Trajektorienplanung als dynamisches Optimalsteuerungsproblem und Interpretation des Lösungsraums für Fahrkomfort im automatisierten Fahren

Studiengang Elektrotechnik und Informationstechnik
Masterarbeit von Markus Amann

Tag der Einreichung: 4. Juli 2022

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski
Betreuer: Alexander Steinke
Darmstadt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

REGELUNGSTECHNIK UND MECHATRONIK rtm

Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik

Trajektorienplanung als dynamisches Optimalsteuerungsproblem und Interpretation des Lösungsraums für Fahrkomfort im automatisierten Fahren
Studiengang Elektrotechnik und Informationstechnik

Masterarbeit von Markus Amann

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski
Betreuer: Alexander Steinke

Tag der Einreichung: 4. Juli 2022

Darmstadt

Technische Universität Darmstadt
Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik
Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik
Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski

Aufgabenstellung

Die allgemeine Struktur eines Optimalsteuerungsproblems lautet

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{u}(t)} \quad & J(\boldsymbol{u}) = V(\boldsymbol{x}(t_\mathrm{f}), t_\mathrm{f}) + \int_{t_0}^{t_\mathrm{f}} l(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\mathrm{d}t \\ \text{u.B.v.} \quad & \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t),\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ & \mathbf{g}(\boldsymbol{x}(t_\mathrm{f}), t_\mathrm{f}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \leq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Häufig werden dynamische Optimierungsprobleme (OP) mithilfe direkter Verfahren numerisch gelöst. In diesem Fall wird das dynamische in ein statisches OP überführt und der endliche Lösungsvektor $\boldsymbol{u}^*(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ berechnet. Direkte Verfahren haben den Vorteil, dass Zustandsbeschränkungen leichter berücksichtigt werden können und der Konvergenzbereich größer ist. Indirekte Verfahren hingegen liefern eine Einsicht in die Struktur der optimalen Lösung.

In der dynamischen Optimierung hingegen werden Funktionen $\boldsymbol{u}(t)$ einer unabhängigen Variable t gesucht. Mithilfe der Variationsrechnung können Optimalitätsbedingungen hergeleitet werden, die ein Randwertproblem formulieren. Die Lösung dieses Randwertproblems liefert in der Folge die optimale Steuertrajektorie $\boldsymbol{u}^*(t)$. Jedoch ist das Lösen des Randwertproblems für nichtlineare Systeme häufig schwierig, weswegen auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden muss.

Um im automatisierten Fahren (AD) gezielt Fahrprofile mittels einer optimalen Trajektorienplanung erstellen zu können, ist ein tieferes Verständnis der optimalen Lösung erforderlich. Mit einem direkten Verfahren ist die Interpretation der Lösung schwierig, da die Lösung aus reinen Zahlenwerten besteht. Zwar könnte ein gewünschtes Fahrverhalten in definierten Fahraufgaben durch zusätzliche Terme im Gütemaß und Anpassung der Gewichte erzielt werden, jedoch ist eine Übertragung auf andere Fahraufgaben fraglich. Eine parametrierte Steuertrajektorie $\boldsymbol{u}^*(t)$ würde die Interpretation erheblich vereinfachen.

Ziele dieser Arbeit sind folgende Punkte:

1. Übersicht für Lösungsverfahren dynamischer OPs und Einordnung des AD-Planungsproblems
2. Erstellen von dynamischen OPs, die durch Variationsrechnung lösbar sind und Lösen dieser
   a) Geeignete Fahrszenarien (z.B. Geradeausfahrt, Kurve, Geraden-Kurven-Kombination, Spurwechsel)
   b) Geeignete Komfortmerkmale (z.B. Beschleunigung, Ruck, Fahrdauer)
   c) Berücksichtigung von Begrenzungen
3. Interpretation der Lösungenstrajektorien hinsichtlich des dargestellten Funktionenraums
4. Einordnung im Kontext Fahrkomfort

Die Ergebnisse sind geeignet zu visualisieren und zu dokumentieren. Die aktuelle Fassung der Richtlinien zur Anfertigung von Abschlussarbeiten ist zu beachten.

Beginn:	03. Januar 2022
Ende:	04. Juli 2022
Seminar:	——

Erklärung zur Abschlussarbeit gemäß §22 Abs. 7 und §23 Abs. 7 APB der TU Darmstadt

Hiermit versichere ich, Markus Amann, die vorliegende Masterarbeit ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Mir ist bekannt, dass im Fall eines Plagiats (§38 Abs. 2 APB) ein Täuschungsversuch vorliegt, der dazu führt, dass die Arbeit mit 5,0 bewertet und damit ein Prüfungsversuch verbraucht wird. Abschlussarbeiten dürfen nur einmal wiederholt werden.

Bei der abgegebenen Thesis stimmen die schriftliche und die zur Archivierung eingereichte elektronische Fassung gemäß §23 Abs. 7 APB überein.

Bei einer Thesis des Fachbereichs Architektur entspricht die eingereichte elektronische Fassung dem vorgestellten Modell und den vorgelegten Plänen.

Darmstadt, 4. Juli 2022

Markus Amann

Kurzfassung

Zusammenfassung entsprechend der Dokumentensprache. In diesem Fall Deutsch.

Abstract

Additional abstract in English.

Acronyms

ACC Adaptive Cruise Control. 5

AD Automatisiertes Fahren. 2, 4, 22, 28, 29

DGL Differentialgleichung. 13, 16–18, 22–29

FAS Fahrassistenzsysteme. 5, 7

FSRA Full Speed Range Adaptive Cruise Control. 5, 7, 11

GNB Gleichungsnebenbedingung. 13, 14, 21, 27, 29, 30

LKS Lane Keeping Support. 7, 11

OP Optimierungsproblem. 13, 14, 16–19, 21, 22, 27

RKV Runge-Kutter-Verfahren. 23, 26, 29

UNB Ungleichungsnebenbedingung. 13, 14, 27

MPR Mehr-Punkte-Randwertproblem. 27, 29, 30

ZPR Zwei-Punkte-Randwertproblem. 17, 18, 23, 24, 26, 29, 30

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

- kurze erklärung was fahrfremde Tätigkeit bedeutet und welche relevanz das für autonomes Fahren hat. - kurz ein paar Worte zu Kinetose und Hinweis darauf, dass es später noch genauer erklärt wird - Hinweis, dass Stellgröße, Eingangsgröße und Steuergröße synonym verwendet werden

2 Fahrkomfort und Einordnung in den Kontext Automatisiertes Fahren

In diesem Kapitel soll der Begriff “Fahrkomfort” in den Kontext Automatisiertes Fahren (AD) eingeordnet werden. Dazu wird zunächst die Bedeutung des Begriffs genauer betrachtet und die Verbindung zwischen Fahrkomfort und Sicherheitsempfinden dargelegt. Anschließend werden verschiedene Einflussfaktoren auf die Komfortwahrnehmung während des Fahrens thematisiert. Dabei wird das Phänomen der Kinetose genauer erklärt und speziell auf dessen Bedeutsamkeit für die Entwicklung automatisierter Fahrzeuge eingegangen. Abschließend werden mithilfe von Literaturwerten Grenzwerte für die als relevant erachteten Einflüsse untersucht.

2.1 Fahrkomfort im Kontext Automatisiertes Fahren

Mit zunehmender Automatisierung von Fahraufgaben rückt auch der Fahrkomfort immer mehr in den Fokus. Es ist nicht davon auszugehen, dass hochautomatisierte oder autonome Fahrzeuge, deren Fahrweise von Fahrer_innen als unkomfortabel empfunden wird, eine hohe Akzeptanz finden werden. Damit sich überhaupt ein komfortables Gefühl während einer automatisierten Fahrt einstellen kann, muss bei den fahrzeugführenden Personen ein Gefühl von Sicherheit herrschen [1]. Nicht nur für unbeteiligte Dritte wie Fußgänger_innen oder andere Autofahrer_innen, sondern vor allem auch für die fahrende Person selbst spielt die Sicherheit bei automatisierten Fahrzeugen daher eine zentrale Rolle. In [1] wird dabei der Unterschied zwischen subjektiver und objektiver Sicherheit dargelegt. Während das subjektive Sicherheitsempfinden lediglich wiedergibt, wie der Fahrer oder die Fahrerin die Fahrt oder einzelne Situationen empfindet, lässt sich die objektive Sicherheit mithilfe von Größen wie reduzierten Unfallzahlen quantifizieren. Allerdings kann das subjektive Sicherheitsempfinden durchaus von der objektiven Sicherheit abweichen. Insbesondere bei FAS, die nach der SAE-Klassifizierung [2] Stufe 3 oder höher zugeordnet werden, und bei denen damit das Fahrzeug nicht nur die Längs- und Querführung, sondern zusätzlich auch die Umfeldüberwachung übernimmt, kommt der in [3] als “*loss of controllability*” eingeführte Paradigmenwechsel von Fahrer_in zu Passagier_in zum Tragen. Dadurch, dass Fahrzeugführende mehr und mehr die Fahrzeugführung und Überwachung aller Funktionen an das Fahrzeug abgeben, stellt sich möglicherweise ein Gefühl von Kontrollverlust ein, weshalb nicht nur die objektive Sicherheit neuartiger Systeme eine große Rolle bei der Bewertung der Systeme spielt, sondern auch das subjektive Sicherheitsempfinden, welches eng an den wahrgenommenen Komfort geknüpft ist. Mit Umfeldüberwachung ist im Sinne der SAE-Klassifizierung die Detektion, Erkennung und Klassifizierung von Objekten im Straßenverkehr sowie Fahrsituationen und die Vorbereitung einer angemessenen Reaktion auf diese gemeint [2]. Bis einschließliche Level 2 liegt diese Aufgabe bei der fahrzeugführenden Person, während das Fahrzeug nur die eigentliche Quer- und Längsführung ausführt. Ab Level 3 fällt auch diese Aufgabe in den Bereich des Fahrzeugs, sodass das Fahrzeug die dynamische Fahraufgabe vollständig selbst ausüben kann und die fahrzeugführende Person nur noch als Rückfallebene dient und die Fahrzeugführung in Not- oder Fehlersituationen nach Aufforderung durch das System sicher übernehmen kann [2].

Neben dem Sicherheitsempfinden gibt es weitere wichtige Faktoren, die den Fahrkomfort beeinflussen. Großen Einfluss auf das Komfortempfinden hat dabei der Fahrstil. In verschiedenen Studien wurden unterschiedliche Fahrstile identifiziert und in verschiedene Klassen unterteilt [4]–[6]. So variiert zwar die Anzahl und genaue Bezeichnung der einzelnen Klassen zwischen den verschiedenen Studien, jedoch erstreckt sich das Spektrum immer von "langsam" oder "komfortorientiert" bis hin zu "dynamisch/sportlich" oder sogar "aggressiv". In [7] konnte gezeigt werden, dass der Wunsch nach höherem Komfort mit dem Grad der Automatisierung steigt. Ein Grund für diesen Zusammenhang ist unter anderem, dass das Bedürfnis nach Feedback durch die Straße über das Fahrzeug an die fahrende Person mit zunehmender Automatisierung geringer wird. Daher liegt für automatisierte Fahrzeuge im Alltagsgebrauch ein komfortorientierter Fahrstil nahe.

Um beurteilen zu können, ob ein Fahrstil als komfortabel oder unkomfortabel wahrgenommen wird, muss zunächst geklärt werden, welche Merkmale dabei besonders großen Einfluss auf das Komfortempfinden haben. In [8] wurden in einer Fahrsimulatorstudie die Merkmale Sicherheitsabstand zum Vorderfahrzeug, das Bremsverhalten, die Fahrzeuggeschwindigkeit sowie -beschleunigung, das Spurhalten, Lenken und die Blinkernutzung als die am häufigsten genannten Komfortkriterien identifiziert, wobei die drei ersten Merkmale von über der Hälfte der Teilnehmenden als relevant erachtet wurden. Neben den hier identifizierten Komfortmerkmalen lässt sich auch die Reisezeit als weiteres Kriterium angeben. Bereits in [9] wurde dargelegt, dass Passagier_innen, die einer längeren Reisezeit ausgesetzt sind, ein höheres Maß an Komfort benötigen, als bei einer kürzeren Reisezeit. Jeder Passagier und jede Passagierin geht daher einen subjektiven Kompromiss zwischen der erwarteten Reisezeit und dem akzeptierten Niveau an Diskomfort ein. Aufgrund dessen hängen die von der fahrenden Person als komfortabel empfundenen biomechanischen Werte (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Ruck) auch von der Reisezeit ab [1].

Eine besondere Gewichtigkeit bei der Trajektorienplanung bezüglich des Fahrkomforts kommt dem Beschleunigungsverhalten zu. In [5] konnte in zwei Studien für verschiedene Fahrmanöver nachgewiesen werden, dass sich Merkmale wie Längs- und Querbeschleunigung sowie der Fahrzeugruck gut dazu eignen, einen komfortablen Fahrstil von anderen Fahrstilen abzugrenzen. Laut [3] ist der häufigste Ansatz zur Optimierung der Fahrzeugbewegungen, die auf die Fahrzeuginsassen wirkenden Kräfte und Rucke zu minimieren. Dass bei der Betrachtung des Beschleunigungsverhaltens jedoch nicht nur die absoluten Werte der Beschleunigung relevant sind, zeigen die Untersuchungen in [10]. Hier konnte festgestellt werden, dass der Mensch bei lateralen Bewegungen insbesondere gegenüber Änderungen der Beschleunigung sehr sensitiv reagiert und diese besonders gut wahrnimmt. In [11] konnte ein Algorithmus entwickelt werden, der komfortable Fahrstrategien liefert, wobei als zusätzliches Komfortmerkmal der Ruck verwendet wurde. Dieser sollte dazu im Sinne des Fahrkomforts so gering wie möglich sein.

2.1.1 Kinetose und ihre Bedeutung für das Autonome Fahren

Kinetose, oftmals auch als Reise- oder Bewegungskrankheit bezeichnet (*engl.* Motion Sickness), beschreibt das Phänomen, dass man sich bei Reisen - vor allem im Auto, Flugzeug oder auf einem Schiff - plötzlich unwohl fühlt. Die Symptome reichen dabei von Blässe und leichter Übelkeit, über Schwindel und Kopfschmerzen, bis hin zum Erbrechen [12]. Es existieren mehrere Theorien für die genauen

Ursachen von Kinetose [12]. Eine anerkannte und weit verbreitete Theorie liegt dabei in einem visuell-vestibulären Sensorkonflikt [13]–[15]. Dadurch, dass Sensorinformationen über Beschleunigungen, die über das Gleichgewichtsorgan aufgenommen werden, nicht zu den Informationen passen, die über den visuellen Informationskanal geliefert werden, können die zuvor genannten Symptome auftreten. Dabei können prinzipiell alle Menschen mit einem funktionsfähigen Vestibularapparat gleichermaßen von Kinetose betroffen sein [16]. Darüber hinaus hängt die Schwere der Kinetoseausprägung von der Frequenz ab, mit der die Beschleunigungen und Rucke auf den menschlichen Körper einwirken [17]. Vor allem niederfrequente Schwingungen im Bereich zwischen $0{,}1\,\mathrm{Hz}$ und $0{,}5\,\mathrm{Hz}$ begünstigen das Auftreten von Kinetose und sollten Vermieden werden [17], [18]. Da der Fokus dieser Arbeit hinsichtlich der Interpretation von optimalen Trajektorien in Bezug auf den Fahrkomfort allerdings nicht auf der Frequenzanalyse der Trajektorien liegt, soll der Einfluss unterschiedlicher Frequenzen nicht weiter diskutiert werden und sei an dieser Stelle lediglich der Vollständigkeit halber erwähnt.

Neben dem Einfluss des Sensorkonflikts auf die Ausprägung von Kinetose, konnte in [19] außerdem gezeigt werden, dass starke, periodische Längsbeschleunigungen, die vor allem beim Bremsen auftreten, ebenfalls das Auftreten der Reisekrankheit begünstigen.

Ein bekanntes Nebenphänomen der Reisekrankheit ist, dass sie überwiegend bei Beifahrer_innen bzw. Passagier_innen, die das Fahrzeug nicht selbst führen, auftreten [13]. In [20] und [21] wurden mehrere Gründe für dieses Phänomen gefunden. Zum einen hat die fahrzeugführende Person, die Kontrolle über die Fahrzeugbewegungen und damit auch die Richtung, in die sich die Fahrzeuginsassen bewegen. Dies ist bei den Beifahrer_innen nicht der Fall und die fehlende Kontrolle führt zu einer größeren Anfälligkeit für die Reisekrankheit. Außerdem kann fahrzeugführende Person durch die ihr gegebene Kontrolle über das Fahrzeug Bewegungen besser antizipieren. In [20] wird außerdem der bereits erwähnte visuell-vestibuläre Sensorkonflikt als Grund angeführt, da Beifahrer_innen die Möglichkeit haben sich fahrfremden Tätigkeiten zu widmen, wodurch der Sensorkonflikt verstärkt wird. Bei einer Umfrage zum Thema fahrfremder Tätigkeiten während der Fahrt mit einem vollständig selbst fahrenden Auto in [20] gab ein Großteil der über 3000 Befragten an, dass sie während der Fahrt andere Tätigkeiten als das Beobachten der Straße ausüben würden. Zudem wurde nach der Häufigkeit und Schwere von Kinetose bei Fahrten mit gewöhnlichen Fahrzeugen gefragt. Mithilfe dieser Angaben wurde eine Abschätzung für das Kinetoserisiko bei Fahrten mit selbst fahrenden Fahrzeugen vorgenommen. Die Autoren kommen zu dem Ergebnis, dass zwischen 4 und 14 Prozent der Erwachsenen (unter Berücksichtigung der Angaben in verschiedenen Ländern) in vollständig selbst fahrenden Autos wahrscheinlich oft bis immer ein gewisses Maß an Kinetose verspüren werden. Die Ausprägung moderater bis schwerer Kinetosesymptome tritt nach der Einschätzung der Autoren bei zwischen 4 und 17 Prozent der Personen auf. Diese Studie verdeutlicht die besondere Bedeutung, die der Reisekrankheit bei der Entwicklung automatisierter Fahrzeuge zukommt.

Kinetose besitzt aus zwei Gründen eine ausdrückliche Relevanz für die Komfortwahrnehmung beim AD. Neben dem Einfluss von Beschleunigungen und Rucken, den diese bereits bei manueller, selbst gesteuerter Fahrt auf das Komfortempfinden haben, kommt nun noch dazu, dass auch das Risiko an Kinetose zu erkranken, maßgeblich vom Beschleunigungsverhalten abhängt. Des Weiteren tritt die Reisekrankheit überwiegend bei Beifahrer_innen bzw. Passagier_innen auf, wodurch bei der Fahrt mit einem automatisierten Fahrzeug erhöhtes Kinetoserisiko besteht, wenn sich die fahrzeugführende Person nun anstelle der Fahraufgabe auf fahrfremde Tätigkeiten wie Zeitunglesen oder die Arbeit am Laptop oder Smartphone konzentrieren kann und dadurch immer mehr selbst zum Beifahrer bzw. zur Beifahrerin wird. Dementsprechend besteht die Gefahr, dass Kinetose beim AD vermehrt auftreten könnte, wodurch der Komfort drastisch reduziert wird. Es ist daher plausibel, dass den Ursachen von

Kinetose bei der Entwicklung automatisierter Fahrzeuge und der Planung der Fahrzeugbewegung durch entsprechende Maßnahmen entgegengewirkt werden sollte.

Nachdem der Einfluss unterschiedlicher Faktoren auf den Fahrkomfort - insbesondere unter Berücksichtigung von Kinetose - analysiert wurde, lässt sich feststellen, dass im Beschleunigungsverhalten des Fahrzeugs - sowohl in longitudinaler als auch in lateraler Richtung - die wichtigsten Merkmale für die Komfortbetrachtung bei der Trajektorienplanung enthalten sind. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit neben der Reisezeit ausschließlich die Kriterien Längs- und Querbeschleunigung sowie Längs- und Querruck in verschiedenen Kombinationen als Gütekriterien und zur Beurteilung des Fahrkomforts verwendet.

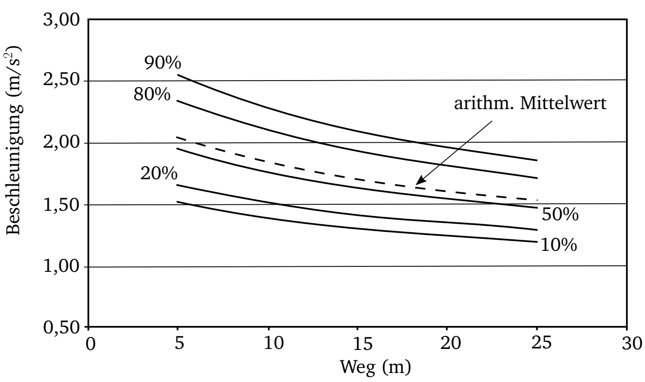
2.2 Komfortgrenzen für Fahrzeugbeschleunigung und -ruck

Für die Bewertung der Komfortkriterien hinsichtlich des Fahrkomforts ist es notwendig für die verschiedenen Fahrszenarien möglichst genaue Grenzwerte für diese anzugeben. Nachfolgend wird der Frage nachgegangen, inwiefern sich Grenzen der verwendeten Komfortkriterien Fahrzeugruck und -beschleunigung quantitativ bestimmen lassen. Die Grenzen werden anhand von Literaturwerten herausgearbeitet und getrennt nach Längs- und Querdynamik betrachtet.

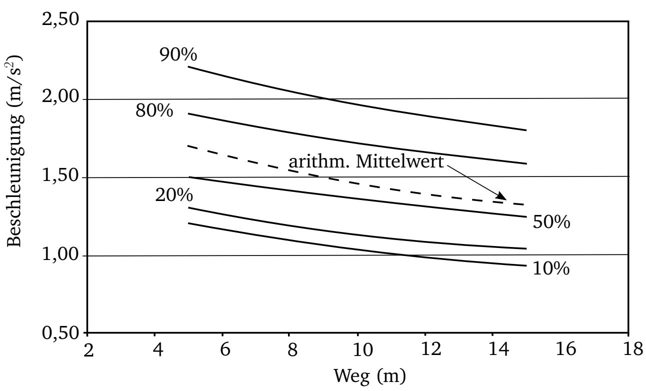
2.2.1 Grenzwerte für die Längsdynamik

Für die Begrenzung der Längsdynamik des Fahrzeugs soll zunächst ein Blick auf bestehende Fahrassistenzsysteme (FAS) geworfen werden, die Fahrer_innen in der Längsführung des Fahrzeugs unterstützen. Die Systeme Adaptive Cruise Control (ACC) sowie Full Speed Range Adaptive Cruise Control (FSRA) stellen dafür praxiserprobte Systeme dar, die als Orientierung verwendet werden können. Das FSRA ist eine Systemerweiterung des Standard ACC, dessen Funktionalität zusätzlich zum mittleren und hohen Geschwindigkeitbereich auch den niedrigen Geschwindigkeitsbereich ($v < 5\,\mathrm{m/s}$) abdeckt [22]. In den ISO-Normen ISO 15622 [23] und ISO 22179 [24] werden die Funktionsgrenzen der beiden Systeme spezifiziert, welche auch in [22] nachgelesen werden können. Geht man davon aus, dass der Betrieb automatisierter Fahrzeuge im gesamten möglichen Geschwindigkeitsbereich vom Stillstand bis hin zu hohen Geschwindigkeiten möglich sein soll, so dienen die Funktionsgrenzen des FSRA als erste Anhaltspunkte für automatisierte Fahrzeuge. Beim FSRA wird zwischen den einzelnen Geschwindigkeitsbereichen unterschieden. Bei hohen Geschwindigkeiten von $v > 20\,\mathrm{m/s}$ betragen die Grenzwerte für die maximal zur Verfügung stehende Beschleunigung bzw. Verzögerung $a_{\mathrm{max}} = 2\,\mathrm{m/s^2}$ bzw. $a_{\mathrm{min}} = -3{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ [22]. Im Bereich niedriger Geschwindigkeiten von $v < 5\,\mathrm{m/s}$ betragen die Funktionsgrenzen $a_{\mathrm{max}} = 4\,\mathrm{m/s^2}$ bzw. $a_{\mathrm{min}} = -5\,\mathrm{m/s^2}$ [22]. Im dazwischen liegenden Geschwindigkeitsbereich dürfen die Höchstwerte für die Beschleunigung und Verzögerung abhängig von der gefahrenen Geschwindigkeit innerhalb der angegebenen Werte für hohe und niedrige Geschwindigkeiten liegen [22]. Der Grenzwert für den zulässigen Fahrzeugruck wird für hohe Geschwindigkeiten mit $j_{\mathrm{max}} = 2{,}5\,\mathrm{m/s^3}$ und für niedrige Geschwindigkeite mit $j_{\mathrm{max}} = 5\,\mathrm{m/s^3}$ angegeben, wobei dieser Wert sowohl für positive als auch negative Beschleunigungen gilt [22]. Auch hier darf der maximale Fahrzeugruck bei mittleren Geschwindigkeiten je nach tatsächlicher Geschwindigkeit innerhalb dieser Grenzen liegen. Somit sind erste Werte für Funktionsgrenzen in Längsrichtung abgesteckt, wobei beachtet werden muss, dass diese Werte als absolute, zulässige Maximalwerte zu verstehen sind, bei denen der Fahrkomfort noch nicht berücksichtigt wurde [1]. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Komfortgrenzen für FAS enger gefasst werden müssen als die reinen Funktionsgrenzen, weshalb die Grenzen unter Berücksichtigung des Komforts nun weiter eingeschränkt werden sollen.

