne cijene 24 ETF-a (eng. *exchange traded fund*) koji prate određene dioničke, obvezničke ili druge indekse.

Oznaka	Naziv	Klasa imovine
SPY	SPDR S&P 500 ETF Trust	Equity: U.S. - Large Cap
IEFA	iShares Core MSCI EAFE ETF	Equity: Developed Markets Ex-U.S. - Total Market
VWO	Vanguard FTSE Emerging Markets ETF	Equity: Emerging Markets - Total Market
EWJ	iShares MSCI Japan ETF	Equity: Japan - Total Market
XLFX	Financial Select Sector SPDR Fund	Equity: U.S. Financials
XLK	Technology Select Sector SPDR Fund	Equity: U.S. Technology
XLV	Health Care Select Sector SPDR Fund	Equity: U.S. Health Care
XLX	Consumer Discretionary Select Sector SPDR Fund	Equity: U.S. Consumer Cyclical

Oznaka	Naziv	Klasa imovine
XLP	Consumer Staples Select Sector SPDR Fund	Equity: U.S. Consumer Non-cyclicals
XLU	Utilities Select Sector SPDR Fund	Equity: U.S. Utilities
XLI	Industrial Select Sector SPDR Fund	Equity: U.S. Industrials
XLE	Energy Select Sector SPDR Fund	Equity: U.S. Energy
XLC	Communication Services Select Sector SPDR Fund	Equity: U.S. Telecommunications
XLRE	Real Estate Select Sector SPDR Fund	Equity: U.S. Real Estate
XLB	Materials Select Sector SPDR Fund	Equity: U.S. Basic Materials
BND	Vanguard Total Bond Market ETF	Fixed Income: U.S. - Broad Market
LQD	iShares iBoxx USD Investment Grade Corporate Bond ETF	Fixed Income: U.S. - Corporate
BNDX	Vanguard Total International Bond ETF	Fixed Income: Global Ex-U.S. - Broad Market
SHV	iShares Short Treasury Bond ETF	Fixed Income: U.S. - Government
HYG	iShares iBoxx USD High Yield Corporate Bond ETF	Fixed Income: U.S. - Corporate
GLD	SPDR Gold Trust	Commodities: Precious Metals Gold
SLV	iShares Silver Trust	Commodities: Precious Metals Silver
PDBC	Invesco Optimum Yield Diversified Commodity Strategy No K-1 ETF	Commodities: Broad Market
USO	United States Oil Fund LP	Commodities: Energy Crude Oil

Pri modeliranju zajedničkog kretanja i rizika vrijednosnica, koristit ćemo aritmetičke povrate:

$$R(t) = \frac{S(t) - S(t-1)}{S(t-1)},$$

gdje je  $S(t)$  cijena vrijednosnice u danu  $t$ . U sklopu ove laboratorijske vježbe cilj je analizirati kretanje danih ETF-ova i izračunati glavne komponente (PCA) koje utječu na njihovu dinamiku. Laboratorijsku vježbu je potrebno riješiti unutar ove bilježnice i predati riješenu bilježnicu kao izvještaj.

```
[ ]: import pandas as pd

prices = pd.read_csv('prices.csv')
```

```
prices.set_index('Time', inplace=True)
prices.index = pd.to_datetime(prices.index)

prices.head()
```

```
[ ]:
      SPY      IEFA      VWO      EWJ      XLF      XLK \
Time
2019-01-02  231.492233  48.000053  33.417080  47.497765  21.776472  59.029892
2019-01-03  225.968170  47.684727  32.893154  47.227894  21.286907  56.050797
2019-01-04  233.537125  49.129986  33.932262  48.828522  21.994057  58.534962
2019-01-07  235.378525  49.366474  34.002121  48.949490  22.021255  59.058445
2019-01-08  237.589920  49.716839  34.194221  49.182148  22.039383  59.553371

      XLV      XLY      XLP      XLU ...      XLB \
Time
2019-01-02  78.483353  95.259102  44.591763  44.784126 ...  46.068901
2019-01-03  76.889748  93.196533  44.335598  44.775520 ...  44.762505
2019-01-04  79.183434  96.280815  45.280781  45.438545 ...  46.522518
2019-01-07  79.487411  98.457954  45.218948  45.128563 ...  46.685822
2019-01-08  80.104607  99.546509  45.634129  45.688255 ...  47.175724

      BND      LQD      BNDX      SHV      HYG \
Time
2019-01-02  69.980576  97.039024  48.517841  101.234894  63.253788
2019-01-03  70.253906  97.081886  48.517841  101.271584  63.285011
2019-01-04  70.042305  97.021873  48.473194  101.299133  64.347198
2019-01-07  69.936508  97.030441  48.357071  101.299133  64.971985
2019-01-08  69.848312  97.244827  48.321350  101.289948  65.393723

      GLD      SLV      PDBC      USO
Time
2019-01-02  121.330002  14.56  8.545244  78.800003
2019-01-03  122.430000  14.75  8.607411  79.599998
2019-01-04  121.440002  14.73  8.731748  81.440002
2019-01-07  121.860001  14.67  8.799566  82.320000
2019-01-08  121.529999  14.69  8.873038  84.000000
```

[5 rows x 24 columns]

```
[ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
```

```
[ ]: prices_len = len(prices)
print(prices_len)
```

1246

## 2 Zadatak 1 - Računanje korelacijske matrice i matrice kovarijance povrata

1.1. U prvom zadatku ove laboratorijske vježbe potrebno je prvo iz danih cijena (gore učitanih u Pandas DataFrame) izračunati dnevne povrate za sve pojedine vrijednosnice (prateći formulu danu u uvodu).

Izračunajte srednje povrate i volatilnost (standardnu devijaciju povrata) za svaku pojedinu vrijednosnicu. Pri analizi srednjih povrata i volatilnosti, te se brojke često *anualiziraju* - to znači da se srednji povrat pomnože s 252 (cca. broj trgovinskih dana u godini), a volatilnost s  $\sqrt{252}$ .

