1 Fourier-transformation og karakteristiske funktioner

1.1 Definition og indledende bemærkninger

Definition 1.1.1. Lad μ være et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Den Fourier-transofrmerede af μ er funktionen $\hat{\mu} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle}\mu(\mathrm{d}\,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle t,x\rangle)\mu\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^d} \sin(\langle t,x\rangle)\mu\,\mathrm{d}\,x$$

for ethvert t i $\mathbb{R}^d$. I tilfældet $d = 1$ ser vi specielt, at

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\,tx}\mu(\mathrm{d}\,x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\mu\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\mu\,\mathrm{d}\,x$$

for ethvert t i $\mathbb{R}$

Bemærkning 1.1.2. Antag, at μ er et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ med tæthed f fra $\mathcal{L}^1(\lambda)^+$ med hensyn til λ. Det følger da for ethvert t i $\mathbb{R}$, at

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\,tx}\mu(\mathrm{d}\,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\,tx} f(x)\lambda(\mathrm{d}\,x) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(-t),$$

hvor $\hat{f}$ betegner den Fourier-transformerede af f (jvf. Definition 12.1.1 i [M&I])

Eksempel 1.1.3 (Den Fourier-transformerede af normalfordelingen). Vi har

$$\widehat{N(\xi,\sigma^2)}(t) = e^{\mathrm{i}\,t\xi}e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

for ethvert t i $\mathbb{R}$

Sætning 1.1.4. Lad μ og ν være ssh.-mål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ hhv. $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Da gælder følgende udsagn:

(i) $|\hat{\mu}(t)| \leq \hat{\mu}(0) = 1$ for alle t i $\mathbb{R}^d$

(ii) $\hat{\mu} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ er en kontinuert funktion.

(iii) $\hat{\mu}(-t) = \overline{\hat{\mu}(t)}$ for alle t i $\mathbb{R}^d$

(iv) Hvis $d = m$ gælder der, at

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}(t)\nu(\mathrm{d}\,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\nu}(t)\mu(\mathrm{d}\,t)$$

(v) $\widehat{\mu\otimes\nu}(t,s) = \hat{\mu}(t)\hat{\nu}(s)$ for alle (t,s) i $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{d+m}$

(vi) $\widehat{\mu * \nu}(t,s) = \hat{\mu}(t)\cdot\hat{\nu}(t)$ for alle t i $\mathbb{R}^d$

Definition 1.1.5. Lad X være en d-dimensionel stokastisk vektor defineret op sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Den karakteristiske funktion for X er funktionen $\varphi_{\mathsf{X}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\varphi_{\mathsf{X}} = \hat{P_{\mathsf{X}}}, \quad \text{hvor } P_{\mathsf{X}} = P \circ \mathsf{X}^{-1}$$

For ethvert t i $\mathbb{R}^d$ hat vi altså, at

$$\varphi_{\mathsf{X}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle} P_{\mathsf{X}}(\mathrm{d}\, x) = \int_{\Omega} e^{\mathrm{i}\langle t,\mathsf{X}(\omega)\rangle} P(\mathrm{d}\,\omega) = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle}]$$

Eksempel 1.1.6. Hvis X er normalfordelt, så har vi

$$\varphi_{\mathsf{X}}(t) = \widehat{N(\xi, \sigma^2)}(t) = e^{\mathrm{i}\, t\xi} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

for alle t i $\mathbb{R}$

Korollar 1.1.7 (Egenskaber ved den karakteristiske funktion). Lad X og Y være hhv. d- og m-dimensionale stokastiske vektorere definerede på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da gælder følgende udsagn:

(i) $|\varphi_{\mathsf{X}}(t)| \leq \varphi_{\mathsf{X}}(0) = 1$ for alle t i $\mathbb{R}^d$

(ii) Funktionen $\varphi_{\mathsf{X}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ er kontinuert.

(iii) $\varphi_{\mathsf{X}}(-t) = \varphi_{-\mathsf{X}}(t) = \overline{\varphi_{\mathsf{X}}(t)}$ for alle t i $\mathbb{R}^d$

(iv) For enhver $m \times n$ matrix A og enhver vektor b i $\mathbb{R}^m$ gælder formlen:

$$\varphi_{A\mathsf{X}+b}(s) = e^{\mathrm{i}\langle s,b\rangle} \varphi_{\mathsf{X}}(A^T s), \quad (s \in \mathbb{R}^m)$$

(v) Hvis $d = m$, gælder formlen: $\mathbb{E}[\varphi_{\mathsf{Y}}(\mathsf{X})] = \mathbb{E}[\varphi_{\mathsf{X}}(\mathsf{Y})]$

(vi) Hvis X og Y er uafhængige, gælder formlen:

$$\varphi_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(t, s) = \varphi_{\mathsf{X}}(t)\varphi_{\mathsf{Y}}(s), \quad (t \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}^m)$$

(vii) Hvis $d = m$, og X og Y er uafhængige, gælder formlen:

$$\varphi_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}(t) = \varphi_{\mathsf{X}}(t)\varphi_{\mathsf{Y}}(t) = \varphi_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(t, t), \quad (t \in \mathbb{R}^d)$$

1.2 Entydighed og Inversionsætningen for karakteristiske funktioner

Lemma 1.2.1. Lad μ og ν være to mål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ og antag at $\mu((-n, n)^d) < \infty$ for alle n i $\mathbb{N}$, samt at

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi \,\mathrm{d}\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \psi \,\mathrm{d}\,\nu \quad \text{for alle } \psi \text{ i } C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})^+$$

Da gælder der, at $\mu = \nu$

Altså at ψ tilhører alle kontinuerte funktioner med kompakt støtte.

Lemma 1.2.2. Lad X og Y være uafhængiged d-dimensionale stokastiske vektorer definerede på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at X er absolut kontinuert med tæthed f_{X} (med hensyn til λ_d).
Da er $\mathsf{X} + \mathsf{Y}$ ligeledes absolut kontinuert med λ_d-tæthed $f_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}$ givet ved

$$f_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f_{\mathsf{X}}(z-y) P_{\mathsf{Y}}(\mathrm{d}\, y), \quad (z \in \mathbb{R}^d)$$

Lemma 1.2.3. Lad X og U være uafhængige d-dimensionale stokastiske vektorer på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at $\mathsf{U} = (\mathsf{U}_1, \dots, \mathsf{U}_d)$, hvor $\mathsf{U}_1, \dots, \mathsf{U}_d$ er uafhængige identisk $N(0,1)$-fordelte stokastiske variable.
For ethvert σ i $(0, \infty)$ gælder der da, at $\mathsf{X} + \sigma\mathsf{U}$ er absolut kontinuert med tæthed $f_{\mathsf{X}+\sigma\mathsf{U}}$ givet ved:

$$f_{\mathsf{X}+\sigma\mathsf{U}}(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\|s\|^2} e^{-\,\mathrm{i}\langle t,s\rangle} \varphi_{\mathsf{X}}(s) \lambda_d(\mathrm{d}\, s), \quad (t \in \mathbb{R}^d),$$

hvor φ_{X} er den karakteristiske funktion for X

Lemma 1.2.4. Lad X og U være d-dimensionale stokastiske vektorer defineret på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og betragt for ethvert n i $\mathbb{N}$ den stokastiske vektor $\mathsf{X} + \frac{1}{n}\mathsf{U}$.
For enhver funktion ψ fra $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ gælder der da, at

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(t) P_{\mathsf{X}+\frac{1}{n}\mathsf{U}}(\mathrm{d}\, t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t) P_{\mathsf{X}}(\mathrm{d}\, t)$$

Sætning 1.2.5. (i) Lad X og Y være d-dimensionale stokastiske vektorer. Da gælder implikationen

$$\varphi_{\mathsf{X}} = \varphi_{\mathsf{Y}} \Longrightarrow \mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$$

