Mô hình toán

Ngày 24 tháng 3 năm 2024

Mục lục

1 Mở đầu **1**
1.1 Giới thiệu . . . 1
1.2 Sơ lược về xây dựng mô hình toán học . . . 2

2 Nguyên tắc căn bản trong xây dựng mô hình toán **2**
2.1 Nguyên tắc và các câu hỏi . . . 2
2.2 Mô hình quỹ đạo vật ném . . . 3

3 Một số ví dụ khác **5**
3.1 Mô hình tuyến tính . . . 5
3.2 Mô hình tăng trưởng căn bản . . . 6
3.3 Bài toán 7 cây cầu . . . 7

4 Bài tập **9**

1 Mở đầu

1.1 Giới thiệu

Toán học không phải bắt đầu từ một suy nghĩ bất chợt nhưng bắt đầu bằng những nhu cầu thiết yếu và thực tiễn. Khi còn nhỏ, ta bắt đầu biết về toán học bằng việc đếm số lượng vật thể. Từ đó, ta hiểu được khái niệm về số tự nhiên trong toán học. Nói một cách tổng quát hơn, khi ta thấy một vật, một hiện tượng thì ta dùng các biểu tượng, ngôn ngữ đơn giản nhằm giúp não bộ chúng ta dễ dàng xử lý và vận dụng kiến thức về vật, hiện tượng đó cho vật, hiện tượng khác. Quá trình này là ta đang xây dựng một mô hình toán học.

Nhằm có được cách cách xây dựng các mô hình toán học hiệu quả hơn, điều quan trọng là ta phải nắm được những nguyên tắc căn bản trong việc xây dựng. Ngoài ra, các ví dụ về mô hình toán học đã được xây dựng trước đây cũng là một kho tàng kiến thức đáng để ta học hỏi.

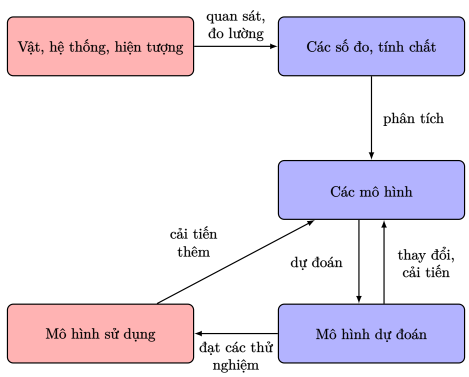
1.2 Sơ lược về xây dựng mô hình toán học

Từ một vật, hiện tượng ta muốn hiểu hoặc một hệ thống ta muốn tạo ra, ta thu thập các dữ kiện liên quan như: số đo (kích thước, cân nặng, vận tốc, ...), tính chất (hình dạng, quỹ đạo, ...), điều kiện xảy ra hiện tượng, ...

Từ các số liệu có được, ta cũng tìm các kiến thức liên quan (các kiến thức hình học nếu muốn phân tích hình dạng, kiến thức cơ học nếu cần biết về chuyển động). Phân tích các kiến thức và số liệu để đưa ra nhiều mô hình khả thi khác nhau cho vấn đề thực tiễn ta đang muốn giải quyết.

Sau khi có được các mô hình khả thi, ta tiếp tục đưa ra các dự đoán, ta chọn ra mô hình ta cho là tốt nhất cho vấn đề và mang đi thử nghiệm. Trong trường hợp mô hình dự đoán không đạt các mong muốn trong thực tiễn ta quay ngược về các mô hình cũ. Trong quá trình này ta cũng phải đặt ra câu hỏi làm sao để thay đổi và cải tiến mô hình trở nên phù hợp hơn.

Trong trường hợp mô hình dự đoán đạt các mong muốn thì ta sẽ mang mô hình này sử dụng. Trong quá trình sử dụng ta có thể quay lại và cải tiến thêm các mô hình.