In [25] wird ein Modell zur Folgefahrt basierend auf dem Fahrer_innen- bzw. Passagier_innenkomfort vorgestellt. Als Schwellwert der Längsbeschleunigung für die Unterscheidung zwischen einer komfortablen und einer unkomfortablen Fahrt wird dabei der Wert $a_c = 2\,\mathrm{m/s^2}$ angegeben. In [26] wurde die mittlere Längsbeschleunigung eines "undynamischen" und damit als komfortorientiert empfundenen Fahrstils auf Landstraßen experimentell als $1\,\mathrm{m/s^2}$ ermittelt. In [27] konnten wichtige Erkenntnisse im alltäglich Straßenverkehr bezüglich des Beschleunigungsverhaltens bei Anfahrvorgängen gewonnen werden. Dafür wurden mithilfe von Bild- und Videokameras Messungen an Kreuzungen sowohl im innerstädtischen als auch außerstädtischen Bereich durchgeführt und das Beschleunigungsverhalten beim Anfahren aus dem Stand von Geradeausfahrenden und Rechtsabbiegenden analysiert. Die Versuchsergebnisse sind in Abbildung 2.1 dargestellt. Es konnte gezeigt werden, dass die gemessene Längsbeschleunigung allgemein mit der zurückgelegten Strecke abnimmt, wobei der Höchstwert des 90. Perzentils bei Geradeausfahrt bei $2{,}56\,\mathrm{m/s^2}$ und beim Rechtsabbiegen bei $2{,}2\,\mathrm{m/s^2}$ liegt. Die maximale Beschleunigung wird unmittelbar nach Beginn des Beschleunigungsvorgangs (nach $5\,\mathrm{m}$) erreicht. Anschließend nimmt die Beschleunigung rapide ab und bereits nach $15\,\mathrm{m}$ beträgt der Höchstwert des 90. Perzentils für Geradeausfahrt nur noch $2{,}1\,\mathrm{m/s^2}$, respektive $1{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ für das Abbiegemanöver. Zudem wurde festgestellt, dass das Beschleunigungsniveau bei Abbiegevorgängen - sowohl innerorts, als auch außerorts - insgesamt geringer ist, als bei Anfahrvorgängen zur Geradeausfahrt. Als dritte wichtige Erkenntnis wurde schließlich festgestellt, dass es einen Unterschied im Beschleunigungsverhalten zwischen Abbiegevorgängen innerhalb von Ortschaften und außerorts gibt. Die Beschleunigungen innerorts sind dabei geringer. Dies wird damit begründet, dass bei Abbiegevorgängen innerorts der Verkehr durch kreuzende Fußgänger_innen oder Radfahrende beachtet werden muss [27].



(a) Anfahrbeschleunigungen Geradeausfahrt (innerorts und außerorts kombiniert)



(b) Anfahrbeschleunigungen Rechtsabbiegende (innerorts und außerorts kombiniert)

Abbildung 2.1: Anfahrbeschleunigungen für Geradeausfahrende und Rechtsabbiegende [27]

Diese Werte stimmen unter anderem mit den in [28] anhand von Beschleunigungssensoren im Alltagsverkehr gemessenen Ergebnissen überein. Zusätzlich zum Wert für die Längsbeschleunigung wird das 90. Perzentil für die Längsverzögerung von planbaren Anhaltemanövern bei Alltagsfahrten (Zufahren auf eine rote Ampel) in [28] mit $-3{,}3\,\mathrm{m/s^2}$ angegeben. Die zuvor genannten Werte wurden anhand von Alltagsfahrten ermittelt und in Perzentilen angegeben, die eine möglichst große Menge der analysierten Ergebnisse (90. Perzentil) umfassen. Auch wenn bei der Analyse des alltäglichen Fahrverhaltens davon ausgegangen werden kann, dass ein gewisses Maß an Fahrkomfort erreicht wurde, kann es sein, dass die Höchstwerte der Perzentile mit weniger komfortablen Manövern erreicht wurden. In [29] wird der Blick bei der Angabe von Grenzwerten speziell nochmal auf den Fahrkomfort gerichtet. Hier wird ein hohes Maß an Fahrkomfort mit einer defensiven Fahrweise in Verbindung gebracht [29]. Die Höchstwerte der Beschleunigung und Verzögerung in longitudinaler Richtung für eine komfortable Fahrweise werden mit $2{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ beziehungsweise $-2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ angegeben [29] und stimmen in etwa mit den zuvor angegebenen Werten für alltägliche Beschleunigungs-, Verzögerungs- und Abbiegevorgänge überein, wobei in [29] auf eine geschwindigkeitsabhängige Betrachtung explizit verzichtet wurde.

Für den Längsruck gilt laut [30] typischerweise für die Entwicklung vieler Anwendungen wie den Entwurf von Zugstrecken oder Personenaufzügen ein Grenzwert von $j_{\text{max}} = \pm 2\,\mathrm{m/s^3}$ zur Wahrung des Komfort von Anwender_innen, wobei der Wert sich dabei auf die Längsrichtung der Bewegung bezieht. Neben den absoluten Werten des Rucks konnte Hiroaki in einer Studie [31] (zitiert nach [32]) für das Railway Technical Research Institute in Japan zudem einen signifikanten Zusammenhang zwischen dem Ruck und der Beschleunigung bezüglich der Akzeptanz durch Nutzende feststellen. Demnach sinkt die Akzeptanz eines Fahrmanövers mit zunehmender Beschleunigung bei gleich bleibendem Ruck. Je größer der dabei erreichte Ruck, desto eher wird ein Manöver als unkomfortabel empfunden und von Nutzenden abgelehnt. Berücksichtigt man für die Auslegung eines FAS die in [30] angegebene Komfortgrenze von $j_{\text{max}} = 2\,\mathrm{m/s^3}$, so darf die Längsbeschleunigung nicht größer als $1\,\mathrm{m/s^2}$ sein, damit gemäß der Auswertungen in [31] weniger als 10% der Teilnehmenden ein Manöver ablehnen würden und somit ein hohes Akzeptanzniveau erreicht werden kann.

2.2.2 Grenzwerte für die Querdynamik

Wie bereits in 2.2.1 sollen auch in diesem Abschnitt zunächst die Funktionsgrenzen bereits bestehender FAS, die Fahrer_innen in der Querführung des Fahrzeugs unterstützen, berücksichtigt werden. Dazu bietet sich die Betrachtung des Lane Keeping Support (LKS) an. Dieses inzwischen in vielen Fahrzeugen verbaute Assistenzsystem unterstützt die fahrzeugführende Person darin, bei höheren Geschwindigkeiten die Fahrspur zu halten und dem unerwünschten Verlassen des Fahrstreifens entgegen zu wirken [33]. Im Gegensatz zum zuvor beschriebenen FSRA ist das LKS in seinen Funktionsbereichen deutlich stärker restringiert. Während das FSRA über einen sehr breiten Geschwindigkeitsbereich mit vergleichsweise hohen Beschleunigungs- und Ruckwerten, die weit über die Grenzen eines komfortablen Fahrstils hinausgehen, betriebsfähig ist und somit der Funktionalität eines automatisierten Fahrzeugs sehr nahe kommt, ist der Einsatzbereich des herkömmlichen LKS stärker beschränkt. Der Geschwindigkeitsbereich, in dem das LKS zur Verfügung steht, liegt bei $65\,\mathrm{km/h} < v < 180\,\mathrm{km/h}$ und der minimale Kurvenradius, der durchfahren werden kann beträgt $230\,\mathrm{m}$, bei einem maximalen Lenkmoment von $3\,\mathrm{Nm}$ [33]. Dabei können Querbeschleunigungen von bis zu $2\,\mathrm{m/s^2}$ erreicht werden. Durch diese Funktionsgrenzen wird das System in seiner Anwendung auf den Betrieb im Autobahnverkehr beschränkt. Mittlerweile existieren auch Erweiterungen des LKS, die einen Betrieb im niedrigeren Geschwindigkeitsbereich bis $60\,\mathrm{km/h}$ ermöglichen und somit als Ergänzung für Stausituationen dienen [34].

Analog zu den Ergebnissen für die Längsbeschleunigung wurde das Clusterzentrum für komfortable Fahrt auf Landstraßen in [26] als $2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ ermittelt. Der in [29] angegebene Maximalwert für erreichen eines hohen Komfortniveaus liegt bei $1{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ und weicht damit leicht vom Wert aus [26] ab. Allerdings wird in [29] neben der Unterscheidung verschiedener Komfortstufen noch zwischen den einzelnen Fahrstilen differenziert. Für einen defensiven Fahrstil wird der Bereich lateraler Beschleunigungen mit $1{,}5\,\mathrm{m/s^2} - 2{,}9\,\mathrm{m/s^2}$ beziffert. Geht man davon aus, dass eine defensive Fahrweise allgemein einen hohen Fahrkomfort bietet, so lässt sich dieser Wertebereich auch mit dem Clusterzentrum für komfortable Landstraßenüberfahrten aus [26] in Einklang bringen.

Neben den absoluten Werten der Querbeschleunigung zeigen zahlreiche Untersuchungen eine signifikante Abhängigkeit der Querbeschleunigung von der Fahrgeschwindigkeit [35]–[38]. So werden in [35] typische Querbeschleunigungen, die von Normalfahrer_innen erreicht werden, für die Geschwindigkeitsbereiche Stadt ($v < 50\,\mathrm{km/h}$), Landstraße ($50\,\mathrm{km/h} < v < 100\,\mathrm{km/h}$) und Autobahn ($100\,\mathrm{km/h} < v < 250\,\mathrm{km/h}$) angegeben, wobei die auf Landstraßen typischerweise erreichten Querbeschleunigungen mit $4{,}1\,\mathrm{m/s^2}$ am höchsten und auf Autobahnen mit $2\,\mathrm{m/s^2}$ am niedrigsten sind. Zur Prädiktion des Fahrverhaltens in Kurven wurde in [36] mithilfe der maximal zulässigen Querbeschleunigung und anderer physikalischer Begrenzungen wie dem maximalen Lenkwinkel der nichtlineare Verlauf einer Einhüllenden für die Querbeschleunigung in Abhängigkeit der Fahrzeuggeschwindigkeit bestimmt. Zudem konnte in [37] mithilfe von Beschleunigungsmessungen bei Spurwechselmanövern festgestellt werden, dass bei höheren Geschwindigkeiten bereits niedrigere Querbeschleunigungen ausreichen, um das Gefühl eines scharfen Manövers zu verursachen. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

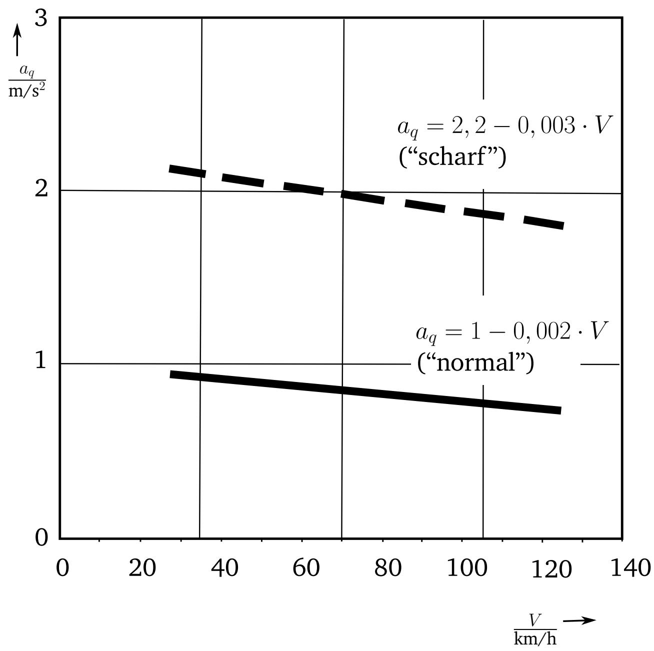


Abbildung 2.2: Zusammenhang zwischen der Querbeschleunigung und der Fahrzeuggeschwindigkeit für "scharfe" und "normale" Spurwechsel [37]

Zusätzlich zu der Geschwindigkeitsabhängigkeit zeigen Untersuchungen einen weiteren Zusammenhang zwischen der Querbeschleunigung und der durchfahrenen Krümmung und damit auch dem Fahrmanöver (beispielsweise Spurwechsel oder Kurvenfahrt) auf [28], [38]. Es lässt sich ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen der gemessenen Querbeschleunigung des Fahrzeugs und der durchfahrenen Krümmung feststellen, bei dem die Querbeschleunigung mit abnehmender Krümmung (wachsender Radius) ebenfalls abnimmt, obwohl die physikalischen Grenzen der Querbeschleunigung für große Kurvenradien genauso gelten wie für geringe Radien und theoretisch jede Kurve durch entsprechende Anpassung der Geschwindigkeit mit der gleichen maximalen Querbeschleunigung durchfahren werden könnte. Der Grund für diesen Zusammenhang liegt darin, dass Fahrer_innen bei der Wahl der Kurvengeschwindigkeit automatisch einen Sicherheitsabstand zu den physikalischen Grenzwerten der

Beschleunigung einhalten [28]. Da größere Radien vor allem auf Autobahnen vorkommen, wo in aller Regel hohe Geschwindigkeiten herrschen und damit im Falle eines Unfalls durch Überschreiten der physikalischen Grenzen ein deutlich größeres Schadenspotential herrscht als im Stadtverkehr, wird der Sicherheitsabstand zu den physikalischen Grenzen von den meisten Personen bei großen Radien intuitiv größer gewählt als bei kleinen Kurvenradien [38]. In [39] wird der gleiche Zusammenhang zwischen abnehmender Querbeschleunigung und zunehmendem Kurvenradius angegeben - bei größeren Radien werden geringere Beschleunigungen akzeptiert. Allerdings wird hier nochmal zwischen den drei Fahrstilen “sportlich”, “normal” und “ruhig” unterschieden. Der qualitative Verlauf der Querbeschleunigung über dem Kurvenradius bleibt jedoch bei allen Fahrstilen gleich, lediglich das Gesamtniveau der akzeptierten Querbeschleunigung variiert zwischen den einzelnen Fahrstilen. In Abbildung 2.3 ist der gemessene Zusammenhang zwischen der Querbeschleunigung und dem Kurvenradius nach [28] dargestellt. Die beim Durchfahren der Kurven erreichten Geschwindigkeiten wurden von den Fahrer_innen frei gewählt.

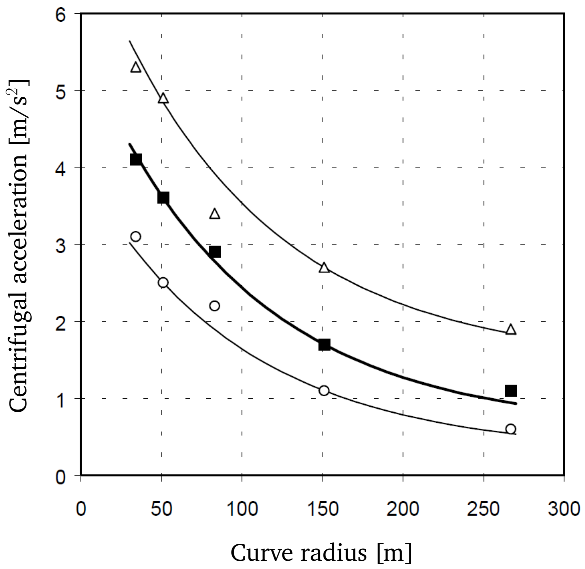


Abbildung 2.3: Zusammenhang zwischen der Querbeschleunigung und dem Kurvenradius bei selbst gewählten Geschwindigkeiten [28].
Legende: △: 90. Perzentil, ■: 50. Perzentil, ○: 10. Perzentil

Ein häufiges und wichtiges Verkehrmanöver im Straßenverkehr ist der Spurwechsel zum Beispiel bei Überholvorgängen, weshalb dieses Manöver nochmal genauer betrachtet werden soll. In Fahrversuchen wurden selbstgewählte Querbeschleunigungen bei Fahrstreifenwechseln im Bereich von $0{,}74\,\mathrm{m/s^2} - 1{,}01\,\mathrm{m/s^2}$ gemessen [7]. Nahezu die selben Werte wurden auch in [37] für normale Spurwechselmanöver bei verschiedenen Geschwindigkeiten ermittelt, die in Abbildung 2.2 dargestellt sind. In [40] wurden vergleichbare Tests bei Spurwechseln durchgeführt. Allerdings wurden die Tests bezogen auf einen Referenzspurwechsel einmal mit geringerer und einmal mit höherer Querdynamik durchgeführt, wobei die geringere Querdynamik als deutlich komfortabler eingestuft wurde [40] und mit $1{,}1\,\mathrm{m/s^2}$ eine maximale Querbeschleunigung aufwies, die sehr ähnlich zu den in [37] und [7] ermittelten Werten liegt.

Als Komfortgrenze für den Querruck dient der in [40] ermittelte maximale Querruck bei Spurwechselmanövern. Dabei wurden Spurwechsel unterschiedlicher Dynamikausprägungen durchgeführt, die anschließend von den Proband_innen hinsichtlich des Fahrkomforts bewertet werden sollten. Die Ruckwerte der beiden unterschiedlichen Querdynamiken können im Hinblick auf den Fahrkomfort als komfortabel für die geringere Querdynamik und als weniger komfortabel für die höhere Querdynamik interpretiert werden. Der beim komfortableren Spurwechsel erreichte maximale Querruck beträgt $1{,}8\,\mathrm{m/s^3}$ [40]. Wie bereits dargelegt werden konnte, kommen zahlreiche wissenschaftliche Studien und Untersuchungen zu dem Ergebnis, dass Beschleunigungsänderungen einen signifikanten Einfluss auf die Komfortwahrnehmung haben und daher eine wichtige Rolle bei der Bewertung des Fahrkomforts spielen. Allerdings ist es aufgrund der komplexen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Größen und dem subjektiven Komfortempfinden ebenso schwierig, den Fahrzeugruck objektiv und allgemeingültig unter Berücksichtigung des Fahrkomforts zu quantifizieren. Aus diesem Grund können weitere Grenzwerte für den Fahrzeugruck, die über die bisher genannten Werte hinausgehen, im Rahmen dieser Recherche nicht angegeben werden.

Abschließend werden die verschiedenen Grenzwerte für die Längs- und Querdynamik der Übersichtlichkeit halber nochmals in tabellarischer Form zusammengefasst (siehe Tabelle 2.1).

Die Ergebnisse in diesem Kapitel machen die Schwierigkeit bei der objektiven Bestimmung von Grenzwerten für den Fahrkomfort deutlich. Die Komfortwahrnehmung wird von einer Reihe unterschiedlicher Faktoren beeinflusst. Erst deren Gesamtwirken lässt sich je nach Situation und Fahrmanöver bezüglich des Fahrkomforts bewerten. Dazu kommt, dass das Komfortempfinden auch von subjektiven Eindrücken wie dem persönlichen Sicherheitsempfinden oder eigenen Fahrgewohnheiten geprägt wird. Allgemeingültige Werte, die als “harte” Komfortgrenzen verstanden werden können, können deshalb ohne zusätzliche Annahmen und Vereinfachungen nicht getroffen werden. Die in diesem Kapitel erarbeiten Grenzwerte für die komfortrelevanten Größen Fahrzeugruck und -beschleunigung in longitudinaler und lateraler Richtung dienen daher eher als Orientierung für die qualitative Bewertung des Fahrkomforts.

Tabelle 2.1: Zusammenfassung der Grenz- und Richtwerte für die Längs- und Querdynamik

Größe	**Beschreibung**	**Wert**	**Quelle**
Längsbeschleunigung	Maximalwert für FSRA für $v > 20\,\mathrm{km/h}$	$2\,\mathrm{m/s^2}$	[22]
	Maximalwert für FSRA für $v < 5\,\mathrm{km/h}$	$4\,\mathrm{m/s^2}$	[22]
	Schwellwert zur Unterscheidung zwischen komfortabler und unkomfortabler Fahrt	$2\,\mathrm{m/s^2}$	[25]
	Mittlere Beschleunigung eines undynamischen Fahrstils auf Landstraßen	$1\,\mathrm{m/s^2}$	[26]
	Höchstwert des 90. Perzentils von Anfahrbeschleunigungen bei Geradeausfahrt	$2{,}56\,\mathrm{m/s^2}$	[27]
	Höchstwert des 90. Perzentils von Anfahrbeschleunigungen beim Rechtsabbiegen	$2{,}2\,\mathrm{m/s^2}$	[27]
	Wert des 90. Perzentils von Beschleunigungen bei Alltagsfahrten	$2{,}6\,\mathrm{m/s^2}$	[28]
	Maximalwert der Beschleunigung bei hohem Komfortniveau	$2\,\mathrm{m/s^2}$	[29]
Längsverzögerung	Maximalwert für FSRA für $v > 20\,\mathrm{km/h}$	$-3{,}5\,\mathrm{m/s^2}$	[22]
	Maximalwert für FSRA für $v < 5\,\mathrm{km/h}$	$-5\,\mathrm{m/s^2}$	[22]
	Wert des 90. Perzentils von Verzögerungen bei Alltagsfahrten	$-3{,}3\,\mathrm{m/s^2}$	[28]
	Maximalwert der Verzögerung bei hohem Komfortniveau	$-2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$	[29]
Längsruck	Maximalwert für FSRA für $v > 20\,\mathrm{km/h}$	$\pm 2{,}5\,\mathrm{m/s^3}$	[22]
	Maximalwert für FSRA für $v < 5\,\mathrm{km/h}$	$\pm 5\,\mathrm{m/s^3}$	[22]
	Typischer Grenzwert zur Wahrung von Passagierkomfort	$\pm 2\,\mathrm{m/s^3}$	[30]
Querbeschleunigung	Maximalwert für LKS für $60\,\mathrm{km/h} < v < 180\,\mathrm{km/h}$	$2\,\mathrm{m/s^2}$	[33]
	Mittlere Beschleunigung eines undynamischen Fahrstils auf Landstraßen	$2{,}5\,\mathrm{m/s^2}$	[26]
	Maximalwert der Beschleunigung bei hohem Komfortniveau	$1{,}8\,\mathrm{m/s^2}$	[29]
	Maximalwert der Beschleunigung eines defensiven Fahrstils	$2{,}9\,\mathrm{m/s^2}$	[29]
	Höchstwert typischer Beschleunigungen von Normalfahrer_innen in der Stadt	ca. $3{,}2\,\mathrm{m/s^2}$	[35]
	Höchstwert typischer Beschleunigungen von Normalfahrer_innen auf Landstraßen	ca. $4{,}1\,\mathrm{m/s^2}$	[35]
	Höchstwert typischer Beschleunigungen von Normalfahrer_innen auf Autobahnen	ca. $2\,\mathrm{m/s^2}$	[35]
	Selbstgewählte Beschleunigungen bei Fahrstreifenwechseln	0,74 bis $1{,}01\,\mathrm{m/s^2}$	[7]
	Selbstgewählte Beschleunigungen bei Fahrstreifenwechseln mit geringer Querdynamik	$1{,}1\,\mathrm{m/s^2}$	[40]
Querruck	Selbstgewählter Ruck bei Fahrstreifenwechseln mit geringer Querdynamik	$\pm 1{,}8\,\mathrm{m/s^3}$	[40]

3 Optimierung - Mathematische Grundlagen und Methoden

In diesem Kapitel werden die notwendigen mathematischen Grundlagen beschrieben, die zur Formulierung eines Optimierungsproblem (OP) und zu dessen Lösung mithilfe der Variationsrechnung notwendig sind. Dazu wird zunächst der Unterschied zwischen *statischer* und *dynamischer* Optimierung erläutert und anschließend mit der *Variationsrechnung* eine Lösungsmethode eingeführt, mit der sich ein dynamisches OP in ein System nichtlinearer DGL 1. Ordnung überführen lässt. Dessen Lösung kann entweder analytisch oder numerisch bestimmt werden. Danach werden zusätzliche Methoden erläutert, mit deren Hilfe sich ein komplexes OP in mehrere miteinander verknüpfte Optimierungsaufgaben unterteilen lässt, deren Lösungen vergleichsweise einfach bestimmt werden können. Abschließend werden einige Lösungsverfahren zur numerischen Lösung dynamischer OP vorgestellt und diskutiert.