(ii) Lad μ og ν være sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Da gælder implikationen:

$$\hat{\mu} = \hat{\nu} \Longrightarrow \mu = \nu$$

Bemærkning 1.2.6. X og Y behøver ikke at være defineret på samme sandsynlighedsfelt. Der kan derfor findes stokastiske variable $\tilde{\mathsf{X}}, \tilde{\mathsf{Y}}$ således at $\tilde{\mathsf{X}} \sim \mathsf{X}$ og $\tilde{\mathsf{Y}} \sim \mathsf{Y}$ og ræssonere:

$$\varphi_{\mathsf{X}} = \varphi_{\mathsf{Y}} \Longleftrightarrow \varphi_{\tilde{\mathsf{X}}} = \varphi_{\tilde{\mathsf{Y}}} \Longrightarrow \tilde{\mathsf{X}} \sim \tilde{\mathsf{Y}} \Longrightarrow \mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$$

Korollar 1.2.7. Lad X og Y være hhv. d- og m-dimensionale stokastiske vektorer definerede på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da er X og Y uafhængige, hvis og kun hvis der gælder, at

$$\varphi_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(t,s) = \varphi_{\mathsf{X}}(t)\varphi_{\mathsf{Y}}(s) \quad \text{for alle } t \text{ i } \mathbb{R}^d, \text{og } s \text{ i } \mathbb{R}^m$$

Sætning 1.2.8 (Inversionssætningen for karakteristiske funktioner). Lad X være en d-dimensional stokastisk vektor på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at dens karakteristiske funktion φ_{X} er element i $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$. Da er P_{X} absolut kontinuert med tæthed f_{X} givet ved:

$$f_{\mathsf{X}}(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle t,s\rangle} \varphi_{\mathsf{X}}(s) \lambda_d(\mathrm{d}\, s), \quad (t \in \mathbb{R}^d)$$

Proof. Proof □

1.3 Differentiabilitet og Taylor-udvikling for karakteristiske funktioner

Sætning 1.3.1 (Differentiabilitet for den karakteristiske funktion). (i) Lad μ være et sandsynligehdsmål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, og antag at $p \in \mathbb{N}_0$, således at $\int_{\mathbb{R}} |x|^p \mu(\mathrm{d}\, x) < \infty$.
Da er $\hat{\mu}$ p-gange differentiabel med afledede

$$\hat{\mu}^{(k)}(t) = \mathrm{i}^k \int_{\mathbb{R}} \mathsf{x}^k e^{\mathrm{i}\,\mathsf{x}t} \mu(\mathrm{d}\, x), \quad (t \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, p).$$

(ii) Lad X være en stokastisk variabel defineret på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at $p \in \mathbb{N}_0$, således at $\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p] < \infty$.
Da er φ_{X} p-gange differentiabel med afledede:

$$\varphi_{\mathsf{X}}^{(k)}(t) = \mathrm{i}\, \mathbb{E}[\mathsf{X}^k e^{\mathrm{i}\, t\mathsf{X}}], \quad (t \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, p).$$

Specielt er

$$\mathbb{E}[\mathsf{X}^k] = \mathrm{i}^{-k}\, \varphi_{\mathsf{X}}^{(k)}(0), \quad (k = 0, 1, \dots, p).$$

Bemærk at ii) følger af i)

Lemma 1.3.2. For hvert $n \in \mathbb{N}_0$ defineres funktionen $r_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved

$$r_n(t) = e^{\mathrm{i}\, t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{i}^k\, t^k}{k!}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Da gælder vurderingen:

$$|r_n(t)| \leq \frac{2|t|^n}{n!} \wedge \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ovenstående kan også skrives som

$$|r_n(t)| \leq \min\{\frac{2|t|^n}{n!}, \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}\}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Korollar 1.3.3. Lax X være en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, således at $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. For ethvert α i $[2,3]$ gælder da vurderingen:

$$\left|\varphi_{\mathsf{X}}(t) - 1 - \mathrm{i}\, t\mathbb{E}[\mathsf{X}] + \frac{1}{2}t^2\mathbb{E}[\mathsf{X}^2]\right| \leq |t|^\alpha \mathbb{E}[|\mathsf{X}|^\alpha], \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Korollar 1.3.4. Lad X være en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at $\sigma^2 := \mathbb{E}[\mathsf{X}^2] < \infty$, samt at $\mathbb{E}[\mathsf{X}] = 0$.
Da gælder der, at

$$\frac{\varphi_{\mathsf{X}}(t) - 1}{t^2} \longrightarrow -\frac{\sigma^2}{2} \quad \text{for } t \to 0.$$

Sætning 1.3.5 (Taylor-udvikling af den karakteristiske funktion). Lad X være en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med momenter af enhver orden. Antag yderligere at følgende betingelse er opfyldt:

$$\exists \rho \in (0, \infty) : \lim_{n \to \infty} \frac{\rho^n \mathbb{E}[|\mathsf{X}|^n]}{n!} = 0, \tag{1}$$

og vælg et ρ i henhold hertil. For ethvert a i $\mathbb{R}$ gælder der da, at Taylor-rækken for φ_{X} i a er konvergent i $[a - \rho, a + \rho]$ med sum φ_{X}, dsv.

$$\varphi_{\mathsf{X}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_{\mathsf{X}}^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k\, \mathbb{E}[\mathsf{X}^k e^{\mathrm{i}\, a\mathsf{X}}]}{k!}(t-a)^k, \quad (t \in [a-\rho, a+\rho]).$$

Bemærkning 1.3.6. Betingelsen (1) er ækvivalent med følgende betingelse:

$$\exists c \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[|\mathsf{X}|^n] \leq c^n n!$$

Betingelsen er altså en begrænsning på hvor hurtigt momenterne må vokse med n.

1.4 Anvendelser af den karakteristiske funktion

Sætning 1.4.1. (i) Lad X være en symmetrisk stokastisk variabel, og lad videre $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være i.i.d stokastiske variable, således at $\mathsf{X}_n \sim \mathsf{X}$ for alle n.
Hvis yderligere $\mathsf{X} \sim \frac{\mathsf{X}_1 + \cdots + \mathsf{X}_n}{\sqrt{n}}$ for alle n, da gælder der, at $\mathsf{X} \sim N(0, \sigma^2)$ for passende σ i $[0, \infty)$

(ii) Lad X være en stokastisk variabel, og antag at $\sigma^2 := \mathbb{E}[\mathsf{X}^2] < \infty$. Antag endvidere, at $\mathsf{X} \sim \frac{\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2}{\sqrt{2}}$, hvor $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2$ er i.i.d, og $\mathsf{X}_1 \sim \mathsf{X}$.
Da gælder der, at $\mathsf{X} \sim N(0, \sigma^2)$

For $\sigma = 0$ tænker vi på X som dirac-målet.

Lemma 1.4.2. Lad $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ være en følge af komplekse tal, således at $a_n \longrightarrow a \in \mathbb{C}$ for $n \to \infty$. Da gælder der, at

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = \exp(a),$$

hvor $\exp(a) = e^{\mathrm{Re}(a)}(\cos(\mathrm{Im}(a))) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(a))$.

1.5 Momentproblemet

Problemstilling 1.5.1 (Momentproblemet). Lad X og Y være to stokastiske variable, og antag, at $\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p], \mathbb{E}[|\mathsf{Y}|^p] < \infty$ for alle p i $\mathbb{N}$, samt at

$$\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p] = \mathbb{E}[|\mathsf{Y}|^p] \quad \text{for alle p i } \mathbb{N}$$

Under hvilke yderligere betingelser kan man da slutte at $X \sim \mathsf{Y}$?

