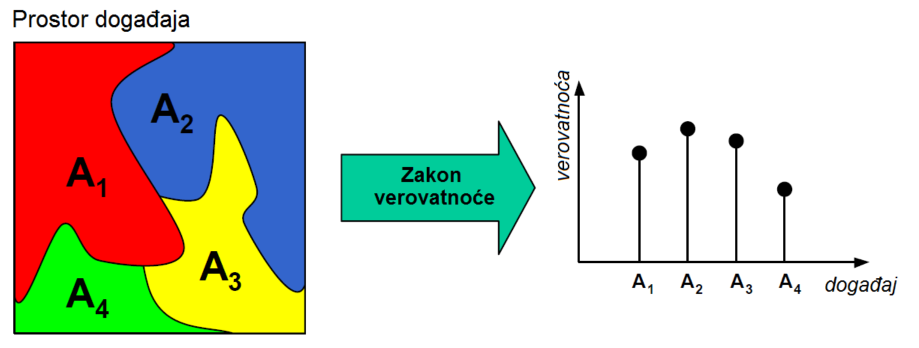
Pregled teorije verovatnoće

- Verovatnoća
  - Definicija verovatnoće
  - Aksiomi i osobine
  - Uslovna verovatnoća
  - Bayesova teorema
- Slučajne promenljive
  - Definicija slučajne promenljive
  - Kumulativna funkcija raspodele
  - Gustina raspodele verovatnoće
  - Statistička karakterizacija slučajnih promenljivih
- Slučajni vektori
  - Vektor srednje vrednosti
  - Kovarijansna matrica
- Gaussova slučajna promenljiva

Osnovni koncepti teorije verovatnoće

- Definicije verovatnoće (neformalne)
  - *Verovatnoću* čine brojevi dodeljeni slučajnim događajima koji označavaju stepen izvesnosti da će se događaj desiti pri slučajnom izvođenju eksperimenta
  - *Zakon verovatnoće* predstavlja pravilo po kojem se dodeljuju verovatnoće događajima u slučajnom eksperimentu
  - Prostor uzoraka *S* slučajnog eksperimenta je skup svih mogućih ishoda

  - Aksiomi verovatnoće
    - $P[A_i] \geq 0$
    - $P[S] = 1$
    - Ako $A_i \cap A_j = \varnothing$, onda $P[A_i \cup A_j] = P[A_i] + P[A_j]$



Još neke osobine verovatnoće

OSOBINA 1: $P[\overline{A}] = 1 - P[A]$

OSOBINA 2 $P[A] \leq 1$

OSOBINA 3: $P[\varnothing] = 0$

OSOBINA 4: Ako za događaje $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ važi

$A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$, onda $P[\bigcup_{k=1}^{N} A_k] = \sum_{k=1}^{N} P[A_k]$

OSOBINA 5: $P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 \cap A_2]$

OSOBINA 6: $P[\bigcup_{k=1}^{N} A_k] = \sum_{k=1}^{N} P[A_k] - \sum_{j<k}^{N} P[A_j \cap A_k] + ...$

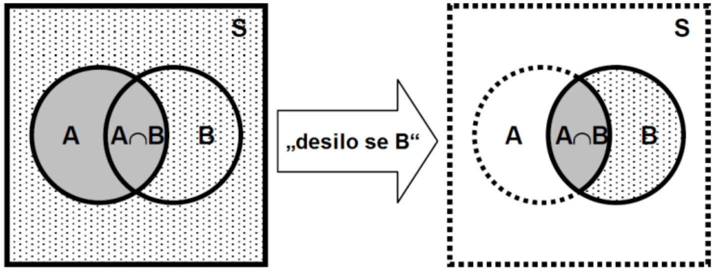
$... + (-1)^{N+1} P[A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_N]$

OSOBINA 7: Ako $A_1 \subset A_2$, onda $P[A_1] \leq P[A_2]$

Uslovna verovatnoća

- Ako su A i B dva događaja, verovatnoća događaja A pod uslovom da se događaj B desio, definisana je sledećom relacijom:

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}, \text{ za } P[B] > 0$$

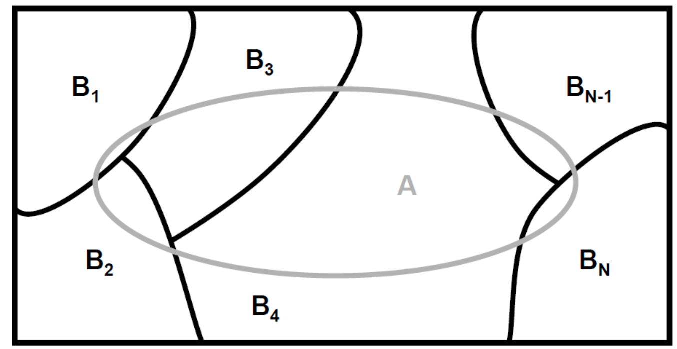


- Uslovna verovatnoća $P[A|B]$ čita se kao:
  - Verovatnoća događaja A pod uslovom B
  - Verovatnoća događaja A ako je dato B
- Interpretacija
  - Uslov da se događaj B desio proizvodi sledeći efekat:
    - Celokupni uzorački prostor S svodi se na samo skup B
    - Događaj A svodi se na skup $A \cap B$
    - $P[B]$ u imeniocu služi za renormalizaciju verovatnoće (siguran događaj sada postaje B)

Teorema totalne verovatnoće

- Neka su $B_1, B_2, \ldots, B_N$ međusobno isključivi događaji čija je unija jednaka ukupnom uzoračkom prostoru S. Ovakav skup događaja naziva se *particija skupa S*.
- Proizvoljan događaj A može se predstaviti kao:

$$
\begin{aligned}
A &= A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_N) \\
&= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_N)
\end{aligned}
$$



