Grundfragen des Mathematikunterrichts

Wozu Mathematikunterricht?

David Kollosche & Jakob Kelz
Universität Klagenfurt
Sommersemester 2022

Einleitung

Wozu gibt es Mathematikunterricht überhaupt?

Wozu gibt es diese Frage überhaupt?

- bildungspolitische Legitimation von Mathematikunterricht (allgemein, in bestimmten Bereichen, in bestimmtem Umfang)
- Zielvorgaben der Bildungsverwaltung (Lehrpläne etc.)
- inhaltlich-methodische Ausrichtung von Unterricht (Welcher Inhalt? Was vom Inhalt? Und auf welche Weise?)
- individuelle Bedeutsamkeit von Mathematikunterricht
- Ausrichtung mathematikdidaktischer Forschung

Einleitung

Die Rekonstruktion der Schülervorstellungen deutet darauf hin, dass die überwiegende Anzahl der untersuchten Schüler grundsätzlich von der Nützlichkeit der Mathematik überzeugt ist, allerdings bleiben die Beschreibungen vielfach schlagwortartig und vage. […] Die Ergebnisse zeigen, dass die meisten der untersuchten Hauptschüler über alle Jahrgänge hinweg keinen Einblick in die Bedeutung von Mathematik für die Gesellschaft haben. Auch die Sichtweise, dass Mathematik helfen kann, die Umwelt kritisch wahrzunehmen, deutet sich allenfalls bei Einigen an. Selbst bezogen auf den unmittelbaren Nutzen im Alltag oder im Beruf konnten die Schüler nur sehr begrenzt Beispiele nennen.

Maaß, Katja, & Patrick Ege (2007) „Mathematik und Mathematikunterricht aus der Sicht von Hauptschülern“ in mathematica didactica 30(2). S. 73.

Einleitung

Antwortdimensionen zur Frage „Glaubst du, dass dein Mathematikunterricht für dein Leben wichtig ist oder sein wird?“ aus einer Interview-Befragung von 23 Schülern (Schulj. 9±1) aus 22 verschiedenen Schulen:

- Volksschulinhalte (z. B. Wechselgeld prüfen, Fahrplan lesen)
- Rechenverfahren (nicht Modellieren, Problemlösen etc.)
- Lernen von Inhalten (nicht Charakterbildung oder Reflexion)

Auf welcher Basis können Schüler weiterführender Schulen Mathematikunterricht als für sich bedeutsam erleben?

Kollosche, David (2017) “The ideology of relevance in school mathematics” in Anna Chronaki (Hrsg.) Mathematics education and life at times of crisis. University of Thessaly Press: Volos. Bd. 2, S. 633-644.

Einleitung

Wozu gibt es Mathematikunterricht überhaupt?

Bildungspolitik

Was *muss* MU leisten?

Bildungstheorie

Was *soll* MU leisten?
normative Perspektive

Bildungssoziologie

Was leistet MU *wirklich*?
deskriptive Perspektive

Einleitung

Wozu gibt es Mathematikunterricht überhaupt?

Bildungspolitik

Was *muss* MU leisten?

Vergänglich, nicht forschungsorientiert, aber rechtlich bindend für Lehrer

Wie ist das Ist zu rechtfertigen? Was sind Alternativen?

Bildungstheorie

Was *soll* MU leisten?
normative Perspektive

Bildungssoziologie

Was leistet MU *wirklich*?
deskriptive Perspektive

Werden die Ziele erreicht? Können sie erreicht werden?

Forschung

Gliederung

- Einleitung

Bildungstheorie des MU

- Antworten je nach Interesse
- Allgemeinbildung
    - Heinrich Winter
    - Hans-Werner Heymann
    - Roland Fischer

Bildungssoziologie des MU

- Funktionen von Mathematikunterricht

1 Why teach mathematics?

Paul Ernest
University of Exeter, United Kingdom

Why teach mathematics? What are the purposes, goals, justifications and reasons for teaching mathematics? How can current mathematical teaching plans and practices be justified? What might be the rationale for reformed, future or possible approaches for mathematics teaching? What should be the reason for teaching mathematics, if it is to be taught at all? These questions begin to indicate the scope of what Niss (1996) has termed the 'justification problem' for mathematics teaching.

Before discussing the aims of teaching mathematics, there are three theses that I wish to assert as having an important bearing on this discussion. These concern, first of all, the lack of uniqueness and multiplicity of school mathematics; second, the current overestimation of the utility of academic mathematics; third, the socially and societally embedded nature of the aims of teaching and learning of mathematics. Acknowledging these claims means that the discursive space to be occupied differs from that in many traditional discussions of the aims of mathematics education.