3.1 Statische Optimierung

Die allgemeine Standardformulierung eines statischen OP lautet [41]:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \quad f(\boldsymbol{x}) \tag{3.1}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{g}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{3.2}$$

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{x}) \leq 0 \tag{3.3}$$

Die Funktion $f(\boldsymbol{x})$ wird dabei als Kosten- oder Gütefunktion bezeichnet und bezüglich der Optimierungsvariablen $\boldsymbol{x}$ unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{h}$ minimiert. Bei der statischen Optimierung sind die Variablen $\boldsymbol{x}$ Elemente des Euklidischen Raums [41]. Für die Gleichungsnebenbedingung (GNB) $\mathbf{g}(\boldsymbol{x})$ und die Ungleichungsnebenbedingung (UNB) $\mathbf{h}(\boldsymbol{x})$ gilt $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^p$ bzw. $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^q$, wobei $p < n$ sein muss, da sich die Optimierungsvariablen $\boldsymbol{x}$ ansonsten bei $p = n$ unabhängigen Gleichungen direkt aus $\mathbf{g}(\boldsymbol{x})$ bestimmen lassen [42]. Für die Anzahl der UNB hingegen gibt es keine maximal zulässige Anzahl [42].

3.2 Dynamische Optimierung

Im Unterschied zur statischen Optimierung sind die Optimierungsvariablen bei der dynamischen Optimierung selbst Funktionen einer unabhängigen Variable, welche in den meisten Fällen der Zeit t entspricht [41]. Das bedeutet, es werden die optimalen Zeitverläufe der Optimierungsvariablen gesucht. Aufgrund dessen wird die Funktion $f(\boldsymbol{x})$ zum Kosten- oder Gütefunktional $J(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$, welches bei der dynamischen Optimierung minimiert wird. Eine sehr häufige Anwendung der dynamischen Optimierung findet man bei dynamischen Systemen, für die eine optimale Eingangstrajektorie $\boldsymbol{u}^*(t)$ gesucht wird [41]. Da es sich bei den Optimierungsvariablen um die Eingangs- bzw. Steuergrößen des Systems handelt, wird auch von einem *Optimalsteuerungsproblem* gesprochen [41]. Gleichzeitig liefert die Lösung des Problems die optimalen Zustandstrajektorien $\boldsymbol{x}^*(t)$, weshalb die Formulierung eines dynamischen OP einen geeigneten Ansatz zur Trajektorienplanung dynamischer Systeme darstellt. Die allgemeine Formulierung eines solchen Optimalsteuerungsproblems lautet [41]:

$$\min_{\boldsymbol{u}(t)} \quad J(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t, t_f) = V(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} l(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\mathrm{d}t \tag{3.4}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\,, \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{3.5}$$

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) = 0 \tag{3.6}$$

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \leq 0 \tag{3.7}$$

Es gilt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^p$ und $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^q$. Wie bereits bei der statischen Optimierung stellen die Gleichungen (3.6) und (3.7) GNB und UNB dar, wobei die UNB an dieser Stelle lediglich der Vollständigkeit halber in der allgemeinen Form mit angegeben sind. Für die weiteren Betrachtungen - die Anwendung der Variationsrechnung und die Ergebnisse dieser Arbeit - spielen die UNB keine Rolle, da die Berücksichtigung von UNB eine analytische Lösung des OP deutlich komplizierter macht. Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass sich auch Optimalsteuerungsprobleme mit UNB mithilfe des Ansatzes der Variationsrechnung lösen lassen. Für weitere Informationen zum Umgang mit allgemeinen UNB für die Systemzustände und/oder Eingangsgrößen sei auf entsprechende Fachliteratur zum Thema Optimierung verwiesen (siehe [42], [43]). Gleichung (3.5) beschreibt die Systemdynamik mit der Eingangsgröße $\boldsymbol{u}(t)$ und die Anfangszustände $\boldsymbol{x}_0$ des Systems, die als Randbedingungen fungieren. Das Gütefunktional in Gleichung (3.4) wird in der dargestellten Form auch als *Bolza-Form* des Gütefunktionals bezeichnet und setzt sich aus zwei Teilen zusammen: Der Integralanteil beschreibt die von der Zeit abhängigen laufenden Kosten und heißt *Lagrange-Form*. Der vor dem Integralanteil stehende Term $V(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)$ gibt die Bewertung des Endzustands (und der Endzeit), also die Endkosten, an. Dieser wird *Mayer-Form* genannt [41]. Für die Lagrange- und Bolza-Form gilt, dass sie sich immer in die Mayer-Form überführen lassen [41] (siehe auch [43]). Der Endzeitpunkt t_f kann festgelegt sein oder frei. Ist er frei, so muss t_f als zusätzliche Optimierungsvariable bei der Lösung des OP berücksichtigt werden [41].

3.2.1 Variationsrechnung

Die Variationsrechnung bietet einen Ansatz, mit dem dynamische OP, wie im vorherigen Absatz vorgestellt, gelöst werden können. Dazu werden ausgehend von den optimalen Trajektorien $\boldsymbol{x}^*(t)$ und $\boldsymbol{u}^*(t)$ und dem optimalen Endzeitpunkt ${t_f}^*$ (sofern t_f frei und damit Teil der Optimierung ist) Variationen zugelassen, sodass gilt [41]:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t) + \epsilon\boldsymbol{\delta}_x(t) \tag{3.8}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}^*(t) + \epsilon\boldsymbol{\delta}_{\dot{x}}(t) \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}^*(t) + \epsilon\boldsymbol{\delta}_u(t) \tag{3.10}$$

$$t_f = {t_f}^* + \epsilon\delta_{t_f} \tag{3.11}$$

Die $\boldsymbol{\delta}$-Variablen bezeichnen dabei die Variationen der einzelnen Größen und ϵ ist der Parameter, mit dem die Variationen Einfluss auf die Trajektorien nehmen, wobei für $\epsilon = 0$ offensichtlich $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t)$,

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}^*(t)$, $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}^*(t)$ und $t_f = {t_f}^*$ gilt. In Abbildung 3.1 ist ein solcher Verlauf einer möglichen optimalen Trajektorie $\boldsymbol{x}^*(t)$ und einer zulässigen Variation skizziert. Außerdem sind die Variation des Endzeitpunkts und des Endzustands $\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}^*({t_f}^*) + \epsilon(\boldsymbol{\delta}_x({t_f}^*) + \dot{\boldsymbol{x}}^*({t_f}^*)\delta_{t_f})$ (falls, $\boldsymbol{x}(t_f)$ frei ist) dargestellt.

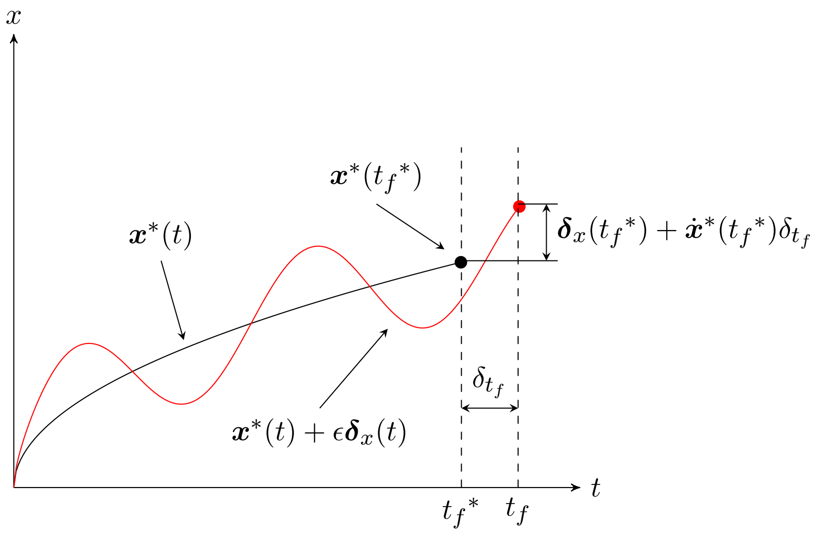


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der optimalen Trajektorie $\boldsymbol{x}^*(t)$ und eine mögliche, zulässige Variation $\boldsymbol{x}(t)$.

Für die Anwendung der Variationsrechnung zur Optimierung dynamischer Systeme wird das folgende Gütefunktional definiert [41]:

$$J(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t), \boldsymbol{u}(t), t, t_f) = V(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} l(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}(t)^T(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) - \dot{\boldsymbol{x}}(t))\mathrm{d}t \quad (3.12)$$

Im Vergleich zu (3.4) wurde das Gütefunktional um den Term $\boldsymbol{\lambda}(t)^T(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) - \dot{\boldsymbol{x}}(t))$ erweitert, wobei dieser für $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$ zu null wird. Die Variablen $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ stellen dabei die sogenannten *adjungierten Zustände* dar [41]. Werden die Variablen im Gütefunktional nun durch die Gleichungen (3.8)-(3.11) ersetzt, hängt das Gütefunktional nur noch von ϵ ab. Da die Trajektorien $\boldsymbol{x}(t)$, $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ und $\boldsymbol{u}(t)$ wie bereits gezeigt nur für $\epsilon = 0$ den optimalen Verläufen entsprechen können, lautet die notwendige Bedingung für das Verschwinden der Variation des Gütefunktionals δ_J und damit für ein Minimum

$$\delta_J = \frac{\mathrm{d}J(\boldsymbol{x}^*(t) + \epsilon\boldsymbol{\delta}_x(t), \dot{\boldsymbol{x}}^*(t) + \epsilon\boldsymbol{\delta}_{\dot{x}}(t), \boldsymbol{u}^*(t) + \epsilon\boldsymbol{\delta}_u(t), {t_f}^* + \epsilon\delta_{t_f})}{\mathrm{d}\epsilon}_{|\epsilon=0} = 0\,. \quad (3.13)$$

Aus dieser Bedingung lassen sich die notwendigen Optimalitätsbedingungen für eine optimale Lösung herleiten. Auf die vollständige Herleitung der Gleichungen wird an dieser Stelle verzichtet und auf weiterführende Literatur verwiesen [41]–[43].

3.2.1.1 Optimalitätsbedingungen

Zunächst wird die *Hamilton-Funktion* als

$$H(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = l(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}(t)^T\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \quad (3.14)$$

definiert, mit deren Hilfe die Optimalitätsbedingungen angegeben werden können. Im Folgenden wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auf die explizite Nennung aller Argumente verzichtet, dort wo diese nicht unbedingt notwendig sind. Damit die notwendige Bedingung für ein Minimum (3.13) erfüllt sein kann, müssen die folgenden Optimalitätsbedingungen erfüllt sein [41].

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \tag{3.15}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{0} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} \tag{3.17}$$

Gleichung (3.15) beschreibt die Zustandsdifferentialgleichung, während Gleichung (3.16) die DGL für die adjungierten Zustände $\boldsymbol{\lambda}$ beschreibt und daher auch *adjungierte DGL* genannt wird [44]. Die beiden Gleichungen (3.15) und (3.16) werden auch als *kanonische DGL* bezeichnet und bilden gemeinsam mit der Steuerungsgleichung (3.17) die sogenannten *Hamiltongleichungen* [44]. Die kanonischen DGL lassen sich zu einer gemeinsamen Systemdynamik

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \\ -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

zusammenfassen. Die Randbedingungen für das OP ergeben sich zu [41]

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{3.19}$$

$$x_i(t_f) = x_{f,i}\,, \quad i \in \mathcal{I}_f \tag{3.20}$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial V}{\partial x_i}_{|t=t_f}\,, \quad i \notin \mathcal{I}_f \tag{3.21}$$

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)_{|t=t_f} = -\frac{\partial V}{\partial t}_{|t=t_f}\,, \quad \text{falls, } t_f \text{ frei ist.} \tag{3.22}$$

Die Gleichungen (3.19) und (3.20) geben die Randbedingungen für die Anfangs- und Endwerte der Zustände an. $\mathcal{I}_f$ bezeichnet dabei die Menge aller Zustände, die explizit über Endbedingungen vorgegeben sind - eine Vorgabe der Endwerte ist dabei nicht zwingend notwendig. Für solche Zustände, deren Endwert nicht vorgegeben und damit frei ist, gilt Gleichung (3.21). Gleichung (3.22) gilt nur dann, falls t_f frei und damit eine Optimierungsvariable des Problems ist und gibt so die zusätzliche notwendige Gleichung zur Bestimmung der freien Endzeit an. Die Gleichungen (3.21) und (3.22) werden als *Transversalitätsbedingungen* bezeichnet [41].

3.2.1.2 Singulärer Fall

In der Regel lässt sich die Eingangsgröße aus der Steuerungsgleichung (3.17) durch die Systemzustände und die adjungierten Zustände ausdrücken, wobei dies nicht immer der Fall sein muss [41]. Für OP, die ein eingangsaffines System optimieren und in denen $l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$ unabhängig von $\boldsymbol{u}$ ist, gilt

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial (l(\boldsymbol{x}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T (\boldsymbol{f}_0(x) + \boldsymbol{f}_1(x)\boldsymbol{u}))}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}_1(x) = 0\,. \tag{3.23}$$

Die Darstellung $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = \boldsymbol{f}_0(x) + \boldsymbol{f}_1(x)\boldsymbol{u}$ verdeutlicht dabei die Eingangsaffinität des dynamischen Systems. Aus Gleichung (3.23) ist direkt zu erkennen, dass sich die Steuergröße $\boldsymbol{u}(t)$ in diesem Fall nicht durch die Zustände ausdrücken lässt, weshalb auch von einem *singulären* Problem gesprochen wird [41]. Der singuläre Fall kann allerdings in der Praxis leicht umgangen werden, indem die Stellgröße mithilfe von hinreichend kleinen Gewichtungen zum Gütefunktional hinzugefügt wird, sodass der Einfluss auf das Optimierungsergebnis vernachlässigbar gering ist, aber trotzdem $\frac{\partial l(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)}{\partial \boldsymbol{u}} \neq 0$ gilt [41].

3.2.1.3 Allgemeine Endbedingungen

Damit neben der Vorgabe einzelner Endzustände auch allgemeine Endbedingungen, wie in Gleichung (3.6) dargestellt, berücksichtigt werden können, wird das Gütefunktional in Gleichung (3.12) wie folgt erweitert. Das Funktional zur Betrachtung allgemeiner Endbedingungen lautet

$$J(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}, t, t_f) = \underbrace{V(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) + \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{g}(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)}_{\bar{V}(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)} + \int_{t_0}^{t_f} l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) - \dot{\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}t\,. \tag{3.24}$$

Über die *Lagrange-Multiplikatoren* $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^p$ wird dabei die Einhaltung der allgemeinen Endbedingungen gewährleistet. Diese sind im Gegensatz zu den adjungierten Zuständen konstant und keine zeitabhängigen Variablen. Die neuen Transversalitätsbedingungen lauten nun [41]

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \boldsymbol{x}}_{|t=t_f} = \Big(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} + (\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{\nu}\Big)_{|t=t_f} \tag{3.25}$$

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)_{|t=t_f} = -\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}_{|t=t_f} = -\Big(\frac{\partial V}{\partial t} + (\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t})^T \boldsymbol{\nu}\Big)_{|t=t_f}, \quad \text{falls, } t_f \text{ frei ist.} \tag{3.26}$$

und anstelle von Gleichung (3.20) gilt Gleichung (3.6). Somit erhält man zusammen mit den Anfangswerten in Gleichung (3.19) insgesamt $2n + p + 1$ Randbedingungen zur Bestimmung der $2n + p + 1$ Unbekannten $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}$ und t_f. Werden anstatt allgemeiner Endbedingungen fixierte Endzustände betrachtet, so entfallen p Gleichungen und die p Unbekannten $\boldsymbol{\nu}$ und es gilt nur $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}$ und t_f zu bestimmen.

Mithilfe der Variationsrechnung lässt sich das ursprüngliche dynamische OP (3.4) - (3.7) in ein Zwei-Punkte-Randwertproblem (ZPR) überführen, dessen Problematik nun darin besteht, die Lösung der kanonischen DGL zu bestimmen und das resultierende Randwertproblem zu lösen.

3.2.2 Optimalitätsprinzip nach Bellman

Mitte der 1950er Jahre formulierte Richard Bellman das sogenannte *Optimalitätsprinzip* [45], welches bis heute bei der dynamischen Optimierung von großer Bedeutung ist und wichtige Erkenntnisse für die Kombination mehrerer OP liefert. Das Optimalitätsprinzip besagt, dass wenn $\boldsymbol{u}^*(t)$ mit $t \in [t_0, t_f]$ eine optimale Trajektorie ist und das System $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)$ optimal vom Anfangszustand $\boldsymbol{x}(t_0)$ in den Endzustand $\boldsymbol{x}^*(t_f)$ überführt, dann ist $\boldsymbol{u}^*(t)$ mit $t \in [t_1, t_f]$, $t_0 \leq t_1 \leq t_f$ diejenige optimale Trajektorie, die das System aus dem Zwischenzustand $\boldsymbol{x}^*(t_1)$ in den optimalen Endzustand $\boldsymbol{x}^*(t_f)$ überführt. Es lässt sich also sagen, dass wenn $\boldsymbol{u}^*(t)$ ein System optimal von $\boldsymbol{x}(t_0)$ nach $\boldsymbol{x}^*(t_1)$ bringt, dann muss auch $\boldsymbol{u}^*(t)$ das System optimal von $\boldsymbol{x}^*(t_1)$ nach $\boldsymbol{x}^*(t_f)$ bringen und es kann keine andere optimale Trajektorie als $\boldsymbol{u}^*(t)$ selbst für diesen Abschnitt geben, sofern $\boldsymbol{u}^*(t)$ auf dem gesamten Intervall $t \in [t_0, t_f]$ optimal ist. Dadurch ist sichergestellt, dass sich die Lösung eines dynamischen OP auf dem Intervall $t \in [t_0, t_f]$ immer durch zwei (oder mehrere) Teillösungen

$$\min_{\boldsymbol{u}(t)} \int_{t_0}^{t_f} (\cdot)\mathrm{d}t = \min_{\boldsymbol{u}(t)} \int_{t_0}^{t_1} (\cdot)\mathrm{d}t + \min_{\boldsymbol{u}(t)} \int_{t_1}^{t_f} (\cdot)\mathrm{d}t \tag{3.27}$$

angeben lässt. Diese Erkenntnis wird an späterer Stelle in dieser Arbeit (Kapitel 5) besonders wichtig, wenn es darum geht, die Gesamtlösung eines Verkehrsszenarios anzugeben, welches sich aus mehreren Teilszenarien zusammensetzt. So lässt sich beispielsweise ein Abbiegemanöver durch die Kombination einer vorangestellen Geraden, einer Kurve und anschließend einer zweiten Geraden beschreiben - dementsprechend setzt sich nach dem Optimalitätsprinzip die Gesamtlösung aus den einzelnen Teillösungen zusammen.

3.3 Zeittransformation für freie Endzeitpunkte

Wie bereits gezeigt wurde, kann der Endzeitpunkt t_f frei sein und wird damit ebenfalls zu einer Optimierungsvariable. Dadurch, dass t_f nicht festgelegt ist, ist auch die obere Integrationsgrenze des Gütefunktionals nicht festgelegt. Bei der analytischen Lösung des resultierenden ZPR - sofern sich diese bestimmen lässt - ist dies nicht weiter kritisch, da t_f mithilfe der Randbedingungen (3.19) - (3.22) bestimmt werden kann. Bei der Lösung mittels numerischer Lösungsverfahren hingegen kann dies problematisch sein, da viele Lösungsverfahren ein fest definiertes Zeitintervall für die Berechnung der Lösung benötigen (siehe Abschnitt 3.6), sodass eine alternative Formulierung für die freie Endzeit t_f angegeben werden muss. Dazu bietet es sich an, eine Zeittransformation $\mathcal{T}(\tau) : [\tau_0, \tau_f] \rightarrow [t_0, t_f]$ einzuführen, die ein festes Zeitintervall $[\tau_0, \tau_f]$ auf die freien Intervallgrenzen $[t_0, t_f]$ abbildet [43], wobei

$$\mathcal{T}(\tau_0) = t_0 = \tau_0 = 0 \qquad \text{und} \tag{3.28}$$

$$\mathcal{T}(\tau_f) = t_f \tag{3.29}$$

gelten soll. Die festen Intervallgrenzen $[\tau_0, \tau_f]$ können beliebig gewählt werden und eine Wahl von $[\tau_0, \tau_f] = [0, 1]$ stellt dabei keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Eine geeignete Transformation, die diese Kriterien erfüllt lautet

$$\mathcal{T}(\tau) = \gamma\tau = t\,, \tag{3.30}$$

wobei der *Zeitstreckfaktor* γ die anstelle von t_f verwendete neue Optimierungsvariable darstellt [41]. Für die Zeittransformation gilt

$$\mathcal{T}'(\tau) = \frac{\partial \mathcal{T}(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = \gamma\,. \tag{3.31}$$

Bei der Herleitung der Optimalitätsbedingungen unter Verwendung der Zeittransformation muss in den Gleichungen (3.12) - (3.14) die Substitution (3.30) angewendet werden. Außerdem gilt $\partial t = \gamma \partial \tau$ bzw. $\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$. Dadurch ergeben sich in der transformierten τ-Domäne leicht geänderte Gleichungen. Für die kanonischen DGL gilt

$$\boldsymbol{x}'(\tau) = \mathcal{T}'(\tau)\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathcal{T}'(\tau)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau), \tau) \tag{3.32}$$

$$\boldsymbol{\lambda}'(\tau) = -\mathcal{T}'(\tau)\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\,, \tag{3.33}$$

(3.34)

sodass sich die transformierte gemeinsame Systemdynamik aus Gleichung (3.18) zu

$$\boldsymbol{z}'(\tau) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'(\tau) \\ \boldsymbol{\lambda}'(\tau) \end{bmatrix} = \mathcal{T}'(\tau) \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau), \tau) \\ -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau), \tau) \\ -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

ergibt. Die Randbedingungen bleiben bis auf die Substitution (3.30) unverändert. Für eine ausführliche Herleitung der Optimalitätsbedingungen unter Verwendung einer Zeittransformation sei auf [43] verwiesen.

Bisher wurde die Zeittransformation für ein einzelnes Zeitintervall betrachtet. Diese lässt sich auf k miteinander verknüpfte Intervalle erweitern. In Abbildung 3.2 ist eine solche Transformation mehrerer gekoppelter Intervalle dargestellt. Für die einzelnen Teilintervalle gelten dabei die dargestellten

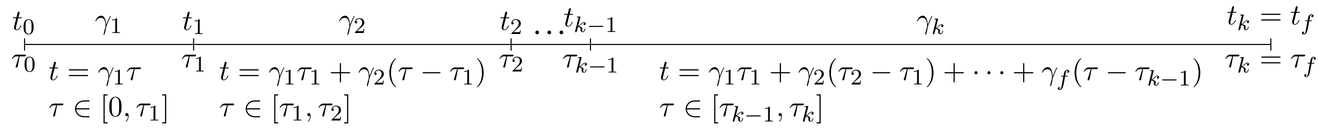


Abbildung 3.2: Mehrere miteinander gekoppelte Zeitintervalle, die sich zu einem Gesamtintervall $[\tau_0, \tau_f]$ zusammensetzen.

Zeittransformationen, sodass für das j-te Teilintervall

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \gamma_j\,, \quad \text{mit}\, j = 1, 2, ..., k \tag{3.36}$$

und damit

$$\boldsymbol{z}_j'(\tau) = \gamma_j \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{u}(\tau), \tau) \\ -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

gilt. Auch hier lassen sich die festen Intervallgrenzen ohne Einschränkung der Allgemeinheit zu

$$\tau_0 = 0\,, \quad \tau_j = j\,, \quad \text{mit}\, j = 1, 2, ..., k \tag{3.38}$$

wählen, sodass für die freien Intervallgrenzen

$$t_0 = \tau_0 = 0 \tag{3.39}$$
$$t_1 = \gamma_1 \tag{3.40}$$
$$t_2 = \gamma_1 + \gamma_2 \tag{3.41}$$
$$\vdots \tag{3.42}$$
$$t_f = t_k = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k \tag{3.43}$$

gilt. Mithilfe dieser Erweiterung lassen sich beliebig viele Intervalle fester Intervallgrenzen auf Intervalle freier Grenzen transformieren. Eine Anwendung derartig verknüpfter Zeittransformationen kann nützlich sein, wenn mehrere OP, die jeweils für ein Teilintervall gelten, betrachtet werden und die Übergangsstellen t_j frei und damit Teil der Optimierung sein sollen. Dann lassen sich die entsprechenden Teilintervalle mit festen Grenzen definieren und wie dargestellt mithilfe der Transformationsvorschriften auf die gesuchten, freien Intervallgrenzen abbilden.

