Pregled linearne algebre

- Vektorska i matrična notacija
- Operacije nad vektorima i matricama
- Vektorski prostori
- Linearne transformacije
- Karakteristične vrednosti i karakteristični vektori
- Diferenciranje kod vektora i matrica

Vektorska i matrična notacija

- Matrica dimenzija $m \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matrica s jednom vrstom ili jednom kolonom predstavlja *vektor*:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{bmatrix}$$

vektor-kolona

vektor-vrsta

Množenje matrica

- Proizvod dve matrice dat je izrazom:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{md} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d1} & b_{d2} & \cdots & b_{dn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix},\ \text{gde je } c_{ij}=\sum_{k=1}^{d} a_{ik}b_{kj}$$

- Osobine proizvoda matrica
  - Nije uvek definisan (zavisi od dimenzija matrica)
  - Asocijativan je: (**A** · **B**) · **C** = **A** · (**B** · **C**)
  - Nije komutativan (niti ako postoji **A** · **B**, to obavezno znači da postoji i **B** · **A**)
  - Distributivan je u odnosu na sabiranje: **A** · (**B** + **C**) = **A** · **B** + **A** · **C**
  - Neutralni element za matrično množenje je *jedinična matrica* – dijagonalna matrica sa jedinicama na glavnoj dijagonali i nulama van nje:

$$\mathbf{I}=\mathrm{diag}(1,1,\ldots,1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A},\ \forall\mathbf{A}$$

Množenje vektora

- Skalarni (unutrašnji) proizvod

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k$$

Napomena: pretpostavka je da su **x** i **y** vektori-kolone

- Spoljni proizvod

$$\mathbf{x}\otimes\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \cdots & x_my_n \end{bmatrix}$$

- Proizvod „element po element“

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_2 \\ \vdots \\ x_ny_n \end{bmatrix}$$

Transponovanje matrice

- *Transponovanje matrice* predstavlja zamenu vrsta kolonama i obrnuto*:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Transponovanjem vektora-kolone dobija se vektor-vrsta i obrnuto:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

- Osobine transponovanja
  - $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$
  - $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$
  - $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$
  - Kvadratna matrica je *simetrična* ako važi $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

Trag matrice

- Trag kvadratne matrice $\mathbf{A}_{n\times n}$ predstavlja sumu elemenata na glavnoj dijagonali:

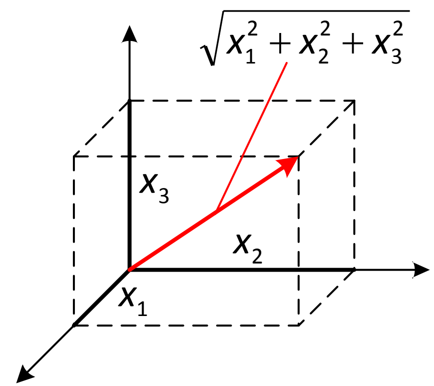
$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- Osobine traga:
  - $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$
  - $\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$
  - $\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})$, ako je matrica $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ kvadratna
  - $\mathrm{tr}(t\cdot\mathbf{A}) = t\cdot\mathrm{tr}(\mathbf{A})$

Norma vektora

- *Norma* vektora **x** predstavlja njegovu „dužinu“
  - To može biti bilo koja funkcija $f(\mathbf{x})$ koja zadovoljava sledeće osobine:
    - definitivnost ($f(\mathbf{x}) = 0$ samo za nula-vektor)
    - homogenost ($f(a\mathbf{x})=|a|f(\mathbf{x})$ za svaki realan broj a)
    - nejednakost trougla ($f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \le f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$)

    iz čega ujedno sledi i da je nenegativna ($f(\mathbf{x}) \ge 0$)



- Najčešće se koristi *euklidska* ili *l_2-norma*

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^\mathrm{T}\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- Ova, tzv. l_2-norma, predstavlja specijalan slučaj l_p-norme za $p = 2$

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p},\ p \ge 1$$

  a često se koriste i l_1-norma, $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, kao i l_∞-norma, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$

- *Rastojanje* između dva vektora je norma njihove razlike
  - Ako se koristi euklidska norma, u pitanju je *euklidsko rastojanje*

