Đại Số Tuyến Tính

Phạm Nguyễn Mạnh

Tháng 2, 2024

Mục lục

1 Mở đầu

1.1 Giới thiệu

Đại số tuyến tính là một nhánh quan trọng của toán học, tập trung vào các hệ thức và phương pháp tính toán liên quan đến tuyến tính (một chủ đề thường gặp trong các vấn đề thực tế). Các phương trình và biến đổi tuyến tính đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực như: vật lý, kỹ thuật, thống kê, máy học,... Đại số tuyến tính không chỉ là một công cụ mạnh mẽ trong nghiên cứu toán học mà còn là một phần quan trọng của ứng dụng thực tế.

Trong đại số tuyến tính, chúng ta sẽ khám phá các khái niệm về hệ phương trình tuyến tính, và ứng dụng của vector-ma trận.

1.2 Hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình là một trong những chủ đề thường gặp nhất của toán ứng dụng.

Một hệ m phương trình với n ẩn sẽ có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Để giải hệ phương trình trên, ta có thể sử dụng phương pháp quy nạp: Nhân hệ số của phương trình cuối tương ứng với mỗi phương trình trên nó để loại bỏ biến x_n. Ta sẽ còn $m-1$ phương trình với $n-1$ ẩn.

Ý tưởng trên là tiền đề cho việc áp dụng ma trận và vector để giải các bài toán hệ phương trình tuyến tính.

2 Vector và ma trận

2.1 Định nghĩa vector và ma trận

Một ma trận $m \times n$ (dòng sẽ luôn được kí hiệu trước cột) trên $\mathbb{F}$ có thể hiểu là một bảng chứa các phần tử thuộc tập $\mathbb{F}$ nào đó (thường là $\mathbb{R}$), và được viết dưới dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vector là trường hợp đặc biệt của ma trận, và có thể hiểu là một ma trận cột do nó luôn có kích thước $m \times 1$ và sẽ có dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

Ta kí hiệu $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ là ma trận $m \times n$ và $v \in \mathbb{F}^m$ là vector với m phần tử. Cho ma trận A, ta định nghĩa A_{ij} là phần tử hàng i, cột j của ma trận.

Chú ý rằng ta có thể sử dụng ngoặc tròn hoặc vuông để biểu diễn ma trận, nhưng thông thường trong phương trình ma trận, ngoặc vuông được sử dụng thường xuyên hơn.

2.2 Định nghĩa cơ bản

1. **Ma trận không** là ma trận mà mọi phần tử của nó đều bằng 0. Ta có thể kí hiệu nó bằng số 0.
2. **Ma trận chuyển vị** của ma trận $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ được kí hiệu là A^T và là ma trận $n \times m$ thỏa mãn:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \; \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

3. **Ma trận dòng** sẽ có kích thước $1 \times n$ và là ma trận chuyển vị của một vector.

4. **Ma trận vuông** có số hàng bằng số cột. **Ma trận chéo** là ma trận vuông mà chỉ có phần tử A_{ii} có thể có giá trị khác 0, mọi phần tử còn lại phải bằng 0. Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. **Ma trận đơn vị** là ma trận chéo mà mọi phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1. Ta kí hiệu ma trận này là I và không cần định nghĩa kích thước của nó.

6. **Ma trận tam giác trên** là ma trận vuông mà mọi phần tử A_{ij} với $i > j$ đều bằng 0. Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

   Ma trận tam giác dưới là chuyển vị của một ma trận tam giác trên.

   Luyện tập: Tìm một ví dụ thực tế cho ma trận tam giác trên hoặc dưới.

7. **Ma trận bậc thang** là ma trận khi ta xét hàng theo thứ tự từ trên xuống, phần tử khác không đầu tiên (từ trái qua phải) phải nằm ở cột có thứ tự lớn hơn hàng trước nó. Ví dụ (để ý thấy rằng thứ tự cột của phần tử khác không lần lượt là 1,3,4, tăng nghiêm ngặt):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2.3 Phép cộng trừ và nhân trên ma trận

1. **Phép cộng** giữa hai ma trận chỉ khả thi khi chúng cùng chiều với nhau (số hàng và cột bằng nhau). Khi đó tổng của hai ma trận $A + B$ sẽ được tính bằng:

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

2. **Tích vô hướng** của một ma trận $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ với giá trị $c \in \mathbb{F}$ sẽ được tính bằng:

$$(cA)_{ij} = c \times A_{ij}$$

3. **Phép nhân giữa hai ma trận** A với B chỉ khả thi khi số cột của $A\mathbb{F}^{m \times n}$ bằng số hàng của $B\mathbb{F}^{n \times p}$. Khi đó tích của hai ma trận $A \times B$ sẽ được tính bằng:

$$(A \times B)_{ij} = \sum_{t=1}^{n} A_{it} B_{tj}$$

   Chú ý rằng $A \times B$ khác $B \times B$.

