1 Fourier-transformation og karakteristiske funktioner

1.1 Definition og indledende bemærkninger

Definition 1.1.1. Lad μ være et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Den Fourier-transofrmerede af μ er funktionen $\hat{\mu} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle}\mu(\mathrm{d}\,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle t,x\rangle)\mu\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^d} \sin(\langle t,x\rangle)\mu\,\mathrm{d}\,x$$

for ethvert t i $\mathbb{R}^d$. I tilfældet $d = 1$ ser vi specielt, at

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\,tx}\mu(\mathrm{d}\,x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\mu\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\mu\,\mathrm{d}\,x$$

for ethvert t i $\mathbb{R}$

Bemærkning 1.1.2. Antag, at μ er et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ med tæthed f fra $\mathcal{L}^1(\lambda)^+$ med hensyn til λ. Det følger da for ethvert t i $\mathbb{R}$, at

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\,tx}\mu(\mathrm{d}\,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\,tx} f(x)\lambda(\mathrm{d}\,x) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(-t),$$

hvor $\hat{f}$ betegner den Fourier-transformerede af f (jvf. Definition 12.1.1 i [M&I])

Eksempel 1.1.3 (Den Fourier-transformerede af normalfordelingen). Vi har

$$\widehat{N(\xi,\sigma^2)}(t) = e^{\mathrm{i}\,t\xi}e^{-\sigma^2t^2/2}$$

for ethvert t i $\mathbb{R}$

Sætning 1.1.4. Lad μ og ν være ssh.-mål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ hhv. $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Da gælder følgende udsagn:

(i) $|\hat{\mu}(t)| \leq \hat{\mu}(0) = 1$ for alle t i $\mathbb{R}^d$

(ii) $\hat{\mu} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ er en kontinuert funktion.

(iii) $\hat{\mu}(-t) = \overline{\hat{\mu}(t)}$ for alle t i $\mathbb{R}^d$

(iv) Hvis $d = m$ gælder der, at

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}(t)\nu(\mathrm{d}\,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\nu}(t)\mu(\mathrm{d}\,t)$$

(v) $\widehat{\mu\otimes\nu}(t,s) = \hat{\mu}(t)\hat{\nu}(s)$ for alle (t,s) i $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{d+m}$

(vi) $\widehat{\mu * \nu}(t,s) = \hat{\mu}(t)\cdot\hat{\nu}(t)$ for alle t i $\mathbb{R}^d$

Definition 1.1.5. Lad X være en d-dimensionel stokastisk vektor defineret op sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Den karakteristiske funktion for X er funktionen $\varphi_{\mathsf{X}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ givet ved

$$\varphi_{\mathsf{X}} = \hat{P_{\mathsf{X}}}, \quad \text{hvor } P_{\mathsf{X}} = P \circ \mathsf{X}^{-1}$$

For ethvert t i $\mathbb{R}^d$ hat vi altså, at

$$\varphi_{\mathsf{X}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle} P_{\mathsf{X}}(\mathrm{d}\,x) = \int_{\Omega} e^{\mathrm{i}\langle t,\mathsf{X}(\omega)\rangle} P(\mathrm{d}\,\omega) = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle}]$$

Eksempel 1.1.6. Hvis X er normalfordelt, så har vi

$$\varphi_{\mathsf{X}}(t) = \widehat{N(\xi, \sigma^2)}(t) = e^{\mathrm{i}\,t\xi} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

for alle t i $\mathbb{R}$

Korollar 1.1.7 (Egenskaber ved den karakteristiske funktion). Lad X og Y være hhv. d- og m-dimensionale stokastiske vektorere definerede på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da gælder følgende udsagn:

(i) $|\varphi_{\mathsf{X}}(t)| \leq \varphi_{\mathsf{X}}(0) = 1$ for alle t i $\mathbb{R}^d$

(ii) Funktionen $\varphi_{\mathsf{X}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ er kontinuert.

(iii) $\varphi_{\mathsf{X}}(-t) = \varphi_{-\mathsf{X}}(t) = \overline{\varphi_{\mathsf{X}}(t)}$ for alle t i $\mathbb{R}^d$

(iv) For enhver $m \times n$ matrix A og enhver vektor b i $\mathbb{R}^m$ gælder formlen:

$$\varphi_{A\mathsf{X}+b}(s) = e^{\mathrm{i}\langle s,b\rangle} \varphi_{\mathsf{X}}(A^T s), \quad (s \in \mathbb{R}^m)$$

(v) Hvis $d = m$, gælder formlen: $\mathbb{E}[\varphi_{\mathsf{Y}}(\mathsf{X})] = \mathbb{E}[\varphi_{\mathsf{X}}(\mathsf{Y})]$