Sætning 1.5.2. Lad X og Y være to stokastiske variable, og antag, at $\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p], \mathbb{E}[|\mathsf{Y}|^p] < \infty$ for alle p i $\mathbb{N}$, samt at

$$\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p] = \mathbb{E}[|\mathsf{Y}|^p] \quad \text{for alle p i } \mathbb{N}$$

Hvis yderligere

$$\exists \rho \in (0, \infty) : \mathbb{E}[e^{\rho|\mathsf{X}|}] < \infty,$$

da gælder der, at $\mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$

Til beviset for Sætning 1.5.2 får vi brog for følgende lemma:

Lemma 1.5.3. Lad X være en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $\exists \rho \in (0, \infty) : \mathbb{E}[e^{\rho|\mathsf{X}|}] < \infty$.

(ii) $\exists c \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[|\mathsf{X}|^n] \leq c^n n!$.

(iii) $\exists c \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[\mathsf{X}^{2n}] \leq c^{2n}(2n)!$.

Korollar 1.5.4. Lad X og Y være stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at P_{X} og P_{Y} begge har kompakt støtte, dvs.

$$\exists b < 0 : P(\mathsf{X} \in [-b, b]) = 1 = P(\mathsf{Y} \in [-b, b])$$

Da X og Y har momenter af enhver orden. Hvis yderligere $\mathbb{E}[\mathsf{X}^p] = \mathbb{E}[\mathsf{Y}^p]$ for alle p i $\mathbb{N}$, da gælder der, at $\mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$.

Korollar 1.5.5. Lad X være en ikke-negativ stokastisk variabel, og betragt dens **Laplace transformerede**:

$$L_{\mathsf{X}}(s) = \mathbb{E}[e^{-s\mathsf{X}}], \quad (s \in [0,\infty)).$$

Da er P_{X} entydigt bestemet af L_{X}. Med andre ord: Hvis Y er en anden ikke-negativ stokastisk variabel, således at $Ł_{\mathsf{Y}}(s) = L_{\mathsf{X}}(s)$ for alle s i $[0,\infty)$, da gælder der, at $\mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$.

2 Konvergens i mål og i sandsynlighed

2.1 De tre fundamentale konvergenstyper og deres indbyrdes styrkeforhold

Definition 2.1.1. Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p være et (strengt) positivt tal. Vi siger da, at

(a) f_n konvergerer mod f i $\mu-$mål for $n \to \infty$, hvis

$$\forall \epsilon > 0 : \mu\left(\{x \in \mathsf{X} \big| |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{for } n \to \infty.$$

I så fald benyttes notationen: $f_n \to f$ i $\mu-$mål.

(b) f_n konvergerer mod f $\mu-$n.o. for $n \to \infty$, hvis

$$\mu\left(\{x \in X | \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}^c\right) = 0.$$

I så fald benyttes notationen: $f_n \to f \mu-$n.o.

(c) f_n konvergerer mod f i $\mu - p$ middel for $n \to \infty$, hvis

$$\int_X |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\,\mu \longrightarrow 0, \quad \text{for } n \to \infty$$

I så fald benyttes notationen: $f_n \to f$ i $\mu - p$-middel.

Bemærkning 2.1.2. Blandt andet linearitet bevarer konvergens.

Sætning 2.1.3. Lad " $\to$ " betegne én af de tre konvergensformer indført i Definition 2.1.1, og betragt funktioner $f, g, f_1, f_2, f_3, \ldots$ fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da gælder implikationen:

$$f_n \longrightarrow f, \;\; og \;\; f_n \longrightarrow g \;\; \Longrightarrow \;\; f = g \;\; \mu - \text{n.o}$$

Sætning 2.1.4. Lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p være et positivt tal. Da gælder følgende udsagn:

(i) Hvis $f_n \to f$ i $\mu - p$ middel, så gælder der også at $f_n \to f$ i $\mu-$mål.

(ii) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\,\mu < \infty$, så gælder der, at $f_n \to f \mu - n.o.$

(iii) Hvis $f_n \to f$ i $\mu-$mål, så findes en voksende følge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af naturlige tal, således at $f_{n_k} \to f\mu$-n.o. for $k \to \infty$

Sætning 2.1.5. Antag, at μ er et **endeligt mål**, lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p,r være positive tal. Da gælder følgende udsagn:

(i) Følgende betingelser er endbetydende:

(i1) $f_n \to f$i $\mu -$ mål.

(i2) $\forall K \in (0, \infty) : \lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} |f_n - f| \wedge K \,\mathrm{d}\,\mu = 0.$

(i3) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} |f_n - f| \wedge 1 \,\mathrm{d}\,\mu = 0.$

(ii) Hvis $f_n \to f$ $\mu-$n.o., så gælder der også, at $f_n \to f$ i $\mu-$mål.

(iii) Hvis $r < p$, og $f_n \to f$ i $\mu-$p-middel, da gælder der også at $f_n \to f$ i $\mu-$r-middel.

2.2 Fuldstændighed

Definition 2.2.1. Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p være et strengt positivt tal. Vi siger da, at

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en **Cauchy-følge** i $\mu-$mål, hvis

$$\forall\epsilon > 0 : \lim_{n,m\to\infty} \mu\left(\{|f_n - f_m| > \epsilon\}\right) = 0.$$

eller udskrevet hvis

$$\forall\epsilon, \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \mu\left(\{|f_n - f_m| > \epsilon\}\right) \leq \delta$$

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en **Cauchy-følge** $\mu-$n.o., hvis $\mu(F^C) = 0$, hvor

$$F = \{x \in X | (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ er en Cauchy-følge i } \mathbb{R}\}$$

(c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en **Cauchy-følge** i $\mu - p$-middel, hvis

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_{\mathsf{X}} f_n - f_m|^p \,\mathrm{d}\,\mu = 0,$$

eller udskrevet hvis

$$\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \int_{\mathsf{X}} |f_n - f_m|^p \,\mathrm{d}\,\mu \leq \epsilon.$$

Bemærkning 2.2.2. Mængden F er målelig - det følger af omskrivningen

$$F = \bigcap_{K\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m\geq N} \left\{x \in X \middle| |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{K}\right\}.$$

Lemma 2.2.3. Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da gælder følgende udsagn:

(i) Lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og antag, at der findes en følge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af (strengt) positive tal, således at

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0, \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\{|f_n - f| > \epsilon_n\}\right) < \infty.$$

Da gælder der, at

$$f_n \to \ \mu - \text{n.o.}, \quad \text{og} \quad f_n \to f \text{ i } \mu\text{-mål}.$$

(ii) Antag, at der findes en følge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af (strengt) positive tal, således at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty, \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\{|f_{n+1} - f_n| > \epsilon_n\}\right) < \infty$$

Da findes der en funtkion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at

$$f_n \to f \ \mu\text{-n.o.}, \quad \text{og} \quad f_n \to f \text{ i } \mu\text{-mål}.$$

Sætning 2.2.4. Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) Der findes en funktion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at $f_n \to f$ i $\mu-$mål.

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i $\mu-$mål.

Med andre ord er konvergens i μ-mål et fuldstændigt konvergensbegreb.

Korollar 2.2.5. Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, lad (f_n) være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad p være et strengt positivt tal. Da er følgende betingelser ævkvivalente:

(i) Der findes en funktion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at $f_n \to f$ i μ-p-middel.

(ii) (f_n) er en Cauchy-følge i μ-p-middel.

Korollar 2.2.6. Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, lad p være et tal i $[1, \infty)$, og lad (f_n) være en følge af funktioner fra $\mathcal{L}^p(\mu)$. Da gælder implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ er konvergent i } \mu\text{-p-middel.}$$

Med andre ord gælder der, at **absolut konvergens medfører konvergens** i $\mathcal{L}^p(\mu)$.

