

# Trajektorienplanung als dynamisches Optimalsteuerungsproblem und Interpretation des Lösungsraums für Fahrkomfort im automatisierten Fahren

Studiengang Elektrotechnik und Informationstechnik

Masterarbeit von Markus Amann

Tag der Einreichung: 4. Juli 2022

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski

Betreuer: Alexander Steinke

Darmstadt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

REGELUNGSTECHNIK  
UND MECHATRONIK *rtm*

Fachbereich Elektrotechnik  
und Informationstechnik

Trajektorienplanung als dynamisches Optimalsteuerungsproblem und Interpretation des Lösungsraums  
für Fahrkomfort im automatisierten Fahren  
Studiengang Elektrotechnik und Informationstechnik

Masterarbeit von Markus Amann

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski  
Betreuer: Alexander Steinke

Tag der Einreichung: 4. Juli 2022

Darmstadt

Technische Universität Darmstadt  
Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik  
Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik  
Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski

---

## Aufgabenstellung

---

Die allgemeine Struktur eines Optimalsteuerungsproblems lautet

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(t)} \quad & J(\mathbf{u}) = V(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \\ \text{u.B.v.} \quad & \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ & \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq \mathbf{0}, \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \end{aligned}$$

Häufig werden dynamische Optimierungsprobleme (OP) mithilfe direkter Verfahren numerisch gelöst. In diesem Fall wird das dynamische in ein statisches OP überführt und der endliche Lösungsvektor  $\mathbf{u}^*(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  berechnet. Direkte Verfahren haben den Vorteil, dass Zustandsbeschränkungen leichter berücksichtigt werden können und der Konvergenzbereich größer ist. Indirekte Verfahren hingegen liefern eine Einsicht in die Struktur der optimalen Lösung.

In der dynamischen Optimierung hingegen werden Funktionen  $\mathbf{u}(t)$  einer unabhängigen Variable  $t$  gesucht. Mithilfe der Variationsrechnung können Optimalitätsbedingungen hergeleitet werden, die ein Randwertproblem formulieren. Die Lösung dieses Randwertproblems liefert in der Folge die optimale Steuertrajektorie  $\mathbf{u}^*(t)$ . Jedoch ist das Lösen des Randwertproblems für nichtlineare Systeme häufig schwierig, weswegen auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden muss.

Um im automatisierten Fahren (AD) gezielt Fahrprofile mittels einer optimalen Trajektorienplanung erstellen zu können, ist ein tieferes Verständnis der optimalen Lösung erforderlich. Mit einem direkten Verfahren ist die Interpretation der Lösung schwierig, da die Lösung aus reinen Zahlenwerten besteht. Zwar könnte ein gewünschtes Fahrverhalten in definierten Fahraufgaben durch zusätzliche Terme im Gütemaß und Anpassung der Gewichte erzielt werden, jedoch ist eine Übertragung auf andere Fahraufgaben fraglich. Eine parametrisierte Steuertrajektorie  $\mathbf{u}^*(t)$  würde die Interpretation erheblich vereinfachen.

Ziele dieser Arbeit sind folgende Punkte:

1. Übersicht für Lösungsverfahren dynamischer OPs und Einordnung des AD-Planungsproblems
2. Erstellen von dynamischen OPs, die durch Variationsrechnung lösbar sind und Lösen dieser
  - a) Geeignete Fahrszenarien (z.B. Geradeausfahrt, Kurve, Geraden-Kurven-Kombination, Spurwechsel)
  - b) Geeignete Komfortmerkmale (z.B. Beschleunigung, Ruck, Fahrdauer)
  - c) Berücksichtigung von Begrenzungen
3. Interpretation der Lösungstrajektorien hinsichtlich des dargestellten Funktionenraums
4. Einordnung im Kontext Fahrkomfort

Die Ergebnisse sind geeignet zu visualisieren und zu dokumentieren. Die aktuelle Fassung der Richtlinien zur Anfertigung von Abschlussarbeiten ist zu beachten.

Beginn: 03. Januar 2022  
Ende: 04. Juli 2022  
Seminar: 18. Juli 2022

---

## **Erklärung zur Abschlussarbeit gemäß §22 Abs. 7 und §23 Abs. 7 APB der TU Darmstadt**

---

Hiermit versichere ich, Markus Amann, die vorliegende Masterarbeit ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Mir ist bekannt, dass im Fall eines Plagiats (§38 Abs. 2 APB) ein Täuschungsversuch vorliegt, der dazu führt, dass die Arbeit mit 5,0 bewertet und damit ein Prüfungsversuch verbraucht wird. Abschlussarbeiten dürfen nur einmal wiederholt werden.

Bei der abgegebenen Thesis stimmen die schriftliche und die zur Archivierung eingereichte elektronische Fassung gemäß §23 Abs. 7 APB überein.

Bei einer Thesis des Fachbereichs Architektur entspricht die eingereichte elektronische Fassung dem vorgestellten Modell und den vorgelegten Plänen.

Darmstadt, 4. Juli 2022

---

Markus Amann

---

## **Kurzfassung**

---

Zusammenfassung entsprechend der Dokumentensprache. In diesem Fall Deutsch.

---

## **Abstract**

---

Additional abstract in English.



# Acronyms

---

**ACC** Adaptive Cruise Control. 8

**AD** Automatisiertes Fahren (engl. *automated driving*). 1–3, 5, 7, 16, 26, 32, 33, 85

**DGL** Differentialgleichung. vii, viii, 3, 14, 18, 20, 22, 26–31, 33, 36–39, 43–45, 58–60, 64–68, 70, 85

**FAS** Fahrassistentenzsysteme. 1, 8–10

**FSRA** Full Speed Range Adaptive Cruise Control. 8, 10, 88

**GNB** Gleichungsnebenbedingung. 14, 15, 25, 31, 33, 53, 54, 57, 79, 90

**LKS** Lane Keeping Support. 10, 89

**MPC** Modellprädiktive Regelung (engl. *model predictive control*). 2

**MPR** Mehr-Punkte-Randwertproblem. 31, 33, 90

**MSI** Motion Sickness Incidence. 86

**OP** Optimierungsproblem. 2, 3, 14–16, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 31, 38, 44, 54, 58, 64, 66, 72, 75, 80, 85, 86

**RKV** Runge-Kutta-Verfahren. 27, 31, 67, 90

**SAE** Society of Automotive Engineers. 1

**StVZO** Straßenverkehrs-Zulassungs-Ordnung. 37

**UNB** Ungleichungsnebenbedingung. 14, 15, 31

**ZPR** Zwei-Punkte-Randwertproblem. 3, 20, 22, 27, 28, 31, 90

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Stand der Technik in der Trajektorienplanung . . . . .	2
<b>2 Fahrkomfort und Einordnung in den Kontext Automatisiertes Fahren</b>	<b>5</b>
2.1 Fahrkomfort im Kontext Automatisiertes Fahren . . . . .	5
2.1.1 Kinetose und ihre Bedeutung für das Autonome Fahren . . . . .	6
2.2 Komfortgrenzen für Fahrzeugbeschleunigung und -ruck . . . . .	8
2.2.1 Grenzwerte für die Längsdynamik . . . . .	8
2.2.2 Grenzwerte für die Querdynamik . . . . .	10
<b>3 Optimierung - Mathematische Grundlagen und Methoden</b>	<b>14</b>
3.1 Statische Optimierung . . . . .	14
3.2 Dynamische Optimierung . . . . .	14
3.2.1 Variationsrechnung . . . . .	16
3.2.2 Optimalitätsprinzip nach Bellman . . . . .	21
3.3 Zeittransformation für freie Endzeitpunkte . . . . .	22
3.4 Variationsprobleme mit internen Gleichungsnebenbedingungen . . . . .	23
3.5 Diskontinuierliche Systemdynamik . . . . .	25
3.6 Numerische Lösungsverfahren . . . . .	26
3.6.1 Indirekte Lösungsverfahren . . . . .	26
3.6.2 Direkte Lösungsverfahren . . . . .	31
3.6.3 Diskussion der Lösungsverfahren . . . . .	32
<b>4 Fahrzeugmodellierung und Herleitung der kanonischen Zustandsgleichungen</b>	<b>34</b>
4.1 Formulierung der Fahrzeugbewegung in Frenet-Koordinaten . . . . .	34
4.1.1 Beschreibung der Relativbewegung . . . . .	36
4.2 Adjungierte Differentialgleichung (DGL) und dynamisches Gesamtmodell . . . . .	37
4.2.1 Anwendung des Maximumprinzips . . . . .	40
<b>5 Analyse verschiedener Fahrszenarien und Interpretation des Lösungsraumes</b>	<b>42</b>
5.1 Geradeausfahrt . . . . .	42
5.1.1 Lösungsraum bei energieoptimalem Gütfunktional . . . . .	42
5.1.2 Lösungsraum bei Gütfunktional mit Bestrafung von Längsruck und -beschleunigung	44
5.1.3 Lange Geradeausfahrt . . . . .	46
5.1.4 Heranfahren an eine Ampel bei bekannter Rotphase . . . . .	53
5.2 Spurwechsel . . . . .	58
5.2.1 Formulierung des Optimierungsproblems . . . . .	58
5.2.2 Optimale Spurwechseltrajektorien . . . . .	59
5.2.3 Komfortgewinn durch variable Gewichtung der Querabweichung . . . . .	62

---

5.3	Kreisfahrt mit konstanter Krümmung . . . . .	65
5.3.1	Vernachlässigung der Querdynamik . . . . .	65
5.3.2	Berücksichtigung der Querdynamik . . . . .	68
5.4	Klothoide mit konstanter Krümmungsänderung . . . . .	73
5.4.1	Begrenzung des Querrucks . . . . .	76
5.5	Gerade-Kurve-Gerade-Kombination . . . . .	78
5.5.1	Formulierung des Optimierungsproblems . . . . .	79
5.5.2	Optimale Trajektorien . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>85</b>
6.1	Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	85
6.2	Ausblick auf zukünftige Forschungsarbeit . . . . .	87
<b>A</b>	<b>Grenz- und Richtwerte für den Fahrkomfort</b>	<b>88</b>
<b>B</b>	<b>bvp4c-Solver</b>	<b>90</b>
<b>C</b>	<b>Abbildung zur Stellgröße beim Heranfahren an eine Ampel bei bekannter Rotphase</b>	<b>92</b>
<b>Literatur</b>		<b>93</b>

# 1 Einleitung

---

In der Schnelllebigkeit der heutigen Gesellschaft stellt das Automatisierte Fahren (engl. *automated driving*) (AD) ein Thema dar, welches seit Jahren einen festen Platz im gesellschaftlichen Diskurs in unterschiedlichen Bereichen einnimmt. Neben der technischen Weiterentwicklung werden auch rechtliche, ethische, ökonomische und ökologische Aspekte intensiv hinsichtlich möglicher Chancen und Risiken diskutiert. Gerade in der gegenwärtigen Debatte um den Klimawandel sehen mehrere Studien in der Weiterentwicklung autonomer Fahrzeuge das Potenzial zur Reduktion von klimaschädlichen Emissionen durch den Verkehrssektor [1]–[3]. Durch eine energieoptimierte Fahrweise und die effiziente Nutzung automatisierter Fahrzeuge können enorme Energie- und Treibhausgaseinsparungen erzielt werden [2]. Damit das Potenzial zur Energie- und Emissionsreduktion jedoch ausgeschöpft werden kann, muss das AD im richtigen Rahmen eingesetzt werden. Sekundäre Effekte wie erhöhtes Verkehrsaufkommen durch die zusätzliche Attraktivität privater Einzelnutzung automatisierter Fahrzeuge oder eine hohe Zahl von Leerfahrten können auch einen negativen Einfluss auf die Energiebilanz des Verkehrs- und Transportsektors haben [2], [4]. Solche Effekte gilt es unbedingt zu vermeiden, weshalb politische und gesellschaftliche Rahmenbedingungen mit Fokus auf die nachhaltige Nutzung für die Weiterentwicklung automatisierter Fahrzeuge unerlässlich sind – der technologische Fortschritt alleine wird darüber nicht entscheiden können [4]. Weiteres Verbesserungspotenzial bietet das AD im Bereich der Verkehrssicherheit. Trotz all der Sensorik und der Vielzahl an Fahrassistenzsystemen (FAS), die heutzutage in Fahrzeugen verbaut werden, ist der Mensch als fahrzeugführende Person immer noch der Hauptgrund für Unfälle im Straßenverkehr. Während insgesamt 88 % aller Unfälle ihre Ursache in menschlichem Fehlverhalten haben, beträgt der Einfluss technischer Mängel dagegen nur 1 %. Dies zeigen Zahlen des Statistischen Bundesamts aus dem Jahr 2017 [5]. Daher hat das AD das Potenzial zur Steigerung der Verkehrssicherheit und Reduktion der Unfallzahlen sowohl im innerstädtischen Bereich als auch auf Autobahnen.

Neben dem Sicherheitsaspekt bei der Entwicklung automatisierter Fahrzeuge kommt dem Fahrkomfort eine besondere Bedeutung zu. Gegenüber der von Personen geführten Fahrt steigt die Notwendigkeit, einen hohen Fahrkomfort zu erreichen, beim AD sogar noch an. Das gesteigerte Komfortbedürfnis kann damit begründet werden, dass beim AD zunehmend fahrfremde Tätigkeiten ausgeübt werden können. Darunter werden solche Aktivitäten verstanden, die über die Navigation, das Führen und die Stabilisierung des Fahrzeugs sowie die Überwachung des Umfelds und des umgebenden Verkehrs hinausgehen [6]. Als Beispiel können das Essen und Trinken, das Lesen von Zeitschriften oder Büchern, das Arbeiten und Beantworten von Nachrichten am Laptop oder Smartphone oder auch das Schlafen genannt werden. Gemäß der Klassifizierung unterschiedlicher Stufen von Automatisierung im Fahrzeug der Society of Automotive Engineers (SAE) [7] ist spätestens ab Level 3 davon auszugehen, dass zumindest zeitweise fahrfremde Tätigkeiten ausgeübt werden können [6]. Ab diesem Level muss die fahrzeugführende Person zwar noch als Rückfallebene jederzeit dazu bereit sein, die Kontrolle über das Fahrzeug zu übernehmen, im „normalen“ Anwendungsfall hingegen obliegen die Fahrzeugführung sowie die Verkehrs- und Umfeldüberwachung dem System [7]. Mögliche Einschränkungen, die bei Level

3 für die fahrfremden Tätigkeiten gelten, nehmen mit zunehmendem Grad an Automatisierung ab [6]. Das Ausüben solcher Aktivitäten begünstigt dabei das Auftreten von Kinetose („Reisekrankheit“), was einerseits an einem Sensorkonflikt zwischen der visuellen Information des Auges und der vestibulären Sensorinformation des Gleichgewichtsorgans liegt [8]–[10]. Andererseits wird die Kontrolle über das Fahrzeug und dessen Verhalten mit steigender Automatisierung zunehmend an das System übergeben, wodurch Fahrzeuggbewegungen von den Insassen nicht kontrolliert und dadurch weniger genau präzisiert werden können, was wiederum das Auftreten von Kinetose begünstigt [11]. Vor diesem Hintergrund ist die Berücksichtigung des Fahrkomforts bei der Planung optimaler Fahrzeugtrajektorien für die Weiterentwicklung des AD unabdingbar. Wenngleich die Manöver- und Trajektorienplanung nur einen Teil der gesamten Systemkette eines automatisierten Fahrzeugs darstellt, ist dieser doch elementar für das Erzielen eines hohen Fahrkomforts, da in diesem Block maßgeblich die optimalen Zustands- und Stellgrößentrajektorien geplant werden.

---

## 1.1 Stand der Technik in der Trajektorienplanung

---

In der Forschung werden verschiedene Herangehensweisen untersucht, die Trajektorienplanung für das AD umzusetzen. Das AD-Planungsproblem besteht allgemein darin, „optimale“ Zustands- und Steuertrajektorien für Fahrmanöver zu bestimmen. Wodurch sich die Optimalität der Trajektorien auszeichnet, unterliegt dabei der Wahl von Gütekriterien. Je nach übergeordnetem Anwendungsziel können unterschiedliche Gütekriterien herangezogen werden. Gängige Anwendungsziele, für die die optimalen Trajektorien bestimmt werden sollen, liegen dabei in der zeitoptimalen Planung [12], der energieoptimalen Planung [13] oder der komfortoptimalen Planung [14], [15]. Alle Ansätze haben gemein, dass das Planungsproblem zunächst mithilfe mathematischer Formulierungen durch ein Optimierungsproblem (OP) ausgedrückt wird. Dieses besteht aus einer Gütfunktion oder einem Gütfunktional, welches der Minimierung der unterschiedlichen Gütekriterien dient, sowie Nebenbedingungen, durch die die Beschreibung der Systemdynamik, die Randwerte und Beschränkungsanforderungen an die Zustände und Eingangsgrößen berücksichtigt werden können. Davon ausgehend bieten sich mehrere Möglichkeiten zur Lösung des OP an. In [16] und [17] wird eine Modellprädiktive Regelung (engl. *model predictive control*) (MPC) für die Planung optimaler Fahrzeugtrajektorien verwendet. Bei der Anwendung von MPC wird das Optimalsteuerungsproblem durch Rückführung des Fahrzeugzustands wiederholt gelöst. Dabei wird ein (meist lineares) Modell verwendet, welches dazu dient, das Fahrzeugverhalten über einen gewissen Prädiktionshorizont vorherzusagen. Diese Herangehensweise kann sowohl zur Planung der optimalen Fahrzeugtrajektorien als auch zur Fahrzeugstabilisierung verwendet werden. Ein Vorteil von MPC ist, dass Zustandsbeschränkungen zur Kollisionsvermeidung, oder um zu verhindern, dass das Fahrzeug Fahrbahnbegrenzungen verletzt, vergleichsweise einfach berücksichtigt werden können. Ein entscheidender Nachteil beim Einsatz von MPC liegt darin, dass die zyklische Lösung des Optimalsteuerungsproblems zu einem enormen Rechenaufwand führen kann. Zudem wird nach jedem Planungsschritt lediglich der erste Wert der optimalen Lösung tatsächlich verwendet, sodass je nach Länge des Prädiktionshorizonts nicht nur der Rechenaufwand stark ansteigt, sondern gleichzeitig ein Großteil der erhaltenen Lösung effektiv gar nicht verwendet wird.

In [12] wird das OP zur Erzeugung zeitoptimaler Trajektorien für ein Rennfahrzeug mithilfe eines direkten Kollokationsverfahrens gelöst, bei dem das OP zunächst auf einem feinen, äquidistanten Gitter diskretisiert wird. Die Trajektorien der Stellgrößen werden anschließend auf jedem Teilintervall des Gitters als stückweise konstant angenommen, während die Trajektorien der Zustände auf jedem Teilintervall durch Polynome 3. Ordnung approximiert werden. Die Übereinstimmung der optimalen

Trajektorien mit den Polynomen wird an sogenannten Kollokationspunkten überprüft. Zusätzlich werden Stetigkeitsbedingungen eingeführt, die einen kontinuierlichen Übergang zwischen den Polynomen an den Intervallgrenzen ermöglichen. Bei der Anwendung direkter Lösungsverfahren wird das OP immer zunächst an zahlreichen Stützstellen diskretisiert und anschließend mithilfe eines numerischen Verfahrens gelöst. Vorteile dieser Vorgehensweise liegen darin, dass sich direkte Verfahren vielseitig und generisch einsetzen lassen und dabei eine hohe Robustheit besitzen. Zudem lassen sich Zustands- oder Pfadbegrenzungen leicht realisieren. Auf der anderen Seite ergeben sich durch die Diskretisierung Probleme mit einer großen Anzahl an Variablen, die sich im Rechenaufwand niederschlagen.

Dementgegen stehen indirekte Lösungsverfahren, bei denen das OP anstelle der Diskretisierung mithilfe der Variationsrechnung in ein Zwei-Punkte-Randwertproblem (ZPR) für ein System aus DGL erster Ordnung überführt wird. Die Herangehensweise durch indirekte Verfahren bietet den Vorteil, Lösungen sehr hoher Genauigkeit und zudem Einsicht in die Struktur der optimalen Trajektorien zu erhalten. Diese Vorgehensweise wird in [14] gewählt. Dabei werden zunächst die Längs- und Querbewegung des Fahrzeugs getrennt betrachtet. Unter Berücksichtigung gewählter Optimierungskriterien (Ruckänderung und Zeit) wird jeweils ein Gütekriterium mithilfe der Variationsrechnung minimiert, aus dem sich als Lösung die optimalen Stellgrößen- und Zustandstrajektorien für die Längs- und Querrichtung des Fahrzeugs bestimmen lassen. Diese Optimierung wird für mehrere Sets von Zielzuständen und Endzeitpunkten durchgeführt und alle Ergebnisse der Längsrichtung werden mit den Ergebnissen der Querrichtung kombiniert, sodass sich eine Schar von Trajektorien ergibt. Aus dieser Schar wird die beste Kombination im Sinne der Gütekriterien ausgewählt und als optimale Lösung betrachtet. Dabei werden die Trajektorien der Schar zusätzlich auf das Einhalten von Restriktionen wie Aktor- oder Fahrdynamikbegrenzungen überprüft und unzulässige Lösungen ausgeschlossen. Aus der getrennten Betrachtung von Quer- und Längsdynamik sowie der Optimierung bezüglich der Ruckänderung resultiert ein Lösungsraum, der aus Polynomen besteht. Vorteil dieser Herangehensweise ist, dass sich damit ein echtzeitfähiger Planungsalgorithmus entwickeln lässt, wie [14] zeigt. Allerdings unterliegt die Vorgehensweise der Annahme, dass Längs- und Querbewegung getrennt voneinander betrachtet werden können, wodurch die Ergebnisse im Vergleich zur gekoppelten Betrachtung weniger genau sind.

Ein ähnliches Planungskonzept wird in [15] vorgestellt. Die Trajektorienplanung wird dabei als Teil einer neuartigen Bi-Level-Stabilisierung betrachtet, welche aus zwei Regelungen auf unterschiedlichen Ebenen besteht. Durch rekursive Trajektorienplanung in Abhängigkeit des Fahrzeugzustands werden die optimalen Steuergrößen geliefert, ohne dabei eine Regeldifferenz zu bilden. Diese Art der Vorsteuerung wird als High-Level-Stabilisierung bezeichnet und hat den Vorteil, dass auf impulsförmige Störungen durch Planung einer neuen Trajektorie reagiert wird, bei der weiterhin die Minimierung komfortrelevanter Kriterien im Fokus steht [15]. Auf der darunter liegenden Ebene wird die sogenannte Low-Level-Stabilisierung durchgeführt. Dabei werden die aus der Planung resultierenden optimalen Trajektorien mit dem Fahrzeugzustand bei einem für Regelungen üblichen Soll-/Ist-Wert-Vergleich zusammengeführt. Vorteil der unterlagerten Low-Level-Stabilisierung ist, dass permanente Störungen sowie Modellfehler ausgeglichen werden können [15]. Durch die Verknüpfung beider Stabilisierungsstrategien zur Bi-Level-Stabilisierung lassen sich die Vorteile beider Einzelstrategien ausnutzen.

Das AD-Planungsproblem wird in der vorliegenden Arbeit unter Anwendung der Variationsrechnung mit besonderem Fokus auf den Fahrkomfort gelöst. Zunächst wird der Begriff Fahrkomfort erörtert und in den Kontext des AD eingeordnet. Im Zuge dessen werden relevante Komfortkriterien mithilfe einschlägiger Literatur herausgearbeitet und diskutiert und es werden einige Richtwerte für die entsprechenden Komfortkriterien angegeben. Anschließend wird eine Einführung in die mathematischen Grundlagen der dynamischen Optimierung und speziell in die Variationsrechnung gegeben. Zudem werden einige Methoden als Erweiterung des „klassischen“, dynamischen OP vorgestellt, die für die

Lösung verschiedener Fahrszenarien benötigt werden. Als Abschluss dieses Kapitels werden mehrere indirekte Lösungsverfahren miteinander verglichen und hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit zur Lösung des AD-Planungsproblems diskutiert. Danach wird ein Modell zur Beschreibung der Fahrzeugbewegung entlang einer vorgegebenen Referenzkurve in Frenet-Koordinaten hergeleitet. Schließlich werden einige selbst gewählte Fahrszenarien mithilfe der vorgestellten Methoden eingehend analysiert und unter dem Aspekt des Fahrkomforts interpretiert. Abschließend werden die gesammelten Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick für weitere Forschung zu diesem Thema gegeben.

**Hinweis:** In dieser Arbeit werden die Begriffe Stellgröße, Eingangsgröße und Steuergröße synonym verwendet. Die abwechselnde Verwendung dieser dient ausschließlich der besseren Lesbarkeit.

## **2 Fahrkomfort und Einordnung in den Kontext Automatisiertes Fahren**

---

In diesem Kapitel soll der Begriff „Fahrkomfort“ in den Kontext AD eingeordnet werden. Dazu wird zunächst die Bedeutung des Begriffs genauer betrachtet und die Verbindung zwischen Fahrkomfort und Sicherheitsempfinden dargelegt. Anschließend werden verschiedene Einflussfaktoren auf die Komfortwahrnehmung während des Fahrens thematisiert. Dabei wird das Phänomen der Kinetose genauer erklärt und speziell auf dessen Bedeutsamkeit für die Entwicklung automatisierter Fahrzeuge eingegangen. Abschließend werden mithilfe von Literaturwerten Grenzwerte für die als relevant erachteten Einflüsse untersucht.

---

### **2.1 Fahrkomfort im Kontext Automatisiertes Fahren**

---

Mit zunehmender Automatisierung von Fahraufgaben rückt auch der Fahrkomfort immer mehr in den Fokus. Es ist nicht davon auszugehen, dass hochautomatisierte oder autonome Fahrzeuge, deren Fahrweise von Fahrer\_innen als unkomfortabel empfunden wird, eine hohe Akzeptanz finden werden. Damit sich überhaupt ein komfortables Gefühl während einer automatisierten Fahrt einstellen kann, muss bei den fahrzeugführenden Personen ein Gefühl von Sicherheit herrschen [6]. Nicht nur für unbeteiligte Dritte wie Fußgänger\_innen oder andere Autofahrer\_innen, sondern vor allem auch für die fahrende Person selbst spielt die Sicherheit bei automatisierten Fahrzeugen daher eine zentrale Rolle. In [6] wird dabei der Unterschied zwischen subjektiver und objektiver Sicherheit dargelegt. Während das subjektive Sicherheitsempfinden lediglich wiedergibt, wie der Fahrer oder die Fahrerin die Fahrt oder einzelne Situationen empfindet, lässt sich die objektive Sicherheit mithilfe von Größen wie reduzierten Unfallzahlen quantifizieren. Allerdings kann das subjektive Sicherheitsempfinden durchaus von der objektiven Sicherheit abweichen. Insbesondere bei FAS, die nach der SAE-Klassifizierung [7] Stufe 3 oder höher zugeordnet werden, und bei denen damit das Fahrzeug nicht nur die Längs- und Querführung, sondern zusätzlich auch die Umfeldüberwachung übernimmt, kommt der in [18] als „loss of controllability“ eingeführte Paradigmenwechsel von Fahrer\_in zu Passagier\_in zum Tragen. Dadurch, dass Fahrzeugführende mehr und mehr die Fahrzeugführung und Überwachung aller Funktionen an das Fahrzeug abgeben, stellt sich möglicherweise ein Gefühl von Kontrollverlust ein, weshalb nicht nur die objektive Sicherheit neuartiger Systeme eine große Rolle bei der Bewertung der Systeme spielt, sondern auch das subjektive Sicherheitsempfinden, welches eng an den wahrgenommenen Komfort geknüpft ist. Mit Umfeldüberwachung ist im Sinne der SAE-Klassifizierung die Detektion, Erkennung und Klassifizierung von Objekten im Straßenverkehr sowie Fahrsituationen und die Vorbereitung einer angemessenen Reaktion auf diese gemeint [7]. Bis einschließlich Level 2 liegt diese Aufgabe bei der fahrzeugführenden Person, während das Fahrzeug nur die eigentliche Quer- und Längsführung ausführt. Ab Level 3 fällt auch diese Aufgabe in den Bereich des Fahrzeugs, sodass das Fahrzeug die dynamische Fahraufgabe

vollständig selbst ausüben kann und die fahrzeugführende Person nur noch als Rückfallebene dient und die Fahrzeugführung in Not- oder Fehlersituationen nach Aufforderung durch das System sicher übernehmen kann [7].

Neben dem Sicherheitsempfinden gibt es weitere wichtige Faktoren, die den Fahrkomfort beeinflussen. Großen Einfluss auf das Komfortempfinden hat dabei der Fahrstil. In verschiedenen Studien wurden unterschiedliche Fahrstile identifiziert und in verschiedene Klassen unterteilt [19]–[21]. So variiert zwar die Anzahl und genaue Bezeichnung der einzelnen Klassen zwischen den verschiedenen Studien, jedoch erstreckt sich das Spektrum immer von „langsam“ oder „komfortorientiert“ bis hin zu „dynamisch/sportlich“ oder sogar „aggressiv“. In [22] konnte gezeigt werden, dass der Wunsch nach höherem Komfort mit dem Grad der Automatisierung steigt. Ein Grund für diesen Zusammenhang ist unter anderem, dass das Bedürfnis nach Feedback durch die Straße über das Fahrzeug an die fahrende Person mit zunehmender Automatisierung geringer wird. Daher liegt für automatisierte Fahrzeuge im Alltagsgebrauch ein komfortorientierter Fahrstil nahe.

Um beurteilen zu können, ob ein Fahrstil als komfortabel oder unkomfortabel wahrgenommen wird, muss zunächst geklärt werden, welche Merkmale dabei besonders großen Einfluss auf das Komfortempfinden haben. In [23] wurden in einer Fahrsimulatorstudie die Merkmale Sicherheitsabstand zum Vorderfahrzeug, das Bremsverhalten, die Fahrzeuggeschwindigkeit sowie -beschleunigung, das Spurhalten, Lenken und die Blinkernutzung als die am häufigsten genannten Komfortkriterien identifiziert, wobei die drei ersten Merkmale von über der Hälfte der Teilnehmenden als relevant erachtet wurden. Neben den hier identifizierten Komfortmerkmalen lässt sich auch die Reisezeit als weiteres Kriterium angeben. Bereits in [24] wurde dargelegt, dass Passagier\_innen, die einer längeren Reisezeit ausgesetzt sind, ein höheres Maß an Komfort benötigen, als bei einer kürzeren Reisezeit. Jeder Passagier und jede Passagierin geht daher einen subjektiven Kompromiss zwischen der erwarteten Reisezeit und dem akzeptierten Niveau an Diskomfort ein. Aufgrund dessen hängen die von der fahrenden Person als komfortabel empfundenen biomechanischen Werte (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Ruck) auch von der Reisezeit ab [6].

Eine besondere Gewichtigkeit bei der Trajektorienplanung bezüglich des Fahrkomforts kommt dem Beschleunigungsverhalten zu. In [20] konnte in zwei Studien für verschiedene Fahrmanöver nachgewiesen werden, dass sich Merkmale wie Längs- und Querbeschleunigung sowie der Fahrzeugruck gut dazu eignen, einen komfortablen Fahrstil von anderen Fahrstilen abzugrenzen. Laut [18] ist der häufigste Ansatz zur Optimierung der Fahrzeugbewegungen, die auf die Fahrzeuginsassen wirkenden Kräfte und Rucke zu minimieren. Dass bei der Betrachtung des Beschleunigungsverhaltens jedoch nicht nur die absoluten Werte der Beschleunigung relevant sind, zeigen die Untersuchungen in [25]. Hier konnte festgestellt werden, dass der Mensch bei lateralen Bewegungen insbesondere gegenüber Änderungen der Beschleunigung sehr sensitiv reagiert und diese besonders gut wahrnimmt. In [26] konnte ein Algorithmus entwickelt werden, der komfortable Fahrstrategien liefert, wobei als zusätzliches Komfortmerkmal der Ruck verwendet wurde. Dieser sollte dazu im Sinne des Fahrkomforts so gering wie möglich sein.

### 2.1.1 Kinetose und ihre Bedeutung für das Autonome Fahren

Kinetose, oftmals auch als Reise- oder Bewegungskrankheit bezeichnet (engl. *Motion Sickness*), beschreibt das Phänomen, dass man sich bei Reisen – vor allem im Auto, Flugzeug oder auf einem Schiff – plötzlich unwohl fühlt. Die Symptome reichen dabei von Blässe und leichter Übelkeit, über Schwindel und Kopfschmerzen, bis hin zum Erbrechen [27]. Es existieren mehrere Theorien für die genauen

Ursachen von Kinetose [27]. Eine anerkannte und weit verbreitete Theorie liegt dabei in einem visuell-vestibulären Sensorkonflikt [8]–[10]. Dadurch, dass Sensorinformationen über Beschleunigungen, die über das Gleichgewichtsorgan aufgenommen werden, nicht zu den Informationen passen, die über den visuellen Informationskanal geliefert werden, können die zuvor genannten Symptome auftreten. Dabei können prinzipiell alle Menschen mit einem funktionsfähigen Vestibularapparat gleichermaßen von Kinetose betroffen sein [28]. Darüber hinaus hängt die Schwere der Kinetoseausprägung von der Frequenz ab, mit der die Beschleunigungen und Rucke auf den menschlichen Körper einwirken [29]. Vor allem niederfrequente Schwingungen im Bereich zwischen 0,1 Hz und 0,5 Hz begünstigen das Auftreten von Kinetose und sollten vermieden werden [29], [30]. Da der Fokus dieser Arbeit hinsichtlich der Interpretation von optimalen Trajektorien in Bezug auf den Fahrkomfort allerdings nicht auf der Frequenzanalyse der Trajektorien liegt, soll der Einfluss unterschiedlicher Frequenzen nicht weiter diskutiert werden und sei an dieser Stelle lediglich der Vollständigkeit halber erwähnt.

Neben dem Einfluss des Sensorkonflikts auf die Ausprägung von Kinetose, konnte in [31] außerdem gezeigt werden, dass starke, periodische Längsbeschleunigungen, die vor allem beim Bremsen auftreten, ebenfalls das Auftreten der Reisekrankheit begünstigen.

Ein bekanntes Nebenphänomen der Reisekrankheit ist, dass sie überwiegend bei Beifahrer\_innen bzw. Passagier\_innen, die das Fahrzeug nicht selbst führen, auftreten [8]. In [32] und [11] wurden mehrere Gründe für dieses Phänomen gefunden. Zum einen hat die fahrzeugführende Person, die Kontrolle über die Fahrzeuggbewegungen und damit auch die Richtung, in die sich die Fahrzeuginsassen bewegen. Dies ist bei den Beifahrer\_innen nicht der Fall und die fehlende Kontrolle führt zu einer größeren Anfälligkeit für die Reisekrankheit. Außerdem kann fahrzeugführende Person durch die ihr gegebene Kontrolle über das Fahrzeug Bewegungen besser antizipieren. In [32] wird außerdem der bereits erwähnte visuell-vestibuläre Sensorkonflikt als Grund angeführt, da Beifahrer\_innen die Möglichkeit haben sich fahrfremden Tätigkeiten zu widmen, wodurch der Sensorkonflikt verstärkt wird. Bei einer Umfrage zum Thema fahrfremder Tätigkeiten während der Fahrt mit einem vollständig selbst fahrenden Auto in [32] gab ein Großteil der über 3000 Befragten an, dass sie während der Fahrt andere Tätigkeiten als das Beobachten der Straße ausüben würden. Zudem wurde nach der Häufigkeit und Schwere von Kinetose bei Fahrten mit gewöhnlichen Fahrzeugen gefragt. Mithilfe dieser Angaben wurde eine Abschätzung für das Kinetoserisiko bei Fahrten mit selbst fahrenden Fahrzeugen vorgenommen. Die Autoren kommen zu dem Ergebnis, dass zwischen 4 und 14 Prozent der Erwachsenen (unter Berücksichtigung der Angaben in verschiedenen Ländern) in vollständig selbst fahrenden Autos wahrscheinlich oft bis immer ein gewisses Maß an Kinetose verspüren werden. Die Ausprägung moderater bis schwerer Kinetosesymptome tritt nach der Einschätzung der Autoren bei zwischen 4 und 17 Prozent der Personen auf. Diese Studie verdeutlicht die besondere Bedeutung, die der Reisekrankheit bei der Entwicklung automatisierter Fahrzeuge zukommt.

Kinetose besitzt aus zwei Gründen eine ausdrückliche Relevanz für die Komfortwahrnehmung beim AD. Neben dem Einfluss von Beschleunigungen und Rucken, den diese bereits bei manueller, selbst gesteuerter Fahrt auf das Komfortempfinden haben, kommt nun noch dazu, dass auch das Risiko an Kinetose zu erkranken, maßgeblich vom Beschleunigungsverhalten abhängt. Des Weiteren tritt die Reisekrankheit überwiegend bei Beifahrer\_innen bzw. Passagier\_innen auf, wodurch bei der Fahrt mit einem automatisierten Fahrzeug erhöhtes Kinetoserisiko besteht, wenn sich die fahrzeugführende Person nun anstelle der Fahraufgabe auf fahrfremde Tätigkeiten wie Zeitunglesen oder die Arbeit am Laptop oder Smartphone konzentrieren kann und dadurch immer mehr selbst zum Beifahrer bzw. zur Beifahrerin wird. Dementsprechend besteht die Gefahr, dass Kinetose beim AD vermehrt auftreten könnte, wodurch der Komfort drastisch reduziert wird. Es ist daher plausibel, dass den Ursachen von

Kinetose bei der Entwicklung automatisierter Fahrzeuge und der Planung der Fahrzeugbewegung durch entsprechende Maßnahmen entgegengewirkt werden sollte.

Nachdem der Einfluss unterschiedlicher Faktoren auf den Fahrkomfort – insbesondere unter Berücksichtigung von Kinetose – analysiert wurde, lässt sich feststellen, dass im Beschleunigungsverhalten des Fahrzeugs – sowohl in longitudinaler als auch in lateraler Richtung – die wichtigsten Merkmale für die Komfortbetrachtung bei der Trajektorienplanung enthalten sind. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit neben der Reisezeit ausschließlich die Kriterien Längs- und Querbeschleunigung sowie Längs- und Querruck in verschiedenen Kombinationen als Gütekriterien und zur Beurteilung des Fahrkomforts verwendet.

## 2.2 Komfortgrenzen für Fahrzeugbeschleunigung und -ruck

Für die Bewertung der Komfortkriterien hinsichtlich des Fahrkomforts ist es notwendig für die verschiedenen Fahrszenarien möglichst genaue Grenzwerte für diese anzugeben. Nachfolgend wird der Frage nachgegangen, inwiefern sich Grenzen der verwendeten Komfortkriterien Fahrzeugruck und -beschleunigung quantitativ bestimmen lassen. Die Grenzen werden anhand von Literaturwerten herausgearbeitet und getrennt nach Längs- und Querdynamik betrachtet.

### 2.2.1 Grenzwerte für die Längsdynamik

Für die Begrenzung der Längsdynamik des Fahrzeugs soll zunächst ein Blick auf bestehende FAS geworfen werden, die Fahrer\_innen in der Längsführung des Fahrzeugs unterstützen. Die Systeme Adaptive Cruise Control (ACC) sowie Full Speed Range Adaptive Cruise Control (FSRA) stellen dafür praxiserprobte Systeme dar, die als Orientierung verwendet werden können. Das FSRA ist eine Systemerweiterung des Standard ACC, dessen Funktionalität zusätzlich zum mittleren und hohen Geschwindigkeitbereich auch den niedrigen Geschwindigkeitsbereich ( $v < 5 \text{ m/s}$ ) abdeckt [33]. In den ISO-Normen ISO 15622 [34] und ISO 22179 [35] werden die Funktionsgrenzen der beiden Systeme spezifiziert, welche auch in [33] nachgelesen werden können. Geht man davon aus, dass der Betrieb automatisierter Fahrzeuge im gesamten möglichen Geschwindigkeitsbereich vom Stillstand bis hin zu hohen Geschwindigkeiten möglich sein soll, so dienen die Funktionsgrenzen des FSRA als erste Anhaltspunkte für automatisierte Fahrzeuge. Beim FSRA wird zwischen den einzelnen Geschwindigkeitsbereichen unterschieden. Bei hohen Geschwindigkeiten von  $v > 20 \text{ m/s}$  betragen die Grenzwerte für die maximal zur Verfügung stehende Beschleunigung bzw. Verzögerung  $a_{\max} = 2 \text{ m/s}^2$  bzw.  $a_{\min} = -3,5 \text{ m/s}^2$  [33]. Im Bereich niedriger Geschwindigkeiten von  $v < 5 \text{ m/s}$  betragen die Funktionsgrenzen  $a_{\max} = 4 \text{ m/s}^2$  bzw.  $a_{\min} = -5 \text{ m/s}^2$  [33]. Im dazwischen liegenden Geschwindigkeitsbereich dürfen die Höchstwerte für die Beschleunigung und Verzögerung abhängig von der gefahrenen Geschwindigkeit innerhalb der angegebenen Werte für hohe und niedrige Geschwindigkeiten liegen [33]. Der Grenzwert für den zulässigen Fahrzeugruck wird für hohe Geschwindigkeiten mit  $j_{\max} = 2,5 \text{ m/s}^3$  und für niedrige Geschwindigkeiten mit  $j_{\max} = 5 \text{ m/s}^3$  angegeben, wobei dieser Wert sowohl für positive als auch negative Beschleunigungen gilt [33]. Auch hier darf der maximale Fahrzeugruck bei mittleren Geschwindigkeiten je nach tatsächlicher Geschwindigkeit innerhalb dieser Grenzen liegen. Somit sind erste Werte für Funktionsgrenzen in Längsrichtung abgesteckt, wobei beachtet werden muss, dass diese Werte als absolute, zulässige Maximalwerte zu verstehen sind, bei denen der Fahrkomfort noch nicht berücksichtigt wurde [6]. Es kann davon ausgegangen

werden, dass die Komfortgrenzen für FAS enger gefasst werden müssen als die reinen Funktionsgrenzen, weshalb die Grenzen unter Berücksichtigung des Komforts nun weiter eingeschränkt werden sollen.

In [36] wird ein Modell zur Folgefahrt basierend auf dem Fahrer\_innen- bzw. Passagier\_innenkomfort vorgestellt. Als Schwellwert der Längsbeschleunigung für die Unterscheidung zwischen einer komfortablen und einer unkomfortablen Fahrt wird dabei der Wert  $a_c = 2 \text{ m/s}^2$  angegeben. In [37] wurde die mittlere Längsbeschleunigung eines „undynamischen“ und damit als komfortorientiert empfundenen Fahrstils auf Landstraßen experimentell als  $1 \text{ m/s}^2$  ermittelt. In [38] konnten wichtige Erkenntnisse im alltäglich Straßenverkehr bezüglich des Beschleunigungsverhaltens bei Anfahrvorgängen gewonnen werden. Dafür wurden mithilfe von Bild- und Videokameras Messungen an Kreuzungen sowohl im innerstädtischen als auch außerstädtischen Bereich durchgeführt und das Beschleunigungsverhalten beim Anfahren aus dem Stand von Geradeausfahrenden und Rechtsabbiegenden analysiert. Die Versuchsergebnisse sind in Abbildung 2.1 dargestellt. Es konnte gezeigt werden, dass die gemessene Längsbeschleunigung allgemein mit der zurückgelegten Strecke abnimmt, wobei der Höchstwert des 90. Perzentils bei Geradeausfahrt bei  $2,56 \text{ m/s}^2$  und beim Rechtsabbiegen bei  $2,2 \text{ m/s}^2$  liegt. Die maximale Beschleunigung wird unmittelbar nach Beginn des Beschleunigungsvorgangs (nach 5 m) erreicht. Anschließend nimmt die Beschleunigung rapide ab und bereits nach 15 m beträgt der Höchstwert des 90. Perzentils für Geradeausfahrt nur noch  $2,1 \text{ m/s}^2$ , respektive  $1,8 \text{ m/s}^2$  für das Abbiegemanöver. Zudem wurde festgestellt, dass das Beschleunigungsniveau bei Abbiegevorgängen – sowohl innerorts, als auch außerorts – insgesamt geringer ist, als bei Anfahrvorgängen zur Geradeausfahrt. Als dritte wichtige Erkenntnis wurde schließlich festgestellt, dass es einen Unterschied im Beschleunigungsverhalten zwischen Abbiegevorgängen innerhalb von Ortschaften und außerorts gibt. Die Beschleunigungen innerorts sind dabei geringer. Dies wird damit begründet, dass bei Abbiegevorgängen innerorts der Verkehr durch kreuzende Fußgänger\_innen oder Radfahrende beachtet werden muss [38].

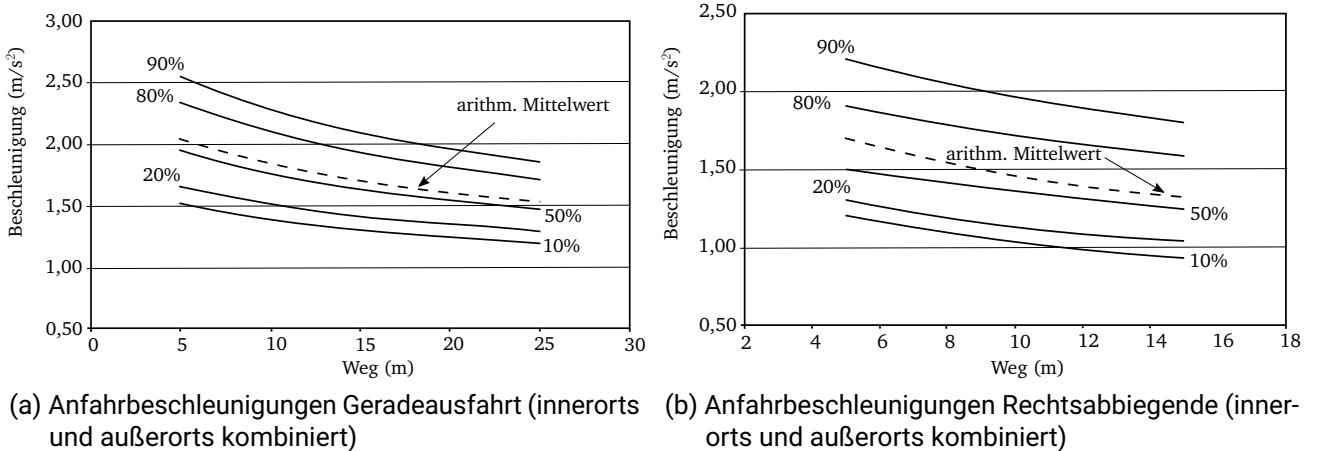


Abbildung 2.1: Anfahrbeschleunigungen für Geradeausfahrende und Rechtsabbiegende [38]

Diese Werte stimmen unter anderem mit den in [39] anhand von Beschleunigungssensoren im Alltagsverkehr gemessenen Ergebnissen überein. Zusätzlich zum Wert für die Längsbeschleunigung wird das 90. Perzentil für die Längsverzögerung von planbaren Anhaltemanövern bei Alltagsfahrten (Zufahren auf eine rote Ampel) in [39] mit  $-3,3 \text{ m/s}^2$  angegeben. Die zuvor genannten Werte wurden anhand von Alltagsfahrten ermittelt und in Perzentilen angegeben, die eine möglichst große Menge der analysierten Ergebnisse (90. Perzentil) umfassen. Auch wenn bei der Analyse des alltäglichen Fahrverhaltens davon ausgegangen werden kann, dass ein gewisses Maß an Fahrkomfort erreicht wurde, kann es sein, dass die Höchstwerte der Perzentile mit weniger komfortablen Manövern erreicht wurden. In [40] wird der Blick

bei der Angabe von Grenzwerten speziell nochmal auf den Fahrkomfort gerichtet. Hier wird ein hohes Maß an Fahrkomfort mit einer defensiven Fahrweise in Verbindung gebracht [40]. Die Höchstwerte der Beschleunigung und Verzögerung in longitudinaler Richtung für eine komfortable Fahrweise werden mit  $2,0 \text{ m/s}^2$  beziehungsweise  $-2,5 \text{ m/s}^2$  angegeben [40] und stimmen in etwa mit den zuvor angegebenen Werten für alltägliche Beschleunigungs-, Verzögerungs- und Abbiegevorgänge überein, wobei in [40] auf eine geschwindigkeitsabhängige Betrachtung explizit verzichtet wurde.

Für den Längsruck gilt laut [41] typischerweise für die Entwicklung vieler Anwendungen wie den Entwurf von Zugstrecken oder Personenaufzügen ein Grenzwert von  $j_{\max} = \pm 2 \text{ m/s}^3$  zur Wahrung des Komfort von Anwender\_innen, wobei der Wert sich dabei auf die Längsrichtung der Bewegung bezieht. Neben den absoluten Werten des Rucks konnte Hiroaki in einer Studie [42] (zitiert nach [43]) für das Railway Technical Research Institute in Japan zudem einen signifikanten Zusammenhang zwischen dem Ruck und der Beschleunigung bezüglich der Akzeptanz durch Nutzende feststellen. Demnach sinkt die Akzeptanz eines Fahrmanövers mit zunehmender Beschleunigung bei gleich bleibendem Ruck. Je größer der dabei erreichte Ruck, desto eher wird ein Manöver als unkomfortabel empfunden und von Nutzenden abgelehnt. Berücksichtigt man für die Auslegung eines FAS die in [41] angegebene Komfortgrenze von  $j_{\max} = 2 \text{ m/s}^3$ , so darf die Längsbeschleunigung nicht größer als  $1 \text{ m/s}^2$  sein, damit gemäß der Auswertungen in [42] weniger als 10% der Teilnehmenden ein Manöver ablehnen würden und somit ein hohes Akzeptanzniveau erreicht werden kann.

