Algoritmia y Complejidad

Problemas NP-Completos   Curso 2021 - 2022

EXACT-COVER es NP-Completo

vía 3-COLOR $\leq_p$ EXACT-COVER

Autor de la presentación:

- Marcos Hidalgo Baños

Duración estimada:

- 10 minutos aprox.

LENGUAJES Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Definición formal del problema

EXACT-COVER =

$\{ \langle S, V \rangle \mid S^* \subseteq \wp(V)$ ¿S^* contiene una cobertura exacta de V? $\}$

➔ Ejemplo sencillo válido

S = {A, B, C, D}

V = {1, 2, 3, 4, 5}

A = {2, 4}

B = {3, 4, 5}

C = {1, 3}

D = {5}

S* = { {A, C, D} }

Un pequeño cambio hace que no sea una **cobertura exacta**

➔ Ejemplo sencillo inválido

S = {A, B, C, D}

V = {1, 2, 3, 4, 5}

A = {2, 4}

B = {3, 4, 5}

C = {1, 3}

D = {4}

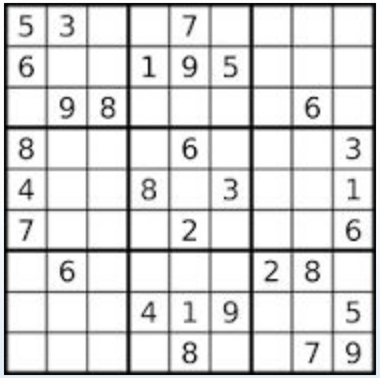
S* = { }

Aplicaciones de EXACT-COVER

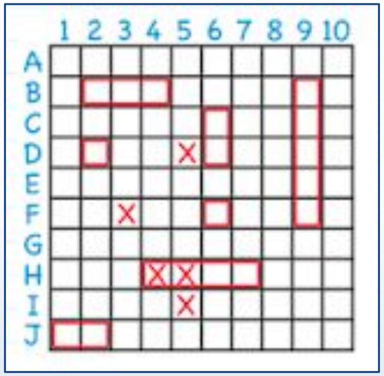
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

LENGUAJES Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

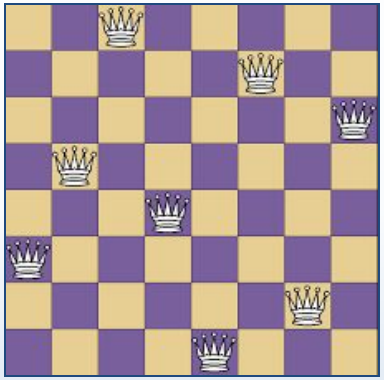
Problemas que suelen reducirse a EXACT-COVER



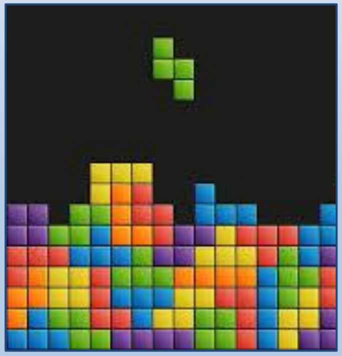
Sudoku



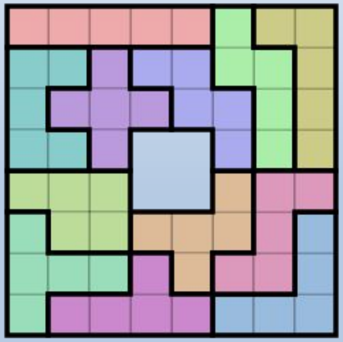
Hundir la flota



n-reinas



Tetris



Pentomino

EXACT-COVER pertenece a NP

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

LENGUAJES Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

- Demostración con verificador

S = {A, B, C, D}
V = {1, 2, 3, 4, 5}

A = {2, 4}
B = {3, 4, 5}
C = {1, 3}
D = {5}

S* = { {A, C, D} }

Con entrada <<S,V>, S*> :