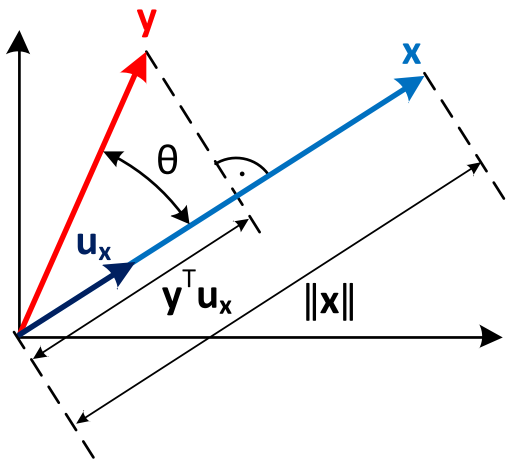
$$d_E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Ortogonalna projekcija i ortogonalnost vektora

- *Ortogonalna projekcija* vektora **y** na vektor **x** je $\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_x \rangle \mathbf{u}_x$, gde je $\mathbf{u}_x$ vektor jedinične norme, a istog pravca i smera kao **x**

- *Ugao* između vektora **x** i **y** određen je izrazom:

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$$



- Vektori **x** i **y** su *ortogonalni* ako je $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$
- Vektori **x** i **y** su *ortonormalni* ako je $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$ i $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1$

Linearna nezavisnost vektora

- Skup vektora $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ...,$\mathbf{x}_n$ je *linearno zavisan* ako postoje koeficijenti a_1, a_2,..., a_n, koji nisu svi istovremeno jednaki nuli, takvi da je:

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_n\mathbf{x}_n = 0$$

- Nasuprot tome, skup vektora $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,..., $\mathbf{x}_n$ je *linearno nezavisan* ako važi:

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_n\mathbf{x}_n = 0 \Rightarrow a_k = 0, \forall k$$

- Primer: da li su vektori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ i $\mathbf{x}_3$ linearno nezavisni ili ne?

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Linearna nezavisnost vektora

- Skup vektora $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ...,$\mathbf{x}_n$ je *linearno zavisan* ako postoje koeficijenti a_1, a_2,..., a_n, koji nisu svi istovremeno jednaki nuli, takvi da je:

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n = 0$$

- Nasuprot tome, skup vektora $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,..., $\mathbf{x}_n$ je *linearno nezavisan* ako važi:

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n = 0 \Rightarrow a_k = 0, \forall k$$

- Primer: da li su vektori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ i $\mathbf{x}_3$ linearno nezavisni ili ne?

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Rešenje: linearno su nezavisni ako je jedinstveno rešenje sledećeg sistema linearnih jednačina $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (a jeste):

$$a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Linearna nezavisnost vektora

- Skup vektora $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ...,$\mathbf{x}_n$ je *linearno zavisan* ako postoje koeficijenti a_1, a_2,..., a_n, koji nisu svi istovremeno jednaki nuli, takvi da je:

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n = 0$$

- Nasuprot tome, skup vektora $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,..., $\mathbf{x}_n$ je *linearno nezavisan* ako važi:

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n = 0 \Rightarrow a_k = 0, \forall k$$

- Primer: da li su vektori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ i $\mathbf{x}_3$ linearno nezavisni ili ne?

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Linearna nezavisnost vektora

- Skup vektora $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ...,$\mathbf{x}_n$ je *linearno zavisan* ako postoje koeficijenti a_1, a_2,..., a_n, koji nisu svi istovremeno jednaki nuli, takvi da je:

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n = 0$$

- Nasuprot tome, skup vektora $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,..., $\mathbf{x}_n$ je *linearno nezavisan* ako važi:

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n = 0 \Rightarrow a_k = 0, \forall k$$

- Primer: da li su vektori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ i $\mathbf{x}_3$ linearno nezavisni ili ne?

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- Rešenje: linearno su nezavisni ako je jedinstveno rešenje sledećeg sistema linearnih jednačina $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (a nije, ima beskonačno mnogo rešenja):

$$a_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Među linearno zavisnim vektorima neki se mogu izraziti preko drugih!