**Izračunajte anualizirane srednje povrate i volatilnosti. Sve ETF-ove prikažite u dijagramu raspršenja s volatilnošću na x-osi i srednjim povratom na y-osi.**

Razmislite - koji se ETF-ovi ističu po odnosu povrata i rizika (posebno dobri ili posebno loši kao investicije)?

```
[ ]: # 1. korak -> racunanje povrata po stupcima (po ETF-u)
daily_returns = prices.pct_change()

# 2.korak -> racunanje srednjih povrata i volatilnosti
mean_returns = daily_returns.mean()
volatility = daily_returns.std()

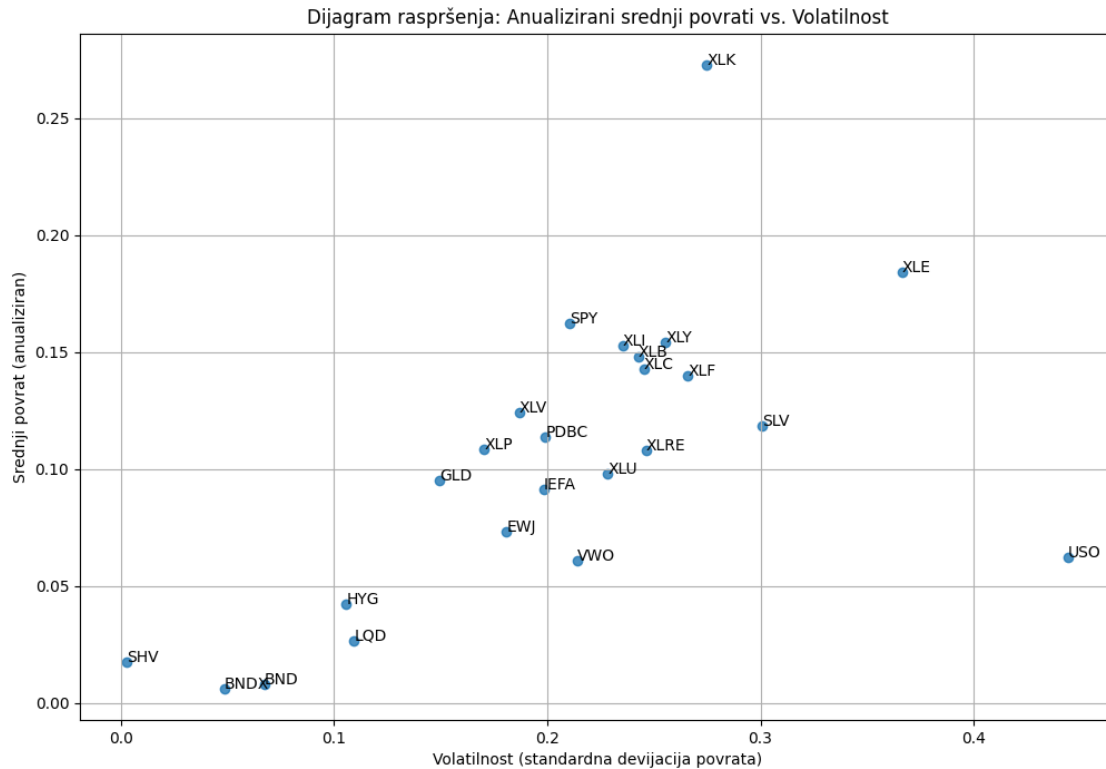
# 3.korak -> za svaku godinu (ukupno 3) -> srednji povrat i volatilnost po ETF-u
annualized_mean_returns = mean_returns * 252
annualized_volatility = volatility * (252 ** 0.5)

# 4.korak -> za sve ETF-ove nacrtati graf raspršenja (volatilnost na x-osi i
↳srednji povrat na y-osi)
scatter_data = pd.DataFrame({
    'Volatility': annualized_volatility,
    'Mean Return': annualized_mean_returns
})

plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.scatter(scatter_data['Volatility'], scatter_data['Mean Return'], alpha=0.8)

# Označavanje ETF-ova
for i, txt in enumerate(scatter_data.index):
    plt.annotate(txt, (scatter_data['Volatility'][i], scatter_data['Mean
↳Return'][i]))

plt.title('Dijagram raspršenja: Anualizirani srednji povrati vs. Volatilnost')
plt.xlabel('Volatilnost (standardna devijacija povrata)')
plt.ylabel('Srednji povrat (anualiziran)')
plt.grid(True)
plt.show()
```



1.2. Kovarijancu i korelaciju moguće je iz podataka izračunati koristeći Pandas, ali i NumPy ili neke druge biblioteke.

**Koristeći dnevne povrate, izračunajte matricu kovarijance  $\Sigma$  i matricu korelacije  $C$  povrata svih ETF-ova. Matrice ispišite u konzolu ili vizualizirajte.**

Proučite strukturu matrice i razmislite o tome koje zajedničke komponente u podacima možete očekivati.

```
[ ]: covariance_matrix = daily_returns.cov()
correlation_matrix = daily_returns.corr()

print("Matrica kovarijance:")
print(covariance_matrix)

print("\nMatrica korelacije:")
print(correlation_matrix)

# Vizualizacija matrice korelacije
plt.figure(figsize=(15, 12))
sns.heatmap(correlation_matrix, annot=True, fmt=".2f", cmap='coolwarm',
            cbar=True)
```

```
plt.title('Matrica korelacije')
plt.show()
```

Matrica kovarijance:

	SPY	IEFA	VWO	EWJ	XLF \
SPY	1.761574e-04	1.457528e-04	1.376812e-04	1.170823e-04	1.918401e-04
IEFA	1.457528e-04	1.563030e-04	1.409613e-04	1.259424e-04	1.728926e-04
VWO	1.376812e-04	1.409613e-04	1.815550e-04	1.112717e-04	1.534720e-04
EWJ	1.170823e-04	1.259424e-04	1.112717e-04	1.299253e-04	1.357587e-04
XLF	1.918401e-04	1.728926e-04	1.534720e-04	1.357587e-04	2.808551e-04
XLK	2.158161e-04	1.701803e-04	1.706754e-04	1.387625e-04	2.036297e-04
XLV	1.318726e-04	1.061152e-04	9.604616e-05	8.357183e-05	1.406268e-04
XLY	1.934884e-04	1.614538e-04	1.574461e-04	1.310982e-04	1.994529e-04
XLP	1.107683e-04	8.944329e-05	7.605146e-05	7.151245e-05	1.225315e-04
XLU	1.274866e-04	1.049761e-04	8.575088e-05	8.290778e-05	1.461856e-04
XLI	1.753387e-04	1.551730e-04	1.373171e-04	1.224394e-04	2.245905e-04
XLE	1.907531e-04	1.835906e-04	1.738178e-04	1.417821e-04	2.810847e-04
XLC	1.796809e-04	1.441639e-04	1.424863e-04	1.176312e-04	1.748918e-04
XLRE	1.628937e-04	1.385278e-04	1.222450e-04	1.077890e-04	1.868533e-04
XLB	1.757895e-04	1.626840e-04	1.479333e-04	1.284975e-04	2.209945e-04
BND	1.032848e-05	1.106674e-05	9.632471e-06	9.707243e-06	5.550302e-06
LQD	3.073254e-05	3.035281e-05	2.706990e-05	2.332045e-05	2.590348e-05
BNDX	6.836683e-06	6.458734e-06	5.747600e-06	5.987623e-06	2.102074e-06
SHV	-1.782225e-07	-1.215006e-07	-1.699283e-07	2.821937e-08	-4.059010e-07
HYG	7.076129e-05	6.390899e-05	5.976081e-05	5.006845e-05	8.011112e-05
GLD	1.307499e-05	2.218935e-05	2.325321e-05	1.778782e-05	-1.998805e-06
SLV	6.410859e-05	7.962121e-05	8.086376e-05	5.718553e-05	5.123144e-05
PDBC	5.730408e-05	5.856160e-05	6.037230e-05	4.461771e-05	7.280871e-05
USO	1.171177e-04	1.116622e-04	1.196180e-04	7.435808e-05	1.564442e-04