- Pošto su $B_1, B_2, \ldots, B_N$ međusobno isključivi:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}[A] &= \mathrm{P}[A \cap B_1] + \mathrm{P}[A \cap B_2] + \ldots + \mathrm{P}[A \cap B_N] \\
&= \mathrm{P}[A \mid B_1]\mathrm{P}[B_1] + \mathrm{P}[A \mid B_2]\mathrm{P}[B_2] + \ldots + \mathrm{P}[A \mid B_N]\mathrm{P}[B_N] = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}[A \mid B_k]\mathrm{P}[B_k]
\end{aligned}
$$

Bayesova teorema

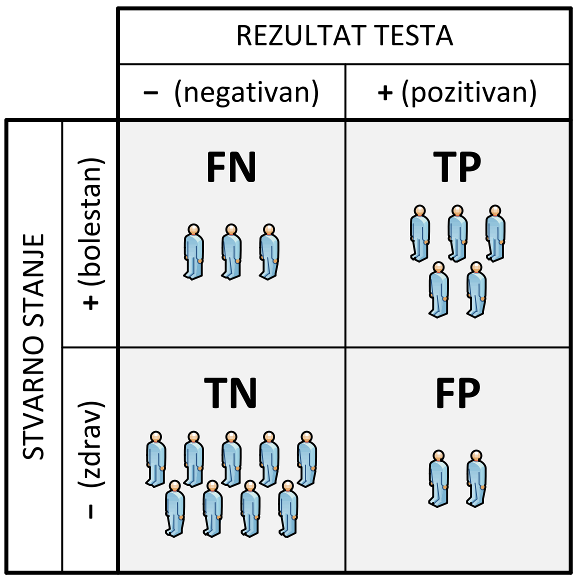
- Neka je data particija $\{B_1, B_2, \ldots, B_N\}$ uzoračkog prostora S. Pod uslovom da se desio događaj A, koja je verovatnoća da se desio događaj B_j?
  - Koristeći definiciju uslovne verovatnoće i teoremu totalne verovatnoće, dobija se:

$$\mathrm{P}[B_j \mid A] = \frac{\mathrm{P}[A \cap B_j]}{\mathrm{P}[A]} = \frac{\mathrm{P}[A \mid B_j]\mathrm{P}[B_j]}{\sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}[A \mid B_k]\mathrm{P}[B_k]}$$

- Ovaj izraz poznat je kao Bayesova teorema (pravilo) i spada u najvažnije relacije u verovatnoći i statistici
  - Bayesova teorema je od fundamentalnog značaja za statističke metode mašinskog učenja

Primer (binarna klasifikacija)

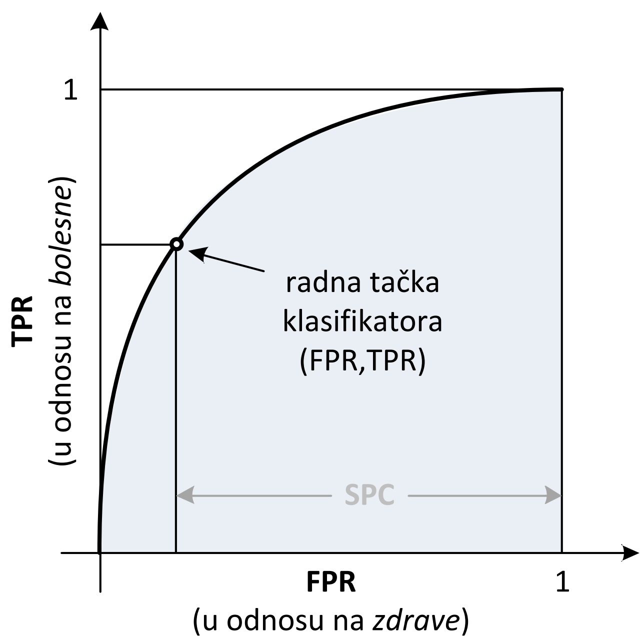
- Medicinski problem u kom treba doneti odluku da li pacijent boluje od određene bolesti ili ne, a na osnovu nesavršenog testa
  - Postoje dve moguće vrste greške – lažni pozitivan i lažni negativan rezultat



- Mere uspešnosti testa
  - Osetljivost/odziv $TPR = \frac{TP}{TP+FN} = \mathrm{P}[\text{pozitivan} \mid \text{bolestan}]$
  - Stopa lažnih pozitiva $FPR = \frac{FP}{TN+FP} = \mathrm{P}[\text{pozitivan} \mid \text{zdrav}]$
  - Specifičnost $SPC = \frac{TN}{TN+FP} = 1 - FPR = \mathrm{P}[\text{negativan} \mid \text{zdrav}]$
  - Preciznost $PREC = \frac{TP}{TP+FP} = \mathrm{P}[\text{bolestan} \mid \text{pozitivan}]$
  - Tačnost $ACC = \frac{TP+TN}{TP+TN+FP+FN} = \mathrm{P}[\text{ispravno klasifikovan}]$

Primer (binarna klasifikacija)

- Medicinski problem u kom treba doneti odluku da li pacijent boluje od određene bolesti ili ne, a na osnovu nesavršenog testa
  - Postoje dve moguće vrste greške – lažni pozitivan i lažni negativan rezultat



- Mere uspešnosti testa
  - Osetljivost/odziv $TPR = \frac{TP}{TP+FN} = \mathrm{P[pozitivan\,|\,bolestan]}$
  - Stopa lažnih pozitiva $FPR = \frac{FP}{TN+FP} = \mathrm{P[pozitivan\,|\,zdrav]}$
  - Specifičnost $SPC = \frac{TN}{TN+FP} = 1 - FPR = \mathrm{P[negativan\,|\,zdrav]}$
  - Preciznost $PREC = \frac{TP}{TP+FP} = \mathrm{P[bolestan\,|\,pozitivan]}$
  - Tačnost $ACC = \frac{TP+TN}{TP+TN+FP+FN} = \mathrm{P[ispravno\ klasifikovan]}$

Primer (binarna klasifikacija)

- Pretpostavke:
  - populacija broji 10000 ljudi, gde 1 na svakih 100 boluje od određene bolesti
  - medicinski test kojim se ta bolest otkriva ima specifičnost 98% i osetljivost 90%
- Pitanje:
  - Ako je neka osoba pozitivna na tom testu, koja je verovatnoća da je zaista i bolesna?