Rang matrice

- *Rang* matrice je maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta (ili kolona, može se pokazati da je to isto)
- Matrica $\mathbf{A}_{m\times n}$ je *regularna* (punog ranga) ako je njen rang jednak:

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \min(m,n)$$

- Osobine ranga:
  - $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) \le \min(m,n)$
  - $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$
  - $\operatorname{rank}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \le \min(\operatorname{rank}(\mathbf{A}),\operatorname{rank}(\mathbf{B}))$
  - $\operatorname{rank}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le \operatorname{rank}(\mathbf{A}) + \operatorname{rank}(\mathbf{B})$
- Rang matrice može se odrediti dovođenjem matrice u *trapeznu formu* sukcesivnom primenom *ekvivalentnih transformacija*:
  - Zamenom mesta dve vrste
  - Množenjem jedne vrste skalarom
  - Zamenom jedne vrste zbirom te i neke druge vrste

Rang matrice (primer)

- Naći rang sledećih matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Rang matrice (primer)

- Naći rang sledećih matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Rešenje:

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftarrow II - 2 \cdot I} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & -9 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \leftarrow III - 3 \cdot I} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & -9 \\ 0 & 2 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \leftarrow III - II/3} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = 3$$

$$\operatorname{rank}(\mathbf{B}) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \leftarrow III - 4 \cdot I} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \leftarrow III + 4 \cdot II} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Rezultat je preostali broj nenultih vrsta!

Inverzna matrica

- *Inverzna matrica* za kvadratnu matricu $\mathbf{A}_{n \times n}$ je matrica $\mathbf{A}^{-1}$ za koju važi:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

- Inverzna matrica postoji ako i samo ako je matrica **A** regularna
  - Regularne matrice se nazivaju još i *nesingularnim* ili *invertibilnim*
- Osobine inverzne matrice:
  - $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
  - $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$
  - $(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} \equiv \mathbf{A}^{-\mathrm{T}}$
- Ako **A** nije regularna matrica ali $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}$ jeste, može se koristiti *pseudoinverzna matrica*:

$$\mathbf{A}^{+} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

  Tada je $\mathbf{A}^{+} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, ali u opštem slučaju $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{+} \neq \mathbf{I}$.
  - Pseudoinverzna matrica može postojati i kada **A** nije kvadratna matrica!

Matrice

- Kvadratna matrica je *ortogonalna* ako su svi njeni vektori-kolone (ili vektori-vrste, što se svodi na isto) međusobno ortogonalni
- Kvadratna matrica je *ortonormalna* ako je ortogonalna i svi njeni vektori-kolone (ili vektori-vrste, što se svodi na isto) imaju normu 1
  - Inverzna matrica ortonormalne matrice **A** je njena transponovana matrica $\mathbf{A}^T$:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$$

  - Euklidska norma vektora se ne menja pri množenju ortonormalnom matricom:

$$\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$$

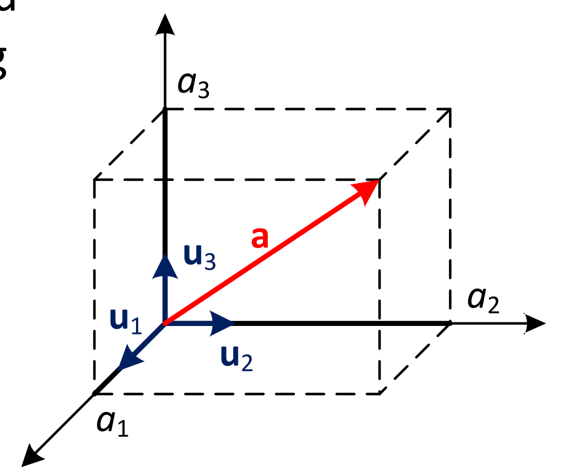
- Kvadratna matrica **A** je *pozitivno definitna* ako za svaki vektor **x** različit od nula-vektora važi $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} > 0$
- Kvadratna matrica **A** je *pozitivno semidefinitna* ako za svaki vektor **x** važi $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \geq 0$
  - Pozitivno definitne i pozitivno semidefinitne matrice predstavljaju dve klase matrica sa brojnim korisnim osobinama

Vektorski prostori

- *Vektorski prostor* je skup svih vektora koji se mogu izraziti kao linearna kombinacija elemenata nekog skupa međusobno linearno nezavisnih vektora $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$, koji se naziva *baza* tog vektorskog prostora
- Za svaki vektor $\mathbf{x}$ iz vektorskog prostora postoje jedinstveni realni brojevi $a_1, a_2, ..., a_n$ takvi da:

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n$$

i oni se nazivaju *koordinatama* vektora $\mathbf{x}$
  - Primer: *n*-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem realnih brojeva



$\mathbf{a} \in \mathrm{span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\})$

- Baza $\{\mathbf{u}_i\}$ je *ortogonalna* ako su svi njeni vektori međusobno ortogonalni
- Baza $\{\mathbf{u}_i\}$ je *ortonormalna* ako je ortogonalna i svi njeni vektori imaju normu 1
  - Od *n* linearno nezavisnih vektora $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ može se konstruisati ortonormalna baza $\{\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, ..., \boldsymbol{\phi}_n\}$ Gram-Schmidtovim postupkom
  - Primer: baza Descartesovog koordinatnog sistema je ortonormalna

Vektorski prostori

- *Projekcija* vektora **y** na vektorski prostor nad bazom $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ jeste onaj vektor **v** iz tog prostora koji ima najmanje euklidsko rastojanje od **y**

$$\mathrm{proj}(\mathbf{y};\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}) = \underset{\mathbf{v}\in\mathrm{span}(\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\})}{\arg\min} \{\|\mathbf{y}-\mathbf{v}\|_2\}$$

- *Kolonski prostor matrice* **A** je vektorski prostor $R(\mathbf{A})$ čiju bazu čine njene kolone
- Projekcija vektora **y** na kolonski prostor regularne matrice **A**

$$\mathrm{proj}(\mathbf{y};\mathbf{A}) = \underset{\mathbf{v}\in R(\mathbf{A})}{\arg\min}\{\|\mathbf{y}-\mathbf{v}\|_2\} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}^\mathrm{T}\cdot\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{A}^\mathrm{T}\cdot\mathbf{y}$$

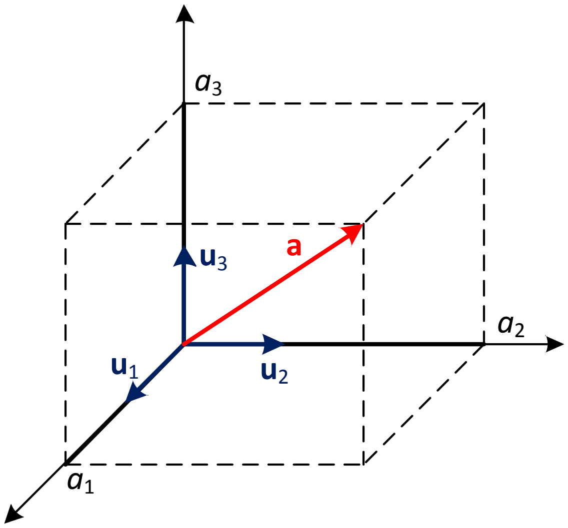
  - Za ovaj izraz kasnije će se pokazati da ima veze sa estimacijom parametara metodom najmanje kvadratne greške
- Kada je **A** zapravo vektor-kolona ($\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$), dobija se već poznat slučaj projekcije na pravu:

$$\mathrm{proj}(\mathbf{y};\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}^\mathrm{T}}{\mathbf{a}^\mathrm{T}\cdot\mathbf{a}}\cdot\mathbf{y}$$

Linearne transformacije

- Linearna transformacija je preslikavanje iz vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ u vektorski prostor $\mathbb{R}^m$ definisano matricom preslikavanja $\mathbf{A}_{m \times n}$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



  - U mašinskom učenju obično je $m < n$, jer je cilj redukcija dimenzionalnosti
- Linearna transformacija definisana kvadratnom matricom $\mathbf{A}$ je *ortonormalna* ako je $\mathbf{A}$ ortonormalna matrica ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\mathrm{T} = \mathbf{A}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, odnosno, $\mathbf{A}^\mathrm{T} = \mathbf{A}^{-1}$)
  - Ortonormalna transformacija očuvava normu vektora

