TODO Zahvala

Sadržaj

1. Uvod

TODO Uvod.

2. Metodologija

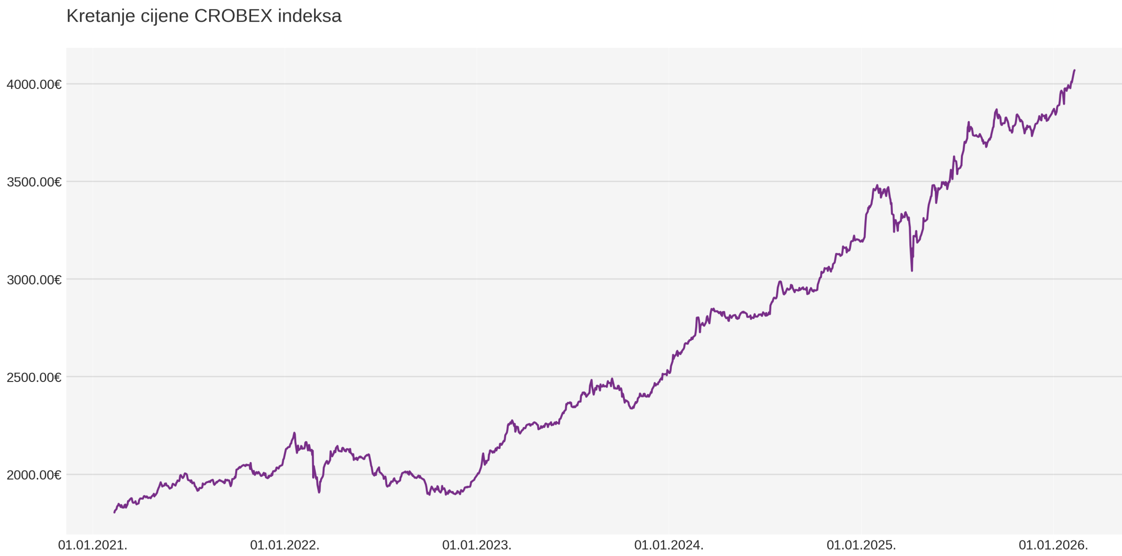
Ovo poglavlje pokriva teoretsku osnovu potrebnu za razumijevanje implementiranog modela dubokog učenja te samu arhitekturu modela. Prvo ćemo definirati varijable pomoću kojih ćemo kasnije oblikovati naše podatke. Zatim ćemo proći osnove faktorskih modela i razmotriti kako jednofaktorski model može objasniti povrate imovina. Na kraju ćemo opisati sam model dubokog učenja, njegovu arhitekturu i funckije cilja koje se koriste u ovom radu. !TODO Revidirat nakon ostatka poglavlja!

2.1. Povrati imovine

Vrijednosni papiri predstavljaju financijske instrumente koji potvrđuju određena imovinska ili druga prava njihova vlasnika, poput prava na udio u vlasništvu poduzeća (dionice) ili prava na povrat uloženih sredstava uz kamatu (obveznice). Njima se trguje na organiziranim tržištima kapitala, poput burzi, gdje se kupnja i prodaja odvijaju putem ovlaštenih posrednika, a cijene se formiraju na temelju ponude i potražnje. Tržišna cijena vrijednosnog papira u svakom trenutku odražava ravnotežu između kupaca i prodavatelja, pri čemu se svaka realizirana transakcija bilježi kao nova referentna cijena. Tržišni indeksi predstavljaju promjene vrijednosti grupe dionica ili drugih financijskih instrumenata. Služe kao mjerilo performansi tržišta ili određenog segmenta tržišta [1].

Kako bi se omogućila analiza kretanja cijena kroz vrijeme, kontinuirani tok transakcijskih podataka uzorkuje se u diskretnim vremenskim intervalima (npr. minute, sati, dani), čime se dobivaju vremenski nizovi cijena koji služe kao temelj za statističku analizu i modeliranje. Slika 2.1. prikazuje kretanje dnevnih cijena CROBEX indeksa u zadnjih 5 godina.

U ovom radu koristit ćemo povrate umijesto samih cijena imovina. Postoje dva glavna



Slika 2.1. Kretanje cijene CROBEX indeksa

razloga za to. Prvi je to što povrati sažimaju kretanja cijena te ih stavljaju na jednaku i usporedivu skalu. Drugi se odnosi na povoljnija statistička svojstva povrata u odnosu na cijene. Postoji više načina za definirati povrate [2].

