Serie de Fourier

Josué Tago Pacheco*

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

18 de febrero de 2016

Resumen

Estas notas fueron creadas para sustituir la sección 1.4 y la primera parte de la sección 1.4.1 de las Notas de Anguiano-Rojas (1996) que se llevan en el curso de Análisis Espectral de Señales en el 6to. Semestre de la Carrera de Ingeniería Geofísica impartida por la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Aproximación de funciones por funciones ortogonales complejas

Dada una función $f(t)$, ésta puede aproximarse mediante funciones complejas que sean ortogonales de manera que

$$f_a(t) = \tilde{\mathscr{D}}_0\mathscr{G}_0(t) + [\tilde{\mathscr{D}}_0\mathscr{G}_0(t)]^* + \tilde{\mathscr{D}}_1\mathscr{G}_1 + [\tilde{\mathscr{D}}_1\mathscr{G}_1]^* + \cdots + \tilde{\mathscr{D}}_n\mathscr{G}_n(t) + [\tilde{\mathscr{D}}_n\mathscr{G}_n(t)]^*, \quad (1)$$

donde $\tilde{\mathscr{D}}_k$ representa a un coeficiente complejo, $\mathscr{G}_k$ a una función compleja y * simboliza el conjugado de la función compleja. Como nuestra función original es real, se suma el conjugado de la función compleja para que la parte imaginaria sea cero, aunque se obtenga dos veces la parte real.

Serie Finita de Fourier en su forma compleja

Un conjunto de funciones complejas que cumplen con la condición de ortogonalidad son las funciones exponenciales complejas definidas como

$$\mathscr{G}_k(t) = \exp^{\frac{i2\pi kt}{T}}, \quad (2)$$

donde T se es el *periodo*. El conjugado de la ec. (2) está dado por

$$\mathscr{G}_k^*(t) = \exp^{-\frac{i2\pi kt}{T}}. \quad (3)$$

*josue.tago@gmail.com

La condición de ortogonalidad es

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \exp^{\frac{i2\pi kt}{T}} \exp^{-\frac{i2\pi jt}{T}} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ T & \text{si } k = j. \end{cases} \tag{4}$$

Demostración. La demostración se hará para cada uno de los posibles casos

- Caso $k \neq j$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+T} \exp^{\frac{i2\pi kt}{T}} \exp^{-\frac{i2\pi jt}{T}} dt &= \int_{t_1}^{t_1+T} \exp^{\frac{i2\pi(k-j)t}{T}} dt \\ &\quad \text{haciendo } l = k-j \text{ y utilizando coordenadas polares} \\ &= \int_{t_1}^{t_1+T} \cos\left(\frac{2\pi lt}{T}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi lt}{T}\right) dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Trabajando con el primer término de la integral (5)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+T} \cos\left(\frac{2\pi lt}{T}\right) dt &= \left(\frac{T}{2\pi l}\right) \sin\left(\frac{2\pi lt}{T}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_1+T} \\ &= \left(\frac{T}{2\pi l}\right)\left(\sin\left(\frac{2\pi lt_1}{T} + 2\pi l\right) - \sin\left(\frac{2\pi lt_1}{T}\right)\right) \\ &\quad \text{Usando la identidad trigonométrica de } \sin(\theta_1+\theta_2) \\ &= \left(\frac{T}{2\pi l}\right)\left(\sin\left(\frac{2\pi lt_1}{T}\right)\cos(2\pi l) + \cos\left(\frac{2\pi lt_1}{T}\right)\sin(2\pi l) - \sin\left(\frac{2\pi lt_1}{T}\right)\right) \\ &= \left(\frac{T}{2\pi l}\right)\left(\sin\left(\frac{2\pi lt_1}{T}\right)[-1+\cos(2\pi l)] + \cos\left(\frac{2\pi lt_1}{T}\right)\sin(2\pi l)\right) \\ &\quad \text{Como } \cos(2\pi l) = 1 \text{ y } \sin(2\pi l) = 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Trabajando con el segundo término de la integral (5)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1+T} \sin\left(\frac{2\pi l}{T}t\right) dt &= \left(\frac{T}{2\pi l}\right)\left(-\cos\left(\frac{2\pi l}{T}t\right)\Bigg|_{t_1}^{t_1+T}\right) \\ &= \left(\frac{T}{2\pi l}\right)\left(-\cos\left(\frac{2\pi lt_1}{T} + 2\pi l\right) + \cos\left(\frac{2\pi lt_1}{T}\right)\right) \\ &\quad \text{Usando la identidad trigonométrica de } \cos(\theta_1+\theta_2) \\ &= \left(\frac{T}{2\pi l}\right)\left(-\left[\cos\left(\frac{2\pi lt_1}{T}\right)\cos(2\pi l) - \sin\left(\frac{2\pi lt_1}{T}\right)\text{sen}(2\pi l)\right] + \cos\left(\frac{2\pi lt_1}{T}\right)\right) \\ &= \left(\frac{T}{2\pi l}\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi lt_1}{T}\right)[1-\cos(2\pi l)] - \sin\left(\frac{2\pi lt_1}{T}\right)\sin(2\pi l)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Caso $k = j$