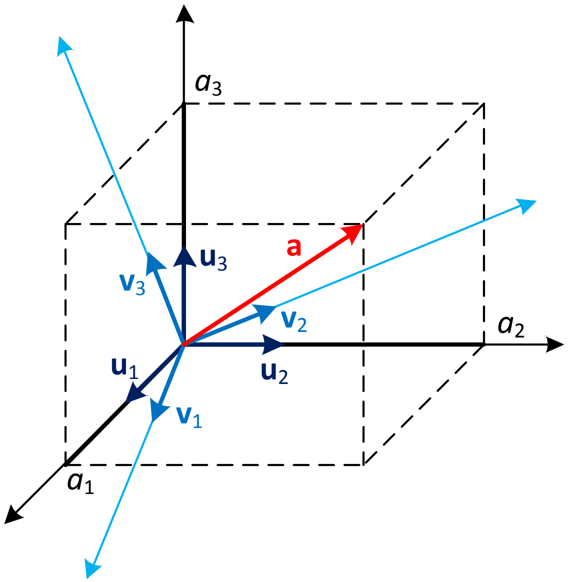
$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{y}} = \sqrt{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})^\mathrm{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{A}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|$$

  - Ortonormalna transformacija predstavlja rotaciju koordinatnog sistema

Linearne transformacije

- Linearna transformacija je preslikavanje iz vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ u vektorski prostor $\mathbb{R}^m$ definisano matricom preslikavanja $\mathbf{A}_{m \times n}$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



  - U mašinskom učenju obično je $m < n$, jer je cilj redukcija dimenzionalnosti
- Linearna transformacija definisana kvadratnom matricom $\mathbf{A}$ je *ortonormalna* ako je $\mathbf{A}$ ortonormalna matrica ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, odnosno, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}$)
  - Ortonormalna transformacija očuvava normu vektora

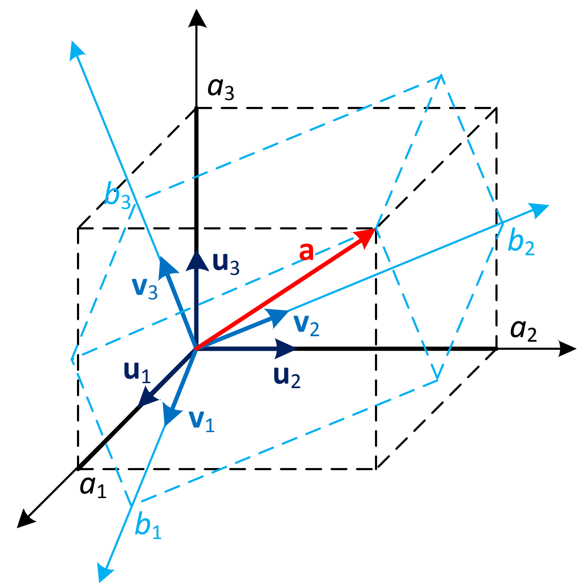
$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{y}} = \sqrt{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|$$

  - Ortonormalna transformacija predstavlja rotaciju koordinatnog sistema

Linearne transformacije

- Linearna transformacija je preslikavanje iz vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ u vektorski prostor $\mathbb{R}^m$ definisano matricom preslikavanja $\mathbf{A}_{m\times n}$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



  - U mašinskom učenju obično je $m < n$, jer je cilj redukcija dimenzionalnosti
- Linearna transformacija definisana kvadratnom matricom **A** je *ortonormalna* ako je **A** ortonormalna matrica ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\mathrm{T} = \mathbf{A}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, odnosno, $\mathbf{A}^\mathrm{T} = \mathbf{A}^{-1}$)
  - Ortonormalna transformacija očuvava normu vektora

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{y}} = \sqrt{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x})^\mathrm{T} \cdot \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{A}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|$$

  - Ortonormalna transformacija predstavlja rotaciju koordinatnog sistema

Determinanta matrice

- Determinanta kvadratne matrice $\mathbf{A}_{n\times n}$ je skalarna vrednost koja određuje faktor skaliranja linearne transformacije definisane matricom **A**

$$\det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |\mathbf{M}_{ij}|$$

  gde je $\mathbf{M}_{ij}$ *minor* matrice **A** koji se dobija uklanjanjem *i*-te vrste i *j*-te kolone (izbor *j* ne utiče na izračunatu vrednost), i $\det([a_{11}]) = a_{11}$.
- Primer: izračunati determinante sledećih kvadratnih matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determinanta matrice

- Determinanta kvadratne matrice $\mathbf{A}_{n\times n}$ je skalarna vrednost koja određuje faktor skaliranja linearne transformacije definisane matricom **A**

$$\det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |\mathbf{M}_{ij}|$$

gde je $\mathbf{M}_{ij}$ *minor* matrice **A** koji se dobija uklanjanjem *i*-te vrste i *j*-te kolone (izbor *j* ne utiče na izračunatu vrednost), i $\det([a_{11}]) = a_{11}$.