2.3 Konvergens af f_n vs. konvergens af $|f_n|^p$

2.4 Konvergens i sandsynlighed

Definition 2.4.1. Lad (X_n) være en følge af stokastiske variable defineret på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og lad X være endnu en stokastisk variabel herpå. Lad endvidere r være et positivt tal. Vi siger da, at X_n konvergerer mod X

- **i sandsynlighed**, hvis der for ethvert positivt ϵ gælder, at

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mathsf{X}_n - \mathsf{X}| > \epsilon) = 0.$$

  I bekræftende fald skriver vi: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X}$ for $n \to \infty$.

- **i r-middel**, hvis

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|\mathsf{X}_n - \mathsf{X}|^r\right] = 0.$$

  I bekræftende fald skriver vi: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r(P)} \mathsf{X}$ for $n \to \infty$.

- **P-næsten overalt (eller P-næsten sikkert)**, hvis

$$P(\lim_{n\to\infty} \mathsf{X}_n = \mathsf{X}) = 1,$$

  eller mere udførligt, hvis $P(F) = 1$, hvor

$$F = \{\omega \in \Omega \big| \lim_{n\to\infty} \mathsf{X}_n(\omega) = \mathsf{X}(\omega)\} \in \mathcal{F}.$$

  I begræftende fald skriver vi: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X}$ (eller $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.s.}} \mathsf{X}$) for $n \to \infty$.

2.5 Konvergens i sandsynlighed på generelle metriske rum

Definition 2.5.1 (Produktmetrikker). Lad (S, ρ) og (T, δ) betegne metriske rum. En metrik η på $S \times T$ kaldes en **produktmetrik**, hvis den opfylder følgende betingelse:
For alle $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ i $S \times T$ galder bi-implikationen:

$$\lim_{n\to\infty} \eta\left((x_n, y_n), (x, y)\right) = 0 \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n, x\right) = \lim_{n\to\infty} \delta\left(y_n, y\right) = 0$$

Bemærkning 2.5.2. Afbildningen $\rho : S \times S \to \mathbb{R}$ er $(B)(S \times S) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-målelig.

Definition 2.5.3 (Borel-algebraen på $S \times S$). Lad (S, ρ) være et metrisk rum. Borel-algebraen $\mathcal{B}(S \times S)$ på $S \times S$ defineres da ved

$$\mathcal{B}(S \times S) = \sigma(\mathcal{G}(\eta))$$

hvor η er en vilkårlig produktmetrik på $S \times S$.

Bemærkning 2.5.4. Hvis (S, ρ) er separabelt, så gælder:

$$\mathcal{B}(S \times S) = \mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(S).$$

Ydermere hvis X, Y er stokastiske funktioner på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et separabelt metrisk rum (S, ρ), da er afbildningen

$$D := \rho(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) : \Omega \to \mathbb{R}$$

$\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-målelig.

Definition 2.5.5. Lad (S, ρ) være et separabelt metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S, ρ).
Vi siger da, at

(a) X_n konvergerer mod X næsten overalt (skrevet: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X}$), hvis $P(F^C) = 0$, hvor

$$F = \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \to \infty} \rho\left(\mathsf{X}_n(\omega), \mathsf{X}(\omega)\right) = 0 \right\}$$

(b) X_n konvergerer mod X i sandsynlighed (skrevet: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{P}} \mathsf{X}$), hvis

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P\left(\rho\left(\mathsf{X}_n, \mathsf{X}\right) > \epsilon\right) = 0$$

Bemærkning 2.5.6. Betragt for hert n i $\mathbb{N}$ den stokastiske variable $D_n := \rho\left(\mathsf{X}_n, \mathsf{X}\right)$. Så har vi bi-implikationerne:

$$\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X} \iff D_n \xrightarrow{\text{n.o.}} 0, \quad \text{og} \quad \mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{P}} \mathsf{X} \iff D_n \xrightarrow{\text{P}} 0.$$

Sætning 2.5.7. Lad (S, ρ) være et separabelt metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S, ρ). Da gælder følgende udsagn:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X} \Longrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{P}} \mathsf{X}$.

(ii) Hvis $\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X}$, findes en voksende følge $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ af naturlige tal, således at $\mathsf{X}_{n_k} \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X}$.

(iii) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X} \iff \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\rho\left(\mathsf{X}_n, \mathsf{X}\right) \wedge 1\right] = 0$.

Sætning 2.5.8. Lad (S, ρ) være et separabelt metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S, ρ). Betragt endvidere endnu et separabelt metrisk rum $(\ T, \delta\ )$, og en $\mathcal{B}(S) - \mathcal{B}(T)$-målelig afbildning $f : S \to T$. Antag, at der findes en mængde C i $\mathcal{B}(S)$, således at

$$P(\mathsf{X} \in C) = 1, \quad \text{og} \quad f \text{ er kontinuert i ethvert punkt x fra C.}$$

Da gælder følgende implikationer:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X} \Longrightarrow f(\mathsf{X}_n) \xrightarrow{\text{n.o.}} f(\mathsf{X})$.

(ii) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X} \Longrightarrow f(\mathsf{X}_n) \xrightarrow{P} f(\mathsf{X})$.

Bemærkning 2.5.9. Antag, at ρ, ρ' er to ækvivalente metrikker på S, således at (S, ρ) og (S, ρ') er separable.

Betragt afbildningerne id: $(S, \rho) \to (S, \rho') \circ \text{ogid}' : (S, \rho') \to (S, \rho)$ givet ved

$$\text{id}(x) = \text{id}'(x) = x, \quad (x \in S)$$

Da ρ og ρ' er ækvivalente, er id og id $'$ begge kontinuerte. Det følger derfor umiddelbart fra Sætning 2.5.8, at

$$\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o. /P}} \mathsf{X} \text{ mht. } \rho \Longrightarrow \mathsf{X}_n = \text{id}(\mathsf{X}_n) \xrightarrow{\text{n.o. /P}} \text{id}(\mathsf{X}) = \mathsf{X} \text{ mht. } \rho'.$$

Overgang til en ækvivalent metrik ændrer altså ikke på, om $\mathsf{X}_n \to \mathsf{X}$ n.o./ i sandsynlighed eller ej.

Sætning 2.5.10. Lad (S, ρ) og (T, δ) være separable metriske rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ samt $\mathsf{Y}, \mathsf{Y}_1, \mathsf{Y}_2, \mathsf{Y}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i hhv. (S, ρ) og (T, δ). Udstyr endvidere $S \times T$ med en produktmetrik η. Da gælder bi-implikationerne:

(i) $(\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n) \xrightarrow{\text{n.o.}} (\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \Longleftrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X}$ og $\mathsf{Y}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{Y}$.

(ii) $(\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n) \xrightarrow{P} (\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \Longleftrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X}$ og $\mathsf{Y}_n \xrightarrow{P} \mathsf{Y}$.

3 Uniform integrabilitet

3.1 Definition og indledende begreber

Definition 3.1.1. En delmængde $\mathcal{H}$ af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ siges at være uniformt integrabel (mht. μ), hvis den opfylder følgende betingelse:

$$\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 \forall f \in \mathcal{H} : \int_{\{|f|>K\}} |f| \mathrm{d}\mu \leq \epsilon.$$

eller ækvivalent:

$$\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 : \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{\{|f|>K\}} |f| \mathrm{d}\mu \leq \epsilon.$$

Bemærkning 3.1.2. (i) Hvis $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel, da gælder der automatisk at $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$. For hvis $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel kan vi f.eks. vælge $K > 0$, således at

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{\{|f|>K\}} |f| \mathrm{d}\mu \leq 1$$

For hvert f fra $\mathcal{H}$ har vi da, at

$$\begin{aligned}\int_X |f| \mathrm{d}\mu &= \int_{\{|f|\leq K\}} |f| \mathrm{d}\mu + \int_{\{|f|>K\}} |f| \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_{\{|f|\leq K\}} K \ \mathrm{d}\mu + 1 \leq K\mu(X) + 1 < \infty\end{aligned}$$

(ii) Hvis $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel, gælder dette også enhver delmængde $\mathcal{H}_0$ af $\mathcal{H}$.