3.4 Variationsprobleme mit internen Gleichungsnebenbedingungen

Es kann durchaus von Interesse sein, neben den Randbedingungen an den Zeitpunkten t_0 und t_f zusätzliche interne Randbedingungen der Form

$$\tilde{\mathrm{g}}(\boldsymbol{x}(t_1), t_1) = 0 \tag{3.44}$$

zu formulieren, die die optimalen Trajektorien erfüllen sollen, wenn das dynamische System beispielsweise einen bestimmten Zustand zu einem gewissen Zeitpunkt t_1 erreichen soll [42]. Dazu wird auch in diesem Fall das Gütefunktional in Gleichung (3.12) analog zur Betrachtung allgemeiner Endbedingungen erweitert und lautet

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}, t, t_f, t_1) = \underbrace{V(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) + \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{g}(\boldsymbol{x}(t_f), t_f) + \tilde{V}(\boldsymbol{x}(t_1), t_1) + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^T \tilde{\mathrm{g}}(\boldsymbol{x}(t_1), t_1)}_{\hat{V}(\boldsymbol{x}(t_f), \boldsymbol{x}(t_1), t_f, t_1)} + \ldots \\ \ldots + \int_{t_0}^{t_f} l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) - \dot{\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}t \,. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Allgemein können die Systemzustände und die adjungierten Zustände an der Stelle t_1 unstetig sein [43], weshalb es zweckmäßig ist, die Zeitpunkte t_1^- und t_1^+ als die Zeitpunkte unmittelbar vor und nach der Sprungstelle t_1 zu definieren. Der Zeitpunkt t_1 kann wie bereits der Endzeitpunkt t_f entweder festgelegt oder frei sein. An der Übergangsstelle t_1 ergeben sich die Transversalitätsbedingungen [43]

$$\Big(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \boldsymbol{x}(t_1)} + (\frac{\partial \tilde{\mathrm{g}}}{\partial \boldsymbol{x}(t_1)})^T \tilde{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\lambda}(t_1)\Big)_{|t_1 = t_1^-} = 0 \tag{3.46}$$

$$\Big(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \boldsymbol{x}(t_1)} + (\frac{\partial \tilde{\mathrm{g}}}{\partial \boldsymbol{x}(t_1)})^T \tilde{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\lambda}(t_1)\Big)_{|t_1 = t_1^+} = 0 \tag{3.47}$$

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)_{|t = t_1^-} - H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)_{|t = t_1^+} + \Big(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + (\frac{\partial \tilde{\mathrm{g}}}{\partial t})^T \tilde{\boldsymbol{\nu}}\Big)_{|t = t_1} = 0 \,, \quad \text{falls, } t_1 \text{ frei ist.} \tag{3.48}$$

Zwei Spezialfälle spielen für die Anwendung der zusätzlichen Transveralitätsbedingungen eine besondere Rolle und sollen an dieser Stelle hervorgehoben werden:

1. Wie bereits erwähnt können die Systemzustände $\boldsymbol{x}(t)$ an der Übergangsstelle t_1 allgemein unstetig sein und einen Sprung aufweisen. Bei der Behandlung dynamischer Systeme, die ein reales System repräsentieren, ist ein derartiges sprunghaftes Verhalten oftmals unerwünscht, da es einerseits nicht realisierbar ist und andererseits unkomfortable Trajektorien bedeutet. Daher sind häufig solche Lösungen von Interesse, bei denen zumindest die Systemzustände $\boldsymbol{x}(t)$ in t_1 stetig sind, also

   $$\boldsymbol{x}(t_1^-) = \boldsymbol{x}(t_1^+) \tag{3.49}$$

   gilt. Damit lassen sich die Randbedingungen (3.46) und (3.47) zur sogenannten *ersten Weierstrass-Erdmannschen-Eckenbedingung* zusammenfassen [43]:

   $$2\Big(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \boldsymbol{x}(t_1)} + (\frac{\partial \tilde{\mathrm{g}}}{\partial \boldsymbol{x}(t_1)})^T \tilde{\boldsymbol{\nu}}\Big) - \boldsymbol{\lambda}(t_1^-) + \boldsymbol{\lambda}(t_1^+) = 0 \,. \tag{3.50}$$

   Die adjungierten Zustände $\boldsymbol{\lambda}(t)$ können dabei in t_1 weiterhin sprunghaft sein, was allerdings nicht problematisch ist, da sie keine physikalischen Größen darstellen.

2. Der zweite Sonderfall ergibt sich, wenn t_1 zwar frei ist, aber die Nebenbedingung (3.44) und die zusätzlichen Kosten $\tilde{V}(\boldsymbol{x}(t_1), t_1)$ nicht explizit von t_1 abhängen, also $\tilde{\mathrm{g}}(\boldsymbol{x}(t_1)) = 0$ und $\tilde{V}(\boldsymbol{x}(t_1))$ gilt. Gleichung (3.48) wird dann zur *zweiten Weierstrass-Erdmannschen-Eckenbedingung*, aus der die Stetigkeit der Hamilton-Funktion in t_1 folgt [43]:

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)_{|t=t_1^-} = H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)_{|t=t_1^+} \, . \tag{3.51}$$

3.5 Diskontinuierliche Systemdynamik

Die Verwendung von diskontinuierlicher Systemdynamik liefert eine überaus nützliche Methode zur Betrachtung unterschiedlicher Zustandsgleichungen in einem OP. Mithilfe dieser Methode können verschiedene, in unterschiedlichen Bereichen geltende Systembeschreibungen in einem OP verwendet werden, sodass sich einzelne Szenarien miteinander zu einem Gesamtszenario kombinieren lassen. Diese Methode findet bspw. in dem in Abschnitt 3.2.2 skizzierten Abbiegeszenario Verwendung. Die drei Teilszenarien Gerade, Kurve und Gerade lassen sich mithilfe von Übergangsbedingungen verknüpfen und in den einzelnen Teilbereichen gilt jeweils die für das entsprechende Teilszenario formulierte Systemdynamik. Die Systemdynamik des Gesamtszenarios lässt sich aus k Teilszenarien wie folgt zusammensetzen [42]:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = \begin{cases} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\,, & \text{falls} \quad \tilde{\mathrm{g}}_i(\boldsymbol{x}, t) \leq 0 \quad \forall\, i = 1, 2, ..., k-1 \\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\,, & \text{falls} \quad \begin{matrix} \tilde{\mathrm{g}}_{\hat{i}}(\boldsymbol{x}, t) > 0 \quad \forall\, \hat{i} = 1 \quad \text{und} \\ \tilde{\mathrm{g}}_i(\boldsymbol{x}, t) \leq 0 \quad \forall\, i = 2, ..., k-1 \end{matrix} \\ \quad \vdots & \\ \boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\,, & \text{falls} \quad \begin{matrix} \tilde{\mathrm{g}}_{\hat{i}}(\boldsymbol{x}, t) > 0 \quad \forall\, \hat{i} = 1, 2, ..., j-1 \quad \text{und} \\ \tilde{\mathrm{g}}_i(\boldsymbol{x}, t) \leq 0 \quad \forall\, i = j, ..., k-1 \end{matrix} \\ \quad \vdots & \\ \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\,, & \text{falls} \quad \tilde{\mathrm{g}}_{\hat{i}}(\boldsymbol{x}, t) > 0 \quad \forall\, \hat{i} = 1, 2, ..., k-1 \end{cases} \tag{3.52}$$

Die Gleichungen $\tilde{\mathrm{g}}_i(\boldsymbol{x}(t_i), t_i) = 0$ nehmen dabei die Funktion der $k-1$ Übergangsbedingungen zu den Zeitpunkten t_i ein, zu denen von der einen Systemdynamik zur nächsten gewechselt wird, und werden analog zu den Ausführungen in Abschnitt 3.4 wie interne GNB behandelt. Für jeden der Übergangspunkte gelten die Transversalitätsbedingungen (3.46) - (3.48) bzw. (3.49) - (3.51), wobei insbesondere bei der zweiten Weierstrass-Erdmannschen-Eckenbedingung darauf geachtet werden muss, dass sich auch die Hamilton-Funktion aufgrund der wechselnden Systemdynamik gemäß

$$H_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \tag{3.53}$$

verändert. Damit lautet die zweite Weierstrass-Erdmannsche-Eckenbedingung in Gleichung (3.51) an der Übergangsstelle t_i

$$H_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)_{|t=t_i^-} = H_{i+1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)_{|t=t_i^+} \, . \tag{3.54}$$

Die in diesem Kapitel beschriebenen Methoden liefern notwendigen Methoden, um dynamische OP mithilfe der Variationsrechnung zu lösen und die Problemstellung so zu formulieren, dass komplexe Fahrszenarien durch geschickte Kombination mehrerer Teilszenarien vereinfacht und analytisch gelöst werden können. Das Optimalitätsprinzip nach Bellmann (siehe Abschnitt 3.2.2) liefert die Grundlage dafür, dass sich mehrere Teilprobleme zur optimalen Lösung eines Gesamtproblems zusammensetzen lassen. Mithilfe von Zeittransformationen und unter Verwendung diskontinuierlicher Systemdynamik (Abschnitte 3.3 und 3.5) lassen sich auf frei wählbaren Zeitintervallen beliebig viele Teilsysteme unterschiedlicher Systemdynamik miteinander kombinieren, wobei sich mithilfe der Nebenbedingungen an den internen Übergangspunkten (siehe Abschnitt 3.4) Stetigkeit der Systemzustände erzielen lässt, während weiterhin die Optimalität der Lösung gewährleistet ist.

3.6 Numerische Lösungsverfahren

Dieser Abschnitt dient der Übersicht über unterschiedliche numerische Lösungsverfahren für dynamische OP. Dazu sollen einige Verfahren erläutert und hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile miteinander verglichen werden. Zunächst wird der Unterschied zwischen *indirekten* und *direkten* Lösungsverfahren erklärt und anschließend jeweils verschiedene Verfahren der beiden Verfahrensklassen vorgestellt.

3.6.1 Indirekte Lösungsverfahren

Bei den indirekten Lösungsverfahren wird mithilfe der Optimalitätsbedingungen (3.15)-(3.17) und der Randbedingungen (3.19)-(3.22) das entstehende Randwertproblem gelöst [42] - die indirekten Lösungsverfahren basieren also auf der Anwendung der Variationsrechnung. Die Lösung kann dabei entweder analytisch oder mithilfe numerischer Verfahren ermittelt werden [43]. Im Gegensatz zu den direkten Lösungsverfahren wird das dynamische OP bzw. Optimalsteuerungsproblem bei indirekten Verfahren nicht zunächst diskretisiert, sondern es werden direkt die Optimalitätsbedingungen für das entsprechende OP hergeleitet, weshalb bei den direkten Verfahren auch von einer "*first optimize, then discretize*"-Strategie gesprochen wird [42] - dies trifft insbesondere auf indirekte Diskretisierungsverfahren zu (siehe Abschnitt 3.6.1.1). Dadurch, dass das dynamische OP bei indirekten Verfahren nicht zuerst in ein statisches Ersatzproblem umgewandelt, sondern stattdessen mithilfe der Variationsrechnung ein Randwertproblem gelöst wird, besitzen sie den großen Vorteil, dass sie zum einen Informationen über die Struktur der optimalen Lösung liefern und sich zum anderen eine sehr hohe Lösungsgenauigkeit erzielen lässt [41]. Selbst wenn das Randwertproblem nicht analytisch gelöst werden kann, so lassen sich trotzdem aus der Lösung der kanonischen DGL Erkenntnisse gewinnen, die vor allem für die Interpretation der optimalen Trajektorien sehr wertvoll sein können. Ein weiterer Vorteil indirekter Lösungsverfahren ist, dass die adjungierten Zustände zur Sensitivitätsanalyse des Gütefunktionals gegenüber Änderungen der Anfangszustände $\boldsymbol{x}_0$ verwendet werden können [41]. Indirekte Lösungsverfahren haben den Nachteil, dass die Lösbarkeit eines dynamischen OP mittels eines indirekten Verfahrens von der Struktur des OP selbst abhängt. Das bedeutet, dass die Herleitung der kanonischen DGL und die Frage, ob überhaupt eine Lösung angegeben werden kann, sowie die Lösbarkeit des resultierenden Randwertproblems von der Problemstellung selbst abhängen. Die Optimalitätsbedingungen und die Randbedingungen aufzustellen kann für komplizierte Systeme sehr aufwendig sein [42]. Außerdem benötigen indirekte Lösungsverfahren häufig Startschätzungen für die adjungierten Zustände. Die Schätzung dieser Initialwerte beeinflusst die Qualität der Lösung bzw. ob das Verfahren überhaupt konvergiert, sodass der Konvergenzbereich indirekter Verfahren oftmals nicht sehr groß ist [42]. Nachfolgend werden einige indirekte Lösungsverfahren vorgestellt und hinsichtlich des AD-Planungsproblems diskutiert.

3.6.1.1 Indirekte Diskretisierungsverfahren

Der “*first optimize, then discretize*”-Ansatz für indirekte Lösungsverfahren trifft vor allem auf indirekte Diskretisierungverfahren zu. Wie bei allen indirekten Lösungsverfahren werden entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 3.2 die DGL (3.18) über den Ansatz der Variationsrechnung hergeleitet. Gemeinsam mit den Randbedingungen (3.19)-(3.22) ergibt sich ein ZPR, welches auf dem Gesamtintervall $[t_0, t_f]$ an $N+1$ Stützstellen diskretisiert wird [41] - das Problem wird also zuerst optimiert und anschließend diskretisiert. Dieses Randwertproblem wird unter Berücksichtigung der Randbedingungen mithilfe eines numerischen Integrationsverfahrens gelöst, wie zum Beispiel dem Verfahren von Heun, bei dem ein Trapez zur Approximation des Integrals verwendet wird [41] (siehe auch [46] für Informationen zu weiteren Verfahren). Da die zu lösenden DGL bei der numerischen Integration durch Differenzenquotienten ersetzt werden, werden Diskretisierungsverfahren auch als Differenzenverfahren bezeichnet [47].

Vorteile:

- Numerische Robustheit aufgrund simultaner Berücksichtigung der kanonischen DGL und Randbedingungen [41].
- Erhöhung der Genauigkeit durch Steigerung der Anzahl der Diskretisierungsstellen [41].
- Durch Anwendung von Runge-Kutter-Verfahren (RKV) mit höherer Verfahrensordnung lässt sich die Genauigkeit der Integralapproximation verbessern [47].

Nachteile:

- Steuergröße $\boldsymbol{u}$ muss explizit nach $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ auflösbar sein [41].
- Gute Initialschätzung für $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$ notwendig [41].
- Größere Anzahl an Diskretisierungsstellen steigert den Rechenaufwand [41].

3.6.1.2 Indirekte Schießverfahren

Im Gegensatz zu den indirekten Diskretisierungsverfahren wird beim Einfachschießverfahren die Lösung ausgehend von einem Anfangswertproblem berechnet [42], anstatt ausgehend vom ZPR. Dazu wird aus den Anfangswerten $\boldsymbol{x}_0$ und einer Initialschätzung $\boldsymbol{\lambda}_0^{(0)}$ für die adjungierten Zustände der Startvektor $\boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0^T & \boldsymbol{\lambda}_0^{(0)T} \end{bmatrix}^T$ gebildet. Von diesem Startvektor ausgehend werden die DGL anschließend bis t_f numerisch vorwärts integriert. Nach Abschluss der Integration erhält man ein Ergebnis für $\boldsymbol{\lambda}(t_f)^{(0)}$, welches mit den Randbedingungen (3.21) verglichen wird. Die Abweichungen in den Randbedingungen lassen sich durch den Fehlervektor $\boldsymbol{e}^{(l)} = \boldsymbol{\lambda}(t_f) - \boldsymbol{\lambda}(t_f)^{(l)}$ ausdrücken, der durch Verbesserung der Startschätzung $\boldsymbol{\lambda}_0^{(l)}$ so lange verringert wird, bis eine gewünschte Fehlertoleranz nicht mehr überschritten wird und damit das Ergebnis einer vorgegebenen Güte entspricht [42]. Der hochgestellte Index (l) gibt dabei die l-te Iteration der Integration an. Der Startwert $\boldsymbol{\lambda}_0^{(l+1)}$ der nächsten Iteration kann zum Beispiel durch Anwendung des Newton-Verfahrens aktualisiert werden [42]. Auch freie Endzeiten t_f können bei den Schießverfahren berücksichtigt werden. Dazu wird analog zu den adjungierten Anfangszuständen eine Initialschätzung t_f^0 vorgegeben und der Fehlervektor um die Transversalitätsbedingung für freie Endzeit (3.22) erweitert [42].

Vorteile:

- "Einfache" Methode mit geringem Implementierungsaufwand [48].
- Mehrfachschießverfahren bieten die Möglichkeit der Parallelisierung [49].

Nachteile:

- Die Steuergröße $\boldsymbol{u}$ muss explizit nach $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ auflösbar sein [42].
- Instabile Anfangswertprobleme führen dazu, dass das Einfachschießverfahren instabil wird [48], wobei gezeigt werden kann, dass die kanonischen DGL im linearen Fall immer an der imaginär Achse gespiegelte Eigenwerte und damit instabile Eigenmoden besitzen, selbst wenn das lineare System stabil ist [41].
- Empfindlichkeit gegenüber schlechten Startschätzungen für $\boldsymbol{\lambda}_0^{(0)}$, sodass unter Umständen keine Lösung auf dem gesamten Integrationsintervall $[t_0, t_f]$ gefunden werden kann [48].
- Eingeschränkte Anwendbarkeit aufgrund der numerischen Berechnungsschwierigkeiten - vor allem für kleine Probleme geeignet [42].

Dem Problem der numerischen Stabilität und dem Umstand, dass das Anfangswertproblem ggf. nicht bis zur rechten Intervallgrenze integriert werden kann, kann mit dem Mehrfachschießverfahren begegnet werden. Ähnlich zu den Diskretisierungsverfahren wird das Integrationsintervall beim Mehrfachschießverfahren ebenfalls in N Subintervalle aufgeteilt. Auf jedem der Subintervalle wird das Anfangswertproblem (3.18) mit $\boldsymbol{z}(t_j) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_j^T & \boldsymbol{\lambda}_j^T\end{bmatrix}^T$ und $t \in [t_j, t_{j+1}),\ j = 0, 1, ..., N-1$ mittels Einfachschießverfahren gelöst [43]. Damit die Lösung der einzelnen Anfangswertprobleme auf den Subintervallen tatsächlich eine Lösung des ursprünglichen ZPR ist, müssen neben den Randbedingungen, die sich über die Formulierung der Optimalitätsbedingungen ergeben, zusätzlich noch die Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0(t_1, [\boldsymbol{x}_0^T \quad \boldsymbol{\lambda}_0^T]^T) - [\boldsymbol{x}_1^T \quad \boldsymbol{\lambda}_1^T]^T \\ \boldsymbol{z}_1(t_2, [\boldsymbol{x}_1^T \quad \boldsymbol{\lambda}_1^T]^T) - [\boldsymbol{x}_2^T \quad \boldsymbol{\lambda}_2^T]^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_{N-2}(t_{N-1}, [\boldsymbol{x}_{N-2}^T \quad \boldsymbol{\lambda}_{N-2}^T]^T) - [\boldsymbol{x}_{N-1}^T \quad \boldsymbol{\lambda}_{N-1}^T]^T \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{3.55}$$

zwischen den einzelnen Subintervallen erfüllt sein [43]. Das Ergebnis des Anfangswertproblems am Intervallende des j-ten Subintervalls muss also dem Anfangswert der Lösung auf dem $j+1$-ten Intervall entsprechen. Mit dieser Erweiterung auf das Mehrfachschießverfahren lässt sich die Robustheit der numerischen Integration auf Kosten des Rechenaufwands steigern, da der Rechenaufwand durch die Intervallunterteilung ansteigt [49].

3.6.1.3 Indirekte Gradientenverfahren

Indirekte Gradientenverfahren nutzen die Eigenschaft der Randbedingungen (3.19)-(3.21) aus, dass diese an den Randpunkten t_0 und t_f voneinander entkoppelt sind, wenn die Endzustände $\boldsymbol{x}(t_f)$ frei sind und die Endzeit t_f fest ist [41]. In diesem Fall lauten die Randbedingungen $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ und $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial V(\boldsymbol{x}(t_f),t_f)}{\partial \boldsymbol{x}}$. Dadurch ergeben sich n Anfangsbedingungen für die Systemzustände und n Endbedingungen für die adjungierten Zustände. Wird nun eine Steuertrajektorie $\boldsymbol{u}$ durch Initialisierung als gegeben angenommen, dann lassen sich die Systemgleichungen (3.15) ausgehend von $\boldsymbol{x}_0$ durch Vorwärtsintegration von t_0 bis t_f lösen. Analog dazu lassen sich die DGL der adjungierten Zustände (3.16) ausgehend von $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$ durch Rückwärtsintegration von t_f bis t_0 bestimmen. Dadurch hängt der Wert des Gütefunktionals nur noch von $\boldsymbol{u}$ ab [42]. Aus dieser Eigenschaft lässt sich der Gradient des Gütefunktionals bezüglich der Steuertrajektorie als

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{u}} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial l(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\mathrm{d}t}{\partial \boldsymbol{u}} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},t)\mathrm{d}t}{\partial \boldsymbol{u}} \tag{3.56}$$

bestimmen, der angibt, wie sich der Wert des Gütefunktionals bei Änderungen der Steuertrajektorie verhält [42]. Da die Eingangstrajektorie $\boldsymbol{u}$ während des Gradientenverfahrens iterativ verbessert wird und dadurch der optimalen Lösung $\boldsymbol{u}^*$ mit jeder Iteration näher kommt, wird die Steuerungsgleichung (3.17) im Allgemeinen nicht erfüllt sein, sodass dieser Gradient ungleich null wird [41]. Gilt für den Gradienten $\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{u}} = 0$, so ist offensichtlich auch die Optimalitätsbedingung (3.17) erfüllt und $\boldsymbol{u}$ entspricht der optimalen Lösung $\boldsymbol{u}^*$. Dieser Gradient kann genutzt werden, um mithilfe einer Schrittweite $\alpha^{(l)}$ die Steuertrajektorie entsprechend der Richtung des Gradienten anzupassen, sodass

$$\boldsymbol{u}(t)^{(l+1)} = \boldsymbol{u}(t)^{(l)} - \alpha^{(l)}(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{u}})^{(l)} \tag{3.57}$$

gilt [41]. Die Schrittweite $\alpha^{(l)}$ kann entweder fest sein oder über ein Liniensuchverfahren bestimmt werden [42]. Der hochgestellte Index l gibt auch hier die Iteration des Algorithmus an. Mithilfe der aktualisierten Steuertrajektorie $\boldsymbol{u}^{(l+1)}$ kann wieder von vorne verfahren werden und es können erneut die Lösungen für $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ durch Vorwärts- bzw. Rückwärtsintegration mit der neuen Steuertrajektorie berechnet werden [42]. Dieses Vorgehen wird so lange wiederholt, bis der Gradient klein genug ist und ein entsprechendes Abbruchkriterium erfüllt ist. Dann ist $\boldsymbol{u}$ nah genug an der optimalen Lösung [42].

Vorteile:

- Dadurch, dass der Gradient $\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}}$ explizit für das Auffinden der optimalen Steuertrajektorie verwendet wird, bieten sich Gradientenverfahren für Systeme an, bei denen sich $\boldsymbol{u}$ nicht explizit durch $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ ausdrücken lässt [41].
- Effiziente Lösung für Problemstellungen mit fester Endzeit und entkoppelten Randbedingungen [42].
- Stellgrößenbeschränkungen können bei der Suche nach der zulässigen Richtung im Algorithmus berücksichtigt werden [42].
- Numerisch robuste Lösung, da die adjungierten DGL anstelle der numerisch instabilen Vorwärtsrichtung in Rückwärtsrichtung integriert werden [41].

Nachteile:

- Berücksichtigung zusätzlicher Beschränkungen bereitet konzeptuelle Schwierigkeiten [42].
- Erweiterung auf allgemeine Randbedingungen und freie Endzeit zwar möglich, allerdings auf Kosten schlechterer Kovergenzeigenschaften und Robustheit [41].
- Oftmals langsames Konvergenzverhalten in der Nähe des Optimums [41].