- Primer: izračunati determinante sledećih kvadratnih matrica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Rešenje:

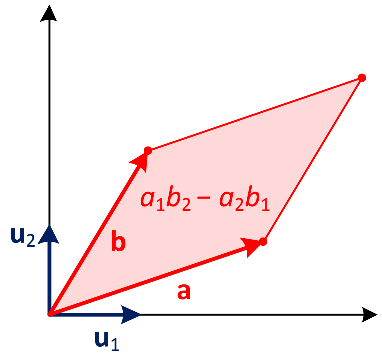
$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(6\cdot 0 - 1\cdot 2) - 2\cdot(0\cdot 0 - 5\cdot 2) + 3\cdot(0\cdot 1 - 5\cdot 6) = -72$$

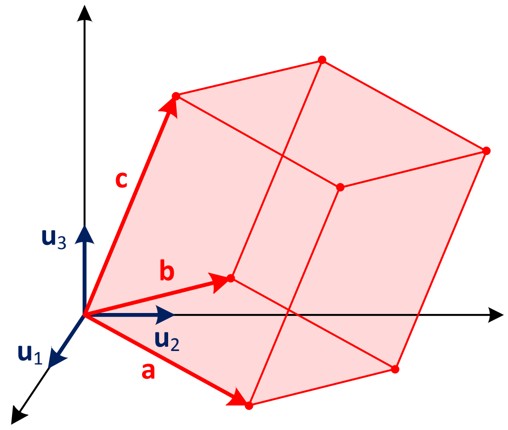
$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(2\cdot 4 - 2\cdot 0) - 0\cdot(2\cdot 4 - 3\cdot 0) + 4\cdot(2\cdot 2 - 3\cdot 2) = 0$$

Osobine determinante

- $|\mathbf{I}| = 1$
- Ako se jedna vrsta/kolona **A** pomnoži skalarom *t*, determinanta postaje $t \cdot |\mathbf{A}|$
- Ako se čitava matrica **A** pomnoži skalarom *t*, determinanta postaje $t^n \cdot |\mathbf{A}|$
- Ako dve vrste/kolone zamene mesta, determinanta postaje $-|\mathbf{A}|$
- $|\mathbf{A}^\mathrm{T}| = |\mathbf{A}|$
- $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$
- Determinanta je različita od 0 ako i samo ako je matrica regularna
- Ako je **A** regularna matrica, $|\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|$
- Moduo od $|\mathbf{A}|$ je zapremina *n*-dimenzionalnog paralelotopa definisanog vektorima--vrstama (ili vektorima-kolonama) matrice **A**
- $\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{adj}(\mathbf{A})/|\mathbf{A}|$, gde je adj(**A**) *adjungovana matrica* matrice **A**, čije su dimenzije *n* × *n*, a elementi:

$$(\mathrm{adj}(\mathbf{A}))_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |\mathbf{M}_{ji}|$$





Karakteristični vektori i karakteristične vrednosti

- Vektor **v** različit od 0 predstavlja *karakteristični* (*sopstveni*) *vektor* kvadratne matrice $\mathbf{A}_{n \times n}$ ako postoji skalar λ takav da važi:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$$

  i tada se taj skalar naziva *karakterističnom* (*sopstvenom*) *vrednošću* matrice **A**
  - Ako je **v** karakteristični vektor matrice **A**, tada je to i bilo koji vektor $a \cdot \mathbf{v}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Iz uslova $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = 0$ sledi da matrica $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nije invertibilna, odnosno:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

- Izraz za navedenu determinantu je polinom reda n po λ i naziva se *karakteristični polinom* matrice **A**
  - karakteristične vrednosti predstavljaju korene karakterističnog polinoma, u opštem slučaju su kompleksne i među njima može biti i jednakih
- Karakteristični vektori se dobijaju kao rešenja *karakteristične jednačine* za svaku od identifikovanih karakterističnih vrednosti:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

Karakteristični vektori i karakteristične vrednosti

- Primer: naći karakteristične vektore i karakteristične vrednosti matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Karakteristični vektori i karakteristične vrednosti