Jednostavni (artimetički) povrati

Nek je P_t cijena imovine u trenutku t. Ako imovinu posjedujemo od trenutka $t-1$ do trenutka t, ostvareni artimetički povrat dobivamo izrazom:

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \tag{2.1}$$

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{2.2}$$

Ukoliko imovinu držimo kroz T perioda ukupni artimetički povrat dobivamo ukamaćivanjem artimetičkih povrata u vremenu [3]:

$$\begin{aligned} 1 + R_{total} = \frac{P_T}{P_1} &= \frac{P_T}{P_{T-1}} \times \frac{P_{T-1}}{P_{T-2}} \times \ldots \times \frac{P_2}{P_1} \\ &= (1 + R_T)(1 + R_{T-1}) \ldots (1 + R_1) \\ &= \prod_{t=1}^{T} (1 + R_t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Kontinuirani (logaritamski) povrati

Prirodni logaritam artimetičkog povrata (2.1) je logaritamski povrat:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1}, \tag{2.4}$$

gdje $p_t = \ln(P_t)$.

Razmotrimo zatim ukamaćivanje logaritamskih povrata u vremenu:

$$\begin{aligned} r_{total} &= \ln(1 + R_{total}) = \ln[(1 + R_T)(1 + R_{T-1}) \dots (1 + R_1)] \\ &= \ln(1 + R_T) + \ln(1 + R_{T-1}) + \dots + \ln(1 + R_1) \\ &= r_T + r_{T-1} + \dots + r_1 \\ &= \sum_{t=1}^{T} r_t \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ukamaćivanje logaritamski povrata može se ostvariti zbrajanjem pojedinačnih logaritamskih povrata. To svojstvo zovemo *aditivnost u vremenu*. Logaritmski povrati također posjeduju poželjna statistička svojstva [3]. Za male magnitude vrijedi $r_t \approx R_t$. Ova aproksimacija je korisna kada se razmatraju kratki vremenski intervali [1]. Slika 2.2. prikazuje dnevne artimetičke i logaritamske povrate CROBEX indeksa u zadnjih 5 godina. Sa slike vidimo da nema značajne razlike između artimetičkih i logaritamskih povrata jer su povrati izračunati na kratkom odnosno dnevnom vremenskom intervalu.

Povrat portfelja

Artimetički povrat portfelja koji se sastoji od N vrijednosnica je otežana artimetička sredina (engl. *weighted average*) artimetičkih povrata vrijednosnica, gdje je težina (engl. *weight*) pojedine vrijednosnice njezin udio u vrijednosti portfelja [3].

Nek je p portfelj kojem je w_i ponder vrijednosnice i. Tada je artimetički povrat portfelja p u trenutku t dan izrazom:

$$R_{pt} = \sum_{i=1}^{N} w_i R_{it}, \tag{2.6}$$

gdje je R_{it} artimetički povrat vrijednosnice i u trenutku t. Ovo svojstvo nazivamo *aditiv-*

Slika 2.2. Artimetički i logaritamski povrati CROBEX indeksa

nost u prostoru vrijednosnica. Logaritamski povrati ne posjeduju to svojstvo.

Povrati iznad bezritične kamatne stope

Povrati iznad bezrizične kamatne stope (engl. *excess return*) predstavlja razliku između ostvarenog povrata određene imovine i referentnog, bezrizičnog povrata, te mjeri dodatnu kompenzaciju koju investitor ostvaruje za preuzimanje rizika. Kao referentni povrat najčešće se koriste prinosi na državne obveznice visoke kreditne kvalitete i kratkog dospijeća, jer se smatra da nose zanemariv rizik [3].

$$R_t^{excess} = R_t - R_f \tag{2.7}$$

2.2. Statistički modeli povrata

Prije nego razmotrimo konkretne statističke modele povrata, potrebno je ukratko opisati osnovne distribucije na kojima će se temeljiti daljnja analiza te načine estimacije njihovih parametara.