3.6.1.4 Indirekte Kollokationsverfahren

Zuletzt werden hier die indirekten Kollokationsverfahren erklärt. Wie bereits bei den indirekten Diskretisierungsverfahren wird auch bei den Kollokationsverfahren das Gesamtintervall $[t_0, t_f]$ zunächst in N äquidistante Subintervalle unterteilt. Der Ansatz der Kollokationsverfahren besteht nun darin, dass die Lösung auf jedem der N Subintervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., N-1$ durch stückweise definierte Polynome $S(t)$ approximiert wird [43] - dies gilt sowohl für die Systemzustände als auch für die adjungierten Zustände. Dazu werden zusätzlich zu den Randpunkten der Subintervalle sogenannte Kollokationsstellen $t_{ij} \in [t_i, t_{i+1}]$, $j = 1, ..., k$ definiert, an denen durch die Kollokationsbedingungen

$$\dot{S}(t_{ij}) = f(t_{ij}, S(t_{ij})) \tag{3.58}$$

ein Übereinstimmen der Approximation und der kanonischen DGL erzwungen wird [43]. Damit an den Intervallübergängen Stetigkeit gewährleistet ist, müssen die Approximationspolynome die Stetigkeitsbedingungen (3.59) zwischen zwei Subintervallen erfüllen. Dazu werden die zwei benachbarten Intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ und $[t_{i+1}, t_{i+2}]$ betrachtet mit den dazugehörigen Polynomen $S_r(t)$ und $S_{r+1}(t)$, $r = 1, 2, ..., N$. Diese müssen die Bedingung

$$S_r(t_{i+1}) = S_{r+1}(t_{i+1}) \tag{3.59}$$

erfüllen. Zusätzlich müssen auch die Randbedingungen (3.19)-(3.21) durch die Polynome erfüllt sein [43]. Es existieren verschiedene Möglichkeiten zur Wahl der Kollokationspunkte innerhalb eines Subintervalls (Lobatto-, Radau-, Gauss-Kollokation [50]), wobei die Lobatto-Kollokation die effizienteste Wahl darstellt [50]. Dafür werden insgesamt drei Kollokationspunkte gewählt: der Intervallanfang, die Intervallmitte und das Intervallende, womit

$$t_{ij} = t_{i+\frac{j-1}{2}}\,, \quad i = 0, 1, ..., N-1, \quad j = 1, ..., 3 \tag{3.60}$$

gilt [42]. Unter der Annahme, dass die Endzeit t_f fest sei, ergibt sich ein $N \cdot (k+1) \cdot 2n$-dimensionales nichtlineares Gleichungssystem, welches aus den $N \cdot k \cdot 2n$ Kollokationsbedingungen (3.58), den $(N-1) \cdot 2n$ Stetigkeitsbedingungen (3.59) der Approximationspolynome an den Intervallgrenzen t_i und den $2n$ Randbedingungen (3.19)-(3.21) besteht [43]. Mithilfe dieses Gleichungssystems lassen sich die unbekannten Polynomkoeffizienten bestimmen [43]. Für N Intervalle mit je $2n$ Gleichungen dürfen pro Polynom maximal $k+1$ Koeffizienten auftreten damit das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Unter Berücksichtigung der allgemeinen Struktur eines Polynoms von Grad ρ

$$P(x) = a_{\rho+1}x^{\rho} + a_{\rho}x^{\rho-1} + ... + a_1 x + a_0\,, \tag{3.61}$$

lässt sich feststellen, dass dabei $\rho + 1$ Koeffizienten auftreten. In [47] konnte gezeigt werden, dass sich Kollokationsverfahren mit stückweise definierten Polynomen zur Lösung von ZPR durch ein äquivalentes implizites RKV ausdrücken lassen. Dabei gilt, dass bei Verwendung von k Kollokationsstellen Polynome von (höchstens) Grad k auftreten und sich ein äquivalentes k-stufiges RKV ergibt [47]. Die Berücksichtigung freier Endzeiten bei Kollokationsverfahren lässt sich wie in 3.3 beschrieben umsetzen.

Vorteile:

- Effektiv anwendbar zur Lösung von Mehr-Punkte-Randwertproblem (MPR), die speziell bei der Optimierung von Trajektorien auftauchen [49].
- Vergleichsweise geringer Rechenaufwand, insbesondere wenn die Randbedingungen entkoppelt sind [51].
- Es lassen sich Ergebnisse mit hoher Genauigkeit erzielen bei überschaubarem Rechenaufwand [51].

Nachteile:

- Übereinstimmung der DGL mit der Approximation nur an den Kollokationsstellen [49].
- Wie bei allen indirekten Lösungsverfahren müssen die Optimalitätsbedingungen (3.15)-(3.17) und die dazugehörigen Randbedingungen (3.19)-(3.22) hergeleitet werden [49].

3.6.2 Direkte Lösungsverfahren

Unabhängig davon, wie genau ein allgemeines dynamisches OP ((3.4)- (3.7)) durch ein bestimmtes direktes Lösungsverfahren gelöst wird, haben alle direkten Verfahren eines gemeinsam: Das dynamische OP wird mittels Diskretisierung in ein statisches Ersatzproblem überführt, wobei die Steuertrajektorie $\boldsymbol{u}(t)$ an N Stützstellen diskretisiert wird [41]. Dadurch wird aus dem dynamischen OP ein endlich dimensionales statisches OP, welches in der allgemeinen Form (3.1)-(3.3) geschrieben werden kann und bezüglich der Optimierungsvariablen $\boldsymbol{u}_i$ mit $i = 0, 1, ...N - 1$ optimiert wird. Ein wesentlicher Unterschied zwischen direkten und indirekten Verfahren liegt darin, dass die Optimalitätsbedingungen aus der Variationsrechnung bei direkten Verfahren nicht explizit berücksichtigt werden müssen [52]. Diese Eigenschaft macht direkte Lösungsverfahren besonders attraktiv für komplizierte Anwendungen [49]. Aufgrund dieser Vorgehensweise werden direkte Verfahren auch als "*first discretize, then optimize*"-Strategie bezeichnet [42]. Ungeachtet der Komplexität der Lösung lässt sich das dynamische OP mithilfe der Diskretisierung immer auf ein statisches Ersatzproblem zurückführen, wodurch sich direkte Methoden robust anwenden lassen und sich vielseitige Anwendungsbereiche ergeben [49]. Weitere Vorteile direkter Lösungsverfahren liegen zum einen darin, dass sich aufgrund der Diskretisierung der Trajektorien Zustandsbeschränkungen sowohl in Form von GNB als auch UNB leicht berücksichtigen lassen [41]. Zum anderen hängt die Qualität der Lösung nicht von Startschätzungen für die adjungierten Zustände ab, die bei indirekten Verfahren angegeben werden müssen, weshalb sich oftmals größere Konvergenzbereiche für direkte Verfahren ergeben [41]. Ein Nachteil von direkten Lösungsverfahren liegt darin, dass die Optimierungsvariablen das optimale Systemverhalten nur an den diskretisierten Stützstellen wiedergeben, weshalb direkte Verfahren ggf. nicht die gewünschte Lösungsgenauigkeit erreichen [42]. Außerdem liefert die Lösung keine Erkenntnisse über die analytische Struktur der optimalen Verläufe. Mithilfe einer höherfrequenten Diskretisierung in engeren Schritten lässt sich die Übereinstimmung der direkten Lösung mit dem analytischen Verlauf der optimalen Lösung und damit die Qualität der direkten Lösung verbessern, allerdings bedeutet dies eine Zunahme der Dimension des Problems. Gerade Systeme hoher Ordnung können auf diese Weise schnell in eine Größenordnung anwachsen, sodass sie sich nicht mehr oder nur sehr langsam lösen lassen, abhängig davon, wie viel Rechenleistung und Speicherkapazität zur Verfügung stehen [42]. Dies war lange Zeit ein maßgeblich beschränkender Faktor in der Anwendung direkter Lösungsverfahren, der mittlerweile aufgrund des heutigen Fortschritts bei der Entwicklung leistungsfähiger Rechner immer mehr in den Hintergrund gerückt ist [42].

Für die Klasse der direkten Lösungsverfahren lässt sich zu jedem der in dieser Arbeit vorgestellten indirekten Lösungsverfahren ein direktes Verfahren angeben, welches sehr eng mit der indirekten Lösungsvariante verwandt ist (direkte Voll-/Teildiskretisierungsverfahren, direkte Einfach-/Mehrfachschießverfahren, direkte Kollokationsverfahren, direkte Gradientenverfahren). Das Ziel dieser Arbeit besteht jedoch darin, den großen Vorteil indirekter Lösungsverfahren auszunutzen und durch den Lösungsweg über die Variationsrechnung Informationen über die Struktur der optimalen Trajektorien zu erhalten. Aus diesem Grund werden die direkten Lösungsverfahren nicht weiter vertieft und es sei an dieser Stelle auf entsprechende Fachliteratur verwiesen [41]–[43], [47]–[49], [53].

3.6.3 Diskussion der Lösungsverfahren

Nachdem nun einige Lösungsverfahren vorgestellt und der Unterschied zwischen indirekten und direkten Verfahren zur numerischen Lösung von Randwertproblemen dargelegt wurde, sollen die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte diskutiert und in den Kontext des AD-Planungsproblems eingeordnet werden - die direkten Lösungsverfahren werden dabei aus den o.g. Gründen nicht weiter berücksichtigt.

Jedes der beschriebenen indirekten Lösungsverfahren hat seine Vor- und Nachteile und ist daher für gewisse Systemklassen mehr oder weniger geeignet. Wie in Kapitel 4 beschrieben ergeben sich für das AD-Planungsproblem je nach Fahrszenario und Detaillierungsgrad Systeme unterschiedlicher Ordnung. Wird die Stellgröße des Systems quadratisch bestraft, sodass das Gütefunktional immer einen energieoptimalen Anteil enthält [41], lässt sich die Stellgröße immer in Abhängigkeit von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ ausdrücken, sodass dieser Nachteil bei allen indirekten Verfahren zu vernachlässigen ist. Der in Abschnitt 3.2.1.2 beschriebene singuläre Fall tritt bei dieser Art von Gütefunktionalen nicht auf. In allen betrachteten Szenarien besitzt das Gesamtsystem bestehend aus den Systemzuständen und den adjungierten Zuständen immer an der Imaginärachse gespiegelte Eigenwerte und ist damit instabil, weshalb eine Vorwärtsintegration der adjungierten Zustände problematisch ist - insbesondere deshalb, weil eine gute Startschätzung der adjungierten Zustände ohne vorherige Kenntnis der Lösungstrajektorien nicht möglich ist. Aus diesem Grund ist das wohl einfachste Verfahren - das indirekte Einfachschießverfahren - nicht für die Lösung komplizierterer Systeme geeignet. Zwar lässt sich die numerische Stabilität mithilfe des Mehrfachschießverfahrens verbessern, allerdings steigt dadurch der Rechenaufwand, weshalb auch dieses Verfahren als ungeeignet bewertet wird.

Das indirekte Diskretisierungsverfahren ist gegenüber den Schießverfahren numerisch deutlich robuster, da anstelle eines Anfangswertproblems ein Randwertproblem gelöst wird und dadurch die kompletten Randbedingungen immer berücksichtigt werden. Allerdings muss die Diskretisierungsschrittweite für eine genaue Lösung möglichst klein gewählt werden, wodurch der Rechenaufwand stark ansteigt. Dies zeigt sich vor allem dann, wenn die optimalen Trajektorien für ein großes Zeitintervall bestimmt werden sollen. Werden beispielsweise die kanonischen DGL für ein dreistufiges Integratorsystem hergeleitet, ergibt sich ein Gesamtsystem 6. Ordnung. Soll für dieses System das Randwertproblem mithilfe des indirekten Diskretisierungsverfahrens mit einer Schrittweite von $T_s = 0.1\mathrm{s}$ gelöst werden, steigt die Anzahl der Optimierungsvariablen um 60 zusätzliche Variablen pro Sekunde des Optimierungsintervalls. Zusätzlich hat auch in diesem Fall die Startlösung der adjungierten Zustände Einfluss darauf, ob und wie schnell eine Lösung der optimalen Trajektorien gefunden werden kann - je weiter der Startwert von der optimalen Lösung entfernt liegt, desto länger dauert die Optimierung. Aus diesen Gründen wird auch das Diskretisierungsverfahren nicht als bevorzugtes Lösungsverfahren herangezogen.

Das Gradientenverfahren stellt eine effiziente Lösungsmethode dar, die zudem aufgrund der sequenziellen Vorwärts- und Rückwärtsintegration nicht mit den instabilen Eigenmoden zu kämpfen hat und daher numerisch robust ist. Allerdings hat das Gradientenverfahren in der zuvor vorgestellten Variante einen entscheidenden Nachteil für die Anwendung auf das AD-Plaunungsproblem: Die robuste und effiziente Umsetzung ist nur für entkoppelte Randbedingungen möglich. Diese Eigenschaft hätte zur Folge, dass alle Endzustände $\boldsymbol{x}(t_f)$ frei bleiben müssten, damit die adjungierten Endzustände $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$ durch die Transversalitätsbedingung (3.21) festgelegt wären. In vielen Szenarien im Kontext des AD ist dies allerdings nicht möglich, da beispielsweise Endzustände wie die zurückzulegende Strecke oder die Endgeschwindigkeit als Randbedingung vorgegeben werden müssen. Für solche Szenarien stellt das Gradientenverfahren keine geeignete Lösungsmethode dar.

Letztlich bleibt noch das indirekte Kollokationsverfahren, das effiziente und genaue Lösungen für das AD-Planungsproblem liefert. Das Kollokationsverfahren hat den Vorteil, dass es aufgrund der stückweisen Approximation der Lösungstrajektorien nicht den negativen Einflüssen der instabilen Eigenmoden unterliegt. Außerdem kann das Verfahren unter Berücksichtigung allgemeiner Randbedingungen und freier Endzeiten für eine große Klasse von Systemen angewendet werden, weshalb es sich für verschiedene Problemstellungen des AD und Fahrszenarien als besonders geeignet herausstellt. Eine besonders recheneffiziente MATLAB-Implementierung mit integrierter Wahl der Gitter- bzw. Kollokationspunkte, die neben den DGL zusätzlich die Berücksichtigung von unbekannten Parametern (freie Endzeit) zulässt und die Erweiterung auf MPR (interne GNB) ermöglicht, ist mit der Funktion `bvp4c` gegeben, die nachfolgend kurz erläutert werden soll.

3.6.3.1 bvp4c-Solver

Die Eigenschaft, dass sich Kollokationsverfahren mit stückweise definierten Polynomen durch RKV ausdrücken lassen, machen sich Kierzenka und Shampine bei der Entwicklung des `bvp4c`-Solvers zu Nutze [54]. Auf den N Subintervallen wird die Lösung des ZPR unter Verwendung der Lobatto-Kollokation (siehe 3.6.1.4) durch kubische Polynome approximiert, die neben den Randbedingungen (3.19)-(3.22) noch die Kollokationsbedingungen (3.58) an den Kollokationsstellen und die Stetigkeitsbedingungen (3.59) an den Intervallgrenzen erfüllen [54]. Mit (3.58) und (3.59) erhält man so auf dem Gesamtintervall glatte Funktionen, die die Eigenschaft $S(t) \in \mathcal{C}^1[t_0, t_f]$ besitzen [54]. Die Verwendung der Lobatto-Kollokation mit $k = 3$ führt dabei auf ein 3-stufiges RKV, welches mit der Schrittweite $h = t_{i+1} - t_i$ und

$$k_1 = f(t_i, x_i) \tag{3.62}$$

$$k_2 = f(t_{i+\frac{1}{2}}, x_i + \frac{h}{24}(5k_1 + 8k_2 - k_3)) \tag{3.63}$$

$$k_3 = f(t_{i+1}, x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)) = f(t_{i+1}, x_{i+1}) \tag{3.64}$$

auf das als *Simpsonregel* bekannte implizite RKV

$$x_{i+1} - x_i = \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \tag{3.65}$$

führt [51], dessen Fehlerordnung mit $\mathcal{O}(h^4)$ angegeben werden kann [54]. Mithilfe dieser Formulierung lässt sich eine hohe Lösungsgenauigkeit erzielen [54]. Eine residuengesteuerte Gitteranpassung, die den Fehler der Schätzung auf jedem Subintervall auswertet, trägt dazu bei, dass auch bei schlechter Gitterwahl akkurate Lösungen gefunden werden können [54]. Zusätzlich lassen sich unbekannte Parameter (z.B. ein freier Endzeitpunkt) und allgemeine Randbedingungen berücksichtigen, wodurch die

Funktion flexibel für verschiedene Problemstellungen angewendet werden kann. Darüber hinaus können auch interne GNB berücksichtigt und so neben ZPR auch allgemeine MPR gelöst werden. Damit stellt dieser Solver eine effiziente und genaue Lösungsmethode für eine breite Klasse von Randwertproblemen dar.

4 Fahrzeugmodellierung und Herleitung der kanonischen Zustandsgleichungen

Dieses Kapitel dient der Modellierung der Fahrzeugbewegung und der Herleitung der aus dem Fahrzeugmodell resultieren kanonischen Zustandsgleichungen. Zunächst wird dazu die Bewegung des Fahrzeugs in Frenet-Koordinaten relativ zu einer Referenzkurve modelliert. Das Fahrzeug wird dabei als masseloser Punkt angenommen, dessen Bewegung mithilfe eines kinematischen Einspurmodells beschrieben werden kann[1]. Anschließend wird das Gesamtmodell nach Gleichung (3.18) aus der Modellierung der Fahrzeugdynamik unter Anwendung der Optimalitätsbedingungen (3.15)-(3.17) aufgestellt. Schließlich werden verschiedene Modellbeschreibungen mit unterschiedlichem Detailgrad betrachtet und deren Nutzen für die Berücksichtigung der in Kapitel 2 erarbeiteten Komfortmerkmale diskutiert.

4.1 Formulierung der Fahrzeugbewegung in Frenet-Koordinaten

Oftmals ist die Beschreibung der Fahrzeugposition und dessen Bewegung in einem globalen Koordinatensystem nicht relevant. Dies gilt insbesondere bei der Fahrzeugstabilisierung und der Planung optimaler Trajektorien zur Durchführung von bestimmten Fahrmanövern. In solchen Fällen bietet sich eine Beschreibung der Fahrzeugbewegung relativ zu einer gegebenen Referenzkurve $\mathcal{R}$ an [52]. In der Realität kann diese Referenzkurve beispielsweise durch Fahrbahnmarkierungen gegeben sein. Die Bewegung eines Punkts $\mathcal{P}_r$ entlang der Referenzkurve kann mithilfe der senkrecht zueinander stehenden Vektoren $\vec{\mathrm{n}}(s_r)$ und $\vec{\mathrm{t}}(s_r)$ beschrieben werden. Der Tangentenvektor $\vec{\mathrm{t}}(s_r)$ ist dabei ausgehend von $\mathcal{P}_r$ immer tangential zu $\mathcal{R}$ ausgerichtet und der Normalenvektor $\vec{\mathrm{n}}(s_r)$ steht senkrecht darauf [52]. Da die Krümmung der Referenzkurve $\kappa_{\mathrm{ref}}(s_r)$ veränderlich ist, sind die beiden Vektoren als ortsabhängige Größen bzw. in Abhängigkeit der entlang von $\mathcal{R}$ zurückgelegten Wegstrecke s_r definiert [55]. Das Frenet-Koordinatensystem mit dem Fußpunkt $\mathcal{P}_r$ und den beiden Richtungsvektoren $\vec{\mathrm{n}}$ und $\vec{\mathrm{t}}$ wird im Folgenden auch mit $\mathcal{F}_r = \{\mathcal{P}_r, \vec{\mathrm{n}}, \vec{\mathrm{t}}\}$ bezeichnet. Des Weiteren wird das fahrzeugfeste Koordinatensystem $\mathcal{F}_f = \{\mathcal{P}_f, \vec{x}_f, \vec{y}_f\}$ definiert. Wie bereits bei $\mathcal{F}_r$ handelt es sich dabei um ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Dessen Ursprung liegt im Schwerpunkt $\mathcal{P}_f$ des Fahrzeugs, welches als punktförmig angenommen wird. Die Vektoren $\vec{x}_f$ und $\vec{y}_f$ beschreiben die Bewegung aus Sicht des Fahrzeugs, wobei $\vec{x}_f$ entlang der Längsachse des Fahrzeugs nach vorne gerichtet ist und $\vec{y}_f$ entsprechend orthogonal dazu nach links orientiert ist. Wie bereits erläutert ist die Beschreibung der Fahrzeugbewegung in einem globalen Koordinatensystem für die Planung der optimalen Trajektorien nicht von Interesse. Dennoch wird ein globales Koordinaten System $\mathcal{F}_g = \{0, \vec{x}_g, \vec{y}_g\}$ definiert, welches im Ursprung liegt und dessen Richtungsvektoren $\vec{x}_g$ und $\vec{y}_g$ aus Sicht der Vogelperspektive stets nach rechts bzw. nach oben zeigen. Dieses Koordinatensystem wird insbesondere für die Visualisierung der Fahrzeugbewegung verwendet.

[1] Es wird ausschließlich eine zweidimensionale Bewegung des Fahrzeugs parallel zur Straße berücksichtigt, weshalb die Komponente der Fahrzeughöhe bei der Beschreibung der Fahrzeugposition stets vernachlässigt wird.

Alle Koordinatensysteme und die Fahrzeugbewegung sind in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt. Durch den Pfeil, der auf einigen der Größen dargestellt ist, soll hervorgehoben werden, dass es sich dabei um vektorielle Größen handelt.

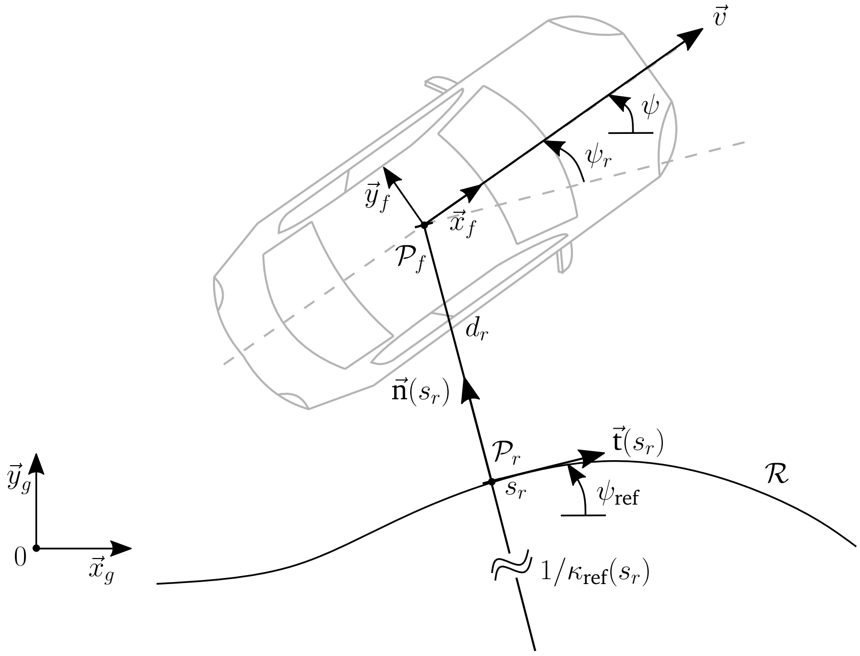


Abbildung 4.1: Kinematisches Einspurmodell eines Fahrzeugs, das sich entlang einer vorgegebenen Referenzkurve $\mathcal{R}$ bewegt.