Hình 1: Sơ đồ về xây dựng mô hình toán

2 Nguyên tắc căn bản trong xây dựng mô hình toán

2.1 Nguyên tắc và các câu hỏi

Ta có thể thấy sơ đồ căn bản trong xây dựng mô hình toán nhưng mỗi bước có rất nhiều câu hỏi liên quan. Nguyên tắc để làm ra một mô hình hiệu quả là trong quá trình làm mô hình ta cần trả lời được một số câu hỏi nhất định. Các câu hỏi được đưa ra có thể tuỳ thuộc vào kinh nghiệm của mỗi cá nhân. Phổ biến hơn thì ta dùng các câu hỏi được đưa ra từ các chuyên gia đi trước, ví dụ ta có thể dùng bộ câu hỏi sau:

1. Tại sao: Tại sao ta cần biết về vật, hệ thống hay hiện tượng này.
2. Kiếm thông tin: Ta phải kiếm những thông tin nào liên quan đến vật, hệ thống hay hiện tượng?
3. Có thông tin gì: Trong những thông tin muốn kiếm ta có hay sẽ có được những thông tin nào?
4. Điều kiện: Trong các thông tin có được thì đúng trong điều kiện nào, ta sẽ giữ và bỏ điều kiện nào?
5. Công cụ: Ta có những kiến thức hay công cụ liên quan có sẵn để xây dựng mô hình không?
6. Dự đoán: Ta phải dùng công thức hoặc mô hình nào khác để chọn ra mô hình dự đoán?
7. Kiểm tra: Ta dùng gì để kiểm tra mô hình dự đoán?
8. Kết quả kiểm tra: Ta được kết quả kiểm tra là gì, mô hình có dùng được không?
9. Cải thiện: Có thông tin hay công cụ nào khác để cải thiện mô hình?
10. Sử dụng: Mô hình sẽ được sử dụng như thế nào?

Nhìn tổng quan ta cũng hiểu được vì sao các câu hỏi trên là quan trọng. Lấy câu hỏi đầu tiên làm ví dụ, nhiều học sinh bây giờ rất thắc mắc vì sao mình lại phải học toán, từ hình học rồi giải phương trình, đạo hàm rồi tích phân. Nhiều em cho rằng toán chỉ là sự sáng tạo của các thầy cô để mang ra kiểm tra. Việc không trả lời được câu hỏi "tại sao" dễ làm ta mất định hướng trong quá trình xây dựng mô hình toán học rồi từ từ trở nên không còn hứng thú gì nữa với toán. Lấy ví dụ nữa là xác định điều kiện và cải thiện, các nhà nghiên cứu khi mang mô hình mình ra thử nghiệm đều thấy mô hình ban đầu của mình đều không đúng. Để làm mô hình phù hợp hơn với thực tiễn họ đều phải trải qua quá trình kiểm tra lại điều kiện và cải tiến mô hình nhiều lần. Qua đó ta thấy được việc trả lời được các câu hỏi căn bản giúp ta có được kim chỉ nam khi xây dựng mô hình toán học.

2.2 Mô hình quỹ đạo vật ném

Ta sẽ xem qua một ví dụ căn bản: Một vận động viên ném một quả bóng thì quả bóng bay đi như thế nào?