- **Para cada conjunto (solución) de S* :**
  1) Comprobar que únicamente contiene elementos de S
     - ❖ *Complejidad Temporal del paso:* ***O(n)***
- **Para cada uno de sus elementos (que pertenecen a S):**
  2) Comprobar que los valores del conjunto V que contiene no han sido elegidos por otro. Para ello, si un conjunto escoge un elemento, este queda eliminado de V para los siguientes.
     - ❖ *Complejidad Temporal del paso:* ***O(n²)***
  3) Repetir para cada conjunto (solución) de S*
     - ❖ *Complejidad Temporal del paso:* ***O(n)***
- **Solo aceptamos si todas las comprobaciones se cumplen.**
  - Remarcar que es necesario que todos los conjuntos de S* pasen las comprobaciones (propenso a ataques de inyección).

Pregunta para audiencia.

¿Qué comprobación se debería realizar justo al comienzo del algoritmo? ¿Por qué motivo?

EXACT-COVER pertenece a NP

- Demostración con mTnD

N = “Con la entrada <S,V> :

1. Crear el conjunto S* de posibles soluciones inicialmente vacío.
   - ❖ *Complejidad Temporal del paso:* ***O(1)***

2. De forma no determinista, seleccionar un subconjunto X compuesto por elementos de S (candidato a ser añadido a S*).
   - ❖ *Complejidad Temporal del paso:* ***O(n)***

3. Comprobar para todo elemento de X si los valores del conjunto V que contienen se no se repiten con los elegidos por otro.
   - ❖ *Complejidad Temporal del paso:* ***O(n²)***

4. Si se cumple la condición 3, introducimos el conjunto X en el conjunto de soluciones posibles S* (consecuencia del estado de aceptación q_acc de nuestra máquina de Turing).

   Si por el contrario no se cumple, lo ignoramos (consecuencia del estado de rechazo q_rej de nuestra máquina de Turing).

5. Sabremos que hemos terminado de completar el conjunto S* una vez hayamos realizado el paso 2 para cada combinación posible. "

EXACT-COVER es NP-Completo

1) EXACT-COVER $\in$ NP
   - ➔ Mediante verificador ✓
   - ➔ Mediante una mTnD ✓

2) $\forall$ A $\in$ NP: A $\leq_p$ EXACT-COVER

   Para ello, nos valdremos de
   otro conocido problema NPC.
   Una vez realizada la reducción,
   sabremos que EXACT-COVER $\in$ NPC.

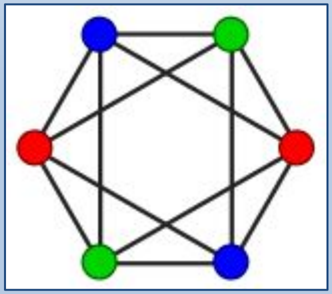
   3-COLOR $\leq_p$ EXACT-COVER

Breve introducción a 3-COLOR

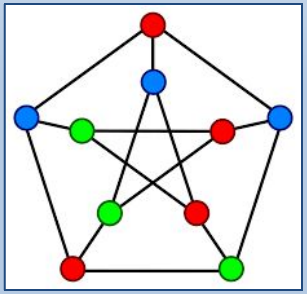
Si un grafo es 3-coloreable (RGB) entonces:

- Cada nodo es instanciado a uno de los tres colores.
- No hay dos nodos conectados mediante una arista que tengan asignado el mismo color.

<u>Aplicaciones</u>: Optimización, resolución de conflictos, coloreado de mapas, grafos bipartitos...



$G = (V, E)$



3-COLOR $\leq_p$ EXACT-COVER

Objetivo.

Construir un universo *U* y un conjunto de conjuntos *S* tales que una cobertura exacta del problema:

- Asigne a cada nodo de *G* uno de los tres colores.
- Nunca asigne el mismo color a dos nodos adyacentes.