Hvis $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ er endeligt mange uniformt integrable delmængder af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, da er $\bigcup_{j=1}^n \mathcal{H}_j$ ligeledes uniformt integrabel.

Specielt fremgår det, at enhver endelig delmængde $\{f_1, \dots, f_n\}$ af $\mathcal{L}^1(\mu)$ er uniformt integrabel.

Lemma 3.1.3. Lad $\mathcal{H}$ være en delmængde af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad (f_n) og (g_n) være følger af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

(i) Hvis $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel, da er også mængden

$$\tilde{\mathcal{H}} := \{f \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \big| \exists g \in \mathcal{H} : |f| \leq |g| \mu\text{-n.o.}\},$$

uniformt integrabel.

(ii) For enhver funktion g fra $\mathcal{L}^1(\mu)^+$ er mængden $\{f \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \big| |f| \leq g \mu\text{-n.o.}\}$ uniformt integrabel.

(iii) Hvis mængden $\{g_n | n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel, og $|f_n| \leq |g_n| \mu$-n.o. for alle n, da er mængden $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ ligeledes uniformt integrabel.

Sætning 3.1.4. En delmængde $\mathcal{H}$ af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ er uniformt integrabel, hvis og kun hvis den opfylder følgende to betingelser:

(i) $\sup_{f\in\mathcal{H}} \int_X |f| \mathrm{d}\mu < \infty$.

(ii) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{E} : \mu(A) \leq \delta \Longrightarrow \sup_{\delta\in\nu} \int_\Delta |f| \mathrm{d}\mu \leq \epsilon$.

Korollar 3.1.5. Antag, at $\mathcal{H}_1$ og $\mathcal{H}_2$ er to uniformt integrable delmængder af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da er mængden

$$\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \{f_1 + f_2 \mid f_1 \in \mathcal{H}_1, f_2 \in \mathcal{H}_2\}$$

også uniformt integrabel.

Sætning 3.1.6. Lad $\mathcal{H}$ være en delmængde af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og antag, at der findes en Borel-målelig funktion $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, således at følgende to betingelser er opfyldte:

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\varphi(x)} = 0$

(ii) $\sup_{f\in\mathcal{H}} \int_X \varphi \circ |f| \mathrm{d}\mu < \infty$.

Da er $\mathcal{H}$ uniformt integrabel.

3.2 Uniform integrabilitet vs. konvergens i μ-middel

Sætning 3.2.1. Lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.
Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $f \in \mathcal{L}^1(\mu), f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ for alle n, og $f_n \to f$ i μ-1-middel.

(ii) $f_n \to$ f i μ-mål, og mængden $\mathcal{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel.

Korollar 3.2.2. Lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad p være et tal $i(0,\infty)$.
Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i_p) $f \in \mathcal{L}^p(\mu), f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ for alle n, og $f_n \to f$ i μ-p-middel.

(ii_p) $f_n \to f$ i μ-mål, og mængden $\mathcal{H} = \{|f_n| p \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel.

4 Summer af uafhængige stokastiske variable og store tals stærke lov

4.1 Lévys Ulighed

Sætning 4.1.1 (Lévys Ulighed). Lad $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n$ være uafhængige, symmetriske stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da gælder uligheden:

$$P\left(\max_{k=1,\ldots,n}\left|\sum_{j=1}^{k}\mathsf{X}_j\right| > t\right) \leq 2P\left(\left|\sum_{j=1}^{n}\mathsf{X}_j\right| > t\right) \qquad \text{for alle } ti(0,\infty).$$

Hvis vi sætter

$$\mathsf{S}_k = \mathsf{X}_1 + \cdots + \mathsf{X}_k, \quad (k \in \{1, 2, \ldots, n\})$$

og

$$\mathsf{M}_n = \max_{k=1,\ldots,n} |\mathsf{S}_k|$$

da kan uligheden skrives:

$$P\left(M_n > t\right) \leq 2P\left(|\mathsf{S}_n| > t\right) \qquad \text{for alle t i } (0,\infty).$$

Korollar 4.1.2. Lad $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n$ være uafhængige, symmetriske stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Sæt

$$\mathsf{S}_k = \mathsf{X}_1 + \cdots + \mathsf{X}_k, \quad (k \in \{1, 2, \ldots, n\})$$

og

$$\mathsf{M}_n = \max_{k=1,\ldots,n} |\mathsf{S}_k|$$

Da gælder uligheden:

$$\mathbb{E}\left[\mathsf{M}_n^p\right] \leq 2\mathbb{E}\left[|\mathsf{S}_n|^p\right] \qquad \text{for alle } p \text{ i } (0,\infty)$$

4.2 Konvergens af summer af uafhænige stokastiske variable

Lemma 4.2.1. Lad (Y_n) være en følge af stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og definér for hvert p i $\mathbb{N}$:

$$\mathsf{L}_p = \sup_{k,\ell \geq p} |\mathsf{Y}_k - \mathsf{Y}_\ell| \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{F})^+$$

Da er følgende to udsagn ækvivalente:

(i) Der findes en stokastisk variabel Y på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, således at $\mathsf{Y}_n \to \mathsf{Y}$ P-n.o. for $n \to \infty$.

(ii) $\mathsf{L}_p \wedge 1 \to 0$ i sandsynlighed for $p \to \infty$.

Lemma 4.2.2. Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige, symmetriske stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da gælder bi-implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n \text{ konvergerer P-n.o.} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n \text{ konvergerer i sandsynlighed.}$$

Bemærkning 4.2.3 (Det målelige rum $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$). Betragt vektorrummet

$$\mathbb{R}^\infty = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \text{ for alle } n \text{ i } \mathbb{N}\right\}$$

For n i $\mathbb{N}$ og mængder $B_1, \ldots, B_n$ i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sætter vi

$$[B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots] = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid x_1 \in B_1, \ldots, x_n \in B_n\right\}$$

Vi sætter endvidere

$$\mathcal{J} = \{[B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots] \mid n \in \mathbb{N}, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

og

$$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^\infty\right) = \sigma(\mathcal{J})$$

For hvert k i $\mathbb{N}$ betragter vi afbildningen $p_k : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ givet ved

$$p_k\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = x_k, \quad \left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty\right)$$

Vi bemærker for B_k i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, at

$$\begin{aligned} p_k^{-1}(B_k) &= \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid x_k \in B_k\right\} \\ &= [\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{k-1 \text{ gange}} \times B_k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots] \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^\infty\right) \end{aligned}$$

og for $B_1, \ldots, B_n$ i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, at

$$[B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots] = p_1^{-1}(B_1) \cap p_2^{-1}(B_2) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(B_n)$$

Dermed er $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ den mindste σ-algebra på $\mathbb{R}^\infty$, som g $\not{t}\, p_1, p_2, p_3, \ldots$ målelige. Bemærk specielt, at

$$
\begin{aligned}
C &:= \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid \lim_{n\to\infty} x_n \text{ eksisterer i } \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ er en Cauchy-følge } \right\} \\
&= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}k,\ell\geq N} \bigcap_{n} \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \middle| |p_k((x_n)) - p_\ell((x_n))\right| \leq \frac{1}{m} \right\} =: A \\
&= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}k,\ell\geq N} \bigcap_{N} (p_k - p_\ell)^{-1}\left(\left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right]\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty).
\end{aligned}
$$

Bemærkning 4.2.4 (Den simultane fordeling af en følge af stokastiske variable). Betragt nu et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ og en følge $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af stokastiske variable defineret herpå. Vi kan da betragte afbildningen $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^\infty$ givet ved

$$\mathbb{X}(\omega) = (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}, \quad (\omega \in \Omega)$$

Vi bemærker, at $\mathbb{X}$ er $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$-målelig:

$$\mathbb{X}^{-1}([B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots]) = \{\mathsf{X}_1 \in B_1\} \cap \cdots \cap \{\mathsf{X}_n \in B_n\} \overset{?}{\in} \mathcal{F}$$

for alle n i $\mathbb{N}$ og $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dermed kan vi betragte fordelingen P_X af $\mathbb{X}$, dvs. ssh-målet

$$P_\mathsf{X}(A) = P(\mathbb{X} \in A) = P\left(\mathbb{X}^{-1}(A)\right), \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$$

Da $\mathcal{J}$ er $\cap$-stabilt, er P_X entydigt bestemt af tallene:

$$P_\mathsf{X}([B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots]) = P(\mathsf{X}_1 \in B_1, \ldots, \mathsf{X}_n \in B_n)$$

for $n \in \mathbb{N}$ og $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (jvf. Sætn. 2.2.1 i [M&I]).