## 2.2.2 Grenzwerte für die Querdynamik

Wie bereits in 2.2.1 sollen auch in diesem Abschnitt zunächst die Funktionsgrenzen bereits bestehender FAS, die Fahrer\_innen in der Querführung des Fahrzeugs unterstützen, berücksichtigt werden. Dazu bietet sich die Betrachtung des Lane Keeping Support (LKS) an. Dieses inzwischen in vielen Fahrzeugen verbaute Assistenzsystem unterstützt die fahrzeugführende Person darin, bei höheren Geschwindigkeiten die Fahrspur zu halten und dem unerwünschten Verlassen des Fahrstreifens entgegen zu wirken [44]. Im Gegensatz zum zuvor beschriebenen FSRA ist das LKS in seinen Funktionsbereichen deutlich stärker restriktiv. Während das FSRA über einen sehr breiten Geschwindigkeitsbereich mit vergleichsweise hohen Beschleunigungs- und Ruckwerten, die weit über die Grenzen eines komfortablen Fahrstils hinausgehen, betriebsfähig ist und somit der Funktionalität eines automatisierten Fahrzeugs sehr nahe kommt, ist der Einsatzbereich des herkömmlichen LKS stärker beschränkt. Der Geschwindigkeitsbereich, in dem das LKS zur Verfügung steht, liegt bei  $65 \text{ km/h} < v < 180 \text{ km/h}$  und der minimale Kurvenradius, der durchfahren werden kann beträgt 230 m, bei einem maximalen Lenkmoment von 3 Nm [44]. Dabei können Querbeschleunigungen von bis zu  $2 \text{ m/s}^2$  erreicht werden. Durch diese Funktionsgrenzen wird das System in seiner Anwendung auf den Betrieb im Autobahnverkehr beschränkt. Mittlerweile existieren auch Erweiterungen des LKS, die einen Betrieb im niedrigeren Geschwindigkeitsbereich bis 60 km/h ermöglichen und somit als Ergänzung für Stausituationen dienen [45].

Analog zu den Ergebnissen für die Längsbeschleunigung wurde das Clusterzentrum für komfortable Fahrt auf Landstraßen in [37] als  $2,5 \text{ m/s}^2$  ermittelt. Der in [40] angegebene Maximalwert für erreichen eines hohen Komfortniveaus liegt bei  $1,8 \text{ m/s}^2$  und weicht damit leicht vom Wert aus [37] ab. Allerdings wird in [40] neben der Unterscheidung verschiedener Komfortstufen noch zwischen den einzelnen Fahrstilen differenziert. Für einen defensiven Fahrstil wird der Bereich lateraler Beschleunigungen mit  $1,5 \text{ m/s}^2 - 2,9 \text{ m/s}^2$  beziffert. Geht man davon aus, dass eine defensive Fahrweise allgemein einen hohen Fahrkomfort bietet, so lässt sich dieser Wertebereich auch mit dem Clusterzentrum für komfortable Landstraßenüberfahrten aus [37] in Einklang bringen.

Neben den absoluten Werten der Querbeschleunigung zeigen zahlreiche Untersuchungen eine signifikante Abhängigkeit der Querbeschleunigung von der Fahrgeschwindigkeit [46]–[49]. So werden in [46] typische Querbeschleunigungen, die von Normalfahrer\_innen erreicht werden, für die Geschwindigkeitsbereiche Stadt ( $v < 50 \text{ km/h}$ ), Landstraße ( $50 \text{ km/h} < v < 100 \text{ km/h}$ ) und Autobahn ( $100 \text{ km/h} < v < 250 \text{ km/h}$ ) angegeben, wobei die auf Landstraßen typischerweise erreichten Querbeschleunigungen mit  $4,1 \text{ m/s}^2$  am höchsten und auf Autobahnen mit  $2 \text{ m/s}^2$  am niedrigsten sind. Zur Prädiktion des Fahrverhaltens in Kurven wurde in [47] mithilfe der maximal zulässigen Querbeschleunigung und anderer physikalischer Begrenzungen wie dem maximalen Lenkwinkel der nichtlineare Verlauf einer Einhüllenden für die Querbeschleunigung in Abhängigkeit der Fahrzeuggeschwindigkeit bestimmt. Zudem konnte in [48] mithilfe von Beschleunigungsmessungen bei Spurwechselmanövern festgestellt werden, dass bei höheren Geschwindigkeiten bereits niedrigere Querbeschleunigungen ausreichen, um das Gefühl eines scharfen Manövers zu verursachen. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

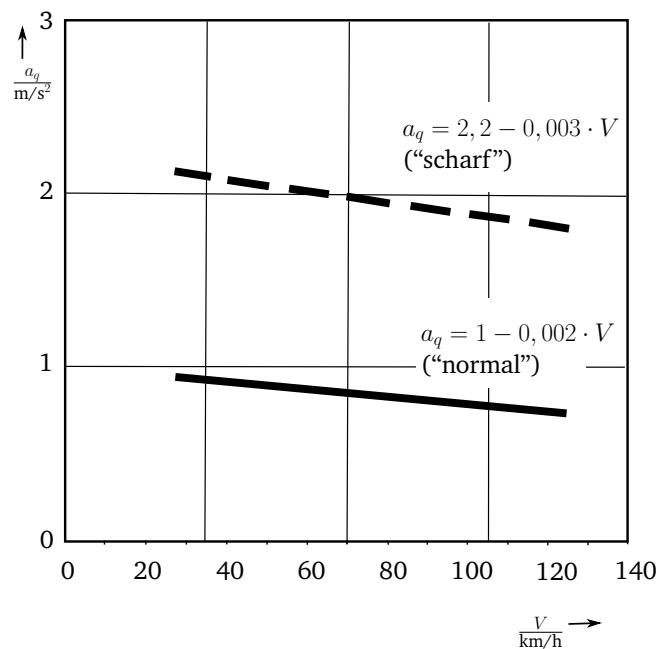


Abbildung 2.2: Zusammenhang zwischen der Querbeschleunigung und der Fahrzeuggeschwindigkeit für „scharfe“ und „normale“ Spurwechsel [48]

Zusätzlich zu der Geschwindigkeitsabhängigkeit zeigen Untersuchungen einen weiteren Zusammenhang zwischen der Querbeschleunigung und der durchfahrenen Krümmung und damit auch dem Fahrmanöver (beispielsweise Spurwechsel oder Kurvenfahrt) auf [39], [49]. Es lässt sich ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen der gemessenen Querbeschleunigung des Fahrzeugs und der durchfahrenen Krümmung feststellen, bei dem die Querbeschleunigung mit abnehmender Krümmung (wachsender Radius) ebenfalls abnimmt, obwohl die physikalischen Grenzen der Querbeschleunigung für große Kurvenradien genauso gelten wie für geringe Radien und theoretisch jede Kurve durch entsprechende Anpassung der Geschwindigkeit mit der gleichen maximalen Querbeschleunigung durchfahren werden könnte. Der Grund für diesen Zusammenhang liegt darin, dass Fahrer\_innen bei der Wahl der Kurvengeschwindigkeit automatisch einen Sicherheitsabstand zu den physikalischen Grenzwerten der

Beschleunigung einhalten [39]. Da größere Radien vor allem auf Autobahnen vorkommen, wo in aller Regel hohe Geschwindigkeiten herrschen und damit im Falle eines Unfalls durch Überschreiten der physikalischen Grenzen ein deutlich größeres Schadenspotential herrscht als im Stadtverkehr, wird der Sicherheitsabstand zu den physikalischen Grenzen von den meisten Personen bei großen Radien intuitiv größer gewählt als bei kleinen Kurvenradien [49]. In [50] wird der gleiche Zusammenhang zwischen abnehmender Querbeschleunigung und zunehmendem Kurvenradius angegeben – bei größeren Radien werden geringere Beschleunigungen akzeptiert. Allerdings wird hier nochmal zwischen den drei Fahrstilen „sportlich“, „normal“ und „ruhig“ unterschieden. Der qualitative Verlauf der Querbeschleunigung über dem Kurvenradius bleibt jedoch bei allen Fahrstilen gleich, lediglich das Gesamtniveau der akzeptierten Querbeschleunigung variiert zwischen den einzelnen Fahrstilen. In Abbildung 2.3 ist der gemessene Zusammenhang zwischen der Querbeschleunigung und dem Kurvenradius nach [39] dargestellt. Die beim Durchfahren der Kurven erreichten Geschwindigkeiten wurden von den Fahrer\_innen frei gewählt.

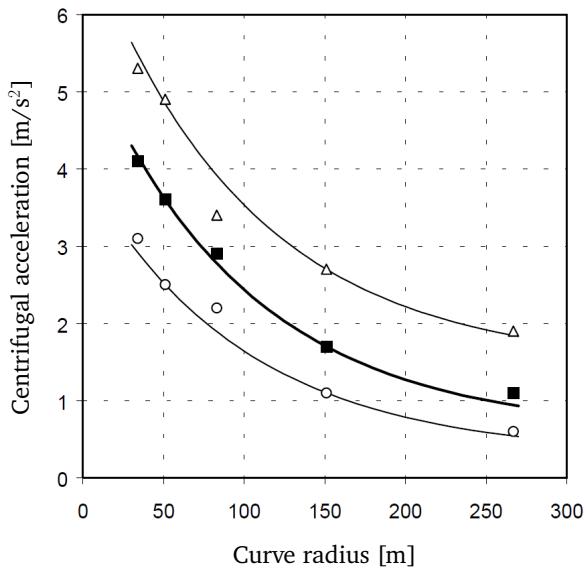


Abbildung 2.3: Zusammenhang zwischen der Querbeschleunigung und dem Kurvenradius bei selbst gewählten Geschwindigkeiten [39].

Legende:  $\triangle$ : 90. Perzentil,  $\blacksquare$ : 50. Perzentil,  $\circ$ : 10. Perzentil

Ein häufiges und wichtiges Verkehrsmöglichkeit im Straßenverkehr ist der Spurwechsel zum Beispiel bei Überholvorgängen, weshalb dieses Manöver nochmal genauer betrachtet werden soll. In Fahrversuchen wurden selbstgewählte Querbeschleunigungen bei Fahrstreifenwechseln im Bereich von  $0,74 \text{ m/s}^2$  –  $1,01 \text{ m/s}^2$  gemessen [22]. Nahezu die selben Werte wurden auch in [48] für normale Spurwechselmanöver bei verschiedenen Geschwindigkeiten ermittelt, die in Abbildung 2.2 dargestellt sind. In [51] wurden vergleichbare Tests bei Spurwechseln durchgeführt. Allerdings wurden die Tests bezogen auf einen Referenzspurwechsel einmal mit geringerer und einmal mit höherer Querdynamik durchgeführt, wobei die geringere Querdynamik als deutlich komfortabler eingestuft wurde [51] und mit  $1,1 \text{ m/s}^2$  eine maximale Querbeschleunigung aufwies, die sehr ähnlich zu den in [48] und [22] ermittelten Werten liegt.

Als Komfortgrenze für den Querruck dient der in [51] ermittelte maximale Querruck bei Spurwechselmanövern. Dabei wurden Spurwechsel unterschiedlicher Dynamikausprägungen durchgeführt, die

anschließend von den Proband\_innen hinsichtlich des Fahrkomforts bewertet werden sollten. Die Ruckwerte der beiden unterschiedlichen Querdynamiken können im Hinblick auf den Fahrkomfort als komfortabel für die geringere Querdynamik und als weniger komfortabel für die höhere Querdynamik interpretiert werden. Der beim komfortableren Spurwechsel erreichte maximale Querruck beträgt  $1,8 \text{ m/s}^3$  [51]. Wie bereits dargelegt werden konnte, kommen zahlreiche wissenschaftliche Studien und Untersuchungen zu dem Ergebnis, dass Beschleunigungsänderungen einen signifikanten Einfluss auf die Komfortwahrnehmung haben und daher eine wichtige Rolle bei der Bewertung des Fahrkomforts spielen. Allerdings ist es aufgrund der komplexen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Größen und dem subjektiven Komfortempfinden ebenso schwierig, den Fahrzeugruck objektiv und allgemeingültig unter Berücksichtigung des Fahrkomforts zu quantifizieren. Aus diesem Grund können weitere Grenzwerte für den Fahrzeugruck, die über die bisher genannten Werte hinausgehen, im Rahmen dieser Recherche nicht angegeben werden.

Die zuvor erarbeiteten Grenz- und Richtwerte sind im Anhang A nochmals gesammelt in den Tabellen A.1 und A.2 dargestellt. Die Ergebnisse in diesem Kapitel machen die Schwierigkeit bei der objektiven Bestimmung von Grenzwerten für den Fahrkomfort deutlich. Die Komfortwahrnehmung wird von einer Reihe unterschiedlicher Faktoren beeinflusst. Erst deren Gesamtwirken lässt sich je nach Situation und Fahrmanöver bezüglich des Fahrkomforts bewerten. Dazu kommt, dass das Komfortempfinden auch von subjektiven Eindrücken wie dem persönlichen Sicherheitsempfinden oder eigenen Fahrgewohnheiten geprägt wird. Allgemeingültige Werte, die als „harte“ Komfortgrenzen verstanden werden können, können deshalb ohne zusätzliche Annahmen und Vereinfachungen nicht getroffen werden. Die in diesem Kapitel erarbeiteten Grenzwerte für die komfortrelevanten Größen Fahrzeugruck und -beschleunigung in longitudinaler und lateraler Richtung dienen daher eher als Orientierung für die qualitative Bewertung des Fahrkomforts.

# 3 Optimierung - Mathematische Grundlagen und Methoden

---

In diesem Kapitel werden die notwendigen mathematischen Grundlagen beschrieben, die zur Formulierung eines OP und zu dessen Lösung mithilfe der Variationsrechnung notwendig sind. Dazu wird zunächst der Unterschied zwischen *statischer* und *dynamischer* Optimierung erläutert und anschließend mit der *Variationsrechnung* eine Lösungsmethode eingeführt, durch die sich ein dynamisches OP in ein System nichtlinearer DGL 1. Ordnung überführen lässt. Dessen Lösung kann entweder analytisch oder numerisch bestimmt werden. Danach werden zusätzliche Methoden erläutert, mit deren Hilfe sich ein komplexes OP in mehrere miteinander verknüpfte Optimierungsaufgaben unterteilen lässt, deren Lösungen vergleichsweise einfach bestimmt werden können. Abschließend werden einige Lösungsverfahren zur numerischen Lösung dynamischer OP vorgestellt und diskutiert.

## 3.1 Statische Optimierung

---

Die allgemeine Standardformulierung eines statischen OP lautet [52]:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

$$\text{u.B.v. } g(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

$$h(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Die Funktion  $f(\mathbf{x})$  wird dabei als Kosten- oder Gütfunktion bezeichnet und bezüglich der Optimierungsvariablen  $\mathbf{x}$  unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen  $g$  und  $h$  minimiert. Bei der statischen Optimierung sind die Variablen  $\mathbf{x}$  Elemente des Euklidischen Raums [52]. Für die Gleichungsnebenbedingung (GNB)  $g(\mathbf{x})$  und die Ungleichungsnebenbedingung (UNB)  $h(\mathbf{x})$  gilt  $g \in \mathbb{R}^p$  bzw.  $h \in \mathbb{R}^q$ , wobei  $p < n$  sein muss, da sich die Optimierungsvariablen  $\mathbf{x}$  ansonsten bei  $p = n$  unabhängigen Gleichungen direkt aus  $g(\mathbf{x})$  bestimmen lassen [53]. Für die Dimension der UNB hingegen gibt es keine maximal zulässige Anzahl [53].

## 3.2 Dynamische Optimierung

---

Im Unterschied zur statischen Optimierung sind die Optimierungsvariablen bei der dynamischen Optimierung selbst Funktionen einer unabhängigen Variable, welche in den meisten Fällen der Zeit  $t$  entspricht [52]. Das bedeutet, es werden die optimalen Zeitverläufe der Optimierungsvariablen gesucht. Aufgrund dessen wird die zu optimierende Funktion  $f(\mathbf{x})$  zum Kosten- oder Gütfunktional

$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ , welches bei der dynamischen Optimierung minimiert wird. Eine sehr häufige Anwendung der dynamischen Optimierung findet man bei dynamischen Systemen, für die eine optimale Eingangstrajektorie  $\mathbf{u}^*(t)$  gesucht wird [52]. Da es sich bei den Optimierungsvariablen um die Eingangs- bzw. Steuergrößen des Systems handelt, wird auch von einem *Optimalsteuerungsproblem* gesprochen [52]. Gleichzeitig liefert die Lösung des Problems die optimalen Zustandstrajektorien  $\mathbf{x}^*(t)$ , weshalb die Formulierung eines dynamischen OP einen geeigneten Ansatz zur Trajektorienplanung dynamischer Systeme darstellt. Die allgemeine Formulierung eines solchen Optimalsteuerungsproblems lautet [52]:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, t_f) = V(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (3.4)$$

$$\text{u.B.v. } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.5)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (3.6)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (3.7)$$

Es gilt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^p$  und  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^q$ . Wie bereits bei der statischen Optimierung stellen die Gleichungen (3.6) und (3.7) GNB und UNB dar, wobei die UNB an dieser Stelle lediglich der Vollständigkeit halber in der allgemeinen Form mit angegeben sind. Für die weiteren Betrachtungen – die Anwendung der Variationsrechnung und die Ergebnisse dieser Arbeit – werden die UNB vernachlässigt, da die Berücksichtigung von UNB eine analytische Lösung des OP deutlich komplizierter macht. Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass sich auch Optimalsteuerungsprobleme mit UNB mithilfe des Ansatzes der Variationsrechnung lösen lassen. Für weitere Informationen zum Umgang mit allgemeinen UNB für die Systemzustände und/oder Eingangsgrößen sei auf entsprechende Fachliteratur zum Thema Optimierung verwiesen (siehe [53], [54]).

Gleichung (3.5) beschreibt die Systemdynamik mit der Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  und den Anfangszuständen  $\mathbf{x}_0$  des Systems, die als Anfangsbedingungen für den Startpunkt  $t_0$  fungieren. Gleichung (3.6) stellt dabei Endbedingungen für den Endpunkt  $t_f$  dar. Gemeinsam bilden die Anfangs- und Endbedingungen die Randbedingungen des Optimierungsproblems. Die dargestellte Form von Randbedingungen wird auch als separierte Randbedingungen bezeichnet, da sich die Bedingungen für den Anfangspunkt und den Endpunkt getrennt voneinander formulieren lassen und keine Randbedingungen der Form  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f)) = 0$  existieren, die gleichzeitig von  $\mathbf{x}(t_0)$  und  $\mathbf{x}(t_f)$  abhängen [55]. Das Gütfunktional in Gleichung (3.4) wird in der dargestellten Form auch als *Bolza-Form* des Gütfunktionalen bezeichnet und setzt sich aus zwei Teilen zusammen: Der Integralanteil beschreibt die von der Zeit abhängigen laufenden Kosten und heißt *Lagrange-Form*. Der vor dem Integralanteil stehende Term  $V(\mathbf{x}(t_f), t_f)$  gibt die Bewertung des Endzustands (und der Endzeit), also die Endkosten, an. Dieser wird *Mayer-Form* genannt [52]. Für die Lagrange- und Bolza-Form gilt, dass sie sich immer in die Mayer-Form überführen lassen [52] (siehe auch [54]). Der Endzeitpunkt  $t_f$  kann festgelegt sein oder frei. Ist er frei, so muss  $t_f$  als zusätzliche Optimierungsvariable bei der Lösung des OP berücksichtigt werden [52]. Häufig hängt das Gütfunktional von mehreren Größen ab, die miteinander konkurrieren können. So steht beispielsweise eine geringe Fahrzeugbeschleunigung im Widerspruch zu einer kurzen Reisezeit. Dies führt dazu, dass bei der Optimierung immer der bestmögliche Kompromiss zwischen allen berücksichtigten Gütekriterien gesucht wird. Beim Optimum eines OP wird daher auch von *Pareto-Optimalität* gesprochen [53]. Das Optimum besitzt dann die Eigenschaft, dass die Verbesserung bezüglich eines Gütekriteriums nur auf Kosten der Verschlechterung eines anderen Kriteriums möglich ist – eine Verbesserung aller Gütekriterien ist nicht möglich [53]. Dies hat zur Folge, dass zum einen die einzelnen Gütekriterien isoliert betrachtet nie ihren bestmöglichen Wert erreichen. Zum anderen hilft diese Eigenschaft dabei, sinnvolle Problemstellungen zu formulieren. Welches der einzelnen Gütekriterien letztendlich wie stark gewichtet wird, unterliegt oftmals der subjektiven Beurteilung. Dadurch kann ein Optimum subjektiv

betrachtet „besser“ sein als ein anderes, obwohl beide die Lösung der jeweiligen Problemstellung liefern. Um die Bedeutung von Gütekriterien und Gewichtung zu verdeutlichen, ist in (3.8) beispielhaft ein einfaches Gütefunktional dargestellt, welches für die Trajektorienplanung im Kontext AD verwendet werden könnte

$$J(a_x, t, t_f) = w_t t_f + \int_{t_0}^{t_f} w_a a_x^2 dt. \quad (3.8)$$

Das Gütefunktional setzt sich im dargestellten Fall aus den beiden Gütekriterien Endzeitpunkt  $t_f$  und dem Integral über der Längsbeschleunigung  $a_x$  zusammen. Das Optimierungsziel dieses Gütefunktionalen besteht also darin, eine möglichst geringe Endzeit zu erreichen, und gleichzeitig die laufenden Kosten durch die Beschleunigung zu minimieren – zwei Ziele, die offensichtlich miteinander konkurrieren. Wie stark die beiden Gütekriterien jeweils in die Bewertung einfließen, lässt sich über die Wahl der Gewichtungsfaktoren  $w_t$  und  $w_a$  festlegen. Eine höhere Gewichtung führt dazu, dass die jeweilige Größe an Einfluss gewinnt und der Fokus bei der Minimierung mehr auf die entsprechende Größe gelegt wird. Wird beispielsweise die Gewichtung der Beschleunigung  $w_a$  erhöht, während  $w_t$  unverändert bleibt, führt dies zu einem insgesamt niedrigeren Beschleunigungs niveau und gleichzeitig zu einer längeren Endzeit  $t_f$ .

### 3.2.1 Variationsrechnung

Die Variationsrechnung bietet einen Ansatz, mit dem dynamische OP der Gleichungen (3.4)–(3.7) gelöst werden können. Dazu werden ausgehend von den optimalen Trajektorien  $\mathbf{x}^*(t)$  und  $\mathbf{u}^*(t)$  und dem optimalen Endzeitpunkt  $t_f^*$  (sofern  $t_f$  frei und damit Teil der Optimierung ist) Variationen zugelassen, sodass gilt [52]:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t) + \epsilon \boldsymbol{\delta}_x(t) \quad (3.9)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \epsilon \boldsymbol{\delta}_{\dot{x}}(t) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t) + \epsilon \boldsymbol{\delta}_u(t) \quad (3.11)$$

$$t_f = t_f^* + \epsilon \boldsymbol{\delta}_{t_f} \quad (3.12)$$

Die  $\boldsymbol{\delta}$ -Variablen bezeichnen dabei die Variationen der einzelnen Größen und  $\epsilon$  ist der Parameter, mit dem die Variationen Einfluss auf die Trajektorien nehmen, wobei für  $\epsilon = 0$  offensichtlich  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}^*(t)$ ,  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$  und  $t_f = t_f^*$  gilt. In Abbildung 3.1 ist ein solcher Verlauf einer möglichen optimalen Trajektorie  $\mathbf{x}^*(t)$  und einer zulässigen Variation skizziert. Außerdem sind die Variation des Endzeitpunkts und des Endzustands  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^*(t_f^*) + \epsilon(\boldsymbol{\delta}_x(t_f^*) + \dot{\mathbf{x}}^*(t_f^*)\boldsymbol{\delta}_{t_f})$  dargestellt.

Für die Anwendung der Variationsrechnung zur Optimierung dynamischer Systeme wird das folgende Gütefunktional definiert [52]:

$$J(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), t, t_f) = V(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}(t)^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \dot{\mathbf{x}}(t)) dt \quad (3.13)$$

Im Vergleich zur Formulierung in (3.4) wurde der Lagrange-Teil des Gütefunktionalen im Integral um den Term  $\int \boldsymbol{\lambda}(t)^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \dot{\mathbf{x}}(t))$  erweitert, wobei dieser für  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$  zu null wird. Die Variablen  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$  stellen dabei die sogenannten *adjungierten Zustände* dar [52]. Durch das Einführen dieser Multiplikatoren ist es möglich, die in (3.5) als Nebenbedingung formulierte Systemdynamik in das Gütefunktional hineinzuziehen [56]. Werden die Variablen im Gütefunktional nun durch die

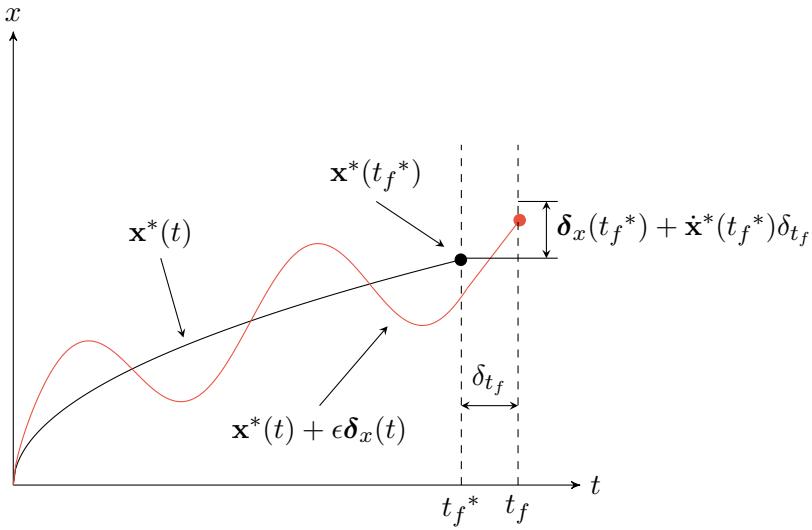


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der optimalen Trajektorie  $\mathbf{x}^*(t)$  und eine mögliche, zulässige Variation  $\mathbf{x}(t)$  nach [52].

Gleichungen (3.9)–(3.12) ersetzt, hängt das Gütefunktional nur noch von  $\epsilon$  ab. Da die Trajektorien  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  und  $\mathbf{u}(t)$  wie bereits gezeigt nur für  $\epsilon = 0$  den optimalen Verläufen entsprechen können, lautet die notwendige Bedingung für das Verschwinden der Variation des Gütefunktionalen  $\delta_J$  und damit für ein Minimum

$$\delta_J = \frac{dJ(\mathbf{x}^*(t) + \epsilon \delta_x(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \epsilon \delta_{\dot{\mathbf{x}}}(t), \mathbf{u}^*(t) + \epsilon \delta_u(t), t_f^* + \epsilon \delta_{t_f})}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0. \quad (3.14)$$

Aus dieser Bedingung lassen sich die notwendigen Optimalitätsbedingungen für eine optimale Lösung herleiten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird nachfolgend auf die explizite Nennung aller Argumente verzichtet, dort wo diese nicht unbedingt notwendig sind. Die Differentiation des Gütefunktionalen liefert nach [52] die totale Variation

$$\begin{aligned} \delta_J = & \left( \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \boldsymbol{\lambda}^T \right) \Big|_{t=t_f} (\delta_x(t_f^*) + \dot{\mathbf{x}}^*(t_f^*) \delta_{t_f}) + \left( \frac{\partial V}{\partial t} + l + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \right) \Big|_{t=t_f} \delta_{t_f} \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} \right)^T \delta_x + \left( \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \right)^T \delta_u dt, \end{aligned} \quad (3.15)$$

aus der sich die nachfolgenden Optimalitätsbedingungen ableiten lassen. Auf die vollständige Herleitung von Gleichung (3.15) wurde an dieser Stelle verzichtet und es sei für den gesamten Rechenweg auf weiterführende Literatur verwiesen [52]–[54].

### 3.2.1.1 Optimalitätsbedingungen

Bevor die Optimalitätsbedingungen aus Gleichung (3.15) angegeben werden, wird zunächst die *Hamilton-Funktion* als

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}(t)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (3.16)$$

definiert, mit deren Hilfe die Optimalitätsbedingungen angegeben werden können. Damit die notwendige Bedingung für ein Minimum (3.14) erfüllt sein kann, müssen nach [52] die folgenden Optimalitätsbedingungen erfüllt sein

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.17)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} - \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{0} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} + \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (3.19)$$

Diese Bedingungen ergeben sich aus der Ableitung der Hamilton-Funktion nach den adjunktiven Zuständen und daraus, dass die einzelnen Summanden im Integral der totalen Variation (3.15) Null ergeben müssen. Gleichung (3.17) beschreibt die Zustandsdifferentialgleichung, während Gleichung (3.18) die DGL für die adjunktiven Zustände  $\boldsymbol{\lambda}$  beschreibt und daher auch *adjungierte DGL* genannt wird [57]. Die beiden Gleichungen (3.17) und (3.18) werden auch als *kanonische DGL* bezeichnet und bilden gemeinsam mit der Steuerungsgleichung (3.19) die sogenannten *Hamiltongleichungen* [57]. Die kanonischen DGL lassen sich zu einer gemeinsamen Systemdynamik

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

zusammenfassen. Nach [52] lauten die Randbedingungen für das OP

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.21)$$

$$x_i(t_f) = x_{f,i}, \quad i \in \mathcal{I}_f \quad (3.22)$$

$$\lambda_i(t_f) = \frac{\partial V}{\partial x_i} \Big|_{t=t_f}, \quad i \notin \mathcal{I}_f \quad (3.23)$$

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \Big|_{t=t_f} = -\frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=t_f}, \quad \text{falls, } t_f \text{ frei ist.} \quad (3.24)$$

Die Gleichungen (3.21) und (3.22) geben die Randbedingungen für die Anfangs- und Endwerte der Zustände an. Dabei bezeichnet  $\mathcal{I}_f$  die Menge aller Zustände, die explizit über Endbedingungen vorgegeben sind – eine Vorgabe der Endwerte ist dabei nicht zwingend notwendig. Für solche Zustände, deren Endwert nicht vorgegeben und damit frei ist, gilt Gleichung (3.23). Gleichung (3.24) gilt nur dann, falls  $t_f$  frei und damit eine Optimierungsvariable des Problems ist und gibt so die zusätzliche notwendige Gleichung zur Bestimmung der freien Endzeit an. Die Gleichungen (3.23) und (3.24) werden als *Transversalitätsbedingungen* bezeichnet und folgen daraus, dass auch die Summanden außerhalb des Integrals der totalen Variation (3.15) Null ergeben müssen [52].

### 3.2.1.2 Notwendige Bedingung 2. Ordnung

Da die Bedingung (3.14) die erste Variation des Gütefunktional darstellt, werden die hergeleiteten Optimalitätsbedingungen, die aus (3.14) resultieren, auch als notwendige Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung bezeichnet [53]. Diese stellen lediglich notwendige Bedingungen für die Existenz eines Minimums dar, da die Bedingung (3.14) auch für alle anderen Extrema (Maximum, Sattelpunkt) erfüllt ist und daher nicht hinreichend für die Existenz eines Minimums ist [53]. Lösungen, die die Optimalitätsbedingungen erfüllen, sind also zunächst einmal nur Kandidaten für ein Minimum und

damit für eine optimale Lösung [54]. Da die Herleitung hinreichender Optimalitätsbedingungen mit erheblichem Aufwand verbunden ist, sei an dieser Stelle auf weiterführende Literatur zu diesem Thema verwiesen (siehe Maurer, [54]). Allerdings lässt sich analog zu (3.14) aus der zweiten Variation des Gütfunktionalen eine notwendige Optimalitätsbedingung 2. Ordnung herleiten

$$\delta_J^2 = \frac{d^2 J}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=0} \geq 0, \quad (3.25)$$

welche auch als *Legendre-Bedingung* bekannt ist [52]. Für Optimalsteuerungsprobleme lässt sich die notwendige Optimalitätsbedingung 2. Ordnung für ein schwaches, lokales Minimum mit

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}} \text{ ist positiv semidefinit } \forall t \in [t_0, t_f] \quad (3.26)$$

angeben [52]. Die zweifache, partielle Ableitung beschreibt dabei die Hessematrix der Hamilton-Funktion bezüglich der Stellgrößen. Ein häufig auftretender Fall bei der Optimierung dynamischer Systeme liegt in der Optimierung eingangsaffiner, autonomer Systeme<sup>1</sup> mit quadratischer oder linear-quadratischer Bestrafung der Stellgröße. Nachfolgend ist die Anwendung der Legendre-Bedingung für Systeme dieser Klasse gezeigt. Die Eingangsaffinität für ein System mit  $m$  Stellgrößen lässt sich allgemein durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x})u_1 + \cdots + \mathbf{f}_m(\mathbf{x})u_m \quad (3.27)$$

ausdrücken und das Gütfunktional lässt sich mit

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_f) = t_f + \int_{t_0}^{t_f} l_0(\mathbf{x}) + l_1(\mathbf{x}, u_1) + \cdots + l_m(\mathbf{x}, u_m) dt \quad (3.28)$$

angeben. Die Hamilton-Funktional ergibt sich damit zu

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = l_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + l_1(\mathbf{x}, u_1) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}_1(\mathbf{x})u_1 + \cdots + l_m(\mathbf{x}, u_m) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}_m(\mathbf{x})u_m, \quad (3.29)$$

wobei mit der linear-quadratischen Bestrafung

$$l_i(\mathbf{x}, u_i) = \tilde{l}_i(\mathbf{x})u_i^2 + \hat{l}_i(\mathbf{x})u_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.30)$$

gilt. Beim Aufstellen der Hessematrix müssen in jedem Eintrag nur die Anteile von  $H$  berücksichtigt werden, die explizit von der jeweiligen Stellgröße abhängen. Unter Berücksichtigung von (3.30) lautet die Legendre-Bedingung schließlich

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l_1(\mathbf{x}, u_1)}{\partial u_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 l_2(\mathbf{x}, u_2)}{\partial u_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial^2 l_m(\mathbf{x}, u_m)}{\partial u_m^2} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$= \begin{bmatrix} 2\tilde{l}_1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\tilde{l}_2(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2\tilde{l}_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \text{ ist positiv semidefinit } \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (3.32)$$

Diese kann verwendet werden, um die Lösungskandidaten weiter bezüglich Maxima und Minima zu sortieren [53].

<sup>1</sup>Die Klasse der autonomen Systeme beschreibt den Fall, dass der Gütfaktor  $l(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  und die Systemdynamik  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  nicht explizit, sondern nur implizit über  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$  von der Zeit  $t$  abhängen [52].

### 3.2.1.3 Singulärer Fall

In der Regel lässt sich die Eingangsgröße aus der Steuerungsgleichung (3.19) durch die Systemzustände und die adjungierten Zustände ausdrücken, wobei dies nicht immer der Fall sein muss [52]. Für OPs, die ein eingangsaffines System optimieren und in denen  $l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  unabhängig von  $\mathbf{u}$  ist, gilt

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial(l(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x})\mathbf{u}))}{\partial \mathbf{u}} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.33)$$

Die Darstellung  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x})\mathbf{u}$  verdeutlicht dabei die Eingangsaffinität des dynamischen Systems. Aus Gleichung (3.33) ist direkt zu erkennen, dass sich die Steuergröße  $\mathbf{u}(t)$  in diesem Fall nicht durch die Zustände ausdrücken lässt, weshalb auch von einem *singulären* Problem gesprochen wird [52]. Der singuläre Fall kann allerdings in der Praxis leicht umgangen werden, indem das Quadrat der Stellgröße  $\mathbf{u}^2$  mithilfe von hinreichend kleinen Gewichtungen zum Gütfunktional hinzugefügt wird, sodass der Einfluss auf das Optimierungsergebnis vernachlässigbar gering ist, aber trotzdem  $\frac{\partial l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}} \neq 0$  gilt [52].

### 3.2.1.4 Allgemeine Endbedingungen

Damit neben der Vorgabe einzelner Endzustände auch allgemeine Endbedingungen, wie in Gleichung (3.6) dargestellt, berücksichtigt werden können, wird das Gütfunktional in Gleichung (3.13) wie folgt erweitert. Das Funktional zur Betrachtung allgemeiner Endbedingungen lautet

$$J(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t, t_f) = \underbrace{V(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f), t_f)}_{\bar{V}(\mathbf{x}(t_f), t_f)} + \int_{t_0}^{t_f} l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}) dt. \quad (3.34)$$

Über die *Lagrange-Multiplikatoren*  $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^p$  wird dabei die Einhaltung der allgemeinen Endbedingungen gewährleistet. Diese sind im Gegensatz zu den adjungierten Zuständen konstant und keine zeitabhängigen Variablen. Die neuen Transversalitätsbedingungen lauten nach [52]

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t=t_f} = \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\nu} \right) \Big|_{t=t_f} \quad (3.35)$$

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \Big|_{t=t_f} = -\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \Big|_{t=t_f} = -\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right)^T \boldsymbol{\nu} \right) \Big|_{t=t_f}, \quad \text{falls, } t_f \text{ frei ist.} \quad (3.36)$$

und anstelle von Gleichung (3.22) gilt Gleichung (3.6). Somit erhält man zusammen mit den Anfangswerten in Gleichung (3.21) insgesamt  $2n + p + 1$  Randbedingungen zur Bestimmung der  $2n + p + 1$  Unbekannten  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\boldsymbol{\nu}$  und  $t_f$ . Werden anstatt allgemeiner Endbedingungen fixierte Endzustände betrachtet, so entfallen  $p$  Gleichungen und die  $p$  Unbekannten  $\boldsymbol{\nu}$  und es gilt nur  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$  und  $t_f$  zu bestimmen. Es sei dabei angemerkt, dass die allgemeinen Endbedingungen nicht alle Endzustände betreffen müssen und wie bereits in Abschnitt 3.2.1.1 auch in diesem Fall Kombinationen aus fixierten Endzuständen und über allgemeine Endbedingungen vorgegebenen Endzuständen möglich sind.

Mithilfe der Variationsrechnung lässt sich das ursprüngliche dynamische OP (3.4)–(3.7) in ein ZPR überführen, dessen Problematik nun darin besteht, die Lösung der kanonischen DGL zu bestimmen und das resultierende Randwertproblem zu lösen.

### 3.2.1.5 Maximumprinzip von Pontryagin

Bisher wurde davon ausgegangen, dass die Stellgröße  $\mathbf{u}$  unbeschränkt ist. In diesem Fall liefert die Steuerungsgleichung (3.19) die notwendige Bedingung, dafür dass das Optimalsteuerungsproblem bezüglich der Stellgröße ein Minimum besitzt. Ist die Stellgröße hingegen mit  $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$  beschränkt, verliert diese Bedingung ihre Gültigkeit, da das Minimum auch auf dem Rand der Lösungsmenge  $\mathcal{U}$  liegen kann [52]. In diesem Fall kann das sogenannte *Maximumprinzip von Pontryagin* zur Lösung herangezogen werden. Die neue notwendige Optimalitätsbedingung lautet

$$H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, t^*) = \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}^*, t^*), \quad (3.37)$$

wobei diese Bedingung eine Verallgemeinerung der Steuerungsgleichung (3.19) darstellt und der unbeschränkte Fall durch die Bedingung (3.37) ebenfalls abgedeckt ist [52]. Für die häufig vorkommende Systemklasse eingangsaffiner, autonomer Systeme mit quadratischer oder linear-quadratischer Bestrafung der Stellgröße lässt sich das Minimum bezüglich der Stellgröße durch die bisher bekannte Steuerungsgleichung (3.19) bestimmen, falls das Minimum innerhalb des zulässigen Lösungsbereichs  $\mathcal{U}$  liegt. Falls die Lösung der Steuerungsgleichung außerhalb des zulässigen Bereichs liegt, kann die optimale Stellgröße durch eine Fallunterscheidung bestimmt werden [52]. Dies wird in Kapitel 4 am verwendeten Fahrzeugmodell angewendet.

### 3.2.2 Optimalitätsprinzip nach Bellman

Mitte der 1950er Jahre formulierte Richard Bellman das sogenannte *Optimalitätsprinzip* [58], welches bis heute bei der dynamischen Optimierung von großer Bedeutung ist und wichtige Erkenntnisse für die Kombination mehrerer OP liefert. Das Optimalitätsprinzip besagt, dass wenn  $\mathbf{u}^*(t)$  mit  $t \in [t_0, t_f]$  eine optimale Trajektorie ist und das System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  optimal vom Anfangszustand  $\mathbf{x}(t_0)$  in den Endzustand  $\mathbf{x}^*(t_f)$  überführt, dann ist  $\mathbf{u}^*(t)$  mit  $t \in [t_1, t_f]$ ,  $t_0 \leq t_1 \leq t_f$  diejenige optimale Trajektorie, die das System aus dem Zwischenzustand  $\mathbf{x}^*(t_1)$  in den optimalen Endzustand  $\mathbf{x}^*(t_f)$  überführt. Es lässt sich also sagen, dass wenn  $\mathbf{u}^*(t)$  ein System optimal von  $\mathbf{x}(t_0)$  nach  $\mathbf{x}^*(t_1)$  bringt, dann muss auch  $\mathbf{u}^*(t)$  das System optimal von  $\mathbf{x}^*(t_1)$  nach  $\mathbf{x}^*(t_f)$  bringen und es kann keine andere optimale Trajektorie als  $\mathbf{u}^*(t)$  selbst für diesen Abschnitt geben, sofern  $\mathbf{u}^*(t)$  auf dem gesamten Intervall  $t \in [t_0, t_f]$  optimal ist. Dadurch ist sichergestellt, dass sich die Lösung eines dynamischen OP auf dem Intervall  $t \in [t_0, t_f]$  immer durch zwei (oder mehrere) Teillösungen

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \int_{t_0}^{t_f} (\cdot) dt = \min_{\mathbf{u}(t)} \int_{t_0}^{t_1} (\cdot) dt + \min_{\mathbf{u}(t)} \int_{t_1}^{t_f} (\cdot) dt \quad (3.38)$$

angeben lässt. Diese Erkenntnis wird an späterer Stelle in dieser Arbeit (Kapitel 5) besonders wichtig, wenn es darum geht, die Gesamtlösung eines Verkehrsszenarios anzugeben, welches sich aus mehreren Teilszenarien zusammensetzt. So lässt sich beispielsweise ein Abbiegemanöver durch die Kombination einer vorangestellten Geraden, einer Kurve und anschließend einer zweiten Geraden beschreiben – dementsprechend setzt sich nach dem Optimalitätsprinzip die Gesamtlösung aus den einzelnen Teillösungen zusammen.

### 3.3 Zeittransformation für freie Endzeitpunkte

Wie bereits gezeigt wurde, kann der Endzeitpunkt  $t_f$  frei sein und wird damit ebenfalls zu einer Optimierungsvariable. Dadurch, dass  $t_f$  nicht festgelegt ist, ist auch die obere Integrationsgrenze des Gütfunktional nicht festgelegt. Bei der analytischen Lösung des resultierenden ZPR – sofern sich diese bestimmen lässt – ist dies nicht weiter kritisch, da  $t_f$  mithilfe der Randbedingungen (3.21)–(3.24) bestimmt werden kann. Bei der Lösung mittels numerischer Lösungsverfahren hingegen kann dies problematisch sein, da viele Lösungsverfahren ein fest definiertes Zeitintervall für die Berechnung der Lösung benötigen (siehe Abschnitt 3.6), sodass eine alternative Formulierung für die freie Endzeit  $t_f$  angegeben werden muss. Dazu bietet es sich an, eine Zeittransformation  $\mathcal{T}(\tau) : [\tau_0, \tau_f] \rightarrow [t_0, t_f]$  einzuführen, die ein festes Zeitintervall  $[\tau_0, \tau_f]$  auf die freien Intervallgrenzen  $[t_0, t_f]$  abbildet [54], wobei

$$\mathcal{T}(\tau_0) = t_0 = \tau_0 = 0 \quad \text{und} \quad (3.39)$$

$$\mathcal{T}(\tau_f) = t_f \quad (3.40)$$

gelten soll. Die festen Intervallgrenzen  $[\tau_0, \tau_f]$  können beliebig gewählt werden und eine Wahl von  $[\tau_0, \tau_f] = [0, 1]$  stellt dabei keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Eine geeignete Transformation, die diese Kriterien erfüllt lautet

$$\mathcal{T}(\tau) = \gamma\tau = t, \quad (3.41)$$

wobei der *Zeitstreckfaktor*  $\gamma$  die anstelle von  $t_f$  verwendete neue Optimierungsvariable darstellt [52]. Für die Zeittransformation gilt

$$\mathcal{T}'(\tau) = \frac{\partial \mathcal{T}(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = \gamma. \quad (3.42)$$

Bei der Herleitung der Optimalitätsbedingungen unter Verwendung der Zeittransformation muss in den Gleichungen (3.13)–(3.16) die Substitution (3.41) angewendet werden. Außerdem gilt  $\partial t = \gamma \partial \tau$  bzw.  $dt = \gamma d\tau$ . Dadurch ergeben sich in der transformierten  $\tau$ -Domäne leicht geänderte Gleichungen. Für die kanonischen DGL gilt

$$\mathbf{x}'(\tau) = \mathcal{T}'(\tau) \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathcal{T}'(\tau) \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) \quad (3.43)$$

$$\boldsymbol{\lambda}'(\tau) = -\mathcal{T}'(\tau) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad (3.44)$$

sodass sich die transformierte gemeinsame Systemdynamik aus Gleichung (3.20) zu

$$\mathbf{z}'(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'(\tau) \\ \boldsymbol{\lambda}'(\tau) \end{bmatrix} = \mathcal{T}'(\tau) \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

ergibt. Die Randbedingungen bleiben bis auf die Substitution (3.41) unverändert. Für eine ausführliche Herleitung der Optimalitätsbedingungen unter Verwendung einer Zeittransformation sei auf [54] verwiesen.

Bisher wurde die Zeittransformation für ein einzelnes Zeitintervall betrachtet. Diese lässt sich auf  $k$  miteinander verknüpfte Intervalle erweitern. In Abbildung 3.2 ist eine solche Transformation mehrerer gekoppelter Intervalle dargestellt. Für die einzelnen Teilintervalle gelten dabei die dargestellten

$t_0$ $\tau_0$	$\gamma_1$ $t_1$ $\tau_1$ $t = \gamma_1\tau$ $\tau \in [0, \tau_1]$	$\gamma_2$ $t_2$ $\tau_2$ $t = \gamma_1\tau_1 + \gamma_2(\tau - \tau_1)$ $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$	$\dots$ $t_{k-1}$ $\tau_{k-1}$ $t = \gamma_1\tau_1 + \gamma_2(\tau_2 - \tau_1) + \dots + \gamma_f(\tau - \tau_{k-1})$ $\tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$	$\gamma_k$ $t_k$ $\tau_k$ $t_f$ $\tau_f$
-------------------	---	--	---	--

Abbildung 3.2: Mehrere miteinander gekoppelte Zeitintervalle, die sich zu einem Gesamtintervall  $[\tau_0, \tau_f]$  zusammensetzen.

Zeittransformationen, sodass für das  $j$ -te Teilintervall

$$\mathcal{T}'(\tau) = \gamma_j, \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, k \quad (3.46)$$

und damit

$$\mathbf{z}'_j(\tau) = \gamma_j \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

gilt. Auch hier lassen sich die festen Intervallgrenzen ohne Einschränkung der Allgemeinheit zu

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_j = j, \quad \text{mit } j = 1, 2, \dots, k \quad (3.48)$$

wählen, sodass für die freien Intervallgrenzen

$$t_0 = \tau_0 = 0 \quad (3.49)$$

$$t_1 = \gamma_1 \quad (3.50)$$

$$t_2 = \gamma_1 + \gamma_2 \quad (3.51)$$

$\vdots$

$$t_f = t_k = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k \quad (3.52)$$

gilt. Mithilfe dieser Erweiterung lassen sich beliebig viele Intervalle fester Intervallgrenzen auf Intervalle freier Grenzen transformieren. Eine Anwendung derartig verknüpfter Zeittransformationen kann nützlich sein, wenn mehrere OP, die jeweils für ein Teilintervall gelten, betrachtet werden und die Übergangsstellen  $t_j$  frei und damit Teil der Optimierung sein sollen. Dann lassen sich die entsprechenden Teilintervalle mit festen Grenzen definieren und wie dargestellt mithilfe der Transformationsvorschriften auf die gesuchten, freien Intervallgrenzen abbilden.