Metodología.

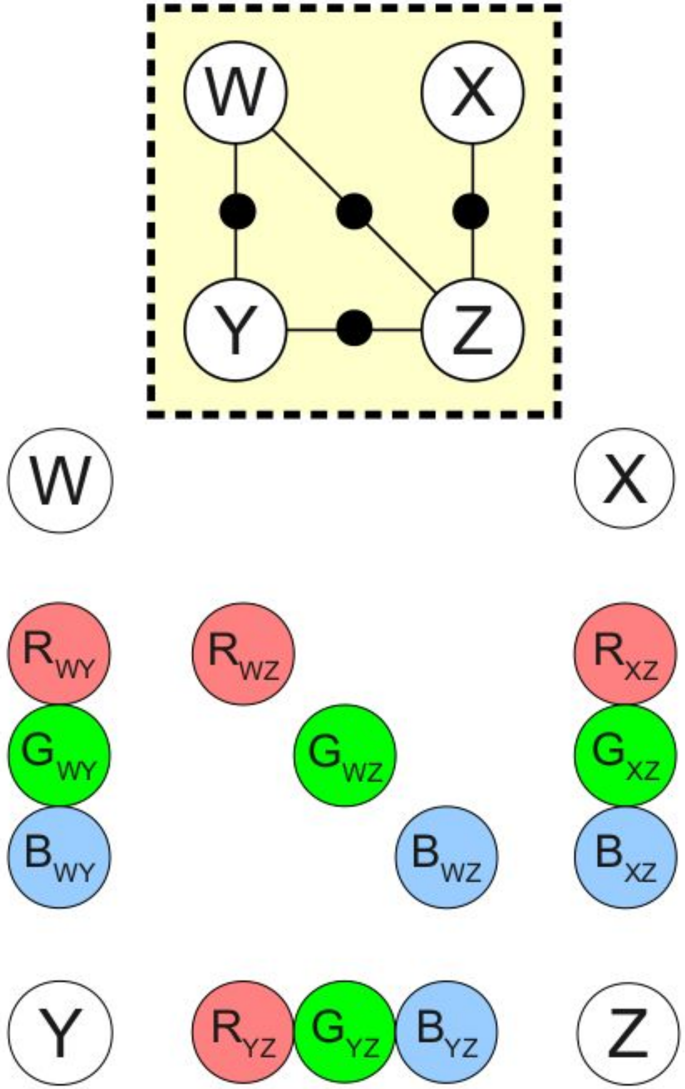
Para cada nodo *v* en el grafo *G* construir en el universo *U*:

- El elemento *v* → Identificador único para el nodo.

Para cada arista {*u, v*} en el grafo *G* construir en el universo *U*:

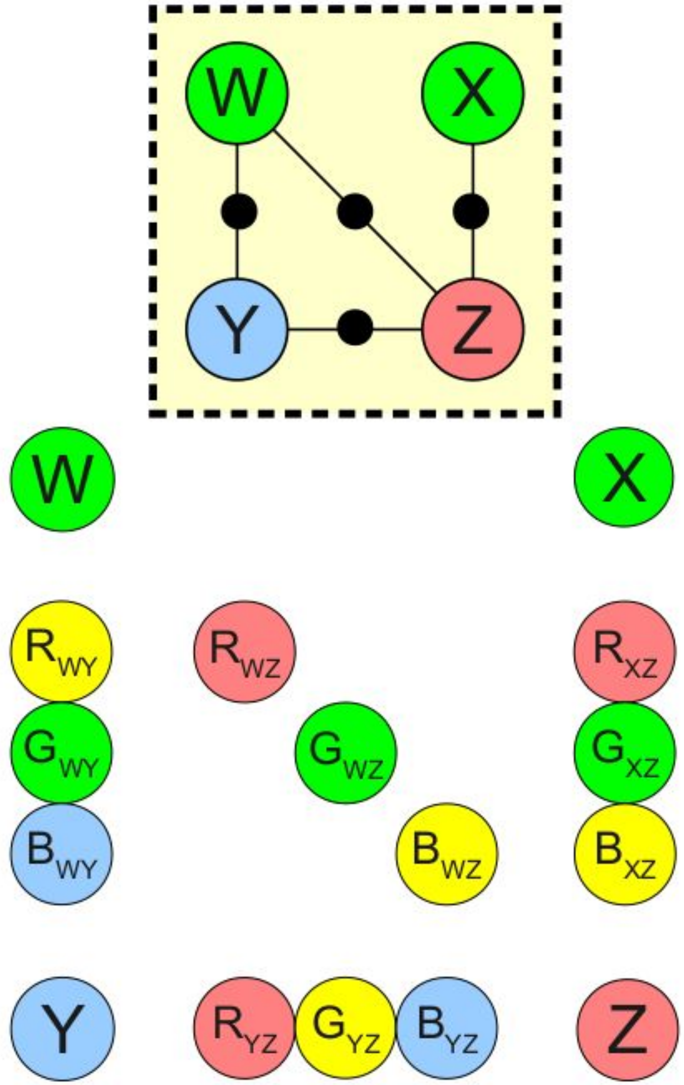
- Los elementos R_{uv} , G_{uv} , B_{uv} → Consecuentes de instanciar un nodo *v* a uno de los tres colores posibles.

3-COLOR $\leq_p$ EXACT-COVER



Allowed	**Not Allowed**
$\{ W, R_{WY}, R_{WZ} \}$	$\{ R_{WY} \}$
$\{ W, G_{WY}, G_{WZ} \}$	$\{ R_{WZ} \}$
$\{ W, B_{WY}, B_{WZ} \}$	$\{ R_{XZ} \}$
$\{ X, R_{XZ} \}$	$\{ R_{YZ} \}$
$\{ X, G_{XZ} \}$	$\{ G_{WY} \}$
$\{ X, B_{XZ} \}$	$\{ G_{WZ} \}$
$\{ Y, R_{WY}, R_{YZ} \}$	$\{ G_{XZ} \}$
$\{ Y, G_{WY}, G_{YZ} \}$	$\{ G_{YZ} \}$
$\{ Y, B_{WY}, B_{YZ} \}$	$\{ B_{WY} \}$
$\{ Z, R_{WZ}, R_{XZ}, R_{YZ} \}$	$\{ B_{WZ} \}$
$\{ Z, G_{WZ}, G_{XZ}, G_{YZ} \}$	$\{ B_{XZ} \}$
$\{ Z, B_{WZ}, B_{XZ}, B_{YZ} \}$	$\{ B_{YZ} \}$