Bemærkning 4.2.5 (Konvergens i termer af den simultane fordeling). Vi bemærker specielt, at

$$(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergerer n.o. } \iff P(\mathbb{X} \in C) = 1 \iff P_\mathsf{X}(C) = 1$$

og at $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer i ssh. $\iff (\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i ssh.

$$
\begin{aligned}
&\iff \forall \epsilon > 0 : \lim_{n,m\to\infty} P(|\mathsf{X}_n - \mathsf{X}_m| > \epsilon) = 0 \\
&\iff \forall \epsilon > 0 : \lim_{n,m\to\infty} P_\mathsf{X}\left((p_n - p_m)^{-1}([-\epsilon, \epsilon]^c)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Dermed afhænger konvergens n.o. og i ssh. kun af P_X. Hvis $P_\mathsf{X} = P_\mathsf{Y}$ gælder der altså, at $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer i ssh./n.o. $\iff (\mathsf{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer i ssh./n.o. og at $\left(\sum_{k=1}^n \mathsf{X}_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. i ssh./n.o. $\iff \left(\sum_{k=1}^n \mathsf{Y}_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. i ssh./n.o.

Lemma 4.2.6. Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Antag endvidere, at der findes endnu en følge $(\mathsf{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af stokastiske variable på $(\Omega,\mathcal{F},P)$, således at

$$\mathbb{X}=(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ og } \mathbb{Y}=(\mathsf{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ er uafhængige, og } \quad P_{\mathbb{X}}=P_{\mathbb{Y}}$$

Da gælder bi-implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{X}_n \text{ konvergerer } P\text{-n.o.} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{X}_n \text{ konvergerer } i \text{ sandsynlighed.}$$

Sætning 4.2.7. Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Da gælder bi-implikationen: $\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{X}_n$ konvergerer P-n.o. $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{X}_n$ konvergerer i sandsynlighed.

Korollar 4.2.8. Lad $(\mathsf{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Da gælder for ethvert $r>0$ implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{Z}_n \text{ konvergerer i P-r-middel } \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{Z}_n \text{ konvergerer n.o.}$$

Korollar 4.2.9. Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af ufhængige stokastiske variable på $(\Omega,\mathcal{F},P)$, og antag, at $\mathsf{X}_n\in\mathcal{L}^2(P)$ for alle n.
Sæt endvidere $\mu_n=\mathbb{E}\left[\mathsf{X}_n\right]$ for alle n. Da gælder implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\left[\mathsf{X}_n\right]<\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(\mathsf{X}_n-\mu_n) \quad \text{konvergerer P-n.o. og i P-2-middel.}$$

4.3 Store tals stærke lov

Lemma 4.3.1 (Kroneckers lemma). Lad $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være følger af reelle tal, således at

$$0<b_1<b_2<b_3<\cdots, \quad \lim_{n\to\infty}b_n=\infty$$

og at $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}$ er konvergent i$\mathbb{R}$, dvs. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}$ eksisterer i$\mathbb{R}$. Da gælder der, at

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Sætning 4.3.2 ($\mathcal{L}^2$-udgave af Store tals lov). Lad $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at $\mathsf{X}_k \in \mathcal{L}^2(P)$ for alle $ki\mathbb{N}$. Sæt endvidere $\mu_k = \mathbb{E}[\mathsf{X}_k]$ for alle $ki\mathbb{N}$. Da gælder implikationen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{V}[\mathsf{X}_k]}{k^2} < \infty \Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\mathsf{X}_k - \mu_k) \underset{n\to\infty}{} 0 \quad \text{n.o. og i 2-middel.}$$

Eksempel 4.3.3.

Lemma 4.3.4. Lad $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ være reelle tal, således at $a_n \to a$ for $n \to \infty$. Da gælder der også, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j = a.$$

Lemma 4.3.5. (i) For ethvert naturligt tal N gælder der, at

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{N}$$

(ii) For ethvert x i $(0, \infty)$ gælder der, at

$$\sum_{n\in\mathbb{N}:n\geq x} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{x}$$

Sætning 4.3.6 (Store tals stærke lov). Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af i.i.d. stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, således at $\mathbb{E}[|\mathsf{X}_1|] < \infty$, og sæt $\mathbb{E}[\mathsf{X}_1] = \mu$.
Da gælder der, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{X}_j = \mu \quad \text{P-n.o. og i P-1-middel.}$$

5 Konvergens i fordeling

5.1 Svag konvergens og konvergens i fordeling

Definition 5.1.1 (Svag konvergens af sandsynlighedsmål). Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ være sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$. Vi siger da, at μ_n **konvergerer svagt** imod μ for $n \to \infty$ (skrevet: $\mu_n \xrightarrow{\text{w}} \mu$), hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall f \in C_b(S) : \lim_{n\to\infty} \int_S f(s)\mu_n(\mathrm{d}\, s) = \int_S f(s)\mu(\mathrm{d}\, s).$$

Definition 5.1.2 (Konvergens i fordeling). Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S, ρ).
Vi siger da, at X_n konvergerer mod X **i fordeling** (skrevet: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}$), hvis $P_{\mathsf{X}_n} \xrightarrow{\text{w}} P_{\mathsf{X}}$.
Udskrevet er betingelsen altså:

$$\forall f \in C_b(S) : \mathbb{E}\left[f\left(\mathsf{X}_n\right)\right] = \int_S f \ \mathrm{d}P_{\mathsf{X}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_S f \ \mathrm{d}P_{\mathsf{X}} = \mathbb{E}[f(\mathsf{X})].$$

Hvis μ er et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$, siger vi tilsvarende, at X_n konvergerer mod μ i fordeling (skrevet: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mu$), hvis $P_{\mathsf{X}_n} \xrightarrow{\text{w}} \mu$.
Udskrevet er betingelsen altså:

$$\forall f \in C_b(S) : \mathbb{E}\left[f\left(\mathsf{X}_n\right)\right] = \int_S f \ \mathrm{d}P_{\mathsf{X}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_S f \ \mathrm{d}\mu$$

Bemærkning 5.1.3. 1. **Udvidelse til komplekse funktioner:**
Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S, ρ).

Lad videre μ være et sandsynlighedsmål på ($S, \mathcal{B}(S)$), og antag, at $\mathsf{X}_k \xrightarrow{\sim} \mu$ for $k \to \infty$.