The multiplicity of school mathematics

First of all, I want to argue that school mathematics is neither uniquely defined nor value-free and culture-free. School mathematics is not the same as academic or research mathematics, but a recontextualized selection from the parent discipline, which itself is a multiplicity (Davis and Hersh, 1980). Some of the content of school mathematics has no place in interests and ideologies of some such groups are in conflict. Elsewhere, building on Raymond Williams's (1961) seminal analysis, I distinguish five interest groups in the history of educational and social thought in Britain and show that each has distinct aims for mathematics education and different views of the nature of mathematics (Ernest, 1991). These groups and their aims are summarized in Table 1, below.

Table 1 *Five interest groups and their aims for mathematics teaching*

Interest group	Social location	Mathematical aims
1 Industrial trainers	Radical 'New Right' conservative politicians and petty bourgeois	Acquiring basic mathematical skills and numeracy and social training in obedience (authoritarian, basic-skills-centred)
2 Technological pragmatists	Meritocratic industry-centred industrialists, managers, etc, New Labour	Learning basic skills and learning to solve practical problems with mathematics and information technology (industry- and work-centred)
3 Old humanist	Conservative mathematicians preserving rigour of proof and purity of mathematics	Understanding and capability in advanced mathematics, with some appreciation of mathematics (pure-mathematics-centred)
4 Progressive educators	Professionals, liberal educators, Welfare State supporters	Gaining confidence, creativity and self-expression through mathematics (child-centred progressivist)
5 Public educators	Democratic socialists and radical reformers concerned with social justice and inequality	Empowerment of learners as critical and mathematically literate citizens in society (empowerment and social justice concerns)

These different social groups have been engaged in a contest over the National Curriculum in mathematics, since the late 1980s (Brown, 1996).

Allgemeinbildung

Bildung kann vieles bedeuten, u. a.:

- Selbstbildung (als klassisch-elitäres Projekt, Universalität vs. Spezialisierung)
- Charakterbildung (Erziehung, Züchtigung)
- Allgemeinbildung (als die Bildung, die jeder Bürger zur Bewältigung seines Lebensalltags und zur demokratischen Teilhabe benötigt)
- Qualifikation (allgemeine *literacy*, Berufsvorbereitung, vgl. zum Mathematikunterricht etwa Meraner Reform 1921, auch verkürzt auf „Kompetenzorientierung“)
- kritische Bildung (als Projekt des gesellschaftlich-politischen Wandels oder als Form des Protests)

Heinrich Winter

Heinrich Winter: Allgemeine Lernziele (1975)

Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben,

- schöpferisch tätig zu sein,
- rationale Argumentation zu üben,
- die praktische Nutzbarkeit von Mathematik zu erfahren,
- formale Fertigkeiten zu erwerben.

Winter ordnet seine Argumentation nicht in einen wissenschaftlichen Diskurs ein, sondern schreibt ‚essayistisch'. Dennoch (oder gerade deshalb) trifft er immer wieder den Nerv der Community.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 7*(3), 106–116.

Heinrich Winter

Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Winter, Heinrich (1995) „Mathematikunterricht und Allgemeinbildung“ in *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (61). S. 37.

Heinrich Winter

Fragen an Inhalte aus dieser Sichtweise:

1. Welche „Erscheinungen aus der Welt um uns“ hilft der Inhalt erschließen? Wie kann mit dem Inhalt sichtbar gemacht werden, welches Wahrnehmen und Verstehen Mathematik ermöglicht?
2. Wie lässt sich am Inhalt die Mathematik „als geistige Schöpfung, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art“ erfahren?
3. Welche (über den Inhalt hinausgehende) Problemlösefähigkeiten lassen sich am Inhalt entwickelt? Welche Probleme sind für den Inhalt typisch, vlt. sogar konstitutiv?

Hans Werner Heymann

7 Ziele von allgemeinbildendem Unterricht:

1. Lebensvorbereitung
2. Stiftung kultureller Kohärenz
3. Weltorientierung
4. Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch
5. Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft
6. Einübung in Verständigung und Kooperation
7. Stärkung des Schüler-Ichs

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Beltz.