	XLK	XLV	XLY	XLP	XLU \
SPY	2.158161e-04	1.318726e-04	1.934884e-04	1.107683e-04	1.274866e-04
IEFA	1.701803e-04	1.061152e-04	1.614538e-04	8.944329e-05	1.049761e-04
VWO	1.706754e-04	9.604616e-05	1.574461e-04	7.605146e-05	8.575088e-05
EWJ	1.387625e-04	8.357183e-05	1.310982e-04	7.151245e-05	8.290778e-05
XLF	2.036297e-04	1.406268e-04	1.994529e-04	1.225315e-04	1.461856e-04
XLK	2.996448e-04	1.510928e-04	2.403027e-04	1.222616e-04	1.316509e-04
XLV	1.510928e-04	1.385254e-04	1.271010e-04	9.811664e-05	1.172870e-04
XLY	2.403027e-04	1.271010e-04	2.591421e-04	1.078307e-04	1.199366e-04
XLP	1.222616e-04	9.811664e-05	1.078307e-04	1.154083e-04	1.193987e-04
XLU	1.316509e-04	1.172870e-04	1.199366e-04	1.193987e-04	2.069732e-04
XLI	1.910086e-04	1.299066e-04	1.859044e-04	1.148908e-04	1.390192e-04
XLE	1.834210e-04	1.329837e-04	1.816440e-04	1.091994e-04	1.356845e-04
XLC	2.298729e-04	1.227429e-04	2.057247e-04	1.007367e-04	1.094027e-04
XLRE	1.805967e-04	1.317512e-04	1.722832e-04	1.208262e-04	1.756801e-04
XLB	1.937529e-04	1.310538e-04	1.861967e-04	1.143999e-04	1.386152e-04
BND	1.330583e-05	7.160052e-06	1.404303e-05	8.633379e-06	1.322661e-05
LQD	3.825942e-05	2.096342e-05	3.828408e-05	1.900692e-05	3.080993e-05

BNDX	8.851570e-06	5.695455e-06	9.282111e-06	5.575668e-06	1.193018e-05
SHV	-1.452970e-07	-9.666214e-08	-1.939843e-07	-4.617104e-08	4.848319e-08
HYG	8.294049e-05	5.245450e-05	7.940941e-05	4.330333e-05	5.912695e-05
GLD	1.719533e-05	1.085658e-05	1.310897e-05	1.405772e-05	2.878039e-05
SLV	7.808044e-05	4.390190e-05	7.235107e-05	4.033467e-05	6.391738e-05
PDBC	5.823096e-05	3.552949e-05	5.444496e-05	2.980149e-05	3.136934e-05
USO	1.189163e-04	7.579423e-05	1.034852e-04	6.289437e-05	5.387372e-05

	...	XLB	BND	LQD	BNDX \
SPY	...	1.757895e-04	1.032848e-05	3.073254e-05	6.836683e-06
IEFA	...	1.626840e-04	1.106674e-05	3.035281e-05	6.458734e-06
VWO	...	1.479333e-04	9.632471e-06	2.706990e-05	5.747600e-06
EWJ	...	1.284975e-04	9.707243e-06	2.332045e-05	5.987623e-06
XLF	...	2.209945e-04	5.550302e-06	2.590348e-05	2.102074e-06
XLK	...	1.937529e-04	1.330583e-05	3.825942e-05	8.851570e-06
XLV	...	1.310538e-04	7.160052e-06	2.096342e-05	5.695455e-06
XLY	...	1.861967e-04	1.404303e-05	3.828408e-05	9.282111e-06
XLP	...	1.143999e-04	8.633379e-06	1.900692e-05	5.575668e-06
XLU	...	1.386152e-04	1.322661e-05	3.080993e-05	1.193018e-05
XLI	...	2.047923e-04	7.666242e-06	2.831092e-05	5.608365e-06
XLE	...	2.420647e-04	1.351107e-06	2.017134e-05	-8.716908e-07
XLC	...	1.612733e-04	1.230099e-05	3.346059e-05	7.892247e-06
XLRE	...	1.730627e-04	1.730387e-05	4.088237e-05	1.311175e-05
XLB	...	2.339992e-04	8.019766e-06	2.815773e-05	5.579961e-06
BND	...	8.019766e-06	1.804064e-05	2.506508e-05	9.805009e-06
LQD	...	2.815773e-05	2.506508e-05	4.741936e-05	1.392387e-05
BNDX	...	5.579961e-06	9.805009e-06	1.392387e-05	9.331558e-06
SHV	...	-2.004156e-07	1.783662e-07	1.881198e-07	1.431022e-07
HYG	...	7.358275e-05	1.137993e-05	2.675037e-05	7.607734e-06
GLD	...	2.226311e-05	1.504004e-05	2.333186e-05	1.010811e-05
SLV	...	8.964691e-05	1.956764e-05	3.791384e-05	1.520044e-05
PDBC	...	7.391043e-05	9.697108e-07	9.178127e-06	-1.070061e-06
USO	...	1.377812e-04	-1.954240e-06	7.810558e-06	-3.598700e-06

	SHV	HYG	GLD	SLV	PDBC \
SPY	-1.782225e-07	7.076129e-05	1.307499e-05	6.410859e-05	5.730408e-05
IEFA	-1.215006e-07	6.390899e-05	2.218935e-05	7.962121e-05	5.856160e-05
VWO	-1.699283e-07	5.976081e-05	2.325321e-05	8.086376e-05	6.037230e-05
EWJ	2.821937e-08	5.006845e-05	1.778782e-05	5.718553e-05	4.461771e-05
XLF	-4.059010e-07	8.011112e-05	-1.998805e-06	5.123144e-05	7.280871e-05
XLK	-1.452970e-07	8.294049e-05	1.719533e-05	7.808044e-05	5.823096e-05
XLV	-9.666214e-08	5.245450e-05	1.085658e-05	4.390190e-05	3.552949e-05
XLY	-1.939843e-07	7.940941e-05	1.310897e-05	7.235107e-05	5.444496e-05
XLP	-4.617104e-08	4.330333e-05	1.405772e-05	4.033467e-05	2.980149e-05
XLU	4.848319e-08	5.912695e-05	2.878039e-05	6.391738e-05	3.136934e-05
XLI	-2.654281e-07	7.304679e-05	7.898453e-06	6.205533e-05	6.888892e-05
XLE	-6.132212e-07	7.971625e-05	1.550908e-05	9.618807e-05	1.797461e-04
XLC	-1.412257e-07	7.091742e-05	1.449226e-05	6.546367e-05	4.964330e-05