4.1.1 Beschreibung der Relativbewegung

Die Referenzkurve $\mathcal{R}$ wird durch die wegabhängige Krümmung $\kappa_{\text{ref}}(s_r)$ beschrieben. Der Winkel ψ_{ref} stellt dabei den Winkel zwischen $\mathcal{R}$ und dem globalen Koordinatensystem $\mathcal{F}_g$ dar. Es wird vereinfachend angenommen, dass keine Schwimmbewegungen im Fahrzeug auftreten. Das bedeutet, dass der Kurswinkel des Fahrzeugs mit dem Gierwinkel ψ übereinstimmt und die Fahrzeuggeschwindigkeit v immer entlang der Längsachse wirkt, also $\dot{x}_f = v$ gilt. Des Weiteren wird mit d_r der seitliche Abstand zwischen dem Fahrzeug und der Referenzkurve eingeführt, wobei d_r wie bereits $\vec{\mathrm{n}}(s_r)$ senkrecht zur Referenzkurve orientiert ist und damit dem normalen Abstand zwischen $\mathcal{P}_f$ und $\mathcal{P}_r$ entspricht [52]. Der seitliche Abstand ist dabei so definiert, dass d_r positive Werte annimmt, wenn sich das Fahrzeug links von $\mathcal{R}$ befindet. Der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung des Fahrzeugs und der Referenzkurve wird durch ψ_r beschrieben und ist als

$$\psi_r = \psi - \psi_{\text{ref}} \tag{4.1}$$

definiert [52]. Ist der Gierwinkel ψ des Fahrzeugs entgegen dem Uhrzeigersinn bezüglich $\mathcal{F}_g$ größer als der Winkel ψ_{ref} der Referenzkurve, nimmt ψ_r positive Werte an. Mit diesen Definitionen ergeben sich nach [52] die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\dot{s}_r = \frac{v\cos\psi_r}{1-d_r\kappa_{\text{ref}}(s_r)} \tag{4.2}$$

$$\dot{d}_r = v\sin\psi_r \tag{4.3}$$

$$\dot{\psi}_r = \dot{\psi} - \dot{\psi}_{\text{ref}} = \kappa v - \frac{\kappa_{\text{ref}}(s_r)v\cos\psi_r}{1-d_r\kappa_{\text{ref}}(s_r)} \tag{4.4}$$

Die Größe κ in Gleichung (4.4) steht für die tatsächlich vom Fahrzeug durchfahrene Krümmung. Je nach Modellordnung kann diese als Systemzustand oder auch als Stellgröße verwendet werden. Die DGL für die Fahrzeuggeschwindigkeit v und die Längsbeschleunigung a_x lauten

$$\dot{v} = a_x \tag{4.5}$$

$$\dot{a}_x = j_x\,, \tag{4.6}$$

wobei j_x den Längsruck bezeichnet. Analog zu κ gilt für die Längsbeschleunigung, dass diese entweder als Systemzustand oder als Stellgröße verwendet werden kann. Die Wahl der Stellgrößen hängt von der betrachteten Systemordnung ab und hat dabei Einfluss darauf, ob die Größen Quer- und Längsruck im Gütefunktional berücksichtigt werden können, wobei dies in Abschnitt 4.2 genauer erläutert wird. Die Fahrzeugposition im globalen Koordinatensystem $\mathcal{F}_g$ kann durch Integration der Gleichungen

$$\dot{x}_g = v\cos\psi \tag{4.7}$$

$$\dot{y}_g = v\sin\psi \tag{4.8}$$

berechnet werden.

4.1.1.1 Klothoiden

Übergänge zwischen Kurven oder Geraden und Kurven im Straßenverkehr sind im Allgemeinen als Klothoiden angelegt, deren Krümmung sich proportional zur Länge der Kurve verhält [56]. Die Verwendung von Klothoiden im Straßenbau hat den Vorteil, dass sprunghafte Lenkänderungen vermieden und dadurch weiche und stetige Lenkbewegungen ermöglicht werden [56]. Dies hat zur Folge, dass sich die Querbeschleunigung kontinuierlich ändert und Ruck behaftete Änderungen vermieden werden [56]. Die Krümmung einer Klothoide lässt sich alllgemein als

$$\kappa_{\text{ref}}(s_r) = \kappa'_{\text{ref}}s_r + \kappa_{\text{ref},0} \tag{4.9}$$

angeben [52]. Mit $\kappa_{\text{ref},0}$ wird dabei die Anfangskrümmung der Klothoide bezeichnet und κ'_{ref} gibt die konstante Änderung der Krümmung mit dem Streckenverlauf an [52]. Die Parametrierung von Klothoiden als Trassierungselement im Bau von Autobahnen ist in [56] geregelt. Die Krümmungsänderung κ'_{ref} ist mit

$$\kappa'_{\text{ref}} = \frac{1}{A^2}\,, \quad \text{mit } \frac{R}{3} \leq A \leq R \tag{4.10}$$

gegeben, wobei A als Klothoidenparameter bezeichnet wird und R den kleinsten Radius der zu durchfahrenden Klothoide angibt [56]. Die zulässigen Minimalradien von Autobahnkurven sind abhängig von der erlaubten Geschwindigkeit auf dem jeweiligen Streckenabschnitt festgelegt. Im Bereich hoher Geschwindigkeiten ($80\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \leq v \leq 130\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$), die beispielsweise bei langen Kurven auf Autobahnen vorkommen, ergeben sich damit Werte für den minimalen Klothoidenparameter von $90 \leq A \leq 300$ [56]. Für den bei Autobahnausfahrten relevanten niedrigeren Geschwindigkeitsbereich ($30\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \leq v \leq 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$), lässt sich der Bereich analog zu $10 \leq A \leq 83,33$ bestimmen [56].

4.1.1.2 Vereinfachungen und Annahmen

Die Referenzkurve dient nicht nur der Beschreibung der Fahrzeugbewegung relativ zu dieser, sondern auch als Orientierung für die abzufahrende Strecke. Daher ist in vielen Anwendungsfällen die Annahme berechtigt, dass sich das Fahrzeug in der Nähe der Referenzkurve befindet und eine ähnliche Orientierung bezogen auf $\mathcal{F}_g$ hat. Mit kleinen Winkeln ψ_r gilt $\sin\psi_r \approx \psi_r$ und $\cos\psi_r \approx 1$. Die Krümmung ist allgemein als Kehrwert des Radius definiert. Geht man davon aus, dass die kleinsten Wenderkreisradien, die mit Pkw durchfahren werden können, in etwa bei $5\,\mathrm{m}$ liegen, so beträgt die größtmögliche Krümmung $0,2\,\frac{1}{\mathrm{m}}$ **Quelle**. Zusammen mit der Annahme, dass neben ψ_r auch d_r kleine Werte annimmt, kann die Vereinfachung $1 - d_r\kappa_{\text{ref}}(s_r) \approx 1$ getroffen werden, mit der schließlich $\dot{s}_r \approx v$ folgt. Damit gibt s_r die tatsächlich vom Fahrzeug zurückgelegte Strecke in sehr guter Näherung wieder. Es ist jedoch zu beachten, dass diese Annahme ihre Gültigkeit verliert, je weiter sich das Fahrzeug von der Referenzkurve entfernt, da s_r dann nur noch die orthogonal auf $\mathcal{R}$ projizierte Strecke angibt. Eine weitere Vereinfachung, die in einigen Fällen Anwendung findet, ist die Annahme, dass die Krümmung der Referenzkurve $\kappa_{\text{ref}}(s_r)$ konstant ist und nicht von s_r abhängt und damit $\kappa_{\text{ref}}(s_r) = \kappa_{\text{ref},0}$ gilt. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn eine reine Geradeausfahrt ohne Krümmung oder eine Kreisfahrt mit konstanter Krümmung betrachtet werden soll

4.2 Adjungierte DGL und dynamisches Gesamtmodell

Nachdem die Systemdynamik in Frenet-Koordinaten und die Beschreibung der Referenzkurve erläutert wurden, wird nun ein Gütefunktional der Form (3.4) eingeführt, das zum Aufstellen der Hamilton-Funktion und zur Herleitung der Gesamtsystemdynamik verwendet wird und dabei die in Kapitel 2 herausgearbeiteten Kriterien zur Bewertung des Fahrkomforts verwendet.

Die als komfortrelevant erachtete Reisezeit kann über die freie Endzeit t_f des Gütefunktionals berücksichtigt werden und wird dabei als Teil der Endkosten $V(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)$ bestraft. Dadurch wird das Optimierungsziel im Sinne einer kürzeren Reisezeit schneller erreicht. Zudem werden die Größen Quer- und Längsbeschleunigung sowie Quer- und Längsruck bestraft, da diese den Fahrkomfort der Fahrzeuginsass_innen maßgeblich beeinflussen. Um zu gewährleisten, dass sich das Fahrzeug immer nahe der Referenzkurve befindet, wird zusätzlich die Querabweichung d_r bestraft. Somit ergibt sich das verwendete Gütefunktional zu

$$J(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t, t_f) = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_{a_x} a_x^2 + \frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2 + \frac{1}{2} f_{a_y} a_y^2 + \frac{1}{2} f_{j_y} j_y^2 + \frac{1}{2} f_{d_r} d_r^2 \mathrm{d}t\,. \tag{4.11}$$

Die Faktoren f_{a_x}, f_{j_x}, f_{a_y}, f_{j_y} und f_{d_r} stehen für Gewichte, mit denen der Einfluss der jeweiligen Größe auf das Gütefunktional variiert werden kann. In dieser Formulierung, das heißt, wenn der Ruck in Längs- wie auch in Querrichtung berücksichtigt werden soll, müssen die Eingangsgrößen des Systems zum Erreichen der entsprechenden Systemordnung zu $\boldsymbol{u} = [j_x,\, \dot{\kappa}]^T$ gewählt werden und mit κ muss die Krümmung als zusätzlicher Zustand mit der trivialen Bewegungsgleichung $\dot{\kappa} = \dot{\kappa}$ eingeführt werden. Der Zustandsvektor lautet dann $\boldsymbol{x} = [s_r,\, v,\, a_x,\, d_r,\, \psi_r,\, \kappa]^T$. Die Querbeschleunigung des Fahrzeugs lässt sich aus der Geschwindigkeit und der Kurvenkrümmung zu

$$a_y = \kappa v^2 \tag{4.12}$$

bestimmen [57]. Der Querruck lässt sich durch zeitliches Ableiten von a_y berechnen und lautet

$$j_y = \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\kappa v^2}{\mathrm{d}t} = \dot{\kappa} v^2 + 2\dot{v}v\kappa = \dot{\kappa}v^2 + 2a_x v\kappa \,. \tag{4.13}$$

Zur Lösung des Optimierungsproblems mithilfe der indirekten Lösungsmethode kann anschließend die Hamilton-Funktion nach Gleichung (3.14) aufgestellt und partiell nach den einzelnen Systemzuständen zur Herleitung der adjungierten DGL abgeleitet werden. Die Hamilton-Funktion lautet

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = & \frac{1}{2} f_{a_x} a_x^2 + \frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2 + \frac{1}{2} f_{a_y} (\kappa v^2)^2 + \frac{1}{2} f_{j_y} (\dot{\kappa} v^2 + 2a_x v\kappa)^2 + \frac{1}{2} f_{d_r} d_r^2 + \ldots \\ & \ldots + \frac{\lambda_1 v \cos\psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)} + \lambda_2 a_x + \lambda_3 j_x + \lambda_4 v \sin\psi_r + \lambda_5 (\kappa v - \frac{\kappa_{\text{ref}}(s_r) v \cos\psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)}) + \lambda_6 \dot{\kappa} \end{aligned} \tag{4.14}$$

und aus Gleichung (3.16) wiederum folgen die DGL für die adjungierten Zustände

$$\dot{\lambda}_1 = -\Big(\frac{d_r \kappa'_{\text{ref}} \lambda_1 v \cos\psi_r}{(1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r))^2} - \frac{\kappa'_{\text{ref}} \lambda_5 v \cos\psi_r}{(1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r))^2}\Big) \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 = & -\Big(2 f_{a_y} \kappa^2 v^3 + 2 f_{j_y} \dot{\kappa}^2 v^3 + 4 f_{j_y} \kappa^2 a_x^2 v + 6 f_{j_y} \dot{\kappa}\kappa a_x v^2 + \ldots \\ & \ldots + \frac{\lambda_1 \cos\psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)} + \lambda_4 \sin\psi_r + \lambda_5 (\kappa - \frac{\kappa_{\text{ref}}(s_r) \cos\psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)})\Big) \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\Big(f_{a_x} a_x + 4 f_{j_y} \kappa^2 a_x v^2 + 2 f_{j_y} \dot{\kappa}\kappa v^3 + \lambda_2\Big) \tag{4.17}$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\Big(f_{d_r} d_r + \frac{\kappa_{\text{ref}}(s_r) \lambda_1 v \cos\psi_r}{(1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r))^2} - \frac{\kappa_{\text{ref}}(s_r)^2 \lambda_5 v \cos\psi_r}{(1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r))^2}\Big) \tag{4.18}$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\Big(\lambda_4 v \cos\psi_r - \frac{\lambda_1 v \sin\psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)} + \frac{\kappa_{\text{ref}}(s_r) \lambda_5 v \sin\psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)}\Big) \tag{4.19}$$

$$\dot{\lambda}_6 = -\Big(f_{a_y} \kappa v^4 + 4 f_{j_y} \kappa a x^2 v^2 + 2 f_{j_y} \dot{\kappa} a_x v^3 + \lambda_5 v\Big) \,. \tag{4.20}$$

Mit den DGL der adjungierten Zuständen lautet das dynamische Gesamtsystem

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_r & \dot{v} & \dot{a}_x & \dot{d}_r & \dot{\psi}_r & \dot{\kappa} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 & \dot{\lambda}_2 & \dot{\lambda}_3 & \dot{\lambda}_4 & \dot{\lambda}_5 & \dot{\lambda}_6 \end{bmatrix}^T \end{bmatrix} \,. \tag{4.21}$$

Aus der Steuerungsgleichung (3.17) folgt

$$j_x = -\frac{\lambda_3}{f_{j_x}} \tag{4.22}$$

$$\dot{\kappa} = \frac{-\lambda_6 - 2 f_{j_y} \kappa a_x v^3}{f_{j_y} v^4} \,, \tag{4.23}$$

Die Randbedingungen (3.19)-(3.21) hängen von der Vorgabe der Anfangs- und Endwerte des jeweiligen Szenarios ab. Für die Transversalitätsbedingung (3.22) lässt sich

$$H(t_f) = -1 \tag{4.24}$$

schreiben, sofern der Endzeitpunkt frei ist und in den Endkosten $V(\boldsymbol{x}(t_f), t_f)$ ausschließlich t_f bestraft wird.

Die adjungierten DGL (4.15)-(4.20) können unter bestimmten Voraussetzungen noch vereinfacht werden. Sollen der Längs- und/oder Querruck nicht berücksichtigt werden, so können die Stellgrößen $\boldsymbol{u} = [a_x,\, \kappa]^T$ gewählt werden und das System wird entsprechend um die nicht benötigten adjungierten und Systemzustände reduziert. Ähnliches gilt auch, wenn die Querdynamik vernachlässigt werden soll. Dieser Fall tritt ein, wenn eine reine Geradeausfahrt untersucht wird. Dann kann die Bestrafung der querdynamischen Größen vernachlässigt und das System entsprechend reduziert werden. Die in 4.1.1.2 angesprochene Annahme konstanter Referenzkrümmung führt dazu, dass die Hamilton-Funktion nicht mehr von s_r abhängt, wodurch die partielle Ableitung verschwindet und damit $\dot{\lambda_1} = 0$ gilt. Es wird deutlich, dass je nach Fahrszenario und Anwendung der Komfortkriterien verschiedene Formulierungen ausgehend von dieser allgemeinen Beschreibung abgeleitet werden können.

5 Analyse verschiedener Fahrszenarien und Interpretation des Lösungsraumes

In diesem Kapitel wird das im vorangegangenen Kapitel hergeleitete Gesamtsystem mit den Methoden aus Kapitel 3 für verschiedene Fahrszenarien gelöst. Dazu werden zunächst einige Vereinfachungen getroffen, mit denen es teilweise möglich ist, eine analytische Lösung zu finden. Die Erkenntnisse der einfacheren Szenarien werden dann verwendet, um die Lösungen komplexerer Szenarien zu interpretieren.

5.1 Geradeausfahrt

Als erstes wird das Szenario einer reinen Geradeausfahrt betrachtet. Dazu wird das Fahrzeugmodell auf die Bewegung in longitudinaler Richtung reduziert und angenommen, dass sich das Fahrzeug exakt auf der Referenzkurve mit $\kappa_{\text{ref}}(s_r) = 0$ bewegt - die querdynamischen Größen d_r, ψ_r und κ werden dabei vernachlässigt. Da sich das Fahrzeug auf der Referenzkurve befindet, ist durch s_r die exakt vom Fahrzeug zurückgelegte Strecke gegeben. Die Systemdynamik des Fahrzeugs ist dann durch die Gleichungen

$$\dot{s}_r = v \tag{5.1}$$

$$\dot{v} = a_x \tag{5.2}$$

$$\dot{a}_x = j_x \,, \tag{5.3}$$

vollständig beschrieben - es ergibt sich ein Integratorsystem 3. Ordnung. Die einzige Stellgröße ist in diesem Fall der Längsruck j_x.

5.1.1 Lösungsraum bei energieoptimalem Gütefunktional

Zunächst wird die Lösung des Szenarios Geradeausfahrt für ein energieoptimales Gütefunktional bestimmt. Wird im Gütefunktional die Stellgröße eines Systems bestraft, so wird von einem energieoptimalen Gütefunktional gesprochen, da das Ziel der Optimierung darin besteht, die benötigte Stellgröße möglichst gering zu halten. Diese ist häufig direkt mit der aufzuwendenden Energie verknüpft [41]. Wird zusätzlich noch die Endzeit als Gütekriterium bestraft, so ergibt sich in dem vereinfachten Szenario Geradeausfahrt das Gütefunktional

$$J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t, t_f) = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_u u^2 \mathrm{d}t = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2 \mathrm{d}t \,. \tag{5.4}$$

Die Formulierung eines Integratorsystems mit einem energieoptimalen Gütefunktional soll nachfolgend verallgemeinert betrachtet werden. Wird die Stellgröße eines Integratorsystems mit der Ordnung n als die n-te Ableitung des ersten Zustands gewählt, kann das Gütefunktional als

$$J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t, t_f) = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_u {x_1^{(n)}}^2 \mathrm{d}t\,. \tag{5.5}$$

geschrieben werden, wobei der eingeklammerte Hochindex (n) die n-te Zeitableitung bezeichnet. Die Hamilton-Funktion ergibt sich zu

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \frac{1}{2} f_u {x_1^{(n)}}^2 + \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)} + \ldots + \lambda_n x_1^{(n)} \tag{5.6}$$

und die adjungierten DGL lauten dann

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \tag{5.7}$$
$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \tag{5.8}$$
$$\vdots \tag{5.9}$$
$$\dot{\lambda}_n = -\lambda_{n-1}\,. \tag{5.10}$$

Daraus wird ersichtlich, dass sich mit $x_1^{(n)} = -\frac{\lambda_n}{f_u}$ alle Zeitverläufe durch Integration ausgehend von $\lambda_1 = \text{konst.}$ bestimmen lassen. Dabei erhält man Polynome deren Grad mit jeder Integration um eins steigt. Bei einem System n-ter Ordnung müssen insgesamt $2n$ Integrationen durchgeführt werden, sodass die Lösung von x_1 ein Polynom vom Grad $2n-1$ darstellt. Der höchste Polynomgrad ist also immer ungerade. Dabei lässt sich feststellen, dass der Einfluss der höheren Exponenten der Polynome durch die mehrfache Integration abnimmt. Der Lösungsraum lässt sich wie folgt geschlossen angeben:

$$\lambda_1 = c_1 \tag{5.11}$$
$$\lambda_2 = -c_1 t + c_2 \tag{5.12}$$
$$\vdots \tag{5.13}$$
$$\lambda_n = (-1)^{n-1} \frac{c_1}{(n-1)!} t^{n-1} + (-1)^{n-2} \frac{c_2}{(n-2)!} t^{n-2} + \ldots + (-1)^1 c_{n-1} t + c_n \tag{5.14}$$
$$x_n = (-1)^n \frac{c_1}{f_u (n)!} t^n + (-1)^{n-1} \frac{c_2}{(n-1)!} t^{n-1} + \ldots - \frac{c_n}{f_u} t + x_{n,0} \tag{5.15}$$
$$x_{n-1} = (-1)^n \frac{c_1}{f_u (n+1)!} t^{n+1} + (-1)^{n-1} \frac{c_2}{(n)!} t^n + \ldots - \frac{c_n}{2 f_u} t^2 + x_{n,0} t + x_{n-1,0} \tag{5.16}$$
$$\vdots \tag{5.17}$$
$$\begin{aligned} x_1 = (-1)^n \frac{c_1}{f_u (2n-1)!} t^{2n-1} + (-1)^{n-1} \frac{c_2}{(2n-2)!} t^{2n-2} + \ldots - \frac{c_n}{f_u (n)!} t^n + \ldots \\ \ldots + \frac{x_{n,0}}{(n-1)!} t^{n-1} + \frac{x_{n-1,0}}{(n-2)!} t^{n-2} + \ldots + x_{2,0} t + x_{1,0} \end{aligned} \tag{5.18}$$

Damit lautet die Lösung des Integratorsystems 3. Ordnung für die Geradeausfahrt

$$\lambda_1 = c_1 \tag{5.19}$$
$$\lambda_2 = -c_1 t + c_2 \tag{5.20}$$
$$\lambda_3 = \frac{c_1}{2}t^2 - c_2 t + c_3 \tag{5.21}$$
$$a_x = -\frac{c_1}{6f_{j_x}}t^3 + \frac{c_2}{2f_{j_x}}t^2 - \frac{c_3}{f_{j_x}}t + c_a \tag{5.22}$$
$$v = -\frac{c_1}{24f_{j_x}}t^4 + \frac{c_2}{6f_{j_x}}t^3 - \frac{c_3}{2f_{j_x}}t^2 + c_a t + c_v \tag{5.23}$$
$$s = -\frac{c_1}{120f_{j_x}}t^5 + \frac{c_2}{24f_{j_x}}t^4 - \frac{c_3}{6f_{j_x}}t^3 + \frac{c_a}{2}t + c_v t + c_s \tag{5.24}$$

Letztendlich können die in den Gleichungen auftretenden unbekannten Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3, c_a, c_v und c_s mithilfe der Randbedingungen (3.19)-(3.21) bestimmt und damit das Optimierungsproblem gelöst werden. Im Fall, dass der Endzeitpunkt frei ist, kann t_f unter Zuhilfenahme von Gleichung (3.22) bestimmt werden. Die dynamischen Gleichungen des Gesamtsystems können auch in der für die Beschreibung linearer Systeme üblichen Matrixschreibweise $\dot{\boldsymbol{z}} = \mathbf{A}\boldsymbol{z}$ geschrieben werden. Mit $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^T & \boldsymbol{\lambda}^T\end{bmatrix}^T$ lautet das lineare System

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{f_{j_x}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}\,, \tag{5.25}$$

dessen Eigenwerte erwartungsgemäß alle in Null liegen und das reine Integrationsverhalten des Systems widerspiegeln.

5.1.2 Lösungsraum bei Gütefunktional mit Bestrafung von Längsruck und -beschleunigung

Wird nun neben dem energieoptimalen Anteil noch die ebenfalls komfortrelevante Größe Längsbeschleunigung berücksichtigt, lautet das Gütefunktional für die Geradeausfahrt

$$J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t, t_f) = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2 + \frac{1}{2} f_{a_x} a_x^2 \mathrm{d}t\,. \tag{5.26}$$

Analog zum Vorgehen aus dem vorherigen Abschnitt können die adjungierten DGL aufgestellt werden. Diese lauten nun

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \tag{5.27}$$
$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \tag{5.28}$$
$$\dot{\lambda}_3 = -(f_{a_x} a_x + \lambda_2)\,. \tag{5.29}$$

Das lineare System lässt sich mit

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{f_{j_x}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_{a_x} & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} \tag{5.30}$$

angeben und besitzt im Gegensatz zu dem linearen System aus dem vorherigen Abschnitt zwei Eigenwerte bei $\pm\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}}$. Die restlichen vier Eigenwerte liegen auch bei diesem System in Null. Es zeigt sich allerdings, dass neben dem integrierenden Verhalten auch stabile und instabile Eigenmoden auftreten. Auch in diesem Fall lässt sich die Lösung der DGL analytisch berechnen. Die Lösung von λ_2 kann durch Integration der Konstanten c_1 bestimmt werden. Wird die Steuerungsgleichung $j_x = -\frac{\lambda_3}{f_{j_x}}$ abgeleitet und in Gleichung (5.29) eingesetzt, ergibt sich für die Beschleunigung eine gewöhnliche DGL 2. Ordnung. Durch das Einsetzen erhält man die DGL

$$\dot{j}_x = \ddot{a}_x = \frac{f_{a_x}}{f_{j_x}} a_x + \frac{\lambda_2}{f_{j_x}} = \frac{f_{a_x}}{f_{j_x}} a_x - \frac{c_1}{f_{j_x}} t + \frac{c_2}{f_{j_x}} , \tag{5.31}$$

deren Lösung

$$a_x = k_1 e^{\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t} + k_2 e^{-\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t} + \frac{c_1}{f_{a_x}} t - \frac{c_2}{f_{a_x}} \tag{5.32}$$

lautet, wobei die Faktoren k_1 und k_2 Konstanten bezeichnen, die bei der Lösung der DGL entstehen. Durch zeitliches Differenzieren bzw. Integrieren können aus a_x die Lösungen für j_x, v und s_r ermittelt werden. Diese lauten

$$j_x = k_1 \sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} e^{\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t} - k_2 \sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} e^{-\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t} + \frac{c_1}{f_{a_x}} \tag{5.33}$$

$$v = k_1 \sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}}} e^{\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t} - k_2 \sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}}} e^{-\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t} + \frac{c_1}{2 f_{a_x}} t^2 - \frac{c_2}{f_{a_x}} t + c_v \tag{5.34}$$

$$s = k_1 \frac{f_{j_x}}{f_{a_x}} e^{\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t} + k_2 \frac{f_{j_x}}{f_{a_x}} e^{-\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t} + \frac{c_1}{6 f_{a_x}} t^3 - \frac{c_2}{2 f_{a_x}} t^2 + c_v t + c_s \,. \tag{5.35}$$

Auch hier bestehen die Lösungen der Trajektorien zum Teil aus Polynomen. Allerdings sind die Polynomgrade um zwei geringer als bei der reinen energieoptimalen Lösung. Des Weiteren zeigt sich mit den Exponentialtermen der Einfluss der stabilen und instabilen Moden auf die Systemzustände. Es kann festgestellt werden, dass die optimalen Trajektorien mit geringerer Bestrafung der Längsbeschleunigung zunehmend gegen die Lösung der rein ruckoptimalen Lösung laufen, wie in Abbildung 5.1 zu erkennen ist. Offenbar ergeben sich die Koeffizienten k_1 und k_2 der Exponentialanteile bei der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems derart, dass der Einfluss der "fehlenden" Polynomgrade durch die Exponentialfunktionen ersetzt wird.