Hans Werner Heymann

1. Lebensvorbereitung (im engeren Sinn)

Arithmetischer Bereich: Anzahlbestimmungen; Beherrschung der Grundrechenarten; Rechnen mit Größen, Kenntnis der wichtigsten Maßeinheiten, Durchführung einfacher Messungen (vor allem Zeit und Längen); Rechnen mit Brüchen mit einfachen Nennern in anschaulichen Kontexten; Rechnen mit Dezimalbrüchen; Ausrechnen von Mittelwerten; Prozentrechnung; Zinsrechnung; Schlußrechnung („Dreisatz"); Durchführung arithmetischer Operationen mit einem Taschenrechner; Grundfertigkeiten im Abschätzen und Überschlagen.

Geometrischer Bereich: Kenntnis elementarer regelmäßiger Figuren und Körper sowie elementarer geometrischer Beziehungen und Eigenschaften (Rechtwinkligkeit, Parallelität etc.); Fähigkeit zur Deutung und Anfertigung einfacher graphischer Darstellungen von Größen und Größenverhältnissen (Schaubilder, Diagramme, Karten) sowie von Zusammenhängen zwischen Größen mittels kartesischer Koordinatensysteme.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Beltz.

Professor: Zuviel Mathe ist Quatsch

Zuviel Mathe-Unterricht ist Quatsch - das sagt ausgerechnet ein Mathematik - Professor.
Hans Werner Heymann (Uni Bielefeld) forschte und fand heraus: Was Erwachsene an Mathematik brauchen, lernen sie in den ersten 7 Schuljahren.

Alles, was den Schülern darüber hinaus vermittelt wird, spielt, so Professor Heymann, im späteren Leben praktisch keine Rolle mehr.

Logarithmus, Sinus und Cosinus - seit Jahren Stoff unzähliger Familiendramen - sind, so der Professor, fürs spätere Leben völlig unnütz.

Hans Werner Heymann

2. Stiftung kultureller Kohärenz

Mathematik verbindet uns sowohl hier und jetzt als auch mit unseren Vorfahren.

„Zentrale Ideen“ (vgl. fundamentale Ideen) als Kulturgut:

- Idee der Zahl
- Idee des Messens
- Idee des räumlichen Strukturierens
- Idee des funktionalen Zusammenhangs
- Idee des Algorithmus
- Idee des mathematischen Modellierens

Hans Werner Heymann

7 Ziele von allgemeinbildendem Unterricht:

1. Lebensvorbereitung
2. Stiftung kultureller Kohärenz
3. Weltorientierung
4. Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch
5. Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft
6. Einübung in Verständigung und Kooperation
7. Stärkung des Schüler-Ichs

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Beltz.

Hans Werner Heymann

„Heymann in Action“ bzw. Bildungswert illustriert an drei Beispielen:

- Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Sätze am Kreis (Satz des Thales, Peripheriewinkelsatz, Zentri-Peripheriewinkelsatz, Satz vom Sehnenviereck)
- Einführung der Differentiation

Hans Werner Heymann

Einf. in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ich argumentiere: (1) Die Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist lebensvorbereitend, denn im Alltag begegnet man häufig Wahrscheinlichkeiten (z. B. Risiko bei einer OP) und braucht dazu Grundvorstellungen. (2) In der Tat ist der Begriff der Wahrscheinlichkeit ein Teil unserer Kultur („eher unwahrscheinlich"), der an die nächste Generation weitergegeben werden sollte und Kommunikation unterstützt. (3) Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann uns dabei helfen, uns in der Welt zu orientieren, da wir Situationen stochastisch betrachten können (Welche Chance hat man?). (4) Außerdem kann Mathematik hier als „Verstärker des Alltagsdenkens" dienen, beispielsweise beim Hinterfragen von Glücksspielen.

Hans Werner Heymann

Sätze am Kreis

(1) Lebensvorbereitend sind die Sätze nicht – wo braucht man den Satz es Thales schon im Alltag? (2) Man könnte sich darüber streiten, ob der Satz des Thales zu unserem Kulturgut gehört – vermutlich haben einige Erwachsene Assoziationen dazu. Schon eher zu unserem Kulturgut gehört jedoch das deduktive Schließen, welches man einmal erfahren haben sollte und bei den Sätzen am Kreis gut machbar ist. (3) Ich kann mir keine Situationen vorstellen, bei denen die Sätze am Kreis helfen, sich in der Welt zu orientieren. (4) Insofern man an Hand der Sätze am Kreis schlussfolgern lernt, bekommt man einen „Verstärker des Alltagsdenkens“ in die Hand.

Also: Nur unterrichten mit Fokus auf Beweise!