### 3.4 Variationsprobleme mit internen Gleichungsnebenbedingungen

Es kann durchaus von Interesse sein, neben den Randbedingungen an den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_f$  zusätzliche interne Randbedingungen der Form

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t_1), t_1) = 0 \quad (3.53)$$

zu formulieren, die die optimalen Trajektorien erfüllen sollen, wenn das dynamische System beispielsweise einen bestimmten Zustand zu einem gewissen Zeitpunkt  $t_1$  erreichen soll [53]. Dazu wird auch in

diesem Fall das Gütfunktional in Gleichung (3.13) analog zur Betrachtung allgemeiner Endbedingungen erweitert und lautet

$$J(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t, t_f, t_1) = \underbrace{V(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \tilde{V}(\mathbf{x}(t_1), t_1) + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^T \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t_1), t_1)}_{\hat{V}(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{x}(t_1), t_f, t_1)} + \int_{t_0}^{t_f} l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) - \dot{\mathbf{x}}) dt. \quad (3.54)$$

Allgemein können die Systemzustände und die adjungierten Zustände an der Stelle  $t_1$  unstetig sein [54], weshalb es zweckmäßig ist, die Zeitpunkte  $t_1^-$  und  $t_1^+$  als die Zeitpunkte unmittelbar vor und nach der Sprungstelle  $t_1$  zu definieren. Der Zeitpunkt  $t_1$  kann wie bereits der Endzeitpunkt  $t_f$  entweder festgelegt oder frei sein. An der Übergangsstelle  $t_1$  ergeben sich die Transversalitätsbedingungen [54]

$$\left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathbf{x}(t_1)} + \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \mathbf{x}(t_1)} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\nu}} - \boldsymbol{\lambda}(t_1) \right) \Big|_{t_1=t_1^-} = 0 \quad (3.55)$$

$$\left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathbf{x}(t_1)} + \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \mathbf{x}(t_1)} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\lambda}(t_1) \right) \Big|_{t_1=t_1^+} = 0 \quad (3.56)$$

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \Big|_{t=t_1^-} - H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \Big|_{t=t_1^+} + \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial t} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\nu}} \right) \Big|_{t=t_1} = 0, \quad \text{falls, } t_1 \text{ frei ist.} \quad (3.57)$$

Zwei Spezialfälle spielen für die Anwendung der zusätzlichen Transversalitätsbedingungen eine besondere Rolle und sollen an dieser Stelle hervorgehoben werden:

- Wie bereits erwähnt können die Systemzustände  $\mathbf{x}(t)$  an der Übergangsstelle  $t_1$  allgemein unstetig sein und einen Sprung aufweisen. Bei der Behandlung dynamischer Systeme, die ein reales System repräsentieren, ist ein derartiges sprunghaftes Verhalten oftmals unerwünscht, da es einerseits nicht realisierbar ist und andererseits unkomfortable Trajektorien bedeutet. Daher sind häufig solche Lösungen von Interesse, bei denen zumindest die Systemzustände  $\mathbf{x}(t)$  in  $t_1$  stetig sind, also

$$\mathbf{x}(t_1^-) = \mathbf{x}(t_1^+) \quad (3.58)$$

gilt. Damit lassen sich die Randbedingungen (3.55) und (3.56) zur sogenannten *ersten Weierstrass-Erdmannschen-Eckenbedingung* zusammenfassen [54]:

$$2 \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathbf{x}(t_1)} + \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \mathbf{x}(t_1)} \right)^T \tilde{\boldsymbol{\nu}} \right) - \boldsymbol{\lambda}(t_1^-) + \boldsymbol{\lambda}(t_1^+) = 0. \quad (3.59)$$

Die adjungierten Zustände  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  können dabei in  $t_1$  weiterhin sprunghaft sein, was allerdings nicht problematisch ist, da sie keine physikalischen Größen darstellen.

- Der zweite Sonderfall ergibt sich, wenn  $t_1$  zwar frei ist, aber die Nebenbedingung (3.53) und die zusätzlichen Kosten  $\tilde{V}(\mathbf{x}(t_1), t_1)$  nicht explizit von  $t_1$  abhängen, also  $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t_1)) = 0$  und  $\tilde{V}(\mathbf{x}(t_1))$  gilt. Gleichung (3.57) wird dann zur *zweiten Weierstrass-Erdmannschen-Eckenbedingung*, aus der die Stetigkeit der Hamilton-Funktion in  $t_1$  folgt [54]:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \Big|_{t=t_1^-} = H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) \Big|_{t=t_1^+}. \quad (3.60)$$

## 3.5 Diskontinuierliche Systemdynamik

Die Verwendung von diskontinuierlicher Systemdynamik liefert eine überaus nützliche Methode zur Betrachtung abschnittsweise unterschiedlicher Zustandsgleichungen in einem OP. Mithilfe dieser Methode können verschiedene, in unterschiedlichen Bereichen geltende Systembeschreibungen in einem OP verwendet werden, sodass sich einzelne Szenarien miteinander zu einem Gesamtszenario kombinieren lassen. Diese Methode findet bspw. in dem in Abschnitt 3.2.2 skizzierten Abbiegeszenario Verwendung. Die drei Teilszenarien Gerade, Kurve und Gerade lassen sich mithilfe von Übergangsbedingungen verknüpfen und in den einzelnen Teilbereichen gilt jeweils die für das entsprechende Teilszenario formulierte Systemdynamik. Die Übergangsbedingungen, die den Wechsel von einer Systemdynamik zur nächsten angeben, sind dabei über die vom Fahrzeug zurückgelegte Strecke definiert. Die Verwendung der Strecke als Übergangskriterium hat den Vorteil, dass die zu verwendende Systemdynamik immer eindeutig ist. Die von einem realen Fahrzeug zurückgelegte Strecke kann zu keinem zukünftigen Zeitpunkt geringer sein als zu einem vorherigen Zeitpunkt, weshalb die Strecke eine monoton steigende Größe ist. Daher werden die Bereiche der einzelnen Systemdynamiken immer in der selben Reihenfolge durchlaufen. Die Systemdynamik eines Gesamtszenarios, bei dem die Strecke als Übergangskriterium verwendet wird und die Übergänge immer in einer festen Reihenfolge ablaufen, lässt sich allgemein aus  $k$  Teilszenarien wie folgt zusammensetzen [53]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{cases} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), & \text{falls } \tilde{g}_i(\mathbf{x}, t) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k-1 \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), & \text{falls } \tilde{g}_{\hat{i}}(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad \forall \hat{i} = 1 \quad \text{und} \\ & \tilde{g}_i(\mathbf{x}, t) < 0 \quad \forall i = 2, \dots, k-1 \\ \vdots & \\ \mathbf{f}_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), & \text{falls } \tilde{g}_{\hat{i}}(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad \forall \hat{i} = 1, 2, \dots, j-1 \quad \text{und} \\ & \tilde{g}_i(\mathbf{x}, t) < 0 \quad \forall i = j, \dots, k-1 \\ \vdots & \\ \mathbf{f}_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), & \text{falls } \tilde{g}_{\hat{i}}(\mathbf{x}, t) \geq 0 \quad \forall \hat{i} = 1, 2, \dots, k-1 \end{cases} \quad (3.61)$$

Die skalaren Gleichungen  $\tilde{g}_i(\mathbf{x}(t_i), t_i) = 0$  nehmen dabei die Funktion der  $k-1$  Übergangsbedingungen zu den Zeitpunkten  $t_i$  ein, zu denen von der einen Systemdynamik zur nächsten gewechselt wird, und werden analog zu den Ausführungen in Abschnitt 3.4 wie interne GNB behandelt. Für jeden der Übergangspunkte gelten die Transversalitätsbedingungen (3.55)–(3.57) bzw. (3.58)–(3.60), wobei insbesondere bei der zweiten Weierstrass-Erdmannschen-Eckenbedingung darauf geachtet werden muss, dass sich auch die Hamilton-Funktion aufgrund der wechselnden Systemdynamik gemäß

$$H_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.62)$$

verändert. Damit lautet die zweite Weierstrass-Erdmannsche-Eckenbedingung in Gleichung (3.60) an der Übergangsstelle  $t_i$

$$H_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)|_{t=t_i^-} = H_{i+1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)|_{t=t_i^+}. \quad (3.63)$$

Die in diesem Kapitel beschriebenen Methoden liefern die notwendigen Mittel, um dynamische OP mithilfe der Variationsrechnung zu lösen und die Problemstellung so zu formulieren, dass komplexe Fahrszenarien durch geschickte Kombination mehrerer Teilszenarien vereinfacht und analytisch gelöst

werden können. Das Optimalitätsprinzip nach Bellmann (siehe Abschnitt 3.2.2) liefert die Grundlage dafür, dass sich mehrere Teilprobleme zur optimalen Lösung eines Gesamtproblems zusammensetzen lassen. Mithilfe von Zeittransformationen und unter Verwendung diskontinuierlicher Systemdynamik (Abschnitte 3.3 und 3.5) lassen sich auf frei wählbaren Zeitintervallen beliebig viele Teilsysteme unterschiedlicher Systemdynamik miteinander kombinieren, wobei sich mithilfe der Nebenbedingungen an den internen Übergangspunkten (siehe Abschnitt 3.4) Stetigkeit der Systemzustände erzielen lässt, während weiterhin die Optimalität der Lösung gewährleistet ist.

---

## 3.6 Numerische Lösungsverfahren

---

Dieser Abschnitt dient der Übersicht über unterschiedliche numerische Lösungsverfahren für dynamische OP. Dazu sollen einige Verfahren erläutert und hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile miteinander verglichen werden. Zunächst wird der Unterschied zwischen *indirekten* und *direkten* Lösungsverfahren erklärt und anschließend jeweils verschiedene Verfahren der beiden Verfahrensklassen vorgestellt.

### 3.6.1 Indirekte Lösungsverfahren

Bei den indirekten Lösungsverfahren wird mithilfe der Optimalitätsbedingungen (3.17)–(3.19) und der Randbedingungen (3.21)–(3.24) das entstehende Randwertproblem gelöst [53] – die indirekten Lösungsverfahren basieren also auf der Anwendung der Variationsrechnung. Die Lösung kann dabei entweder analytisch oder mithilfe numerischer Verfahren ermittelt werden [54]. Bei indirekten Verfahren wird das dynamische OP nicht zunächst diskretisiert, sondern es werden direkt die Optimalitätsbedingungen für das entsprechende OP hergeleitet, weshalb bei den indirekten Verfahren auch von einer „*first-optimize-then-discretize*“-Strategie gesprochen wird [53] – dies trifft insbesondere auf indirekte Diskretisierungsverfahren zu (siehe Abschnitt 3.6.1.1). Dadurch, dass das dynamische OP bei indirekten Verfahren nicht zuerst in ein statisches Ersatzproblem umgewandelt, sondern stattdessen mithilfe der Variationsrechnung ein Randwertproblem gelöst wird, besitzen sie den großen Vorteil, dass sie zum einen Informationen über die Struktur der optimalen Lösung liefern und sich zum anderen eine sehr hohe Lösungsgenauigkeit erzielen lässt [52]. Selbst wenn das Randwertproblem nicht analytisch gelöst werden kann, so lassen sich trotzdem aus der Lösung der kanonischen DGL Erkenntnisse gewinnen, die vor allem für die Interpretation der optimalen Trajektorien sehr wertvoll sein können. Ein weiterer Vorteil indirekter Lösungsverfahren ist, dass die adjungierten Zustände zur Sensitivitätsanalyse des Gütfunktionalen gegenüber Änderungen der Anfangszustände  $x_0$  verwendet werden können [52]. Indirekte Lösungsverfahren haben den Nachteil, dass die Lösbarkeit eines dynamischen OP – also die Herleitung der kanonischen DGL und das daraus resultierende Randwertproblem – von der Struktur des OP selbst abhängt. Die Optimalitätsbedingungen und die Randbedingungen aufzustellen kann für komplizierte Systeme sehr aufwendig sein [53]. Außerdem benötigen indirekte Lösungsverfahren häufig Startschätzungen für die adjungierten Zustände. Die Schätzung dieser Initialwerte beeinflusst die Qualität der Lösung bzw. ob das Verfahren überhaupt konvergiert, sodass der Konvergenzbereich indirekter Verfahren oftmals nicht sehr groß ist [53]. Nachfolgend werden einige indirekte Lösungsverfahren vorgestellt und hinsichtlich des AD-Planungsproblems diskutiert.

### 3.6.1.1 Indirekte Diskretisierungsverfahren

Das „first-optimize-then-discretize“-Paradigma trifft vor allem auf indirekte Diskretisierungverfahren zu. Wie bei allen indirekten Lösungsverfahren werden entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 3.2 die DGL (3.20) über den Ansatz der Variationsrechnung hergeleitet. Gemeinsam mit den Randbedingungen (3.21)–(3.24) ergibt sich ein ZPR, welches auf dem Gesamtintervall  $[t_0, t_f]$  an  $N + 1$  Stützstellen diskretisiert wird [52] – das Problem wird also zuerst optimiert und anschließend diskretisiert. Dieses Randwertproblem wird unter Berücksichtigung der Randbedingungen mithilfe eines numerischen Integrationsverfahrens gelöst, wie zum Beispiel dem Verfahren von Heun, bei dem ein Trapez zur Approximation des Integrals verwendet wird [52] (siehe auch [59] für Informationen zu weiteren Verfahren). Da die zu lösenden DGL bei der numerischen Integration durch Differenzenquotienten ersetzt werden, werden Diskretisierungsverfahren auch als Differenzenverfahren bezeichnet [60].

Vorteile:

- Numerische Robustheit aufgrund simultaner Berücksichtigung der kanonischen DGL und Randbedingungen [52].
- Erhöhung der Genauigkeit durch Steigerung der Anzahl der Diskretisierungsstellen [52].
- Durch Anwendung von Runge-Kutta-Verfahren (RKV) mit höherer Verfahrensordnung lässt sich die Genauigkeit der Integralapproximation verbessern [60].

Nachteile:

- Steuergröße  $\mathbf{u}$  muss explizit nach  $\mathbf{x}$  und  $\boldsymbol{\lambda}$  auflösbar sein [52].
- Gute Initialschätzung für  $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$  notwendig [52].
- Größere Anzahl an Diskretisierungsstellen steigert den Rechenaufwand [52].

### 3.6.1.2 Indirekte Schießverfahren

Im Gegensatz zu den indirekten Diskretisierungsverfahren wird beim Einfachschießverfahren die Lösung ausgehend von einem Anfangswertproblem berechnet [53], anstatt ausgehend vom ZPR. Dazu wird aus den Anfangswerten  $\mathbf{x}_0$  und einer Initialschätzung  $\boldsymbol{\lambda}_0^{(0)}$  für die adjungierten Zustände der Startvektor  $\mathbf{z}_0 = [\mathbf{x}_0^T \quad \boldsymbol{\lambda}_0^{(0)T}]^T$  gebildet. Von diesem Startvektor ausgehend werden die DGL anschließend bis  $t_f$  numerisch vorwärts integriert. Nach Abschluss der Integration erhält man ein Ergebnis für  $\boldsymbol{\lambda}(t_f)^{(0)}$ , welches mit den Randbedingungen (3.23) verglichen wird. Die Abweichungen in den Randbedingungen lassen sich durch den Fehlervektor  $\mathbf{e}^{(l)} = \boldsymbol{\lambda}(t_f) - \boldsymbol{\lambda}(t_f)^{(l)}$  ausdrücken, der durch Verbesserung der Startschätzung  $\boldsymbol{\lambda}_0^{(l)}$  so lange verringert wird, bis eine gewünschte Fehlertoleranz nicht mehr überschritten wird und damit das Ergebnis einer vorgegebenen Güte entspricht [53]. Der hochgestellte Index  $(l)$  gibt dabei die  $l$ -te Iteration der Integration an. Der Startwert  $\boldsymbol{\lambda}_0^{(l+1)}$  der nächsten Iteration kann zum Beispiel durch Anwendung des Newton-Verfahrens aktualisiert werden [53]. Auch freie Endzeiten  $t_f$  können bei den Schießverfahren berücksichtigt werden. Dazu wird analog zu den adjungierten Anfangszuständen eine Initialschätzung  $t_f^0$  vorgegeben und der Fehlervektor um die Transversalitätsbedingung für freie Endzeit (3.24) erweitert [53].

Vorteile:

- „Einfache“ Methode mit geringem Implementierungsaufwand [61].
- Mehrfachschießverfahren bieten die Möglichkeit der Parallelisierung [62].

Nachteile:

- Die Steuergröße  $\mathbf{u}$  muss explizit nach  $\mathbf{x}$  und  $\lambda$  auflösbar sein [53].
- Instabile Anfangswertprobleme führen dazu, dass das Einfachschießverfahren instabil wird [61], wobei gezeigt werden kann, dass die kanonischen DGL im linearen Fall immer an der imaginär Achse gespiegelte Eigenwerte und damit instabile Eigenmoden besitzen, selbst wenn das lineare System stabil ist [52].
- Empfindlichkeit gegenüber schlechten Startschätzungen für  $\lambda_0^{(0)}$ , sodass unter Umständen keine Lösung auf dem gesamten Integrationsintervall  $[t_0, t_f]$  gefunden werden kann [61].
- Eingeschränkte Anwendbarkeit aufgrund der numerischen Berechnungsschwierigkeiten – vor allem für kleine Probleme mit wenigen Zuständen geeignet [53].

Dem Problem der numerischen Stabilität und dem Umstand, dass das Anfangswertproblem ggf. nicht bis zur rechten Intervallgrenze integriert werden kann, kann mit dem Mehrfachschießverfahren begegnet werden. Ähnlich zu den Diskretisierungsverfahren wird das Integrationsintervall beim Mehrfachschießverfahren ebenfalls in  $N$  Subintervalle aufgeteilt. Auf jedem der Subintervalle wird das Anfangswertproblem (3.20) mit  $\mathbf{z}(t_j) = [\mathbf{x}_j^T \quad \boldsymbol{\lambda}_j^T]^T$  und  $t \in [t_j, t_{j+1})$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$  mittels Einfachschießverfahren gelöst [54]. Damit die Lösung der einzelnen Anfangswertprobleme auf den Subintervallen tatsächlich eine Lösung des ursprünglichen ZPR ist, müssen neben den Randbedingungen, die sich über die Formulierung der Optimalitätsbedingungen ergeben, zusätzlich noch die Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_0(t_1, [\mathbf{x}_0^T \quad \boldsymbol{\lambda}_0^T]^T) - [\mathbf{x}_1^T \quad \boldsymbol{\lambda}_1^T]^T \\ \mathbf{z}_1(t_2, [\mathbf{x}_1^T \quad \boldsymbol{\lambda}_1^T]^T) - [\mathbf{x}_2^T \quad \boldsymbol{\lambda}_2^T]^T \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{N-2}(t_{N-1}, [\mathbf{x}_{N-2}^T \quad \boldsymbol{\lambda}_{N-2}^T]^T) - [\mathbf{x}_{N-1}^T \quad \boldsymbol{\lambda}_{N-1}^T]^T \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

zwischen den einzelnen Subintervallen erfüllt sein [54]. Das Ergebnis des Anfangswertproblems am Intervallende des  $j$ -ten Subintervalls muss also dem Anfangswert der Lösung auf dem  $j+1$ -ten Intervall entsprechen. Mit dieser Erweiterung auf das Mehrfachschießverfahren lässt sich die Robustheit der numerischen Integration auf Kosten des Rechenaufwands steigern, da der Rechenaufwand durch die Intervallunterteilung ansteigt [62].

### 3.6.1.3 Indirekte Gradientenverfahren

Indirekte Gradientenverfahren werden überwiegend für Probleme mit fester Endzeit  $t_f$  und freien Endzuständen  $\mathbf{x}(t_f)$  verwendet [52]. Aus den freien Endzuständen folgt mit Gleichung (3.23) die Fest-

legung von Endwerten für die adjungierten Zustände, während die Anfangszustände  $\mathbf{x}_0$  über Gleichung (3.21) vorgegeben sind. Dadurch ergeben sich  $n$  Anfangsbedingungen für die Systemzustände und  $n$  Endbedingungen für die adjungierten Zustände. Bei einer derartigen Vorgabe von Randwerten (festes  $\mathbf{x}(t_0)$ , festes  $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$ ) wird auch von entkoppelten Randbedingungen gesprochen, da man an den beiden Randpunkten  $t_0$  und  $t_f$  jeweils nur Randbedingungen entweder für die Systemzustände  $\mathbf{x}$  oder für die adjungierten Zustände  $\boldsymbol{\lambda}$  erhält<sup>2</sup> [52]. Diese Eigenschaft machen sich die Gradientenverfahren zu nutze, da das Optimalsteuerungsproblem sequenziell durch abwechselnde Vorwärts- und Rückwärtsintegration ausgehend von den gegebenen Randwerten  $\mathbf{x}(t_0)$  bzw.  $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$  gelöst wird [52]. Wird nun eine Steuertrajektorie  $\mathbf{u}$  durch Initialisierung als gegeben angenommen, dann lassen sich die Systemgleichungen (3.17) ausgehend von  $\mathbf{x}_0$  durch Vorwärtsintegration von  $t_0$  bis  $t_f$  lösen. Analog dazu lassen sich die DGL der adjungierten Zustände (3.18) ausgehend von  $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$  durch Rückwärtsintegration von  $t_f$  bis  $t_0$  bestimmen. Dadurch hängt der Wert des Gütfunktionalen nur noch von  $\mathbf{u}$  ab [53]. Aus dieser Eigenschaft lässt sich der Gradient des Gütfunktionalen bezüglich der Steuertrajektorie als

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt}{\partial \mathbf{u}} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) dt}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.65)$$

bestimmen, der angibt, wie sich der Wert des Gütfunktionalen bei Änderungen der Steuertrajektorie verhält [53]. Da die Eingangstrajektorie  $\mathbf{u}$  während des Gradientenverfahrens iterativ verbessert wird und dadurch der optimalen Lösung  $\mathbf{u}^*$  mit jeder Iteration näher kommt, wird die Steuerungsgleichung (3.19) im Allgemeinen nicht erfüllt sein, sodass dieser Gradient ungleich null wird [52]. Gilt für den Gradienten  $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} = 0$ , so ist offensichtlich auch die Optimalitätsbedingung (3.19) erfüllt und  $\mathbf{u}$  entspricht der optimalen Lösung  $\mathbf{u}^*$ . Dieser Gradient kann genutzt werden, um mithilfe einer Schrittweite  $\alpha^{(l)}$  die Steuertrajektorie entsprechend der Richtung des Gradienten anzupassen, sodass

$$\mathbf{u}(t)^{(l+1)} = \mathbf{u}(t)^{(l)} - \alpha^{(l)} \left( \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \right)^{(l)} \quad (3.66)$$

gilt [52]. Die Schrittweite  $\alpha^{(l)}$  kann entweder fest sein oder über ein Liniensuchverfahren bestimmt werden [53]. Der hochgestellte Index  $l$  gibt auch hier die Iteration des Algorithmus an. Mithilfe der aktualisierten Steuertrajektorie  $\mathbf{u}^{(l+1)}$  kann wieder von vorne verfahren werden und es können erneut die Lösungen für  $\mathbf{x}$  und  $\boldsymbol{\lambda}$  durch Vorwärts- bzw. Rückwärtsintegration mit der neuen Steuertrajektorie berechnet werden [53]. Dieses Vorgehen wird so lange wiederholt, bis der Gradient klein genug ist und ein entsprechendes Abbruchkriterium erfüllt ist. Dann ist  $\mathbf{u}$  nah genug an der optimalen Lösung [53]. Wie bereits bei den Schießverfahren gilt auch hier, dass die kanonischen DGL im linearen Fall instabile Eigenmoden besitzen. Diese können prinzipiell sowohl in den Systemzuständen als auch in den adjungierten Zuständen auftreten. Da für die adjungierten Zustände allerdings keine Anfangswerte vorgegeben werden können und diese bei den meisten Lösungsverfahren bei der Initialisierung geschätzt werden müssen, sind diese für die Vorwärtsintegration aus numerischer Sicht kritischer. Da die Lösung der adjungierten Zustände bei den Gradientenverfahren allerdings in Rückwärtsrichtung geschieht (idealerweise ausgehend von festen Endwerten  $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$ ), entfällt bei den Gradientenverfahren die Startschätzung der adjungierten Zustände, sodass sie numerisch robust sind [52].

---

<sup>2</sup>Die hier ausgenutzte Eigenschaft entkoppelter Randbedingungen ist nicht zu verwechseln mit separierten Randbedingungen (siehe Abschnitt 3.2).

Vorteile:

- Dadurch, dass der Gradient  $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}$  explizit für das Auffinden der optimalen Steuertrajektorie verwendet wird, bieten sich Gradientenverfahren für Systeme an, bei denen sich  $\mathbf{u}$  nicht explizit durch  $\mathbf{x}$  und  $\lambda$  ausdrücken lässt [52].
- Effiziente Lösung für Problemstellungen mit fester Endzeit und entkoppelten Randbedingungen [53].
- Stellgrößenbeschränkungen können bei der Suche nach der zulässigen Richtung im Algorithmus berücksichtigt werden [53].
- Numerisch robuste Lösung, da die adjungierten DGL anstelle der numerisch instabilen Vorwärtsrichtung in Rückwärtsrichtung integriert werden und keine Startschätzung der adjungierten Zustände notwendig ist [52].

Nachteile:

- Berücksichtigung zusätzlicher Beschränkungen bereitet konzeptuelle Schwierigkeiten [53].
- Erweiterung auf allgemeine Randbedingungen und freie Endzeit zwar möglich, allerdings auf Kosten schlechterer Konvergenzeigenschaften und Robustheit [52].
- Oftmals langsames Konvergenzverhalten in der Nähe des Optimums [52].

### 3.6.1.4 Indirekte Kollokationsverfahren

Zuletzt werden hier die indirekten Kollokationsverfahren erklärt. Wie bereits bei den indirekten Diskretisierungsverfahren wird auch bei den Kollokationsverfahren das Gesamtintervall  $[t_0, t_f]$  zunächst in  $N$  äquidistante Subintervalle unterteilt. Der Ansatz der Kollokationsverfahren besteht nun darin, dass die Lösung auf jedem der  $N$  Subintervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  durch stückweise definierte Polynome  $\mathbf{S}_i(t)$  approximiert wird [54] – dies gilt sowohl für die Systemzustände als auch für die adjungierten Zustände. Dazu werden zusätzlich zu den Randpunkten der Subintervalle sogenannte Kollokationsstellen  $t_{ij} \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $j = 1, \dots, k$  definiert, an denen durch die Kollokationsbedingungen

$$\dot{\mathbf{S}}_i(t_{ij}) = \mathbf{f}(t_{ij}, \mathbf{S}_i(t_{ij})) \quad (3.67)$$

ein Übereinstimmen der Approximation und der kanonischen DGL erzwungen wird [54]. Damit an den Intervallübergängen Stetigkeit gewährleistet ist, müssen die Approximationspolynome die Stetigkeitsbedingungen (3.68) zwischen zwei Subintervallen erfüllen. Dazu werden die zwei benachbarten Intervalle  $[t_{i-1}, t_i]$  und  $[t_i, t_{i+1}]$ , die in einem beliebigen Punkt  $t_i$  mit  $0 < i < N - 1$  ineinander übergehen, mit den dazugehörigen Polynomen  $\mathbf{S}_{i-1}(t)$  und  $\mathbf{S}_i(t)$  betrachtet. Diese müssen die Bedingung

$$\mathbf{S}_{i-1}(t_i) = \mathbf{S}_i(t_i) \quad (3.68)$$

erfüllen. Zusätzlich müssen auch die Randbedingungen (3.21)–(3.23) durch die Polynome erfüllt sein [54]. Es existieren verschiedene Möglichkeiten zur Wahl der Kollokationspunkte innerhalb eines Subintervalls (Lobatto-, Radau-, Gauss-Kollokation [63]), wobei die Lobatto-Kollokation die effizienteste Wahl darstellt [63]. Dafür werden insgesamt  $k = 3$  Kollokationspunkte gewählt: der Intervallanfang, die Intervallmitte und das Intervallende, womit

$$t_{ij} = t_{i+\frac{j-1}{2}}, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, k \quad (3.69)$$

gilt [53]. Unter der Annahme, dass die Endzeit  $t_f$  fest sei, ergibt sich ein  $N \cdot (k + 1) \cdot 2n$ -dimensionales nichtlineares Gleichungssystem, welches aus den  $N \cdot k \cdot 2n$  Kollokationsbedingungen (3.67), den  $(N - 1) \cdot 2n$  Stetigkeitsbedingungen (3.68) der Approximationspolynome an den Intervallgrenzen  $t_i$  und den  $2n$  Randbedingungen (3.21)–(3.23) besteht [54]. Mithilfe dieses Gleichungssystems lassen sich die unbekannten Polynomkoeffizienten bestimmen [54]. Für  $N$  Intervalle mit je  $2n$  Gleichungen dürfen pro Polynom maximal  $k + 1$  Koeffizienten auftreten damit das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Unter Berücksichtigung der allgemeinen Struktur eines Polynoms von Grad  $\rho$

$$P(x) = a_{\rho+1}x^{\rho} + a_{\rho}x^{\rho-1} + \dots + a_1x + a_0, \quad (3.70)$$

lässt sich feststellen, dass dabei  $\rho + 1$  Koeffizienten auftreten. In [60] konnte gezeigt werden, dass sich Kollokationsverfahren mit stückweise definierten Polynomen zur Lösung von ZPR durch ein äquivalentes implizites RKV ausdrücken lassen. Dabei gilt, dass bei Verwendung von  $k$  Kollokationsstellen Polynome von (höchstens) Grad  $k$  auftreten und sich ein äquivalentes  $k$ -stufiges RKV ergibt [60]. Die Berücksichtigung freier Endzeiten bei Kollokationsverfahren lässt sich wie in 3.3 beschrieben umsetzen.

Vorteile:

- Effektiv anwendbar zur Lösung von Mehr-Punkte-Randwertproblem (MPR), die speziell bei der Optimierung von Trajektorien auftauchen [62].
- Vergleichsweise geringer Rechenaufwand, insbesondere wenn die Randbedingungen separiert sind (siehe Abschnitt 3.2) [55].
- Es lassen sich Ergebnisse mit hoher Genauigkeit erzielen bei überschaubarem Rechenaufwand [55].

Nachteile:

- Übereinstimmung der DGL mit der Approximation nur an den Kollokationsstellen [62].
- Wie bei allen indirekten Lösungsverfahren müssen die Optimalitätsbedingungen (3.17)–(3.19) und die dazugehörigen Randbedingungen (3.21)–(3.24) hergeleitet werden [62].

### 3.6.2 Direkte Lösungsverfahren

Unabhängig davon, wie genau ein allgemeines dynamisches OP ((3.4)–(3.7)) durch ein bestimmtes direktes Lösungsverfahren gelöst wird, haben alle direkten Verfahren eines gemeinsam: Das dynamische OP wird mittels Diskretisierung in ein statisches Ersatzproblem überführt, wobei die Steuertrajektorie  $u(t)$  an  $N$  Stützstellen diskretisiert wird [52]. Dadurch wird aus dem dynamischen OP ein endlich dimensionales statisches OP, welches in der allgemeinen Form (3.1)–(3.3) geschrieben werden kann und bezüglich der Optimierungsvariablen  $u_i$  mit  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  optimiert wird. Ein wesentlicher Unterschied zwischen direkten und indirekten Verfahren liegt darin, dass die Optimalitätsbedingungen aus der Variationsrechnung bei direkten Verfahren nicht explizit berücksichtigt werden müssen [14]. Diese Eigenschaft macht direkte Lösungsverfahren besonders attraktiv für komplizierte Anwendungen [62]. Aufgrund dieser Vorgehensweise werden direkte Verfahren auch als „first-discretize-then-optimize“-Strategie bezeichnet [53]. Ungeachtet der Komplexität der Lösung lässt sich das dynamische OP mithilfe der Diskretisierung immer auf ein statisches Ersatzproblem zurückführen, wodurch sich direkte Methoden robust anwenden lassen und sich vielseitige Anwendungsbereiche ergeben [62]. Weitere Vorteile direkter Lösungsverfahren liegen zum einen darin, dass sich aufgrund der Diskretisierung der Trajektorien Zustandsbeschränkungen sowohl in Form von GNB als auch UNB leicht berücksichtigen lassen [52]. Zum anderen hängt die Qualität der Lösung nicht von Startschätzungen für die adjungierten

Zustände ab, die bei indirekten Verfahren angegeben werden müssen, weshalb sich oftmals größere Konvergenzbereiche für direkte Verfahren ergeben [52]. Ein Nachteil von direkten Lösungsverfahren liegt darin, dass die Optimierungsvariablen das optimale Systemverhalten nur an den diskretisierten Stützstellen wiedergeben, weshalb direkte Verfahren ggf. nicht die gewünschte Lösungsgenauigkeit erreichen [53]. Außerdem liefert die Lösung keine Erkenntnisse über die analytische Struktur der optimalen Verläufe. Mithilfe einer höherfrequenten Diskretisierung in engeren Schritten lässt sich die Übereinstimmung der direkten Lösung mit dem analytischen Verlauf der optimalen Lösung und damit die Qualität der direkten Lösung verbessern, allerdings bedeutet dies eine Zunahme der Dimension des Problems. Gerade Systeme hoher Ordnung können auf diese Weise schnell in eine Größenordnung anwachsen, sodass sie sich nicht mehr oder nur sehr langsam lösen lassen, abhängig davon, wie viel Rechenleistung und Speicherkapazität zur Verfügung stehen [53]. Dies war lange Zeit ein maßgeblich beschränkender Faktor in der Anwendung direkter Lösungsverfahren, der mittlerweile aufgrund des heutigen Fortschritts bei der Entwicklung leistungsfähiger Rechner immer mehr in den Hintergrund gerückt ist [53].

Für die Klasse der direkten Lösungsverfahren lässt sich zu jedem vorgestellten indirekten Verfahren ein direktes Lösungsverfahren angeben, welches sehr eng mit der indirekten Lösungsvariante verwandt ist (direkte Voll-/Teildiskretisierungsverfahren, direkte Einfach-/Mehrfachschießverfahren, direkte Kollokationsverfahren, direkte Gradientenverfahren). Das Ziel dieser Arbeit besteht jedoch darin, den großen Vorteil indirekter Lösungsverfahren auszunutzen und durch den Lösungsweg über die Variationsrechnung Informationen über die Struktur der optimalen Trajektorien zu erhalten. Aus diesem Grund werden die direkten Lösungsverfahren nicht weiter vertieft und es sei an dieser Stelle auf entsprechende Fachliteratur verwiesen [52]–[54], [60]–[62], [64].

### 3.6.3 Diskussion der Lösungsverfahren

Nachdem nun einige Lösungsverfahren vorgestellt und der Unterschied zwischen indirekten und direkten Verfahren zur numerischen Lösung von Randwertproblemen dargelegt wurde, sollen die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte diskutiert und in den Kontext des AD-Planungsproblems eingeordnet werden – die direkten Lösungsverfahren werden dabei aus den o.g. Gründen nicht weiter berücksichtigt.

Jedes der beschriebenen indirekten Lösungsverfahren hat seine Vor- und Nachteile und ist daher für gewisse Systemklassen mehr oder weniger geeignet. Wie in Kapitel 4 beschrieben ergeben sich für das AD-Planungsproblem je nach Fahrszenario und Detaillierungsgrad Systeme unterschiedlicher Ordnung. Wird die Stellgröße des Systems quadratisch bestraft, sodass das Gütefunktional immer einen energieoptimalen Anteil enthält [52], lässt sich die Stellgröße immer in Abhängigkeit von  $x$  und  $\lambda$  ausdrücken, sodass dieser Nachteil bei allen indirekten Verfahren zu vernachlässigen ist. Der in Abschnitt 3.2.1.3 beschriebene singuläre Fall tritt bei dieser Art von Gütefunktionalen nicht auf. In allen betrachteten Szenarien besitzt das Gesamtsystem bestehend aus den Systemzuständen und den adjungierten Zuständen immer an der Imaginärachse gespiegelte Eigenwerte und ist damit instabil, weshalb eine Vorwärtsintegration der adjungierten Zustände problematisch ist – insbesondere deshalb, weil eine gute Startschätzung der adjungierten Zustände ohne vorherige Kenntnis der Lösungstrajektorien nicht möglich ist. Aus diesem Grund ist das indirekte Einfachschießverfahren nicht für die Lösung komplizierterer Systeme geeignet. Zwar lässt sich die numerische Stabilität mithilfe des Mehrfachschießverfahrens verbessern, allerdings steigt dadurch der Rechenaufwand, weshalb auch dieses Verfahren als ungeeignet bewertet wird.

Das indirekte Diskretisierungsverfahren ist gegenüber den Schießverfahren numerisch deutlich robuster, da anstelle eines Anfangswertproblems ein Randwertproblem gelöst wird und dadurch die kompletten Randbedingungen immer berücksichtigt werden. Allerdings muss die Diskretisierungsschrittweite für eine genaue Lösung möglichst klein gewählt werden, wodurch der Rechenaufwand stark ansteigt. Dies zeigt sich vor allem dann, wenn die optimalen Trajektorien für ein großes Zeitintervall bestimmt werden sollen. Werden beispielsweise die kanonischen DGL für ein dreistufiges Integratorsystem hergeleitet, ergibt sich ein Gesamtsystem 6. Ordnung. Soll für dieses System das Randwertproblem mithilfe des indirekten Diskretisierungsverfahrens mit einer Schrittweite von  $T_s = 0.1\text{s}$  gelöst werden, steigt die Anzahl der Optimierungsvariablen um 60 zusätzliche Variablen pro Sekunde des Optimierungsintervalls. Zusätzlich hat auch in diesem Fall die Startlösung der adjungierten Zustände Einfluss darauf, ob und wie schnell eine Lösung der optimalen Trajektorien gefunden werden kann – je weiter der Startwert von der optimalen Lösung entfernt liegt, desto länger dauert die Optimierung. Aus diesen Gründen wird auch das Diskretisierungsverfahren nicht als bevorzugtes Lösungsverfahren herangezogen.

Das Gradientenverfahren stellt eine effiziente Lösungsmethode dar, die auf eine Startschätzung der adjungierten Zustände verzichtet und zudem aufgrund der sequenziellen Vorwärts- und Rückwärtsintegration numerisch robust ist – es ist weniger sensitiv gegenüber der instabilen Eigenmoden. Allerdings hat das Gradientenverfahren in der zuvor vorgestellten Variante einen entscheidenden Nachteil für die Anwendung auf das AD-Plaunungsproblem: Die robuste und effiziente Umsetzung ist nur für entkoppelte Randbedingungen möglich. Diese Eigenschaft hätte zur Folge, dass alle Endzustände  $\mathbf{x}(t_f)$  frei bleiben müssten, damit die adjungierten Endzustände  $\lambda(t_f)$  durch die Transversalitätsbedingung (3.23) festgelegt wären. In vielen Szenarien im Kontext des AD ist dies allerdings nicht möglich, da beispielsweise Endzustände wie die zurückzulegende Strecke oder die Endgeschwindigkeit als Randbedingung vorgegeben werden müssen. Für solche Szenarien stellt das Gradientenverfahren keine geeignete Lösungsmethode dar.

Letztlich bleibt noch das indirekte Kollokationsverfahren, das effiziente und genaue Lösungen für das AD-Planungsproblem liefert. Das Kollokationsverfahren hat den Vorteil, dass es aufgrund der stückweisen Approximation der Lösungstrajektorien nicht den negativen Einflüssen der instabilen Eigenmoden unterliegt. Außerdem kann das Verfahren unter Berücksichtigung allgemeiner Randbedingungen und freier Endzeiten für eine große Klasse von Systemen angewendet werden, weshalb es sich für verschiedene Problemstellungen des AD und Fahrszenarien als besonders geeignet herausstellt. Eine besonders recheneffiziente MATLAB-Implementierung mit integrierter Wahl der Gitter- bzw. Kollokationspunkte, die neben den DGL zusätzlich die Berücksichtigung von unbekannten Parametern (freie Endzeit) zulässt und die Erweiterung auf MPR (interne GNB) ermöglicht, ist mit der Funktion `bvp4c` gegeben, die im Anhang B detailliert erklärt wird.

# 4 Fahrzeugmodellierung und Herleitung der kanonischen Zustandsgleichungen

---

Dieses Kapitel dient der Modellierung der Fahrzeuggbewegung und der Herleitung der aus dem Fahrzeugmodell resultieren kanonischen Zustandsgleichungen. Zunächst wird dazu die Bewegung des Fahrzeugs in Frenet-Koordinaten relativ zu einer Referenzkurve modelliert. Die Bewegung des Fahrzeugs wird dabei mithilfe eines kinematischen Einspurmodells beschrieben<sup>1</sup>. Anschließend wird das Gesamtmodell nach Gleichung (3.20) aus der Modellierung der Fahrzeugdynamik unter Anwendung der Optimalitätsbedingungen (3.17)–(3.19) aufgestellt. Schließlich werden verschiedene Modellbeschreibungen mit unterschiedlichem Detailgrad betrachtet und deren Nutzen für die Berücksichtigung der in Kapitel 2 erarbeiteten Komfortmerkmale diskutiert. Die verschiedenen Modellbeschreibungen beziehen sich darauf, dass je nach Fahrmanöver Mal nur die Längsdynamik des Fahrzeugs betrachtet wird, während für andere Szenarien die Querdynamik noch hinzugezogen wird. Außerdem wird je nach Wahl der Stellgröße eine niedrigere oder höhere Modellordnung des Fahrzeugs. Dabei basieren jedoch alle Modellbeschreibungen auf dem in diesem Kapitel hergeleiteten kinematischen Einspurmodell.

## 4.1 Formulierung der Fahrzeuggbewegung in Frenet-Koordinaten

---

In der Literatur existieren zahlreiche Fahrzeugmodelle unterschiedlicher Genauigkeit. Vom kinematischen Einspurmodell, über das lineare Einspurmodell bis hin zu Zweispurmodellen, die die nichtlineare Wechselwirkung zwischen dem Fahrzeug und dem Untergrund sowie einzelne Fahrzeugkomponenten (Reifen, Brems-, Lenksystem, Antriebsstrang, Kupplung...) berücksichtigen, lässt sich das Fahrzeugverhalten unterschiedlich modellieren [65]. Je nach Anwendungsgebiet gilt es einen Kompromiss zwischen hoher Modellgenauigkeit und geringer Modellkomplexität zu finden. Mithilfe hochkomplexer Zweispurmodelle lässt sich die Fahrzeuggbewegung präzise nachempfinden und so lassen sich exakte Modelle realer Fahrzeuge aufstellen. Für die Regelung und die Trajektorienplanung hingegen ist es meistens ausreichend, auf weniger detaillierte Modelle zurückzugreifen. Insbesondere bei der Trajektorienplanung stellt die Modellierung der Fahrzeuggbewegung über rein kinematische Beziehungen einen bewährten und häufig verwendeten Ansatz dar, der die notwendige Genauigkeit bietet und gleichzeitig die Anwendung echtzeitfähiger Optimierungsalgorithmen erlaubt. [14]–[16].

Oftmals ist die Beschreibung der Fahrzeugposition und dessen Bewegung in einem globalen Koordinatensystem nicht relevant. Dies gilt insbesondere bei der Fahrzeugstabilisierung und der Planung optimaler Trajektorien zur Durchführung von bestimmten Fahrmanövern. In solchen Fällen bietet sich eine Beschreibung der Fahrzeuggbewegung relativ zu einer gegebenen Referenzkurve  $\mathcal{R}$  an [14]. In

---

<sup>1</sup>Es wird ausschließlich eine zweidimensionale Bewegung des Fahrzeugs parallel zur Straßenoberfläche berücksichtigt, weshalb die Komponente der Fahrzeughöhe bei der Beschreibung der Fahrzeugposition stets vernachlässigt wird.

der Realität kann diese Referenzkurve beispielsweise durch Fahrbahnmarkierungen gegeben sein. Die Bewegung eines Punkts  $\mathcal{P}_r$  entlang der Referenzkurve kann mithilfe der senkrecht zueinander stehenden Vektoren  $\vec{n}(s_r)$  und  $\vec{t}(s_r)$  beschrieben werden<sup>2</sup>. Der Tangentenvektor  $\vec{t}(s_r)$  ist dabei ausgehend von  $\mathcal{P}_r$  immer tangential zu  $\mathcal{R}$  ausgerichtet und der Normalenvektor  $\vec{n}(s_r)$  steht senkrecht darauf [14]. Da die Krümmung der Referenzkurve  $\kappa_{\text{ref}}(s_r)$  veränderlich ist, sind die beiden Vektoren als ortsabhängige Größen bzw. in Abhängigkeit der entlang von  $\mathcal{R}$  zurückgelegten Wegstrecke  $s_r$  definiert [15]. Das Frenet-Koordinatensystem mit dem Fußpunkt  $\mathcal{P}_r$  und den beiden Richtungsvektoren  $\vec{n}$  und  $\vec{t}$  wird im Folgenden auch mit  $\mathcal{F}_r = \{\mathcal{P}_r, \vec{n}, \vec{t}\}$  bezeichnet. Des Weiteren wird das fahrzeugfeste Koordinatensystem  $\mathcal{F}_f = \{\mathcal{P}_f, \vec{x}_f, \vec{y}_f\}$  definiert. Wie bereits bei  $\mathcal{F}_r$  handelt es sich dabei um ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Dessen Ursprung liegt im Schwerpunkt  $\mathcal{P}_f$  des Fahrzeugs, welches als punktförmig angenommen wird. Die Vektoren  $\vec{x}_f$  und  $\vec{y}_f$  beschreiben die Bewegung aus Sicht des Fahrzeugs, wobei  $\vec{x}_f$  entlang der Längsachse des Fahrzeugs nach vorne gerichtet ist und  $\vec{y}_f$  entsprechend orthogonal dazu nach links orientiert ist. Wie bereits erläutert ist die Beschreibung der Fahrzeubewegung in einem globalen Koordinatensystem für die Planung der optimalen Trajektorien nicht von Interesse. Dennoch wird ein globales Koordinaten System  $\mathcal{F}_g = \{0, \vec{x}_g, \vec{y}_g\}$  definiert, welches im Ursprung liegt und dessen Richtungsvektoren  $\vec{x}_g$  und  $\vec{y}_g$  aus Sicht der Vogelperspektive stets nach rechts bzw. nach oben zeigen. Dieses Koordinatensystem wird insbesondere für die Visualisierung der Fahrzeubewegung verwendet.

Alle Koordinatensysteme und die Fahrzeubewegung sind in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt. Durch den Pfeil, der auf einige der Größen dargestellt ist, soll hervorgehoben werden, dass es sich dabei um vektorielle Größen handelt.

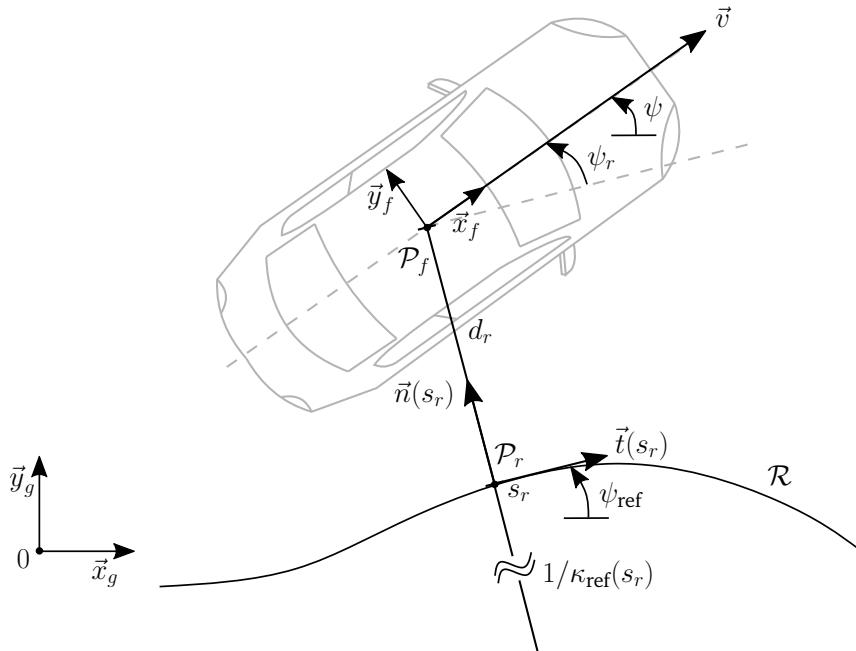


Abbildung 4.1: Kinematisches Einspurmodell eines Fahrzeugs, das sich entlang einer vorgegebenen Referenzkurve  $\mathcal{R}$  bewegt nach [14].

<sup>2</sup>Die Pfeilnotation für vektorielle Größen (z.B.  $\vec{n}$ ) dient hier der Kennzeichnung, dass es sich um gerichtete Größen in einem Koordinatensystem handelt. In Kapitel 3 wurden Vektoren durch aufrechte, fett geschriebene Symbole gekennzeichnet (z.B.  $\mathbf{x}$ ), wobei dies nur der Unterscheidung zwischen Skalaren und Größen mit mehreren Einträgen dient.