For enhver funktion f i $C_b(S, \mathbb{C})$ har vi oplagt, at $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in C_b(S, \mathbb{R})$, og dermed at

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f\left(\mathsf{X}_k\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathrm{Re}\left(f\left(\mathsf{X}_k\right)\right)\right] + \mathrm{i}\mathbb{E}\left[\mathrm{lm}\left(f\left(\mathsf{X}_k\right)\right)\right] \\ &\xrightarrow[k\to\infty]{} \int_S \mathrm{Re}(f)\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int_S \mathrm{Im}(f)\mathrm{d}\mu = \int_S f \ \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Specielt ser vi i tilfældet $S = \mathbb{R}^d$, at

$$\varphi_{\mathsf{X}_k}(t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, \mathsf{X}_k\rangle}\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, x\rangle}\mu(\mathrm{d}x) = \hat{\mu}(t) \quad \text{for alle } t\mathbb{R}^d.$$

2. **Overgang til ækvivalent metrik**
Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner med værdier i et metrisk rum(S, ρ).

Da ændres definitionen af, at $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}$, ikke, hvis ρ erstattes af en ækvivalent metrik ρ' på S.

I denne situation gælder der nemlig, at

$$C_b(S, \rho) = C_b(S, \rho')$$

og dermed ændres ikke på betingelsen:

$$\forall f \in C_b(S, \rho) : \mathbb{E}[f(\mathsf{X}_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(\mathsf{X})]$$

Sætning 5.1.4 (Entydighedssætning for mål). Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad μ og ν være to sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$.
Antag videre, at

$$\int_S f \, \mathrm{d}\mu = \int_S f \, \mathrm{d}\nu \quad \text{for alle f i } C_b(S)^+$$

Da er $\mu = \nu$.

Korollar 5.1.5 (Entydighed af grænse ved konvergens i fordeling). Betragt et metrisk rum (S, ρ).

1. Lad $\nu, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ være sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$, og antag, at

$$\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu, \text{ og } \mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu \text{ for } n \to \infty.$$

   Da gælder $\mu = \nu$.

2. Lad $\mathsf{Y}, \mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier $i(S, \rho)$, og antag, at

$$\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}, \quad \text{og} \quad \mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{Y}$$

   Da gælder $\mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$.

Sætning 5.1.6 (Styrkeforhold). Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et separabelt metrisk rum (S, ρ).
Da gælder implikationen:

$$\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X} \Longrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}.$$

Sætning 5.1.7. Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et separabelt metrisk rum (S, ρ).
Antag endvidere, at

$$\exists a \in S : P(X = a) = 1$$

Da gælder bi-implikationen:

$$\mathsf{X}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathsf{X} \Longleftrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}.$$

Sætning 5.1.8. Lad $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et metrisk rum (S, ρ), og lad μ være et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$.
Antag, at $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mu$. Da gælder der, at

$$\int_S g \; \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[g\left(\mathsf{X}_n\right)\right]$$

for enhver begr. funktion g i $\mathcal{M}(\mathcal{B}(S))$, som er kontinuert i μ-n.a. x i S.

Definition 5.1.9 (Lipschitz-afbildninger). Lad (S, ρ) og (T, δ) være metriske rum. En afbildning $f : S \to T$ siges da at være en Lipschitz afbildning, hvis der findes en konstant K i $(0, \infty)$, således at

$$\delta(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y) \quad \text{for alle } x, y \text{ i } S.$$

Med $\mathrm{Lip}(S, \rho)$ betegnes mængden af Lipschitz funktioner $f : (S, \rho) \to \mathbb{R}$.
Med $\mathrm{Lip}_b(S, \rho)$ betegnes mængden af begrænsede Lipschitz funktioner $f : (S, \rho) \to \mathbb{R}$.

Lemma 5.1.10. Lad S og T være ikke-tomme mængder, og lad $G : S \times T \to \mathbb{R}$ være en nedadtil begrænset funktion (dvs. G opfylder, at $\inf_{(x,y) \in S \times T} G(x, y) > -\infty\big)$.
For vilkårlige x, x' i S gælder der da, at

$$\left|\inf_{y \in T} G(x, y) - \inf_{y \in T} G\left(x', y\right)\right| \leq \sup_{y \in T} \left|G(x, y) - G\left(x', y\right)\right|.$$

Lemma 5.1.11. Lad (S,ρ) være et metrisk rum, og lad $g : S \to [0,\infty)$ være en vilkårlig ikke-negativ funktion. Betragt for hvert $ki\mathbb{N}$ funktionen $g_k : S \to [0,\infty)$ givet ved

$$g_k(x) = \inf_{y\in S}(g(y) + k\rho(x,y)), \quad (x \in S)$$

(i) For hvert $ki\mathbb{N}$ er g_k en Lipschitz funktion med konstant k :

$$|g_k(x) - g_k(x')| \leq k\rho(x,x'), \quad (x,x' \in S)$$

(ii) For vilkårlige $ki\mathbb{N}, x$ iS og $r > 0$ gælder der, at

$$0 \leq \left(\inf_{y\in b(x,r)} g(y)\right) \wedge kr \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \leq g(x)$$

(iii) Hvis g er kontinuert i $x \in S$, gæ/der der, at $g_k(x) \uparrow g(x)$ for $k \to \infty$.

5.2 Portmanteau sætningerne

Sætning 5.2.1. Lad $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et metrisk rum (S,ρ), og lad μ være et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mu$.

(ii) $\forall f \in C(S)^+ : \int_S f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(\mathsf{X}_n)]$.

(iii) $\forall f \in C_b(S)^+ : \int_S f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(\mathsf{X}_n)]$.

Bemærkning 5.2.2.

Sætning 5.2.3 (Portmanteau Sætning I). Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et metrisk rum (S,ρ), og lad μ være et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mu$.

(ii) $\int_S g \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[g(\mathsf{X}_n)]$ for alle $gi \operatorname{Lip}_b(S,\rho)^+$.

(iii) $\mu(G) \leq \liminf_{n\to\infty} P(\mathsf{X}_n \in G)$ for enhver åben delmængde. G af S.

(iv) $\mu(F) \geq \limsup_{n\to\infty} P(\mathsf{X}_n \in F)$ for enhver lukket delmængde. F af S.

Korollar 5.2.4. Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier *i* et metrisk rum (S, ρ), og lad μ være et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mu$.

(ii) For enhver mængde B i $\mathcal{B}(S)$ gælder der, at

$$\mu\left(B^\circ\right) \leq \liminf_{n\to\infty} P\left(\mathsf{X}_n \in B\right) \leq \limsup_{n\to\infty} P\left(\mathsf{X}_n \in B\right) \leq \mu(\bar{B})$$

hvor $B^\circ = \left(\overline{B^c}\right)^c \subseteq \left(B^c\right)^c = B \subseteq \bar{B}$.

Hvis (i) og (ii) er opfyldte, gælder der yderligere, at

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} P\left(\mathsf{X}_n \in B\right)$$

for enhver mængde B fra $\mathcal{B}(S)$, således at $\mu\left(\bar{B} \backslash B^\circ\right) = 0$.

Sætning 5.2.5 (Portmanteau Sætning II). Lad (S, ρ) og (T, δ) være metriske rum, og udstyr $S \times T$ med en produktmetrik η. Betragt endvidere stokastiske funktioner $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ og $\mathsf{Y}, \mathsf{Y}_1, \mathsf{Y}_2, \mathsf{Y}_3, \ldots$ med værdier i hhv. (S, ρ) og (T, δ). Da gælder følgende udsagn:

(i) Hvis $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}$, gælder der også, at $f\left(\mathsf{X}_n\right) \xrightarrow{\sim} f(\mathsf{X})$ for enhver kontinuert afbildning $f : S \to T$.

(ii) Antag, at (T, δ) er separabelt. Hvis $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}, \mathsf{Y}_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Y}$, og Y er udartet, så gælder der også, at $(\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n) \xrightarrow{\sim} (\mathsf{X}, \mathsf{Y})$.