		REZULTAT TESTA		
		− (negativan)	+ (pozitivan)	
STVARNO STANJE	+ (bolestan)	**FN**	**TP**	ukupno bolesnih
	− (zdrav)	**TN**	**FP**	ukupno zdravih
		ukupno negativnih	ukupno pozitivnih	ukupno u populaciji 10000

Primer (binarna klasifikacija)

- Pretpostavke:
  - populacija broji 10000 ljudi, gde 1 na svakih 100 boluje od određene bolesti
  - medicinski test kojim se ta bolest otkriva ima specifičnost 98% i osetljivost 90%
- Pitanje:
  - Ako je neka osoba pozitivna na tom testu, koja je verovatnoća da je zaista i bolesna?
- Odgovor:
  - Ako je 1 na svakih 100 bolestan, bolesnih ima 100 a zdravih 9900

		REZULTAT TESTA		
		− (negativan)	+ (pozitivan)	
STVARNO STANJE	+ (bolestan)	**FN**	**TP**	ukupno bolesnih 100
	− (zdrav)	**TN**	**FP**	ukupno zdravih 9900
		ukupno negativnih	ukupno pozitivnih	ukupno u populaciji 10000

Primer (binarna klasifikacija)

- Pretpostavke:
  - populacija broji 10000 ljudi, gde 1 na svakih 100 boluje od određene bolesti
  - medicinski test kojim se ta bolest otkriva ima specifičnost 98% i osetljivost 90%
- Pitanje:
  - Ako je neka osoba pozitivna na tom testu, koja je verovatnoća da je zaista i bolesna?
- Odgovor:
  - Ako je 1 na svakih 100 bolestan, bolesnih ima 100 a zdravih 9900
  - Ako je osetljivost testa (TPR) 90%, od 100 bolesnih, 90 će biti otkriveno

$$TPR = \frac{TP}{TP + FN} = \mathrm{P}[\text{pozitivan} \,|\, \text{bolestan}]$$

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">REZULTAT TESTA</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>− (negativan)</td><td>+ (pozitivan)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">STVARNO STANJE</td><td>+ (bolestan)</td><td>FN
10</td><td>TP
90</td><td>ukupno bolesnih
100</td></tr>
<tr><td>− (zdrav)</td><td>TN</td><td>FP</td><td>ukupno zdravih
9900</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>ukupno negativnih</td><td>ukupno pozitivnih</td><td>ukupno u populaciji
10000</td></tr>
</table>

Primer (binarna klasifikacija)

- Pretpostavke:
  - populacija broji 10000 ljudi, gde 1 na svakih 100 boluje od određene bolesti
  - medicinski test kojim se ta bolest otkriva ima specifičnost 98% i osetljivost 90%
- Pitanje:
  - Ako je neka osoba pozitivna na tom testu, koja je verovatnoća da je zaista i bolesna?
- Odgovor:
  - Ako je 1 na svakih 100 bolestan, bolesnih ima 100 a zdravih 9900
  - Ako je osetljivost testa (TPR) 90%, od 100 bolesnih, 90 će biti otkriveno

$$TPR = \frac{TP}{TP + FN} = \mathrm{P}[\text{pozitivan} \,|\, \text{bolestan}]$$

  - Ako je specifičnost testa 98%, od 9900 zdravih 9702 će biti proglašeno za zdrave, a preostalih 198 za bolesne

$$SPC = \frac{TN}{TN + FP} = \mathrm{P}[\text{negativan} \,|\, \text{zdrav}]$$

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">REZULTAT TESTA</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>− (negativan)</td><td>+ (pozitivan)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">STVARNO STANJE</td><td>+ (bolestan)</td><td>FN
10</td><td>TP
90</td><td>ukupno bolesnih
100</td></tr>
<tr><td>− (zdrav)</td><td>TN
9702</td><td>FP
198</td><td>ukupno zdravih
9900</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>ukupno negativnih</td><td>ukupno pozitivnih</td><td>ukupno u populaciji
10000</td></tr>
</table>

Primer (binarna klasifikacija)

- Pretpostavke:
  - populacija broji 10000 ljudi, gde 1 na svakih 100 boluje od određene bolesti
  - medicinski test kojim se ta bolest otkriva ima specifičnost 98% i osetljivost 90%
- Pitanje:
  - Ako je neka osoba pozitivna na tom testu, koja je verovatnoća da je zaista i bolesna?
- Odgovor:
  - Ako je 1 na svakih 100 bolestan, bolesnih ima 100 a zdravih 9900
  - Ako je osetljivost testa (TPR) 90%, od 100 bolesnih, 90 će biti otkriveno

$$TPR = \frac{TP}{TP + FN} = \mathrm{P}[\text{pozitivan} \,|\, \text{bolestan}]$$

  - Ako je specifičnost testa 98%, od 9900 zdravih 9702 će biti proglašeno za zdrave, a preostalih 198 za bolesne

$$SPC = \frac{TN}{TN + FP} = \mathrm{P}[\text{negativan} \,|\, \text{zdrav}]$$

  - Tražena verovatnoća je 90/288 = **31,25%**

		REZULTAT TESTA		
		− (negativan)	+ (pozitivan)	
STVARNO STANJE	+ (bolestan)	**FN** 10	**TP** 90	ukupno bolesnih 100
	− (zdrav)	**TN** 9702	**FP** 198	ukupno zdravih 9900
		ukupno negativnih 9712	ukupno pozitivnih 288	ukupno u populaciji 10000

Primer (binarna klasifikacija)