Normalna distribucija

Normalna distribucija jedan je od najčešće korištenih probabilističkih modela u statistici i financijama zbog svoje matematičke jednostavnosti i dobrih teorijskih svojstava. Ako slučajna varijabla X slijedi normalnu distribuciju sa sredinom μ i varijancom σ^2, tada njezina funkcija gustoće ima oblik [4]:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{2.8}$$

Za osmotreni uzorak $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, procjena sredine dana je aritmetičkom sredinom

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2.9}$$

dok se varijanca procjenjuje izrazom:

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu})^2. \tag{2.10}$$

Lognormalna distribucija

Lognormalna distribucija koristi se za modeliranje slučajnih varijabli čiji je logaritam normalno distribuiran. Ako postoji broj a takav da $Y = \ln(X - a)$ prati normalnu distribuciju, slučajna varijabla X tada slijedi lognormalnu distribuciju. Kako bi to vrijedilo, vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost manju od a mora biti jednaka nuli. Ako vrijedi $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, tada X ima gustoću:

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(x-a)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x > a. \tag{2.11}$$

Sredina i varijanca lognormalne distribucije dane su izrazima

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad \mathrm{Var}[X] = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}. \tag{2.12}$$

Procjena parametara provodi se logaritamskom transformacijom uzorka, nakon čega se primjenjuju standardne procjene za normalnu distribuciju [4].

Studentova t distribucija

Studentova t distribucija predstavlja generalizaciju normalne distribucije s dodatnim parametrom broja stupnjeva slobode ν, koji kontrolira debljinu repova. Za manje vrijednosti ν distribucija ima izraženije repove, čime omogućuje robusnije modeliranje ekstremnih vrijednosti.

Gustoća Studentove t distribucije sa sredinom μ, varijancom σ^2 i ν stupnjeva slobode ima oblik:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi\sigma^2}}\left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}. \tag{2.13}$$

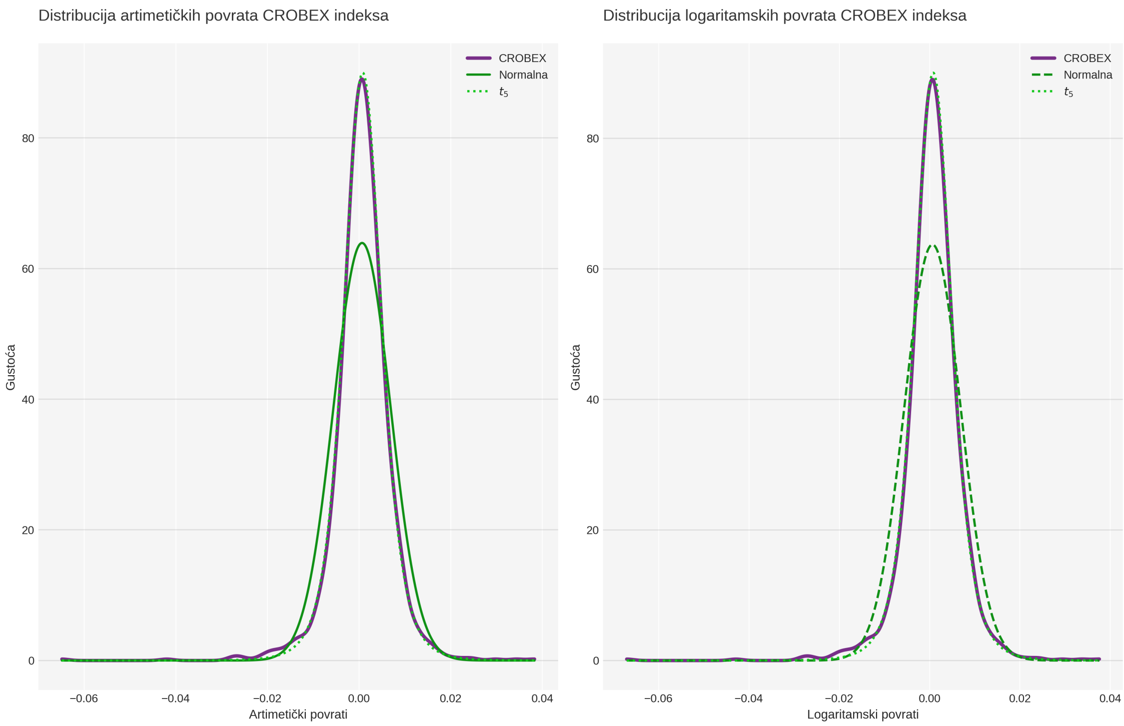
Zbog složenog oblika funckije gustoće, ne postoji izravan način za izračun njenih prametara. Za procjenu parametara t distribucije koriste se metode procjene najveće izglednosti (engl. *maximum likelihood estimation*) [5].