2.4 Một số tính chất đáng lưu ý

1. Tích của một ma trận vuông và ma trân đơn vị cùng chiều sẽ không làm thay đổi giá trị của nó: $AI = IA = A$

2. Tích của hai ma trận không có tính giao hoán nhưng có tính kết hợp và phân phối:

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A + B)C = AC + BC, A(B + C) = AB + AC$$

3. Tính chất của chuyển vị:

$$(A^T)^T = A, (cA)^T = c \times A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

2.5 Định nghĩa nâng cao

1. **Nghịch đảo của ma trận**, kí hiệu là A^{-1}, là ma trận vuông cùng chiều sao cho $A^-1A = AA^-1 = I$. Ma trận vuông được gọi là khả nghịch nếu nó tồn tại nghịch đảo. Một số tính chất của nghịch đảo:
   (a) Nếu ma trận khả nghịch thì nghịch đảo của nó là duy nhất (Hãy chứng minh mệnh đề này).
   (b) $(A^{-1})^{-1} = A,\ (cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1},\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
2. **Ma trận bậc thang rút gọn**, hay có tên gọi là RREF (reduced row echelon form), là ma trận bậc thang thỏa mãn thêm hai điều kiện sau:
   (a) Mọi phần tử khác không đầu tiên của mỗi hàng đều bằng 1.
   (b) Mọi phần tử khác cùng cột với những phần tử nói trên đều bằng 0.

   Ví dụ:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Mọi ma trận đều có thể biến đổi về duy nhất một RREF (cùng chiều với ma trận ban đầu) của nó bằng cách biến đổi tuyến tính các hàng của nó. Để ý rằng ma trận bậc thang và RREF có thể có hàng chỉ chứa phần tử 0.

   Chú ý: RREF của ma trận khả nghịch là một ma trận đơn vị.
3. **Bậc (rank)** của ma trận là số hàng khác 0 của ma trận đó ở dạng RREF.

2.6 Áp dụng cho hệ phương trình tuyến tính

Giả sử ta có hệ m phương trình n ẩn như ở phần mở đầu:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
Đặt:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$
thì ta có phương trình ma trận $Ax = b$

Nếu A khả nghịch thì hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất (chú ý rằng khi đó $m = n$):
$$x = A^{-1}Ax = A^{-1}b$$
Nếu A không khả nghịch (hoặc ta không tính được nghịch đảo của A) thì ta có thể sử dụng phép khử Gauss:

1. Đầu tiên, ta đưa ma trận A về dạng RREF của nó (tương tự như cách ta giải hệ phương trình bằng tay). Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$\to A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2-1*2 & 3-1*2 & 4-5*2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ -2-4*2 \end{bmatrix}$$
$$\to A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \end{bmatrix}$$
$$\to A = \begin{bmatrix} 1 & 1-1 & 5-(-6) \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4-(-10) \\ -10 \end{bmatrix}$$
$$\to A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \end{bmatrix}$$

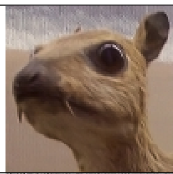
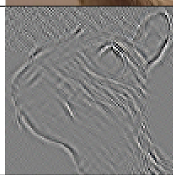
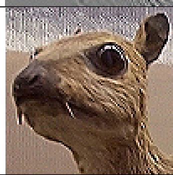
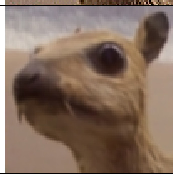
2. Nếu $rank(A) < m$ thì dạng RREF của A tồn tại hàng chỉ chứa phần tử 0 (điều này đảm bảo xảy ra nếu $m > n$) và ta có 2 trường hợp:
   (a) Nếu mỗi phần tử của b tương ứng với mọi hàng 0 này cũng đều bằng 0 thì hệ phương trình có vô số nghiệm.
   (b) Nếu tồn tại hàng 0 mà phần tử tương ứng của b khác 0 thì hệ phương trình vô nghiệm.
3. Nếu không thì $rank(A) = m$, trong trường hợp $m < n$ thì phương trình cũng có vô số nghiệm. Nếu không thì ma trận A khả nghịch, $m = n$, và RREF của A là ma trận đơn vị. Nghiệm của x sẽ là vector b sau khi biến đổi xong ở bước 1.

Chú ý: Độ phức tạp của phép khử Gauss là $O(n^3)$ nếu A là ma trận vuông và xấp xỉ $O(min(m,n)^2 max(m,n)$ nếu A là ma trận $m \times n$.

2.7 Một số ứng dụng thực tế

Hệ phương trình là một mô hình rất thường gặp trong toán ứng dụng, nhưng ngoài nó ra, vector và ma trận còn có nhiều ứng dụng trong những lĩnh vực khác, chẳng hạn như:

1. Xử lý hình ảnh thông qua việc áp dụng ma trận

Phép toán	Ma trận biến đổi	Hình ảnh
Đồng nhất (giữ nguyên hình ảnh)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
Phát hiện cạnh	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	
Làm sắc nét	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	
Phép làm mờ kiểu Gauss (Gaussian blur)	$\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	

2. Ma trận xác suất cho chuỗi Markov, dùng để dự báo thời tiết ngày hôm sau dựa vào trạng thái ngày hôm nay.
3. Ma trận được sử dụng trong cho phương pháp Least Square Regression để tìm đường thẳng hoặc mặt phẳng phù hợp nhất với một tập hợp điểm dữ liệu.

3 Bài tập

1. Tìm tất cả nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 11 \\ 2x + 3y - 4z = 3 \end{cases}$$

2. Cho hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

   Tìm tất cả giá trị k sao cho hệ phương trình trên:

   (a) Không có nghiệm.

   (b) Có vô hạn nghiệm.

   (c) Có đúng một nghiệm, và tìm nghiệm này.

3. Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ x & y \end{pmatrix}$$

   Tìm tất cả các giá trị (x, y) sao cho $A^2 = -I$

4. Chứng minh rằng nếu A^2 có thể nghịch đảo thì A cũng có thể nghịch đảo.

Tài liệu

Kernel (image processing). Wikipedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_(image_processing)