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_1+T} \exp^{\frac{i2\pi jt}{T}} \exp^{\frac{-i2\pi jt}{T}} dt &= \int_{t_1}^{t_1+T} dt \\ &= T.\end{aligned}$$

$\square$

Sustituyendo las funciones exponenciales complejas en $f_a(t)$ (1) se tiene

$$\begin{aligned}f_a(t) &= \tilde{\mathscr{D}}_0 \exp^{\frac{i2\pi 0t}{T}} + \tilde{\mathscr{D}}_0^* \exp^{-\frac{i2\pi 0t}{T}} + \tilde{\mathscr{D}}_1 \exp^{\frac{i2\pi 1t}{T}} + \tilde{\mathscr{D}}_1^* \exp^{-\frac{i2\pi 1t}{T}} + \cdots + \\ &\quad \tilde{\mathscr{D}}_n \exp^{\frac{i2\pi nt}{T}} + \tilde{\mathscr{D}}_n^* \exp^{-\frac{i2\pi nt}{T}} \\ &= [\tilde{\mathscr{D}}_0 + \tilde{\mathscr{D}}_0^*] + \tilde{\mathscr{D}}_1 \exp^{\frac{i2\pi t}{T}} + \tilde{\mathscr{D}}_1^* \exp^{-\frac{i2\pi t}{T}} + \cdots + \\ &\quad \tilde{\mathscr{D}}_n \exp^{\frac{i2\pi nt}{T}} + \tilde{\mathscr{D}}_n^* \exp^{-\frac{i2\pi nt}{T}} \\ &= 2\,\mathrm{Re}[\tilde{\mathscr{D}}_0] + \tilde{\mathscr{D}}_1 \exp^{\frac{i2\pi t}{T}} + \tilde{\mathscr{D}}_1^* \exp^{-\frac{i2\pi t}{T}} + \cdots + \\ &\quad \tilde{\mathscr{D}}_n \exp^{\frac{i2\pi nt}{T}} + \tilde{\mathscr{D}}_n^* \exp^{-\frac{i2\pi nt}{T}} . \end{aligned} \tag{6}$$

Si de manera conveniente hacemos que $\mathscr{D}_k = \tilde{\mathscr{D}}_k$, $\mathscr{D}_{-k} = \tilde{\mathscr{D}}_k^*$ y $\mathscr{D}_0 = 2\,\mathrm{Re}[\tilde{\mathscr{D}}_0]$, podemos cambiar los límites de la suma (6) de $-N$ a N como

$$f_a(t) = \sum_{k=-N}^{N} \mathscr{D}_k \exp^{\frac{i2\pi kt}{T}}, \tag{7}$$

la cual se conoce como **serie de Fourier**.
Para calcular sus coeficientes, $\mathscr{D}_k$, seguimos el método del error cuadrático medio mínimo (ECMM).
El error cuadrático medio está dado por

$$\begin{aligned}E^2(t) &= \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} (f(t) - f_a(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} \left(f(t) - \sum_{k=-N}^{N} \mathscr{D}_k \exp^{\frac{i2\pi kt}{T}}\right)^2 dt. \end{aligned} \tag{8}$$

Los coeficientes que minimizan al error cuadrático (8) cumple con

$$\frac{\partial E^2}{\partial \mathscr{D}_k} = 0 \qquad \forall k. \tag{9}$$

Considerando la derivada con respecto al j-ésimo coeficiente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E^2(t)}{\partial \mathscr{D}_j} &= \frac{\partial}{\partial \mathscr{D}_j}\left[\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}\left(f(t)-\sum_{k=-N}^{N}\mathscr{D}_k \exp^{\frac{i2\pi kt}{T}}\right)^2 dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} 2\left(f(t)-\sum_{k=-N}^{N}\mathscr{D}_k \exp^{\frac{i2\pi kt}{T}}\right)\left(-\exp^{\frac{i2\pi jt}{T}}\right) dt \\
&= \text{Utilizando la condición de ortogonalidad , sólo sobrevive el término } k=-j \\
&= \frac{2}{T}\left(\int_{t_1}^{t_1+T}\left(-f(t)\exp^{\frac{i2\pi jt}{T}}\right) dt + \mathscr{D}_{-j}T\right) \\
&\Rightarrow \mathscr{D}_{-j} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\exp^{\frac{i2\pi jt}{T}}\, dt, \qquad (10)
\end{aligned}$$

que podemos escribir como

$$\mathscr{D}_k = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\exp^{-\frac{i2\pi kt}{T}}\, dt, \qquad (11)$$

usando el cambio de variable $k=-j$.

Referencias

Anguiano-Rojas, R. A. (1996). Introducción al Análisis de Fourier. Facultad de Ingeniería, UNAM.