- Primer: naći karakteristične vektore i karakteristične vrednosti matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Rešenje:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 3 - 4\lambda + \lambda^2$$

$$3 - 4\lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

$$\lambda_1 = 1: \quad (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{\lambda=1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(jedno od mogućih rešenja)

$$\lambda_2 = 3: \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}_{\lambda=3} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{\lambda=3} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(jedno od mogućih rešenja)

Karakteristični vektori i karakteristične vrednosti

- Primer: naći karakteristične vektore i karakteristične vrednosti matrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Karakteristični vektori i karakteristične vrednosti

- Primer: naći karakteristične vektore i karakteristične vrednosti matrice

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

- Rešenje:

$$|\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}|=\left|\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 9\end{bmatrix}-\lambda\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 4\\ 0 & 4 & 9-\lambda\end{vmatrix}=22-35\lambda+14\lambda^2-\lambda^3$$

$$22-35\lambda+14\lambda^2-\lambda^3=0 \Rightarrow \lambda_1=2, \lambda_2=1, \lambda_3=11$$

$$\lambda_1=2: \quad (\mathbf{B}-2\mathbf{I})\cdot\mathbf{v}_{\lambda=2}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 4 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{\lambda=2}=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

(jedno od mogućih rešenja)

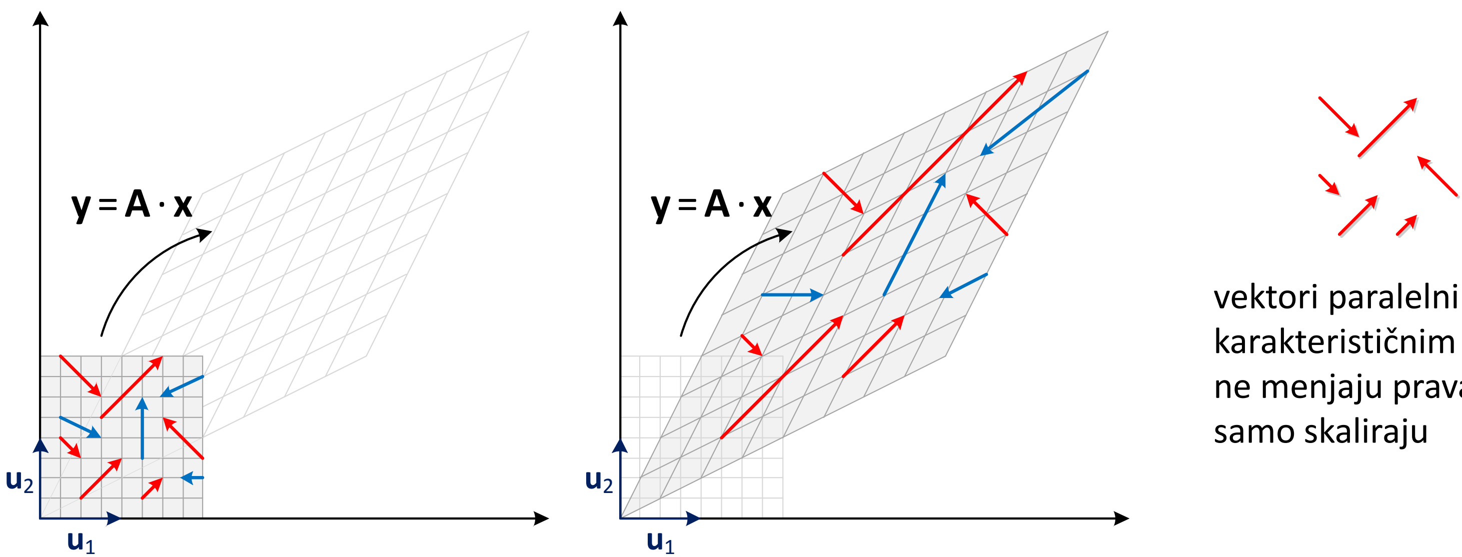
Slično, dobija se $\mathbf{v}_{\lambda=1}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ i $\mathbf{v}_{\lambda=11}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