(vi) Hvis X og Y er uafhængige, gælder formlen:

$$\varphi_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(t, s) = \varphi_{\mathsf{X}}(t)\varphi_{\mathsf{Y}}(s), \quad (t \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}^m)$$

(vii) Hvis $d = m$, og X og Y er uafhængige, gælder formlen:

$$\varphi_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}(t) = \varphi_{\mathsf{X}}(t)\varphi_{\mathsf{Y}}(t) = \varphi_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(t, t), \quad (t \in \mathbb{R}^d)$$

1.2 Entydighed og Inversionsætningen for karakteristiske funktioner

Lemma 1.2.1. Lad μ og ν være to mål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ og antag at $\mu((-n, n)^d) < \infty$ for alle n i $\mathbb{N}$, samt at

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi \,\mathrm{d}\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \psi \,\mathrm{d}\,\nu \quad \text{for alle } \psi \text{ i } C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})^+$$

Da gælder der, at $\mu = \nu$

Altså at ψ tilhører alle kontinuerte funktioner med kompakt støtte.

Lemma 1.2.2. Lad X og Y være uafhængiged d-dimensionale stokastiske vektorer definerede på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at X er absolut kontinuert med tæthed f_{X} (med hensyn til λ_d).
Da er $\mathsf{X} + \mathsf{Y}$ ligeledes absolut kontinuert med λ_d-tæthed $f_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}$ givet ved

$$f_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f_{\mathsf{X}}(z-y) P_{\mathsf{Y}}(\mathrm{d}\, y), \quad (z \in \mathbb{R}^d)$$

Lemma 1.2.3. Lad X og U være uafhængige d-dimensionale stokastiske vektorer på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at $\mathsf{U} = (\mathsf{U}_1, \ldots, \mathsf{U}_d)$, hvor $\mathsf{U}_1, \ldots, \mathsf{U}_d$ er uafhængige identisk $N(0,1)$-fordelte stokastiske variable.
For ethvert σ i $(0, \infty)$ gælder der da, at $\mathsf{X} + \sigma\mathsf{U}$ er absolut kontinuert med tæthed $f_{\mathsf{X}+\sigma\mathsf{U}}$ givet ved:

$$f_{\mathsf{X}+\sigma\mathsf{U}}(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\|s\|^2} e^{-\mathrm{i}\langle t,s\rangle} \varphi_{\mathsf{X}}(s) \lambda_d(\mathrm{d}\, s), \quad (t \in \mathbb{R}^d),$$

hvor φ_{X} er den karakteristiske funktion for X

Lemma 1.2.4. Lad X og U være d-dimensionale stokastiske vektorer defineret på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og betragt for ethvert n i $\mathbb{N}$ den stokastiske vektor $\mathsf{X} + \frac{1}{n}\mathsf{U}$.
For enhver funktion ψ fra $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ gælder der da, at

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(t) P_{\mathsf{X}+\frac{1}{n}\mathsf{U}}(\mathrm{d}\, t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t) P_{\mathsf{X}}(\mathrm{d}\, t)$$

Sætning 1.2.5. (i) Lad X og Y være d-dimensionale stokastiske vektorer. Da gælder implikationen

$$\varphi_{\mathsf{X}} = \varphi_{\mathsf{Y}} \Longrightarrow \mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$$

(ii) Lad μ og ν være sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Da gælder implikationen:

$$\hat{\mu} = \hat{\nu} \Longrightarrow \mu = \nu$$

Bemærkning 1.2.6. X og Y behøver ikke at være defineret på samme sandsynlighedsfelt. Der kan derfor findes stokastiske variable $\tilde{\mathsf{X}}, \tilde{\mathsf{Y}}$ således at $\tilde{\mathsf{X}} \sim \mathsf{X}$ og $\tilde{\mathsf{Y}} \sim \mathsf{Y}$ og ræssonere:

$$\varphi_{\mathsf{X}} = \varphi_{\mathsf{Y}} \Longleftrightarrow \varphi_{\tilde{\mathsf{X}}} = \varphi_{\tilde{\mathsf{Y}}} \Longrightarrow \tilde{\mathsf{X}} \sim \tilde{\mathsf{Y}} \Longrightarrow \mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$$

Korollar 1.2.7. Lad X og Y være hhv. d- og m-dimensionale stokastiske vektorer definerede på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da er X og Y uafhængige, hvis og kun hvis der gælder, at

$$\varphi_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(t,s) = \varphi_{\mathsf{X}}(t)\varphi_{\mathsf{Y}}(s) \quad \text{for alle } t \text{ i } \mathbb{R}^d, \text{og } s \text{ i } \mathbb{R}^m$$