XLRE	-4.647225e-08	7.650127e-05	2.367132e-05	7.822725e-05	4.649864e-05
XLB	-2.004156e-07	7.358275e-05	2.226311e-05	8.964691e-05	7.391043e-05
BND	1.783662e-07	1.137993e-05	1.504004e-05	1.956764e-05	9.697108e-07
LQD	1.881198e-07	2.675037e-05	2.333186e-05	3.791384e-05	9.178127e-06
BNDX	1.431022e-07	7.607734e-06	1.010811e-05	1.520044e-05	-1.070061e-06
SHV	3.290195e-08	3.012192e-08	3.364304e-07	3.191481e-07	-2.125596e-07
HYG	3.012192e-08	4.433736e-05	1.293071e-05	3.729614e-05	2.542381e-05
GLD	3.364304e-07	1.293071e-05	8.868473e-05	1.389859e-04	2.891826e-05
SLV	3.191481e-07	3.729614e-05	1.389859e-04	3.588115e-04	8.087417e-05
PDBC	-2.125596e-07	2.542381e-05	2.891826e-05	8.087417e-05	1.573913e-04
USO	-8.205055e-07	4.886216e-05	2.067511e-05	1.013434e-04	2.905185e-04

USO

SPY	1.171177e-04
IEFA	1.116622e-04
VWO	1.196180e-04
EWJ	7.435808e-05
XLF	1.564442e-04
XLK	1.189163e-04
XLV	7.579423e-05
XLY	1.034852e-04
XLP	6.289437e-05
XLU	5.387372e-05
XLI	1.424165e-04
XLE	3.886086e-04
XLC	1.016578e-04
XLRE	9.185401e-05
XLB	1.377812e-04
BND	-1.954240e-06
LQD	7.810558e-06
BNDX	-3.598700e-06
SHV	-8.205055e-07
HYG	4.886216e-05
GLD	2.067511e-05
SLV	1.013434e-04
PDBC	2.905185e-04
USO	7.829798e-04

[24 rows x 24 columns]

Matrica korelacije:

	SPY	IEFA	VWO	EWJ	XLF	XLK	XLV	\
SPY	1.000000	0.878381	0.769875	0.773916	0.862477	0.939356	0.844188	
IEFA	0.878381	1.000000	0.836782	0.883774	0.825186	0.786362	0.721156	
VWO	0.769875	0.836782	1.000000	0.724492	0.679648	0.731751	0.605635	
EWJ	0.773916	0.883774	0.724492	1.000000	0.710689	0.703270	0.622943	
XLF	0.862477	0.825186	0.679648	0.710689	1.000000	0.701934	0.712955	
XLK	0.939356	0.786362	0.731751	0.703270	0.701934	1.000000	0.741610	



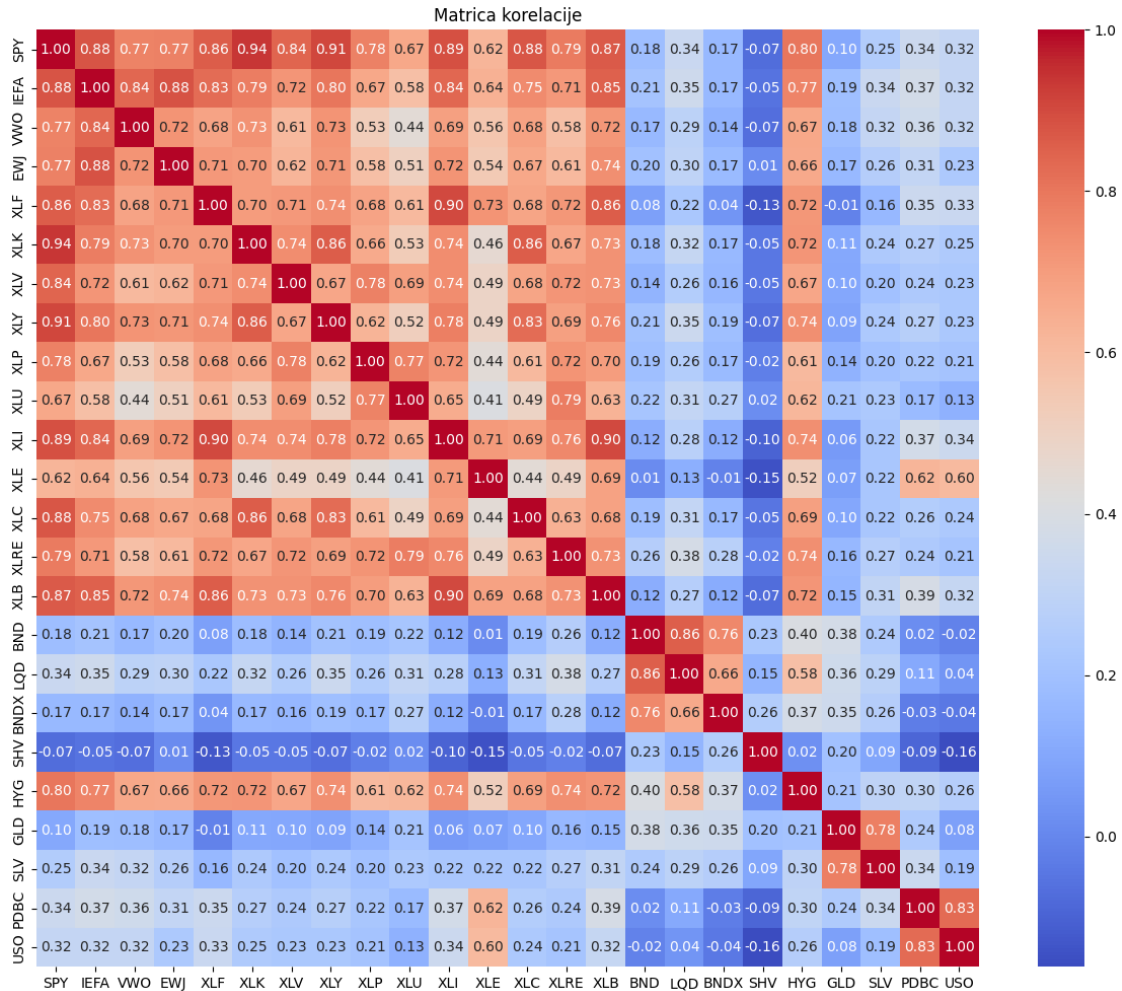
XLV	0.844188	0.721156	0.605635	0.622943	0.712955	0.741610	1.000000
XLY	0.905598	0.802224	0.725870	0.714465	0.739316	0.862356	0.670835
XLP	0.776867	0.665956	0.525394	0.584005	0.680594	0.657458	0.775996
XLU	0.667663	0.583646	0.442362	0.505582	0.606326	0.528644	0.692673
XLI	0.890781	0.836904	0.687169	0.724299	0.903636	0.744034	0.744235
XLE	0.622738	0.636284	0.558951	0.538962	0.726742	0.459124	0.489573
XLC	0.876503	0.746577	0.684653	0.668155	0.675663	0.859777	0.675201
XLRE	0.790579	0.713748	0.584411	0.609142	0.718209	0.672044	0.721077
XLB	0.865835	0.850656	0.717719	0.736954	0.862051	0.731708	0.727910
BND	0.183215	0.208406	0.168309	0.200504	0.077974	0.180972	0.143227
LQD	0.336256	0.352564	0.291746	0.297107	0.224460	0.320965	0.258654
BNDX	0.168623	0.169117	0.139639	0.171961	0.041061	0.167394	0.158411
SHV	-0.074029	-0.053578	-0.069527	0.013649	-0.133527	-0.046275	-0.045277
HYG	0.800683	0.767703	0.666082	0.659678	0.717905	0.719579	0.669319
GLD	0.104608	0.188468	0.183254	0.165711	-0.012665	0.105483	0.097950
SLV	0.254996	0.336211	0.316823	0.264854	0.161385	0.238125	0.196918
PDBC	0.344148	0.373370	0.357144	0.312011	0.346300	0.268139	0.240621
USO	0.315353	0.319189	0.317261	0.233134	0.333613	0.245506	0.230142