Karakteristični vektori i karakteristične vrednosti

- Osobine karakterističnih vektora i karakterističnih vrednosti
  - Trag matrice **A** jednak je sumi njenih karakterističnih vrednosti
  - Determinanta matrice **A** jednaka je proizvodu njenih karakterističnih vrednosti
  - Ako je **A** regularna matrica
    - Sve karakteristične vrednosti su različite od nule
  - Ako je **A** realna i simetrična matrica
    - Sve karakteristične vrednosti su realni brojevi
    - Karakteristični vektori pridruženi različitim karakterističnim vrednostima su međusobno ortogonalni
  - Ako je **A** pozitivno definitna matrica
    - Sve karakteristične vrednosti su realne i pozitivne
  - Ako je **A** dijagonalna matrica
    - Karakteristične vrednosti su upravo elementi glavne dijagonale

Interpretacija karakterističnih vektora i vrednosti

- Karakteristični vektori matrice **A** predstavljaju invarijantne pravce linearne transformacije koju ona definiše
  - Karakteristični vektor **v** ne menja pravac ako se linearna transformacija definisana matricom **A** primeni na njega, već se samo skalira odgovarajućom karakterističnom vrednošću λ
- Primer 1: linearna transformacija definisana matricom $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
  - Karakteristične vrednosti su 1 i 3, a odgovarajući karakteristični vektori $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

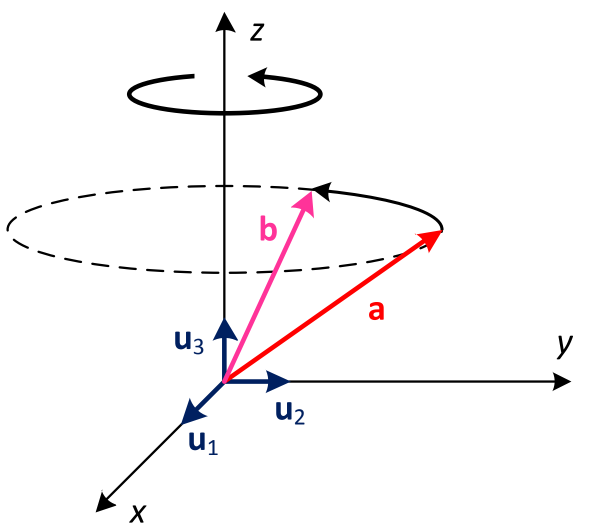


vektori paralelni sa karakterističnim vektorima ne menjaju pravac već se samo skaliraju

Interpretacija karakterističnih vektora i vrednosti

- Karakteristični vektori matrice **A** predstavljaju invarijantne pravce linearne transformacije koju ona definiše
  - Karakteristični vektor **v** ne menja pravac ako se linearna transformacija definisana matricom **A** primeni na njega, već se samo skalira odgovarajućom karakterističnom vrednošću λ
- Primer 2: rotacija oko *z*-ose za ugao φ, definisana matricom

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



  - Jedina realna karakteristična vrednost je 1, preostale dve su međusobno konjugovano kompleksne

Diferenciranje kod vektora i matrica

- Ako elementi matrice **A** zavise od parametra ϑ, tada je:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \vartheta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial a_{12}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial a_{13}}{\partial \vartheta} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial a_{22}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial a_{23}}{\partial \vartheta} & \cdots & \frac{\partial a_{2n}}{\partial \vartheta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial a_{m2}}{\partial \vartheta} & \frac{\partial a_{m3}}{\partial \vartheta} & \cdots & \frac{\partial a_{mn}}{\partial \vartheta} \end{bmatrix}$$

- Ako su matrica **M** i vektor **y** nezavisni od vektora **x,** tada je:

$$\frac{\partial \mathbf{Mx}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{M}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{y} = \mathbf{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \mathbf{Mx} = \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \mathbf{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{Mx} = [\mathbf{M} + \mathbf{M}^{\mathrm{T}}] \mathbf{x}$$

- Izvod skalarne funkcije $f(\mathbf{x})$: $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ po vektoru **x** (njen *gradijent*) predstavlja vektor izvoda po pojedinim komponentama:

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} f(\mathbf{x}) = \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_d} \end{bmatrix}$$

- Izvod vektorske funkcije $\mathbf{f}(\mathbf{x})$: $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ po vektoru **x** predstavlja se u vidu Jacobijeve matrice:

$$J(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_d} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_d} \end{bmatrix}$$