- Pretpostavke:
  - populacija broji 10000 ljudi, gde 1 na svakih 100 boluje od određene bolesti
  - medicinski test kojim se ta bolest otkriva ima specifičnost 98% i osetljivost 90%
- Pitanje:
  - Ako je neka osoba pozitivna na tom testu, koja je verovatnoća da je zaista i bolesna?
- Odgovor (na osnovu Bayesove formule):

$$\mathrm{P}[B_j \mid A] = \frac{\mathrm{P}[A \cap B_j]}{\mathrm{P}[A]} = \frac{\mathrm{P}[A \mid B_j]\mathrm{P}[B_j]}{\sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}[A \mid B_k]\mathrm{P}[B_k]}$$

$$\mathrm{P}[\text{bolestan} \mid \text{pozitivan}] = \frac{\mathrm{P}[\text{bolestan i pozitivan}]}{\mathrm{P}[\text{pozitivan}]}$$

$$= \frac{\mathrm{P}[\text{pozitivan} \mid \text{bolestan}]\mathrm{P}[\text{bolestan}]}{\mathrm{P}[\text{pozitivan} \mid \text{bolestan}]\mathrm{P}[\text{bolestan}] + \mathrm{P}[\text{pozitivan} \mid \text{zdrav}]\mathrm{P}[\text{zdrav}]}$$

$$= \frac{TPR \cdot \mathrm{P}[\text{bolestan}]}{TPR \cdot \mathrm{P}[\text{bolestan}] + FPR \cdot \mathrm{P}[\text{zdrav}]}$$

$$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}01}{0{,}9 \cdot 0{,}01 + (1 - 0{,}98) \cdot 0{,}99}$$

$$= \mathbf{31{,}25\,\%}$$

Slučajne promenljive

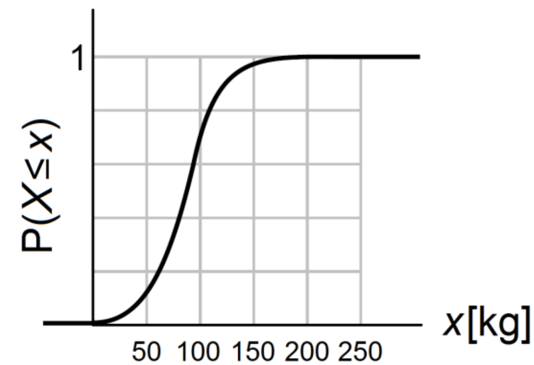
- Pri izvođenju nekog eksperimenta, obično nas interesuju neka numerička svojstva ishoda
  - Pri ispitivanju populacije, može nas zanimati npr. težina čoveka
  - Pri utvrđivanju bolesti, trebaju nam laboratorijski rezultati
- Svi ovi primeri upućuju na koncept *slučajne promenljive*
  - Slučajna promenljiva X je funkcija koja dodeljuje realan broj $X(\zeta)$ svakom ishodu ζ iz uzoračkog prostora slučajnog eksperimenta, a praktično se može zamisliti kao *broj čija vrednost ne mora uvek biti ista već zavisi od ishoda nekog slučajnog događaja* (ili nekih slučajnih događaja)
  - Slučajne promenljive mogu biti
    - diskretne (npr. broj dobijen bacanjem kocke)
    - kontinualne (npr. telesna težina određene osobe)
    - mešovitog tipa (npr. iznos poreza na imovinu koji plaća slučajno odabrana osoba, i koji je s određenom konačnom verovatnoćom jednak 0, a inače je kontinualnog tipa)

Kumulativna funkcija raspodele

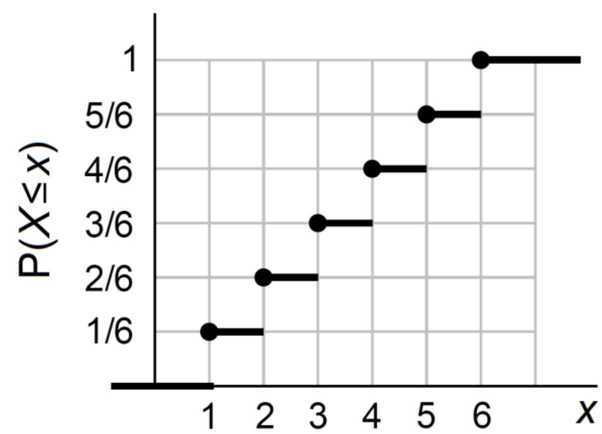
- Kumulativna funkcija raspodele $F_X(x)$ slučajne promenljive X predstavlja verovatnoću događaja $\{X \leq x\}$

$$F_X(x) = \mathrm{P}[X \leq x], x \in \mathbf{R}$$

- Osobine funkcije raspodele
  - $0 \leq F_X(x) \leq 1$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
  - $a \leq b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)$
  - $F_X(x) = \lim\limits_{h\to 0+} F_X(x+h) = F_X(x^+)$



funkcija raspodele telesne težine



funkcija raspodele kod bacanja kockice

Gustina raspodele verovatnoće

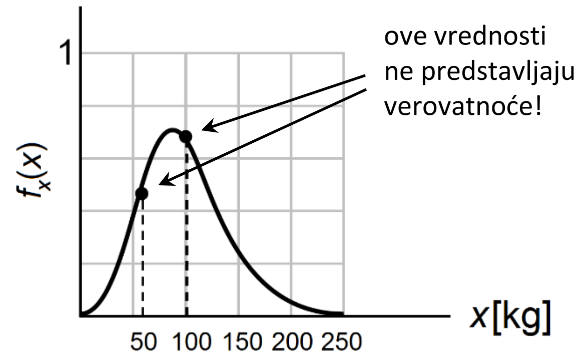
- *Gustina raspodele verovatnoće* kontinualne slučajne promenljive X predstavlja izvod funkcije raspodele $F_X(x)$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