	XLY	XLP	XLU	...	XLB	BND	LQD	\
SPY	0.905598	0.776867	0.667663	...	0.865835	0.183215	0.336256	
IEFA	0.802224	0.665956	0.583646	...	0.850656	0.208406	0.352564	
VWO	0.725870	0.525394	0.442362	...	0.717719	0.168309	0.291746	
EWJ	0.714465	0.584005	0.505582	...	0.736954	0.200504	0.297107	
XLF	0.739316	0.680594	0.606326	...	0.862051	0.077974	0.224460	
XLK	0.862356	0.657458	0.528644	...	0.731708	0.180972	0.320965	
XLV	0.670835	0.775996	0.692673	...	0.727910	0.143227	0.258654	
XLY	1.000000	0.623527	0.517876	...	0.756129	0.205384	0.345359	
XLP	0.623527	1.000000	0.772545	...	0.696145	0.189207	0.256930	
XLU	0.517876	0.772545	1.000000	...	0.629864	0.216454	0.310997	
XLI	0.778689	0.721124	0.651570	...	0.902713	0.121703	0.277217	
XLE	0.488918	0.440439	0.408655	...	0.685659	0.013783	0.126923	
XLC	0.827407	0.607115	0.492349	...	0.682585	0.187506	0.314599	
XLRE	0.689391	0.724493	0.786606	...	0.728765	0.262427	0.382428	
XLB	0.756129	0.696145	0.629864	...	1.000000	0.123432	0.267308	
BND	0.205384	0.189207	0.216454	...	0.123432	1.000000	0.856969	
LQD	0.345359	0.256930	0.310997	...	0.267308	0.856969	1.000000	
BNDX	0.188756	0.169903	0.271464	...	0.119412	0.755692	0.661919	
SHV	-0.066433	-0.023694	0.018579	...	-0.072229	0.231513	0.150607	
HYG	0.740829	0.605366	0.617225	...	0.722410	0.402373	0.583401	
GLD	0.086472	0.138954	0.212430	...	0.154545	0.376009	0.359788	
SLV	0.237270	0.198211	0.234546	...	0.309382	0.243209	0.290661	
PDBC	0.269587	0.221121	0.173803	...	0.385131	0.018198	0.106239	
USO	0.229739	0.209227	0.133827	...	0.321890	-0.016443	0.040535	

	BNDX	SHV	HYG	GLD	SLV	PDBC	USO
SPY	0.168623	-0.074029	0.800683	0.104608	0.254996	0.344148	0.315353
IEFA	0.169117	-0.053578	0.767703	0.188468	0.336211	0.373370	0.319189

VWO	0.139639	-0.069527	0.666082	0.183254	0.316823	0.357144	0.317261
EWJ	0.171961	0.013649	0.659678	0.165711	0.264854	0.312011	0.233134
XLF	0.041061	-0.133527	0.717905	-0.012665	0.161385	0.346300	0.333613
XLK	0.167394	-0.046275	0.719579	0.105483	0.238125	0.268139	0.245506
XLV	0.158411	-0.045277	0.669319	0.097950	0.196918	0.240621	0.230142
XLY	0.188756	-0.066433	0.740829	0.086472	0.237270	0.269587	0.229739
XLP	0.169903	-0.023694	0.605366	0.138954	0.198211	0.221121	0.209227
XLU	0.271464	0.018579	0.617225	0.212430	0.234546	0.173803	0.133827
XLI	0.123795	-0.098669	0.739707	0.056554	0.220897	0.370256	0.343185
XLE	-0.012364	-0.146484	0.518735	0.071358	0.220025	0.620802	0.601757
XLC	0.167273	-0.050409	0.689556	0.099635	0.223753	0.256196	0.235216
XLRE	0.276487	-0.016503	0.740074	0.161916	0.266021	0.238749	0.211453
XLB	0.119412	-0.072229	0.722410	0.154545	0.309382	0.385131	0.321890
BND	0.755692	0.231513	0.402373	0.376009	0.243209	0.018198	-0.016443
LQD	0.661919	0.150607	0.583401	0.359788	0.290661	0.106239	0.040535
BNDX	1.000000	0.258261	0.374019	0.351373	0.262691	-0.027922	-0.042101
SHV	0.258261	1.000000	0.024939	0.196952	0.092886	-0.093407	-0.161657
HYG	0.374019	0.024939	1.000000	0.206212	0.295696	0.304344	0.262248
GLD	0.351373	0.196952	0.206212	1.000000	0.779136	0.244770	0.078460
SLV	0.262691	0.092886	0.295696	0.779136	1.000000	0.340319	0.191200
PDBC	-0.027922	-0.093407	0.304344	0.244770	0.340319	1.000000	0.827577
USO	-0.042101	-0.161657	0.262248	0.078460	0.191200	0.827577	1.000000

[24 rows x 24 columns]



