Problem (Exercise 13.8[M&I])

Assume that X and Y are two independent random variables defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Assume additionally that X and Y are absolutely continuous with the same distribution.

(a) Show that $P(\mathrm{X} = \mathrm{Y}) = 0$.

(b) Show that $P(\mathrm{X} < \mathrm{Y}) = \frac{1}{2} = P(\mathrm{X} > \mathrm{Y})$.

Solution

(a) Ifølge Eksempel 13.5.7 (A) i [M&I] er vektoren (X, Y) absolut kontinuert. Dvs. at hvis $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, således at $\lambda_2(A) = 0$, så gælder der, at $\mathbb{P}((X, Y) \in A) = 0$. Vi bemærker, at

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}((X, Y) \in A)$$

hvor $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$. Vi regner $\lambda_2(A)$ vha. Sætning 6.3 .7 (ii) i [M&I]:

$$\lambda_2(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(\{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\})\lambda(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(\{x\})\lambda(\mathrm{d}x) = 0$$

Dette viser, at $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

(b) Pr. symmetri har vi, at $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(X > Y)$. Ved at benytte (a) ser vi nu,

$$1 = \mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X > Y) = 2\mathbb{P}(X < Y).$$

Dermed far vi, at $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X > Y)$, som ønsket.

Problem (Exercise 1.2)

Lad X og Y være to uafhængige d-dimensionale stokastiske vektorer definerede på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og betragt endvidere deres fordelinger P_{X} og P_{Y} på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

(a) Vis, at foldningen $P_{\mathsf{X}} * P_{\mathsf{Y}}$ er fordelingen $P_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}$ af den stokastiske vektor $\mathsf{X} + \mathsf{Y}$.

(b) Benyt (a) og Sætning 1.1.4(vi) til at give et alternativt bevis for Sætning 1.1.7(vii)

Solution

(a) Let $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), S(x, y) = x + y, S : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^d$, we note:

$$P_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}(A) = P(\mathsf{X}+\mathsf{Y} \in A) = P_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(S \in A) = (\P_{\mathsf{X}} \otimes P_{\mathsf{Y}}) \circ S^{-1}(A) = P_{\mathsf{X}} * P_{\mathsf{Y}}(A)$$

(b) $pf : \phi_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}} = \phi_{\mathsf{X}} \phi_{\mathsf{Y}}$

$$\phi_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}} = \hat{P}_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}} = P_{\mathsf{X}} \,\hat{*}\, P_{\mathsf{Y}} = \hat{P}_{\mathsf{X}} \hat{P}_{\mathsf{Y}} = \phi_{\mathsf{X}} \phi_{\mathsf{Y}}$$

Problem (Exercise 1.5)

Lad X_1 og X_2 være to uafhængige stokastiske variable definerede på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Benyt da Opgave 1.4, Eksempel 1.1.3 og Sætning 1.2.5 til at bevise følgende udsagn:

(a) Hvis X_1 og X_2 er binomialfordelte med samme sandsynligehdsparameter p og med antalsparametre hhv. n_1 og n_2, da er $\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2$ binomialfordelt med sandsynlighedsparameter p og antalsparameter $n_1 + n_2$.

(b) Hvis X_1 og X_2 er Possion-fordelte med parametre hhv. l_1 og l_2, da er $\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2$ Poisson-fordelt med parameter $l_1 + l_2$.

(c) Hvis $\mathsf{X}_1 \sim N(\xi_1, \sigma_1^2)$, og $\mathsf{X}_2 \sim N(\xi_2, \sigma_2^2)$, da er $\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2 \sim N(\xi_1 + \xi_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$-fordelt.

Solution

(a) Jf. Sætning 1.2.5 er det nok at vise, at den karakteristiske funktion for $X_1 + X_2$ er den karakteristiske funktion for en binomialfordeling med de påståede parametre. Idet X_1 og X_2 er uafhængige giver Korollar 1.1.7(vii), at $\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$.
Vi bruger nu den karakteristiske funktion fundet i Opgave 1.4 (a)

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \left(1 - p + pe^{it}\right)^{n_1} \left(1 - p + pe^{it}\right)^{n_2} = \left(1 - p + pe^{it}\right)^{n_1+n_2}$$

hvilket netop viser det ønskede.

(b) Vi bruger samme fremgangsmåde som i (a). Vi ser således, at

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \exp\left(\ell_1 \left(e^{\mathrm{it}} - 1\right)\right) \exp\left(\ell_2 \left(e^{\mathrm{it}} - 1\right)\right) = \exp\left(\left(\ell_1 + \ell_2\right) \left(e^{\mathrm{it}} - 1\right)\right)$$

(c) Igen benytter vi samme fremgangsmåde. Her husker vi, at hvis $X \sim N\left(\xi, \sigma^2\right)$, så er $\varphi_X(t) = e^{it\xi}e^{-\sigma^2 t^2/2}$ jf. Eksempel 1.1.3. Vi ser nu, at

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = e^{it\xi_1}e^{-\sigma_1^2 t^2/2}e^{it\xi_2}e^{-\sigma_2^2 t^2/2} = e^{it(\xi_1+\xi_2)}e^{-\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)t^2/2}$$

Dette viser, at $X_1 + X_2 \sim N\left(\xi_1 + \xi_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$.