### 4.1.1 Beschreibung der Relativbewegung

Die Referenzkurve  $\mathcal{R}$  wird durch die wegabhängige Krümmung  $\kappa_{\text{ref}}(s_r)$  beschrieben. Der Winkel  $\psi_{\text{ref}}$  stellt dabei den Winkel zwischen  $\mathcal{R}$  und dem globalen Koordinatensystem  $\mathcal{F}_g$  dar. Es wird vereinfachend angenommen, dass keine Schwimmbewegungen im Fahrzeug auftreten. Das bedeutet, dass der Kurswinkel des Fahrzeugs mit dem Gierwinkel  $\psi$  übereinstimmt und die Fahrzeuggeschwindigkeit  $v$  immer entlang der Längsachse wirkt, also  $\dot{x}_f = v$  gilt. Des Weiteren wird mit  $d_r$  der seitliche Abstand zwischen dem Fahrzeug und der Referenzkurve eingeführt, wobei  $d_r$  wie bereits  $\vec{n}(s_r)$  senkrecht zur Referenzkurve orientiert ist und damit dem normalen Abstand zwischen  $\mathcal{P}_f$  und  $\mathcal{P}_r$  entspricht [14]. Der seitliche Abstand ist dabei so definiert, dass  $d_r$  positive Werte annimmt, wenn sich das Fahrzeug links von  $\mathcal{R}$  befindet. Der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung des Fahrzeugs und der Referenzkurve wird durch  $\psi_r$  beschrieben und ist als

$$\psi_r = \psi - \psi_{\text{ref}} \quad (4.1)$$

definiert [14]. Ist der Gierwinkel  $\psi$  des Fahrzeugs entgegen dem Uhrzeigersinn bezüglich  $\mathcal{F}_g$  größer als der Winkel  $\psi_{\text{ref}}$  der Referenzkurve, nimmt  $\psi_r$  positive Werte an. Mit diesen Definitionen ergeben sich nach [14] die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\dot{s}_r = \frac{v \cos \psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)} \quad (4.2)$$

$$\dot{d}_r = v \sin \psi_r \quad (4.3)$$

$$\dot{\psi}_r = \dot{\psi} - \dot{\psi}_{\text{ref}} = \kappa v - \frac{\kappa_{\text{ref}}(s_r) v \cos \psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)} \quad (4.4)$$

Die Größe  $\kappa$  in Gleichung (4.4) steht für die tatsächlich vom Fahrzeug durchfahrene Krümmung. Je nach Modellordnung kann diese als Systemzustand oder auch als Stellgröße verwendet werden. Die DGL für die Fahrzeuggeschwindigkeit  $v$  und die Längsbeschleunigung  $a_x$  lauten

$$\dot{v} = a_x \quad (4.5)$$

$$\dot{a}_x = j_x, \quad (4.6)$$

wobei  $j_x$  den Längsruck bezeichnet. Analog zu  $\kappa$  gilt für die Längsbeschleunigung, dass diese entweder als Systemzustand oder als Stellgröße verwendet werden kann. Die Wahl der Stellgrößen hängt von der betrachteten Systemordnung ab und hat dabei Einfluss darauf, ob die Größen Quer- und Längsruck im Gütefunktional berücksichtigt werden können, wobei dies in Abschnitt 4.2 genauer erläutert wird. Die Fahrzeugposition im globalen Koordinatensystem  $\mathcal{F}_g$  kann durch Integration der Gleichungen

$$\dot{x}_g = v \cos \psi \quad (4.7)$$

$$\dot{y}_g = v \sin \psi \quad (4.8)$$

berechnet werden.

#### 4.1.1.1 Klothoiden

Übergänge zwischen Kurven oder Geraden und Kurven im Straßenverkehr sind im Allgemeinen als Klothoiden angelegt, deren Krümmung sich proportional zur Länge der Kurve verhält [66]. Die Verwendung von Klothoiden im Straßenbau hat den Vorteil, dass sprunghafte Lenkänderungen vermieden und

dadurch weiche und stetige Lenkbewegungen ermöglicht werden [66]. Dies hat zur Folge, dass sich die Querbeschleunigung kontinuierlich ändert und Ruck behaftete Änderungen vermieden werden [66]. Die Krümmung einer Klothoide lässt sich allgemein als

$$\kappa_{\text{ref}}(s_r) = \kappa'_{\text{ref}} s_r + \kappa_{\text{ref},0} \quad (4.9)$$

angeben [14]. Mit  $\kappa_{\text{ref},0}$  wird dabei die Anfangskrümmung der Klothoide bezeichnet und  $\kappa'_{\text{ref}}$  gibt die konstante Änderung der Krümmung mit dem Streckenverlauf an [14]. Die Parametrierung von Klothoiden als Trassierungselement im Bau von Autobahnen ist in [66] geregelt. Die Krümmungsänderung  $\kappa'_{\text{ref}}$  ist mit

$$\kappa'_{\text{ref}} = \frac{1}{A^2}, \quad \text{mit } \frac{R}{3} \leq A \leq R \quad (4.10)$$

gegeben, wobei  $A$  als Klothoidenparameter bezeichnet wird und  $R$  den kleinsten Radius der zu durchfahrenden Klothoide angibt [66]. Die zulässigen Minimalradien von Autobahnkurven sind abhängig von der erlaubten Geschwindigkeit auf dem jeweiligen Streckenabschnitt festgelegt. Im Bereich hoher Geschwindigkeiten ( $80 \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq v \leq 130 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ), die beispielsweise bei langen Kurven auf Autobahnen vorkommen, ergeben sich damit Werte für den minimalen Klothoidenparameter von  $90 \text{ m} \leq A \leq 300 \text{ m}$  [66]. Für den bei Autobahnausfahrten relevanten niedrigeren Geschwindigkeitsbereich ( $30 \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq v \leq 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ), lässt sich der Bereich analog zu  $10 \text{ m} \leq A \leq 83,33 \text{ m}$  bestimmen [66].

#### 4.1.1.2 Vereinfachungen und Annahmen

Die Referenzkurve dient nicht nur der Beschreibung der Fahrzeuggbewegung relativ zu dieser, sondern auch als Orientierung für die abzufahrende Strecke. Daher ist in vielen Anwendungsfällen die Annahme berechtigt, dass sich das Fahrzeug in der Nähe der Referenzkurve befindet und eine ähnliche Orientierung bezogen auf  $\mathcal{F}_g$  hat. Mit kleinen Winkeln  $\psi_r$  gilt  $\sin \psi_r \approx \psi_r$  und  $\cos \psi_r \approx 1$ . Die Krümmung ist allgemein als Kehrwert des Radius definiert. Während Fahrzeuge gemäß §32d der Straßenverkehrs-Zulassungs-Ordnung (StVZO) in der Lage sein müssen, einen minimalen Wenderadius von 12,5 m zu durchfahren [67], sind die tatsächlichen Wenderadien von Pkw deutlich geringer. Üblicherweise liegen die kleinsten Wendekreisradien von Klein- bis Mittelklassewagen im Bereich von 5–6,5 m, was zu minimalen Krümmungen von  $0,2–0,1538 \frac{1}{m}$  führt [68]. Der Wert von  $0,2 \frac{1}{m}$  soll als Richtwert für die maximal mögliche Krümmung dienen. Zusammen mit der Annahme, dass neben  $\psi_r$  auch  $d_r$  kleine Werte annimmt, kann die Vereinfachung  $1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r) \approx 1$  getroffen werden, mit der schließlich  $\dot{s}_r \approx v$  folgt. Damit gibt  $s_r$  die tatsächlich vom Fahrzeug zurückgelegte Strecke in sehr guter Näherung wieder. Es ist jedoch zu beachten, dass diese Annahme ihre Gültigkeit verliert, je weiter sich das Fahrzeug von der Referenzkurve entfernt, da  $s_r$  dann nur noch die orthogonal auf  $\mathcal{R}$  projizierte Strecke angibt. Eine weitere Vereinfachung, die in einigen Fällen Anwendung findet, ist die Annahme, dass die Krümmung der Referenzkurve  $\kappa_{\text{ref}}(s_r)$  konstant ist und nicht von  $s_r$  abhängt und damit  $\kappa_{\text{ref}}(s_r) = \kappa_{\text{ref},0}$  gilt. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn eine reine Geradeausfahrt ohne Krümmung oder eine Kreisfahrt mit konstanter Krümmung betrachtet werden soll

---

## 4.2 Adjugierte DGL und dynamisches Gesamtmodell

---

Nachdem die Systemdynamik in Frenet-Koordinaten und die Beschreibung der Referenzkurve erläutert wurden, wird nun ein Gütekriterium der Form (3.4) eingeführt, das zum Aufstellen der Hamilton-

Funktion und zur Herleitung der Gesamtsystemdynamik verwendet wird und dabei die in Kapitel 2 herausgearbeiteten Kriterien zur Bewertung des Fahrkomforts verwendet.

Die als komfortrelevant erachtete Reisezeit kann über die freie Endzeit  $t_f$  des Gütfunktionalen berücksichtigt werden und wird dabei als Teil der Endkosten  $V(\mathbf{x}(t_f), t_f)$  bestraft. Dadurch wird das Optimierungsziel im Sinne einer kürzeren Reisezeit schneller erreicht. Zudem werden die Größen Quer- und Längsbeschleunigung sowie Quer- und Längsruck bestraft, da diese den Fahrkomfort der Fahrzeuginsass\_innen maßgeblich beeinflussen. Um zu gewährleisten, dass sich das Fahrzeug immer nahe der Referenzkurve befindet, wird zusätzlich die Querabweichung  $d_r$  bestraft. Somit ergibt sich das verwendete Gütfunktional zu

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t, t_f) = t_f + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} f_{a_x} a_x^2 + f_{j_x} j_x^2 + f_{a_y} a_y^2 + f_{j_y} j_y^2 + f_{d_r} d_r^2 dt. \quad (4.11)$$

Die Faktoren  $f_{a_x}, f_{j_x}, f_{a_y}, f_{j_y}$  und  $f_{d_r}$  stehen für Gewichte, mit denen der Einfluss der jeweiligen Größe auf das Gütfunktional variiert werden kann.

**Hinweis:** In den Abbildungen des Ergebnisteils dieser Arbeit gilt immer die als Standardparametrierung der Gewichtungsfaktoren festgelegte Wahl von  $f_{j_x} = f_{j_y} = f_{a_x} = f_{a_y} = f_{d_r} = 1$ , sofern nicht explizit andere Werte angegeben sind.

In dieser Formulierung, das heißt, wenn der Ruck in Längs- wie auch in Querrichtung berücksichtigt werden soll, müssen die Eingangsgrößen des Systems zum Erreichen der entsprechenden Systemordnung zu  $\mathbf{u} = [j_x, \dot{\kappa}]^T$  gewählt werden und mit  $\kappa$  muss die Krümmung als zusätzlicher Zustand mit der Bewegungsgleichung

$$\dot{\kappa} = \ddot{\kappa} \quad (4.12)$$

eingeführt werden. Der Zustandsvektor lautet dann  $\mathbf{x} = [s_r, v, a_x, d_r, \psi_r, \kappa]^T$ . Die Querbeschleunigung des Fahrzeugs lässt sich aus der Geschwindigkeit und der Kurvenkrümmung zu

$$a_y = \kappa v^2 \quad (4.13)$$

bestimmen [65]. Der Querruck lässt sich durch zeitliches Ableiten von  $a_y$  berechnen und lautet

$$j_y = \frac{da_y}{dt} = \frac{d\kappa v^2}{dt} = \dot{\kappa}v^2 + 2\dot{v}v\kappa = \dot{\kappa}v^2 + 2a_x v \kappa. \quad (4.14)$$

Zur Lösung des OP mithilfe der indirekten Lösungsmethode kann anschließend die Hamilton-Funktion nach Gleichung (3.16) aufgestellt und partiell nach den einzelnen Systemzuständen zur Herleitung der adjungierten DGL abgeleitet werden. Die Hamilton-Funktion lautet

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \frac{1}{2} f_{a_x} a_x^2 + \frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2 + \frac{1}{2} f_{a_y} (\kappa v^2)^2 + \frac{1}{2} f_{j_y} (\dot{\kappa}v^2 + 2a_x v \kappa)^2 + \frac{1}{2} f_{d_r} d_r^2 + \frac{\lambda_1 v \cos \psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)} + \lambda_2 a_x + \lambda_3 j_x + \lambda_4 v \sin \psi_r + \lambda_5 (\kappa v - \frac{\kappa_{\text{ref}}(s_r) v \cos \psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)}) + \lambda_6 \dot{\kappa} \quad (4.15)$$

und aus Gleichung (3.18) wiederum folgen die DGL für die adjungierten Zustände

$$\dot{\lambda}_1 = - \left( \frac{d_r \kappa'_{\text{ref}} \lambda_1 v \cos \psi_r}{(1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r))^2} - \frac{\kappa'_{\text{ref}} \lambda_5 v \cos \psi_r}{(1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r))^2} \right) \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 = & - \left( 2f_{a_y} \kappa^2 v^3 + 2f_{j_y} \dot{\kappa}^2 v^3 + 4f_{j_y} \kappa^2 a_x^2 v + 6f_{j_y} \dot{\kappa} \kappa a_x v^2 \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_1 \cos \psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)} + \lambda_4 \sin \psi_r + \lambda_5 \left( \kappa - \frac{\kappa_{\text{ref}}(s_r) \cos \psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\dot{\lambda}_3 = - \left( f_{a_x} a_x + 4f_{j_y} \kappa^2 a_x v^2 + 2f_{j_y} \dot{\kappa} \kappa v^3 + \lambda_2 \right) \quad (4.18)$$

$$\dot{\lambda}_4 = - \left( f_{d_r} d_r + \frac{\kappa_{\text{ref}}(s_r) \lambda_1 v \cos \psi_r}{(1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r))^2} - \frac{\kappa_{\text{ref}}(s_r)^2 \lambda_5 v \cos \psi_r}{(1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r))^2} \right) \quad (4.19)$$

$$\dot{\lambda}_5 = - \left( \lambda_4 v \cos \psi_r - \frac{\lambda_1 v \sin \psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)} + \frac{\kappa_{\text{ref}}(s_r) \lambda_5 v \sin \psi_r}{1 - d_r \kappa_{\text{ref}}(s_r)} \right) \quad (4.20)$$

$$\dot{\lambda}_6 = - \left( f_{a_y} \kappa v^4 + 4f_{j_y} \kappa a_x^2 v^2 + 2f_{j_y} \dot{\kappa} a_x v^3 + \lambda_5 v \right). \quad (4.21)$$

Mit den DGL der adjungierten Zuständen lautet das dynamische Gesamtsystem

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [s_r \quad \dot{v} \quad \dot{a}_x \quad \dot{d}_r \quad \dot{\psi}_r \quad \dot{\kappa}]^T \\ [\dot{\lambda}_1 \quad \dot{\lambda}_2 \quad \dot{\lambda}_3 \quad \dot{\lambda}_4 \quad \dot{\lambda}_5 \quad \dot{\lambda}_6]^T \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Aus der Steuerungsgleichung (3.19) folgt

$$j_x = - \frac{\lambda_3}{f_{j_x}} \quad (4.23)$$

$$\dot{\kappa} = \frac{-\lambda_6 - 2f_{j_y} \kappa a_x v^3}{f_{j_y} v^4}, \quad (4.24)$$

Die Randbedingungen (3.21)–(3.23) hängen von der Vorgabe der Anfangs- und Endwerte des jeweiligen Szenarios ab. Für die Transversalitätsbedingung (3.24) lässt sich

$$H(t_f) = -1 \quad (4.25)$$

schreiben, sofern der Endzeitpunkt frei ist und in den Endkosten  $V(\mathbf{x}(t_f), t_f)$  ausschließlich  $t_f$  bestraft wird.

Die adjungierten DGL (4.16)–(4.21) können in der dargestellten Form aufgrund der starken Komplexität und Nichtlinearität analytisch nicht gelöst werden. Allerdings können sie unter bestimmten Voraussetzungen noch vereinfacht werden. Sollen der Längs- und/oder Querruck nicht berücksichtigt werden, so können die Stellgrößen  $\mathbf{u} = [a_x, \kappa]^T$  gewählt werden und das System wird entsprechend um die nicht benötigten adjungierten und Systemzustände reduziert. Ähnliches gilt auch, wenn die gesamte Querdynamik vernachlässigt werden soll. Dieser Fall tritt ein, wenn eine reine Geradeausfahrt untersucht wird. Dann kann die Bestrafung der querdynamischen Größen vernachlässigt und das System entsprechend reduziert werden. Die in 4.1.1.2 angesprochene Annahme konstanter Referenzkrümmung

führt dazu, dass die Hamilton-Funktion nicht mehr von  $s_r$  abhängt, wodurch die partielle Ableitung verschwindet und damit  $\dot{\lambda}_1 = 0$  gilt. Es wird deutlich, dass je nach Fahrszenario und Anwendung der Komfortkriterien verschiedene Formulierungen ausgehend von dieser allgemeinen Beschreibung abgeleitet werden können.

#### 4.2.1 Anwendung des Maximumprinzips

Nachfolgend soll das in Abschnitt 3.2.1.5 erklärte Maximumprinzip auf das dynamische Fahrzeugmodell angewendet werden. Der zulässige Bereich für die Stellgrößen  $j_x$  und  $\dot{\kappa}$  wird mit

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U} = [\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max}] = \left[ \begin{bmatrix} j_{x,\min} \\ \dot{\kappa}_{\min} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j_{x,\max} \\ \dot{\kappa}_{\max} \end{bmatrix} \right] \quad (4.26)$$

angegeben. Wie aus den Bewegungsgleichungen (4.2)–(4.6) und (4.12) und dem Gütefunktional (4.11) ersichtlich wird, handelt es sich bei dem System um ein autonomes System, da weder die Systemdynamik noch der Lagrange-Term  $l(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  des Gütefunktionalen explizit von  $t$  abhängen. Der Lagrange-Term kann daher aufgeteilt werden in einen Anteil, der ausschließlich von den Zuständen abhängt und einen Anteil, der linear-quadratisch von den Stellgrößen beeinflusst wird und kann in der Form

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \underbrace{\frac{1}{2} f_{d_r} d_r^2 + \frac{1}{2} f_{a_x} a_x^2 + \frac{1}{2} f_{a_y} \kappa^2 v^4 + 2 f_{j_y} \kappa^2 a_x^2 v^2}_{l_0(\mathbf{x})} + \underbrace{\frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2}_{l_1(\mathbf{x}, j_x)} + \underbrace{\frac{1}{2} f_{j_y} v^4 \dot{\kappa}^2 + 2 f_{j_y} \kappa a_x v^3 \dot{\kappa}}_{l_2(\mathbf{x}, \dot{\kappa})} \quad (4.27)$$

geschrieben werden. Des Weiteren wird die Systemdynamik durch die Stellgrößen in affiner Weise beeinflusst, sodass die eingangsaffine Systembeschreibung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) j_x + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \dot{\kappa} \quad (4.28)$$

verwendet werden kann. Die Hamilton-Funktion, die sich aus dem Lagrange-Term und der Systemdynamik zusammensetzt, kann daher in die Form

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \underbrace{l_0(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}_0(\mathbf{x})}_{H_0(\mathbf{x})} + \underbrace{l_1(\mathbf{x}, j_x) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) j_x}_{H_1(\mathbf{x}, j_x)} + \underbrace{l_2(\mathbf{x}, \dot{\kappa}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \dot{\kappa}}_{H_2(\mathbf{x}, \dot{\kappa})} \quad (4.29)$$

gebracht werden. Soll nun das Minimum von Gleichung (4.29) gemäß des Maximumprinzips bezüglich der Stellgrößen bestimmt werden, so kann dieses elementweise bestimmt werden. Der Teil  $H_0(\mathbf{x})$  hängt ausschließlich von den Zuständen ab, weshalb eine Minimierung bezüglich der Stellgrößen entfällt. Mit  $f_{j_x}, f_{j_y} > 0$  stellen die anderen beiden Teile der Hamilton-Funktion aufgrund ihrer linear-quadratischen Struktur immer eine nach oben geöffnete Parabel dar und besitzen jeweils bei

$$j_x^0 = -\frac{\lambda_3}{f_{j_x}} \quad (4.30)$$

$$\dot{\kappa}^0 = \frac{-\lambda_6 - 2 f_{j_y} \kappa a_x v^3}{f_{j_y} v^4} \quad (4.31)$$

ein unbeschränktes Minimum, welches sich aus den Bedingungen  $\frac{dH_1}{dj_x} \stackrel{!}{=} 0$  und  $\frac{dH_2}{d\dot{\kappa}} \stackrel{!}{=} 0$  ergibt. Liegt das unbeschränkte Minimum also innerhalb des zulässigen Bereichs  $\mathcal{U}$ , so ist die optimale Stellgröße

durch Gleichung (3.19) gegeben. Liegt das unbeschränkte Minimum außerhalb des zulässigen Bereichs, dann kann die Stellgröße durch die Beschränkung am entsprechenden Rand angegeben werden

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\min}, \quad \text{falls } \mathbf{u}^0 \leq \mathbf{u}_{\min} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{\max}, \quad \text{falls } \mathbf{u}^0 \geq \mathbf{u}_{\max}. \quad (4.33)$$

Je nach Wahl der Stellgrößen kann das Maximumprinzip genutzt werden, um durch Stellgrößenbeschränkungen, Begrenzungen für komfortrelevante Größen wie den Längsruck oder die Längsbeschleunigung zu berücksichtigen. Eine Beschränkung der Stellgrößen  $\kappa$  bzw.  $\dot{\kappa}$  führt zwar dazu, dass große Krümmungen vermieden bzw. die Krümmungsänderung beschränkt wird, allerdings hängen die beiden Größen Querbeschleunigung und -ruck gemäß Gleichung (4.13) und (4.14) auch noch von weiteren Größen ab, sodass eine Beschränkung der Stellgröße in diesem Fall nicht notwendigerweise zu einer Beschränkung der komfortrelevanten Größen in Querrichtung führt.

## 5 Analyse verschiedener Fahrszenarien und Interpretation des Lösungsraumes

---

In diesem Kapitel wird das zuvor hergeleitete Gesamtsystem mit den Methoden aus Kapitel 3 für verschiedene Fahrszenarien gelöst. Dazu werden zunächst einige Vereinfachungen vorgenommen, mit denen es teilweise möglich ist, eine analytische Lösung zu finden. Die Erkenntnisse der einfacheren Szenarien werden dann verwendet, um die Lösungen komplexerer Szenarien zu interpretieren.

### 5.1 Geradeausfahrt

---

Als Erstes wird das Szenario einer reinen Geradeausfahrt betrachtet. Dazu wird das Fahrzeugmodell auf die Bewegung in longitudinaler Richtung reduziert und angenommen, dass sich das Fahrzeug exakt auf der Referenzkurve mit  $\kappa_{\text{ref}}(s_r) = 0$  bewegt – die querdynamischen Größen  $d_r$ ,  $\psi_r$  und  $\kappa$  werden dabei vernachlässigt. Da sich das Fahrzeug auf der Referenzkurve befindet, ist durch  $s_r$  die exakt vom Fahrzeug zurückgelegte Strecke gegeben. Die Systemdynamik des Fahrzeugs ist dann durch die Gleichungen

$$\dot{s}_r = v \quad (5.1)$$

$$\dot{v} = a_x \quad (5.2)$$

$$\dot{a}_x = j_x, \quad (5.3)$$

vollständig beschrieben – es ergibt sich ein Integratorsystem 3. Ordnung. Die einzige Stellgröße ist in diesem Fall der Längsruck  $j_x$ .

#### 5.1.1 Lösungsraum bei energieoptimalem Gütfunktional

Zunächst wird die Lösung des Szenarios der Geradeausfahrt für ein energieoptimales Gütfunktional bestimmt. Wird im Gütfunktional die Stellgröße eines Systems bestraft, so wird von einem energieoptimalen Gütfunktional gesprochen, da das Ziel der Optimierung darin besteht, die benötigte Stellgröße möglichst gering zu halten. Diese ist häufig direkt mit der aufzuwendenden Energie verknüpft [52]. Wird zusätzlich noch die Endzeit als Gütekriterium bestraft, so ergibt sich in dem vereinfachten Szenario der Geradeausfahrt das Gütfunktional

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_f) = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_u u^2 dt = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2 dt. \quad (5.4)$$

Die Formulierung eines Integratorsystems mit einem energieoptimalen Gütefunktional soll nachfolgend verallgemeinert betrachtet werden. Wird die Stellgröße eines Integratorsystems mit der Ordnung  $n$  als die  $n$ -te Ableitung des ersten Zustands gewählt, kann das Gütefunktional als

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_f) = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_u x_1^{(n)}{}^2 dt. \quad (5.5)$$

geschrieben werden, wobei der eingeklammerte Hochindex  $(n)$  die  $n$ -te Zeitableitung bezeichnet. Die Hamilton-Funktion ergibt sich zu

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \frac{1}{2} f_u x_1^{(n)}{}^2 + \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)} + \dots + \lambda_n x_1^{(n)} \quad (5.6)$$

und die adjungierten DGL lauten dann

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad (5.7)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \quad (5.8)$$

$$\vdots \quad (5.9)$$

$$\dot{\lambda}_n = -\lambda_{n-1}. \quad (5.10)$$

Daraus wird ersichtlich, dass sich mit  $x_1^{(n)} = -\frac{\lambda_n}{f_u}$  (siehe Gleichung (3.19)) alle Zeitverläufe durch Integration ausgehend von  $\lambda_1 = \text{konst.}$  bestimmen lassen. Dabei erhält man Polynome, deren Grad mit jeder Integration um 1 steigt. Bei einem System  $n$ -ter Ordnung müssen insgesamt  $2n$  Integrationen durchgeführt werden, sodass die Lösung von  $x_1$  ein Polynom vom Grad  $2n - 1$  darstellt. Der höchste Polynomgrad ist also immer ungerade. Dabei lässt sich feststellen, dass der Einfluss der höheren Exponenten der Polynome durch die mehrfache Integration abnimmt. Der Lösungsraum lässt sich wie folgt geschlossen angeben:

$$\lambda_1 = c_1 \quad (5.11)$$

$$\lambda_2 = -c_1 t + c_2 \quad (5.12)$$

$$\vdots \quad (5.13)$$

$$\lambda_n = (-1)^{n-1} \frac{c_1}{(n-1)!} t^{n-1} + (-1)^{n-2} \frac{c_2}{(n-2)!} t^{n-2} + \dots + (-1)^1 c_{n-1} t + c_n \quad (5.14)$$

$$x_n = (-1)^n \frac{c_1}{f_u(n)!} t^n + (-1)^{n-1} \frac{c_2}{(n-1)!} t^{n-1} + \dots - \frac{c_n}{f_u} t + x_{n,0} \quad (5.15)$$

$$x_{n-1} = (-1)^n \frac{c_1}{f_u(n+1)!} t^{n+1} + (-1)^{n-1} \frac{c_2}{(n)!} t^n + \dots - \frac{c_n}{2f_u} t^2 + x_{n,0} t + x_{n-1,0} \quad (5.16)$$

$$\vdots \quad (5.17)$$

$$x_1 = (-1)^n \frac{c_1}{f_u(2n-1)!} t^{2n-1} + (-1)^{n-1} \frac{c_2}{(2n-2)!} t^{2n-2} + \dots - \frac{c_n}{f_u(n)!} t^n \\ + \frac{x_{n,0}}{(n-1)!} t^{n-1} + \frac{x_{n-1,0}}{(n-2)!} t^{n-2} + \dots + x_{2,0} t + x_{1,0}. \quad (5.18)$$

Damit lautet die Lösung des Integratorsystems 3. Ordnung für die Geradeausfahrt:

$$\lambda_1 = c_1 \quad (5.19)$$

$$\lambda_2 = -c_1 t + c_2 \quad (5.20)$$

$$\lambda_3 = \frac{c_1}{2} t^2 - c_2 t + c_3 \quad (5.21)$$

$$a_x = -\frac{c_1}{6f_{j_x}} t^3 + \frac{c_2}{2f_{j_x}} t^2 - \frac{c_3}{f_{j_x}} t + c_a \quad (5.22)$$

$$v = -\frac{c_1}{24f_{j_x}} t^4 + \frac{c_2}{6f_{j_x}} t^3 - \frac{c_3}{2f_{j_x}} t^2 + c_a t + c_v \quad (5.23)$$

$$s = -\frac{c_1}{120f_{j_x}} t^5 + \frac{c_2}{24f_{j_x}} t^4 - \frac{c_3}{6f_{j_x}} t^3 + \frac{c_a}{2} t + c_v t + c_s. \quad (5.24)$$

Letztendlich können die in den Gleichungen auftretenden unbekannten Integrationskonstanten  $c_1, c_2, c_3, c_a, c_v$  und  $c_s$  mithilfe der Randbedingungen (3.21)–(3.23) bestimmt und damit das OP gelöst werden. Im Fall, dass der Endzeitpunkt frei ist, kann  $t_f$  unter Zuhilfenahme von Gleichung (3.24) bestimmt werden. Die dynamischen Gleichungen des Gesamtsystems können auch in der für die Beschreibung linearer Systeme üblichen Matrixschreibweise  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$  geschrieben werden. Mit  $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \quad \boldsymbol{\lambda}^T]^T$  lautet das lineare System

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{f_{j_x}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}, \quad (5.25)$$

dessen Eigenwerte erwartungsgemäß alle in Null liegen und das reine Integrationsverhalten des Systems widerspiegeln.

### 5.1.2 Lösungsraum bei Gütefunktional mit Bestrafung von Längsruck und -beschleunigung

Wird nun neben dem energieoptimalen Anteil zusätzlich die ebenfalls komfortrelevante Größe Längsbeschleunigung berücksichtigt, lautet das Gütefunktional für die Geradeausfahrt

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_f) = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2 + \frac{1}{2} f_{a_x} a_x^2 dt. \quad (5.26)$$

Analog zum Vorgehen aus dem vorherigen Abschnitt können die adjungierten DGL aufgestellt werden. Diese lauten nun

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad (5.27)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \quad (5.28)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -(f_{a_x} a_x + \lambda_2). \quad (5.29)$$

Das lineare System lässt sich mit

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{f_{jx}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_{ax} & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (5.30)$$

angeben und besitzt im Gegensatz zu dem linearen System aus dem vorherigen Abschnitt zwei Eigenwerte bei  $\pm \sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}}$ . Die restlichen vier Eigenwerte liegen auch bei diesem System im Ursprung. Es zeigt sich allerdings, dass neben dem integrierenden Verhalten auch stabile und instabile Eigenmoden auftreten. Auch in diesem Fall lässt sich die Lösung der DGL analytisch berechnen. Die Lösung von  $\lambda_2$  kann durch Integration der Konstanten  $c_1$  bestimmt werden. Wird die Steuerungsgleichung  $j_x = -\frac{\lambda_3}{f_{jx}}$  abgeleitet und in Gleichung (5.29) eingesetzt, ergibt sich für die Beschleunigung eine gewöhnliche DGL 2. Ordnung. Durch das Einsetzen erhält man die DGL

$$j_x = \ddot{a}_x = \frac{f_{ax}}{f_{jx}} a_x + \frac{\lambda_2}{f_{jx}} = \frac{f_{ax}}{f_{jx}} a_x - \frac{c_1}{f_{jx}} t + \frac{c_2}{f_{jx}}, \quad (5.31)$$

deren Lösung

$$a_x = k_1 e^{\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}} t} + k_2 e^{-\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}} t} + \frac{c_1}{f_{ax}} t - \frac{c_2}{f_{ax}} \quad (5.32)$$

lautet, wobei die Faktoren  $k_1$  und  $k_2$  Konstanten bezeichnen, die bei der Lösung der DGL entstehen. Durch zeitliches Differenzieren bzw. Integrieren können aus  $a_x$  die Lösungen für  $j_x$ ,  $v$  und  $s_r$  ermittelt werden. Diese lauten

$$j_x = k_1 \sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}} e^{\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}} t} - k_2 \sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}} e^{-\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}} t} + \frac{c_1}{f_{ax}} \quad (5.33)$$

$$v = k_1 \sqrt{\frac{f_{jx}}{f_{ax}}} e^{\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}} t} - k_2 \sqrt{\frac{f_{jx}}{f_{ax}}} e^{-\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}} t} + \frac{c_1}{2f_{ax}} t^2 - \frac{c_2}{f_{ax}} t + c_v \quad (5.34)$$

$$s = k_1 \frac{f_{jx}}{f_{ax}} e^{\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}} t} + k_2 \frac{f_{jx}}{f_{ax}} e^{-\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}} t} + \frac{c_1}{6f_{ax}} t^3 - \frac{c_2}{2f_{ax}} t^2 + c_v t + c_s. \quad (5.35)$$

Auch hier bestehen die Lösungen der Trajektorien zum Teil aus Polynomen. Allerdings sind die Polynomgrade um 2 geringer als bei der reinen energieoptimalen Lösung. Des Weiteren zeigt sich mit den Exponentialtermen der Einfluss der stabilen und instabilen Moden auf die Systemzustände. Es kann festgestellt werden, dass die optimalen Trajektorien mit geringerer Bestrafung der Längsbeschleunigung zunehmend gegen die Lösung der rein ruckoptimalen Lösung laufen, wie in Abbildung 5.1 zu erkennen ist. Offenbar ergeben sich die Koeffizienten  $k_1$  und  $k_2$  der Exponentialanteile bei der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems derart, dass der Einfluss der „fehlenden“ Polynomgrade durch die Exponentialfunktionen ersetzt wird. Die Abbildung macht außerdem deutlich, dass bereits eine Bestrafung der Längsbeschleunigung von  $f_{ax} = 0,05$ , die um den Faktor 20 geringer ist als die Bestrafung des Längsrucks, zu wesentlich niedrigeren Beschleunigungsverläufen und damit einem höheren Maß an Fahrkomfort führt. Dies geschieht auf Kosten der Reisezeit, da diese entsprechend ansteigt.

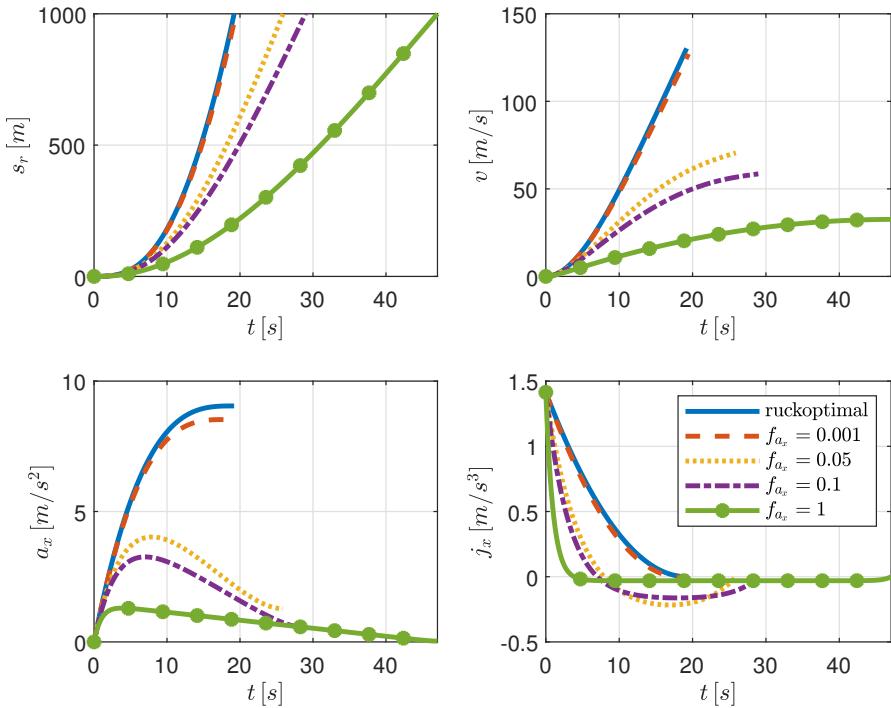


Abbildung 5.1: Lösungstrajektorien der Fahrzeugzustände und der Stellgröße bei einer Geradeausfahrt mit  $s_f = 1000$  m und freien Endzuständen sowie freier Endzeit. Für abnehmende Bestrafung der Längsbeschleunigung nimmt die optimale Lösung immer mehr die Form der rein ruckoptimalen Lösung an. Der Ruck ist dabei mit  $f_{j_x} = 1$  gewichtet.

### 5.1.3 Lange Geradeausfahrt

Ein Szenario, in dem die bisherigen Ergebnisse Anwendung finden, ist die lange Geradeausfahrt, die nachfolgend eingehend analysiert werden soll. Zunächst wird die Lösung für die Standardparametrierung der Gewichtungsfaktoren betrachtet. Das Szenario einer langen Geradeausfahrt zeichnet sich dadurch aus, dass sich der Zeitverlauf in drei Abschnitte unterteilen lässt. Im ersten Bereich für kleine Zeitpunkte gilt  $0 \leq t \ll t_f$ , während im dritten Bereich nahe des Endzeitpunkts  $0 \ll t \leq t_f$  gilt. In dem Bereich dazwischen gilt  $0 \ll t \ll t_f$ . Bei der Berechnung der Trajektorien kann festgestellt werden, dass der Koeffizient des instabilen Teils  $k_1$  sehr geringe Werte im Bereich von  $10^{-40} \leq k_1 \leq 10^{-10}$  annimmt, wobei  $k_2$  um einige Größenordnungen größer ist. Dies hat zur Folge, dass der Einfluss des instabilen Anteils erst für große  $t$  (im dritten Zeitabschnitt) sichtbar wird und die Trajektorien divergieren, während das Verhalten für kleine  $t$  (im ersten Zeitabschnitt) vom stabilen Teil dominiert wird und anschließend abklingt. Im Bereich dazwischen ist der Einfluss des stabilen Anteils bereits abgeklungen und der instabile Anteil ist noch nicht aufgeklungen. Folglich lässt sich die Aussage treffen, dass die Trajektorien für  $t \ll t_f$  von links und für  $0 \ll t$  von rechts gegen den Polynomanteil konvergieren. Unter der Voraussetzung, dass die beiden Exponentialanteile jeweils nur in einem der drei Bereiche gelten, lassen sich die folgenden Annahmen treffen. Für den ersten Bereich kann der Einfluss der instabilen Mode mit  $k_1(\cdot)e^{\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}}t} \approx 0$  angenommen werden. Analog dazu gilt für den Einfluss des stabilen Anteils im dritten

Bereich  $k_2(\cdot)e^{-\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}}t} \approx 0$ . In diesen Bereichen gilt

$$j_x \approx -k_2 \sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}} e^{-\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}}t} + \frac{c_1}{f_{ax}} \quad \text{für } 0 \leq t \ll t_f \quad (5.36)$$

$$a_x \approx k_2 e^{-\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}}t} + \frac{c_1}{f_{ax}}t - \frac{c_2}{f_{ax}} \quad \text{für } 0 \leq t \ll t_f, \quad (5.37)$$

sowie

$$j_x \approx k_1 \sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}} e^{\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}}t} + \frac{c_1}{f_{ax}} \quad \text{für } 0 \ll t \leq t_f \quad (5.38)$$

$$a_x \approx k_1 e^{\sqrt{\frac{f_{ax}}{f_{jx}}}t} + \frac{c_1}{f_{ax}}t - \frac{c_2}{f_{ax}} \quad \text{für } 0 \ll t \leq t_f. \quad (5.39)$$

Die Trajektorien im zweiten Bereich lassen sich durch ihre Polynomanteile approximieren. Für die komfortrelevanten Größen Ruck und Beschleunigung gilt dann

$$j_x \approx \frac{c_1}{f_{ax}} \quad \text{für } 0 \ll t \ll t_f \quad (5.40)$$

$$a_x \approx \frac{c_1}{f_{ax}}t - \frac{c_2}{f_{ax}} \quad \text{für } 0 \ll t \ll t_f. \quad (5.41)$$

Da die Trajektorien des Rucks und der Beschleunigung für lange Geradeausfahrten offenbar als Konstante bzw. Gerade betrachtet werden können, zu denen die Lösung sowohl von links als auch von rechts hin konvergiert, stellt sich die Frage, ob anhand der Kenntnis über den Lösungsraum Beschränkungen für die Längsbeschleunigung angegeben werden können.

### 5.1.3.1 Begrenzung der Längsbeschleunigung

Nachfolgend werden zwei Sets von Randbedingungen untersucht. Kenntnis über die Anfangszustände und damit Vorgabe der Anfangsbedingungen  $x_0$  wird bei allen Szenarien vorausgesetzt. Allerdings kann die Vorgabe der Endwerte variiert werden. Zwei Sets an Endbedingungen erweisen sich bei der hier betrachteten langen Geradeausfahrt als besonders geeignet. Neben der Vorgabe einer Strecke  $s_f$ , die zurückgelegt werden soll, und damit der Vorgabe des Endzustands für  $s_r(t_f)$ , können die Endgeschwindigkeit und -beschleunigung entweder festgelegt oder frei sein. Die Vorgabe dieser ist sinnvoll, wenn das Fahrzeug unter Berücksichtigung des Gütefunktionalen beispielsweise nach einer festgelegten Strecke unbeschleunigt zum Stehen gebracht werden soll. Wenn hingegen diese beiden Endzustände nicht festgelegt sind, weil das Ziel nur darin besteht, die vorgegebene Strecke unter Berücksichtigung des Gütefunktionalen abzufahren, dann können diese Endzustände frei bleiben, wobei sich nach Gleichung (3.23) Endbedingungen für die adjungierten Zustände ergeben.

#### Feste Endgeschwindigkeit und feste Endbeschleunigung

Zur Klärung der Frage, ob die Längsbeschleunigung beschränkt ist, kann eine Fallunterscheidung für die Vorzeichen der Koeffizienten  $k_1$  und  $k_2$  vorgenommen werden. So lässt sich feststellen, dass der stabile und instabile Anteil in Gleichung (5.32) bei identischem Vorzeichen die gleiche Krümmungsrichtung

haben (unabhängig davon, ob das Vorzeichen positiv oder negativ ist). Das bedeutet, dass die Exponentialanteile entweder beide von oben oder beide von unten gegen den linearen Lösungsanteil konvergieren. Für den Ruck bedeuten identische Vorzeichen, dass die Krümmungen der Exponentialanteile in der Lösung in Gleichung (5.33) immer entgegengesetzte Richtungen haben und einer der Anteile von oben gegen die Konstante konvergiert, während der andere Teil von unten gegen die Konstante läuft. Aufgrund des streng monotonen Verhaltens der Exponentialfunktionen ist auch der Ruck über das gesamte Lösungsintervall streng monoton, sodass  $j_x$  genau eine Nullstelle hat. Dadurch, dass der Ruck genau eine Nullstelle besitzt, hat  $a_x$  genau ein Extremum. Mit der Kenntnis, dass die Beschleunigung ausgehend vom Anfangswert  $a_0$  gegen die Gerade in Bereich zwei konvergiert und anschließend unter Beibehaltung der Krümmungsrichtung von der Geraden weg gegen den Endwert  $a_f$  läuft, lässt sich feststellen, dass die Beschleunigung bei gleichem Vorzeichen der Koeffizienten  $k_1$  und  $k_2$  stets durch den linearen Anteil der Lösung und die Verbindungsgerade zwischen  $a_0$  und  $a_f$  beschränkt ist. In Abbildung 5.2 sind die optimalen Lösungstrajektorien der Fahrzeugzustände  $s_r$ ,  $v$  und  $a_x$  sowie der Stellgröße  $j_x$  bei vorgegebenen Endzuständen und ansonsten identischer Parametrierung dargestellt. Die Anfangsgeschwindigkeit wird so gewählt, dass die Vorzeichen der Lösungen von  $k_1$  und  $k_2$  identisch sind. Die Endzustände werden so gewählt, dass das Fahrzeug nach 1000 m unbeschleunigt zum Stehen kommt. Der Endzeitpunkt wird im Sinne einer einheitlichen Darstellung fest zu  $t_f = 40$  s gewählt.

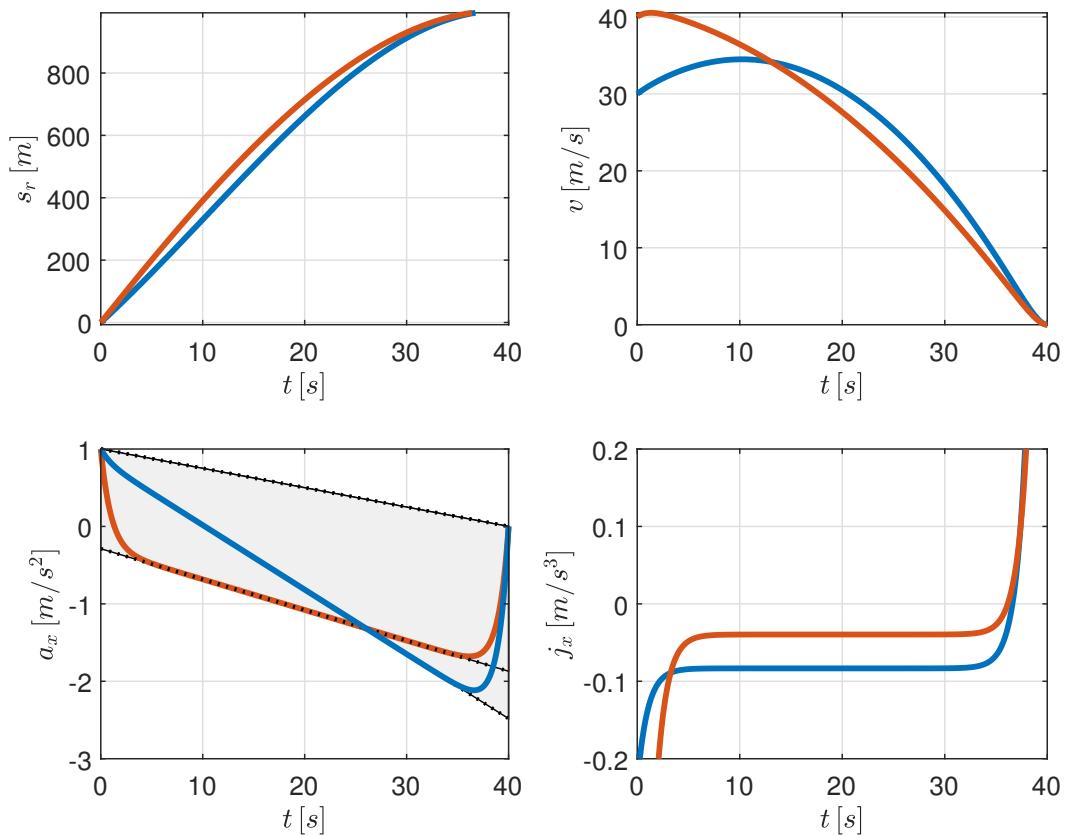


Abbildung 5.2: Lösungstrajektorien der Fahrzeugzustände und der Stellgröße bei einer langen Geraeausfahrt mit  $s_f = 1000$  m und fester Endgeschwindigkeit und -beschleunigung. Das Vorzeichen von  $k_1$  und  $k_2$  ist identisch. Der Endzeitpunkt beträgt  $t_f = 40$  s.

Das zuvor beschriebene Verhalten der Beschleunigungs- und Rucktrajektorien ist gut in den unteren beiden Graphen zu erkennen. Zum einen lassen sich die beiden Bereiche erkennen, in denen die Lösungen von den Exponentialteilen dominiert werden, sowie der mittlere Bereich, in dem die Lösungen der Geraden für die Beschleunigung und der Konstanten für den Ruck entsprechen. Zum anderen zeigt die Abbildung unten links die Beschränkung der Beschleunigung (grau schattiert) durch die Verbindungsgerade der Randwerte und den linearen Anteil der Lösung.

Für den Fall, dass das Vorzeichen der Koeffizienten  $k_1$  und  $k_2$  unterschiedlich ist, haben die Exponentialanteile in  $j_x$  dieselbe Krümmungsrichtung und laufen damit beiderseitig von oben oder von unten gegen die Konstante, während die Anteile in  $a_x$  mit unterschiedlichen Vorzeichen wirken. Damit lässt sich feststellen, dass  $j_x$  immer zwei Nullstellen besitzt, weshalb in  $a_x$  zwei Extrema auftreten können. Da  $j_x$  bei zwei Nullstellen einen Vorzeichenwechsel aufweist, hat die Steigung der Beschleunigung einen Richtungswechsel, woraus abgeleitet werden kann, dass es bei zwei Extrema ein Maximum und ein Minimum gibt und die Lösung von  $a_x$  die Verbindungsgerade der Randwerte in einem Punkt schneidet. Dadurch, dass die Exponentialanteile der Lösung auch hier wieder gegen den linearen Anteil konvergieren, kann schließlich auch in diesem Fall argumentiert werden, dass die Beschleunigung stets durch die Verbindungsgerade von  $a_0$  und  $a_f$  und den linearen Anteil beschränkt ist. Abbildung 5.3 zeigt

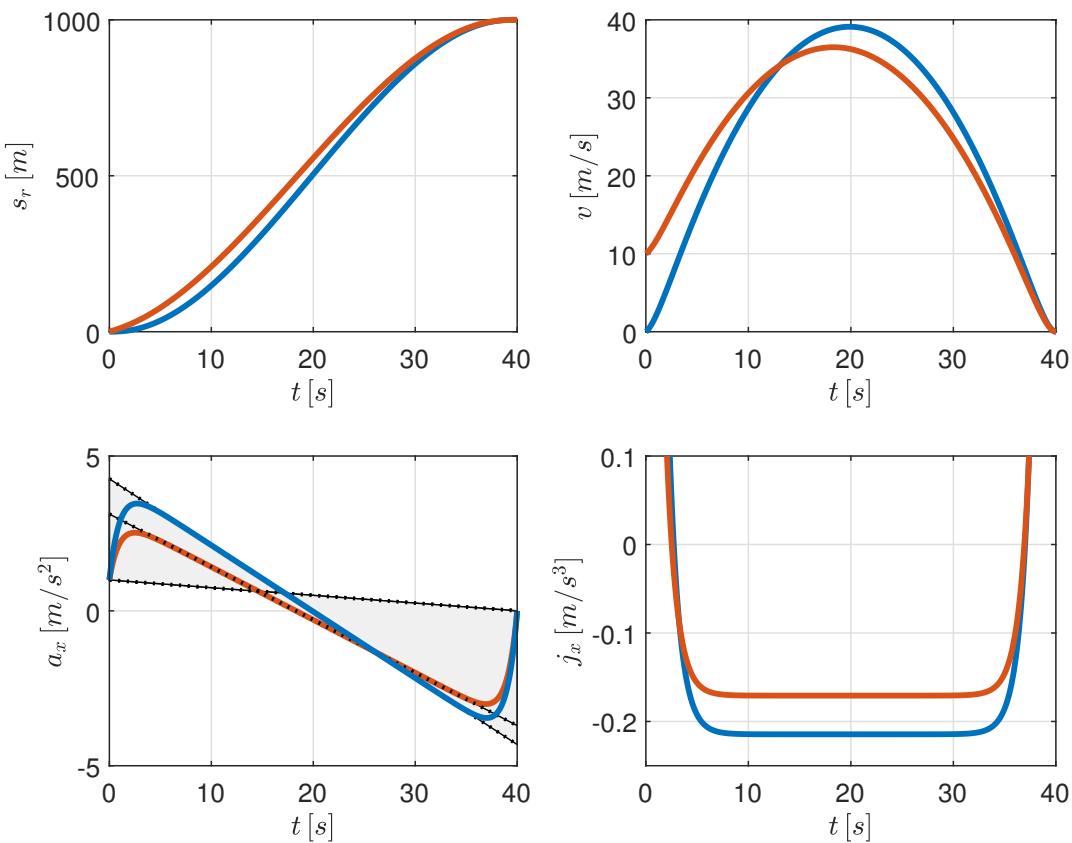


Abbildung 5.3: Lösungstrajektorien der Fahrzeugzustände und der Stellgröße bei einer langen Geraeausfahrt mit  $s_f = 1000$  m und fester Endgeschwindigkeit und -beschleunigung. Das Vorzeichen von  $k_1$  und  $k_2$  ist unterschiedlich. Der Endzeitpunkt beträgt  $t_f = 40$  s.

das Verhalten für diesen Lösungsfall. Der Schnittpunkt der beiden Geraden im mittleren Abschnitt liegt bei

$$t = \frac{a_0 f_{a_x} + c_2}{c_1 - \frac{f_{a_x}(a_f - a_0)}{t_f}}. \quad (5.42)$$

In den Graphen der Beschleunigung und des Rucks zeigt sich deutlich das beschriebene Verhalten mit den unterschiedlich gekrümmten Exponentialanteilen sowie die Konvergenz von links und rechts hin zu der jeweiligen Lösung auf dem mittleren Abschnitt. Außerdem ist die Beschränkung der Beschleunigung gut zu erkennen.