### 3 Zadatak 2 - Analiza glavnih komponenti

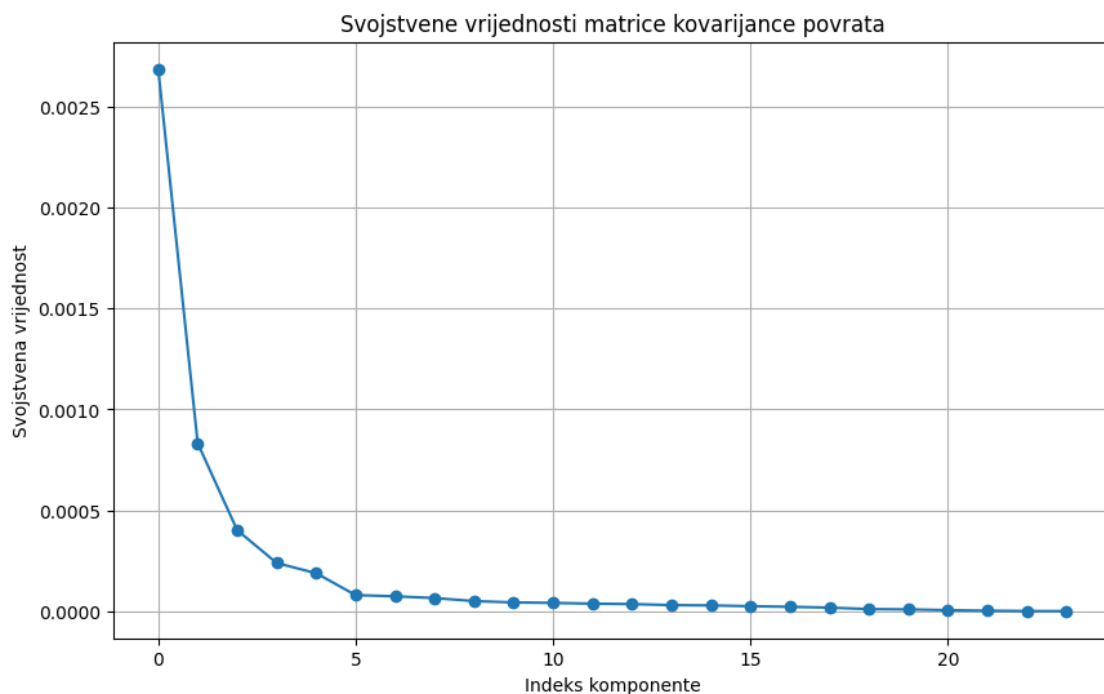
2.1. Za analizu glavnih komponenti potrebno je izračunati svojstvenu dekompoziciju, koju možete pronaći u sklopu biblioteke NumPy <https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.eig.html>.

Izračunajte svojstvene vektore i pripadajuće svojstvene vrijednosti matrice kovarijance povrata  $\Sigma$ . Poredajte komponente padajući po svojstvenim vrijednostima i prikazite svojstvene vrijednosti grafički.

```
[ ]: eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(covariance_matrix)
```

```
[ ]: sorted_indices = np.argsort(eigenvalues)[::-1]
sorted_eigenvalues = eigenvalues[sorted_indices]
sorted_eigenvectors = eigenvectors[:, sorted_indices]
```

```
[ ]: plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(sorted_eigenvalues, marker='o')
plt.title('Svojstvene vrijednosti matrice kovarijance povrata')
plt.xlabel('Indeks komponente')
plt.ylabel('Svojstvena vrijednost')
plt.grid(True)
plt.show()
```



2.2. Izračunajte koliki udio varijance objašnjavaju prve tri komponente?

```
[ ]: # Izračunavanje ukupne varijance (suma svih svojstvenih vrijednosti)
total_variance = sum(sorted_eigenvalues)

# Izračunavanje udjela varijance objašnjene prvim tri komponentama
variance_explained_first_three = sum(sorted_eigenvalues[:3]) / total_variance

variance_explained_first_three_percentage = variance_explained_first_three * 100
variance_explained_first_three_percentage
```

```
[ ]: 79.71142095322995
```

2.3. Komponente PCA će u financijama često opisivati neke zajedničke faktore u podacima, što je moguće analizirati promatranjem pojedinih elemenata svojstvenih vektora. Ako je neki element određenog svojstvenog vektora velik po magnitudi (pozitivan ili negativan), to znači da ta komponenta opisuje odgovarajuću vrijednosnicu i objašnjava njenu varijancu, za razliku od slučaja kad je

element blizu 0, što znači da razmatrana vrijednosnica ne ovisi previše o toj komponenti.

**Prikažite grafički (npr. stupčastim dijagramom za svaku komponentu posebno) koeficijente prve 3 glavne komponente (elemente prva tri svojstvena vektora).**

S obzirom na to koje vrijednosnice opisuju prve tri komponente, razmislite možete li zaključiti kakve zajedničke faktore u tržištu opisuju razmatrane komponente?

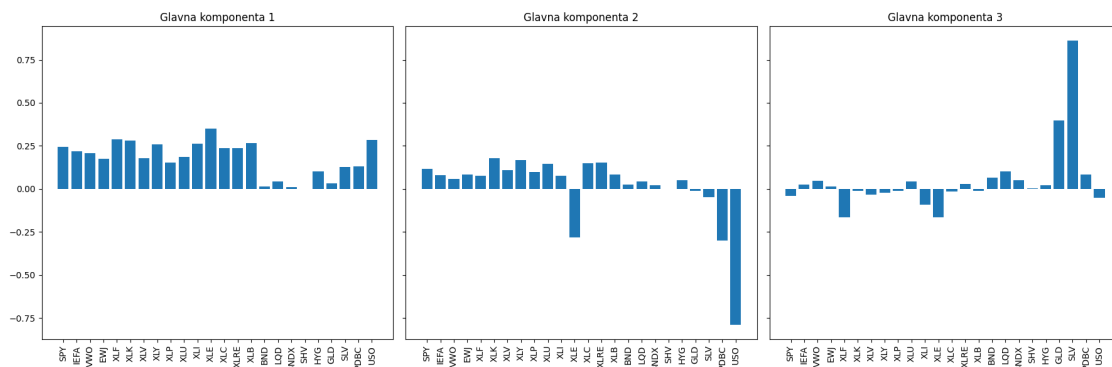
NAPOMENA: pripazite na to što vraća funkcija koju koristite i u kojoj se dimenziji (stupac ili red) nalaze svojstveni vektori.

```
[ ]: fig, axes = plt.subplots(nrows=1, ncols=3, figsize=(18, 6), sharey=True)

etf_names = daily_returns.columns

# Prikazivanje koeficijenata za svaku od prve tri glavne komponente
for i in range(3):
    axes[i].bar(etf_names, sorted_eigenvectors[:, i])
    axes[i].set_title(f'Glavna komponenta {i+1}')
    axes[i].tick_params(axis='x', rotation=90)

plt.tight_layout()
plt.show()
```



## ZAKLJUČAK

1. Glavna komponenta 1: Ova komponenta ima značajne koeficijente za većinu ETF-ova, što ukazuje na to da ova komponenta može opisivati neki opći tržišni faktor koji utječe na većinu vrijednosnica.
2. Glavna komponenta 2: Ovje se može primijetiti kako neki ETF-ovi imaju veće koeficijente, dok su drugi blizu nule ili negativni. To može ukazivati na specifične sektorske ili geografske faktore koji utječu na te ETF-ove.
3. Glavna komponenta 3: Slično kao i kod druge komponente, ova komponenta također ima varijabilne koeficijente, što može upućivati na druge, manje dominantne tržišne faktore ili specifične karakteristike određenih ETF-ova.