Problem (Exercise 1.3)

(a) Lad $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ være en funktion fra $\mathcal{L}^1(\lambda)^+$, og antag at dens Fourier-transformerede $\hat{f}$ er element i $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda)$. Benyt da Sætning 1.2.8 til at vise, at

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{\mathrm{i}\,tx} \lambda(\mathrm{d}\,t), \quad \text{for } \lambda-\text{n.a. } x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

(b) Lad f være en funktion fra $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda)$ og betragt funktonerne $g_+, g_-, h_+, h_- \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ givet ved

$$g_\pm = \mathrm{Re}(f)^\pm, \quad h_\pm = \mathrm{Im}(f)^\pm.$$

Vis da, at $\hat{f} = \hat{g}_+ - \hat{g}_- + \mathrm{i}(\hat{h}_+ - \hat{h}_-)$. Benyt endvidere (a) til at udlede, at (1) også gælder for det her betragtede f, såfremt $\hat{g}_\pm, \hat{h}_\pm \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda)$.

Solution

(a) Vi husker, at $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\mathrm{i}xt} \lambda(\,\mathrm{d}x)$. Specielt ser vi, at hvis $f = 0$ λ-n.o., så er $\hat{f}(t) = 0$ for alle t. Dermed er (1) opfyldt i dette tilfælde. Antag derfor, at $\lambda(\{f > 0\}) > 0$ (dvs. at f ikke er 0 n.o.). Så er $\int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(\mathrm{d}x) \in (0,\infty)$, og vi sætter $c = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(\mathrm{d}x)\right)^{-1}$. Da er cf en sandsynlighedstæthed, og vi lader X være en absolut kontinuert stokastisk variabel med tæthed $f_X = cf$. Bemærk nu, at

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx} f_X(x)\lambda(\mathrm{d}x) = c\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{itx}} f(x)\lambda(\mathrm{d}x) = c\sqrt{2\pi}\hat{f}(-t)$$

Idet $\hat{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda)$ følger det, at $\varphi_X \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda)$. Da giver Sætning 1.2.8, at

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}xs}\varphi_X(s)\lambda(\mathrm{d}s) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}xs} c\sqrt{2\pi}\hat{f}(-s)\lambda(\mathrm{d}s) \\ &= \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}xt}\hat{f}(t)\lambda(\mathrm{d}t) \end{aligned}$$

for λ-n.a. x. I sidste lighed har vi benyttet substitutionen $t = -s$. Vi bemærker, at vi nu har vist (1), idet $f(x) = \frac{1}{c} f_X(x)$.

(b) Vi kan skrive $f = \mathrm{Re}(f) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f) = g_+ - g_- + \mathrm{i}\,(h_+ - h_-)$. Det følger direkte fra definitionen af Fourier-transformationen, at det er en lineær afbildning. Dvs. at hvis $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda)$ og $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, så er $\left(\widehat{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2}\right) = \alpha_1\hat{f}_1 + \alpha_2\hat{f}_2$. Specielt gælder der, at $\hat{f} = \hat{g}_+ - \hat{g}_- + \mathrm{i}\left(\hat{h}_+ - \hat{h}_-\right)$.

Antag nu, at $\hat{g}_\pm, \hat{h}_\pm \in \mathcal{L}^1_C(\lambda)$. Da er (1) opfyldt med f erstattet med hhv. g_+, g_-, h_+og h_-. Vi har derfor, at

$$\begin{aligned}
f(x) =& g_+(x) - g_-(x) + \mathrm{i}\left(h_+(x) - h_-(x)\right) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}_+(t) e^{\mathrm{i}tx} \lambda(\mathrm{~d}t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}_-(t) e^{\mathrm{i}tx} \lambda(\mathrm{~d}t) \\
& + \mathrm{i}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}_+(t) e^{\mathrm{i}tx} \lambda(\mathrm{~d}t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}_-(t) e^{\mathrm{i}tx} \lambda(\mathrm{~d}t)\right) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\hat{g}_+(t) - \hat{g}_-(t) + \mathrm{i}\left(\hat{h}_+(t) - \hat{h}_-(t)\right)\right) e^{\mathrm{i}tx} \lambda(\mathrm{~d}t) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{\mathrm{i}tx} \lambda(\mathrm{~d}t),
\end{aligned}$$

for λ-n.a. x.