Hình 2: Người ném bóng

1. Tại sao: Biết được cách bay của quả bóng có thể giúp ta điều khiển quỹ đạo bay.
2. Kiếm thông tin gì: Vị trí ném, lực ném, góc ném, cân nặng quả bóng, kích thước quả bóng, hình dạng quỹ đạo trong những lần ném lần khác. Ta có thể thu thập nhiều hơn và lược bớt thông tin khi cảm thấy nó không phù hợp trong mô hình ta dự tính xây.
3. Có thông tin gì: Việc đo đạc đôi khi tốn thêm thời gian và tiền bạc nên hầu như ta không có được tất cả những thông tin mà ta mong muốn. Hơn nữa việc xây dựng mô hình trên quá nhiều thông tin đôi lúc làm mô hình quá phức tạp hoặc chỉ dùng được trong tình huống quá cụ thể mà không dùng được cho tình huống khác. Đây cũng là điều ta muốn tránh. Vậy ta theo ví dụ trên ta có thể thu thập về lực ném, góc ném, khối lượng quả bóng. Có thể bỏ qua các thông tin như kích thước quả bóng chẳng hạn.
4. Điều kiện: Để xây dựng một mô hình thì ta nên bắt đầu từ các điều kiện dễ nhất. Ví dụ: việc trời có gió hay không có gió cũng có thể ảnh hưởng quỹ đạo bay nhưng ta sẽ giả sử luôn là nó không có ảnh hưởng. Hoặc, khi chọn vật mốc cho chuyển động ta chọn sao để phương trình viết ra sẽ dễ hơn cho chúng ta. Ví dụ chọn gốc là mặt trái đất ta thường thấy quỹ đạo là một hình parabole, còn đường này sẽ rất phức tạp nếu ta chọn gốc chuyển động là mặt trời vì trái đất còn chuyển động xung quanh mặt trời theo một phương trình phức tạp khác. Hoặc, gia tốc trọng trường của trái đất cũng có thể khác nhau tại các địa điểm khác nhau nhưng ta chỉ giả sử chung gia tốc trọng trường là $g \approx 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
5. Công cụ: Ta có nhiều công cụ như coi quả bóng là một điểm vì ta đã bỏ qua kích thước(khái niệm điểm của hình học Euclid), toạ độ hoá không gian(Không gian Descartes), các định luật Newton, ...

6. Dự đoán: Từ các thông tin có được, ta dùng các tính toán đại số có sẵn để đưa ra được một công thức bậc hai cho quỹ đạo của quả bóng.

7. Kiểm tra: Mô hình có được có thể kiểm tra với thí nghiệm thực tiễn nếu tính toán có chuẩn xác không.

8. Kết quả kiểm tra: Giữa kết quả tính ra và kết quả thử nghiệm sẽ có sai khác. Ta phải quyết định xem sai khác ở mức nào là chấp nhận được. Ví dụ quả bóng ném sẽ đi khoảng vài mét còn tính toán sẽ cho số lệch chỉ vài xangtimét thì sẽ cho vào mức chấp nhận được. Nếu tính ra sai số lớn hơn như quả bóng đi 4 m mà sai số là 1 m thì không chấp nhận và mô hình không chính xác.

9. Cải thiện: Ta xem lại trong mô hình ta có bỏ qua điều kiện quan trọng nào không, hoặc có sử dụng công cụ nào sai cách không, ... Nếu mô hình đã đúng ta tiếp tục xem xét có thể làm chuẩn xác hơn không, bỏ bớt thêm điều kiện nào được không, ...

10. Sử dụng: có thể dùng mô hình này để ném quả bóng tới vị trí mong muốn bằng cách điều chỉnh lực và góc ném. Ngoài ra, mô hình cũng có thể dùng được cho các vật khác như tính quỹ đạo viên đạn.

3 Một số ví dụ khác

3.1 Mô hình tuyến tính

Các mô hình tuyến tính rất quan trọng trong toán học cũng như trong thực tiễn. Ta sẽ tìm hiểu kỹ hơn khi qua mục đại số tuyến tính. Các mô hình này cho phép ta sự đơn giản trong tính toán và lập trình. Điều này làm cho việc tính toán khả thi trong thực tiễn.

1. Phương trình chuyển động thẳng đều. Đây là mô hình khá phổ biến ở cấp phổ thông.

2. Tính lãi đơn, lãi tăng cố định theo tiền gốc ban đầu và cho ta một hàm số tuyến tính. Ví dụ: một người vay ngân hàng số tiền A với lãi suất đơn là $p\%$ một tháng và phải trả lại cả vốn lẫn lời sau một năm. Trong mô hình này ta muốn biến với tiền gốc và lãi suất thì phải tính tiền lời như thế nào. Ở đây, ta viết được công thức đơn giản là

$$A \times p\% \times 12.$$

Hình 3: Lãi đơn

Cụ thể hơn nếu người này muốn vay 1 tỷ đồng để kinh doanh và trả lãi suất là 1% một tháng thì qua một năm anh ta phải tính xem anh ta có thể trả đủ 1 tỷ đã vay và 120 triệu tiền lãi.