### Freie Endgeschwindigkeit und freie Endbeschleunigung

Dadurch, dass die Endzustände  $v(t_f)$  und  $a_x(t_f)$  nicht festgelegt sind, ergeben sich die Endbedingungen  $\lambda_2(t_f) = 0$  und  $\lambda_3(t_f) = 0 \rightarrow j_x(t_f) = 0$ . Bei dieser Wahl der Endbedingungen ist die analytische Herleitung der maximalen und minimalen Beschleunigung möglich, welche nachfolgend betrachtet werden soll. Da  $j_x$  bis auf die beiden Exponentialanteile konstant ist, kann argumentiert werden, dass der Ruck maximal zwei Nullstellen aufweist, wobei diese nicht in Bereich zwei liegen können (in diesem Bereich ist  $j_x$  näherungsweise konstant). Ein Kontinuum an Nullstellen in Bereich zwei ist aufgrund des monotonen Verhaltens der Exponentialfunktionen nicht möglich, weshalb der Ruck im ersten und im dritten Bereich auf Nullstellen untersucht wird. Im ersten Bereich folgt aus  $j_x \stackrel{!}{=} 0$  mit Gleichung (5.36)

$$t_{z,1} = -\sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}}} \ln \left( \frac{c_1}{k_2} \sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}} \right). \quad (5.43)$$

Dadurch, dass die Endgeschwindigkeit frei ist, ergibt sich die Endbedingung

$$\lambda_2(t_f) = -c_1 t_f + c_2 \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.44)$$

Mit der Anfangsbedingung für die Beschleunigung  $a_x(0) = a_0$  folgt aus Gleichung (5.37)

$$k_2 = a_0 + \frac{c_2}{f_{a_x}} = a_0 + \frac{c_1 t_f}{f_{a_x}}. \quad (5.45)$$

Wird dieser Zusammenhang in Gleichung (5.43) eingesetzt, erhält man mit

$$t_{z,1} = -\sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}}} \ln \left( \frac{c_1}{a_0 + \frac{c_1 t_f}{f_{a_x}}} \sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}} \right) \quad (5.46)$$

den Zeitpunkt des Nulldurchgang von  $j_x$  im ersten Bereich, wobei dieser vom Anfangswert der Beschleunigung, den Gewichtungsfaktoren der Komfortkriterien, dem Endzeitpunkt und der Lösung von  $\lambda_1 = c_1$  abhängt. Einsetzen von  $t_{z,1}$  in Gleichung (5.37) liefert den Extremwert der Beschleunigung an dieser Stelle mit

$$a_{x_{z,1}} = c_1 \sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}} - c_1 \sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}} \ln \left( \frac{c_1}{a_0 + \frac{c_1 t_f}{f_{a_x}}} \sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}} \right) - \frac{c_1 t_f}{f_{a_x}}. \quad (5.47)$$

Die zweite Nullstelle von  $j_x$  resultiert in dieser Wahl der Randbedingungen direkt aus  $j_x(t_f) = 0$ . Der Ruck hat folglich immer bei  $t_{z,2} = t_f$  ein Extremum. Aus Gleichung (5.38) folgt

$$k_1 = -\frac{c_1 \sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}}}{e^{\sqrt{\frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}} t_f}}. \quad (5.48)$$

Eingesetzt in Gleichung (5.39) lautet die Beschleunigung der zweiten Extremstelle

$$a_{x_{z,2}} = -c_1 \sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}} + \frac{c_1}{f_{a_x}} t_f - \frac{c_1 t_f}{f_{a_x}} = -c_1 \sqrt{\frac{f_{j_x}}{f_{a_x}^3}}. \quad (5.49)$$

Es lässt sich festhalten, dass bei freien Endzuständen eine Extremstelle der Beschleunigung bei  $t_f$  liegt und eine im ersten Abschnitt. Da der Endwert der Beschleunigung bei positiver Steigung immer unter dem linearen Lösungsanteil und bei negativer Steigung oberhalb der Geraden liegt, ist die Beschränkung durch den linearen Anteil der Lösung streng genommen nicht mehr gültig. Dennoch ist die Gerade als Näherungslösung für die Beschränkung geeignet, wie Abbildung 5.4 zeigt. In der Abbildung sind

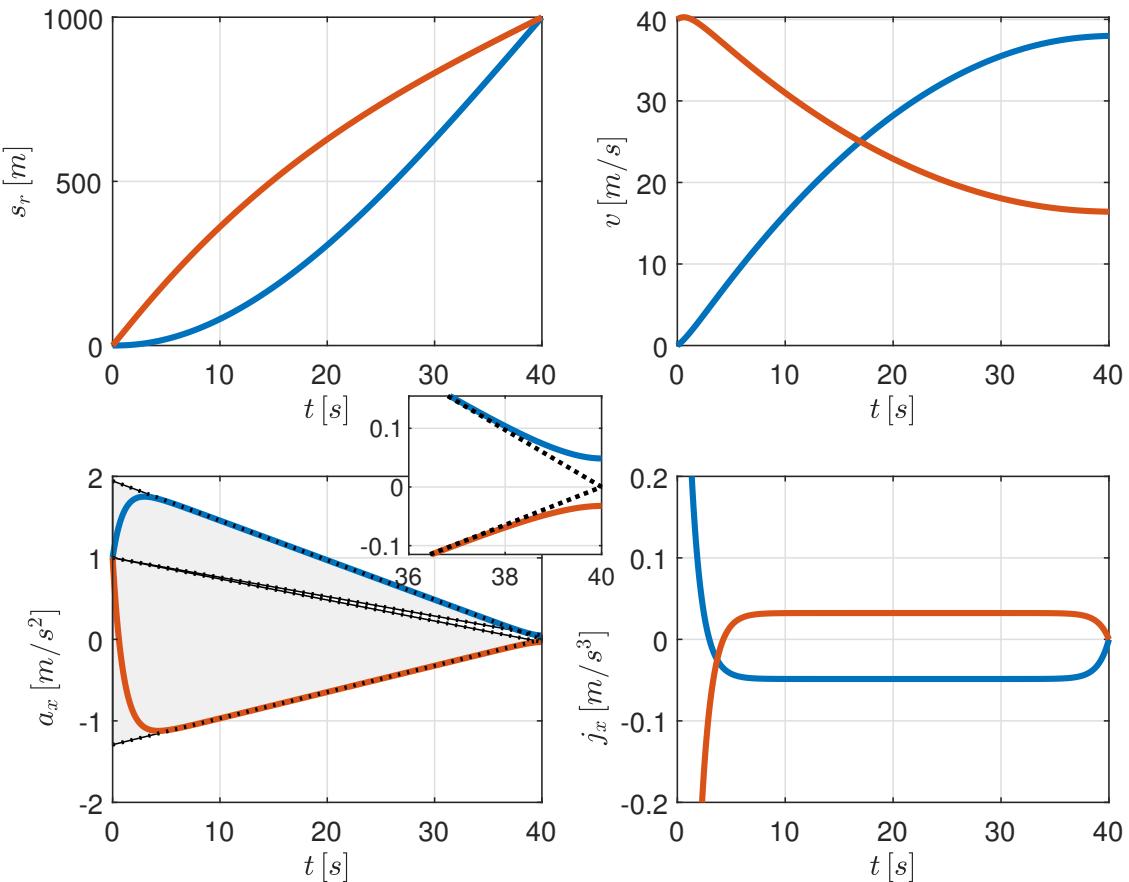


Abbildung 5.4: Lösungstrajektorien der Fahrzeugzustände und der Stellgröße bei einer langen Geradeausfahrt mit  $s_f = 1000$  m und freier Endgeschwindigkeit und -beschleunigung. Der Endzeitpunkt beträgt  $t_f = 40$  s.

die optimalen Zustands- und Stellgrößentrajektorien für unterschiedliche Anfangsgeschwindigkeiten dargestellt, sodass der Ruck und die Beschleunigung jeweils einmal von unten und von oben gegen die Approximation in Bereich zwei konvergieren. Der kleine Ausschnitt in der Mitte der Abbildung gehört zum Graph der Beschleunigung unten links und zeigt den vergrößerten Abschnitt im Bereich von 36 s bis 40 s. Dabei wird deutlich, dass der Endwert der Beschleunigung jeweils außerhalb der durch die

Verbindungsgerade und den linearen Anteil der Beschleunigungstrajektorie eingeschlossenen Fläche liegt und damit – streng genommen – außerhalb der Beschränkung. Da diese Verfehlung allerdings nur einen geringen Einfluss hat, lässt sich der lineare Anteil trotzdem zumindest als Näherungslösung für die Beschränkung verwenden. Zudem zeigt die Abbildung die beiden Nullstellen von  $j_x$  und damit Extremstellen von  $a_x$ , von denen eine jeweils bei  $t_f$  liegt.

### 5.1.3.2 Begrenzung des Längsrucks

Nachdem eingehend erläutert wurde, inwiefern sich aus der analytischen Lösung der Trajektorien Beschränkungen für die Längsbeschleunigung ableiten lassen, sollen nachfolgend Beschränkungen für den Längsruck bei der Geradeausfahrt berücksichtigt werden. Während sich für den Längsruck als Stellgröße über die Kopplung an  $\lambda_3$  zwar indirekt ein Endwert vorgeben lässt, kann entgegen der Fahrzeugzustände  $s_r$ ,  $v$  und  $a_x$  für  $j_x$  allerdings kein Anfangswert vorgegeben werden. Aufgrund dessen ist es möglich, dass die optimale Trajektorie trotz der Bestrafung im Gütefunktional hohe Anfangswerte für  $j_x$  liefert. Um dies zu vermeiden, lässt sich der Längsruck mithilfe von Stellgrößenbeschränkungen, die durch das Maximumprinzip von Pontryagin berücksichtigt werden können (siehe Abschnitt 3.2.1.5 und 4.2.1), auf dem gesamten Optimierungsintervall begrenzen. Um den Einfluss der Stellgrößenbeschränkung und den dadurch ermöglichten Komfortgewinn zu veranschaulichen, wird nachfolgend nochmals die lange Geradeausfahrt, diesmal jedoch unter Berücksichtigung von Begrenzungen für den Längsruck, untersucht. In Abbildung 5.5 sind die optimalen Ruck- und Beschleunigungstrajektorien für die Fälle

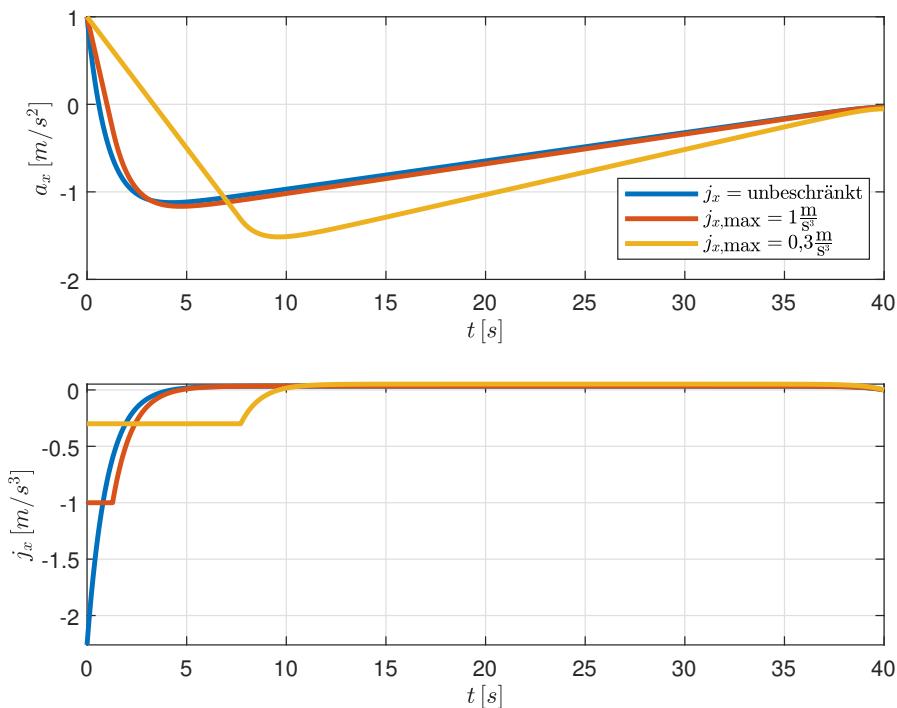


Abbildung 5.5: Ruck- und Beschleunigungstrajektorien bei einer langen Geradeausfahrt mit freier Endgeschwindigkeit und -beschleunigung unter Berücksichtigung einer Stellgrößenbeschränkung für  $j_x$ .

$j_x = \text{unbeschränkt}$ ,  $j_{x,\max} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^3}$  und  $j_{x,\min} = -j_{x,\max}$  dargestellt. Es gilt in jedem Fall  $j_{x,\min} = -j_{x,\max}$ . Zusätzlich werden verschiedene Maximal- bzw. Minimalwerte für den Längsruck gewählt. Im Sinne der Vergleichbarkeit werden die Randbedingungen und Parameter genauso gewählt wie in Abschnitt 5.1.3.1 mit freier Endgeschwindigkeit und -beschleunigung. Aufgrund der freien Endbeschleunigung gilt die Randbedingung  $j_x(t_f) = 0$ , sodass die Stellgrößenbeschränkung nur zu Beginn der Optimierung aktiv ist. Die Abbildung macht deutlich, dass sich der maximale Ruck mithilfe der Stellgrößenbeschränkung stark reduzieren lässt. Bei gleicher Endzeit  $t_f = 40\text{s}$  geschieht diese Reduktion jedoch auf Kosten einer höheren Maximalverzögerung, da der insgesamt niedrigere Ruck für eine längere Zeit auf dem Minimalwert gehalten werden muss, wodurch  $a_x$  letztendlich stärker aufintegriert wird. Zudem folgen die optimalen Trajektorien nun nicht mehr den in Abschnitt 5.1.2 hergeleiteten Gleichungen. Dennoch bietet die Beschränkung des Rucks eine wirkungsvolle Methode zur Komfortsteigerung. Vergleicht man die Fälle  $j_x = \text{unbeschränkt}$  und  $j_{x,\max} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^3}$  miteinander, lässt sich feststellen, dass die aktive Stellgrößenbeschränkung eine Reduktion des Rucks um 55,76 %, bezogen auf den Minimalwert im unbeschränkten Fall bewirkt, während die maximale Verzögerung lediglich um 3,8 % ansteigt. Die weitere Begrenzung des Rucks bedeutet eine Reduktion um 86,73 %, bezogen auf den unbeschränkten Fall, während die Verzögerung um insgesamt 34,94 % ansteigt. Bezüglich der Extremwerte ist damit die Komfortsteigerung des Längsrucks prozentual gesehen mehr als doppelt so hoch wie der Komfortverlust, der gleichzeitig in der Längsbeschleunigung in Kauf genommen werden muss.

#### 5.1.4 Heranfahren an eine Ampel bei bekannter Rotphase

Die Erkenntnisse über den Lösungsraum bei einer Geradeausfahrt mit beschleunigungs- und ruckoptimalem Gütfunktional werden nachfolgend verwendet, um das Heranfahren an eine Ampel mit bekannter Rotphase zu analysieren. Neben der Analyse des Anhalte- bzw. Anfahrvorgangs unter dem Aspekt des Fahrkomforts dient dieses Szenario auch dem Vergleich von vorausschauender Planung über die Ampelüberquerung hinaus und der weniger vorausschauenden zweigeteilten Planung bis zur Ampel und von dort aus bis zum Zielpunkt. Letzteres entspricht dabei dem vom Menschen gewählten Planungsverhalten, wobei die vorausschauende Variante einige Vorteile bietet.

Das beschriebene Szenario kann als Geradeausfahrt interpretiert werden, bei der sich das Fahrzeug zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_1$  an der Ampel befinden soll. Der Ort, an dem sich die Ampel befindet, kann dabei als die vom Startpunkt der Optimierung aus zurückzulegende Strecke  $s_1$  betrachtet werden. Damit ein solches Szenario realistisch umsetzbar ist, muss die Strecke  $s_1$  vom Fahrzeug bis zur Ampel sowie der Zeitpunkt  $t_1$  bekannt sein. Dieser wird als der Moment interpretiert, in dem die Ampel von Rot auf Grün springt und damit das Überqueren der Ampel für das Fahrzeug erlaubt ist<sup>1</sup>. Das Szenario lässt sich dann mithilfe der internen GNB  $s_r(t_1) = s_1$  bei festem und bekanntem  $t_1$  beschreiben. Alternativ kann das Szenario als zwei zusammengesetzte Geradenabschnitte verstanden werden, die an dem über die Zeit und die Strecke definierten Punkt  $\mathcal{P}_1 = (t_1, s_1)$  miteinander verknüpft sind. Die Systemdynamik bleibt in den beiden Zeitabschnitten unverändert. Wird die insgesamt benötigte Zeit  $t_f$  als Komfortkriterium verwendet, um möglichst schnell zum Zielort zu gelangen, dann kann das Szenario als ein Gesamtoptimierungsproblem mit der internen GNB betrachtet werden, wobei  $t_f$  über das gesamte Szenario bei der Optimierung berücksichtigt wird. Alternativ kann das Szenario auch als zwei separate OP formuliert werden, wobei das zweite OP auf dem ersten aufsetzt, während bei den beiden Problemformulierungen nur das Verhalten im jeweiligen Zeitabschnitt  $t_0 \leq t \leq t_1$

<sup>1</sup>Ein Ansatz, wie der Verkehrsfluss mithilfe von Fahrzeug zu Ampel Kommunikation und adaptiver Ampelphasen in Abhängigkeit des Verkehrsaufkommens verbessert werden kann, wurde in [69] untersucht.

bzw.  $t_1 \leq t \leq t_f$  berücksichtigt wird. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die beiden Herangehensweisen, das Problem zu formulieren, nicht äquivalent sind, und daher nicht zu erwarten ist, dass sie identische Ergebnisse liefern. Sie dienen aber der Unterscheidung zwischen dem erwarteten menschlichen Verhalten und dem maschinellen Verhalten eines automatisierten Fahrzeugs, was durch eine einfache Optimierung mit Blick auf das Gesamtintervall erreicht werden kann.

#### 5.1.4.1 Vorausschauende Planung

Zunächst soll die vorausschauende Planung des Heranfahrens an die Ampel untersucht werden. Das OP für dieses Szenario kann wie folgt formuliert werden:

$$\min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_f) = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2 + \frac{1}{2} f_{a_x} a_x^2 dt \quad (5.50)$$

$$\text{u.B.v. } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.51)$$

$$s_r(t_1) = s_1 \quad (5.52)$$

$$s_r(t_f) = s_f, \quad (5.53)$$

wobei die Endzeit frei ist und als Optimierungsvariable betrachtet wird, während der Zeitpunkt  $t_1$ , zu dem die Ampel überquert werden soll, als fest betrachtet wird. Bis auf die festgelegte Zielstrecke  $s_f$  sind die Endzustände frei. Das Ziel dieser Optimierung ist demnach, die Strecke  $s_f$  unter Berücksichtigung der bekannten Ampelphase und des Fahrkomforts möglichst schnell zurückzulegen. Die Forderung nach Stetigkeit der Fahrzeugzustände im Übergangspunkt  $\mathcal{P}_1$  führt zur Stetigkeitsbedingung

$$\mathbf{x}(t_1^-) = \mathbf{x}(t_1^+) \quad (5.54)$$

und schließlich zu der ersten Weierstrass-Erdmannschen-Eckenbedingung (vgl. Kapitel 3.4)

$$2\tilde{\nu} - \lambda_1(t_1^-) + \lambda_1(t_1^+) = 0 \quad (5.55)$$

$$\lambda_2(t_1^-) + \lambda_2(t_1^+) = 0 \quad (5.56)$$

$$\lambda_3(t_1^-) + \lambda_3(t_1^+) = 0. \quad (5.57)$$

Da  $t_1$  fest ist, fällt die zweite Weierstrass-Erdmannsche-Eckenbedingung weg. Im Gegensatz zum menschlichen Planungsverhalten wird die vorausschauende Planung durch die Tatsache definiert, dass das Überqueren der Ampel am Punkt  $\mathcal{P}_1$  über eine GNB berücksichtigt wird, während die Gesamtzeit  $t_f$  bei der Optimierung berücksichtigt wird.

#### 5.1.4.2 Menschliche Planung

Bei der menschlichen Planung hingegen lässt sich das OP, welches das selbe Gesamtziel hat – die Strecke  $s_f$  unter Berücksichtigung der Ampelphase möglichst schnell zurückzulegen – in zwei Teilprobleme unterteilen. Für das Gesamtproblem gilt

$$\min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_f) = \min_{\mathbf{u}} J_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_1) + \min_{\mathbf{u}} J_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_2). \quad (5.58)$$

Die Teilprobleme  $J_1$  und  $J_2$  lassen sich dabei wie folgt formulieren:

$$\min_{\mathbf{u}} \quad J_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_1) = t_1 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2 + \frac{1}{2} f_{a_x} a_x^2 \, dt \quad (5.59)$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.60)$$

$$s_r(t_1) = s_1 \quad (5.61)$$

$$\min_{\mathbf{u}} \quad J_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_f) = (t_f - t_1) + \int_{t_1}^{t_f} \frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2 + \frac{1}{2} f_{a_x} a_x^2 \, dt \quad (5.62)$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 \quad (5.63)$$

$$s_r(t_f) = s_f . \quad (5.64)$$

Diese lassen sich getrennt voneinander lösen und anschließend zur Lösung des Gesamtproblems zusammensetzen. Die Gesamtzeit wird in dieser Art der Problemformulierung also dadurch berücksichtigt, dass die Zeiten der beiden Teilprobleme optimiert werden, wobei das Fahrzeugverhalten für  $t > t_1$  im ersten Teilproblem nicht berücksichtigt werden kann und umgekehrt. Der Anfangszustand  $\mathbf{x}_1$  des zweiten Teilproblems entspricht der Lösung des ersten Teilproblems zum Zeitpunkt  $t_1$ .

#### 5.1.4.3 Vergleich der Planungsstrategien

In Abbildung 5.6 sind die optimalen Trajektorien für die beiden erläuterten Planungsstrategien für zwei unterschiedliche Anfangsgeschwindigkeiten mit der Standardparametrierung der Gewichtungsfaktoren dargestellt. Außerdem werden der Ort, an dem die Ampel überquert werden soll, und die dazugehörige Zeit zu  $\mathcal{P}_1 = (40 \text{ s}, 350 \text{ m})$  gewählt. Die Gesamtstrecke beträgt  $s_f = 600 \text{ m}$ . Wird zunächst nur das Verhalten der vorausschauenden Planung betrachtet (durchgezogene Linien), so fällt ein Unterschied im Beschleunigungsverhalten bzw. im Geschwindigkeitsprofil auf. Startet das Fahrzeug mit einer niedrigen Geschwindigkeit ( $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , blaue Linie), beginnt das Fahrzeug sofort zu beschleunigen und die Geschwindigkeit zu erhöhen und überquert die Ampel mit  $v(t_1) = 16,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Für den Fall, dass das Fahrzeug bereits mit einer vergleichsweise hohen Geschwindigkeit startet ( $v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , rote Linie), muss die Geschwindigkeit zunächst gedrosselt werden, damit die Ampel nicht zu früh überquert und somit die Rotphase der Ampel gerissen wird. Die Ampel wird in diesem Fall bei  $\mathcal{P}_1$  mit  $v(t_1) = 13,02 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , also mit geringerer Geschwindigkeit, passiert. Beim Beschleunigungsverhalten zeigt sich, dass der Betrag der Trajektorie bei einer niedrigeren Startgeschwindigkeit geringere Werte annimmt und daher komfortabler ist im Vergleich zum Starten mit hoher Anfangsgeschwindigkeit. Die niedrigere Startgeschwindigkeit erreicht jedoch nicht nur aus Sicht der Beschleunigung ein höheres Maß an Fahrkomfort. Gleichzeitig lässt sich das Planungsziel schneller erreichen, da das anfängliche Abbremsen nicht notwendig ist und stattdessen von Beginn an gleichmäßig beschleunigt werden kann. In beiden Fällen lässt sich zudem aufgrund der Bedingung (5.57) Stetigkeit für  $j_x$  erreichen und so lassen sich insgesamt ruckarme Lösungen erzielen. Betrachtet man nun die Lösungen bei der menschlichen Planung (gestrichelte Linien), lassen sich die selben qualitativen Zusammenhänge erkennen. Auch bei dieser Art der Planung ist es günstiger, mit einer geringeren Geschwindigkeit zu starten, da sich das Ziel dadurch schneller erreichen lässt und geringere Beschleunigungen benötigt werden. Vor allem fällt jedoch auf, dass aufgrund der zwei getrennten Planungen, die bis auf den Anfangszustand unabhängig voneinander sind, in beiden Abschnitten der Anfangsruck nicht vorgegeben werden kann, sodass der Ruck unstetig ist und bei  $\mathcal{P}_1$  eine Sprungstelle auftritt. Diese Sprungstelle führt zu deutlich größeren Ruckwerten als

bei der vorausschauenden Planung. In Anhang C ist nochmals Abbildung 5.6 dargestellt, allerdings mit einer weiteren Achsenkalierung für den Ruck, sodass die kompletten Ruckverläufe inklusive der Überhöhungen an der Sprungstelle zu erkennen sind. Neben der weniger komfortablen Rucktrajektorien zeigt das Geschwindigkeitsprofil einen weiteren Nachteil der menschlichen Planung gegenüber der vorausschauenden Planung. Das menschliche Verhalten in der weniger vorausschauenden Planung wird damit begründet, dass die Planung abschnittsweise vom Startpunkt bis zur Ampel und von dort bis zum Zielpunkt stattfindet, ohne dass der Abschnitt nach der Ampel im ersten Abschnitt berücksichtigt wird. Dies hat zur Folge, dass die Geschwindigkeit  $v(t_1)$  an der Ampel geringer ist als sie im Idealfall bei vorausschauender Planung sein könnte, weshalb das Fahrzeug bei der menschlichen Planung immer mehr Zeit benötigt als bei der vorausschauenden Planung.

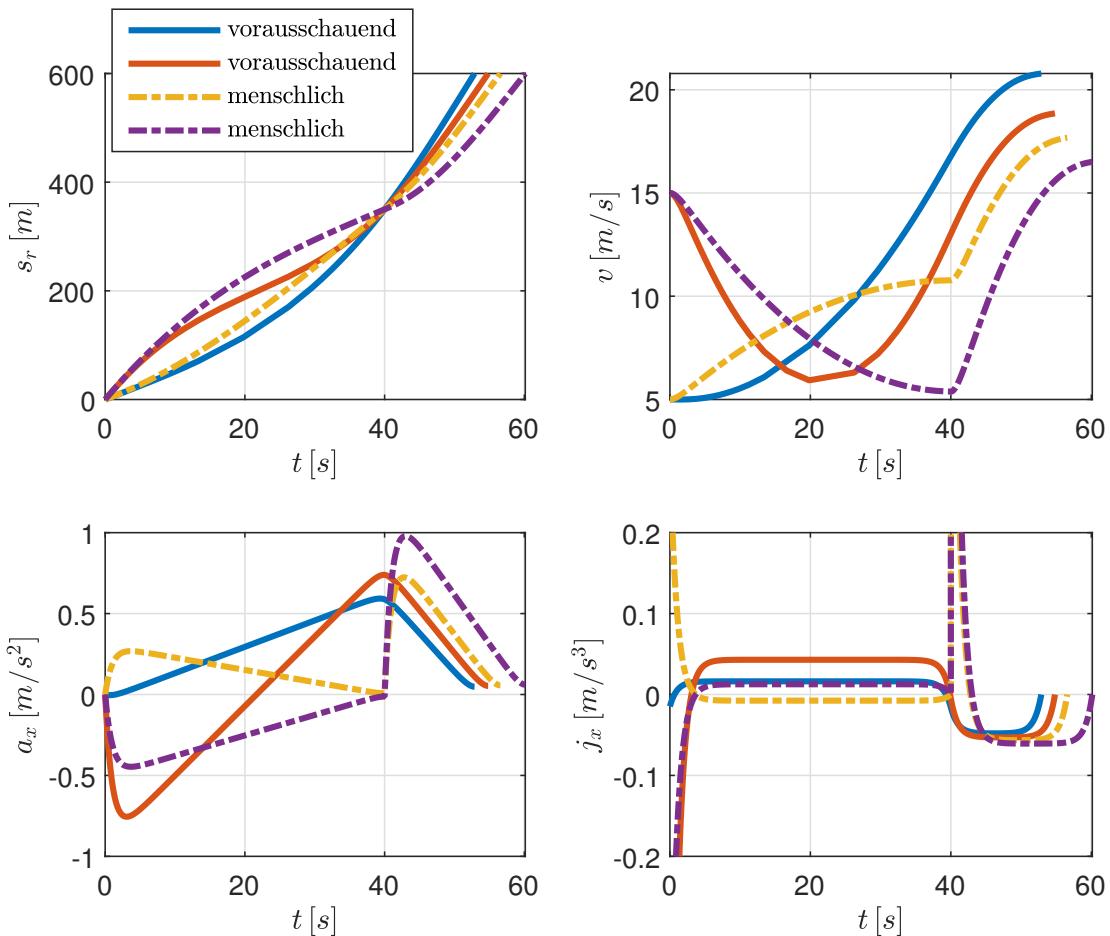


Abbildung 5.6: Lösungstrajektorien der Fahrzeugzustände und der Stellgröße beim Zufahren auf eine Ampel mit bekannter Rotphase. Darstellung der Ergebnisse für vorausschauende und menschliche (weniger vorausschauend) Planung bei unterschiedlichen Startgeschwindigkeiten.

#### 5.1.4.4 Idealer Bremsvorgang

Für dieses Szenario soll der Blick abschließend speziell auf den Bremsvorgang vor der Ampel bei hohen Anfangsgeschwindigkeiten gerichtet werden. Dazu sind in Abbildung 5.7 die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverläufe von vorausschauender und menschlicher Planung für das Szenario mit der höheren Anfangsgeschwindigkeit ( $v_0 = 15 \frac{m}{s}$ ) gezeigt, allerdings mit unterschiedlichen Gewichtungen  $f_{a_x}$  der Beschleunigung. Dabei zeigt sich, dass die Geschwindigkeit bei der menschlichen Planung

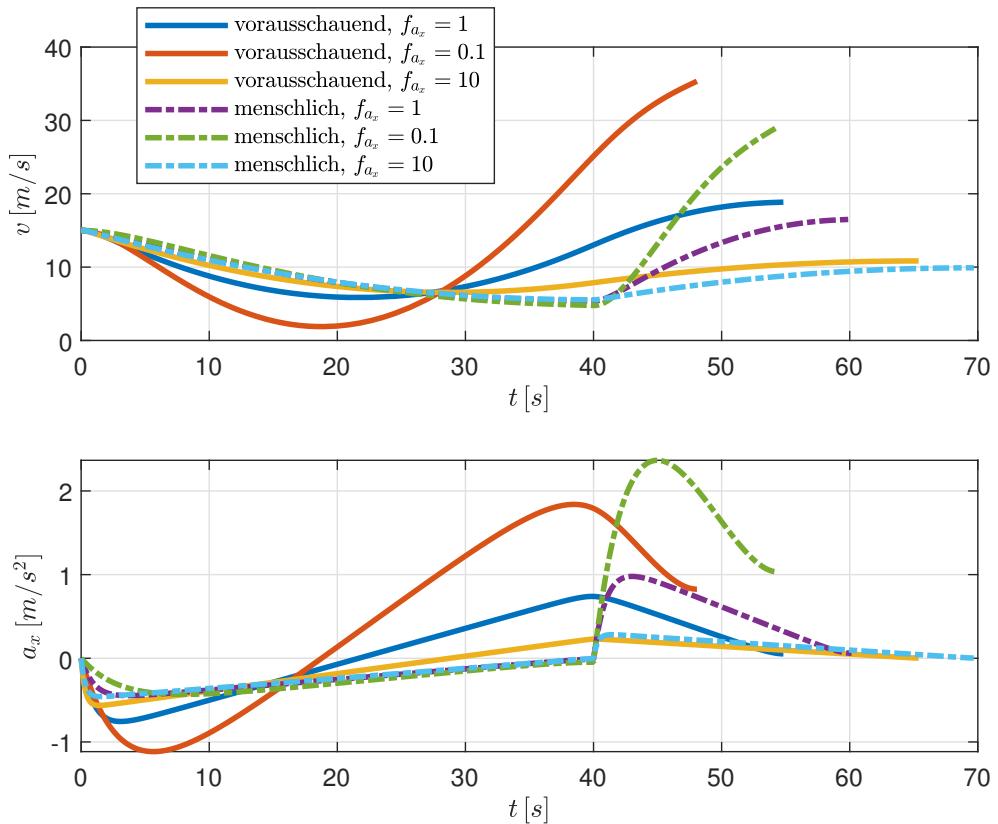


Abbildung 5.7: Geschwindigkeits- und Beschleunigungstrajektorien für vorausschauende und menschliche Planung für unterschiedliche Gewichtungen der Beschleunigung bei höherer Startgeschwindigkeit.

an der Ampel jeweils am geringsten ist. Dieses Verhalten entspricht dabei am ehesten dem, wie sich eine fahrende Person im Straßenverkehr verhalten würde – sie würde so lange die Geschwindigkeit reduzieren, bis die Ampel schließlich wieder auf Grün springt. Bei der vorausschauenden Planung hingegen wird das Minimum deutlich früher erreicht. Dies mag auf den ersten Blick nicht gerade intuitiv erscheinen, da es bedeutet, dass schon stark verzögert wird, obwohl das Fahrzeug noch weit von der Ampel entfernt ist. Zudem folgt daraus, dass bereits beschleunigt wird, bevor die Ampel Grün zeigt. Durch diese Weitsicht kann die Ampel allerdings mit höherer Geschwindigkeit überquert und das Ziel schneller erreicht werden. Die vorausschauende Planung mag zwar aus Sicht der Komfortkriterien besser abschneiden als die menschliche Planung, allerdings ist sie nicht in allen Verkehrssituationen praktikabel. Bei besonders hohem Verkehrsaufkommen, bei dem sich der Verkehr möglicherweise vor einer Ampel staut, ist diese Art der Planung nicht sinnvoll nutzbar, da das Fahrzeug vor der Ampel keine freie Fahrt

hat und dadurch nicht schon weit vor der Ampel beschleunigen kann, wie es von der Trajektorie verlangt wird. Zudem würde das starke Abbremsen weit vor der Ampel dazu führen, dass der nachfolgende Verkehr ausgebremst wird.

## 5.2 Spurwechsel

Bisher wurde ausschließlich die Längsdynamik des Fahrzeugs bei den untersuchten Szenarien berücksichtigt. Das nachfolgende Szenario Spurwechsel stellt insofern eine Erweiterung der bisher betrachteten Szenarien dar, als dass nun unter Hinzunahme der querdynamischen Größen das Gesamtmodell des Fahrzeugs verwendet wird. Dadurch lassen sich Spurwechsel beschreiben und hinsichtlich der Querdynamik analysieren.

Bei der Analyse des Spurwechsels werden nachfolgend zwei unterschiedliche Modellbeschreibungen untersucht. Zum einen wird das Fahrzeugmodell mit den Stellgrößen  $\mathbf{u} = [j_x, \kappa]^T$ , wie es in Kapitel 4 vorgestellt wurde, verwendet. Zum anderen wird die Systembeschreibung mit  $\mathbf{u} = [j_x, \kappa]^T$  betrachtet. Letztere hat aus Sicht des Fahrkomforts den Nachteil, dass der Querruck aufgrund der geringeren Modellordnung in der Querdynamik nicht berücksichtigt werden kann.

### 5.2.1 Formulierung des Optimierungsproblems

Zunächst wird die Problemformulierung und das daraus resultierende Gütfunktional für die detailliertere Modellbeschreibung erläutert. Der Spurwechsel lässt sich ähnlich wie das zuvor analysierte Ampel-Szenario durch eine Geradeausfahrt mit einer internen GNB beschreiben und kann daher wieder in zwei Abschnitte unterteilt werden. Zusätzlich kommt beim Spurwechsel jedoch noch eine Parameteränderung hinzu, die über eine Diskontinuität in der Systembeschreibung berücksichtigt werden kann, wobei die Diskontinuität streng genommen nicht die eigentliche Fahrzeugdynamik betrifft, sondern das Gütfunktional, und damit die adjungierten DGL verändert. Das OP lässt sich wie folgt formulieren:

$$\min_{\mathbf{u}} \quad J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_1) = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_{d_r}(d_r - d_{\text{off}})^2 + \frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2 + \frac{1}{2} f_{a_x} a_x^2 + \frac{1}{2} f_{j_y} j_y^2 + \frac{1}{2} f_{a_y} a_y^2 \, dt \quad (5.65)$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.66)$$

$$s_r(t_1) = s_1 \quad (5.67)$$

$$s_r(t_f) = s_f \quad (5.68)$$

$$d_r(t_f) = d_1 \quad (5.69)$$

$$\psi_r(t_f) = 0 \quad (5.70)$$

$$\kappa(t_f) = 0 \quad (5.71)$$

$$d_{\text{off}} = 0, \quad t < t_1 \quad (5.72)$$

$$d_{\text{off}} = d_1, \quad t \geq t_1. \quad (5.73)$$

Neben den komfortrelevanten Größen Ruck, Beschleunigung und Reisezeit wird im Gütfunktional zusätzlich die seitliche Abweichung von der Referenzkurve bestraft. Dadurch wird erreicht, dass sich das Fahrzeug trotz Querdynamik immer in der Nähe der Referenzkurve befindet, welche auch in diesem Szenario wieder durch eine krümmungsfreie Gerade beschrieben wird. Der eigentliche Spurwechsel wird dadurch erreicht, dass die seitliche Abweichung bezüglich eines vorgegebenen Offsets  $d_{\text{off}}$  bestraft

wird, welcher durch die Gleichungen (5.72) und (5.73) beschrieben wird und die angesprochene Parameteränderung darstellt. Durch die Endbedingungen (5.69)–(5.71) ist gewährleistet, dass die seitliche Abweichung zur neuen Fahrspur sowie der Winkelfehler bezüglich der Referenzkurve verschwinden und sich die Krümmung, die zum Durchführen des Spurwechsels notwendig ist, wieder bei Null einstellt. Die Forderung nach Stetigkeit der Fahrzeugzustände führt wie bereits beim Ampel-Szenario zur Stetigkeitsbedingung und zur ersten Weierstrass-Erdmannschen-Eckenbedingung. Da beim Spurwechsel die zeitliche Optimalität sowohl für den Endzeitpunkt  $t_f$  als auch für den Zeitpunkt der internen Übergangsbedingung erreicht werden soll, wird  $t_1$  in diesem Szenario frei gelassen, sodass auch die zweite Weierstrass-Erdmannsche-Eckenbedingung gilt. Bei der reduzierten Systembeschreibung, in der die Krümmung als Stellgröße verwendet wird, lässt sich das Optimalsteuerungsproblem analog formulieren, allerdings fallen dann die Bestrafung des Querrucks im Gütefunktional und die Endbedingung für die Krümmung (5.71) weg. Nachfolgend werden die Lösungen der optimalen Trajektorien für realistische Spurwechsel auf Autobahnen für beide Systembeschreibungen analysiert.

### 5.2.2 Optimale Spurwechseltrajektorien

Die Startgeschwindigkeit des Spurwechsels wird zu  $v_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  gewählt. Die beim Spurwechsel geforderte Querablage entspricht mit  $d_{\text{off}} = 3,5 \text{ m}$  einer üblichen Fahrstreifenbreite auf Autobahnen [66]. Zudem beginnt der Spurwechsel mit  $a_0 = 0$  und  $\kappa_0 = 0$  aus einem beschleunigungs- und krümmungsfreien Zustand. Für den Spurwechsel wird eine Gesamtstrecke von  $s_f = 300 \text{ m}$  vorgegeben, wobei nach der Hälfte, also bei  $s_1 = 150 \text{ m}$ , nicht mehr der seitliche Abstand bezogen auf den ursprünglichen Fahrstreifen, sondern der seitliche Abstand zum neuen Fahrstreifen im Gütefunktional berücksichtigt wird. Der Spurwechsel für das beschriebene Szenario ist in Abbildung 5.8 dargestellt,

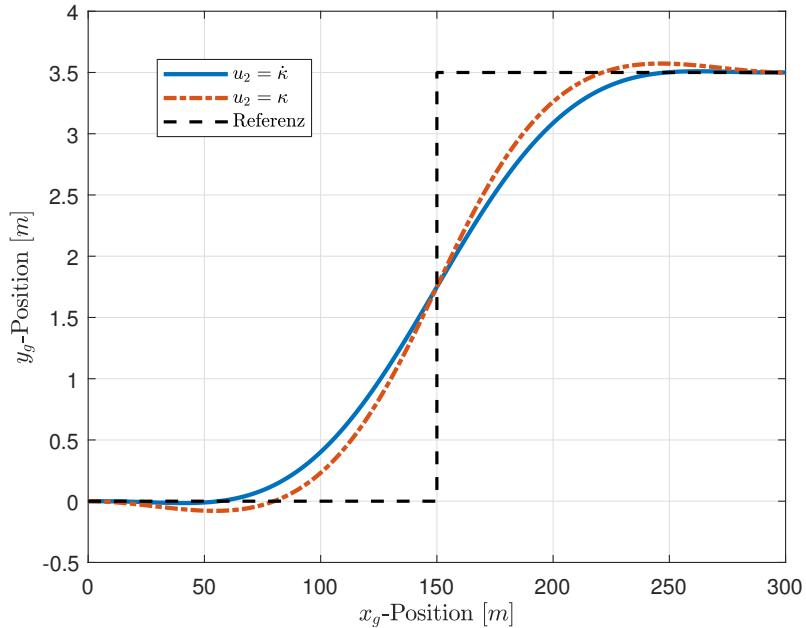


Abbildung 5.8: Spurwechseltrajektorien aus der Vogelperspektive für die beiden Modellbeschreibungen unterschiedlicher Ordnung.

wobei die gewählten Achsen den globalen  $x_g$ - und  $y_g$ -Koordinaten entsprechen und somit der Verlauf des Manövers aus der Vogelperspektive dargestellt ist. Neben den Verläufen der optimalen Trajektorien ist auch die Referenzkurve gezeigt. Dabei ist der Ort, ab dem die Querablage für die Bestrafung der seitlichen Abweichung im Gütefunktional den Referenzwert  $d_{\text{off}}$  ändert, gut zu erkennen. Zunächst wird die Längsdynamik des Spurwechsels betrachtet. In Abbildung 5.9 sind die Verläufe der Strecke, Geschwindigkeit, Beschleunigung, und des Rucks dargestellt. Die Abbildung zeigt, dass die unterschied-

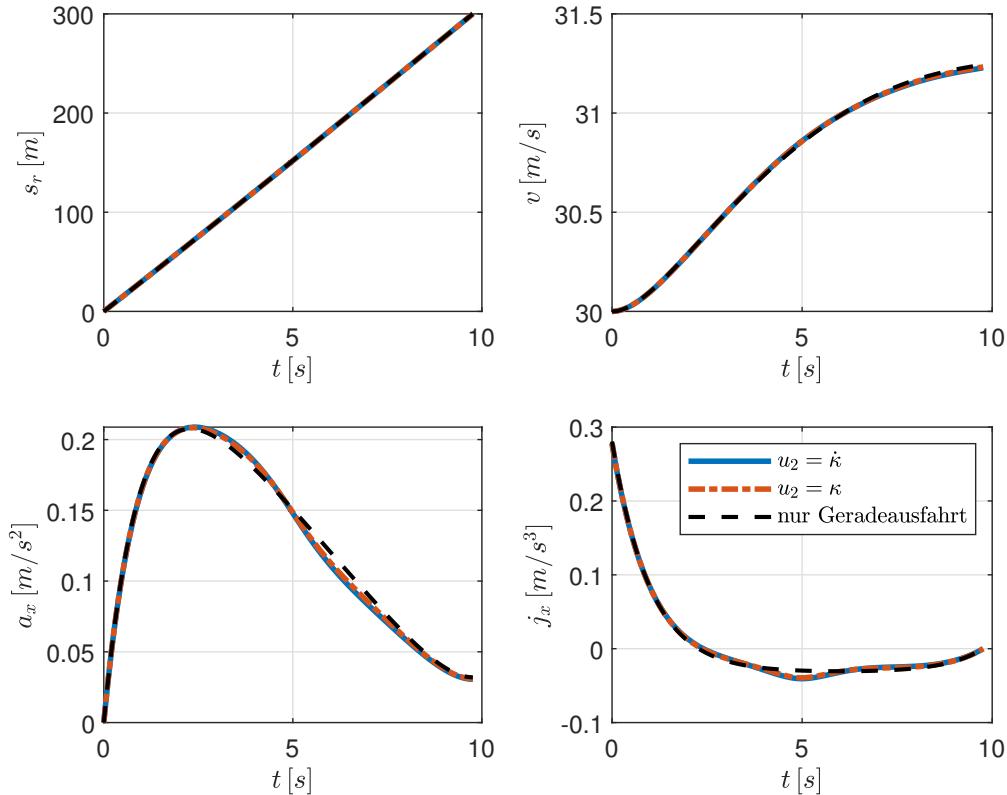


Abbildung 5.9: Trajektorien der Längsdynamik eines Spurwechsels für die beiden Modellbeschreibungen unterschiedlicher Ordnung im Vergleich zur Lösung der Geradeausfahrt ohne Spurwechsel.

liche Modellordnung der Querdynamik keinen wesentlichen Einfluss auf die Längsdynamik hat, da die Verläufe nahezu identisch sind. Außerdem ist zu erkennen, dass das längsdynamische Verhalten beim Spurwechsel in guter Näherung dem Verhalten der reinen Geradeausfahrt entspricht, weshalb bei Spurwechseln Längs- und Querdynamik getrennt von einander betrachtet werden können. Dies lässt sich damit begründen, dass das Verhalten bei Spurwechseln durch die Längsdynamik dominiert wird – während in Querrichtung lediglich eine Strecke von 3,5 m zurückgelegt wird, wird bei der hier gewählten Parametrierung in Längsrichtung eine Strecke von 300 m zurückgelegt, sodass dies näherungsweise einer reinen Geradeausfahrt entspricht<sup>2</sup>. Diese Eigenschaft machen sich die Autoren von [14] und [15] zunutze und verfolgen einen Ansatz, bei dem die Quer- und Längsdynamik jeweils als voneinander unabhängige Integratorsysteme betrachtet werden. Dabei ergibt sich ähnlich zur Herleitung

<sup>2</sup>Für dynamischere Spurwechsel wie sie beispielsweise bei Not- oder Ausweichmanövern auftreten, verliert diese Näherung desto mehr ihre Gültigkeit, je größer der Einfluss der Querdynamik ist.

in 5.1.1 für beide Richtungen ein Lösungsraum, der aus Polynomen besteht. Die Berücksichtigung der Querdynamik, so wie sie in dieser Arbeit vorgenommen wird, hat gegenüber dem Ansatz aus [14] und [15] den Vorteil, dass die Ergebnisse eine höhere Genauigkeit aufweisen, da Längs- und Querdynamik in den DGL des Systems miteinander verkoppelt sind. Dafür lässt sich die Lösung der adjungierten DGL aufgrund der komplexeren Gleichungen nicht mehr analytisch bestimmen. Die optimalen Trajektorien der querdynamischen Größen zu den zuvor gezeigten Spurwechseln sind in Abbildung 5.10 dargestellt. Während die Längsdynamik der beiden Modellbeschreibungen identisch modelliert ist und daher auch

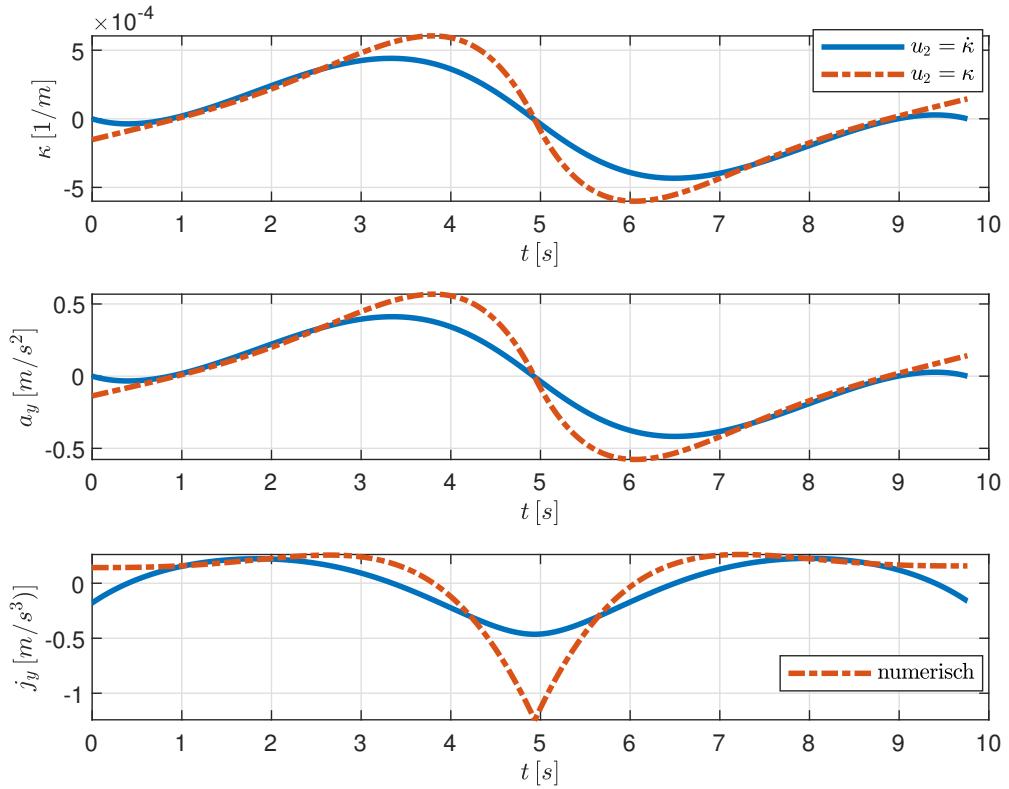


Abbildung 5.10: Trajektorien der Querdynamik eines Spurwechsels für die beiden Modellbeschreibungen unterschiedlicher Ordnung.

die Trajektorien nahezu dasselbe Verhalten aufweisen, zeigen sich bei der Querdynamik deutliche Unterschiede. Ein wesentlicher Unterschied zeigt sich in den Verläufen der Krümmung. Dadurch, dass  $\kappa$  im Modell mit der höheren Ordnung als Zustand betrachtet wird, können sowohl Anfangs- als auch Endwert des Zustands vorgegeben werden, sodass der Spurwechsel aus einem krümmungsfreien und damit auch querbeschleunigungsfreien Zustand begonnen werden kann. Wird  $\kappa$  hingegen als Stellgröße verwendet, können keine Anfangswerte vorgegeben werden –  $\kappa$  kann dann lediglich mithilfe des Maximumsprinzips beschränkt werden. Für den Endwert gilt, dass bei der niedrigeren Modellordnung nicht gleichzeitig  $\psi(t_f) = 0$  und  $\kappa(t_f) = 0$  gefordert werden können, sodass in dem hier dargestellten Szenario  $\kappa(t_f)$  ungleich Null ist. Damit besteht ein Vorteil der höheren Modellordnung darin, dass Randwerte für die Krümmung vorgegeben werden können. Während die optimalen Zeitpunkte für den Übergangspunkt des Spurwechsels  $t_1$  und für den Endzeitpunkt  $t_f$  bei beiden Modellbeschreibungen identisch sind, lassen sich in den optimalen Verläufen der Beschleunigung und des Querrucks in den unteren beiden Graphen

von Abbildung 5.10 sofort qualitative Unterschiede feststellen<sup>3</sup>. Sowohl für den Querruck als auch für die Querbeschleunigung lassen sich komfortablere Trajektorien erzielen, wenn der Querruck zusätzlich bestraft wird. Der Komfortgewinn ist damit zu begründen, dass die Trajektorien beider Größen zum einen niedrigere Werte erzielen und zum anderen weichere Verläufe aufweisen. Es zeigt sich also, dass die Bestrafung des Querrucks nicht nur zu rückärmeren Trajektorien führt, sondern auch eine Reduktion der Querbeschleunigung bewirkt, obwohl deren Einfluss gegenüber der Optimierung ohne Querruck nicht verändert wurde.