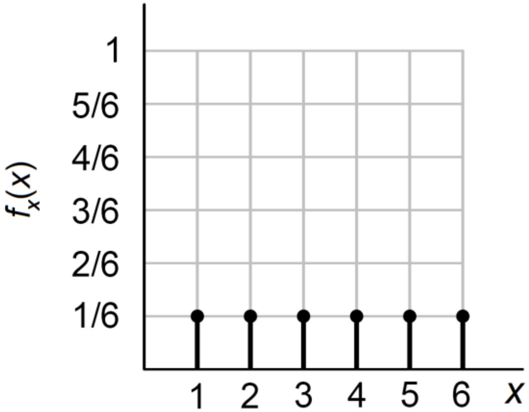
- Za diskretne slučajne promenljive umesto gustine raspodele definiše se *zakon raspodele* (nad prebrojivim skupom ishoda)

$$f_X(x) = P[X = x]$$

- Osobine gustine raspodele verovatnoće
  - $f_X(x) \geq 0$
  - $P[a \leq x < b] = \int_a^b f_X(x)dx$
  - $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$



gustina raspodele verovatnoće telesne težine

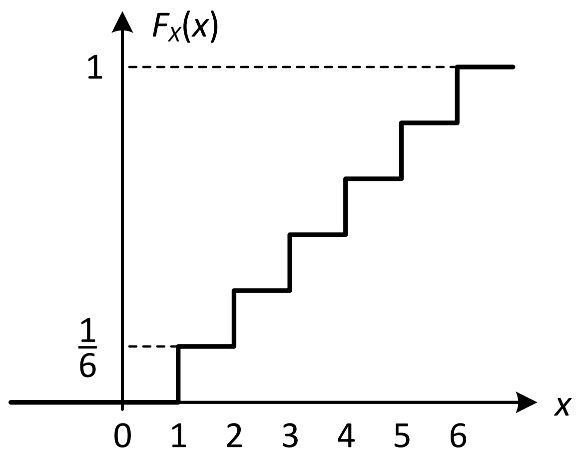


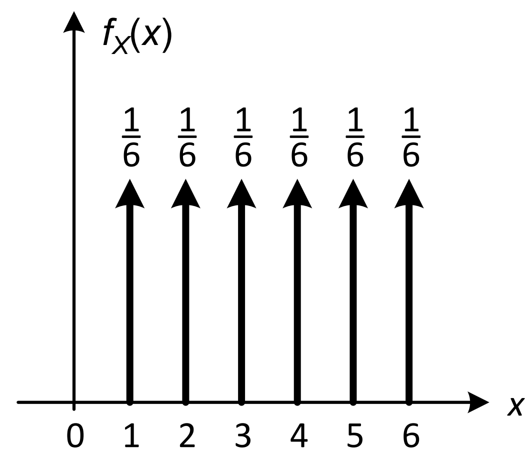
zakon raspodele verovatnoće kod bacanja kockice

Gustina raspodele verovatnoće

- Čak i u slučaju diskretne slučajne promenljive može se govoriti o gustini raspodele verovatnoće, iako se u tom slučaju ona opisuje preko δ-impulsa

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$





Statistička karakterizacija slučajne promenljive

- Funkcija raspodele ili gustina raspodele verovatnoće u potpunosti opisuju slučajnu promenljivu
- Slučajna promenljiva može delom biti opisana i sledećim veličinama:
  - Matematičko očekivanje

    $$E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

    - Očekivanje predstavlja težište gustine raspodele verovatnoće
  - Varijansa i standardna devijacija

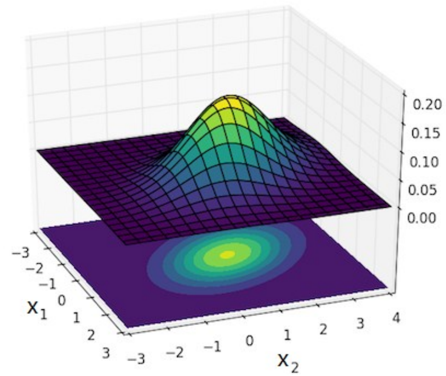
    $$VAR[X] = \sigma^2 = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) dx \quad \text{(pri čemu važi } \sigma^2 = E[X^2] - E^2[X]\text{)}$$

    $$STD[X] = \sigma = \sqrt{VAR[X]}$$

    - Varijansa predstavlja meru rasipanja oko srednje vrednosti (očekivanja)
    - Standardna devijacija takođe predstavlja meru rasipanja oko srednje vrednosti, a ima istu dimenziju (jedinicu) kao i sama slučajna promenljiva
  - *N*-ti moment

    $$E[X^N] = \int_{-\infty}^{\infty} x^N f_X(x) dx$$

Zavisnosti između više slučajnih promenljivih



- Dve slučajne promenljive X_1 i X_2 određene su:
  - Združenom funkcijom raspodele
    $$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = P[\{X_1 \le x_1\} \cap \{X_2 \le x_2\}]$$
  - Združenom gustinom raspodele verovatnoće
    $$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

  čime je opisano ponašanje ne samo svake od njih pojedinačno, već i zavisnost koja između njih u opštem slučaju postoji (i zapremina ispod $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ jednaka je 1)
- Dve slučajne promenljive su međusobno *nezavisne* ako važi:
  $$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$$
- Dve slučajne promenljive su međusobno *nekorelisane* ako važi: $E[X_i X_k] = E[X_i]E[X_k]$
- Ako su dve slučajne promenljive međusobno nezavisne, tada su i nekorelisane
  - Obrnuto u opštem slučaju ne važi
- *Marginalna gustina raspodele verovatnoće* predstavlja gustinu raspodele verovatnoće jedne od dve promenljive, ne vodeći računa o drugoj, npr:
  $$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_2$$