Sætning 1.2.8 (Inversionssætningen for karakteristiske funktioner). Lad X være en d-dimensional stokastisk vektor på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at dens karakteristiske funktion φ_{X} er element i $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$. Da er P_{X} absolut kontinuert med tæthed f_{X} givet ved:

$$f_{\mathsf{X}}(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle t,s\rangle} \varphi_{\mathsf{X}}(s) \lambda_d(\mathrm{d}\, s), \quad (t \in \mathbb{R}^d)$$

Proof. Proof □

1.3 Differentiabilitet og Taylor-udvikling for karakteristiske funktioner

Sætning 1.3.1 (Differentiabilitet for den karakteristiske funktion). (i) Lad μ være et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, og antag at $p \in \mathbb{N}_0$, således at $\int_{\mathbb{R}} |x|^p \mu(\mathrm{d}\, x) < \infty$.
Da er $\hat{\mu}$ p-gange differentiabel med afledede

$$\hat{\mu}^{(k)}(t) = \mathrm{i}^k \int_{\mathbb{R}} \mathsf{x}^k e^{\mathrm{i}\,\mathsf{x}t} \mu(\mathrm{d}\, x), \quad (t \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \ldots, p).$$

(ii) Lad X være en stokastisk variabel defineret på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at $p \in \mathbb{N}_0$, således at $\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p] < \infty$.
Da er φ_{X} p-gange differentiabel med afledede:

$$\varphi^{(k)}_{\mathsf{X}}(t) = \mathrm{i}\, \mathbb{E}[\mathsf{X}^k e^{\mathrm{i}\, t\mathsf{X}}], \quad (t \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \ldots, p).$$

Specielt er

$$\mathbb{E}[\mathsf{X}^k] = \mathrm{i}^{-k}\, \varphi^{(k)}_{\mathsf{X}}(0), \quad (k = 0, 1, \ldots, p).$$

Bemærk at ii) følger af i)

Lemma 1.3.2. For hvert $n \in \mathbb{N}_0$ defineres funktionen $r_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved

$$r_n(t) = e^{\mathrm{i}\, t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{i}^k\, t^k}{k!}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Da gælder vurderingen:

$$|r_n(t)| \leq \frac{2|t|^n}{n!} \wedge \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ovenstående kan også skrives som

$$|r_n(t)| \leq \min\{\frac{2|t|^n}{n!}, \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}\}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Korollar 1.3.3. Lax X være en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, således at $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. For ethvert α i $[2,3]$ gælder da vurderingen:

$$\left|\varphi_{\mathsf{X}}(t) - 1 - \mathrm{i}\, t\mathbb{E}[\mathsf{X}] + \frac{1}{2}t^2\mathbb{E}[\mathsf{X}^2]\right| \leq |t|^\alpha \mathbb{E}[|\mathsf{X}|^\alpha], \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Korollar 1.3.4. Lad X være en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at $\sigma^2 := \mathbb{E}[\mathsf{X}^2] < \infty$, samt at $\mathbb{E}[\mathsf{X}] = 0$.
Da gælder der, at

$$\frac{\varphi_{\mathsf{X}}(t) - 1}{t^2} \longrightarrow -\frac{\sigma^2}{2} \quad \text{for } t \to 0.$$

Sætning 1.3.5 (Taylor-udvikling af den karakteristiske funktion). Lad X være en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med momenter af enhver orden. Antag yderligere at følgende betingelse er opfyldt:

$$\exists \rho \in (0, \infty) : \lim_{n\to\infty} \frac{\rho^n \mathbb{E}[|\mathsf{X}|^n]}{n!} = 0, \tag{1}$$

og vælg et ρ i henhold hertil. For ethvert a i $\mathbb{R}$ gælder der da, at Taylor-rækken for φ_{X} i a er konvergent i $[a-\rho, a+\rho]$ med sum φ_{X}, dsv.

$$\varphi_{\mathsf{X}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_{\mathsf{X}}^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k\, \mathbb{E}[\mathsf{X}^k e^{\mathrm{i}\, a\mathsf{X}}]}{k!}(t-a)^k, \quad (t \in [a-\rho, a+\rho]).$$

Bemærkning 1.3.6. Betingelsen (1) er ækvivalent med følgende betingelse:

$$\exists c \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[|\mathsf{X}|^n] \leq c^n n!$$

Betingelsen er altså en begrænsning på hvor hurtigt momenterne må vokse med n.

1.4 Anvendelser af den karakteristiske funktion

Sætning 1.4.1. (i) Lad X være en symmetrisk stokastisk variabel, og lad videre $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være i.i.d stokastiske variable, således at $\mathsf{X}_n \sim \mathsf{X}$ for alle n.
Hvis yderligere $\mathsf{X} \sim \frac{\mathsf{X}_1 + \cdots + \mathsf{X}_n}{\sqrt{n}}$ for alle n, da gælder der, at $\mathsf{X} \sim N(0, \sigma^2)$ for passende σ i $[0, \infty)$

(ii) Lad X være en stokastisk variabel, og antag at $\sigma^2 := \mathbb{E}[\mathsf{X}^2] < \infty$. Antag endvidere, at $\mathsf{X} \sim \frac{\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2}{\sqrt{2}}$, hvor $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2$ er i.i.d, og $\mathsf{X}_1 \sim \mathsf{X}$.
Da gælder der, at $\mathsf{X} \sim N(0, \sigma^2)$

For $\sigma = 0$ tænker vi på X som dirac-målet.