### 5.2.3 Komfortgewinn durch variable Gewichtung der Querabweichung

Eine Möglichkeit, ein höheres Maß an Fahrkomfort zu erzielen, stellt die stärkere Gewichtung der komfortrelevanten Größen dar. Werden die Gewichtungsfaktoren  $f_{ax}$ ,  $f_{jx}$ ,  $f_{ay}$  und  $f_{jy}$  größer gewählt, werden die Verläufe der einzelnen Größen entsprechend flacher, wobei dies auf **Kosten der Querabweichung zur Referenzkurve und der Reisezeit geschieht**. Eine weitere Möglichkeit zur Beeinflussung des Fahrkomforts bei Spurwechseln bietet die Veränderung der Gewichtung der Querabweichung  $f_{dr}$ . Da sich die Referenzquerablage  $d_{off}$  zum Zeitpunkt  $t_1$  sprunghaft ändert, lässt sich durch eine stärkere Gewichtung von  $d_r$  erreichen, dass der Spurwechsel „schneller“ vollzogen und dadurch dynamischer wird. Eine schwächere Gewichtung hingegen bewirkt genau das Gegenteil, wodurch das Einstellen des seitlichen Versatzes eher gemächlich geschieht. In Abbildung 5.11 sind mehrere Spurwechsel für unterschiedliche Gewichtungsfaktoren  $f_{dr}$  in der Vogelperspektive dargestellt, wobei diese das Verhalten der höheren Modellordnung mit  $u_2 = \kappa$  zeigen. Es ist gut zu erkennen, wie die Gewichtung den Verlauf

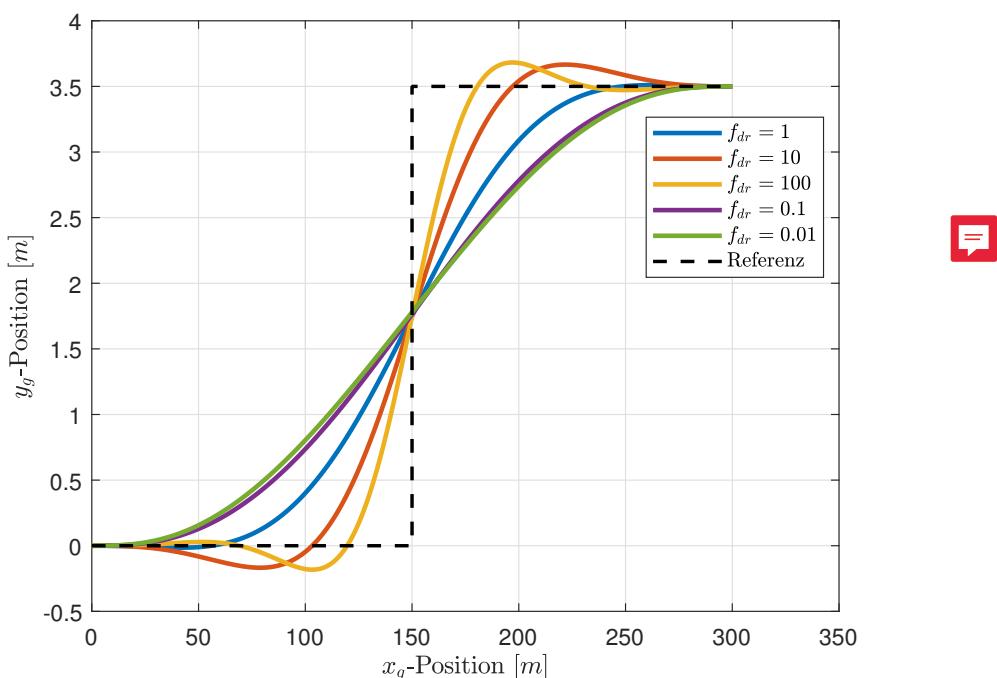


Abbildung 5.11: Spurwechseltrajektorien für verschiedene Gewichtungen der Querabweichung.

<sup>3</sup>Der Querruck des Spurwechsels bei der niedrigeren Modellordnung mit  $u_2 = \kappa$  wird hier durch numerische Differentiation der Querbeschleunigung berechnet.

des Spurwechsels beeinflusst – je höher die Bestrafung, desto steiler ist die seitliche Bewegung, wodurch sich die Trajektorie stärker der sprunghaften Referenzkurve annähert. Dadurch nimmt die Strecke ab, die für das Einstellen des größten Teils der Querablage benötigt wird. Der eigentliche Spurwechsel (abgesehen vom Einschwingverhalten) findet also auf einer kürzeren Strecke statt, wenn die Querabweichung stärker gewichtet wird. Zudem lässt sich erkennen, dass dynamische Spurwechsel mit hoher Bestrafung der Querabweichung ein seitliches Überschwingen aufweisen. Das bedeutet, dass der seitliche Versatz, den das Fahrzeug beim Spurwechsel annehmen soll, kurzzeitig überschritten wird, bis das Fahrzeug am Endpunkt genau den vorgegeben Wert annimmt. Bei sehr hoher Bestrafung kann dies unter Umständen dazu führen, dass Trajektorien entstehen, bei denen das Fahrzeug den Fahrbahnrand kurzzeitig verlassen würde. Derartige Trajektorien wären in der Praxis offensichtlich nicht zulässig. Die zu den Spurwechseln gehörigen Trajektorien der Querdynamik sind in Abbildung 5.12 dargestellt. Dabei

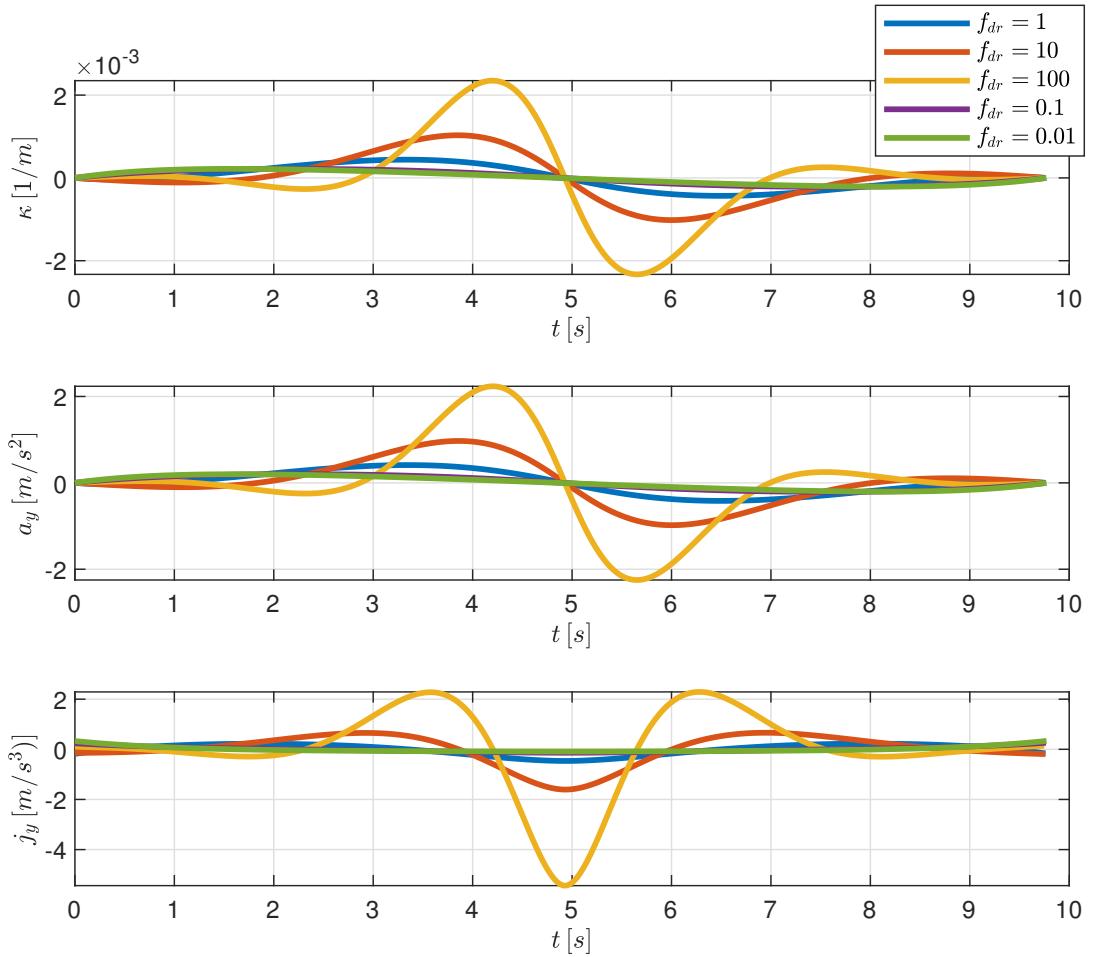


Abbildung 5.12: Querdynamik bei Spurwechseln mit verschiedenen Gewichtungen der Querabweichung.

ist gut zu erkennen, wie die Querdynamik mit zunehmender Bestrafung der Querabweichung zunimmt. Dadurch, dass der Spurwechsel näher an den Verlauf der Referenzkurve gedrückt wird, sind größere Lenkeinschläge bzw. Krümmungen notwendig, weshalb die Querbeschleunigung zunimmt. Da nicht nur größere Krümmungswerte angenommen werden, sondern sich diese bei einer größeren Gewichtung

der Querabweichung auch stärker ändern, nimmt zusätzlich der Querruck zu. Damit lässt sich die Aussage treffen, dass der Fahrkomfort des Manövers mit zunehmender Gewichtung der Querabweichung abnimmt. Dieses dynamische Verhalten kann bei einer Sicherheitsbewertung der aktuellen Fahrsituation nützlich sein. Bei freier Fahrt kann ein Spurwechsel beispielsweise mit geringer Bestrafung der Querabweichung geplant werden, da das Manöver mithilfe ruck- und beschleunigungsarmer Trajektorien durchgeführt werden kann und dies zu einem hohen Maß an Komfort führt. Dafür wird allerdings eine weite Strecke benötigt. Wird eine Fahrsituation als sicherheitskritisch eingestuft, wie es bei einem Notausweichmanöver der Fall ist, kann der Spurwechsel mit hoher Bestrafung der Querabweichung geplant werden, da hierbei bis auf das Einschwingen eine deutlich geringere Strecke für das Manöver benötigt wird. Dies geschieht allerdings auf Kosten des Fahrkomforts, wobei dieser in einer Notsituation dem Sicherheitsaspekt unterzuordnen ist. Abschließend ist in Abbildung 5.13 das längsdynamische Verhalten der verschiedenen Spurwechsel dargestellt, und es ist gut zu erkennen, dass die Längsdynamik mit zunehmender Gewichtung der Querabweichung von der stärker werdenden Querdynamik beeinflusst wird. Das dynamische Verhalten des Gesamtsystems wird insbesondere im Bereich um  $t_1$  herum von der Querdynamik dominiert. Damit ist auch erkennbar, dass die in 5.2.2 erläuterte Näherung, Längs- und Querdynamik getrennt voneinander zu betrachten, nur für Szenarien mit geringer Querdynamik gültig ist.

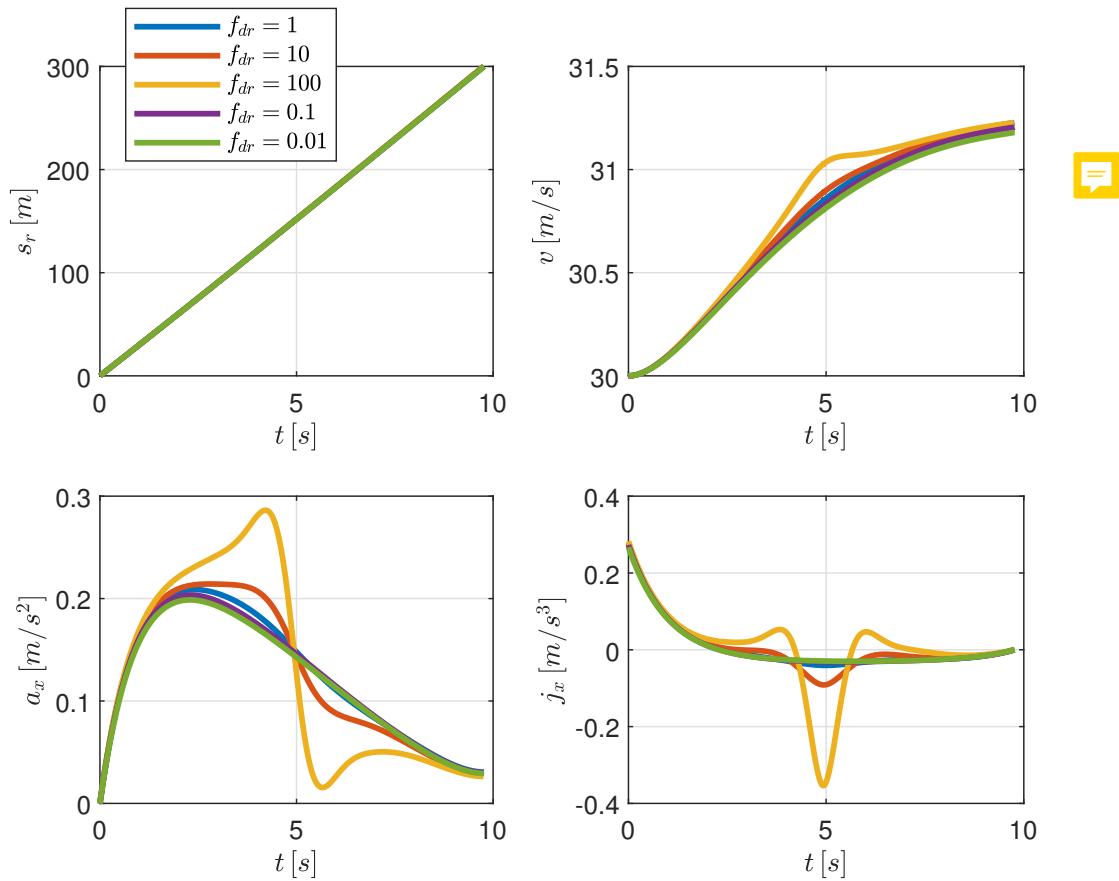


Abbildung 5.13: Längsdynamik bei Spurwechseln mit verschiedenen Gewichtungen der Querabweichung.

## 5.3 Kreisfahrt mit konstanter Krümmung

Nachdem das Szenario Geradeausfahrt eingehend analysiert und diskutiert wurde, soll nachfolgend das Szenario einer Kreisfahrt untersucht werden. Die Kreisfahrt stellt mit seiner konstanten Krümmung einen vereinfachten Sonderfall einer Kurve dar. Durch die Analyse der Kreisfahrt lassen sich einige Erkenntnisse gewinnen, die später bei der Untersuchung allgemeiner Kurven mit veränderlicher Krümmung, sogenannter Klothoiden, wieder auftauchen.

### 5.3.1 Vernachlässigung der Querdynamik

Wie bereits in Kapitel 4 erklärt wurde, sind die DGL des Gesamtsystems unter Berücksichtigung aller Komfortkriterien, der Querdynamik und der von der Strecke abhängigen Referenzkrümmung analytisch nicht lösbar. Aus diesem Grund werden wieder einige Annahmen getroffen, um die Lösung des Optimalsteuerungsproblems zu vereinfachen. Das Kreisfahrtszenario wird zunächst unter Vernachlässigung der Querdynamik betrachtet. Dazu wird vereinfachend angenommen, dass sich das Fahrzeug immer exakt auf der Referenzkurve mit  $\kappa_{\text{ref}}$  bewegt. Laterale Bewegungen werden dabei vernachlässigt, weshalb nur eine Stellgröße in Längsrichtung benötigt wird. Dafür wird nachfolgend die Längsbeschleunigung mit  $u = a_x$  gewählt. Die Querbeschleunigung kann dabei über die Krümmung der Referenzkurve und die Fahrzeuggeschwindigkeit berücksichtigt werden. Das OP der Kreisfahrt für das deutlich vereinfachte Modell lässt sich damit wie folgt angeben:

$$\min_{\mathbf{u}} \quad J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_f) = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_{a_x} a_x^2 + \frac{1}{2} f_{a_y} \kappa_{\text{ref}}^2 v^4 \, dt \quad (5.74)$$

$$\text{u.B.v.} \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.75)$$

$$s_r(t_f) = s_f . \quad (5.76)$$

Aus dieser Formulierung folgen die kanonischen DGL

$$\dot{s}_r = v \quad (5.77)$$

$$\dot{v} = a_x \quad (5.78)$$

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad (5.79)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -2f_{a_y} \kappa_{\text{ref}}^2 v^3 - \lambda_1 \quad (5.80)$$

und aus der Steuerungsgleichung folgt

$$\lambda_2 = -f_{a_x} a_x . \quad (5.81)$$

#### 5.3.1.1 Ruhelage



Dieses System kann schließlich auf Ruhelagen untersucht werden. Dabei stellt sich die Frage, ob es eine Geschwindigkeit  $v_{\text{RL}}$  gibt, die zu einer **Ruhelage** des Systems führt, welche eine Lösung des Optimalsteuerungsproblems darstellt. Da die Kreisfahrt in der Ruhelage mit konstanter Geschwindigkeit

durchfahren werden soll, muss der Zustand  $s_r$  bei der Untersuchung aus dem System entfernt werden, sodass sich das reduzierte System mit

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} v \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

ergibt. Die konstante Geschwindigkeit führt zudem dazu, dass die Beschleunigung in der Ruhelage Null betragen muss. Das Nullsetzen von Gleichung (5.80) liefert die Beziehung

$$\lambda_{1,RL} = -2f_{a_y}\kappa_{ref}^2v_{RL}^3. \quad (5.83)$$

Diese kann in die Transversalitätsbedingung für freie Endzeit eingesetzt und schließlich nach  $v_{RL}$  aufgelöst werden. Dabei wird angenommen, dass aufgrund der Ruhelage für alle Größen  $v(t_f) = v_{RL}, \dots, \lambda_6(t_f) = \lambda_{6,RL}$  gilt. Aus

$$H(t_f) = \frac{1}{2}f_{a_x}a_x(t_f)^2 + \frac{1}{2}f_{a_y}\kappa_{ref}^2v(t_f)^4 + \lambda_1(t_f)v(t_f) + \lambda_2(t_f)a_x(t_f) \stackrel{!}{=} -1 \quad (5.84)$$

folgt schließlich

$$v_{RL} = \sqrt[4]{\frac{2}{3f_{a_y}\kappa_{ref}^2}}. \quad (5.85)$$

Damit existiert eine Ruhelage, die eine Lösung des OP für die Kreisfahrt mit dem vereinfachten und um  $s_r$  reduzierten System darstellt. Die Querbeschleunigung, die sich aus der Referenzkrümmung und der Geschwindigkeit in der Ruhelage berechnen lässt, beträgt

$$a_{y,RL} = v_{RL}^2\kappa_{ref} = \sqrt{\frac{2}{3f_{a_y}}}. \quad (5.86)$$

Die optimale Querbeschleunigung in der Ruhelage bei einer Kreisfahrt ist offensichtlich unabhängig von der durchfahrenen Krümmung und hängt lediglich von der Gewichtung  $f_{a_y}$  im Gütefunktional ab.

### 5.3.1.2 DGL der Geschwindigkeit

Mit der Ruhelage des Systems können die Gleichungen noch weiter gelöst werden. Aus (5.81) folgt

$$\dot{\lambda}_2 = -f_{a_x}\dot{a}_x = -f_{a_x}\ddot{v}. \quad (5.87)$$

Dieser Zusammenhang kann in Gleichung (5.80) eingesetzt und zu der gewöhnlichen, nichtlinearen DGL zweiter Ordnung für die Geschwindigkeit umformuliert werden

$$\ddot{v} = 2\frac{f_{a_y}}{f_{a_x}}\kappa_{ref}^2v^3 + \frac{\lambda_1}{f_{a_x}}, \quad (5.88)$$

wobei für  $\lambda_1$  der Wert in der Ruhelage  $\lambda_{1,RL}$  eingesetzt werden kann, da  $\lambda_1$  ohnehin konstant ist. Gleichung (5.88) besitzt eine spezielle Form und kann in eine DGL erster Ordnung für die Geschwindigkeit umgeformt werden. Mit

$$\varphi(v) := 2\frac{f_{a_y}}{f_{a_x}}\kappa_{ref}^2v^3 + \frac{\lambda_1}{f_{a_x}} \quad (5.89)$$

lassen sich die folgenden Umformungen durchführen:

$$\dot{v} = \varphi(v) \quad (5.90)$$

$$2\dot{v}\ddot{v} = 2\dot{v}\varphi(v) \quad (5.91)$$

$$2\dot{v}\frac{d\dot{v}}{dt} = 2\frac{dv}{dt}\varphi(v) \quad (5.92)$$

$$(\dot{v})^2 = \frac{f_{a_y}}{f_{a_x}}\kappa_{\text{ref}}^2 v^4 + 2\frac{\lambda_1}{f_{a_x}}v + c \quad (5.93)$$

Diese DGL kann auf analytischem Weg nicht gelöst werden, sondern muss mithilfe numerischer Integrationsverfahren (z.B klassisches RKV) gelöst werden. Die Integrationsvariable  $c$  muss dabei mithilfe der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und der Anfangsbeschleunigung  $a_{x,0}$  bestimmt werden, wobei letztere nicht vorgegeben werden kann, da  $a_x$  die Stellgröße darstellt. Die Anfangsbeschleunigung kann daher beispielsweise durch vorheriges Lösen des Randwertproblems mithilfe des bvp4c-Solvers berechnet werden. Ob die Lösung der Geschwindigkeit ausgehend vom Anfangswert  $v_0$  bei der numerischen Integration letztendlich gegen die Ruhelage konvergiert, hängt in hohem Maße vom Anfangswert der Beschleunigung ab, der für die Berechnung der Integrationskonstanten  $c$  verwendet wird. In Abbildung 5.14 sind die Verläufe der Geschwindigkeit und der Beschleunigung für eine Kreisfahrt von  $s_f = 700$  m bei einer Krümmung von  $\kappa_{\text{ref}} = 0,01 \frac{1}{\text{m}}$  dargestellt. Mit  $f_{a_y} = 1$  beträgt die Geschwindigkeit in der Ruhelage

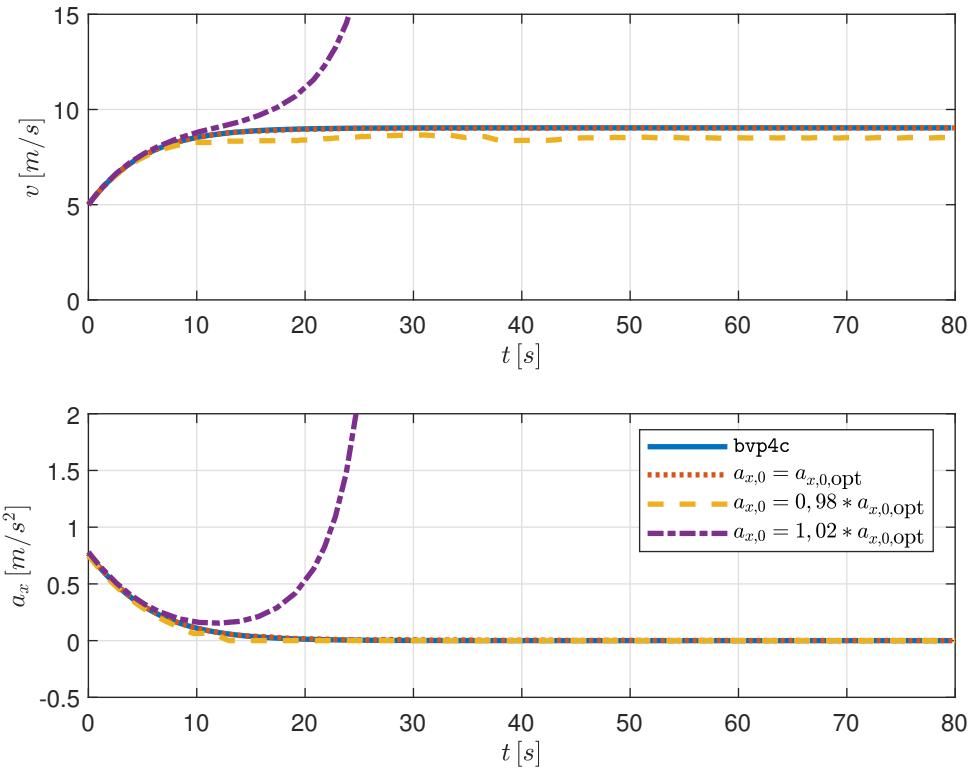


Abbildung 5.14: Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Kreisfahrt. Vergleich der Lösung mittels bvp4c und Integration der DGL (5.93) ausgehend von verschiedenen Anfangsbeschleunigungen zur Bestimmung der Integrationskonstante  $c$ .

$v_{RL} = 9,036 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und es ist erkennbar, dass die Lösung mittels bvp4c-Solver ausgehend von der Anfangsgeschwindigkeit genau gegen diese Geschwindigkeit konvergiert, während die Beschleunigung gegen 0 läuft. Selbiges gilt auch für die Lösung der DGL (5.93) mittels RKV, sofern die Anfangsbeschleunigung  $a_{x,0}$  zur Bestimmung der Integrationskonstante  $c$  exakt dem Wert der optimalen Lösung entspricht. Bereits kleine Abweichungen von diesem Wert führen dazu, dass die Integration nicht mehr exakt in der Ruhelage mündet und im schlechtesten Fall sogar instabil wird. Diese Abhängigkeit von Anfangswerten, die nicht über die Randbedingungen vorgegeben werden können, ist der Grund, warum eine höhere Ordnung und damit Berücksichtigung des Längsrucks für die Herleitung der Geschwindigkeits-DGL ungeeignet ist. Wird das System um den Längsruck als Stellgröße erweitert und dieser gemeinsam mit der Längs- und Querbeschleunigung im Gütefunktional bestraft, dann lauten die adjungierten DGL

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad (5.94)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -2f_{a_y}\kappa_{\text{ref}}^2v^3 - \lambda_1 \quad (5.95)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -f_{a_x}a_x - \lambda_2. \quad (5.96)$$

Diese lassen sich mit

$$\lambda_3 = -f_{j_x}j_x \rightarrow \dot{\lambda}_3 = -f_{j_x}\dot{j}_x = -f_{j_x}\ddot{v} \quad (5.97)$$

wieder ineinander einsetzen, sodass sich schließlich die DGL vierter Ordnung für die Geschwindigkeit ergibt

$$\ddot{v} = \frac{f_{a_x}}{f_{j_x}}\ddot{v} - 2\frac{f_{a_y}}{f_{j_x}}\kappa_{\text{ref}}^2v^3 - \frac{\lambda_1}{f_{j_x}}. \quad (5.98)$$

Um diese mittels RKV zu lösen, müssen die Startwerte für den Ruck sowie dessen Ableitung vorgegeben werden, obwohl diese nicht bekannt sind. Die Formulierung unter Berücksichtigung des Längsrucks ist demnach noch sensitiver gegenüber der Anfangswerte als die Formulierung ohne den Ruck.

### 5.3.2 Berücksichtigung der Querdynamik

Nachdem die Kreisfahrt für eine vereinfachte Systembeschreibung ohne Berücksichtigung der querdynamischen Fahrzeugzustände auf Ruhelagen untersucht und eine nichtlineare DGL zur Bestimmung der Geschwindigkeitstrajektorie hergeleitet wurde, wird das Fahrzeugmodell für die Kreisfahrt nachfolgend um die querdynamischen Größen erweitert. Dazu wird das System mit den Stellgrößen  $\mathbf{u} = [j_x, \dot{\kappa}]^T$  verwendet (vgl. Abschnitt 4.2) und zunächst nur die Vereinfachung konstanter Referenzkrümmung mit  $\kappa_{\text{ref}}(s_r) = \kappa_{\text{ref},0}$  getroffen.

#### 5.3.2.1 Ruhelage

Analog zum Vorgehen aus Abschnitt 5.3.1.1 wird wieder das um  $s_r$  reduzierte System auf Ruhelagen untersucht, allerdings diesmal mit

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} [v \ a_x \ d_r \ \psi_r \ \kappa]^T \\ [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5 \ \lambda_6]^T \end{bmatrix}. \quad (5.99)$$

Aus  $\dot{\tilde{z}} \stackrel{!}{=} 0$  folgt sofort

$$a_{x,RL} = 0 \quad (5.100)$$

$$j_{x,RL} = 0 \rightarrow \lambda_{3,RL} = 0 \quad (5.101)$$

$$\kappa'_{RL} = k\pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \quad (5.102)$$

$$\kappa_{RL} = 0 \rightarrow \lambda_{6,RL} = 0, \quad (5.103)$$

wobei  $\psi_{r,RL} = 0$  mit  $k = 0$  angenommen werden kann, da sich das Fahrzeug weiterhin entlang der Referenzkurve bewegt und daher **keine großen Winkelabweichungen nicht vorkommen**. Zusätzlich wird unter der Annahme kleiner seitlicher Abweichungen die Vereinfachung  $1 - d_r \kappa_{ref}(s_r) \approx 1$  getroffen, sodass für die Krümmung näherungsweise

$$\kappa_{RL} \approx \kappa_{ref} \quad (5.104)$$

gilt. Durch Einsetzen der bisher bestimmten Ruhelagenwerte in die Gleichungen (4.17)–(4.21) folgt

$$\lambda_{1,RL} = -2f_{a_y}\kappa_{ref}^2 v_{RL}^3 \quad (5.105)$$

$$\lambda_{2,RL} = 0 \quad (5.106)$$

$$d_{r,RL} = \frac{\kappa_{ref}^2 \lambda_{5,RL} v_{RL} - \kappa_{ref} \lambda_{1,RL} v_{RL}}{f_{d_r}} \quad (5.107)$$

$$\lambda_{4,RL} = 0 \quad (5.108)$$

$$\lambda_{5,RL} = -f_{a_y}\kappa_{ref}v_{RL}^3. \quad (5.109)$$

Durch weiteres Umformen lässt sich auch die seitliche Abweichung in Abhängigkeit von  $v_{RL}$  ausdrücken:

$$d_{r,RL} = \frac{f_{a_y}\kappa_{ref}^3 v_{RL}^4}{f_{d_r}}. \quad (5.110)$$

Die Geschwindigkeit kann schließlich mithilfe der Transversalitätsbedingung für freie Endzeit bestimmt werden. Diese lässt sich zu der Gleichung

$$H(t_f) + 1 = 0 \quad (5.111)$$

$$\frac{1}{2}f_{d_r}d_{r,RL}^2 - \frac{3}{2}f_{a_y}\kappa_{ref}^2 v_{RL}^4 + 1 = 0 \quad (5.112)$$

zusammenfassen, aus der die Lösung der Geschwindigkeit zu

$$v_{RL} = \sqrt[4]{\frac{3f_{d_r}}{2f_{a_y}\kappa_{ref}^4} - \sqrt{\left(\frac{3f_{d_r}}{f_{a_y}^2\kappa_{ref}^4}\right)^2 - \frac{2f_{d_r}}{f_{a_y}^2\kappa_{ref}^6}}} \quad (5.113)$$

bestimmt werden kann. Die seitliche Abweichung von der Referenzkurve und dessen Bestrafung spielen bei der Ruhelage unter Verwendung des Systems mit Querdynamik eine besondere Rolle. Die Lösung für  $\kappa_{RL}$  ist nur gültig, wenn die dazugehörige Vereinfachung hinreichend genau erfüllt ist. Dazu muss  $d_{r,RL}$  entsprechend klein sein, was nur über eine hohe Bestrafung der Querabweichung erreicht wird. Aus Gleichung (5.107) wird zudem deutlich, dass eine Grenzwertbetrachtung für  $f_{d_r} = 0$  zu unendlich hohen seitlichen Abweichungen und damit zu einer nicht lösbarren Gleichung (5.112) führt, sodass  $v_{RL}$  in diesem Fall nicht bestimmt werden kann. Eine Ruhelage existiert folglich nur dann, wenn  $d_r$  im

Gütefunktional bestraft wird. Außerdem sei an dieser Stelle hervorgehoben, dass die Ruhelage, sofern die Parametrierung so gewählt wird, dass diese existiert, nicht exakt auf der Referenzkurve, sondern immer mit seitlichem Versatz  $d_{r,RL}$  im Kreisinnern liegt. Eine Verbesserung der Abschätzung von  $\kappa_{RL}$  lässt sich erreichen, indem nachträglich (nachdem  $d_{r,RL}$  bestimmt wurde)

$$\kappa_{RL} = \frac{\kappa_{ref}}{1 - d_{r,RL}\kappa_{ref}} \quad (5.114)$$

bestimmt wird. Gleichung (5.113) lässt sich zu

$$v_{RL} = \sqrt[4]{\frac{\frac{9f_{dr}}{2\kappa_{ref}^2} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{9f_{dr}^2 - 8f_{dr}\kappa_{ref}^2}{\kappa_{ref}^4}}}{3f_{ay}\kappa_{ref}^2}} \quad (5.115)$$

umformen. Es lässt sich zeigen, dass der Zähler des Wurzelterms dieser Gleichung im für die Krümmung relevanten Bereich  $\kappa_{ref} \in [-0,2, 0,2] \frac{1}{m}$  konstant durch 2 angenähert werden kann, sofern  $f_{dr}$  groß genug gewählt wird, sodass die Lösung von  $v_{RL}$  in Gleichung (5.115) mit dem Ergebnis aus Abschnitt 5.3.1.1 ohne Querdynamik übereinstimmt. Der Zähler des Wurzelterms von Gleichung (5.115) ist in Abbildung 5.15 für verschiedene  $f_{dr}$  dargestellt und es ist gut erkennbar, dass der Verlauf des Zählers im relevanten Bereich näherungsweise konstant ist, wenn  $f_{dr}$  ausreichend groß ist. Bereits die

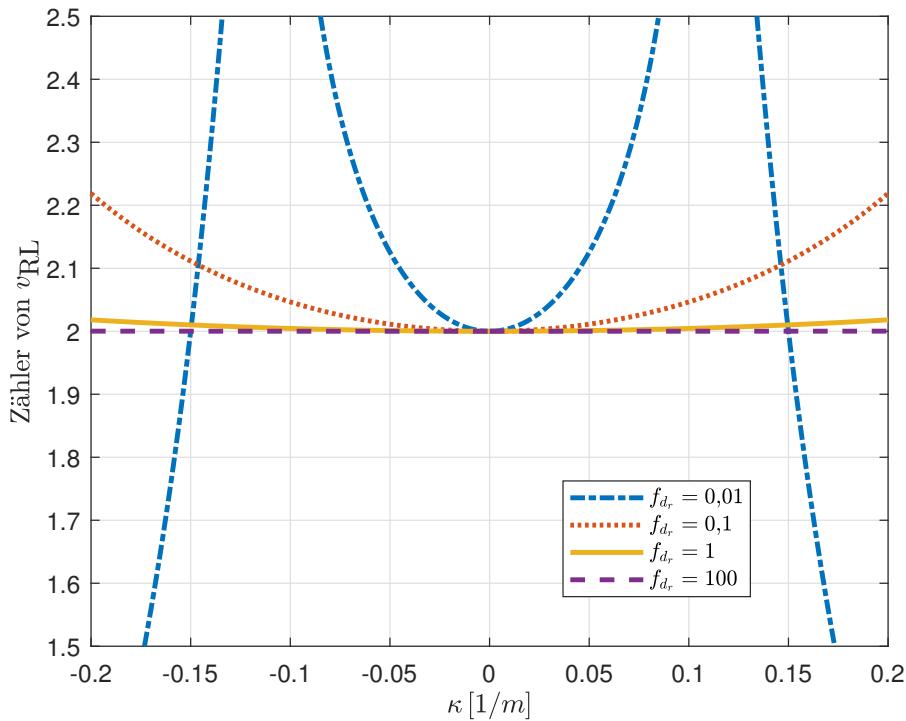


Abbildung 5.15: Verlauf des Zählers des Wurzelterms von Gleichung (5.115) im Bereich  $\kappa_{ref} \in [-0,2, 0,2] \frac{1}{m}$  für verschiedene  $f_{dr}$ .

Gewichtung  $f_{dr} = 1$  stellt dabei einen Wert dar, mit dem die erklärte Näherung verwendet und daher  $v_{RL}$  durch Gleichung (5.85) berechnet werden kann. Damit gilt auch für das Modell mit Querdynamik, dass die optimale Querbeschleunigung gemäß Gleichung (5.86) berechnet werden kann und nur

vom Gewichtungsfaktor  $f_{a_y}$  abhängt. Die seitliche Abweichung von der Referenzkurve ist zwar streng genommen kein komfortrelevantes Gütekriterium, allerdings ist die Bestrafung von  $d_r$  im Gütefunktional notwendig, damit das Fahrzeug in der Nähe der Referenzkurve bleibt und damit die Ruhelage der Kreisfahrt auch beim Fahrzeugmodell unter Berücksichtigung der Querdynamik existiert.

### 5.3.2.2 Linearisiertes Systemverhalten in der Ruhelage

Nachdem die Ruhelage des Systems in der Kreisfahrt bestimmt wurde, soll nachfolgend das linearisierte Systemverhalten in der Ruhelage untersucht werden. Dazu werden die kanonischen DGL des Gesamtsystems (diesmal wieder mit Berücksichtigung von  $s_r$ ) durch ihre Taylorreihen approximiert, wobei diese nach dem linearen Glied abgebrochen werden [70]. Anschließend werden die Taylorreihen durch Einsetzen der Zustands- und Stellgrößen in der Ruhelage ausgewertet, wodurch sich ein lineares System ergibt, welches in der Umgebung der Ruhelage gültig ist [70]. Die Strecke  $s_r$  kann dabei beliebig gewählt werden. Da die Stellgrößen in Abhängigkeit der Fahrzeugzustände und der adjungierten Zustände ausgedrückt werden können, kann das gesamte linearisierte Systemverhalten durch eine Systemmatrix  $\mathbf{A}$  angegeben werden – eine Eingangsmatrix wird nicht benötigt. Die Systemmatrix lässt sich dann mittels

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_{RL}} \quad (5.116)$$

bestimmen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf die symbolische Berechnung der Systemmatrix an dieser Stelle verzichtet. Die Eigenwerte der Systemmatrix in der Laplace-Ebene für die Parametrierung mit  $\kappa_{ref} = 0,01 \frac{1}{m}$  und der Standardparametrierung der Gewichtungsfaktoren sind in Abbildung 5.16 dargestellt. Dabei liegt der zur Geschwindigkeit und Beschleunigung gehörende Doppelintegratorpol im

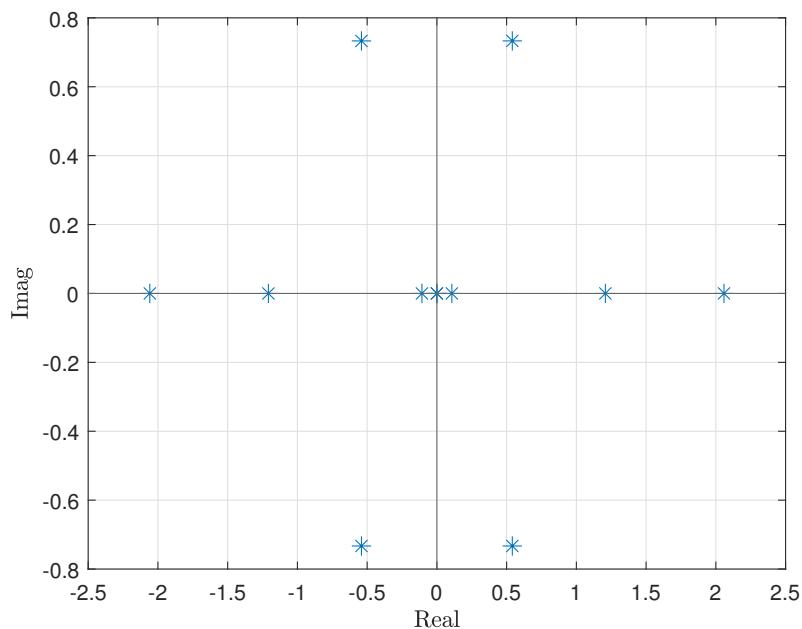


Abbildung 5.16: Eigenwerte des in der Ruhelage linearisierten Systems mit  $\kappa_{ref} = 0,01 \frac{1}{m}$ .

Ursprung. Die Abbildung zeigt deutlich, dass immer an der Imaginärachse gespiegelte Eigenwerte vorliegen. Dadurch besitzt auch das linearisierte System der Kreisfahrt instabile Eigenmoden. Je nachdem, ob die Endzustände  $\mathbf{z}(t_f)$  den Werten in der Ruhelage entsprechen, zeigt sich der Einfluss der instabilen Eigenmoden am Ende der Trajektorien. Zudem besitzt das System zwei komplexe konjugierte Polpaare, die auf schwingungsfähiges Systemverhalten hindeuten. Diese Schwingungen sind in der Querdynamik des Fahrzeugs deutlich zu erkennen, wenn die Anfangswerte  $\mathbf{z}_0$  nicht der Ruhelage entsprechen. Um dieses Verhalten zu veranschaulichen, sind in Abbildung 5.17 die Verläufe der querdynamischen Zustandsgrößen sowie der Querbeschleunigung  $a_y$  für eine Kreisfahrt von 500 m bei zwei unterschiedlichen Randbedingungen für  $d_r$  dargestellt. Zum einen sind die Trajektorien für den Fall gezeigt, dass das

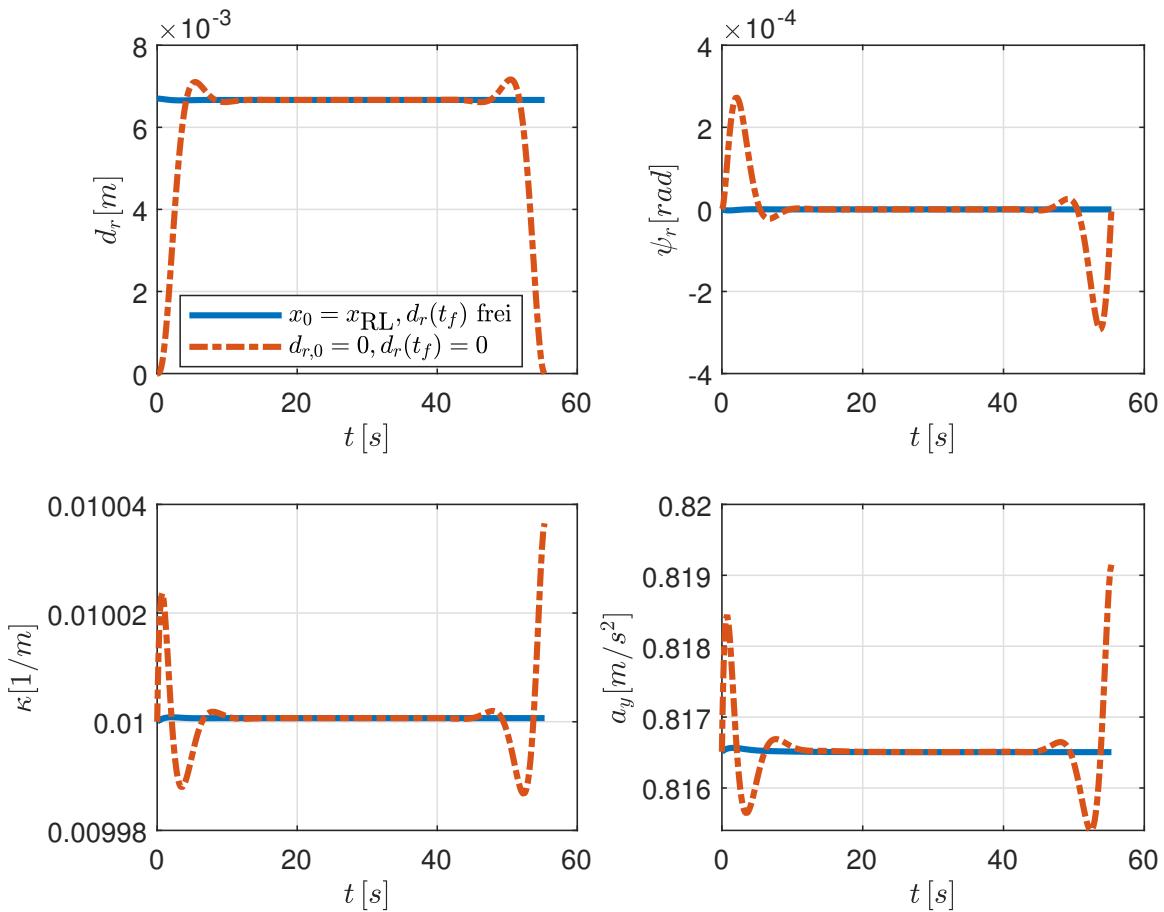


Abbildung 5.17: Optimale Trajektorien der querdynamischen Größen: erstens für den Fall, dass das Fahrzeug in der Ruhelage startet und die Endbedingungen zulassen, dass die Endzustände in der Ruhelage liegen; zweitens für den Fall, dass das Fahrzeug **nicht** in der Ruhelage startet und  $d_r(t_f) = 0$  gewählt wird. Die zurückzulegende Strecke beträgt  $s_f = 500$  m.