5.1.3 Lange Geradeausfahrt

Ein Szenario, in dem die bisherigen Ergebnisse Anwendung finden ist die lange Geradeausfahrt, die nachfolgend eingehend analysiert werden soll. Zunächst wird die Lösung für $f_{a_x} = f_{j_x} = 1$, also für

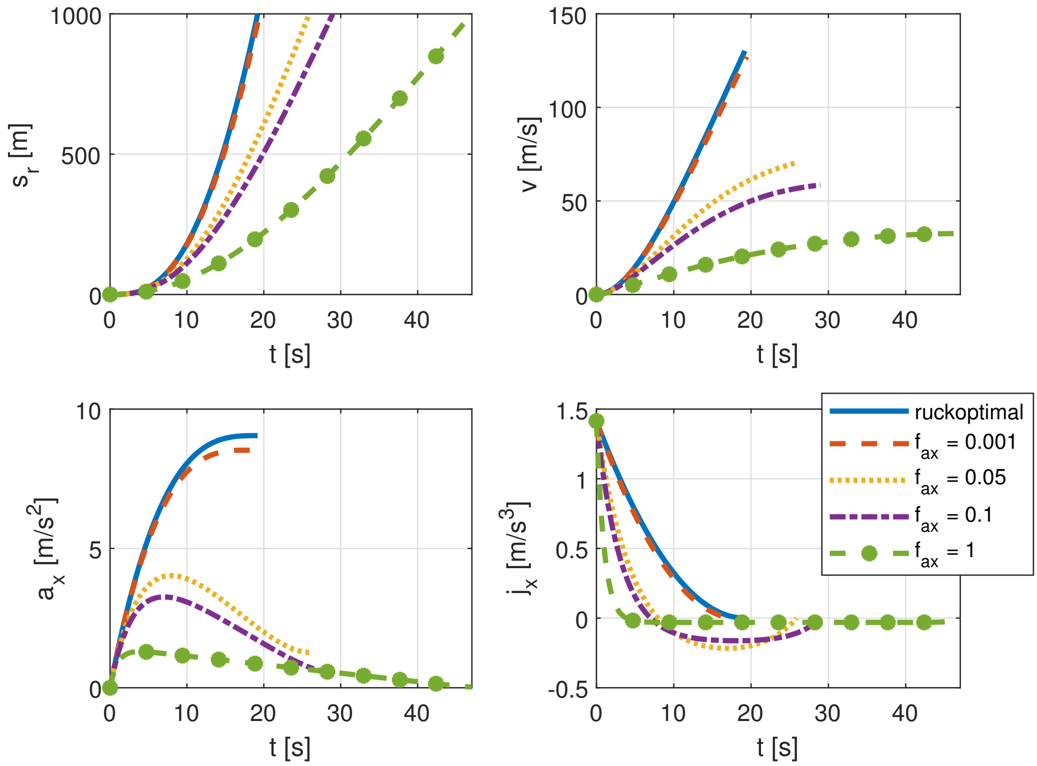


Abbildung 5.1: Lösungstrajektorien der Fahrzeugzustände und der Stellgröße bei einer langen Geradeausfahrt mit $s_f = 1000\,\mathrm{m}$ und freien Endzuständen und freier Endzeit. Für abnehmende Bestrafung der Längsbeschleunigung nimmt die optimale Lösung immer mehr die Form der rein ruckoptimalen Lösung an.

gleiche Bestrafung von Beschleunigung und Ruck betrachtet. Das Szenario einer langen Geradeausfahrt zeichnet sich dadurch aus, dass sich der Zeitverlauf in drei Abschnitte unterteilen lässt. Im ersten Bereich für kleine Zeitpunkte gilt $0 \leq t \ll t_f$, während im dritten Bereich nahe des Endzeitpunkts $0 \ll t \leq t_f$ gilt. In dem Bereich dazwischen gilt $0 \ll t \ll t_f$. Es zeigt sich, dass der Koeffizient des instabilen Teils k_1 sehr geringe Werte im Bereich von $10^{-40} \leq k_1 \leq 10^{-10}$ annimmt, wobei k_2 um einige Größenordnungen größer ist. Dies hat zur Folge, dass der Einfluss des instabilen Anteils erst für große t (im dritten Zeitabschnitt) sichtbar wird und die Trajektorien divergieren, während das Verhalten für kleine t (im ersten Zeitabschnitt) vom stabilen Teil dominiert wird und anschließend abklingt. Im Bereich dazwischen ist der Einfluss des stabilen Anteils bereits abgeklungen und der instabile Anteil ist noch nicht aufgeklungen. Folglich lässt sich die Aussage treffen, dass die Trajektorien für $t \ll t_f$ von links und für $0 \ll t$ von rechts gegen den Polynomanteil konvergieren. Unter der Voraussetzung, dass die beiden Exponentialanteile jeweils nur in einem der drei Bereiche gelten, lassen sich die folgenden Annahmen treffen. Für den ersten Bereich kann der Einfluss der instabilen Mode mit $k_1(\cdot)e^{\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}}t} \approx 0$ angenommen werden. Analog dazu gilt für den Einfluss des stabilen Anteils im dritten Bereich $k_2(\cdot)e^{-\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}}t} \approx 0$. In diesen Bereichen gilt

$$j_x \approx -k_2 \sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} e^{-\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t} + \frac{c_1}{f_{a_x}} \quad \text{für} \quad 0 \leq t \ll t_f \tag{5.36}$$

$$a_x \approx k_2 e^{-\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t} + \frac{c_1}{f_{a_x}} t - \frac{c_2}{f_{a_x}} \quad \text{für} \quad 0 \leq t \ll t_f \,. \tag{5.37}$$

sowie

$$j_x \approx k_1 \sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} e^{\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t} + \frac{c_1}{f_{a_x}} \quad \text{für} \quad 0 \ll t \leq t_f \tag{5.38}$$

$$a_x \approx k_1 e^{\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t} + \frac{c_1}{f_{a_x}} t - \frac{c_2}{f_{a_x}} \quad \text{für} \quad 0 \ll t \leq t_f \,. \tag{5.39}$$

Die Trajektorien im zweiten Bereich lassen sich durch ihre Polynomanteile approximieren. Für die komfortrelevanten Größen Ruck und Beschleunigung gilt dann

$$j_x \approx \frac{c_1}{f_{a_x}} \quad \text{für} \quad 0 \ll t \ll t_f \tag{5.40}$$

$$a_x \approx \frac{c_1}{f_{a_x}} t - \frac{c_2}{f_{a_x}} \quad \text{für} \quad 0 \ll t \ll t_f \,. \tag{5.41}$$

Da die Trajektorien des Rucks und der Beschleunigung für lange Geradeausfahrten offenbar als Konstante bzw. Gerade betrachtet werden können, zu denen die Lösung sowohl von links als auch von rechts hin konvergiert, stellt sich die Frage, ob anhand der Kenntnis über den Lösungsraum, Beschränkungen für die Längsbeschleunigung angegeben werden können.

5.1.3.1 Begrenzung der Längsbeschleunigung

Nachfolgend werden zwei Sets von Randbedingungen untersucht. Kenntnis über die Anfangszustände und damit Vorgabe der Anfangsbedingungen $\boldsymbol{x}_0$ wird bei allen Szenarien vorausgesetzt. Allerdings kann die Vorgabe der Endwerte variiert werden. Zwei Sets an Endbedingungen erweisen sich bei der hier betrachteten langen Geradeausfahrt als besonders geeignet. Neben der Vorgabe einer Strecke s_f, die zurückgelegt werden soll und damit der Vorgabe des Endzustands für $s_r(t_f)$, können die Endgeschwindigkeit und -beschleunigung entweder festgelegt oder frei sein. Die Vorgabe von Endgeschwindigkeit und -beschleunigung ist sinnvoll, wenn das Fahrzeug unter Berücksichtigung des Gütefunktionals beispielsweise nach einer festgelegten Strecke unbeschleunigt zum Stehen gebracht werden soll. Wenn hingegen diese beiden Endzustände nicht festgelegt sind, weil das Ziel nur darin besteht, die vorgegebene Strecke unter Berücksichtigung des Gütefunktionals abzufahren, dann können diese Endzustände frei bleiben, wobei sich nach Gleichung (3.21) Endbedingungen für die adjungierten Zustände ergeben.

Feste Endgeschwindigkeit und feste Endbeschleunigung

Zur Klärung der Frage, ob die Längsbeschleunigung beschränkt ist, kann eine Fallunterscheidung für die Vorzeichen der Koeffizienten k_1 und k_2 vorgenommen werden. So lässt sich feststellen, dass der stabile und instabile Anteil in Gleichung (5.32) bei identischem Vorzeichen die gleiche Krümmungsrichtung haben (unabhängig davon, ob das Vorzeichen positiv oder negativ ist). Das bedeutet, dass die Exponentialanteile entweder beide von oben oder beide von unten gegen den linearen Lösungsanteil konvergieren. Für die Lösung des Rucks bedeuten identische Vorzeichen, dass die Krümmungen der Exponentialanteile in der Lösung in Gleichung (5.33) immer entgegengesetzte Richtungen haben und einer der Anteile von oben gegen die Konstante konvergiert, während der andere Teil von unten gegen die Konstante läuft. Aufgrund des streng monotonen Verhaltens der Exponentialfunktionen, ist auch der Ruck über das gesamte Lösungsintervall streng monoton, sodass j_x genau eine Nullstelle hat[1]. Dadurch, dass der Ruck genau eine Nullstelle besitzt, hat a_x genau ein Extremum. Mit der Kenntnis, dass die Beschleunigung ausgehend vom Anfangswert a_0 gegen die Gerade in Bereich zwei konvergiert und anschließend unter Beibehaltung der Krümmungrichtung von der Geraden weg gegen den Endwert a_f läuft, lasst sich feststellen, dass die Beschleunigung bei gleichem Vorzeichen der Koeffizienten k_1 und k_2 stets durch den linearen Anteil der Lösung und die Verbindungsgerade zwischen a_0 und a_f beschränkt ist. In Abbildung 5.2 sind die optimalen Lösungstrajektorien der Fahrzeugzustände s_r, v und a_x sowie der Stellgröße j_x bei vorgegebenen Endzuständen und ansonsten identischer Parametrierung dargestellt. Die Anfangsgeschwindigkeit wurde so gewählt, dass die Vorzeichen der Lösungen von k_1 und k_2 identisch sind. Die Endzustände wurden so gewählt, dass das Fahrzeug nach $1000\,\mathrm{m}$ unbeschleunigt zum Stehen kommt. Der Endzeitpunkt wurde im Sinne einer einheitlichen Darstellung fest zu $t_f = 40\,\mathrm{s}$ gewählt. Das zuvor beschriebene Verhalten der Beschleunigungs- und Rucktrajektorien ist gut in den unteren beiden Graphen zu erkennen. Zum einen lassen sich die beiden Bereiche erkennen, in denen die Lösungen von den Exponentialteilen dominiert werden, sowie der mittlere Bereiche, in dem die Lösungen der Geraden für die Beschleunigung und der Konstanten für den Ruck entsprechen. Zudem zeigt die Abbildung unten links die Beschränkung der Beschleunigung (grau schattiert) durch die Verbindungsgerade der Randwerte und den linearen Anteil der Lösung.

Für den Fall, dass das Vorzeichen der Koeffizenten k_1 und k_2 unterschiedlich ist, haben die Exponentialanteile in j_x dieselbe Krümmungsrichtung und laufen damit beide entweder von oben oder von unten gegen die Konstante, während die Anteile in a_x mit unterschiedlichen Vorzeichen wirken. Damit lässt sich feststellen, dass j_x immer zwei Nullstellen besitzt, weshalb in a_x zwei Extrema auftreten können. Da j_x bei zwei Nullstellen einen Vorzeichenwechsel aufweist, hat die Steigung der Beschleunigung einen Richtungswechsel, woraus abgeleitet werden kann, dass es bei zwei Extrema ein Maximum und ein Minimum gibt und die Lösung von a_x die Verbindungsgerade der Randwerte in einem Punkt schneidet. Dadurch, dass die Exponentialanteile der Lösung auch hier wieder gegen den linearen Anteil konvergieren, kann schließlich auch in diesem Fall argumentiert werden, dass die Beschleunigung stets durch die Verbindungsgerade von a_0 und a_f und den linearen Anteil beschränkt ist, wobei sich die Geraden im mittleren Abschnitt bei

$$t = \frac{a_0 f_{a_x} + c_2}{c_1 - \frac{f_{a_x}(a_f - a_0)}{t_f}} \tag{5.42}$$

schneiden. Das Verhalten für diesen Lösungsfall ist in Abbildung 5.3 dargestellt. In den Graphen der Beschleunigung und des Rucks zeigt sich deutlich das beschriebene Verhalten mit den unterschiedlich gekrümmten Exponentialanteilen sowie die Konvergenz von links und rechts hin zu der jeweiligen Lösung auf dem mittleren Abschnitt. Außerdem ist die Beschränkung der Beschleunigung gut zu erkennen.

Freie Endgeschwindigkeit und freie Endbeschleunigung

Dadurch, dass die Endzustände $v(t_f)$ und $a_x(t_f)$ nicht festgelegt sind, ergeben sich die Endbedingungen $\lambda_2(t_f) = 0$ und $\lambda_3(t_f) = 0 \rightarrow j_x(t_f) = 0$. Bei dieser Wahl der Endbedingungen ist die analytische Herleitung der maximalen und minimalen Beschleunigung möglich, welche nachfolgend betrachtet werden soll.. Da j_x bis auf die beiden Exponentialanteile konstant ist, kann argumentiert werden, dass

[1] Streng genommen muss diese Nullstelle nicht zwangsläufig innerhalb des Lösungsintervalls liegen.

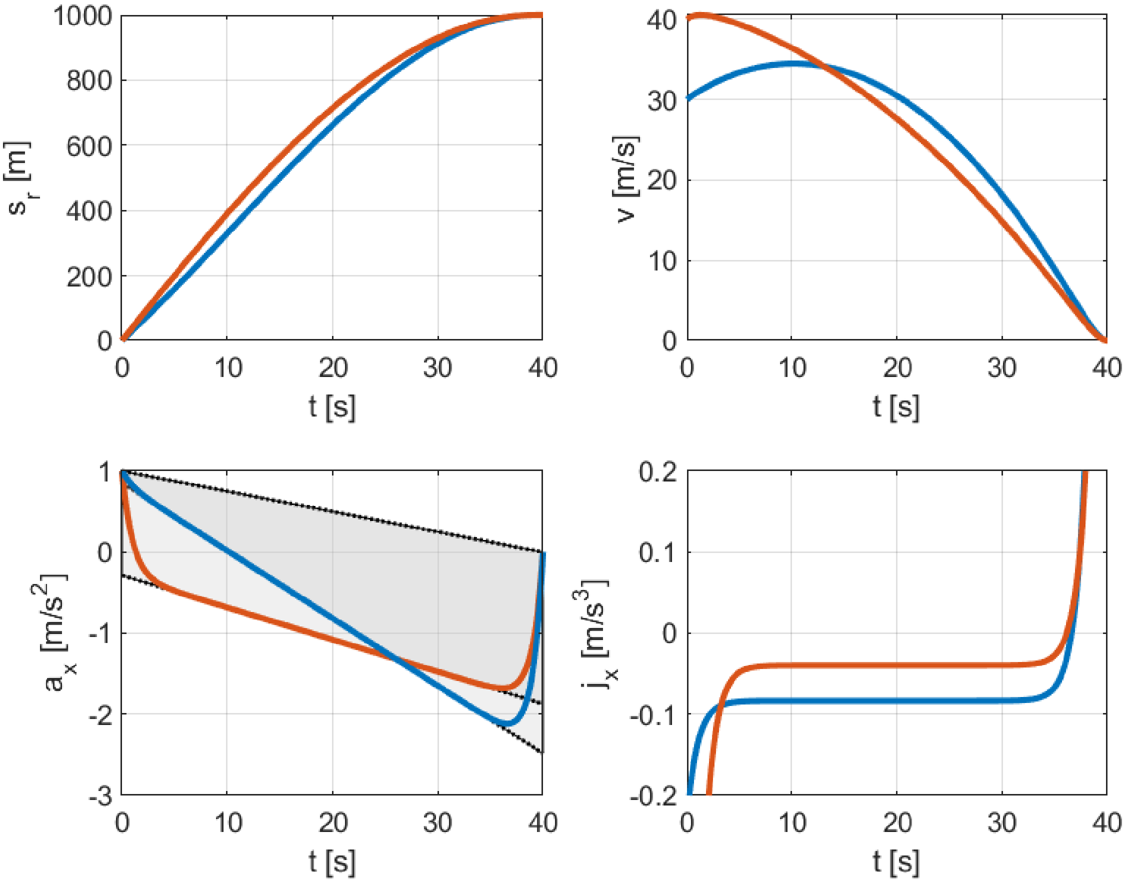


Abbildung 5.2: Lösungstrajektorien der Fahrzeugzustände und der Stellgröße bei einer langen Geradeausfahrt mit $s_f = 1000\,\mathrm{m}$ und fester Endgeschwindigkeit und -beschleunigung. Das Vorzeichen von k_1 und k_2 ist identisch.

der Ruck maximal zwei Nullstellen aufweist, wobei diese nicht in Bereich zwei liegen können (in diesem Bereich ist j_x näherungsweise konstant). Ein Kontinuum an Nullstellen in Bereich zwei ist aufgrund des monotonen Verhaltens der Exponentialfunktionen nicht möglich, weshalb der Ruck im ersten und im dritten Bereich auf Nullstellen untersucht wird. Im ersten Bereich folgt mit $j_x \overset{!}{=} 0$ aus Gleichung (5.36)

$$t_{z,1} = -\sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}}} \ln\left(\frac{c_1}{k_2}\sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}}\right) . \tag{5.43}$$

Dadurch, dass die Endgeschwindigkeit frei ist, ergibt sich die Endbedingung

$$\lambda_2(t_f) = -c_1 t_f + c_2 \overset{!}{=} 0 . \tag{5.44}$$

Mit der Anfangsbedingung für die Beschleunigung $a_x(0) = a_0$ folgt aus Gleichung (5.37)

$$k_2 = a_0 + \frac{c_2}{f_{a_x}} = a_0 + \frac{c_1 t_f}{f_{a_x}} . \tag{5.45}$$

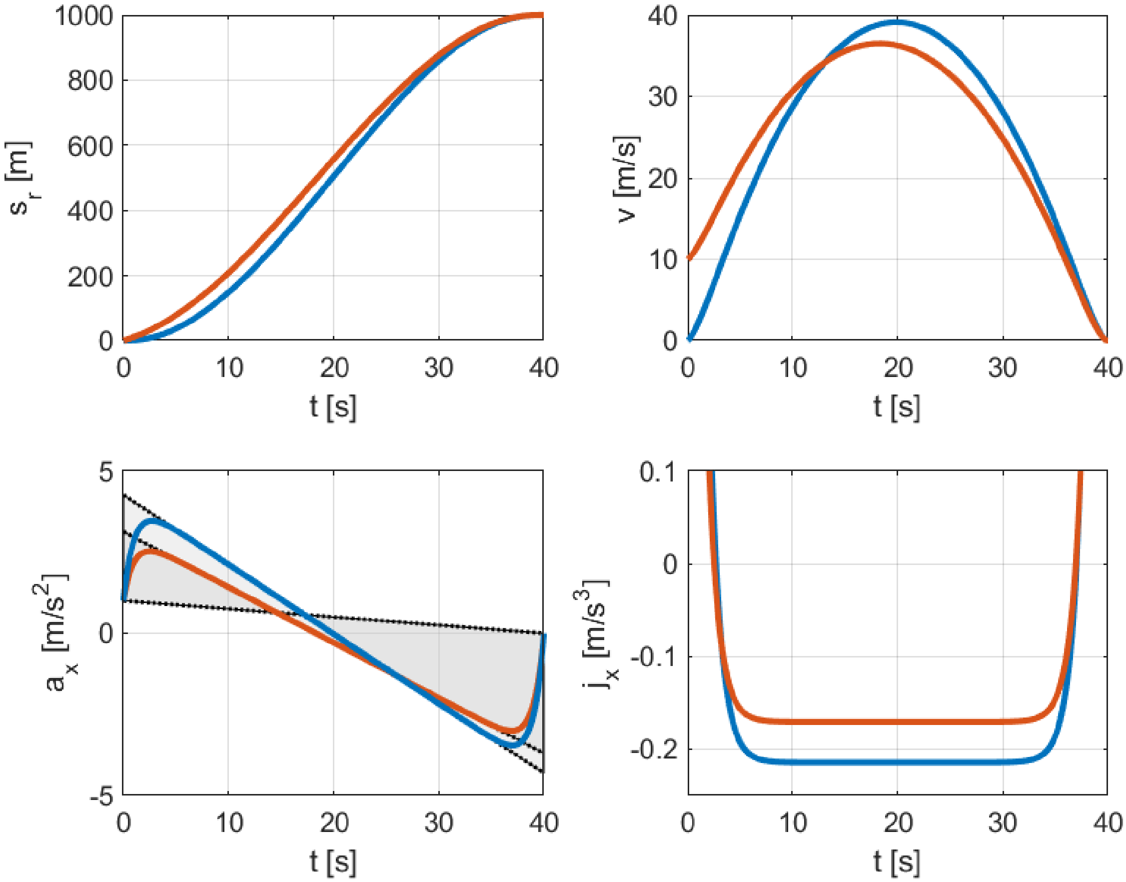


Abbildung 5.3: Lösungstrajektorien der Fahrzeugzustände und der Stellgröße bei einer langen Geradeausfahrt mit $s_f = 1000\,\mathrm{m}$ und fester Endgeschwindigkeit und -beschleunigung. Das Vorzeichen von k_1 und k_2 ist unterschiedlich.

Wird dieser Zusammenhang in Gleichung (5.43) eingesetzt, erhält man mit

$$t_{z,1} = -\sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}}} \ln\left(\frac{c_1}{a_0 + \frac{c_1 t_f}{f_{a_x}}} \sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}}\right) \tag{5.46}$$

den Zeitpunkt des Nulldurchgang von j_x im ersten Bereich, wobei dieser vom Anfangswert der Beschleunigung, den Gewichtungsfaktoren der Komfortkriterien, dem Endzeitpunkt und der Lösung von λ_1 abhängt. Einsetzen von $t_{z,1}$ in Gleichung (5.37) liefert den Extremwert der Beschleunigung an dieser Stelle mit

$$a_{x_{z,1}} = c_1\sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}} - c_1\sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}} \ln\left(\frac{c_1}{a_0 + \frac{c_1 t_f}{f_{a_x}}} \sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}}\right) - \frac{c_1 t_f}{f_{a_x}}\,. \tag{5.47}$$

Die zweite Nullstelle von j_x resultiert in dieser Wahl der Randbedingungen direkt aus $j_x(t_f) = 0$. Der

Ruck hat folglich immer bei $t_{z,2} = t_f$ ein Extremum. Aus Gleichung (5.38) folgt

$$k_1 = -\frac{c_1\sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}}}{e^{\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}}t_f}}\,. \tag{5.48}$$

Eingesetzt in Gleichung (5.39) lautet die Beschleunigung der zweiten Extremstelle

$$a_{x_{z,2}} = -c_1\sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}} + \frac{c_1}{f_{a_x}}t_f - \frac{c_1 t_f}{f_{a_x}} = -c_1\sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}}\,. \tag{5.49}$$

Es lässt sich also festhalten, dass bei freien Endzuständen eine Extremstelle der Beschleunigung bei t_f liegt und eine im ersten Abschnitt. Da der Endwert der Beschleunigung bei positiver Steigung immer unter dem linearen Lösungsanteil und bei negativer Steigung oberhalb der Geraden liegt, ist die Beschränkung durch den linearen Anteil der Lösung streng genommen nicht mehr gültig. Dennoch ist die Gerade als Näherungslösung für die Beschränkung geeignet wie Abbildung 5.4 zeigt. In der Abbildung sind die optimalen Zustands- und Stellgrößentrajektorien für unterschiedliche Anfangsgeschwindigkeiten gezeigt, sodass der Ruck und die Beschleunigung jeweils einmal von unten und von oben gegen die Approximation in Bereich zwei konvergieren. Der kleine Ausschhnitt in der Mitte der Abbildung gehört zum Graph der Beschleunigung unten links und zeigt den vergrößerten Abschnitt im Bereich von $36\,\mathrm{s}$ bis $40\,\mathrm{s}$. Dabei wird deutlich, dass der Endwert der Beschleunigung jeweils außerhalb der durch die Verbindungsgerade und den linearen Anteil der Beschleunigungstrajektorie eingeschlossenen Fläche liegt und damit streng genommen außerhalb der Beschränkung. Da diese Verfehlung allerdings nur einen geringen Einfluss hat, lässt sich der lineare Anteil trotzdem zumindest als Näherungslösung für die Beschränkung verwenden. Zudem zeigt die Abbildung die beiden Nullstellen von j_x und damit Extremstellen von a_x, von denen eine jeweils bei t_f liegt.