Statistička svojstva povrata

U statističkoj analizi financijskih vremenskih nizova često se polazi od pretpostavke da su aritmetički povrati nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s normalnom distribucijom, konstantnom sredinom i varijancom, čime se značajno pojednostavljuje teorijska obrada i izvođenje analitičkih rezultata. Međutim, takva pretpostavka suočava se s nizom ograničenja: aritmetički povrati imaju donju granicu od -1, dok normalna distribucija nema ograničenja po realnoj osi, višeperiodni povrati ne zadržavaju normalnu distribuciju zbog multiplikativne prirode (2.3), a empirijski podaci često pokazuju odstupanja od normalnosti.

Alternativno možemo pretpostaviti da su logaritamski povrati nezavisno i identično normalno distribuirani sa sredinom μ i varijancom σ^2. S tom pretpostavkom impliciramo da su aritmetički povrati nezavisno i identično lognormalno distribuirani. Ovaj pristup ima povoljnija matematička svojstva jer su zbrojevi logaritamskih povrata kroz više razdoblja također normalno distribuirani (2.5), a pritom se prirodno zadovoljava donja granica aritmetičkog povrata (2.11). Unatoč tim prednostima, ni pretpostavka log-normalnosti u potpunosti ne opisuje realna tržišna kretanja, budući da stvarni financijski povrati često pokazuju deblje repove distribucije i veću učestalost ekstremnih vrijednosti nego što to predviđa normalna distribucija [3].

Kako bismo bolje obuhvatili ta empirijska svojstva, možemo koristiti studentovu t-distribuciju. Slika 2.3. prikazuje distribuciju gustoće vjerojatnosti dnevnih artimetičkih i logaritamskih povrata CROBEX indeksa u zadnjih 5 godina. Također je prikazana distribucija gustoće vjerojatnosti normalne distribucije i studentove t-distribucije s pet stupnjeva slobode [1]. Parametri μ i σ^2 za normalnu i t_5-distribuciju procjenjeni su iz artimetičkih povrata za lijevi graf i logaritamskih povrata za desni graf. Sa slike vidimo kako t_5-distribucija puno vijernije modelira distribuciju povrata. Također vidimo da su, zbog male magnitude dnevnih povrata, artimetički i logaritamski povrati gotovo identično distribuirani.



Slika 2.3. Distribucija dnevnih artimetičkih i logaritamskih povrata CROBEX indeksa

[1]Biramo pet stupnjeva slobode kako bi imali konačna prva četiri momenta distribucije. Za više informacija pogledaj [5, Chapter 28.]

Slučajni vektori

Nek je $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$ slučajni vektor p slučajnih varijabli. Tada su vektor sredina i kovarijacijska matrica dani izrazima:

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}_X = \left[E(X_1), \dots, E(X_p)\right]^\intercal \tag{2.14}$$

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma}_X = E\left[\left(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X\right)\left(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X\right)^\intercal\right], \tag{2.15}$$

uz uvijet da dana očekivanj postoje. Neka su $\{\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_T}\}$ realizacije slučajnog vektora $\mathbf{X}$. Tada su uzoračka sredina i kovarijacijska matrica dane izrazima [3]:

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_x = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbf{x}_t, \qquad \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_x = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\mathbf{x}_t - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_x\right)\left(\mathbf{x}_t - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_x\right)^\intercal. \tag{2.16}$$

Ako pretpostavimo da slučajni vektor $\mathbf{X}$ dolazi is multivariatne normalne distribucije s vektorom sredina $\boldsymbol{\mu}$ i kovarijaciskom matricom $\boldsymbol{\Sigma}$, tada je funkcija izglednosti uzorka (engl. *likelihood function*) dana jednadžbom [6]:

$$\mathcal{L}\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}; \mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_T}\right) = (2\pi)^{-\frac{pT}{2}} \,|\det(\boldsymbol{\Sigma})|^{-\frac{T}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu}\right)^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu}\right)\right). \tag{2.17}$$

S obzirom da taj oblik funckije izglednosti nije najprikladniji za računanje računalom iskazat ćemo i njezin logaritamski oblik (engl. *log-likelihood function*) te ćemo zamijeniti argument $\boldsymbol{\Sigma}$ s $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$:

$$\begin{aligned} &\ln \mathcal{L}\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}^{-1}; \mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_T}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(-pT\ln(2\pi) + T\ln[\det(\boldsymbol{\Sigma}^{-1})] - \sum_{t=1}^{T}\left(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu}\right)^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu}\right)\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

2.3. Faktorski modeli

U analizi povrata imovina često se primjenjuju multivarijatne statističke metode kako bi se proučilo ponašanje i međusobna povezanost većeg broja vrijednosnica unutar portfelja. Međutim, modeliranje velikog broja vremenskih nizova povrata dovodi do visokodimenzionalnih i kompleksnih modela koji su složeni za interpretaciju i primjenu u praksi.