3. Thuật toán xử lý hình ảnh hoặc nhiều thuật toán máy tính nói chung. Ví dụ: mỗi pixel trong một bức ảnh với toạ độ (m, n) trên màn hình sẽ chứa một đoạn thông tin X(như 8 bits màu sắc trong hệ RGB). Người ta muốn xoay bức hình đi một góc α trên màn hình với tâm xoay là toạ độ $(0, 0)$. Lúc này mười ta viết toạ độ là vector $p = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ và phép xoay sẽ tương ứng với $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Kết quả làm tròn của Rp sẽ ứng với toạ độ mới. Lúc này, người ta chỉ cần chuyển thông tin X vào toạ độ này thì ta có hiển thị mới lệch một khóc xấp xỉ α so với ban đầu.

4. Các vấn đề phức tạp khác cũng được tuyến tính hoá để xấp xỉ kết quả mong muốn. Ta cũng sẽ thấy đạo hàm là một công cụ thường được sử dụng để tuyến tính hoá bài toán.

3.2 Mô hình tăng trưởng căn bản

Với các mô hình tăng trưởng hoặc suy giảm căn bản người ta thường đặt giả thiết rằng sự thay đổi của một đại lượng phụ thuộc vào giá trị của đại lượng trước đó. Ta lấy ví dụ: ban đầu chỉ có một tế bào và cứ sau 3 ngày thì số tế bào gấp đôi lên, lúc đó:

$$\frac{f(t+3) - f(t)}{3} = 2f(t)$$

với $f(t)$ là số tế bào ngày t. Nếu ta quen thuộc với đạo hàm thì cũng có thể viết

$$f'(t) = 2f(t).$$

Phương trình dạng này là phương trình đạo hàm bậc nhất và thường được giải bằng hàm số mũ. Một số ví dụ:

1. Tăng trưởng dân số, kinh tế, tính số tế bào, vi khuẩn. Ở ví dụ trên, sau $3k$ ngày thì số lượng tế bào sẽ là 2^k tế bào.

2. Lãi kép, lãi được tính bằng tổng tiền trước đó thay vì lãi đơn chỉ tính bằng tiền ban đầu. Ví dụ: Một người gửi số tiền A với kỳ hạn 3 tháng với lãi suất là $p\%$. Sau mỗi kỳ hạn thì tổng tiền gửi ban đầu và tiền lãi sẽ được gộp chung để tính cho lần gửi tiếp theo. Vậy nếu đã gửi 1 năm thì tổng tiền là bao nhiêu? Cũng giống với mô hình tăng trưởng của tế bào, bài toán lãi kép sẽ được mô hình bằng phương trình

$$\frac{f(t+3) - f(t)}{3} = f(t) \times p\%.$$

Trong phương trình thì t là thời gian gửi và f là tổng tiền tiết kiệm được. Tổng tiền tính được là $A(1 + p\%)^4$.

3. Tìm điểm cân bằng trong phương trình hoá học, hoặc các vấn đề cân bằng khác trong các hệ thống. Ví dụ: người ta cần biết về một phản ứng hoá học hai chiều

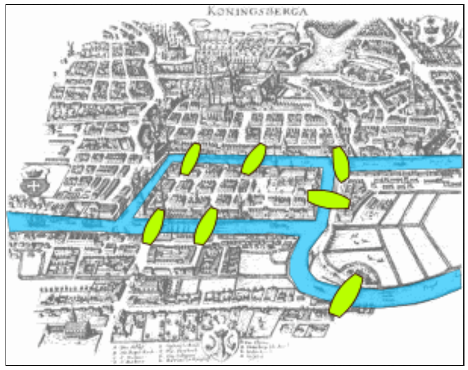
$$a + b \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightleftharpoons}} c,$$

với r_1, r_2 lần lượt là tỉ lệ phản ứng và α, β, γ lần lượt là nồng độ của a, b, c. Người ta mô hình bài toán cân bằng với phương trình