Slučajni vektori

- Pojam slučajnog vektora je uopštenje pojma slučajne promenljive
  - Vektorska slučajna promenljiva (slučajan vektor) ***X*** predstavlja funkciju koja dodeljuje *realan vektor* svakom ishodu *ζ* iz uzoračkog prostora *S*
  - Slučajan vektor može se zamisliti kao *niz brojeva čije vrednosti zavise od ishoda nekih slučajnih događaja*, pri čemu između njih mogu postojati i određene statističke zavisnosti
  - Podrazumevaće se da je slučajan vektor dat kao vektor kolona
- Za slučajni vektor $\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_N]^{\mathrm{T}}$ definišu se:
  - Združena funkcija raspodele

    $$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = P[\{X_1 \le x_1\} \cap \{X_2 \le x_2\} \cap \ldots \cap \{X_N \le x_N\}]$$
  - Združena gustina raspodele verovatnoće

    $$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^N F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_N}$$
- *Marginalna gustina raspodele verovatnoće* predstavlja gustinu raspodele verovatnoće na određenom podskupu promenljivih (dimenzija) slučajnog vektora
  - Dobija se integracijom po preostalim promenljivama (dimenzijama), kao i u slučaju dve slučajne promenljive

Statistička karakterizacija slučajnih vektora

- Slučajni vektor je u potpunosti određen svojom združenom funkcijom raspodele ili združenom gustinom raspodele verovatnoće
- Slučajni vektor se može delimično opisati veličinama sličnim onima koje se koriste kod skalarnih slučajnih promenljivih
  - Vektor srednjih vrednosti

$$E[\mathbf{X}] = [E[X_1]\, E[X_2] \ldots E[X_N]]^{\mathrm{T}} = [\mu_1\ \mu_2\ \ldots\ \mu_N]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\mu}$$

  - Kovarijansna matrica

$$COV[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\Sigma} = E[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}]$$

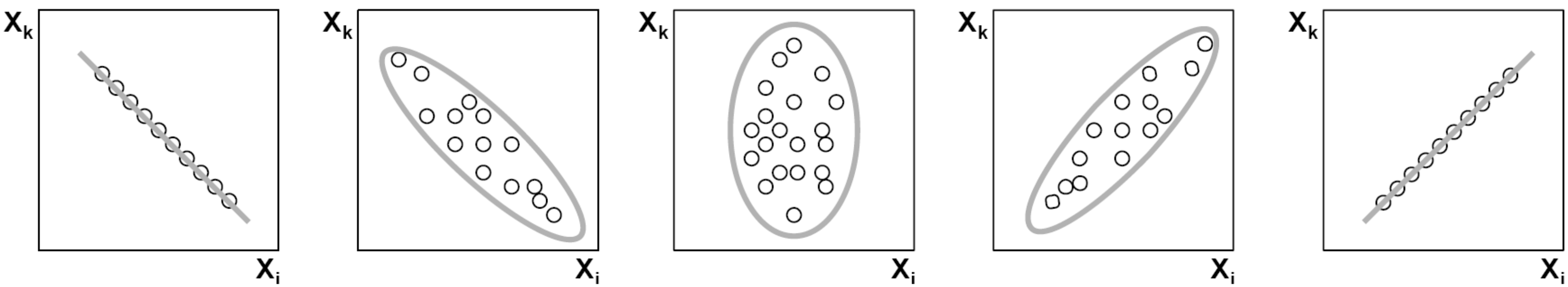
$$= \begin{bmatrix} E[(X_1-\mu_1)(X_1-\mu_1)] & E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)] & \cdots & E[(X_1-\mu_1)(X_N-\mu_N)] \\ E[(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1)] & E[(X_2-\mu_2)(X_2-\mu_2)] & \cdots & E[(X_2-\mu_2)(X_N-\mu_N)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_N-\mu_N)(X_1-\mu_1)] & E[(X_N-\mu_N)(X_2-\mu_2)] & \cdots & E[(X_N-\mu_N)(X_N-\mu_N)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

Kovarijansa pokazuje zajedničku tendenciju promene određenog para obeležja

Kovarijansna matrica

- Svojstva kovarijanse:
  - Ako X_i i X_k imaju tendenciju zajedničkog rasta i opadanja, onda je $c_{ik} > 0$
  - Ako X_i ima tendenciju opadanja kad X_k raste i obratno, onda je $c_{ik} < 0$
  - Ako su X_i i X_k *nekorelisani*, onda je $c_{ik} = 0$
  - $|c_{ik}| \le \sigma_i \sigma_k$, gde je σ_i standardna devijacija X_i , a σ_k standardna devijacija X_k
  - $c_{ii} = \sigma_i^2 = VAR[X_i]$
- Za $i \neq k$, kovarijansni članovi mogu se izraziti kao $c_{ik} = \rho_{ik}\sigma_i\sigma_k$, gde ρ_{ik} predstavlja *koeficijent korelacije*



$c_{ik} = -\sigma_i\sigma_k$, $\rho_{ik} = -1$

$c_{ik} = -0{,}5\sigma_i\sigma_k$, $\rho_{ik} = -0{,}5$

$c_{ik} = 0$, $\rho_{ik} = 0$

$c_{ik} = 0{,}5\sigma_i\sigma_k$, $\rho_{ik} = 0{,}5$

$c_{ik} = \sigma_i\sigma_k$, $\rho_{ik} = 1$

Kovarijansna matrica

- Kovarijansna matrica se može predstaviti u obliku:

$$\mathbf{\Sigma} = E[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}] = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}] - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} = \mathbf{S} - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{S} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}] = \begin{bmatrix} E[X_1X_1] & E[X_1X_2] & \cdots & E[X_1X_N] \\ E[X_2X_1] & E[X_2X_2] & \cdots & E[X_2X_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_NX_1] & E[X_NX_2] & \cdots & E[X_NX_N] \end{bmatrix}$$

  - **S** se naziva *korelaciona matrica* i sadrži istu količinu informacija o slučajnom vektoru **X** kao i kovarijansna matrica
- Kovarijansna matrica se može izraziti i u obliku:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{R}\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N \end{bmatrix}$$