Empirijska istraživanja pokazuju da se povrati različitih vrijednosnica često kreću na sličan način, što nas upućuje da postoje neki zajednički faktori koji utječu na njihovo kretanje. Primjerice, u razdobljima gospodarske krize pad aktivnosti cijelog gospodarstva obično rezultira istodobnim padom cijena većine vrijednosnica, dok rast određenog sektora, poput tehnološkog, često dovodi do rasta cijena većine dionica unutar tog sektora [7].

Te činjenice omogućuju faktorskim modelima da objasne kretanje većeg broja povrata pomoću ogarničenog broja zajedničkih faktora te da pojednostavne njihovu analizu. Postoje tri vrste faktorskih modela [2]. Prvi su *markoekonomski faktorski modeli* koji se fokusiraju na varijable kao što su rast BDP-a, kamatne stope, stopa inflacije i slično. U ovakvom su modelu faktori osmotrivi pa se model može estimirati linearnom regresijom. Drugi su *fundamentalni faktorski modeli* koji koriste podatke o poduzećima kako bi konsturiali svoje faktore. Treći su *statistički faktorski modeli* čiji su faktori neosmotrive latentne varijable koje se estimiraju iz podataka [3]. Ovaj rad će se fokusirati prvu vrstu odnosno na *makroekonomske faktorske modele*.

2.3.1. Linearni faktorski model

Pretpostavimo da imamo p imovina kroz T vremenskih trenutaka. Neka je r_{it} povrat imovine i u trenutku t. Opća forma faktorskog modela dana je izrazom:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_{i1} f_{1t} + \cdots + \beta_{im} f_{mt} + \epsilon_{it}, \quad t = 1, \dots, T; \quad i = 1, \dots, p, \tag{2.19}$$

gdje je α_i konstanta, $\{f_{jt} | j = 1, \dots, m\}$ su m zajdeničkih (sistemskih) faktora, β_{ij} su koeficijenti imovine i uz faktor j, a ϵ_{it} je specifičan (idiosinkratski) faktor imovine i.

Za faktor $\mathbf{f}_t = (f_{1t}, \dots, f_{mt})^\intercal$ vrijedi:

$$E(\mathbf{f}_t) = \boldsymbol{\mu}_f, \tag{2.20}$$

$$\text{Cov}(\mathbf{f}_t) = \boldsymbol{\Sigma}_f, \quad m \times m \text{ matrica}, \tag{2.21}$$

dok je idiosinkratski faktor ϵ_{it} modeliran bijelim šumom koji nije koreliran sa sistemskim faktorima f_{jt} i drugim idiosinkratskim faktorima. Dakle predpostavljamo:

$$E(\epsilon_{it}) = 0 \quad \text{za sve } i, t \tag{2.22}$$

$$\mathrm{Cov}(f_{jt}, \epsilon_{is}) = 0 \quad \text{za sve } i, j, t, s \tag{2.23}$$

$$\mathrm{Cov}(\epsilon_{it}, \epsilon_{js}) = \begin{cases} \sigma_i^2, & \text{ako } i = j \text{ i } t = s, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.24}$$

Jednadžbu (2.19) možemo zapisati i u matričnom obliku za svih p imovina u trenutku t:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{f_t} + \boldsymbol{\epsilon}_t, \quad t = 1, \dots, T, \tag{2.25}$$

gdje je $\mathbf{r}_t = \left(r_{1t}, \dots, r_{pt}\right)^{\intercal}$ vektor povrata, $\boldsymbol{\alpha} = \left(\alpha_1, \dots, \alpha_p\right)^{\intercal}$ vektor konstanti, $\boldsymbol{\beta} = \left[\beta_{ij}\right]$ je $p \times m$ matrica koeficijenata, a $\boldsymbol{\epsilon}_t = \left(\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{pt}\right)^{\intercal}$ je vektor idiosinkratskih faktora čija je kovarijacijska matrica $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\epsilon}_t) = \boldsymbol{\Psi} = \mathrm{diag}\left\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2\right\}$ $p \times p$ dijagonalna matrica. Kovarijacisku matricu povrata $\mathbf{r}_t$ možemo računati sljedećom formulom:

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{r}_t) = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Sigma}_f\boldsymbol{\beta}^{\intercal} + \boldsymbol{\Psi}. \tag{2.26}$$

Zatim jednadžbu (2.25) možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\xi}\mathbf{g}_t + \boldsymbol{\epsilon}_t, \tag{2.27}$$

gdje $\mathbf{g}_t = \left(1, \mathbf{f}_t^{\intercal}\right)^{\intercal}$, a $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ je $p \times (m+1)$ matrica. Transponiramo li prethodnu jednadžbu i grupiramo podatke za svih T trenutaka dobivamo:

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}\boldsymbol{\xi}^{\intercal} + \mathbf{E}, \tag{2.28}$$

gdje je $\mathbf{R}$ $T \times p$ matrica povrata čiji je t-ti redak $\mathbf{r}_t^{\intercal}$, $\mathbf{G}$ je $T \times (m+1)$ matrica čiji je t-ti redak $\mathbf{g}_t^{\intercal}$, $\mathbf{E}$ je $T \times p$ matrica idiosinkratskih faktora čiji je t-ti redak $\boldsymbol{\epsilon}_t^{\intercal}$ [3].

S obzirom da nas zanimaju *makroekonomski faktorski modeli* čiji su faktori $\mathbf{f}_t$ osmotrivi, jednadžba (2.28) ima oblik višestruke multivariatne linearne regresije. Zbog toga parametre modela možemo estimirati metodom najmanjih kvadrata [8]:

$$\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\intercal} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\alpha}}^{\intercal} \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\intercal} \end{bmatrix} = (\mathbf{G}^{\intercal}\mathbf{G})^{-1}(\mathbf{G}^{\intercal}\mathbf{R}), \tag{2.29}$$

odakle su $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ lako dostupni. Reziduale, odnosno povrate idiosinkratskih faktora možemo lako dobiti koristeći formulu (2.28):

$$\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{R} - \mathbf{G}\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{\intercal}. \tag{2.30}$$

2.3.2. Jednofaktorski model povrata

Jedan od najpoznatijih *makroekonomskih faktorskih modela* koristi povrat tržišta kao faktor koji utječe na sve vrijednosnice:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{mt} + \epsilon_{it} \qquad i = 1, \dots, p; \qquad t = 1, \dots, T, \tag{2.31}$$

gdje je r_{it} povrat vrijednosnice i iznad bezrizične kamatne stope, a r_{mt} povrat tržišta iznad bezrizične kamatne stope. Kod modeliranja dionica, za povrat tržišta r_{mt} uzima se povrat nekog tržišnog indeksa (npr. CROBEX za hrvatsko tržište) iznad bezrizične kamatne stope. Koeficijenti modela α_i i β_i procjenjuju se metodom najmanjih kvadrata (2.29).

Ovaj rad fokusirat će se upravo na jednofaktorski model povrata. Cilj ovog rada biti će ispitati može li model dubokog učenja, iz prozora povijesnih povrata $\mathbf{R}_H = \{\mathbf{r}_t\}_{t=1}^{k}$, procijeniti koeficijente α_i i β_i, koji će bolje odgovarati budućem prozoru povrata $\mathbf{R}_F = \{\mathbf{r}_t\}_{t=k+1}^{T}$, nego procjena koeficijenata α_i i β_i koju možemo dobiti metodom najmanjih kvadrata na istom povijesnom prozoru povrata $\mathbf{R}_H$ za $1 \leq k < T$. Način na koji ćemo mjeriti koliko dobro procjena koeficijenata α_i i β_i odgovara budućem prozoru povrata $\mathbf{R}_F$ biti će detaljnije objašnjen u potpoglavlju 3.2.