Hans Werner Heymann

Differenzialrechnung

(1) Lebensvorbereitend ist das nicht. (2) Gleichwohl ist die Entdeckung der Analysis ein unvergleichliches Kulturgut, welches die Mathematik grundlegend verändert hat und in der technischen Anwendung zentral ist. Ein Maturant sollte davon wissen. (3) Phänomene unserer Welt mit Hilfe der Differenzialrechnung zu modellieren ist anspruchsvoll, aber möglich. Schüler sollten beispielsweise erfahren, dass Größen und ihre „Änderungsraten“ in mathematisch beschreibbaren Verhältnissen stehen. (4) Lernt man an der Differenzialrechnung kritisch denken? Je nach Unterricht...

Also: Die Differenzialrechnung soll primär als kultureller Durchbruch erlebbar werden!

Hans Werner Heymann

Fragen an Inhalte aus dieser Sichtweise:

1. Beinhaltet der Inhalte Aspekte, die jeder für den Alltag braucht?
2. Beinhaltet der Inhalt Aspekte, die kulturell von großer Wichtigkeit sind?
3. Inwiefern hilft der Inhalt dabei, sich in der Welt zu orientieren?
4. Wo ermöglicht der Inhalt es, Mathematik als „Verstärker des Alltagsdenkens“ zu erleben und zum kritischen Verkunftgebrauch anzuleiten?
5. Wie muss ich unterrichten, um das Schüler-Ich zu stärken, Verantwortungsbereitschaft und Kooperation zu fördern?

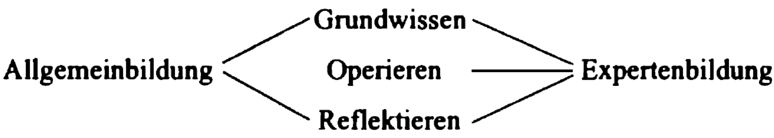
Roland Fischer

Höhere Allgemeinbildung

Idee: Die Pflichtschule dient der unmittelbaren Lebensvorbereitung; die weiterführenden Schulen sollen *reflektiert urteils- und entscheidungsfähige Laien* bilden:

- arbeitsteilige Spezialisierung führt heute notwendig zu asymmetrischer Verteilung von Information und Verantwortung und zu Situationen der Experten-Laien-Kommunikation
- Mündigkeit ≠ überall Experte sein!
- (1) als Laie kritisch mit Experten umgehen
- (2) als Experte alles verständlich darlegen

Roland Fischer



Allgemeinbildung für alle, Expertenbildung nur für Experten!

Grundwissen: „Konzepte, Begriffe, Darstellungsformen“

Operieren: Rechnen, Problemlösen, Forschen

Reflexion: Bedeutung, Potential, Grenzen

Kein Operieren mehr im MU? Doch, aber nur so weit wie nötig für das Grundwissen und zum Reflektieren!

Fischer, Roland (2001) „Höhere Allgemeinbildung“ in Aulke et al. (Hrsg.) *Situation – Ursprung der Bildung.* Norderstedt: Fischer.

Kompetenzbereich	Beispiel „arithmetisches Mittel“
Grundwissen	• Den Begriff (Definition) des arithmetischen Mittels als Modellierung von „Durchschnitt“ kennen. • Wichtige Eigenschaften (wie metrische Daten, Ausreißerempfindlichkeit u. Ä.) und Anwendungsgebiete des arithmetischen Mittels kennen.
Operatives Wissen und Können	• Das arithmetische Mittel aus einer Liste von Daten (auch Häufigkeitstabellen) berechnen können.
Reflexion (-swissen)	• Nachdenken darüber, warum man eine ganze Liste von Daten durch eine Kennzahl (z. B. arithmetisches Mittel) repräsentieren will. • Nachdenken darüber, ob das arithmetische Mittel ein geeignetes Durchschnittsmaß für die Körpergröße von Schülerinnen und Schülern sein kann. • Wissen, warum das arithmetische Mittel zur Mittelung von Noten kaum geeignet ist.

Peschek, Prediger & Schneider (2008) „Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht“ in *Praxis der Mathematik in der Schule 50*(20). S. 3

Roland Fischer

Fragen an Inhalte aus dieser Sichtweise:

1. Grundwissen: In welchen Situationen wird auf den Inhalt zurückgegriffen? Welche Begriffe, Sachverhalte und Darstellungen sind dabei wichtig?
2. Operatives Wissen und Können: Welche Verfahren, Argumentationen und Anwendungen sind wichtig als Basis für das Grundwissen und für die Reflexion?
3. Reflexionswissen: Welche Möglichkeiten bietet der Inhalt? Welche Grenzen hat er? Wo wäre Missbrauch möglich?