System mit  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{RL}$  in der Ruhelage beginnt (blaue, durchgezogene Linien). In diesem Fall sind außerdem die Endbedingungen  $s_r(t_f) = s_f$  und  $\psi_r(t_f) = 0$  gewählt. Die restlichen Endzustände – insbesondere  $d_r(t_f)$  – bleiben frei, sodass die Endwerte der optimalen Trajektorien in der Ruhelage liegen. Der zweite dargestellte Fall beginnt mit  $d_{r,0} = 0$ , also nicht in der Ruhelage (rote, gestrichelte

Linien). Zudem werden die Endbedingungen  $s_r(t_f) = s_f$ ,  $\psi_r(t_f) = 0$  und  $d_r(t_f) = 0$  gewählt, sodass das System zum Endzeitpunkt dazu gezwungen wird, die Ruhelage zu verlassen. Die Verläufe verdeutlichen das beschriebene Systemverhalten in Abhängigkeit der Anfangs- und Endbedingungen. Wenn die Optimierung bereits in der Ruhelage startet und die Endbedingungen zulassen, dass auch die Endzustände der Trajektorien der Ruhelage entsprechen, so wird diese über den gesamten Verlauf des Szenarios nicht verlassen – alle Größen sind konstant. Startet das Fahrzeug jedoch außerhalb der Ruhelage, so wird diese unter Schwingen eingestellt und es zeigt sich der Einfluss der komplex konjugierten Eigenwerte. Sind die Endbedingungen zusätzlich derart vorgegeben, dass ein Beenden der Optimierung außerhalb der Ruhelage erzwungen wird, dann verlässt das Fahrzeug kurz vor Ende des Szenarios die Ruhelage wieder und es werden die vorgegebenen Endzustände eingestellt. In diesem Fall zeigt sich der Einfluss der instabilen Eigenwerte am Ende des Szenarios. Im Graph der Querbeschleunigung unten rechts wird deutlich, dass der Verlauf der Querbeschleunigung in der Nähe der Ruhelage qualitativ dem Verlauf der Krümmung entspricht. Dies liegt daran, dass die Geschwindigkeit in den dargestellten Szenarien nahezu konstant ist. Da die Änderung der Krümmung in der Nähe der Ruhelage vernachlässigbar klein ist, ist auch die Änderung der Querbeschleunigung sehr gering und  $a_{y,RL}$  kann als Abschätzung für die zu erwartende Querbeschleunigung verwendet werden.

Die Kreisfahrt wurde als Sonderfall einer Kurve zunächst ausgehend von einem vereinfachten Modell unter Vernachlässigung der Querdynamik eingeführt und dabei die Modellkomplexität des Szenarios stetig gesteigert, bis letztendlich auch die Beschreibung des vollständigen Modells mit Querdynamik für eine konstante Referenzkrümmung analysiert werden konnte. Dabei konnte gezeigt werden, dass das kanonische Gesamtsystem eine Ruhelage besitzt, die eine Lösung des OP darstellt und gegen die die optimalen Trajektorien immer konvergieren. Damit das System die Ruhelage auch tatsächlich erreicht, muss die Kreisfahrt ausreichend lang sein. Außerdem wurde das linearisierte Verhalten des Systems in der Nähe der Ruhelage untersucht und es konnte festgestellt werden, dass das lineare System sowohl schwingungsfähige als auch instabile Eigenwerte besitzt, deren Einfluss sich jeweils zu Beginn und am Ende der Trajektorien zeigt. Dabei spielt die Wahl der Randbedingungen eine entscheidende Rolle. Zudem konnte festgestellt werden, dass die optimale Querbeschleunigung ausschließlich von der Gewichtung  $f_{a_y}$  abhängt. Des Weiteren wurde die besondere Bedeutung der Querabweichung für die Kreisfahrt herausgearbeitet.

## 5.4 Klohoide mit konstanter Krümmungsänderung

Nachfolgend wird auch die Vereinfachung einer konstanten Referenzkrümmung weggelassen, sodass Kurven in Klohoidenform mit konstanter Krümmungsänderung betrachtet werden können. Dazu wird das vollständige Fahrzeugmodell, so wie es in Kapitel 4.2 hergeleitet wurde, mit dem Gütefunktional (4.11) verwendet. In Abbildung 5.18 ist der Verlauf einer Klohoide ausgehend von der Anfangskrümmung  $\kappa_{ref,0} = 0$  mit dem Klohoidenparameter  $A = 60 \text{ m}$  dargestellt. Diese Parametrierung repräsentiert eine Autobahnausfahrt [66]. Außerdem beträgt die Strecke der Kurve  $s_f = 720 \text{ m}$ , sodass das Fahrzeug den gesamten relevanten Krümmungsbereich von  $0 - 0,2 \frac{1}{\text{m}}$  durchfährt. Bei der Kurvenfahrt mit veränderlicher Referenzkrümmung lässt sich feststellen, dass eine Ruhelage für das um  $s_r$  reduzierte System analog zur Kreisfahrt nicht bestimmt werden kann. Während bei der Kreisfahrt mit konstanter Referenzkrümmung effektiv keiner der Zustände von  $s_r$  abhängt, sodass dieser Zustand einfach aus dem System entfernt werden kann, ist dies bei der streckenabhängigen Referenzkrümmung nicht mehr der Fall. Des Weiteren fällt direkt auf, dass die Referenzkrümmung nun selbst eine zeitliche Abhängigkeit

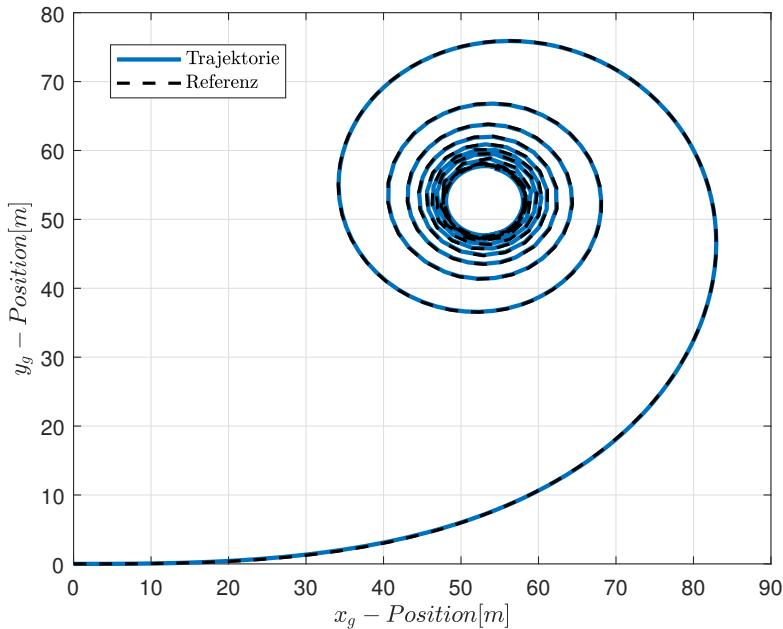


Abbildung 5.18: Trajektorie einer Kurve in Klothoidenform mit streckenabhängiger Referenzkrümmung aus der Vogelperspektive für die Parametrierung  $\kappa_{\text{ref},0} = 0$ ,  $A = 60 \text{ m}$  und  $s_f = 720 \text{ m}$ .

besitzt. Die Dynamik der Referenzkrümmung kann mit

$$\dot{\kappa}_{\text{ref}} = \frac{d\kappa_{\text{ref}}}{dt} = \frac{d\kappa_{\text{ref}}}{ds_r} \frac{ds_r}{dt} = \kappa'_{\text{ref}} \frac{v \cos \psi_r}{1 - d_r(\kappa'_{\text{ref}} s_r + \kappa_{\text{ref},0})} \quad (5.117)$$

angegeben werden. Damit sind die Größen, die vorher in der Ruhelage der Kreisfahrt konstant waren, in diesem Fall zeitlich veränderlich. Allerdings zeigt sich, dass die optimalen Zustands- und Stellgrößentrajektorien der oben dargestellten Klohoide punktweise die Ruhelage der Kreisfahrt annehmen. Mit der Bezeichnung der punktweisen Ruhelage ist gemeint, dass durch den Verlauf der Referenzkrümmung zu jedem Zeit- und Streckenpunkt eine Ruhelage in Abhängigkeit von  $\kappa_{\text{ref}}(s_r)$  bestimmt werden kann. Um dies zu veranschaulichen, sind in den Abbildungen 5.19 und 5.20 die Verläufe der quer- und längsdynamischen Größen beim Durchfahren der oben gezeigten Klohoide dargestellt. Der Graph oben rechts in Abbildung 5.19 zeigt die Trajektorie der optimalen Krümmung. Die punktweise Ruhelage, die ebenfalls dargestellt ist, entspricht dabei der „verbesserten“ Abschätzung gemäß Gleichung (5.114). Der Graph zeigt, dass der Verlauf der optimalen Krümmung genau mit dem Verlauf der punktweisen Ruhelage übereinstimmt. Außerdem wird deutlich, dass die Abschätzung (5.104) für zunehmende Krümmung stärker von der optimalen Trajektorie abweicht als die verbesserte Abschätzung. Oben links ist der Verlauf der Querabweichung  $d_r$  dargestellt und es ist wie bereits bei der Kreisfahrt das schwingungsfähige Verhalten zu Beginn der Kurvenfahrt zu erkennen. Nachdem die Schwingungen abgeklungen sind, nimmt auch die Querabweichung den Verlauf der punktweisen Ruhelage an. Dabei ist jedoch zu erkennen, dass die optimale Trajektorie von  $d_r$  mit zunehmender Krümmung von der punktweisen Ruhelage abweicht. Während die Ruhelage der Kreisfahrt bei einer Krümmung von  $\kappa_{\text{ref}} = 0,2 \frac{1}{\text{m}}$  einen Wert von  $d_{r,\text{RL}} = 0,1333 \text{ m}$  annimmt, liefert die optimale Trajektorie einen Wert von  $d_{r,\text{opt}} = 0,1379 \text{ m}$ , was einen Fehler von 3,3358 % bezogen auf den optimalen Wert ergibt. Daraus folgen zweierlei Erkenntnisse: Zum einen liegt die maximale Querabweichung, die während einer

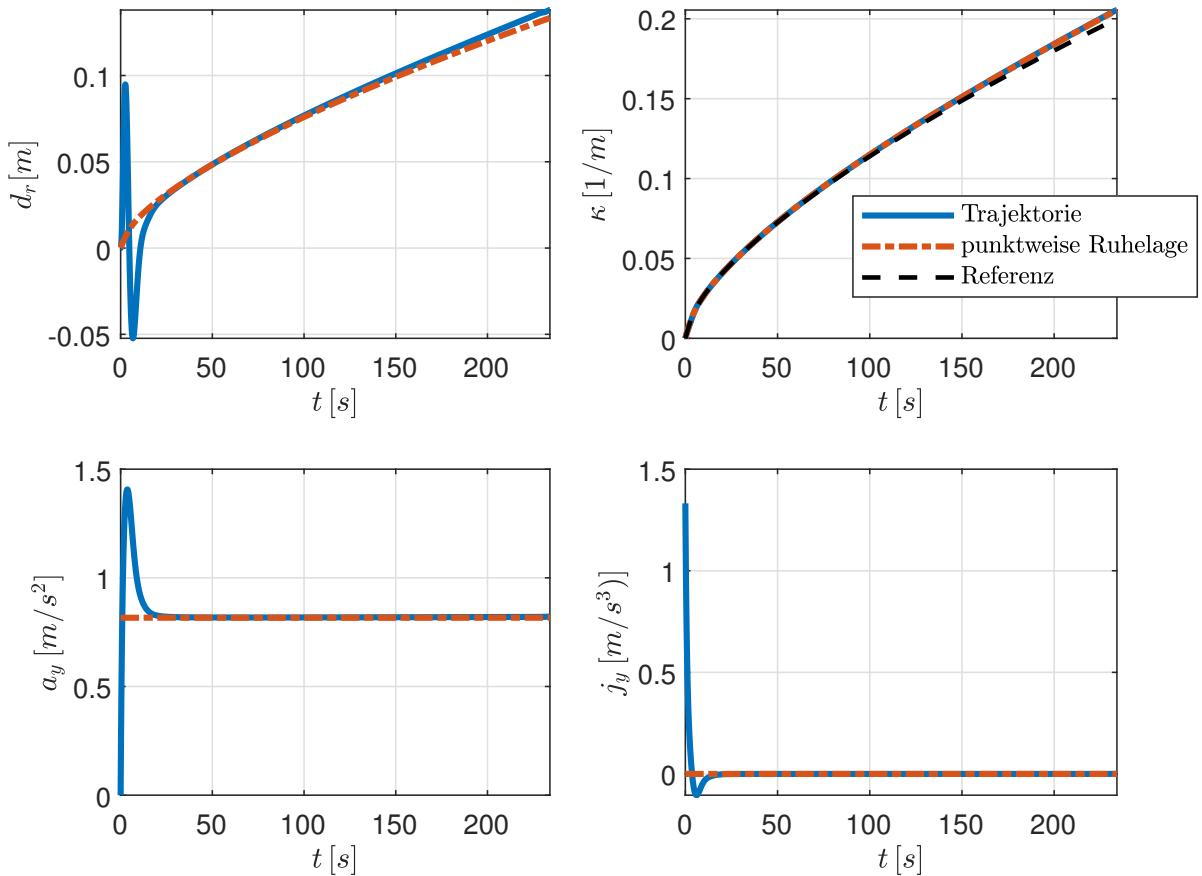


Abbildung 5.19: Querdynamik der Klothoide mit  $\kappa_{\text{ref},0} = 0$ ,  $A = 60 \text{ m}$  und  $s_f = 720 \text{ m}$ .

Kreisfahrt mit der maximalen Krümmung von  $0,2 \frac{1}{\text{m}}$  unter Verwendung der Standardparametrierung der Gewichtungsfaktoren im stationären Zustand erreicht wird, bei unter 14 cm. Dadurch befindet sich das Fahrzeug auch bei den engsten Kurvenradien immer in der Nähe der Referenzkurve. Zum anderen ist der prozentuale Fehler bei der Berechnung von  $d_{r,\text{RL}}$ , der über den gesamten Krümmungsbereich durch die Vereinfachungen bei der Kreisfahrt entsteht (siehe Abschnitt 5.3.2.1) so gering, dass diese Annahmen für alle relevanten Krümmungen zulässig sind. Der Graph unten rechts in Abbildung 5.19 zeigt schließlich, dass der Querruck auch für das Durchfahren einer Klothoide asymptotisch gegen Null konvergiert. Da für den Querruck bei der Lösung des OP aufgrund des Zusammenhangs mit der Stellgröße  $\dot{\kappa}$  kein Anfangswert vorgegeben werden kann, beginnt dessen Trajektorie mit einem Startwert ungleich Null. Dies ist die Ursache dafür, dass die optimale Querbeschleunigung überschwingt, bevor sie auf einem stationären Wert einschwingt. Der stationäre Endwert der Querbeschleunigung folgt weiterhin Gleichung (5.86) und ist daher krümmungsunabhängig, was insofern bemerkenswert ist, als dass sich die optimale Geschwindigkeit und die optimale Krümmung mit dem Verlauf der Strecke verändern. Im Graph der Geschwindigkeit oben rechts in Abbildung 5.20 lässt sich erkennen, dass die Ruhelagengeschwindigkeit für eine Kreisfahrt mit sehr geringer Krümmung gemäß Gleichung (5.85) gegen unendlich geht. Da die Anfangsgeschwindigkeit zu  $v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  gewählt wird, dauert es ca. 10 s, bis die optimale Fahrzeuggeschwindigkeit der punktweisen Ruhelage entspricht. Im weiteren Verlauf

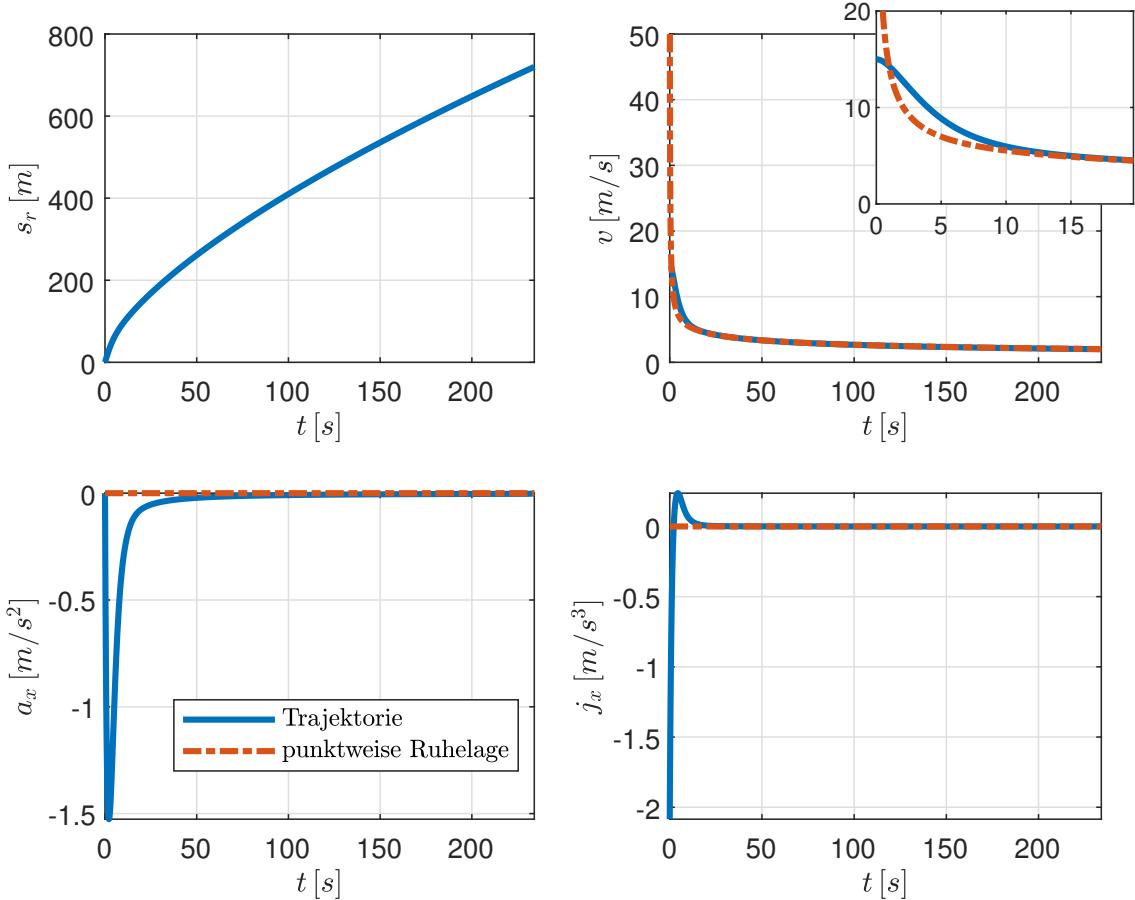


Abbildung 5.20: Längsdynamik der Klohoide mit  $\kappa_{\text{ref},0} = 0$ ,  $A = 60 \text{ m}$  und  $s_f = 720 \text{ m}$ .

der Geschwindigkeitstrajektorie zeigt sich jedoch, dass auch die Geschwindigkeit beim Durchfahren der Klohoide asymptotisch gegen die punktweise Ruhelage geht. Die Längsbeschleunigung und der Längsruck konvergieren wie bereits bei den querdynamischen Größen unter Überschwingen gegen ihren stationären Endwert, wobei dieser für beide Größen bei Null liegt.

#### 5.4.1 Begrenzung des Querrucks

Bei der Geradeausfahrt konnte bereits gezeigt werden, dass sich der Längsruck, für den als Stellgröße kein Anfangszustand vorgegeben werden kann, mithilfe einer Stellgrößenbeschränkung begrenzen lässt, sodass die hohen Ruckwerte am Anfang unterdrückt werden können. Analog dazu soll nachfolgend untersucht werden, inwiefern sich eine ähnliche Begrenzung des Querrucks mithilfe einer Stellgrößenbeschränkung für  $\kappa$  erreichen lässt. Dazu sind in Abbildung 5.21 nochmals die optimalen Trajektorien für die Querdynamik des Fahrzeugs beim Durchfahren der Klohoide für die Fälle unbeschränkte Stellgröße und Beschränkung von  $\kappa$  dargestellt. Der Längsruck ist dabei in beiden Fällen unbeschränkt und die Parametrierung der Referenzkurve sowie die Anfangszustände des Fahrzeugs bleiben gegenüber der

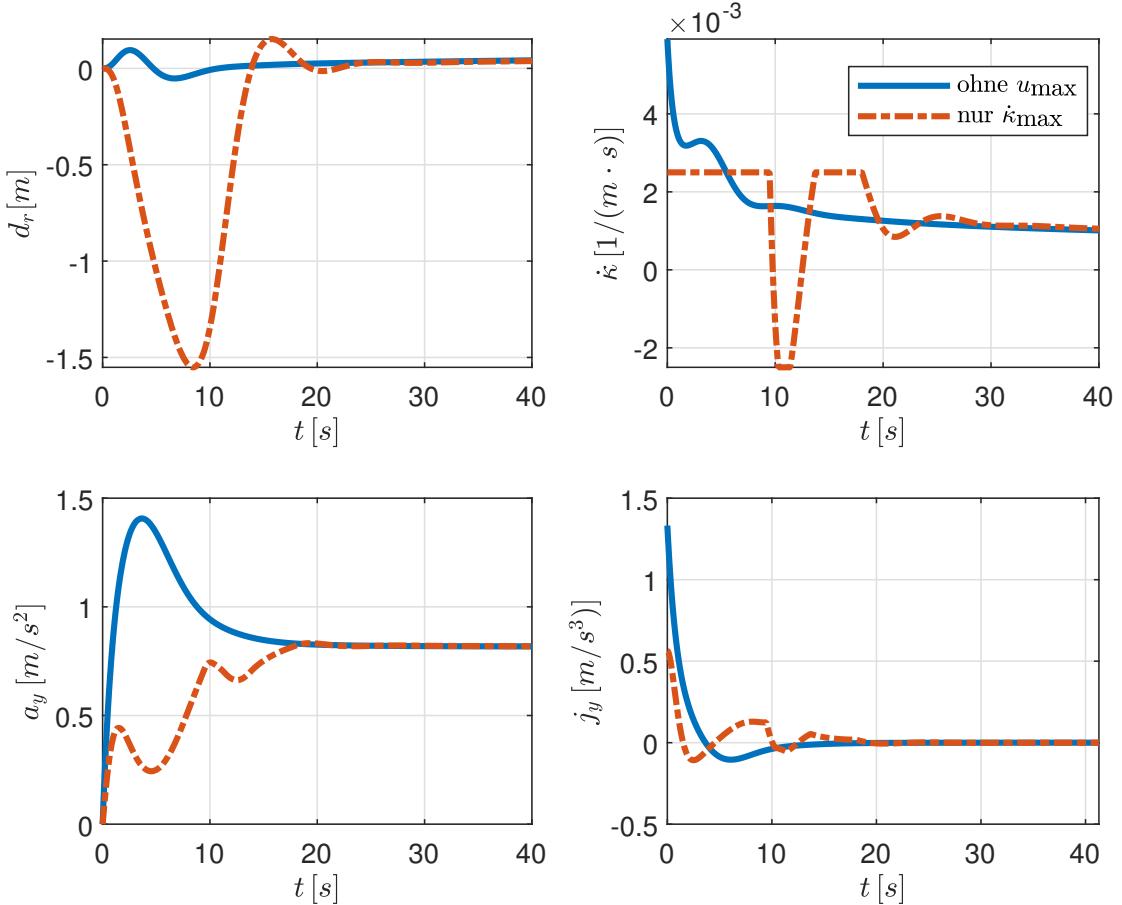


Abbildung 5.21: Querdynamik der Klo thoide unter Verwendung von Stellgrößenbeschränkungen im Vergleich zum unbeschränkten Fall.

zuvor untersuchten Klo thoide unverändert. Die Grenzen der Stellgröße werden zu

$$\dot{\kappa}_{\max} = 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{m \cdot s} \quad \text{mit } \dot{\kappa}_{\max} = -\dot{\kappa}_{\max} \quad (5.118)$$

gewählt. Der Graph oben rechts in Abbildung 5.21 zeigt das Aktivwerden der Stellgrößenbeschränkung, wodurch  $\dot{\kappa}$  um etwa die Hälfte des unbeschränkten Maximalwerts reduziert wird. Dies führt zu einem deutlich geringeren Maximum im Querruck, wie der Graph unten rechts verdeutlicht. Diese Reduktion des Querrucks kann als Steigerung des Fahrkomforts interpretiert werden. Der Verlauf des Querrucks zeigt allerdings auch, dass von einem Anschlag der Stellgröße an einer der beiden Grenzen nicht direkt auf den Querruck geschlossen werden kann, da dieser neben  $\dot{\kappa}$  noch dem Einfluss weiterer Größen unterliegt (siehe Gleichung (4.14)). Daher kann der Querruck durch eine Beschränkung der Stellgröße zwar reduziert, jedoch nicht im eigentlichen Sinne „beschränkt“ werden. Aus Sicht des Fahrkomforts lässt sich noch eine weitere Verbesserung erkennen. Im unbeschränkten Fall besitzt die Krümmungsänderung keinen Vorzeichenwechsel, weshalb auch die Steigung von  $\kappa$  nur ein Vorzeichen besitzt. Dadurch steigt die Krümmung deutlich schneller an als im beschränkten Fall, sodass die Querbeschleunigung im unbeschränkten Fall ein deutliches Überschwingen aufweist. Im beschränkten Fall hingegen führt die Stellgrößenbeschränkung dazu, dass  $\dot{\kappa}$  einen Vorzeichenwechsel besitzt und kurzzeitig die untere

Grenze  $\kappa_{\min}$  erreicht. Dieser Vorzeichenwechsel bewirkt ein „Zurücknehmen“ der Krümmung, weshalb diese nicht so schnell ansteigt wie im unbeschränkten Fall. Dadurch nähert sich die Querbeschleunigung im beschränkten Fall langsam von unten dem stationären Endwert an, ohne dabei überzuschwingen. Auch dieses Verhalten kann als Komfortgewinn eingestuft werden. Durch die Beschränkung der Stellgröße  $\dot{\kappa}$  lässt sich also sowohl eine Reduktion der Querbeschleunigung als auch des -rucks erzielen, was beides zu einer komfortableren Fahrt führt. Der erzielte Komfortgewinn geschieht jedoch auf Kosten der Reisezeit und der Querabweichung. Während die Gesamtzeit, die aus Gründen der besseren Darstellung der Abbildungen in den Graphen nicht dargestellt ist, im unbeschränkten Fall  $t_f = 234,04$  s beträgt, verlängert sich die Zeit bei Berücksichtigung der Stellgrößenbeschränkung zu  $t_f = 239,32$  s. Gemessen an der Gesamtdauer von knapp 4 min, die für das Durchfahren der vollen Klothoide benötigt wird, ist diese Zeiteinbuße jedoch akzeptabel. Bei der Querabweichung hingegen führt die Beschränkung von  $\dot{\kappa}$  zu deutlich größeren Abweichungen, wie oben links zu erkennen ist. Die Beschränkung der Krümmungsänderung kann als Beschränkung der Lenkwinkeländerung des Fahrzeugs interpretiert werden. Durch die aktive Stellgrößenbeschränkung reicht das verfügbare Maximum der Lenkwinkeländerung nicht aus, um der Krümmungsvorgabe der Referenzkurve zu folgen. Dadurch wird die Referenzkurve verfehlt und es entsteht eine größere seitliche Abweichung. Sobald die unbeschränkte Stellgröße die obere Grenze  $\dot{\kappa}_{\max}$  wieder unterschreitet, kann der entstandene Fehler ausgebessert werden, indem die Stellgröße des beschränkten Systems länger auf dem Maximum gehalten wird. Dies wiederum führt dazu, dass die Krümmung durch Integration von  $\dot{\kappa}$  zeitweise den Referenzwert überschreitet, was den zuvor beschriebenen Vorzeichenwechsel in der Krümmungsänderung von  $\dot{\kappa}_{\max}$  zu  $\dot{\kappa}_{\min}$  erklärt. Die zum Teil deutlich größere seitliche Abweichung muss bei der Bewertung, ob eine geplante Trajektorie zulässig ist, berücksichtigt werden, da zu große seitliche Abweichungen von der Referenzkurve zum Verfehlten der Fahrbahn und im schlimmsten Fall zu Kollisionen mit anderen Verkehrsteilnehmern führen können.

## 5.5 Gerade-Kurve-Gerade-Kombination

Als Abschluss der Analyse verschiedener Fahrszenarien sollen Gerade-Kurve-Gerade-Kombinationen untersucht werden. Dieses Szenario lässt sich durch Zusammensetzen mehrerer Teilszenarien beschreiben, wobei dabei vor allem die Übergänge zwischen den einzelnen Teilszenarien im Fokus stehen. Für die Untersuchung werden die unterschiedlichen zuvor eingeführten Möglichkeiten zur Betrachtung einer Kurvenfahrt verwendet und hinsichtlich des Fahrkomforts miteinander verglichen. Dabei handelt es sich um die folgenden alternativen Systembeschreibungen (nachfolgend als „Fälle“ bezeichnet):

1. Kreisfahrt mit konstanter Referenzkrümmung exakt auf der Referenzkurve, Fahrzeugmodell ohne Querdynamik.
2. Kreisfahrt mit konstanter Referenzkrümmung allgemein entlang der Referenzkurve, Fahrzeugmodell mit Querdynamik.
3. Kurvenfahrt mit streckenabhängiger Referenzkrümmung allgemein entlang der Referenzkurve, Fahrzeugmodell mit Querdynamik.

### 5.5.1 Formulierung des Optimierungsproblems

Die Kurve (bzw. der Kreis) in der Mitte des Gesamtszenarios wird derart gewählt, dass eine Drehung um genau  $360^\circ$  erzielt wird. Für die drei Fälle wird die gesamte zu durchfahrende Strecke zu  $s_f = 500$  m gewählt. Die Strecke der Kurve selbst kann durch die Integration der Referenzkrümmung über der Strecke bestimmt werden:

$$ds_{r,\text{Kurve}} = \frac{1}{\kappa_{\text{ref}}(s_r)} d\psi_{\text{ref}}. \quad (5.119)$$

Im 3. Fall mit der klothoidenförmigen Kurve wird vor Beginn der Kurve eine Strecke von  $s_1 = 100$  m zurückgelegt. Dadurch, dass die Krümmung bei der Klothoide zunächst zunimmt und anschließend wieder abnimmt, entsteht eine Schleife, deren Mittelpunkt gegenüber dem Kurvenanfang leicht in Richtung der  $x_g$ -Achse verschoben ist. Damit die Kurvenfahrten des 1. und 2. Falls mit dem 3. Fall vergleichbar sind, die Referenzkurve von Fall 1 und 2 so parametrisiert, dass der Kurvenmittelpunkt der Kreisfahrt auf einer Achse liegt mit dem Kurvenmittelpunkt der Klothoide. Dazu beträgt die Strecke, die vor Beginn der Kurve zurückgelegt wird, im 1. und 2. Fall  $s_1 = 156,2538$  m. Die konstante Referenzkrümmung der Kreisfahrt wird mit  $\kappa_{\text{ref}} = 0,0263 \frac{1}{\text{m}}$  derart gewählt, dass der am weitesten von der Geraden entfernte Punkt der Referenzkurve in allen drei Fällen identisch ist. Abbildung 5.22 zeigt die optimalen Trajektorien der drei Fälle sowie die Referenzkurven der Klothoide und der Kreisfahrt im globalen Koordinatensystem  $\mathcal{F}_g$  aus der Vogelperspektive<sup>4</sup>. Die Abbildung verdeutlicht dabei die für die Parametrierung der Referenzkurve relevanten Zusammenhänge. Da sich das Fahrzeug am Ende

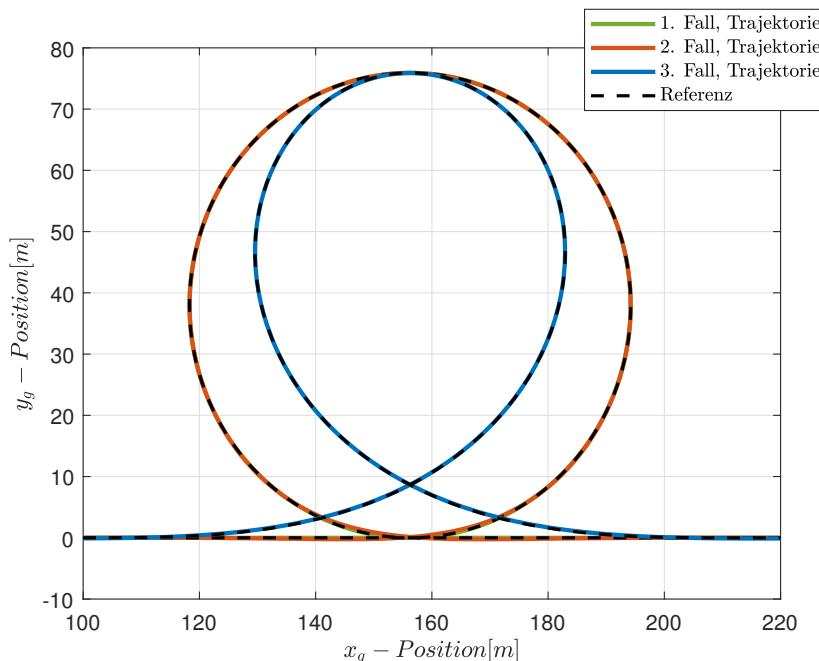


Abbildung 5.22: Trajektorien einer Gerade-Kurve-Gerade-Kombination für die drei unterschiedlichen Möglichkeiten zur Beschreibung des Szenarios aus der Vogelperspektive.

<sup>4</sup>Dadurch, dass die maximale seitliche Abweichung im 2. Fall mit 37,05 cm gegenüber der Achsenkalierung gering ist, ist diese in Abbildung 5.22 kaum erkennbar, sodass es den Anschein erweckt, als würden die Verläufe von Fall 1 und 2 nahezu übereinander liegen.

des Szenarios wieder in einer Geradeausfahrt befinden soll, werden zusätzlich die Endbedingungen  $d(t_f) = \psi_r(t_f) = \kappa(t_f) = 0$  gewählt, während die Endgeschwindigkeit  $v(t_f)$  und -beschleunigung  $\ddot{v}(t_f)$  frei bleiben. Die Übergänge zwischen der Kurve und den Geradenabschnitten lassen sich mithilfe interner GNB und diskontinuierlicher Systemdynamiken (siehe Abschnitte 3.4 und 3.5) beschreiben. Damit lässt sich das Gesamtszenario aus einzelnen Teilszenarien zusammensetzen, wobei die abschnittsweise gültige Systemdynamik hinsichtlich der Referenzkrümmung variiert. Für die Fälle 1 und 2 gilt

$$\underbrace{\text{Gerade}}_{\kappa_{\text{ref}}=0} \rightarrow \underbrace{\text{Kreis}}_{\kappa_{\text{ref}}=\text{konst.}} \rightarrow \underbrace{\text{Gerade}}_{\kappa_{\text{ref}}=0} \quad (5.120)$$

und für den 3. Fall gilt

$$\underbrace{\text{Gerade}}_{\kappa_{\text{ref}}=0} \rightarrow \underbrace{\text{Kurvenanstieg}}_{\kappa_{\text{ref}}=\kappa'_{\text{ref}}(s_r-s_1)} \rightarrow \underbrace{\text{Kurvenabstieg}}_{\kappa_{\text{ref}}=-\kappa'_{\text{ref}}(s_r-2s_2+s_1)} \rightarrow \underbrace{\text{Gerade}}_{\kappa_{\text{ref}}=0} \quad (5.121)$$

Wie man sieht, lässt sich die Gerade-Kurve-Gerade-Kombination der Fälle 1 und 2 durch insgesamt drei Teilszenarien beschreiben, während für den 3. Fall vier Teilszenarien benötigt werden, da die Krümmung der Klohoide nach der Hälfte der Kurve das Vorzeichen wechselt. Das OP des Gesamtszenarios für die drei Systembeschreibungen unter Verwendung der jeweiligen Systemdynamik kann als

$$\min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, t_f) = t_f + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} f_{dr} d_r^2 + \frac{1}{2} f_{j_x} j_x^2 + \frac{1}{2} f_{a_x} a_x^2 + \frac{1}{2} f_{j_y} j_y^2 + \frac{1}{2} f_{a_y} a_y^2 dt \quad (5.122)$$

$$\text{u.B.v. } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.123)$$

$$s_r(t_1) = s_1 \quad (5.124)$$

$$s_r(t_2) = s_2 \quad (5.125)$$

$$(s_r(t_3) = s_3, \text{ gilt nur für 3. Fall}) \quad (5.126)$$

$$s_r(t_f) = s_f \quad (5.127)$$

$$d_r(t_f) = 0 \quad (5.128)$$

$$\psi_r(t_f) = 0 \quad (5.129)$$

$$\kappa(t_f) = 0 \quad (5.130)$$

formuliert werden. Neben Gleichung (3.24), die aufgrund der freien Endzeit gilt, muss für die freien Endzustände Gleichung (3.23) gelten. An den internen Übergangsstellen zwischen den Geradenstücken und der Kurve wird weiterhin die Stetigkeit der Zustände gefordert und es gelten die erste und zweite Weierstraß-Erdmannsche-Eckenbedingung (vgl. Gleichungen (3.58)–(3.60)). Es sei angemerkt, dass die Bestrafungen der seitlichen Abweichung und des Querrucks für den Fall 1 ohne Querdynamik aus dem Gütefunktional wegfallen, da diese Fehler in der Systembeschreibung nicht berücksichtigt werden können. Zudem wird die Querbeschleunigung in diesem Fall, wie bereits in Abschnitt 5.3.1, durch die Referenzkrümmung und die Fahrzeuggeschwindigkeit beschrieben. Für die Gewichtung der Gütekriterien wird die Standardparametrierung verwendet.

## 5.5.2 Optimale Trajektorien

Nachdem die Verläufe der drei Fälle bezüglich der jeweiligen Referenzkurve sowie die Formulierung des Optimierungsproblems erläutert wurden, sollen nachfolgend die optimalen Trajektorien der Längs-

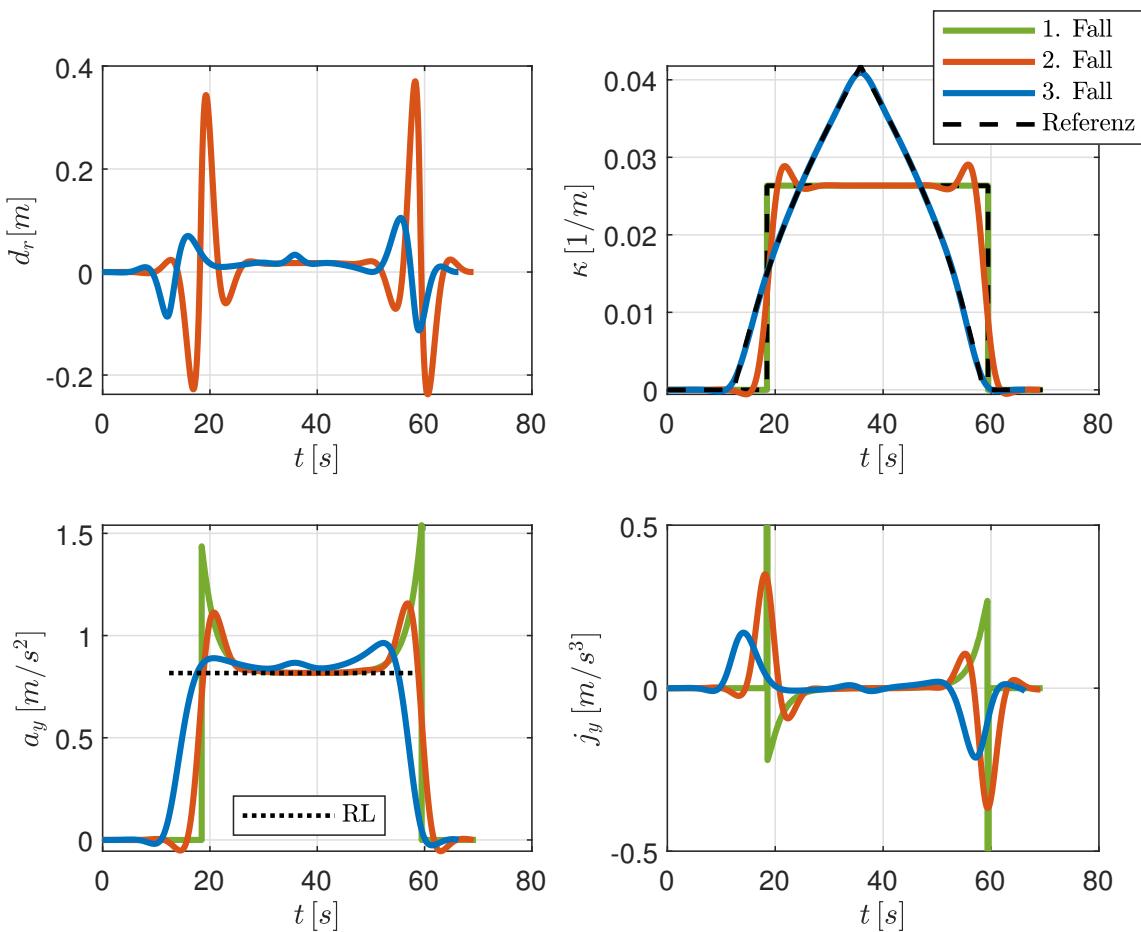


Abbildung 5.23: Trajektorien der Längsdynamik für die drei unterschiedlichen Möglichkeiten zur Beschreibung des Szenarios.

und Querdynamik analysiert werden. In Abbildung 5.23 sind dazu die Trajektorien der Querdynamik dargestellt. Im Graph oben links ist die seitliche Abweichung  $d_r$  von der Referenzkurve dargestellt (für die Fälle 2 und 3, da für den Fall 1 keine Querabweichung im Modell berücksichtigt wird). Es ist deutlich zu erkennen, dass das Fahrzeug im Übergang zwischen einem Geradenstück und der Kurve in beiden Fällen seitlich um die Referenzkurve schwingt, um die komfortrelevanten Gütekriterien in den Übergangspunkten – insbesondere den Querruck – gering zu halten. Dabei zeigt sich außerdem, dass die seitliche Abweichung unter Verwendung der Klothoide ein insgesamt niedrigeres Niveau hat als bei der kreisförmigen Kurve, was auf die stetige Zu- bzw. Abnahme der Krümmung zurückzuführen ist. Der Graph oben rechts zeigt die optimalen Krümmungstrajektorien im Vergleich zur Referenzkrümmung. Dabei wird der Unterschied zwischen den Fällen 1/2 und 3 hinsichtlich der Referenzkrümmung deutlich – in den Fällen 1 und 2 weist die Referenzkrümmung eine sprunghafte Änderung auf, während sie im 3. Fall linear an- und absteigt<sup>5</sup>. Außerdem ist zu erkennen, dass die Krümmungsänderung der Referenzkurve von Fall 3 bereits früher beginnt als in den Fällen 1 und 2 (nach 18,46 s bei Fall 1, nach 18,34 s bei Fall 2 und nach 12,28 s bei Fall 3). Da in der Systemdynamik des 1. Falls keine Querdynamik berücksichtigt

<sup>5</sup>Das lineare Verhalten der Krümmung im 3. Fall gilt bezüglich der zurückgelegten Strecke, allerdings ist im Graphen in Abbildung 5.23 der Zeitverlauf der Krümmung dargestellt, weshalb der lineare Zusammenhang nicht exakt zu erkennen ist.

ist, ist die „optimale“ Krümmung in diesem Fall identisch zur Referenzkrümmung. Dadurch ändert sich auch der Verlauf der Querbeschleunigung im Übergangspunkt sprunghaft, wie im Graphen unten links zu erkennen ist. Der dabei erreichte Maximalwert übersteigt den Wert in der Ruhelage  $a_{y,RL}$  deutlich. Die optimale Krümmungstrajektorie in Fall 2 ist der von Fall 1 ähnlich, allerdings wird die sprunghafte Änderung im Übergangspunkt dadurch kompensiert, dass die optimale Krümmung bereits deutlich vor bzw. nach der Änderung der Referenzkrümmung angepasst wird. Dies kann so interpretiert werden, dass das Fahrzeug bereits vor dem eigentlichen Kurveneintritt einlenkt, um die Querbeschleunigung und den -ruck zu minimieren. Dadurch ist die seitliche Abweichung von der Referenzkurve vergleichsweise groß. Im mittleren Bereich wird auch im 2. Fall der Wert der Referenzkurve in der Krümmung erreicht. Durch das beschriebene Lenkverhalten ist die maximale Querbeschleunigung in Fall 2 geringer als in Fall 1. Abgesehen vom veränderten Verlauf der Referenzkrümmung zeigen die Graphen oben links und oben rechts in Abbildung 5.23 noch einen weiteren Unterschied zwischen den Fällen 2 und 3. Die seitliche Abweichung bei Verwendung der Klothoide und auch die Abweichung zwischen der optimalen Krümmung und der Referenzkrümmung ist deutlich geringer als in Fall 2. Dies lässt sich damit begründen, dass die Ruckoptimalität, die in Fall 2 auf Kosten der Querabweichung erreicht wird, in der Klothoide bereits in der Referenzkurve berücksichtigt ist. Dadurch kann die optimale Trajektorie deutlich näher an der Referenzkurve selbst gefahren werden. Wie bereits in den vorherigen Abschnitten erläutert wurde, hängt die optimale Querbeschleunigung der (punktweisen) Ruhelage einer Kreis- bzw. Klothoidenfahrt ausschließlich von der Gewichtung der Querbeschleunigung ab. Dadurch ist auch in diesem Szenario gut zu erkennen, dass die Querbeschleunigung in allen drei betrachteten Fällen in der Mitte der Kurvenfahrt gegen  $a_{y,RL}$  verläuft. Der „Hügel“, der in Fall 3 auftaucht, ist darauf zurückzuführen, dass sich das Fahrzeug aufgrund der Vorzeichenumkehr der Krümmungsrampe in der Kurvenmitte kurzzeitig wieder von der punktweisen Ruhelage entfernt. Im Graphen unten rechts in Abbildung 5.23 sind schließlich die Verläufe des Querrucks gezeigt, wobei der Querruck im 1. Fall durch numerische Differentiation der Querbeschleunigung und in den Fällen 2 und 3 gemäß Gleichung (4.14) bestimmt wird. Die Ableitung des Sprungs in der Querbeschleunigung führt dabei theoretisch zu unendlich hohen Ruckwerten im 1. Fall. Vergleicht man Fall 2 und Fall 3 miteinander, so ist der Vorteil der Klothoide gegenüber der kreisförmigen Kurvenfahrt hinsichtlich des Querrucks deutlich zu erkennen, da dieser aufgrund der Beschaffenheit der Referenzkurve deutlich stärker reduziert werden kann als bei der sprunghaften Änderung der Referenzkrümmung. In allen Fällen wird beim Kurvenaustritt der in Abschnitt 5.3.2.2 beschriebene Einfluss der instabilen Eigenmoden sichtbar, der dazu verwendet wird, das Fahrzeug aus der Ruhelage zurück in die Geradeausfahrt zu bringen. Beim Blick auf die Größen der Längsdynamik, welche in Abbildung 5.24 gezeigt sind, fällt ein weiterer Vorteil der Kurve unter Verwendung einer Klothoide auf. Das Fahrzeug ist im 3. Fall um 2,82 s schneller als im 2. Fall und um 3,27 s schneller als im 1. Fall, obwohl die Gesamtstrecke in allen Szenarien identisch ist und obwohl die reine Kurvenstrecke, also die Strecke von Kurveneintritt bis Kurvenaustritt, bei der Klothoide länger ist als bei der Kreisfahrt. Für die Fälle 1 und 2 gilt gemäß Gleichung (5.119) unter Verwendung der konstanten Referenzkrümmung  $\kappa_{ref} = 0,0263 \frac{1}{m}$ , dass die Kurvenstrecke

$$s_{\text{Kurve}} = s_2 - s_1 = \frac{2\pi}{\kappa_{ref}} = 238,5022 \text{ m} \quad (5.131)$$

beträgt. Für die Klothoide hingegen lässt sich die Kurvenstrecke durch zwei Halbkreise beschreiben und beträgt daher mit  $A = 60$  gemäß Gleichung (5.119)

$$s_{\text{Kurve}} = 2(s_2 - s_1) = 2\sqrt{\frac{2\pi}{\kappa'_{ref}}} = 2\sqrt{2\pi A^2} = 300,7954 \text{ m}. \quad (5.132)$$

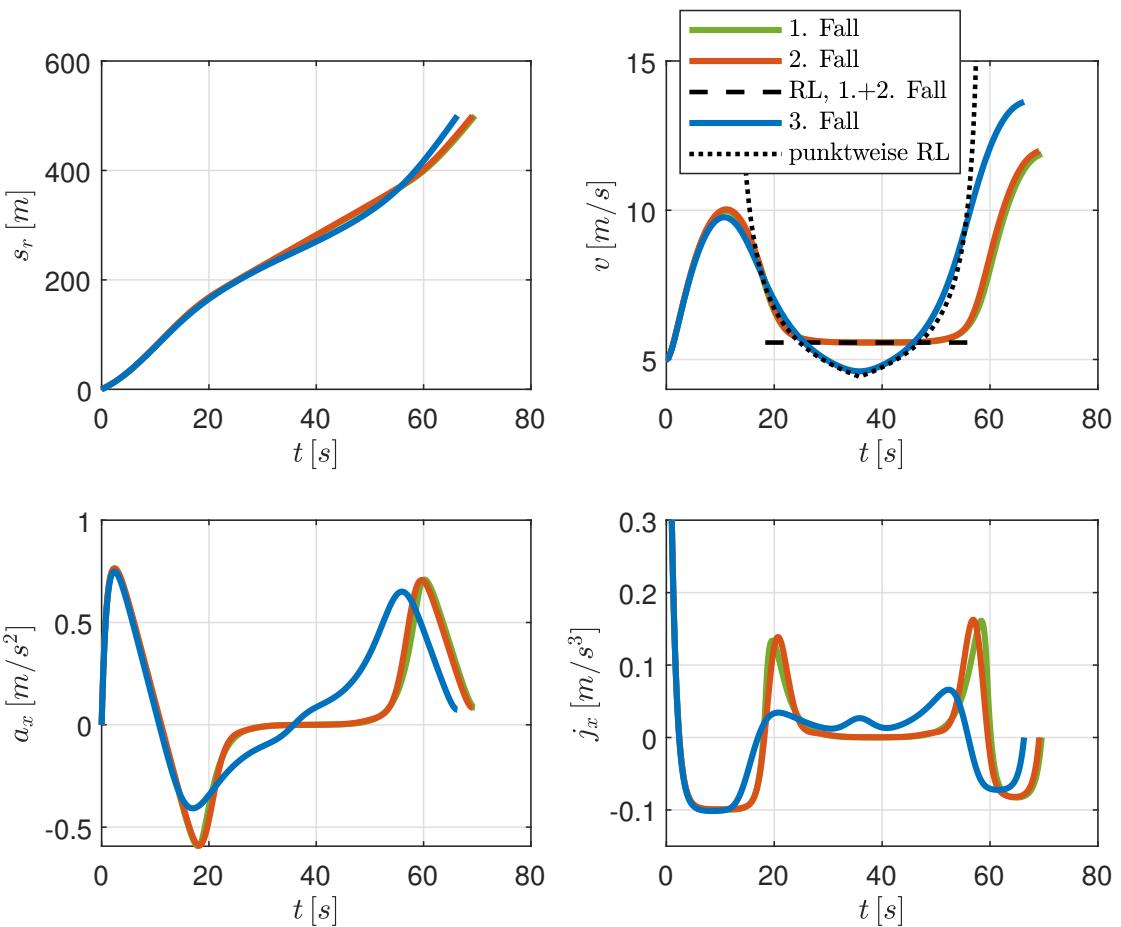


Abbildung 5.24: Trajektorien der Längsdynamik für die drei unterschiedlichen Möglichkeiten zur Beschreibung des Szenarios.