  - Ovaj oblik je naročito pogodan jer **Γ** nosi informaciju o razmeri svih obeležja, dok **R** nosi informaciju o njihovim međuzavisnostima

Primer (korelisanost i kovarijansna matrica)

- Na osnovu 4 uzorka iz 3-dimenzionalne raspodele verovatnoće data u tabeli
  - formirati uzoračku kovarijansnu matricu
  - formirati dijagrame rasejanja po parovima obeležja
  - ispitati veze između njih

UZORCI	OBELEŽJA		
	x_1	x_2	x_3
1	2	2	4
2	3	4	6
3	5	4	2
4	6	6	4

Primer (korelisanost i kovarijansna matrica)

- Na osnovu 4 uzorka iz 3-dimenzionalne raspodele verovatnoće data u tabeli
  - formirati uzoračku kovarijansnu matricu
  - formirati dijagrame rasejanja po parovima obeležja
  - ispitati veze između njih

UZORCI	OBELEŽJA		
	x_1	x_2	x_3
1	2	2	4
2	3	4	6
3	5	4	2
4	6	6	4

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} E[(X_1-\mu_1)(X_1-\mu_1)] & E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)] & \cdots & E[(X_1-\mu_1)(X_N-\mu_N)] \\ E[(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1)] & E[(X_2-\mu_2)(X_2-\mu_2)] & \cdots & E[(X_2-\mu_2)(X_N-\mu_N)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_N-\mu_N)(X_1-\mu_1)] & E[(X_N-\mu_N)(X_2-\mu_2)] & \cdots & E[(X_N-\mu_N)(X_N-\mu_N)] \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_1^{(k)}-\hat{\mu}_1)(x_1^{(k)}-\hat{\mu}_1) & \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_1^{(k)}-\hat{\mu}_1)(x_2^{(k)}-\hat{\mu}_2) & \cdots & \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_1^{(k)}-\hat{\mu}_1)(x_N^{(k)}-\hat{\mu}_N) \\ \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_2^{(k)}-\hat{\mu}_2)(x_1^{(k)}-\hat{\mu}_1) & \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_2^{(k)}-\hat{\mu}_2)(x_2^{(k)}-\hat{\mu}_2) & \cdots & \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_2^{(k)}-\hat{\mu}_2)(x_N^{(k)}-\hat{\mu}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_N^{(k)}-\hat{\mu}_N)(x_1^{(k)}-\hat{\mu}_1) & \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_N^{(k)}-\hat{\mu}_N)(x_2^{(k)}-\hat{\mu}_2) & \cdots & \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_N^{(k)}-\hat{\mu}_N)(x_N^{(k)}-\hat{\mu}_N) \end{bmatrix}$$

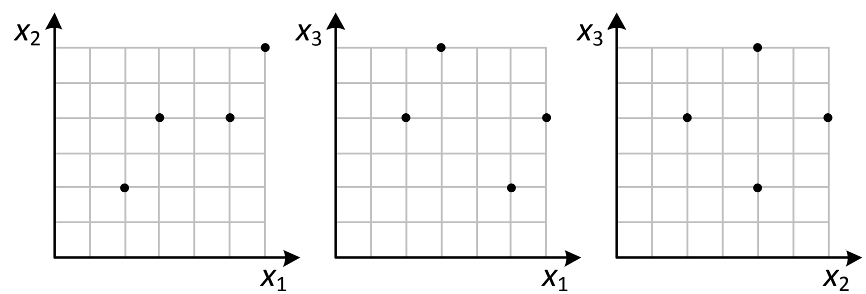
Primer (korelisanost i kovarijansna matrica)

- Na osnovu 4 uzorka iz 3-dimenzionalne raspodele verovatnoće data u tabeli
  - formirati uzoračku kovarijansnu matricu
  - formirati dijagrame rasejanja po parovima obeležja
  - ispitati veze između njih

UZORCI	OBELEŽJA		
	x_1	x_2	x_3
1	2	2	4
2	3	4	6
3	5	4	2
4	6	6	4

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & \sigma_2^2 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

UZORCI	x_1	x_2	x_3	$x_1-\mu_1$	$x_2-\mu_2$	$x_3-\mu_3$	$(x_1-\mu_1)^2$	$(x_2-\mu_2)^2$	$(x_3-\mu_3)^2$	$(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)$	$(x_1-\mu_1)(x_3-\mu_3)$	$(x_2-\mu_2)(x_3-\mu_3)$
1	2	2	4	−2	−2	0	4	4	0	4	0	0
2	3	4	6	−1	0	2	1	0	4	0	−2	0
3	5	4	2	1	0	−2	1	0	4	0	−2	0
4	6	6	4	2	2	0	4	4	0	4	0	0
PROSEK	4	4	4	0	0	0	2,5	2	2	2	−1	0



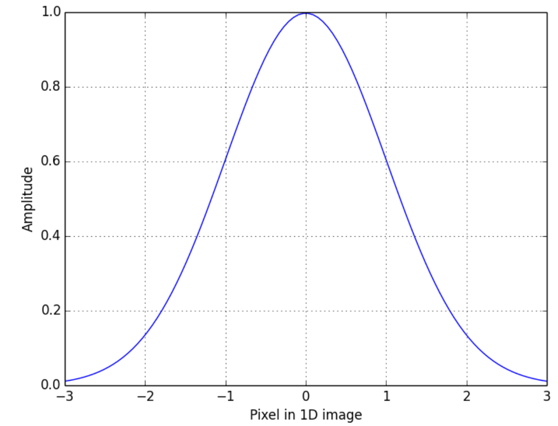
Normalna (Gaussova) raspodela

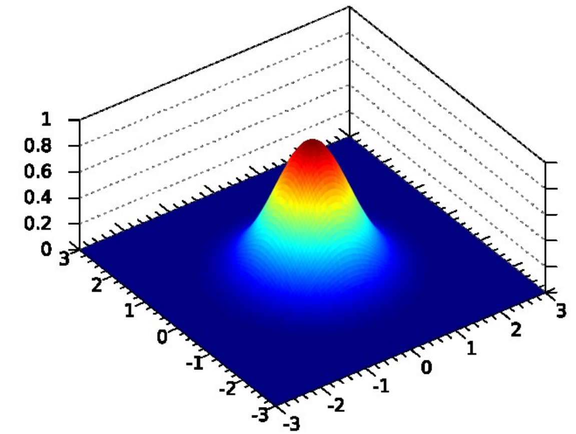
- Normalna (Gaussova) raspodela nad skalarnom slučajnom promenljivom $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ data je izrazom:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

  dok za vektorsku slučajnu promenljivu ima oblik:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$