2.4. Ponovite prethodnu analizu za matricu korelacije povrata  $C$  (prikažite svojstvene vrijednosti, udio varijance i koeficijente pojedinih komponenti za prve tri komponente).

Usporedite rezultate - mijenjaju li se interpretacije komponenti?

```
[ ]: eigenvalues_corr, eigenvectors_corr = np.linalg.eig(correlation_matrix)

sorted_indices_corr = np.argsort(eigenvalues_corr)[::-1]
sorted_eigenvalues_corr = eigenvalues_corr[sorted_indices_corr]
sorted_eigenvectors_corr = eigenvectors_corr[:, sorted_indices_corr]

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(sorted_eigenvalues_corr, marker='o')
plt.title('Svojstvene vrijednosti matrice korelacije povrata')
plt.xlabel('Indeks komponente')
plt.ylabel('Svojstvena vrijednost')
plt.grid(True)
plt.show()

total_variance_corr = sum(sorted_eigenvalues_corr)

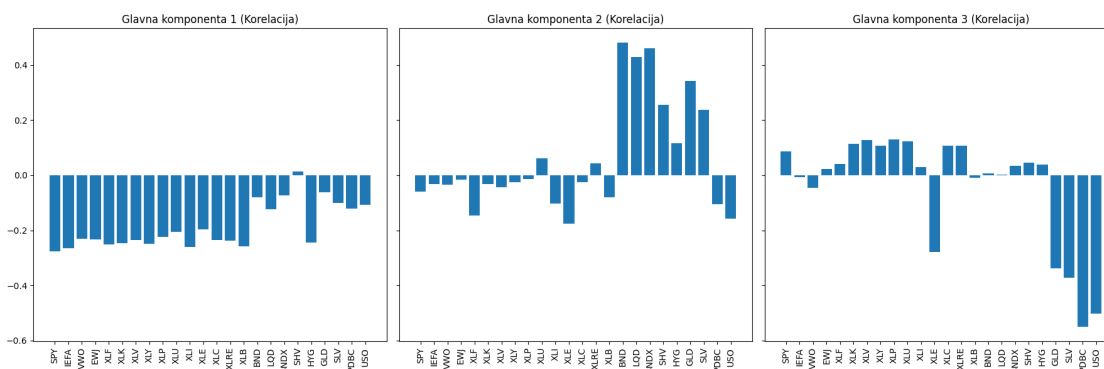
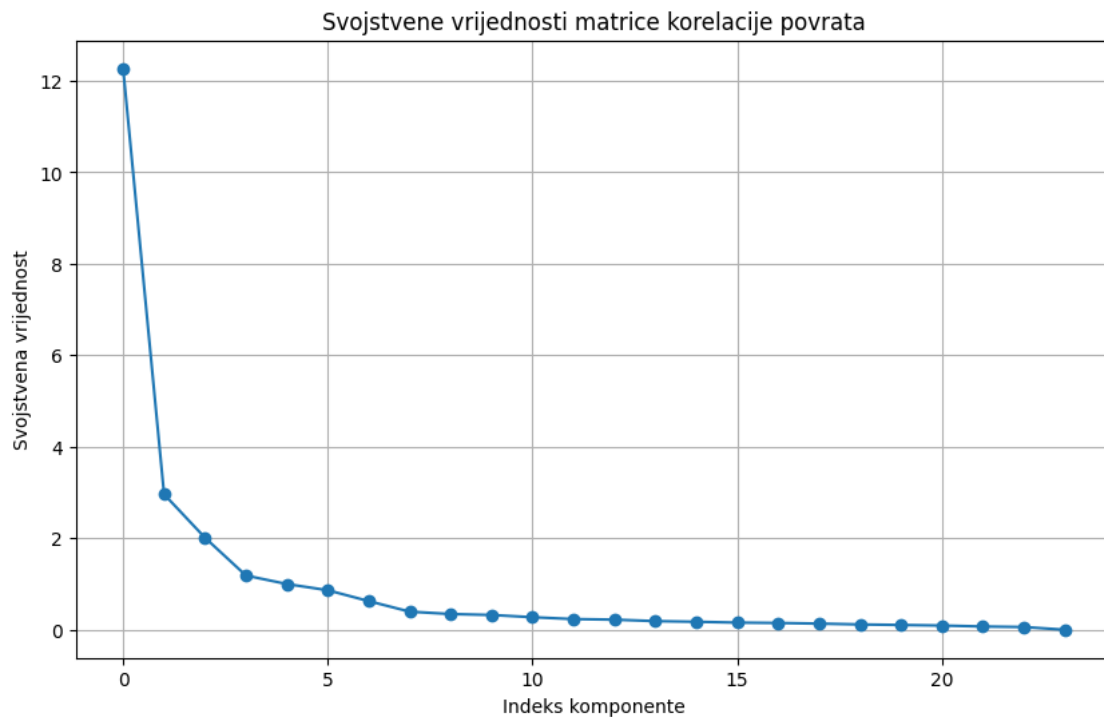
variance_explained_first_three_corr = sum(sorted_eigenvalues_corr[:3]) /   
    ↪total_variance_corr
variance_explained_first_three_percentage_corr =   
    ↪variance_explained_first_three_corr * 100

fig, axes = plt.subplots(nrows=1, ncols=3, figsize=(18, 6), sharey=True)

for i in range(3):
    axes[i].bar(etf_names, sorted_eigenvectors_corr[:, i])
    axes[i].set_title(f'Glavna komponenta {i+1} (Korelacija)')
    axes[i].tick_params(axis='x', rotation=90)

plt.tight_layout()
plt.show()

variance_explained_first_three_percentage_corr
```



[ ]: 71.86037598887204

Analiza glavnih komponenti (PCA) za matricu korelacije povrata daje sljedeće rezultate:

1. Svojstvene vrijednosti: Graf svojstvenih vrijednosti pokazuje koliko svaka komponenta doprinosi ukupnoj varijaciji povrata. Slično kao i kod matrice kovarijance, prvih nekoliko komponenti ima veće svojstvene vrijednosti, što ukazuje na njihov veći doprinos.
2. Udio varijance: Prve tri komponente objašnjavaju oko 71.86% ukupne varijance. To je nešto manje od udjela koji su objasnile prve tri komponente u analizi matrice kovarijance, ali i dalje predstavlja značajan dio ukupne varijance.