Der beschriebene Zeitgewinn wird im Graphen oben links in Abbildung 5.24 erkennbar und kann damit begründet werden, dass das Fahrzeug beim Durchfahren der Klothoide gegen Ende der Kurve bereits eine deutlich höhere Geschwindigkeit erreicht, wie im Graphen oben rechts gezeigt ist. Der Verlauf der Geschwindigkeitstrajektorie von Fall 3 verdeutlicht dabei, dass die optimale Trajektorie in der Kurvendurchfahrt auch in diesem Szenario gegen die punktweise Ruhelage konvergiert. Die Geschwindigkeit der punktweisen Ruhelage der Klothoide ist jedoch krümmungsabhängig, wie in Abschnitt 5.4 gezeigt wurde, weshalb diese am Kurvenausgang aufgrund der abnehmenden Referenzkrümmung steigt. Es ist zwar auch zu erkennen, dass die optimale Kurvengeschwindigkeit auch in den Fällen 1 und 2 in der Kurve gegen die Ruhelage der Kreisfahrt konvergiert, allerdings ist diese aufgrund der konstanten Referenzkrümmung ebenfalls konstant und daher in jedem Punkt der Kurve identisch. Daher verbleibt die optimale Geschwindigkeit in den Fällen 1 und 2 für längere Zeit auf dem niedrigeren Geschwindigkeitsniveau. Die unteren beiden Graphen in Abbildung 5.24 zeigen, dass das längsdynamische Verhalten in allen drei Fällen bis zum Kurveneintritt identisch ist und die Trajektorien der Längsbeschleunigung und des -rucks qualitativ die aus Abschnitt 5.1 bekannten Verläufe annehmen. Dabei lässt sich feststellen, dass auch die komfortrelevanten Größen in Längsrichtung positiv durch die Klothoide beeinflusst werden. Während die Geschwindigkeit in der Kreisfahrt gegen einen konstanten

Wert konvergiert, der lange beibehalten wird und erst am Kurvenausgang unter vergleichsweise starker Änderung der Geschwindigkeit und der Beschleunigung wieder in der Geradeausfahrt mündet, sind die Änderungen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung während der gesamten Klothoide zwar stetig, dafür aber vergleichsweise gering. Der Graph unten links zeigt dabei, dass die Beschleunigung innerhalb der Kurve in den Fällen 1 und 2 beinahe Null beträgt. Das Abbremsen und Beschleunigen am Kurveneingang und -ausgang in den Fällen 1 und 2 ist nur unter Verwendung großer Ruckwerte in den Übergangspunkten möglich, wie der Graph unten rechts zeigt. Im Gegensatz dazu unterliegt die Kurvengeschwindigkeit in Fall 3 einer dauerhaften Änderung, was eine stetige Beschleunigung zur Folge hat. Dies wiederum bewirkt in der Kurve einen dauerhaften Längsruck ungleich Null, der jedoch auch an den Übergangspunkten deutlich geringere Werte aufweist und damit einen beträchtlichen Komfortgewinn bewirkt.

Abschließend lässt sich festhalten, dass sich die Ergebnisse der zum Teil stark vereinfachten Szenarien auch in der Zusammensetzung von Teilszenarien zu komplexeren Szenarien wie der Gerade-Kurve-Gerade-Kombination wiederfinden und daher zur Abschätzung der einzelnen Teilszenarien herangezogen werden können. Zudem konnte gezeigt werden, dass die Beschreibung einer Kurvenfahrt mithilfe einer Klothoide zwar komplizierter ist, aus Sicht des Fahrkomforts jedoch deutlich angenehmere Trajektorien liefert als eine reine Kreisfahrt und dass auch hier die Erkenntnisse aus der Analyse der Kreisfahrt weiter verwendet werden können.

# 6 Fazit und Ausblick

---

Als Abschluss dieser Arbeit sollen die Ergebnisse und Erkenntnisse nochmals zusammengefasst werden. Anhand dessen soll ein Fazit zu den verwendeten Methoden und Modellbeschreibungen sowie den Komfortkriterien gezogen werden. Zudem sollen weitere relevante Aspekte, die nicht Gegenstand dieser Arbeit waren, als Ausblick für mögliche zukünftige Forschung aufgezeigt werden.

## 6.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

---

Das Ziel dieser Arbeit bestand darin, das AD-Planungsproblem mithilfe der Variationsrechnung und indirekter Lösungsverfahren für einige selbst gewählte Fahrszenarien zu lösen. Der Lösungsraum sollte dabei analysiert und hinsichtlich des Fahrkomforts interpretiert werden. Zunächst wurde dazu in Kapitel 2 der Begriff Fahrkomfort näher betrachtet und in den Kontext des AD eingeordnet. Dabei konnte die besondere Relevanz des Fahrkomforts für die zunehmende Automatisierung von Fahrzeugen und FAS hervorgehoben werden. Im Zuge dieser Einordnung wurde außerdem das Phänomen der Kinetose erläutert, wobei festgestellt werden konnte, dass die Vermeidung dieser bei der Weiterentwicklung automatisierter Fahrzeuge im Besonderen beachtet werden muss, weil das Auftreten von Kinetose die Nutzer\_innenakzeptanz beeinträchtigt. Mithilfe einer umfangreichen Literaturrecherche konnten die Größen Längs- und Querbeschleunigung sowie Längs- und Querruck als maßgebliche und für den Fahrkomfort repräsentative Komfortkriterien herausgearbeitet werden. Gleichzeitig wurde aber auch die Schwierigkeit dargelegt, objektive und allgemeingültige Grenzwerte für die Komfortkriterien anzugeben, da der erlebte Fahrkomfort zum einen situationsabhängig ist und zum anderen stark dem individuellen und subjektiven Empfinden jeder Person unterliegt. Aus diesem Grund sind die Werte, die im Anhang A in den Tabellen A.1 und A.2 zusammengetragen wurden, auch eher als Richtwerte denn als harte Komfortgrenzen zu verstehen. Als weiteres Komfortkriterium wurde die Reisezeit ermittelt, da eine geringe Reisezeit oftmals höhere Beschleunigungs- und Ruckwerte rechtfertigt. In Kapitel 3 wurden mithilfe der Variationsrechnung notwendige Optimalitätsbedingungen zur Lösung eines dynamischen OP hergeleitet. Die Diskussion verschiedener indirekter Lösungsverfahren ergab, dass die indirekten Kollokationsverfahren für die Lösung des AD-Planungsproblems besonders geeignet sind, weil diese robuste Lösungen hoher Genauigkeit liefern und für eine große Klasse von Randwertproblemen einsetzbar sind. In Kapitel 4 wurde ein kinematisches Einspurmodell zur Formulierung der Fahrzeugbewegung in Frenet-Koordinaten entlang einer gegebenen Referenzkurve hergeleitet, da diese Herangehensweise zur Fahrzeugmodellierung einen bewährten Ansatz in der Trajektorienplanung für automatisierte Fahrzeuge darstellt. Dieses Fahrzeugmodell wurde in Kapitel 5 zur Lösung dynamischer OP für verschiedene Fahrszenarien unter Berücksichtigung der in Kapitel 2 erarbeiteten Komfortkriterien verwendet. Unter Vernachlässigung der Querdynamik konnte so der Lösungsraum einer reinen Geradeausfahrt für zwei unterschiedliche Gütekriterien bestimmt werden. Bei der reinen Bestrafung der Stellgröße besteht der Lösungsraum der kinematischen Größen aus Polynomen. Im Fall, dass zusätzlich zum Längsruck

auch die -beschleunigung bestraft wird, besteht die Lösung neben einem polynomialem Anteil aus einem stabilen und einem instabilen Exponentialanteil. Mithilfe dieser Lösung konnte nachgewiesen werden, dass die Längsbeschleunigung bei der Geradeausfahrt durch den linearen Anteil der Lösung beschränkt ist und so in Abhängigkeit von den Randwerten und Gewichtungsfaktoren eine obere und untere Grenze der zu erwartenden Beschleunigung angegeben werden kann. Des Weiteren wurde die Geradeausfahrt auf das Szenario Heranfahren an eine Ampel bei bekannter Rotphase erweitert. Dabei wurden zwei Planungsstrategien, die einmal der menschlichen, nicht vorausschauenden Planung und einmal der maschinellen, vorausschauenden Planung entsprechen, miteinander verglichen. Es wurde festgestellt, dass die vorausschauende Planung zwar sowohl komfortablere als auch schnellere Trajektorien liefert, jedoch nicht in allen Verkehrssituationen praktikabel ist, da ein frühzeitiges Abbremsen den nachfolgenden Verkehr ausbremsen würde und das Fahrzeug bei Stau vor der Ampel keine freie Fahrt zum uneingeschränkten Beschleunigen hat. Anschließend wurden unter Hinzunahme der Querdynamik Spurwechsel untersucht. Dabei konnte festgestellt werden, dass sich der Fahrkomfort über die Gewichtung der Querabweichung zur Referenzkurve beeinflussen lässt. Eine stärkere Bestrafung der seitlichen Abweichung führt zu einem „strenger“ Folgen der Referenzkurve, woraus unkomfortablere Trajektorien für die Querbeschleunigung und den Querruck resultieren. Eine geringere Gewichtung hingegen führt zu weicherem und damit komfortableren Trajektorien. Außerdem konnte gezeigt werden, dass sich die Quer- und Längsdynamik bei Trajektorien geringer Querdynamik getrennt voneinander betrachten lassen. Das Szenario Kurvenfahrt wurde zunächst durch eine reine Kreisfahrt mit konstanter Referenzkrümmung approximiert. Die Untersuchung des um  $s_r$  reduzierten Fahrzeugsystems ergab, dass bei der Kreisfahrt eine Ruhelage existiert, die eine Lösung des dynamischen OP darstellt. Außerdem konnte eine gewöhnliche, nichtlineare DGL zweiter (bzw. vierter) Ordnung zur Bestimmung der optimalen Geschwindigkeitstrajektorie hergeleitet werden. Anschließend wurde die Formulierung der Kurvenfahrt auf eine klothoidenförmige Kurve mit veränderlicher Krümmung erweitert. Obwohl bei dieser Formulierung der Referenzkurve keine echte Ruhelage existiert, konnte trotzdem gezeigt werden, dass die optimalen Trajektorien punktweise gegen die krümmungsabhängige Ruhelage der Kreisfahrt konvergieren, sodass die Ruhelage der Kreisfahrt als Näherungslösung für lange Klothoiden verwendet werden kann. Außerdem wurde festgestellt, dass die Anwendung des Maximumprinzips auf die Stellgröße der Querrichtung  $\kappa$  zwar keine echte Beschränkung für den Querruck im Sinne harter Grenzwerte darstellt, jedoch durchaus eine Reduktion von  $j_y$  durch die Beschränkung von  $\kappa$  möglich ist. Schließlich wurden die Szenarien der Geradeaus- und Kurvenfahrt zu einer Gerade-Kurve-Gerade-Kombination verknüpft und es konnte gezeigt werden, dass sich die Ergebnisse der einzelnen Teilszenarien auch in diesem Gesamtszenario wiederfinden. Während die Lösungen im mittleren Kurvenabschnitt gegen die (punktweise) Ruhelage der Kurve konvergieren, entsprechen sie in den Geradenabschnitten den zuvor ermittelten Lösungen der Geradeausfahrt. Außerdem wurden die Vorteile der Beschreibung einer Kurve als Klothoide speziell an den Übergangspunkten zwischen Geraden- und Kurvenstücken gegenüber der Beschreibung als Kreis hinsichtlich des Fahrkomforts dargelegt. Die stetige Krümmungsänderung impliziert bereits ruckoptimale Trajektorien, sodass der Fahrkomfort speziell an den Übergängen zwischen Geraden- und Kurvenstücken durch die Anwendung klothoidenförmiger Referenzkurven deutlich gesteigert werden kann.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die Variationsrechnung eine geeignete Herangehensweise zur Lösung dynamischer OP dargestellt und auch komplexe Fahrzenarien, die sich aus mehreren Teilszenarien zusammensetzen, mithilfe der verwendeten Methoden gelöst werden können. Dabei kann der große Vorteil der Variationsrechnung, tiefe Einblicke in die Struktur der optimalen Trajektorien zu erhalten, in hohem Maße ausgenutzt werden.

## 6.2 Ausblick auf zukünftige Forschungsarbeit

Die zukünftige Forschungsarbeit zu diesem Thema lässt sich unterteilen in weitere Forschung auf der Softwareebene, so wie sie in dieser Arbeit durchgeführt wurde, und die praktische Anwendbarkeit der Erkenntnisse, die aus dieser Arbeit abgeleitet werden können. Die Ergebnisse dieser Arbeit resultieren aus speziellen, selbst gewählten Fahrszenarien. Die Anwendung der Optimalitätsbedingungen auf das jeweilige Szenario und die Herleitung des entsprechenden Randwertproblems wurden dabei für jedes Szenario händisch durchgeführt. Daher wäre eine Automatisierung der Lösung für generische Fahrszenarien und Einbettung in einen (echtzeitfähigen) Algorithmus ein denkbarer Ansatz für die softwareseitige Weiterentwicklung. In dieser Arbeit wurde zum Teil der Einfluss unterschiedlicher Gewichtungsfaktoren auf den Fahrkomfort untersucht. Allerdings wurden die Gewichtungsfaktoren für jede Lösung vor Beginn einer Optimierung festgelegt und im weiteren Verlauf nicht mehr verändert. Analog zur Berücksichtigung unterschiedlicher Referenzkrümmungen mithilfe von diskontinuierlichen Systemdynamiken wäre eine Variation der Gewichtungsfaktoren denkbar. Dadurch könnte eine veränderliche Gewichtung einzelner Komfortkriterien untersucht werden. Ein ähnlicher Ansatz wurde bereits in Abschnitt 5.2 zur Einbettung einer Sicherheitsbewertung bei Spurwechseln vorgeschlagen. In Kapitel 2 wurde unter anderem die Bedeutung von Kinetose hervorgehoben. Die Hinzunahme eines mathematischen Modells zur Modellierung von Kinetose, wie es in [71] vorgestellt wird, bietet die Möglichkeit zur zusätzlichen Berücksichtigung der Motion Sickness Incidence (MSI) (vgl. [29]).

Die Bewertung des Fahrkomforts basiert in dieser Arbeit ausschließlich auf den in Kapitel 2 mithilfe einschlägiger Literatur erarbeiteten Grenz- und Richtwerten. Eine Bewertung der Eignung der Komfortkriterien und der verwendeten Gütfunktionale ist daher nur eingeschränkt möglich. Aus diesem Grund stellen die Anwendung der in dieser Arbeit (oder zumindest nach der selben Vorgehensweise) geplanten Trajektorien in realen Fahrszenarien und eine anschließende Bewertung des erlebten Fahrkomforts durch Proband\_innen eine interessante Möglichkeit zur Bewertung des tatsächlich erlebten Fahrkomforts dar. Ebenso ist ein Vergleich der in dieser Arbeit geplanten Trajektorien mit menschlichen Fahrtrajektorien denkbar. Dabei könnte untersucht werden, ob die Verläufe insbesondere qualitativ deckungsgleich sind. Beispielsweise könnte überprüft werden, ob auch ein menschlicher Fahrer oder eine menschliche Fahrerin bei einer Kreisfahrt eine Trajektorie wählen würde, die gegen die Ruhelage konvergiert. In dieser Arbeit konnten mithilfe der Variationsrechnung und Lösung dynamischer OP mittels indirekter Verfahren tiefgehende Erkenntnisse und ein analytisches Verständnis für die Struktur komfortoptimaler Trajektorien auch für komplexe Fahrszenarien gewonnen werden. Aufgrund der gesellschaftlichen Relevanz, die das AD besitzt, sollten die Ergebnisse dieser Arbeit in weiterer Forschung vertieft werden.



# A Grenz- und Richtwerte für den Fahrkomfort

---

Tabelle A.1: Zusammenfassung der Grenz- und Richtwerte für die Längsdynamik

Größe	Beschreibung	Wert	Quelle
Längsbeschleunigung	Maximalwert für FSRA für $v > 20 \text{ km/h}$	$2 \text{ m/s}^2$	[33]
	Maximalwert für FSRA für $v < 5 \text{ km/h}$	$4 \text{ m/s}^2$	[33]
	Schwellwert zur Unterscheidung zwischen komfortabler und unkomfortabler Fahrt	$2 \text{ m/s}^2$	[36]
	Mittlere Beschleunigung eines undynamischen Fahrstils auf Landstraßen	$1 \text{ m/s}^2$	[37]
	Höchstwert des 90. Perzentils von Anfahrbeschleunigungen bei Geradeausfahrt	$2,56 \text{ m/s}^2$	[38]
	Höchstwert des 90. Perzentils von Anfahrbeschleunigungen beim Rechtsabbiegen	$2,2 \text{ m/s}^2$	[38]
	Wert des 90. Perzentils von Beschleunigungen bei Alltagsfahrten	$2,6 \text{ m/s}^2$	[39]
	Maximalwert der Beschleunigung bei hohem Komfortniveau	$2 \text{ m/s}^2$	[40]
Längsverzögerung	Maximalwert für FSRA für $v > 20 \text{ km/h}$	$-3,5 \text{ m/s}^2$	[33]
	Maximalwert für FSRA für $v < 5 \text{ km/h}$	$-5 \text{ m/s}^2$	[33]
	Wert des 90. Perzentils von Verzögerungen bei Alltagsfahrten	$-3,3 \text{ m/s}^2$	[39]
	Maximalwert der Verzögerung bei hohem Komfortniveau	$-2,5 \text{ m/s}^2$	[40]
Längsruck	Maximalwert für FSRA für $v > 20 \text{ km/h}$	$\pm 2,5 \text{ m/s}^3$	[33]
	Maximalwert für FSRA für $v < 5 \text{ km/h}$	$\pm 5 \text{ m/s}^3$	[33]
	Typischer Grenzwert zur Wahrung von Passagierkomfort	$\pm 2 \text{ m/s}^3$	[41]

Tabelle A.2: Zusammenfassung der Grenz- und Richtwerte für die Querdynamik

Größe	Beschreibung	Wert	Quelle
Querbeschleunigung	Maximalwert für LKS für $60 \text{ km/h} < v < 180 \text{ km/h}$	$2 \text{ m/s}^2$	[44]
	Mittlere Beschleunigung eines undynamischen Fahrstils auf Landstraßen	$2,5 \text{ m/s}^2$	[37]
	Maximalwert der Beschleunigung bei hohem Komfortniveau	$1,8 \text{ m/s}^2$	[40]
	Maximalwert der Beschleunigung eines defensiven Fahrstils	$2,9 \text{ m/s}^2$	[40]
	Höchstwert typischer Beschleunigungen von Normalfahrer_innen in der Stadt	ca. $3,2 \text{ m/s}^2$	[46]
	Höchstwert typischer Beschleunigungen von Normalfahrer_innen auf Landstraßen	ca. $4,1 \text{ m/s}^2$	[46]
	Höchstwert typischer Beschleunigungen von Normalfahrer_innen auf Autobahnen	ca. $2 \text{ m/s}^2$	[46]
	Selbstgewählte Beschleunigungen bei Fahrstreifenwechseln	$0,74 \text{ bis } 1,01 \text{ m/s}^2$	[22]
Querruck	Selbstgewählte Beschleunigungen bei Fahrstreifenwechseln mit geringer Querdynamik	$1,1 \text{ m/s}^2$	[51]
	Selbstgewählter Ruck bei Fahrstreifenwechseln mit geringer Querdynamik	$\pm 1,8 \text{ m/s}^3$	[51]

## B bvp4c-Solver

Die Eigenschaft, dass sich Kollokationsverfahren mit stückweise definierten Polynomen durch RKV ausdrücken lassen, machten sich Kierzenka und Shampine bei der Entwicklung des bvp4c-Solvers zu Nutze [72]. Auf den  $N$  Subintervallen wird die Lösung des ZPR unter Verwendung der Lobatto-Kollokation (siehe 3.6.1.4) durch kubische Polynome approximiert, die neben den Randbedingungen (3.21)–(3.24) noch die Kollokationsbedingungen (3.67) an den Kollokationsstellen und die Stetigkeitsbedingungen (3.68) an den Intervallgrenzen erfüllen [72]. Mit (3.67) und (3.68) erhält man so auf dem Gesamtintervall glatte Funktionen, die die Eigenschaft  $S(t) \in C^1[t_0, t_f]$  besitzen [72]. Die Verwendung der Lobatto-Kollokation mit  $k = 3$  führt dabei auf ein 3-stufiges RKV, welches mit der Schrittweite  $h = t_{i+1} - t_i$  und

$$k_1 = f(t_i, x_i) \quad (\text{B.1})$$

$$k_2 = f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, x_i + \frac{h}{24}(5k_1 + 8k_2 - k_3)\right) \quad (\text{B.2})$$

$$k_3 = f(t_{i+1}, x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)) = f(t_{i+1}, x_{i+1}) \quad (\text{B.3})$$

auf das als *Simpsonregel* bekannte implizite RKV

$$x_{i+1} - x_i = \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad (\text{B.4})$$

führt [55], dessen Fehlerordnung mit  $\mathcal{O}(h^4)$  angegeben werden kann [72]. Mithilfe dieser Formulierung lässt sich eine hohe Lösungsgenauigkeit erzielen. Eine residuengesteuerte Gitteranpassung, die den Fehler der Schätzung auf jedem Subintervall auswertet, trägt dazu bei, dass auch bei schlechter Gitterwahl akkurate Lösungen gefunden werden können [72]. Zusätzlich lassen sich unbekannte Parameter (z.B. ein freier Endzeitpunkt) und allgemeine Randbedingungen berücksichtigen, wodurch die Funktion flexibel für verschiedene Problemstellungen angewendet werden kann. Darüber hinaus können auch interne GNB berücksichtigt und so neben ZPR auch allgemeine MPR gelöst werden. Damit stellt dieser Solver eine effiziente und genaue Lösungsmethode für eine breite Klasse von Randwertproblemen dar. Eine weitere nützliche Eigenschaft des Solvers ist die Option, das Ergebnis eines Optimierungsdurchlaufs als Initialisierung für einen erneuten Durchlauf zu verwenden. Diese als *Continuation* bezeichnete Vorgehensweise bietet die Möglichkeit, ungenaue Lösungen mithilfe mehrfacher Neuinitialisierungen zu verbessern und so eine deutlich höhere Ergebnisgüte zu erzielen [72]. Eine Möglichkeit Continuation effektiv auszunutzen liegt darin, zunächst mithilfe einer zufälligen Initialisierung der Zustände eine Lösung zu erhalten. Diese ist möglicherweise noch zu ungenau, weshalb diese Lösung als Startwert für eine erneute Lösung des Randwertproblems genutzt werden kann, die dann eine höhere Genauigkeit erreicht. Dadurch kann das Problem, dass geeignete Startverläufe für die adjungierten Zustände geschätzt werden müssen, umgangen werden, da es ausreichend ist, einmal eine grobe Lösung zu erhalten und ausgehend von dieser die tatsächliche Lösung zu verfeinern. Eine weitere Möglichkeit zur Nutzung

von Continuation besteht darin, die Lösung bei einer bestimmten Parametrierung des Problems zu bestimmen, indem man sich dieser Parametrierung sukzessive annähert. Die Lösung einer bestimmten Wunschparametrierung lässt sich so ausgehend von der Lösung bei einer Parametrierung, die noch weit von der Wunschparametrierung entfernt ist, durch stetiges Annähern an die Wunschparametrierung und Reinitialisieren berechnen.

## C Abbildung zur Stellgröße beim Heranfahren an eine Ampel bei bekannter Rotphase

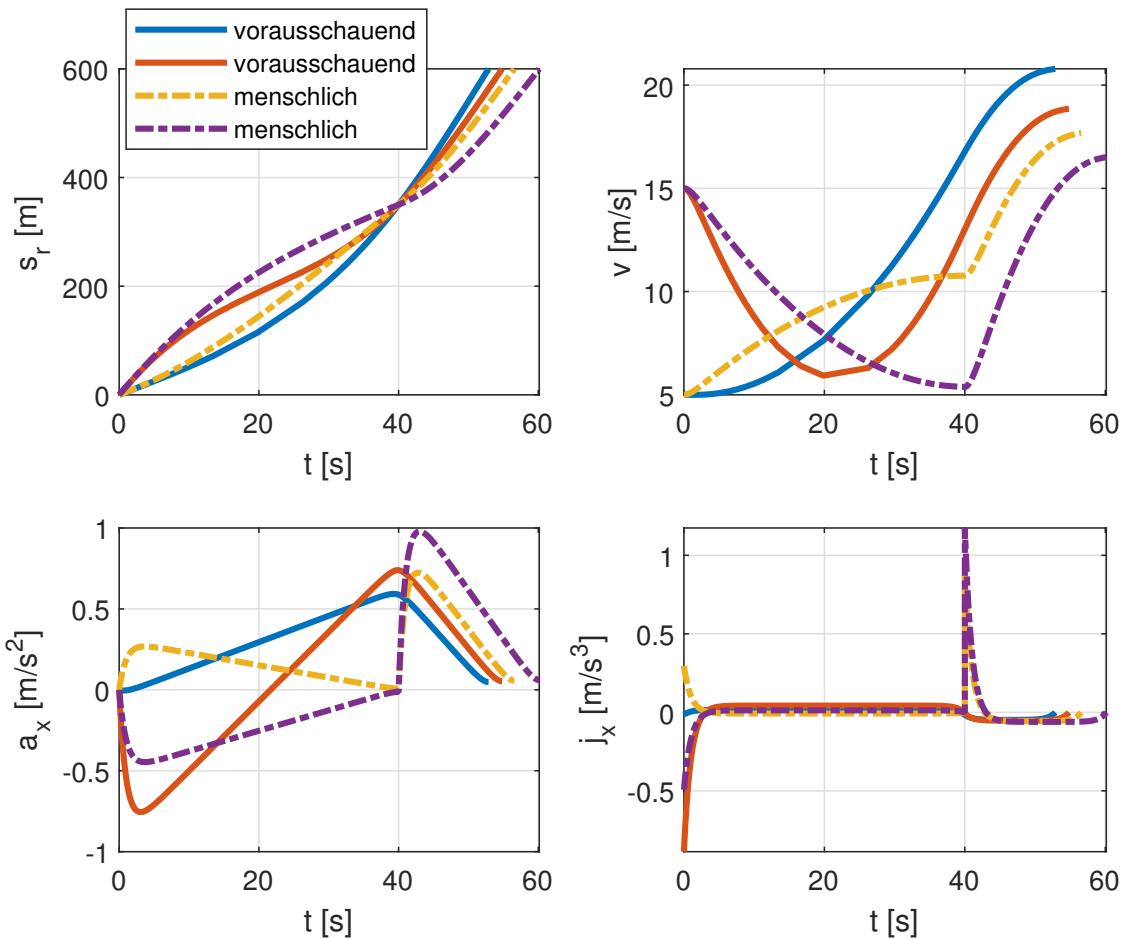


Abbildung C.1: Lösungstrajektorien der Fahrzeugzustände und der Stellgröße beim Zufahren auf eine Ampel mit bekannter Rotphase. Darstellung der Ergebnisse für vorausschauende und menschliche (weniger vorausschauend) Planung bei unterschiedlichen Startgeschwindigkeiten. Ergänzung zu Abbildung 5.6.

# Literatur

---

- [1] M. Brost, Ö. Deniz, I. Österle u. a., „Energy Consumption of Connected and Automated Vehicles“, in *Encyclopedia of Sustainability Science and Technology*, R. A. Meyers, Hrsg., Bd. 2, New York, NY: Springer New York, 2020, S. 1–24, ISBN: 978-1-4939-2493-6. doi: 10.1007/978-1-4939-2493-6{\textunderscore}1098-1.
- [2] Michael Krail, Jens Hellekes, Uta Schneider u. a., *Energie- und Treibhausgaswirkungen des automatisierten und vernetzten Fahrens im Straßenverkehr*, 2019. doi: 10.13140/RG.2.2.22936.44808.
- [3] J. Lee und K. M. Kockelman, „Energy implications of self-driving vehicles“, in *98th Annual Meeting of the Transportation Research Board in Washington, DC*, The Transportation Research Board, Hrsg., 2019.
- [4] Agora Verkehrswende, *Die Automatisierung des Automobils und ihre Folgen: Chancen und Risiken selbstfahrender Fahrzeuge für nachhaltige Mobilität*, Agora Verkehrswende, Hrsg.
- [5] Statistisches Bundesamt, *Unfallentwicklung Unfallentwicklung auf deutschen Straßen 2017*, Statistisches Bundesamt Wiesbaden, Hrsg., 2017. Adresse: [https://www.destatis.de/DE/Presse/Pressekonferenzen/2018/Verkehrsunfaelle-2017/pressebroschueren-unfallentwicklung.pdf?\\_\\_blob=publicationFile](https://www.destatis.de/DE/Presse/Pressekonferenzen/2018/Verkehrsunfaelle-2017/pressebroschueren-unfallentwicklung.pdf?__blob=publicationFile).
- [6] M. Festner, „Objektivierte Bewertung des Fahrstils auf Basis der Komfortwahrnehmung bei hochautomatisiertem Fahren in Abhängigkeit fahrfremder Tätigkeiten: Grundlegende Zusammenhänge zur komfortorientierten Auslegung eines hochautomatisierten Fahrstils“, Diss., DuEPublico: Duisburg-Essen Publications online, University of Duisburg-Essen, Germany, 2019. doi: 10.17185/duepublico/70681.
- [7] On-Road Automated Driving (ORAD) committee, *Taxonomy and Definitions for Terms Related to Driving Automation Systems for On-Road Motor Vehicles*, 400 Commonwealth Drive, Warrendale, PA, United States. doi: 10.4271/j3016{\textunderscore}201806.
- [8] J. T. Reason, J. T. Reason und J. J. Brand, *Motion sickness*. London: Acad. Pr, 1975, ISBN: 9780125840507.
- [9] J. F. Golding, „Motion sickness susceptibility“, *Autonomic neuroscience : basic & clinical*, Jg. 129, Nr. 1-2, S. 67–76, 2006, ISSN: 1566-0702. doi: 10.1016/j.autneu.2006.07.019.
- [10] A. J. Benson, „Motion Sickness“, in *Medical Aspects of Harsh Environments Volume 2*, Washington, DC, 20307, 2002, S. 1048–1083.
- [11] A. Rolnick und R. E. Lubow, „Why is the driver rarely motion sick? The role of controllability in motion sickness“, *Ergonomics*, Jg. 34, Nr. 7, S. 867–879, 1991, ISSN: 0014-0139. doi: 10.1080/00140139108964831.

- [12] F. Christ, A. Wischnewski, A. Heilmeier und B. Lohmann, „Time-optimal trajectory planning for a race car considering variable tyre-road friction coefficients“, *Vehicle System Dynamics*, Jg. 59, Nr. 4, S. 588–612, 2021, ISSN: 0042-3114. doi: 10.1080/00423114.2019.1704804.
- [13] P. Tokekar, N. Karnad und V. Isler, „Energy-optimal trajectory planning for car-like robots“, *Autonomous Robots*, Jg. 37, Nr. 3, S. 279–300, 2014, ISSN: 0929-5593. doi: 10.1007/s10514-014-9390-3.
- [14] C. Rathgeber, *Trajektorienplanung und -folgeregelung für assistiertes bis hochautomatisiertes Fahren*, 2016. doi: 10.14279/depositonce-5506.
- [15] M. Werling, *Ein neues Konzept für die Trajektoriengenerierung und -stabilisierung in zeitkritischen Verkehrsszenarien*. Erscheinungsort nicht ermittelbar: KIT Scientific Publishing, 2011, ISBN: 978-3-86644-631-1. Adresse: <https://directory.doabooks.org/handle/20.500.12854/45957>.
- [16] Q. Shi, J. Zhao, A. E. Kamel und I. Lopez-Juarez, „MPC Based Vehicular Trajectory Planning in Structured Environment“, *IEEE Access*, Jg. 9, S. 21 998–22 013, 2021. doi: 10.1109/ACCESS.2021.3052720.
- [17] H. Guo, C. Shen, H. Zhang, H. Chen und R. Jia, „Simultaneous Trajectory Planning and Tracking Using an MPC Method for Cyber-Physical Systems: A Case Study of Obstacle Avoidance for an Intelligent Vehicle“, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Jg. 14, Nr. 9, S. 4273–4283, 2018, ISSN: 1551-3203. doi: 10.1109/TII.2018.2815531.
- [18] M. Elbanhawi, M. Simic und R. Jazar, „In the Passenger Seat: Investigating Ride Comfort Measures in Autonomous Cars“, *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine*, Jg. 7, Nr. 3, S. 4–17, 2015, ISSN: 1939-1390. doi: 10.1109/MITS.2015.2405571.
- [19] B. Abendroth und R. Bruder, „Die Leistungsfähigkeit des Menschen für die Fahrzeugführung“, in *Handbuch Fahrerassistenzsysteme*, H. Winner, S. Hakuli und G. Wolf, Hrsg., Bd. 32, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012, S. 4–14, ISBN: 978-3-8348-1457-9. doi: 10.1007/978-3-8348-8619-4{\textunderscore}2.
- [20] H. Bellem, T. Schönenberg, J. F. Krems und M. Schrauf, „Objective metrics of comfort: Developing a driving style for highly automated vehicles“, *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour*, Jg. 41, Nr. 6, S. 45–54, 2016, ISSN: 13698478. doi: 10.1016/j.trf.2016.05.005.
- [21] Y. L. Murphrey, R. Milton und L. Kiliaris, „Driver’s style classification using jerk analysis“, in *2009 IEEE Workshop on Computational Intelligence in Vehicles and Vehicular Systems*, IEEE, 30.03.2009 - 02.04.2009, S. 23–28, ISBN: 978-1-4244-2770-3. doi: 10.1109/CIVVS.2009.4938719.
- [22] A. Lange, M. Maas, M. Albert, K.-H. Siedersberger und K. Bengler, „Automatisiertes Fahren - So komfortabel wie möglich, so dynamisch wie nötig“, in *30. VDI/VW-Gemeinschaftstagung. Fahrerassistenz und Integrierte Sicherheit*, Ser. VDI-Berichte, Düsseldorf: VDI-Verl., 2014, S. 215–228, ISBN: 978-3-18-092223-2.
- [23] S. Scherer, A. Dettmann, F. Hartwich, T. Pech, A. Bullinger-Hoffmann und G. Wanielik, „How the driver wants to be driven -Modelling driving styles in highly automated driving“, in *7. Tagung Fahrerassistenz*, TÜV SÜD, Hrsg., 2015.
- [24] D. J. Oborne, „Passenger comfort — an overview“, *Applied Ergonomics*, Jg. 9, Nr. 3, S. 131–136, 1978, ISSN: 00036870. doi: 10.1016/0003-6870(78)90002-9.

- [25] C. Gianna, S. Heimbrand und M. Gresty, „Thresholds for detection of motion direction during passive lateral whole-body acceleration in normal subjects and patients with bilateral loss of labyrinthine function“, *Brain Research Bulletin*, Jg. 40, Nr. 5-6, S. 443–447, 1996, ISSN: 03619230. doi: 10.1016/0361-9230(96)00140-2.
- [26] E. Dovgan, M. Javorski, T. Tušar, M. Gams und B. Filipič, „Comparing a multiobjective optimization algorithm for discovering driving strategies with humans“, *Expert Systems with Applications*, Jg. 40, Nr. 7, S. 2687–2695, 2013, ISSN: 09574174. doi: 10.1016/j.eswa.2012.11.006.
- [27] K. E. Money, „Motion sickness“, *Physiological reviews*, Jg. 50, Nr. 1, S. 1–39, 1970, ISSN: 0031-9333. doi: 10.1152/physrev.1970.50.1.1.
- [28] J. R. Lackner, „Motion sickness: more than nausea and vomiting“, *Experimental brain research*, Jg. 232, Nr. 8, S. 2493–2510, 2014. doi: 10.1007/s00221-014-4008-8.
- [29] J. O'Hanlon und M. McCauley, „Motion Sickness Incidence as a Function of Vertical Sinusoidal Motion“, *Aerospace medicine*, Jg. 45, S. 366–369, 1974.
- [30] Technical Committee : ISO/TC 108/SC 4 Human exposure to mechanical vibration and shock, *ISO 2631-1:1997: Mechanical vibration and shock — Evaluation of human exposure to whole-body vibration — Part 1: General requirements*, 1997-05.
- [31] H. Vogel, R. Kohlhaas und R. J. von Baumgarten, „Dependence of motion sickness in automobiles on the direction of linear acceleration“, *European journal of applied physiology and occupational physiology*, Jg. 48, Nr. 3, S. 399–405, 1982, ISSN: 0301-5548. doi: 10.1007/BF00430230.
- [32] M. Sivak und B. Schoettle, *Motion Sickness in Self-Driving Vehicles*, 2015.
- [33] H. Winner, B. Danner und J. Steinle, „Adaptive Cruise Control“, in *Handbuch Fahrerassistenzsysteme*, H. Winner, S. Hakuli und G. Wolf, Hrsg., Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012, S. 478–521, ISBN: 978-3-8348-1457-9. doi: 10.1007/978-3-8348-8619-4{\textunderscore}33.
- [34] Technical Committee : ISO/TC 204 Intelligent transport systems, *ISO 15622:2018: Intelligent transport systems — Adaptive cruise control systems — Performance requirements and test procedures*, 2018-09.
- [35] —, *ISO 22179:2009: Intelligent transport systems — Full speed range adaptive cruise control (FSRA) systems — Performance requirements and test procedures*, 2009-09.
- [36] Y. Liu und Z. Wu, „Comfortable Driver Behavior Modeling for Car Following of Pervasive Computing Environment“, in *Computational Science – ICCS 2005*, Ser. Lecture Notes in Computer Science, D. Hutchison, T. Kanade, J. Kittler u. a., Hrsg., Bd. 3516, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005, S. 1068–1071, ISBN: 978-3-540-26044-8. doi: 10.1007/11428862{\textunderscore}174.
- [37] T. Radke, *Energieoptimale Längsführung von Kraftfahrzeugen durch Einsatz vorausschauender Fahrstrategien*. Erscheinungsort nicht ermittelbar: KIT Scientific Publishing, 2013, ISBN: 978-3-7315-0069-8. Adresse: <https://directory.doabooks.org/handle/20.500.12854/46364>.
- [38] R. Krause, „Anfahrbeschleunigungen im alltäglichen Straßenverkehr“, *Verkehrsunfall und Fahrzeugtechnik* 40, Nr. 4, S. 105–108, 2002.
- [39] Hugemann, Wolfgang and Nickel, Markus, „Longitudinal and lateral accelerations in normal day driving“, in *6th International Conference on Accident Investigation, Reconstruction, Interpretation and Law, Stratford-upon-Avon, 26-29 September 2003 / Institute of Traffic Accident Investigators.*, Institute of Traffic Accident Investigators International Conference, Hrsg., 2003.

- [40] A. Schwab, „Eine Methode zur Auswahl kritischer Fahrszenarien für automatisierte Fahrzeuge anhand einer objektiven Charakterisierung des Fahrverhaltens“, Masterthesis, Technische Universität München, München, 2019.
- [41] C. Canudas-de-Wit, „Fun-To-Drive By Feedback“, in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, 12-15 Dec. 2005, S. 13, ISBN: 0-7803-9567-0. doi: 10.1109/CDC.2005.1582110.
- [42] S. Hiroaki, „Ability to withstand sudden braking“, in *Railw Res Rev*, Bd. 52, 1995, S. 18–21.
- [43] J. P. Powell und R. Palacín, „Passenger Stability Within Moving Railway Vehicles: Limits on Maximum Longitudinal Acceleration“, *Urban Rail Transit*, Jg. 1, Nr. 2, S. 95–103, 2015, ISSN: 2199-6687. doi: 10.1007/s40864-015-0012-y.
- [44] J. Gayko, „Lane Keeping Support“, in *Handbuch Fahrerassistenzsysteme*, H. Winner, S. Hakuli und G. Wolf, Hrsg., Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012, S. 554–561, ISBN: 978-3-8348-1457-9. doi: 10.1007/978-3-8348-8619-4{\textunderscore}36.
- [45] H. Oschlies, *Komfortorientierte Regelung für die automatisierte Fahrzeugquerföhrung*, Ser. AutoUni - Schriftenreihe Ser. Wiesbaden, Germany: Springer, 2019, Bd. v.136, ISBN: 978-3-658-25235-9. Adresse: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/kxp/detail.action?docID=5640099>.
- [46] L. Dragon, „Fahrzeugdynamik: Wohin fahren wir?“, in *Forschung für das Auto von Morgen*, Ser. SpringerLink Bücher, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 239–260, ISBN: 978-3-540-74150-3.
- [47] G. Reymond, A. Kemeny, J. Droulez und A. Berthoz, „Role of lateral acceleration in curve driving: driver model and experiments on a real vehicle and a driving simulator“, *Human factors*, Jg. 43, Nr. 3, S. 483–495, 2001, ISSN: 0018-7208. doi: 10.1518/001872001775898188.
- [48] K.-H. Schimmelpfennig und U. Nackenhorst, „Bedeutung der Querbeschleunigung in der Verkehrsunfallrekonstruktion - Sicherheitsgrenze des Normalfahrers“, *Verkehrsunfall und Fahrzeugtechnik* 23, Nr. 4, S. 94–96, 1985.
- [49] J. Xu, K. Yang, Y. Shao und G. Lu, „An Experimental Study on Lateral Acceleration of Cars in Different Environments in Sichuan, Southwest China“, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Jg. 2015, Nr. 6, S. 1–16, 2015, ISSN: 1026-0226. doi: 10.1155/2015/494130.
- [50] A. Schulz und R. Fröming, „Analyse des Fahrerverhaltens zur Darstellung adaptiver Eingriffsstrategien von Assistenzsystemen“, *ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift*, Jg. 110, Nr. 12, S. 1124–1131, 2008, ISSN: 0001-2785. doi: 10.1007/BF03222040.
- [51] M. Festner, A. Eicher und D. Schramm, „Beeinflussung der Komfort- und Sicherheits-wahrnehmung beim hochautomatisierten Fahren durch fahrfremde Tätigkeiten und Spurwechseldynamik“, in *11. Workshop Fahrerassistenzsysteme und Automatisiertes Fahren*, K. Bengler, Hrsg., Darmstadt: Uni-DAS e.V, 2017, S. 63–73, ISBN: 978-3-00-055656-2.
- [52] Knut Graichen, *Methoden der Optimierung und optimalen Steuerung: Skript - Wintersemester 2012/2013*. 2012.
- [53] M. Papageorgiou, M. Leibold und M. Buss, *Optimierung*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012, ISBN: 978-3-540-34012-6. doi: 10.1007/978-3-540-34013-3.
- [54] M. Gerdts, *Optimale Steuerung: Skript - Wintersemester 2009/2010*. 2010.

- [55] J. R. Cash und D. R. Moore, „A high order method for the numerical solution of two-point boundary value problems“, *BIT*, Jg. 20, Nr. 1, S. 44–52, 1980, ISSN: 0006-3835. doi: 10.1007/BF01933584.
- [56] O. Föllinger, *Optimale Regelung und Steuerung*, 3., verb. Aufl. Reprint 2014, Ser. Methoden der Regelungs- und Automatisierungstechnik. München: De Gruyter, 1994, ISBN: 3-486-23116-2. doi: 10.1515/9783486787306. Adresse: <http://dx.doi.org/10.1515/9783486787306>.
- [57] U. Konigorski, *Mehrgrößenreglerentwurf im Zustandsraum: Skript - Wintersemester 2019/2020*. 2019.
- [58] R. Bellman, *Dynamic programming*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Pr, 1984, ISBN: 0-691-07951-X.
- [59] J. Adamy, *Nichtlineare Regelungen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, ISBN: 978-3-642-00793-4. doi: 10.1007/978-3-642-00794-1.
- [60] U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij und R. D. Russell, „5. Finite Difference Methods“, in *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij und R. D. Russell, Hrsg., Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995, S. 185–274, ISBN: 978-0-89871-354-1. doi: 10.1137/1.9781611971231.ch5.
- [61] ——, „4. Initial Value Methods“, in *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij und R. D. Russell, Hrsg., Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995, S. 132–184, ISBN: 978-0-89871-354-1. doi: 10.1137/1.9781611971231.ch4.
- [62] J. T. Betts, „Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization“, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Jg. 21, Nr. 2, S. 193–207, 1998, ISSN: 0731-5090. doi: 10.2514/2.4231.
- [63] R. Weiss, „The application of implicit Runge-Kutta and collection methods to boundary-value problems“, *Mathematics of Computation*, Jg. 28, Nr. 126, S. 449–464, 1974, ISSN: 0901-246X. doi: 10.1090/S0025-5718-1974-0341881-2.
- [64] A. Cervantes und L. T. Biegler, „Optimization Strategies for Dynamic Systems“, in *Encyclopedia of Optimization*, C. A. Floudas und P. M. Pardalos, Hrsg., Boston, MA: Springer US, 2009, S. 2847–2858, ISBN: 978-0-387-74758-3. doi: 10.1007/978-0-387-74759-0{\textunderscore}488.
- [65] D. Schramm, M. Hiller und R. Bardini, *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, ISBN: 978-3-642-33887-8. doi: 10.1007/978-3-642-33888-5.
- [66] *Richtlinien für die Anlage von Autobahnen: RAA: Übersetzung 2011*, Ausgabe 2008, Ser. FGSV R1 - Regelwerke. Köln: FGSV-Verl., 2008, Bd. 202, ISBN: 978-3-939715-51-1.
- [67] Bundesministerium für Verkehr, Bau- und Wohnungswesen, *Straßenverkehrs-Zulassungs-Ordnung: StVZO*, 2012. Adresse: [https://www.gesetze-im-internet.de/stvzo\\_2012/index.html](https://www.gesetze-im-internet.de/stvzo_2012/index.html).
- [68] auto.de, *ADAC vergleicht Wendekreis von rund 500 Fahrzeugen*, 2011. Adresse: <https://www.auto.de/magazin/adac-vergleicht-wendekreis-von-rund-500-fahrzeugen/#>.
- [69] V. Gradinescu, C. Gorgorin, R. Diaconescu, V. Cristea und L. Iftode, „Adaptive Traffic Lights Using Car-to-Car Communication“, in *2007 IEEE 65th Vehicular Technology Conference - VTC2007-Spring*, IEEE, 22.04.2007 - 25.04.2007, S. 21–25, ISBN: 1-4244-0266-2. doi: 10.1109/VETECS.2007.17.

- 
- [70] U. Konigorski, *Modellbildung und Simulation: Skript - Sommersemester 2020*. 2020.
  - [71] N. Kamiji, Y. Kurata, T. Wada und S. Doi, „Modeling and validation of carsickness mechanism“, in *SICE Annual Conference 2007*, IEEE, 17.09.2007 - 20.09.2007, S. 1138–1143, ISBN: 978-4-907764-27-2. doi: [10.1109/SICE.2007.4421156](https://doi.org/10.1109/SICE.2007.4421156).
  - [72] J. Kierzenka und L. F. Shampine, „A BVP solver based on residual control and the Matlab PSE“, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Jg. 27, Nr. 3, S. 299–316, 2001, ISSN: 0098-3500. doi: [10.1145/502800.502801](https://doi.org/10.1145/502800.502801).