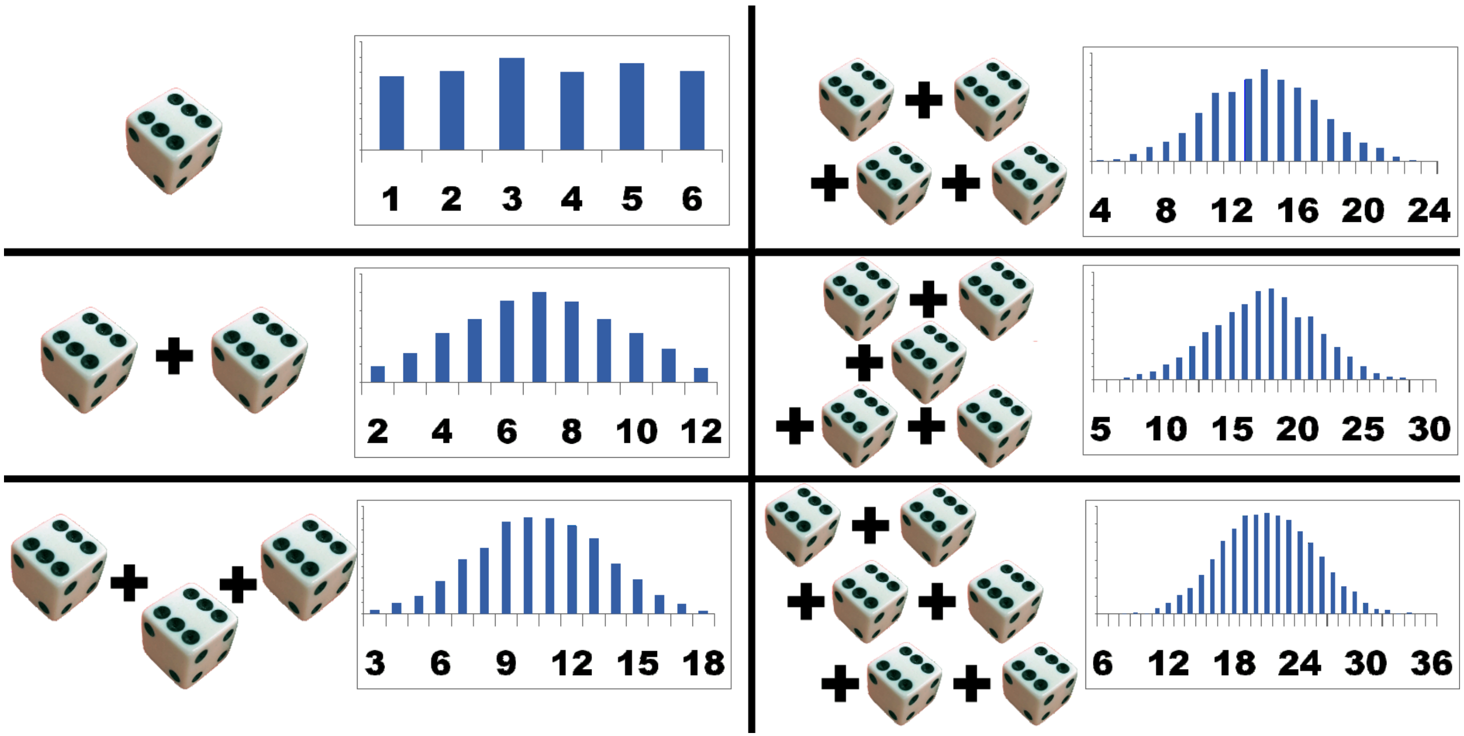


- Svojstva Gaussove raspodele:
  - Jedinstveno je opisana parametrima **μ** i **Σ**
  - Ako su obeležja međusobno nekorelisana ($c_{ik} = 0$), ona su takođe i *nezavisna*
    - Kovarijansna matrica je tada dijagonalna
  - Marginalne i uslovne raspodele su takođe normalne
  - Linearna transformacija **y** = **Ax** Gaussovog slučajnog vektora **y** takođe predstavlja Gaussov slučajni vektor

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y})}{|\mathbf{A}|}$$

Centralna granična teorema

- Za proizvoljnu raspodelu sa srednjom vrednošću μ i varijansom σ^2, raspodela uzoračke srednje vrednosti teži normalnoj raspodeli sa srednjom vrednošću μ i varijansom σ^2/N kada veličina uzorka N raste
  - Oblik polazne raspodele nije bitan



Centralna granična teorema

- Za proizvoljnu raspodelu sa srednjom vrednošću μ i varijansom σ^2, raspodela uzoračke srednje vrednosti teži normalnoj raspodeli sa srednjom vrednošću μ i varijansom σ^2/N kada veličina uzorka N raste
  - Oblik polazne raspodele nije bitan
- Primer
  - Iz uniformne raspodele izvlači se N uzoraka, beleži se njihova srednja vrednost i ovaj postupak se ponavlja 500 puta
    - Za N = 1 histogram ima oblik uniformne raspodele
    - Kako N raste, histogram poprima zvonast oblik