Problem (Exercise 2.5[M&I])

Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad M være en ikke-tom delmængde af S. Vi definerer da afbildningen $\rho(\cdot, M) : S \to [0, \infty)$ ved

$$\rho(x, M) = \inf\{\rho(x, y) : y \in M\}, \quad (x \in S).$$

(a) Vis, at der for alle x, z i S gælder, at

$$|\rho(x, M) - \rho(z, M)| \le \rho(x, z)$$

(b) Vis, at der for ethvert x i S gælder, at

$$\rho(x, M) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \bar{M}.$$

(c) Vis, at der for enhver lukket delmængde F af S findes en følge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af åbne delmængder af S, således at $G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \cdots$, og $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

Solution

(a) Lad $x, z \in S$. For ethvert $y \in M$ gælder der, at

$$\rho(x, M) \le \rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

Ved at tage infimum over $y \in M$, får vi da, at

$$\rho(x, M) \le \rho(x, z) + \rho(z, M)$$

Dvs. at

$$\rho(x, M) - \rho(z, M) \le \rho(x, z) \tag{2}$$

Pr. symmetri har vi, at

$$\rho(z, M) - \rho(x, M) \le \rho(z, x) = \rho(x, z) \tag{3}$$

Ved at kombinere (2) og (3) får vi, at

$$|\rho(x, M) - \rho(z, M)| \le \rho(x, z)$$

som ønsket.

(b) Lad $x \in S$, og antag først, at $\rho(x, M) = 0$. Da findes en følge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i M, således at $\rho(x, y_n) \to \rho(x, M) = 0$ for $n \to \infty$. Dvs. at $y_n \to x$, hvilket viser, at $x \in \bar{M}$. Antag nu, at $x \in \bar{M}$. Da findes en følge $(y_n)_{n\ge1}$ iM, således at $y_n \to x$ for $n \to \infty$. Det betyder, at $\rho(x, y_n) \to 0$. For ethvert $\epsilon > 0$ kan vi derfor finde $N \in \mathbb{N}$ med $\rho(x, y_N) < \epsilon$. Dette medfører, at $\rho(x, M) \le \rho(x, y_N) < \epsilon$. Idet ϵ kan vælges vilkårligt småt, viser dette, at $\rho(x, M) = 0$.

(c) Lad $F \subseteq S$ være lukket. I (a) har vi set, at afbildningen $\rho_F = \rho(\cdot, F)$ er kontinuert. For ethvert $n \geq 1$ definerer vi nu $G_n := \rho_F^{-1}((-\infty, 1/n))$. Idet $(-\infty, 1/n)$ er åben, er G_n ligeledes åben. Desuden er $(-\infty, 1/n) \supseteq (-\infty, 1/(n+1))$, og dermed er $G_n \supseteq G_{n+1}$ som ønsket. Vi bemærker, at $x \in \bigcap_{n\geq 1} G_n$, hvis og kun hvis $\rho(x, F) < 1/n$ for alle $n \geq 1$. Dvs. at $x \in \bigcap_{n\geq 1} G_n$, hvis og kun hvis $\rho(x, F) = 0$. Kombinerer vi dette med (b), ser vi, at $x \in \bigcap_{n\geq 1} G_n$, hvis og kun hvis $x \in \bar{F}$. Dermed har vi, at

$$\bigcap_{n\geq 1} G_n = \bar{F} = F$$

idet F er lukket.

Problem (Exercise 4.19[M&I])

Lad(S, ρ) være et metrisk rum, lad G være en åben delmængde af S, og betragt funktionen $x \mapsto \rho(x, G^c)$ indført i Opgave 2.5.

(a) Vis, at der for ethvert x i S gælder, at

$$(k\rho(x, G^c)) \wedge 1 \uparrow \mathbf{1}_G(x) \quad \text{for } k \to \infty \tag{4}$$

(b) Konkludér, at der findes en følge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af uniformt kontinuerte funktioner $f_n : S \to [0, 1]$, således at $f_n(x) \to \mathbf{1}_G(x)$ for alle x i S.

Solution

(a) Vi bemærker først, at G^c er lukket. Dvs. at $\rho(x, G^c) = 0$, hvis og kun hvis $x \in G^c$ jf. Opgave 2.5 (b). Betragt nu $x \in S$ og antag, at $x \in G$. Da er $\rho(x, G^c) > 0$, så $k\rho(x, G^c) \uparrow \infty$, hvilket medfører, at $(k\rho(x, G^c)) \wedge 1 \uparrow 1 = 1_G(x)$. Antag omvendt, at $x \in G^c$. Da er $(k\rho(x, G^c)) \wedge 1 = 0 = 1_G(x)$ for alle k, så specielt holder konvergensen i (4).

(b) Lad $f_n(x) = (n\rho(x, G^c)) \wedge 1$. Ifølge (a) gælder der, at $f_n(x) \to 1_G(x)$ for alle $x \in S$, så vi mangler blot at vise, at f_n er uniformt kontinuert for ethvert $n \geq 1$. Fra Opgave 2.5 (a) følger det, at

$$|n\rho(x, G^c) - n\rho(z, G^c)| \leq n\rho(x, z)$$

for alle $x, z \in S$ og $n \geq 1$. Dette viser, at funktionen $g_n : x \mapsto n\rho(x, G^c)$ er uniformt kontinuert for alle $n \geq 1$. Det følger nu let, at $f_n = g_n \wedge 1$ er uniformt kontinuert: Tjek tilfældene $g_n(x) > 1$ og $g_n(x) > 1, g_n(x) > 1$ og $g_n(x) \leq 1$ osv.