Abschließend lässt sich festhalten, dass die analytischen Lösungen der optimalen Trajektorien für die Geradeausfahrt sowohl für ein rein energieoptimales Gütefunktional als auch für ein Gütefunktional mit zusätzlicher Bestrafung der Längsbeschleunigung bestimmt werden können und die verbleibenden Unbekannten mithilfe der Randbedingungen des Optimierungsproblems durch Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems berechnet werden können. Außerdem lässt sich unter Zuhilfenahme einiger Annahmen eine Abschätzung für die Beschränkung der Längsbeschleunigung treffen, über die wiederum Aussagen über den erwarteten Fahrkomfort getroffen werden können. Während der Anfangswert des Längsrucks nicht vorgegeben werden kann, sodass unter Umständen hohe Ruckwerte zu Beginn auftreten können, lässt sich der Endwert des Rucks bei freier Endbeschleunigung über die Endbedingung $\lambda_3(t_f) = 0$ vorgeben.

5.1.4 Heranfahren an eine Ampel bei bekannter Rotphase

Die Erkenntnisse über den Lösungsraum bei einer Geradeausfahrt mit beschleunigungs- und ruckoptimalem Gütefunktional werden nachfolgend verwendet, um das Heranfahren an eine Ampel mit bekannter Rotphase zu analysieren. Neben der Analyse des Anhalte- bzw. Anfahrvorgangs unter dem Aspekt des Fahrkomforts, dient dieses Szenario auch dem Vergleich zwischen vorausschauender Planung über die Ampelüberquerung hinaus und der weniger vorausschauenden zwei geteilten Planung bis zur Ampel und von dort aus bis zum Zielpunkt. Letzteres entspricht dabei dem vom Menschen gewählten Planungsverhalten, wobei die vorausschauende Variante einige Vorteile bietet.

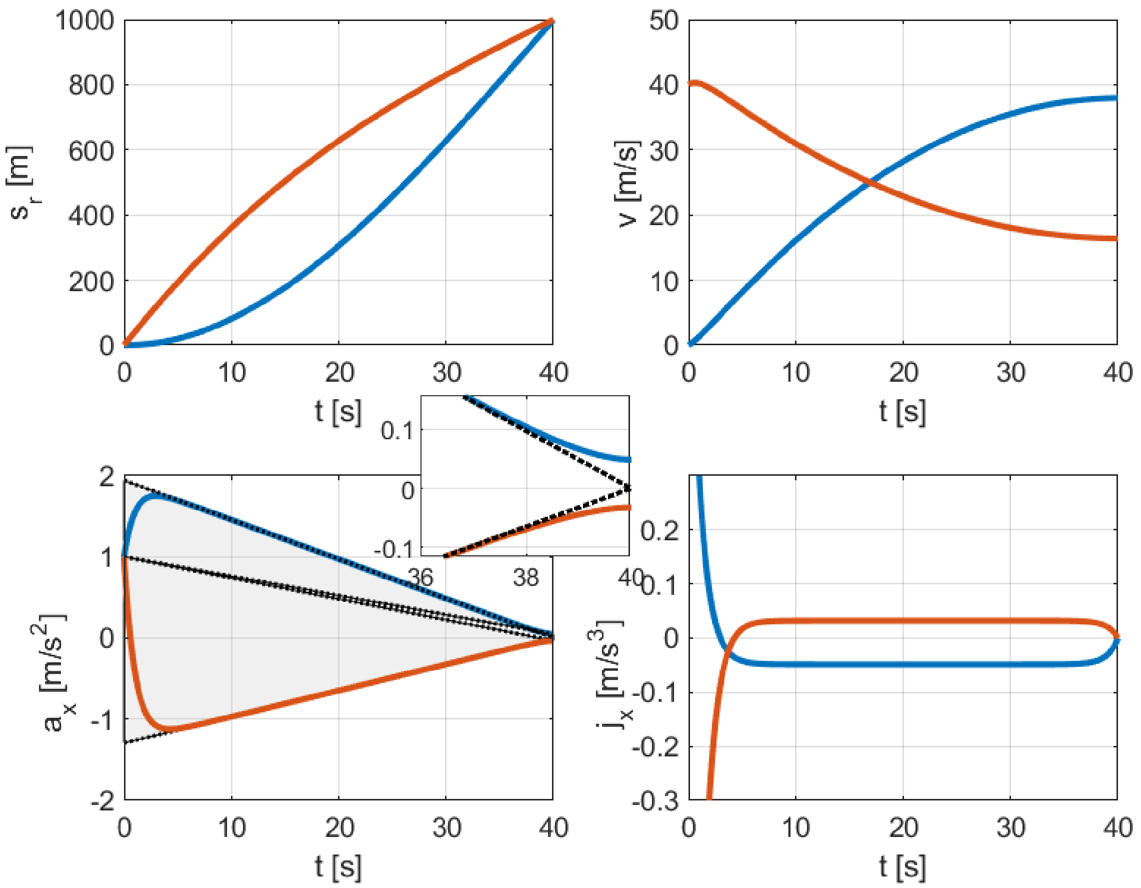


Abbildung 5.4: Lösungstrajektorien der Fahrzeugzustände und der Stellgröße bei einer langen Geradeausfahrt mit $s_f = 1000\,\mathrm{m}$ und freier Endgeschwindigkeit und -beschleunigung.

Das beschriebene Szenario kann als Geradeausfahrt interpretiert werden, bei der sich das Fahrzeug zu einem bestimmten Zeitpunkt t_1 an der Ampel befinden soll. Der Ort, an dem sich die Ampel befindet, kann dabei als die vom Startpunkt der Optimierung aus zurückzulegende Strecke s_1 betrachtet werden. Damit ein solches Szenario realistisch umsetzbar ist, muss die Strecke s_1 vom Fahrzeugzeug bis zur Ampel sowie der Zeitpunkt t_1 bekannt sein. Dieser wird als der Moment interpretiert, in dem die Ampel von rot auf grün springt und damit das Überqueren der Ampel für das Fahrzeug erlaubt ist[2]. Das Szenario lässt sich dann mithilfe der internen GNB $s_r(t_1) = s_1$ bei festem und bekanntem t_1 beschreiben. Alternativ kann das Szenario als zwei zusammengesetzte Geradenabschnitte verstanden werden, die an dem über die Zeit und die Strecke definierten Punkt $\mathcal{P}_1 = (t_1, s_1)$ miteinander verknüpft sind. Die Systemdynamik bleibt in den beiden Zeitabschnitten unverändert und wird durchgehend durch das Verhalten bei der Geradeausfahrt beschrieben. Wird die insgesamt benötigte Zeit t_f als Komfortkriterium verwendet, um möglichst schnell zum Zielort zu gelangen, dann kann das Szenario entweder als ein Gesamtoptimierungsproblem mit der internen GNB betrachtet werden, wobei t_f über das gesamte Szenario bei der Optimierung berücksichtigt wird. Alternativ kann das Szenario auch als zwei seperate

[2]Ein Ansatz wie der Verkehrsfluss mithilfe von Fahrzeug zu Ampel Kommunikation und adaptiver Ampelphasen in Abhängigkeit des Verkehrsaufkommens verbessert werden kann, wurde in **Gradinescu** untersucht.

Optimierungsprobleme formuliert werden, wobei das zweite Optimierungsproblem auf dem ersten aufsetzt, während bei den beiden Problemformulierungen nur das Verhalten im jeweiligen Zeitabschnitt $t_0 \leq t \leq t_1$ bzw. $t_1 \leq t \leq t_f$ berücksichtigt wird. Diese Unterscheidung wird bei Untersuchung von vorausschauender Planung im Vergleich zu weniger vorausschauender Planung gemacht.

5.2 Spurwechsel

5.2.1 Komfortgewinn durch variable Gewichtung der Querabweichung

5.3 Kreisfahrt mit konstanter Krümmung

Nachdem das Szenario Geradeausfahrt eingehend analysiert und diskutiert wurde, soll nachfolgend das Szenario einer Kreisfahrt untersucht werden. Die Kreisfahrt stellt mit seiner konstanten Krümmung einen vereinfachten Sonderfall einer Kurve dar. Durch die Analyse der Kreisfahrt lassen sich einige Erkenntnisse gewinnen, die später bei der Untersuchung allgemeiner Kurven mit veränderlicher Krümmung, sogenannter Klothoiden, wieder auftauchen.

5.3.1 Vernachlässigung der Querdynamik

5.3.1.1 Ruhelage

5.3.2 Berücksichtigung der Querdynamik

5.3.2.1 Ruhelage

5.4 Klothoide mit konstanter Krümmungsänderung

5.5 Gerade-Kurvenkombination

5.6 Rundkurs

Literatur

[1] M. Festner, „Objektivierte Bewertung des Fahrstils auf Basis der Komfortwahrnehmung bei hochautomatisiertem Fahren in Abhängigkeit fahrfremder Tätigkeiten: Grundlegende Zusammenhänge zur komfortorientierten Auslegung eines hochautomatisierten Fahrstils", Diss., DuEPublico: Duisburg-Essen Publications online, University of Duisburg-Essen, Germany, 2019. DOI: 10.17185/duepublico/70681.

[2] On-Road Automated Driving (ORAD) committee, *Taxonomy and Definitions for Terms Related to Driving Automation Systems for On-Road Motor Vehicles*, 400 Commonwealth Drive, Warrendale, PA, United States. DOI: 10.4271/j3016{\textunderscore}201806.

[3] M. Elbanhawi, M. Simic und R. Jazar, „In the Passenger Seat: Investigating Ride Comfort Measures in Autonomous Cars", *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine*, Jg. 7, Nr. 3, S. 4–17, 2015, ISSN: 1939-1390. DOI: 10.1109/MITS.2015.2405571.

[4] B. Abendroth und R. Bruder, „Die Leistungsfähigkeit des Menschen für die Fahrzeugführung", in *Handbuch Fahrerassistenzsysteme*, H. Winner, S. Hakuli und G. Wolf, Hrsg., Bd. 32, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012, S. 4–14, ISBN: 978-3-8348-1457-9. DOI: 10.1007/978-3-8348-8619-4{\textunderscore}2.

[5] H. Bellem, T. Schönenberg, J. F. Krems und M. Schrauf, „Objective metrics of comfort: Developing a driving style for highly automated vehicles", *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour*, Jg. 41, Nr. 6, S. 45–54, 2016, ISSN: 13698478. DOI: 10.1016/j.trf.2016.05.005.

[6] Y. L. Murphey, R. Milton und L. Kiliaris, „Driver's style classification using jerk analysis", in *2009 IEEE Workshop on Computational Intelligence in Vehicles and Vehicular Systems*, IEEE, 30.03.2009 - 02.04.2009, S. 23–28, ISBN: 978-1-4244-2770-3. DOI: 10.1109/CIVVS.2009.4938719.

[7] A. Lange, M. Maas, M. Albert, K.-H. Siedersberger und K. Bengler, „Automatisiertes Fahren - So komfortabel wie möglich, so dynamisch wie nötig", in *30. VDI/VW-Gemeinschaftstagung. Fahrerassistenz und Integrierte Sicherheit*, Ser. VDI-Berichte, Düsseldorf: VDI-Verl., 2014, S. 215–228, ISBN: 978-3-18-092223-2.

[8] S. Scherer, A. Dettmann, F. Hartwich, T. Pech, A. Bullinger-Hoffmann und G. Wanielik, „How the driver wants to be driven -Modelling driving styles in highly automated driving", in *7. Tagung Fahrerassistenz*, TÜV SÜD, Hrsg., 2015.

[9] D. J. Oborne, „Passenger comfort — an overview", *Applied Ergonomics*, Jg. 9, Nr. 3, S. 131–136, 1978, ISSN: 00036870. DOI: 10.1016/0003-6870(78)90002-9.

[10] C. Gianna, S. Heimbrand und M. Gresty, „Thresholds for detection of motion direction during passive lateral whole-body acceleration in normal subjects and patients with bilateral loss of labyrinthine function", *Brain Research Bulletin*, Jg. 40, Nr. 5-6, S. 443–447, 1996, ISSN: 03619230. DOI: 10.1016/0361-9230(96)00140-2.

[11] E. Dovgan, M. Javorski, T. Tušar, M. Gams und B. Filipič, „Comparing a multiobjective optimization algorithm for discovering driving strategies with humans“, *Expert Systems with Applications*, Jg. 40, Nr. 7, S. 2687–2695, 2013, ISSN: 09574174. DOI: 10.1016/j.eswa.2012.11.006.

[12] K. E. Money, „Motion sickness“, *Physiological reviews*, Jg. 50, Nr. 1, S. 1–39, 1970, ISSN: 0031-9333. DOI: 10.1152/physrev.1970.50.1.1.

[13] J. T. Reason, J. T. Reason und J. J. Brand, *Motion sickness*. London: Acad. Pr, 1975, ISBN: 9780125840507.

[14] J. F. Golding, „Motion sickness susceptibility“, *Autonomic neuroscience : basic & clinical*, Jg. 129, Nr. 1-2, S. 67–76, 2006, ISSN: 1566-0702. DOI: 10.1016/j.autneu.2006.07.019.

[15] A. J. Benson, „Motion Sickness“, in *Medical Aspects of Harsh Environments Volume 2*, Washington,DC,20307, 2002, S. 1048–1083.

[16] J. R. Lackner, „Motion sickness: more than nausea and vomiting“, *Experimental brain research*, Jg. 232, Nr. 8, S. 2493–2510, 2014. DOI: 10.1007/s00221-014-4008-8.

[17] J. O'Hanlon und M. McCauley, „Motion Sickness Incidence as a Function of Vertical Sinusoidal Motion“, *Aerospace medicine*, Jg. 45, S. 366–369, 1974.

[18] Technical Committee : ISO/TC 108/SC 4 Human exposure to mechanical vibration and shock, *ISO 2631-1:1997: Mechanical vibration and shock — Evaluation of human exposure to whole-body vibration — Part 1: General requirements*, 1997-05.

[19] H. Vogel, R. Kohlhaas und R. J. von Baumgarten, „Dependence of motion sickness in automobiles on the direction of linear acceleration“, *European journal of applied physiology and occupational physiology*, Jg. 48, Nr. 3, S. 399–405, 1982, ISSN: 0301-5548. DOI: 10.1007/BF00430230.

[20] M. Sivak und B. Schoettle, *Motion Sickness in Self-Driving Vehicles*, 2015.

[21] A. Rolnick und R. E. Lubow, „Why is the driver rarely motion sick? The role of controllability in motion sickness“, *Ergonomics*, Jg. 34, Nr. 7, S. 867–879, 1991, ISSN: 0014-0139. DOI: 10.1080/00140139108964831.

[22] H. Winner, B. Danner und J. Steinle, „Adaptive Cruise Control“, in *Handbuch Fahrerassistenzsysteme*, H. Winner, S. Hakuli und G. Wolf, Hrsg., Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012, S. 478–521, ISBN: 978-3-8348-1457-9. DOI: 10.1007/978-3-8348-8619-4{\textunderscore}33.

[23] Technical Committee : ISO/TC 204 Intelligent transport systems, *ISO 15622:2018: Intelligent transport systems — Adaptive cruise control systems — Performance requirements and test procedures*, 2018-09.

[24] ——, *ISO 22179:2009: Intelligent transport systems — Full speed range adaptive cruise control (FSRA) systems — Performance requirements and test procedures*, 2009-09.

[25] Y. Liu und Z. Wu, „Comfortable Driver Behavior Modeling for Car Following of Pervasive Computing Environment“, in *Computational Science – ICCS 2005*, Ser. Lecture Notes in Computer Science, D. Hutchison, T. Kanade, J. Kittler u. a., Hrsg., Bd. 3516, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005, S. 1068–1071, ISBN: 978-3-540-26044-8. DOI: 10.1007/11428862{\textunderscore}174.

[26] T. Radke, *Energieoptimale Längsführung von Kraftfahrzeugen durch Einsatz vorausschauender Fahrstrategien*. Erscheinungsort nicht ermittelbar: KIT Scientific Publishing, 2013, ISBN: 978-3-7315-0069-8. Adresse: https://directory.doabooks.org/handle/20.500.12854/46364.

[27] R. Krause, „Anfahrbeschleunigungen im alltäglichen Straßenverkehr“, *Verkehrsunfall und Fahrzeugtechnik 40*, Nr. 4, S. 105–108, 2002.

[28] Hugemann, Wolfgang and Nickel, Markus, „Longitudinal and lateral accelerations in normal day driving“, in *6th International Conference on Accident Investigation, Reconstruction, Interpretation and Law, Stratford-upon-Avon, 26-29 September 2003 / Institute of Traffic Accident Investigators.*, Institute of Traffic Accident Investigators International Conference, Hrsg., 2003.

[29] A. Schwab, „Eine Methode zur Auswahl kritischer Fahrszenarien für automatisierte Fahrzeuge anhand einer objektiven Charakterisierung des Fahrverhaltens“, Masterthesis, Technische Universität München, München, 2019.

[30] C. Canudas-de-Wit, „Fun-To-Drive By Feedback“, in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 12-15 Dec. 2005, S. 13, ISBN: 0-7803-9567-0. DOI: 10.1109/CDC.2005.1582110.

[31] S. Hiroaki, „Ability to withstand sudden braking“, in *Railw Res Rev*, Bd. 52, 1995, S. 18–21.

[32] J. P. Powell und R. Palacín, „Passenger Stability Within Moving Railway Vehicles: Limits on Maximum Longitudinal Acceleration“, *Urban Rail Transit*, Jg. 1, Nr. 2, S. 95–103, 2015, ISSN: 2199-6687. DOI: 10.1007/s40864-015-0012-y.

[33] J. Gayko, „Lane Keeping Support“, in *Handbuch Fahrerassistenzsysteme*, H. Winner, S. Hakuli und G. Wolf, Hrsg., Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012, S. 554–561, ISBN: 978-3-8348-1457-9. DOI: 10.1007/978-3-8348-8619-4{\textunderscore}36.

[34] H. Oschlies, *Komfortorientierte Regelung für die automatisierte Fahrzeugquerführung*, Ser. AutoUni - Schriftenreihe Ser. Wiesbaden, Germany: Springer, 2019, Bd. v.136, ISBN: 978-3-658-25235-9. Adresse: https://ebookcentral.proquest.com/lib/kxp/detail.action?docID=5640099.

[35] L. Dragon, „Fahrzeugdynamik: Wohin fahren wir?“, in *Forschung für das Auto von Morgen*, Ser. SpringerLink Bücher, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 239–260, ISBN: 978-3-540-74150-3.

[36] G. Reymond, A. Kemeny, J. Droulez und A. Berthoz, „Role of lateral acceleration in curve driving: driver model and experiments on a real vehicle and a driving simulator“, *Human factors*, Jg. 43, Nr. 3, S. 483–495, 2001, ISSN: 0018-7208. DOI: 10.1518/001872001775898188.

[37] K.-H. Schimmelpfennig und U. Nackenhorst, „Bedeutung der Querbeschleunigung in der Verkehrsunfallrekonstruktion - Sicherheitsgrenze des Normalfahrers“, *Verkehrsunfall und Fahrzeugtechnik 23*, Nr. 4, S. 94–96, 1985.

[38] J. Xu, K. Yang, Y. Shao und G. Lu, „An Experimental Study on Lateral Acceleration of Cars in Different Environments in Sichuan, Southwest China“, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Jg. 2015, Nr. 6, S. 1–16, 2015, ISSN: 1026-0226. DOI: 10.1155/2015/494130.

[39] A. Schulz und R. Fröming, „Analyse des Fahrerverhaltens zur Darstellung adaptiver Eingriffsstrategien von Assistenzsystemen“, *ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift*, Jg. 110, Nr. 12, S. 1124–1131, 2008, ISSN: 0001-2785. DOI: 10.1007/BF03222040.

[40] M. Festner, A. Eicher und D. Schramm, „Beeinflussung der Komfort- und Sicherheits-wahrnehmung beim hochautomatisierten Fahren durch fahrfremde Tätigkeiten und Spurwechseldynamik“, in *11. Workshop Fahrerassistenzsysteme und Automatisiertes Fahren*, K. Bengler, Hrsg., Darmstadt: Uni-DAS e.V, 2017, S. 63–73, ISBN: 978-3-00-055656-2.

[41] Knut Graichen, *Methoden der Optimierung und optimalen Steuerung: Skript - Wintersemester 2012/2013*. 2012.

[42] M. Papageorgiou, M. Leibold und M. Buss, *Optimierung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012, ISBN: 978-3-540-34012-6. DOI: 10.1007/978-3-540-34013-3.

[43] M. Gerdts, *Optimale Steuerung: Skript - Wintersemester 2009/2010*. 2010.

[44] U. Konigorski, *Mehrgrößenreglerentwurf im Zustandsraum: Skript - Wintersemester 2019/2020*. 2019.

[45] R. Bellman, *Dynamic programming*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Pr, 1984, ISBN: 0-691-07951-X.

[46] J. Adamy, *Nichtlineare Regelungen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, ISBN: 978-3-642-00793-4. DOI: 10.1007/978-3-642-00794-1.

[47] U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij und R. D. Russell, „5. Finite Difference Methods“, in *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij und R. D. Russell, Hrsg., Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995, S. 185–274, ISBN: 978-0-89871-354-1. DOI: 10.1137/1.9781611971231.ch5.

[48] ——, „4. Initial Value Methods“, in *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij und R. D. Russell, Hrsg., Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995, S. 132–184, ISBN: 978-0-89871-354-1. DOI: 10.1137/1.9781611971231.ch4.

[49] J. T. Betts, „Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization“, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Jg. 21, Nr. 2, S. 193–207, 1998, ISSN: 0731-5090. DOI: 10.2514/2.4231.

[50] R. Weiss, „The application of implicit Runge-Kutta and collection methods to boundary-value problems“, *Mathematics of Computation*, Jg. 28, Nr. 126, S. 449–464, 1974, ISSN: 0901-246X. DOI: 10.1090/S0025-5718-1974-0341881-2.

[51] J. R. Cash und D. R. Moore, „A high order method for the numerical solution of two-point boundary value problems“, *BIT*, Jg. 20, Nr. 1, S. 44–52, 1980, ISSN: 0006-3835. DOI: 10.1007/BF01933584.

[52] C. Rathgeber, *Trajektorienplanung und -folgeregelung für assistiertes bis hochautomatisiertes Fahren*, 2016. DOI: 10.14279/depositonce-5506.

[53] A. Cervantes und L. T. Biegler, „Optimization Strategies for Dynamic Systems“, in *Encyclopedia of Optimization*, C. A. Floudas und P. M. Pardalos, Hrsg., Boston, MA: Springer US, 2009, S. 2847–2858, ISBN: 978-0-387-74758-3. DOI: 10.1007/978-0-387-74759-0{\textunderscore}488.

[54] J. Kierzenka und L. F. Shampine, „A BVP solver based on residual control and the Maltab PSE“, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Jg. 27, Nr. 3, S. 299–316, 2001, ISSN: 0098-3500. DOI: 10.1145/502800.502801.

[55] M. Werling, *Ein neues Konzept für die Trajektoriengenerierung und -stabilisierung in zeitkritischen Verkehrsszenarien*. Erscheinungsort nicht ermittelbar: KIT Scientific Publishing, 2011, ISBN: 978-3-86644-631-1. Adresse: https://directory.doabooks.org/handle/20.500.12854/45957.

[56] *Richtlinien für die Anlage von Autobahnen: RAA: Übersetzung 2011*, Ausgabe 2008, Ser. FGSV R1 - Regelwerke. Köln: FGSV-Verl., 2008, Bd. 202, ISBN: 978-3-939715-51-1.

[57] D. Schramm, M. Hiller und R. Bardini, *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, ISBN: 978-3-642-33887-8. DOI: 10.1007/978-3-642-33888-5.