Bildungssoziologie des MU

Was leitet Mathematikunterricht wirklich?

Gesellschaftliche Funktionen des MU:

1. Qualifikation
2. Integration
3. Legitimation
4. Einstufung
5. Beaufsichtigung
6. Projektion

Kollosche, David (2018) “Social functions of mathematics education” in *Educational Studies in Mathematics 98*(3).

Bildungssoziologie des MU

1. Qualifikation = Vorbereitung auf Bewältigung von typischen, realistischen, benennbaren Anforderungssituationen

- vermutlich überbewertet (Biesta 2009: „learnification“)
- Nicht-Elementares wird bald vergessen (BIS, Schlöglmann)
- Dialektik von „Mathematik ist überall“: Immer mehr Anwendungen und Spezialisierte, immer weniger nötig für Alltag
- Wo lernt man das, was man braucht? Lave (1988, *Cognition in practice*): Man lernt es in der Praxis und man überträgt es nicht! (vs. ‚Transferhypothese‘)
- Soft Skills (Argumentieren, Problemlösen) als Qualifikation?

Bildungssoziologie des MU

2. Integration = Personell-charakterbildende Einbettung in gesellschaftsdienliche Umgangs- und Arbeitsformen

- Neander (1974): Ziele des MU ändern sich mit Ansprüchen an die Arbeitswelt: Konzentration, Durchhaltevermögen, Sorgsamkeit, Fleiß für Manufakturarbeit; Eigenverantwortung, Selbständigkeit dank Mechanisierung; hinzuzufügen: Teamarbeit, Problemlösen, etc. in der Wissensgesellschaft
- Regelbefolgen im Rechenunterricht als anerzogene Umgangsform für die Bürokratie (Skovsmose 2005)
- logisches Denken und logisch strukturiertes Wissen als anerzogene Umgangsform (Kollosche 2014)

Bildungssoziologie des MU

3. Legitimation = Glaube an die Rechtmäßigkeit gesellschaftlicher Institutionen und Praktiken

- Mythos: Mathematik ist unfehlbar, neutral, universell und überall anwendbar.
- Mathematik als wahrnehmungslenkend in den Naturwissenschaften (z. B. Fallgesetz von Galilei), der Wissenschaft (z. B. empirische Bildungsforschung) … (Porter 1996)
- Mathematik als „formatting power“: Rente, Organspende, Partnersuche, Bewertungs-Ratings …

Bildungssoziologie des MU

4. Einstufung (auch Selektion) = Auswahl von Personen für gesellschaftliche Positionen und Rechte

- Weber (1921): Schule hat Aufgabe die Geeignetsten für Positionen auszuwählen (Meritokratie)
- Mathematiknote bei Einstellungsverfahren entscheidend (nachgewiesen für die Schweiz: Moser 2004; Imdorf 2005)
- Offen: Was sagt die Mathematiknote überhaupt aus?
- Bevorteilung von ‚weißen Mittelklasse-Jungs' unabhängig von intellektuellem Potential (viele Studien dazu)
- Negative Einstufung kann psychologisch auch entmündigen: „Ich bin schlecht in Mathe und überlasse das anderen."

Bildungssoziologie des MU

5. Beaufsichtigung = Beherbergen und Beschäftigen Heranwachender

- historisch gesehen typischer Grund für die Einrichtung von Schulen, insb. sogenannter Fabrikschulen
- frühe Diskurse zwischen Mathematiklehrern zu Methoden wie ‚stilles Rechnen', um viele Kinder ruhig und beschäftigt zu halten (Nachweis aus Schweden: Lundin 2012)
- Wie viel von dem, was wir heute im Mathematikunterricht machen, machen wir, damit die Kinder beschäftigt sind?

Bildungssoziologie des MU

6. Projektion = Übertragen von gesellschaftlichen Hoffnungen auf den Matheunterricht

- Hervorbringen einer rationaler denkenden und handelnden Gesellschaft (Lundin & Christensen 2017)
- wissenschaftliches Wettrüsten im Kalten Krieg (nach dem Sputnik-Schock, neue Mathematik, Mengenlehre in der Volksschule)
- heute: wirtschaftliches Wettrüsten im Wettkampf der Nationen (z. B. bei PISA)