(iii) Antag, at (S, ρ) og (T, δ) er separable. Hvis $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}, \mathsf{Y}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{Y}$ og $\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n$ er uafhængige for alle n, da gælder der også, at

$$(\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n) \xrightarrow{\sim} P_{\mathsf{X}} \otimes P_{\mathsf{Y}}, \quad \text{dvs.} \quad P_{\mathsf{X}_n} \otimes P_{\mathsf{Y}_n} \xrightarrow{\text{w}} P_{\mathsf{X}} \otimes P_{\mathsf{Y}}$$

Bemærkning 5.2.6. Udsagn (ii) i Portmanteau II gælder ikke generelt, hvis Y ikke er udartet. Betragt nemlig f.eks. en symmetrisk stokastisk variabel X(dvs.$\mathsf{X} \sim -\mathsf{X}$), og definér så

$$\mathsf{X}_k = \mathsf{X}, \quad \text{og} \quad \mathsf{Y}_k = -\mathsf{X}, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Så gælder der oplagt, at $\mathsf{X}_k \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}$, og $\mathsf{Y}_k \xrightarrow{\sim} -\mathsf{X} \sim \mathsf{X}$. Hvis (ii) gjaldt generelt, kunne vi så slutte, at $(\mathsf{X}_k, \mathsf{Y}_k) \xrightarrow{\sim} (\mathsf{X}, \mathsf{X})$. Anvendes så (i) i Portmanteau II på funktionen $f(x, y) = x+y$, ville det følge, at

$$0 = \mathsf{X}_k + \mathsf{Y}_k = f\left(\mathsf{X}_k, \mathsf{Y}_k\right) \xrightarrow{\sim} f(\mathsf{X}, \mathsf{X}) = 2\mathsf{X}.$$

Dette er oplagt forkert, med mindre $\mathsf{X} \sim \delta_0$ (jvf. 5.1.5).

5.3 Stramhed

Definition 5.3.1 (Stramhed). Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad $\mathcal{K}$ betegne systemet af kompakte delmængder af S.

(a) En familie $\mathcal{M}$ af sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$ siges at være stram, hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathcal{K} : \sup_{\mu \in \mathcal{M}} \mu\left(K^c\right) \leq \epsilon$$

(b) En familie $\mathcal{H}$ af stokastiske funktioner med værdier i (S, ρ) siges at være stram, hvis mængden $\{P_{\mathsf{X}} \mid \mathsf{X} \in \mathcal{H}\}$ er stram i henhold til (a); dvs. hvis

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathcal{K} : \sup_{\mathsf{X} \in \mathcal{H}} P\left(\mathsf{X} \in K^c\right) \leq \epsilon,$$

eller ækvivalent:

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathcal{K} : \inf_{\mathsf{X} \in \mathcal{H}} P(\mathsf{X} \in K) \geq 1 - \epsilon$$

Bemærkning 5.3.2.

1. Lad $\mathcal{M}_1$ og $\mathcal{M}_2$ være to mængder af sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$. Da gælder implikationerne:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 \text{ stram og } \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 &\Longrightarrow \mathcal{M}_1 \text{ stram} \\ \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \text{ stramme } &\Longrightarrow \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \text{ stram} \end{aligned}$$

2. For ethvert sandsynlighedsmål μ på $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ er $\{\mu\}$ stram. Vi har nemlig (i tilfældet $d = 1$), at

$$\mu\left([-N, N]^c\right) = 1 - \mu([-N, N]) \xrightarrow[N \to \infty]{} 1 - \mu(\mathbb{R}) = 0$$

Og her er $[-N, N]$ kompakt for alle N i $\mathbb{N}$.

3. Specielt er enhver endelig familie af ssh.-mål på $\mathbb{R}^d$ (eller af d-dim. stokastiske vektorer) automatisk stram.

4. En familie $\mathcal{H}$ af d-dimensionale stokastiske vektorer er stram, hvis der findes $\alpha > 0$, således at

$$\sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{H}} \mathbb{E}\left[\|\mathsf{X}\|^\alpha\right] < \infty.$$

Det følger nemlig fra Markovs Ulighed, at

$$\sup_{\mathsf{X} \in \mathcal{H}} P(\|\mathsf{X}\| > N) \leq \frac{1}{N^\alpha} \sup_{\mathsf{X} \in \mathcal{H}} \mathbb{E}\left[\|\mathsf{X}\|^\alpha\right], \text{ hvor } \frac{1}{N^\alpha} \to 0 \text{ for } N \to \infty.$$

Sætning 5.3.3. Lad $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge af d-dimensionale stokastiske vektorer. Det er følgende betingelser hver især tilstrækkelige for, at $\{\mathsf{X}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ er stram:

(i) Der findes et sandsynlighedsmål μ på $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, således at $\mathsf{X}_k \xrightarrow{\sim} \mu$.

(ii) $\forall \epsilon > 0 \exists a > 0 : \liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-a\|\mathsf{X}_k\|^2}\right] > 1 - \epsilon$.

5.4 Konvergens i fordeling for stokastiske variable

Sætning 5.4.1. Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og lad μ være et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Betragt endvidere de tilhørende fordelingsfunktioner:

$$F_n(x) = P_{\mathsf{X}_n}((-\infty, x]) = P\left(\mathsf{X}_n \in (-\infty, x]\right), \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}),$$
$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]), \quad (x \in \mathbb{R})$$

Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mu$.

(ii) $F_\mu(x-) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F_\mu(x)$ for alle $xi\mathbb{R}$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_\mu(x)$ for alle $xi\mathbb{R}$, hvor $\mu(\{x\}) = 0$.

(iv) Der findes en tæt delmængde D af $\mathbb{R}$, således at

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_\mu(x) \quad \text{for alle } xiD$$

(v) $\mu((a, b)) \leq \liminf_{n\to\infty} P\left(a < \mathsf{X}_n < b\right)$ for alle $a, bi\overline{\mathbb{R}}$, så $a < b$.

Sætning 5.4.2. Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots$ være stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og betragt de tilhørende fordelingsfunktioner $F_\mathsf{X}, F_{\mathsf{X}_1}, F_{\mathsf{X}_2}, \ldots$. Antag at $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}$ for $n \to \infty$, og at F_X er kontinuert. Da gælder der at

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{\mathsf{X}_n}(x) - F_\mathsf{X}(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

dvs. $F_{\mathsf{X}_n} \to F_\mathsf{X}$ uniformt på $\mathbb{R}$

Definition 5.4.3 (limespunkt). Lad (X_k) være en følge af stokastiske funktioner med værdier i et metrisk rum (S, ρ).
Et sandsynlighedsmål μ på $(S, \mathcal{B}(S))$ kaldes da for et limespunkt for $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, hvis der findes en voksende følge $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ af naturlige tal, således at

$$\mathsf{X}_{k_\ell} \xrightarrow{\sim} \mu \quad \text{for } \ell \to \infty$$

Sætning 5.4.4 (Hellys Lemma). Lad $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge af fordelingsfunktioner. Da findes en voksende følge $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ af naturlige tal, og en voksende, højrekontinuert funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, således at

$$\lim_{\ell\to\infty} F_{k_\ell}(x) = F(x) \qquad \text{for alle } x \text{ i } C_F$$

Her betegner C_F mængden af kontinuitetspunkter for F, dvs.

$$C_F = \{x \in \mathbb{R} \mid F \text{ er kontinuert } ix\}$$

Specielt gælder der, at $F_{k_\ell} \to F$ punktvist, for $\ell \to \infty$, hvis F er kontinuert.

Bemærkning 5.4.5.

Sætning 5.4.6 (Helly-Bray's Sætning). Lad $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge af d-dimensionale stokastiske vektorer, og antag, at $\{\mathsf{X}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ er stram.
Da gælder følgende udsagn:

(i) $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ har mindst ét limespunkt.

(ii) Hvis $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kun har ét limespunkt μ, så gælder der, at $\mathsf{X}_k \xrightarrow{\sim} \mu$ for $k \to \infty$.