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} r_2\gamma - r_1\alpha\beta \\ r_2\gamma - r_1\alpha\beta \\ r_1\alpha\beta - r_2\gamma \end{pmatrix}.$$

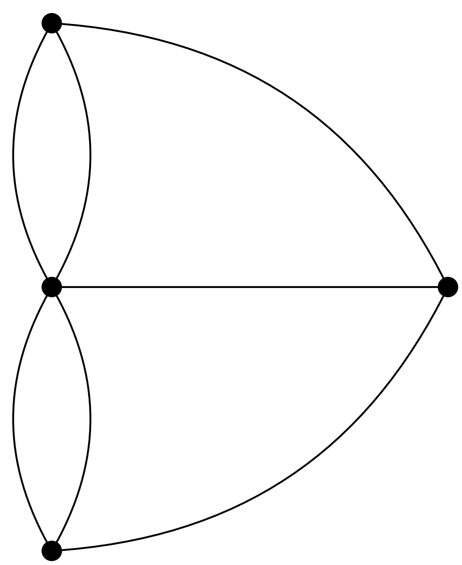
3.3 Bài toán 7 cây cầu

Bài toán bảy cây cầu là một trong những giai thoại nổi tiếng của toán học. Tên và vấn đề nảy sinh từ bảy cây cầu tại thành phố Königsberg của Prussia(sau này là Kaliningrad, Nga, sau thế chiến thứ hai thì chỉ còn lại năm cây cầu).



Hình 4: 7 cây cầu tại Königsberg

Người ta đặt ra vấn đề là có cách nào đi qua từ một địa điểm ban đầu đi qua mỗi cây cầu một lần rồi trở về địa địa điểm cũ? Năm 1736, Euler bằng cách xây dựng một mô hình căn bản đã trả lời rằng việc này là không thể.



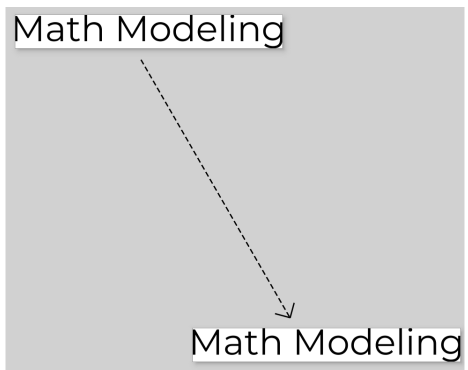
Hình 5: Mô hình của Euler

Có thể thấy trong câu hỏi được đặt ra thì các thông tin về hình dạng cũng như độ dài cầu là không cần thiết. Euler loại bỏ các thông tin đó trong hình và tập trung vào số lượng điểm và cầu nối với nhau. Mô hình này trở nên phổ biến và trở thành lý thuyết đồ thị mà ta vẫn gặp. Trong chương trình toán phổ thông ta có những ví dụ:

1. Bài toán liên thông các thành phố, mạng lưới.
2. Các bài toán quen biết, bạn bè.
3. Bắt cặp thi đấu.

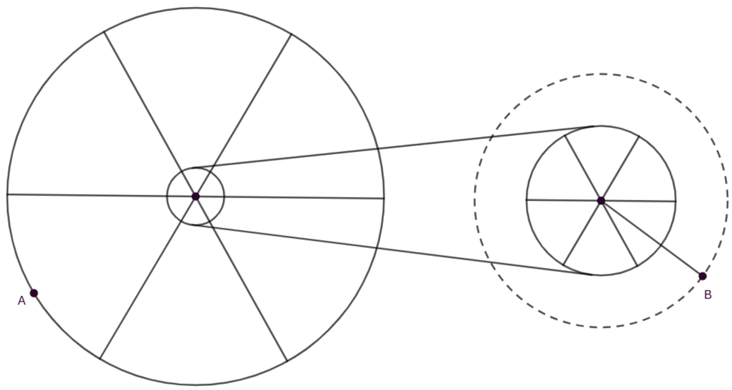
4 Bài tập

1. Màn hình máy tính đang hiển thị một bức hình ở vị trí A là tập hợp các điểm pixel đang hiển thị bức hình. Ta dùng con trỏ chuột kéo bức hình qua vị trí B. Ta đang thực hiện phép biến hình gì trên mặt phẳng? Hãy mô hình hoá phép biến hình này bằng vector.



Hình 6: Ví dụ kéo thả trên máy tính

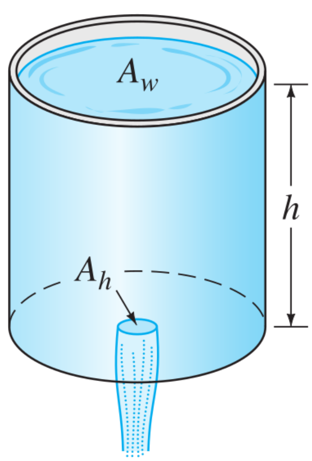
2. Mô hình truyền động trong xe đạp được vẽ với B là vị trí bàn đạp với quỹ đạo là một vòng tròn, hai bánh răng được nối bằng dây xích, bánh xe là vòng tròn lớn. Hãy mô hình quan hệ giữa tốc độ góc của bàn đạp và tốc độ đi chuyển của một điểm A trên bánh xe dựa vào các bán kính của các vòng tròn.



Hình 7: Mô hình truyền động của xe đạp

3. Người ta lên kế hoạch dựng các đường liên thông n vị trí trong thành phố. Để tiết kiệm chi phí thì trong ba điểm bất kỳ người ta chỉ xây tối đa hai đường để liên thông ba điểm. Hỏi số đường liên thông tối đa là bao nhiêu?

4. Một bể chứa hình trụ có lỗ thoát nước hình tròn ở đáy. A_w và A_h lần lượt là diện tích đáy và diện tích lỗ thoát. Theo định luật Torrecelli thì thể tích nước thoát đi mỗi giây khi lỗ thoát được mở là $A_h\sqrt{2gh}$, trong đó g, h lần lượt là gia tốc trọng trường và chiều cao mực nước. Viết phương trình đạo hàm bậc nhất của chiều cao mực nước theo thời gian.



Hình 8: Mô hình thoát nước với bể hình trụ

5. Hãy tự xây dựng mô hình toán trong chi phí xử lý rác thải của một thành phố, quốc gia. Có thể sử dụng gợi ý sau:

- Có bao nhiêu nhà máy xử lý, bao nhiêu địa điểm tập kết rác thải của người dân?
- Chi phí duy trì nhà máy trung bình là bao nhiêu? Chi phí xử lý mỗi tấn rác thải là bao nhiêu?
- Số lượng rác thải tại mỗi điểm tập kết là bao nhiêu? Chi phí để chuyển rác đến cái nhà máy xử lý là bao nhiêu?
- Ngoài ra có thể mở rộng bằng cách thêm các số liệu khác ví dụ như khối lượng tối đa mà một nhà máy xử lý được, thời gian xử lý và chi phí,...

Tham Khảo

[1] Michael D. Alder, ed. *An Introduction to Mathematical Modelling*. 2001.

[2] Clive L. Dym, ed. *Principles of Mathematical Modeling (Second Edition)*. Second Edition. Burlington: Academic Press, 2004, pp. 297–303. ISBN: 978-0-12-226551-8. DOI: `https://doi.org/10.1016/B978-012226551-8/50011-9`.

[3] D.G. Zill. *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*. Cengage Learning, 2012. ISBN: 9781285401102.