3. Koeficijenti pojedinih komponenti: Stupčasti dijagrami za prve tri glavne komponente prikazuju koeficijente svake komponente za svaki ETF. Ovi grafikoni daju uvid u to kako svaka od komponenti povezuje različite ETF-ove.

## 4 Zadatak 3 - Svojstveni portfelji

U primjeni PCA i svojstvenoj dekompoziciji kovarijance u financijama, svojstveni vektori se često zovu i tzv. svojstveni portfelji.

Općenito, portfelj je vektor  $w = [w_1, \dots, w_N]$  u kojem svaki element predstavlja težinu ili udio kapitala u određenoj vrijednosnici. Same težine svojstvenih portfelja mogu biti rotirane i skalirane u odnosu na elemente svojstvenih vektora.

U ovoj analizi ćemo pomnožiti njihove težine s predznakom njihove sume - na taj način zapravo samo “okrećemo” predznak svojstvenog vektora tako da mu je suma pozitivna (konačni PCA rastav je i dalje isti ako svojstveni vektor pomnožimo s -1). Također, dobro je i skalirati svojstvene portfelje sa sumom njihovih apsolutnih vrijednosti:

$$\tilde{w}_i = \frac{w_i}{\sum_j |w_j|}.$$

Na taj način se osigurava da visoke magnitude pojedinih elemenata ne uzrokuju velike razlike u volatilnostima svojstvenih portfelja.

Ukoliko znamo povrate  $R \in \mathbb{R}^{T \times N}$  (gdje je  $R_i \in \mathbb{R}^T$  vektor povrata za vrijednosnicu  $i$ ) za  $N$  vrijednosnica u nekom vremenskom periodu od  $T$  dana, povrate portfelja  $w$  u tom istom periodu možemo izračunati kao:

$$R_p = \sum R_i w_i = R \cdot w.$$

Izračunajte skalirane svojstvene portfelje  $\tilde{w}$  koji proizlaze iz prve tri glavne komponente dobivene iz matrice kovarijance  $\Sigma$ . Za ta tri svojstvena portfelja izračunajte povijesne povrate kroz razmatrani period. Grafički prikažite vremensko kretanje njihovih vrijednosti (njihove povrate “vratite” natrag u cijene, s tim da početna cijena bude jednak za oba portfelja, npr. 100).

```
[ ]: scaled_portfolios = np.copy(sorted_eigenvectors[:, :3])

for i in range(3):
    if np.sum(scaled_portfolios[:, i]) < 0:
        scaled_portfolios[:, i] = -scaled_portfolios[:, i]
    scaled_portfolios[:, i] /= np.sum(np.abs(scaled_portfolios[:, i]))

# Izračunavanje povrata portfelja
portfolio_returns = np.dot(daily_returns.fillna(0), scaled_portfolios)

# Pretvaranje povrata u cijene (početna cijena = 100)
initial_price = 100
portfolio_prices = np.cumprod(1 + portfolio_returns, axis=0) * initial_price

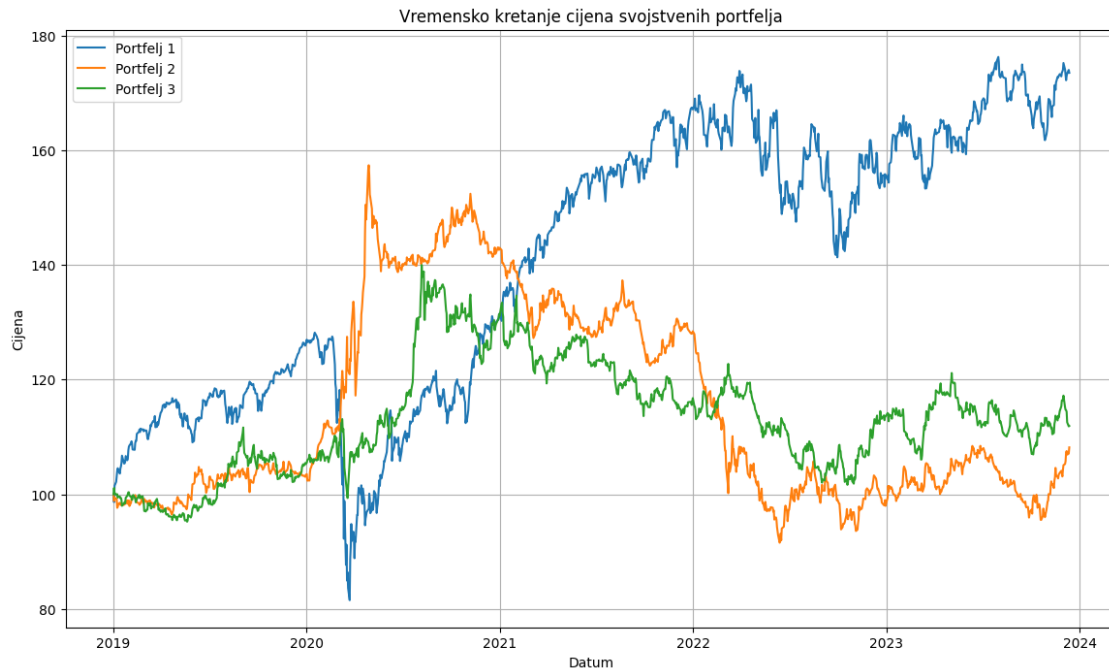
plt.figure(figsize=(14, 8))
```



```

for i in range(3):
    plt.plot(daily_returns.index, portfolio_prices[:, i], label=f'Portfelj {i+1}')
plt.title('Vremensko kretanje cijena svojstvenih portfelja')
plt.xlabel('Datum')
plt.ylabel('Cijena')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```



Ako usporedite dobivene rezultate s kretanjem cijena originalnih vrijednosnica, vidjet ćete sličnosti između vrijednosnica koje pripadaju određenim klasama imovina i pojedinih svojstvenih portfelja. Svojstveni portfelji dakle predstavljaju niže-dimenzionalan prostor tzv. sintetičkih vrijednosnica (u našem slučaju 3 umjesto originalnih 24) koje najbolje opisuju cijeli razmatrani skup podataka. Dobra procjena tih komponenti je ključna u razumijevanju zajedničkog kretanja većih skupova dionica i upravljanju financijskim rizikom.

Razmislite što to znači za tržište koje smo analizirali - koji su glavni izvori rizika prevladavali u razmatranom periodu?