2.4. Duboko učenje

Duboko učenje predstavlja podpodručje strojnog učenja koje se ističe u rješavanju problema s visokom dimenzionalnošću podataka, kao što su računalni vid, obrada prirodnog jezika, financijska te slične složene domene. Temeljna ideja dubokog učenja je izgradnja hijerarhijskih, složenih reprezentacija podataka, koje se dobivaju primjenom uzastopnih nelinearnih transformacija modeliranih pomoću višeslojnih neuronskih mreža. Osnovni element svake neuronske mreže je umjetni neuron. Za zadani ulazni vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\intercal$, izlaz neurona definiramo jednadžbom:

$$h = f(\mathbf{w}^\intercal \mathbf{x} + b) \tag{2.32}$$

gdje je $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^\intercal$ vektor težina neurona koji odrežuje doprinos pojedine komponente ulaznog vektora, a skalar b omogućuje dodatni pomak linearne kombinacije ulaza. Aktivacijska funkcija f uvodi nelinearnost u model, čime se omogućuje aproskimacija složenih i nelinearnih odnosa u podatcima.

Neke od najčešće korištenih aktivacijskih funkcija su sigmoidalna funkcija i hiperbolni tangens. Obje su nelinearne, monotono rastuće i kontinuirano diferencijabilne, što je ključno svojstvo u procesu učenja neuronskih mreža metodama koje se temelje na gradijentnom spustu. Sigmoidalna funkcija ima kodomenu u intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, dok hiperbolni tangens poprima vrijednosti u intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, pri čemu obje funckije imaju karakterističan S-oblik.

Među najznačajnijim arhitekturama dubokih modela ističu se duboke unaprijende mreže, konvolucijske neuronske mreže te povratne neuronske mreže. Svaka od navedenih arhitektura prilagođena je specifičnim vrstama podataka i problemima.

Odabir odgovarajuće arhitekture ovisi o prirodi i strukturi odabranih podataka. U okviru ovog rada koristit ćemo posebnu vrstu povratnih neuronskih mreža koje nazivamo mreže s dugoročnom memorijom (engl. *long short-term memory, LSTM*). LSTM mreže dizajnirane su kako bi omogućile učenje dugoročnih ovisnosti u sekvencijalnim podatcima, zbog čega se često primjenjuju u modeliranju vremenskih nizova.

2.4.1. Povratne neuronske mreže

TODO Općenito objašnjenje povratnih neuronskih mreža

2.4.2. LSTM mreže

TODO Općenito objašnjenje LSTM mreža

3. Implementacija

3.1. Podatci

TODO Objašnjenje odakle nam dolaze podatci, kako su procesirani te povezat s definiranim varijablama

3.2. Model dubokog učenja

TODO Objasniti arhitekturu našeg modela TOOD Objasniti različite funkcije cilja

4. Rezultati

TODO Rezultati i rasprava

5. Zaključak

TODO Zaključak

Literatura

[1] S. Begušić i Z. Kostanjčar, “Financijska tržišta i instrumenti”, Prezentacija s kolegija Analitika financija na FER-u, 2025.

[2] J. Y. Campbell, A. W. Lo, i A. C. MacKinlay, *The Econometrics of Financial Markets*, 2. izd. Princeton University Press, 1997.

[3] R. S. Tsay, *Analysis of financial time series*, 3. izd. John Wiley & Sons, Inc., 2010.

[4] N. L. Johnson, S. Kotz, i N. Balakrishan, *Continuous Univariate Distributions*, 2. izd. John Wiley & Sons, Inc., 1994., sv. 1.

[5] ——, *Continuous Univariate Distributions*, 2. izd. John Wiley & Sons, Inc., 1994., sv. 2.

[6] M. Taboga, “Multivariate normal distribution - maximum likelihood estimation”, Lectures on probability theory and mathematical statistics. Kindle Direct Publishing. Online appendix., 2021., pristupljeno 13. 2. 2026. [Mrežno]. Adresa: https://www.statlect.com/fundamentals-of-statistics/multivariate-normal-distribution-maximum-likelihood

[7] S. Begušić i Z. Kostanjčar, “Modeli povrata imovina”, Prezentacija s kolegija Analitika financija na FER-u, 2025.

[8] R. A. Johnson i D. W. Wichern, *Applied multivariate statistical analysis*, 5. izd. Pearson Education, 2002.

Sažetak

TBD

Marko Miljković

Unesite sažetak na hrvatskom.

Ključne riječi: prva ključna riječ; druga ključna riječ; treća ključna riječ

Abstract

TBD

Marko Miljković

Enter the abstract in English.

Keywords: the first keyword; the second keyword; the third keyword