3-COLOR $\leq_p$ EXACT-COVER

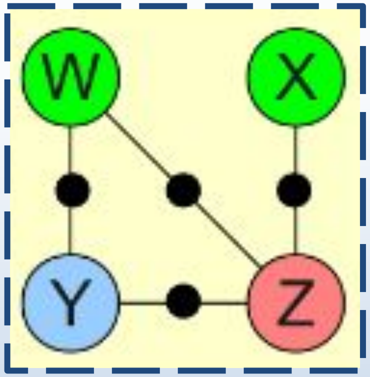


✓	✗
$\{ W, R_{WY}, R_{WZ} \}$	$\{ R_{WY} \}$
$\{ W, G_{WY}, G_{WZ} \}$	$\{ R_{WZ} \}$
$\{ W, B_{WY}, B_{WZ} \}$	$\{ R_{XZ} \}$
$\{ X, R_{XZ} \}$	$\{ R_{YZ} \}$
$\{ X, G_{XZ} \}$	$\{ G_{WY} \}$
$\{ X, B_{XZ} \}$	$\{ G_{WZ} \}$
$\{ Y, R_{WY}, R_{YZ} \}$	$\{ G_{XZ} \}$
$\{ Y, G_{WY}, G_{YZ} \}$	$\{ G_{YZ} \}$
$\{ Y, B_{WY}, B_{YZ} \}$	$\{ B_{WY} \}$
$\{ Z, R_{WZ}, R_{XZ}, R_{YZ} \}$	$\{ B_{WZ} \}$
$\{ Z, G_{WZ}, G_{XZ}, G_{YZ} \}$	$\{ B_{XZ} \}$
$\{ Z, B_{WZ}, B_{XZ}, B_{YZ} \}$	$\{ B_{YZ} \}$

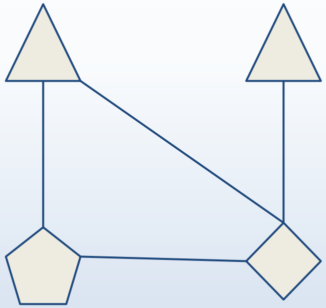
Demostración de la doble implicación

1) Si $\omega \in$ 3-COLOR $\Rightarrow f(\omega) \in$ EXACT-COVER

Solución propuesta



Estructura general



¿Existen más soluciones?

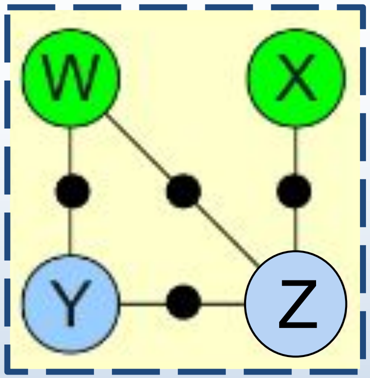
Idea intuitiva.

Para este problema tan restrictivo, tener en cuenta que la instanciación de una parte de la solución (colorear un nodo, colocar un número en el sudoku …) condiciona en gran medida al resto de elementos de S (no repetir color, no repetir números …)

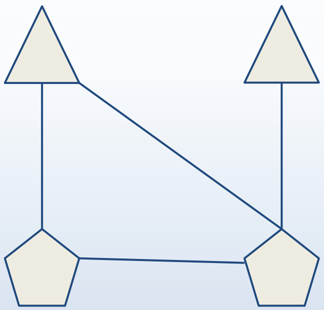
Demostración de la doble implicación

2) Si $\omega \notin$ 3-COLOR $\Rightarrow$ f(ω) $\notin$ EXACT-COVER

<u>Solución errónea</u>



<u>Estructura general</u>



<u>Justificación.</u>

Al no cumplirse la condición que impone 3-COLOR (ya sea por el no uso de los tres colores o por la incompatibilidad en el coloreado), podemos ver cómo en EXACT-COVER encontramos dos 'figuras' iguales conectadas $\rightarrow$ **representa colisión**

Esto equivaldría a decir que hemos cogido dos veces el mismo número en sudoku, o que hemos colocado en la misma casilla dos reinas en n-reinas.

Función de transformación computable en poli-t

Sea V el conjunto de nodos.

→ Contamos cada nodo 3 veces (RGB).

Sea E el conjunto de conexiones.

→ Contamos cada conexión 2·3 = 6 veces.

El tamaño total del conjunto U es **$O(|V|+|E|)$**

Tendremos que recorrer el conjunto universal en su totalidad.

Se requiere de tiempo polinómico para recorrer O(n) celdas.

Queda demostrado que la función es computable en poli-t

Referencias bibliográficas

- Resumen profesorado Stanford sobre EXACT-COVER.
  https://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs103/cs103.1132/lectures/27/Small27.pdf

- Información adicional sobre algoritmos para EXACT-COVER.
  https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02507186/document

- Idea general para la reducibilidad 3-COLOR ≤p EXACT-COVER.
  http://www.cs.umd.edu/~gasarch/BLOGPAPERS/npcproblems.pdf