Lemma 1.4.2. Lad $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ være en følge af komplekse tal, således at $a_n \longrightarrow a \in \mathbb{C}$ for $n \to \infty$. Da gælder der, at

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = \exp(a),$$

hvor $\exp(a) = e^{\mathrm{Re}(a)}(\cos(\mathrm{Im}(a))) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(a)).$

1.5 Momentproblemet

Problemstilling 1.5.1 (Momentproblemet). Lad X og Y være to stokastiske variable, og antag, at $\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p], \mathbb{E}[|\mathsf{Y}|^p] < \infty$ for alle p i $\mathbb{N}$, samt at

$$\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p] = \mathbb{E}[|\mathsf{Y}|^p] \quad \text{for alle p i } \mathbb{N}$$

Under hvilke yderligere betingelser kan man da slutte at $X \sim \mathsf{Y}$?

Sætning 1.5.2. Lad X og Y være to stokastiske variable, og antag, at $\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p], \mathbb{E}[|\mathsf{Y}|^p] < \infty$ for alle p i $\mathbb{N}$, samt at

$$\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p] = \mathbb{E}[|\mathsf{Y}|^p] \quad \text{for alle p i } \mathbb{N}$$

Hvis yderligere

$$\exists \rho \in (0, \infty) : \mathbb{E}[e^{\rho|\mathsf{X}|}] < \infty,$$

da gælder der, at $\mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$

Til beviset for Sætning 1.5.2 får vi brog for følgende lemma:

Lemma 1.5.3. Lad X være en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $\exists \rho \in (0, \infty) : \mathbb{E}[e^{\rho|\mathsf{X}|}] < \infty$.

(ii) $\exists c \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[|\mathsf{X}|^n] \leq c^n n!$.

(iii) $\exists c \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[\mathsf{X}^{2n}] \leq c^{2n}(2n)!$.

Korollar 1.5.4. Lad X og Y være stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at P_{X} og P_{Y} begge har kompakt støtte, dvs.

$$\exists b < 0 : P(\mathsf{X} \in [-b, b]) = 1 = P(\mathsf{Y} \in [-b, b])$$

Da X og Y har momenter af enhver orden. Hvis yderligere $\mathbb{E}[\mathsf{X}^p] = \mathbb{E}[\mathsf{Y}^p]$ for alle p i $\mathbb{N}$, da gælder der, at $\mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$.

Korollar 1.5.5. Lad X være en ikke-negativ stokastisk variabel, og betragt dens **Laplace transformerede**:

$$L_{\mathsf{X}}(s) = \mathbb{E}[e^{-s\mathsf{X}}], \quad (s \in [0, \infty)).$$

Da er P_{X} entydigt bestemet af L_{X}. Med andre ord: Hvis Y er en anden ikke-negativ stokastisk variabel, således at $\text{Ł}_{\mathsf{Y}}(s) = L_{\mathsf{X}}(s)$ for alle s i $[0, \infty)$, da gælder der, at $\mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$.

2 Konvergens i mål og i sandsynlighed

2.1 De tre fundamentale konvergenstyper og deres indbyrdes styrkeforhold

Definition 2.1.1. Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p være et (strengt) positivt tal. Vi siger da, at

(a) f_n konvergerer mod f i $\mu-$mål for $n \to \infty$, hvis

$$\forall \epsilon > 0 : \mu\big(\{x \in \mathsf{X} \big| |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}\big) \longrightarrow 0 \quad \text{for } n \to \infty.$$

I så fald benyttes notationen: $f_n \to f$ i $\mu-$mål.

(b) f_n konvergerer mod f $\mu-$n.o. for $n \to \infty$, hvis

$$\mu\left(\{x \in X | \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}^c\right) = 0.$$

I så fald benyttes notationen: $f_n \to f \mu-$n.o.

(c) f_n konvergerer mod f i $\mu - p$ middel for $n \to \infty$, hvis

$$\int_X |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\,\mu \longrightarrow 0, \quad \text{for } n \to \infty$$

I så fald benyttes notationen: $f_n \to f$ i $\mu - p$-middel.

Bemærkning 2.1.2. Blandt andet linearitet bevarer konvergens.

Sætning 2.1.3. Lad " $\to$ " betegne én af de tre konvergensformer indført i Definition 2.1.1, og betragt funktioner $f, g, f_1, f_2, f_3, \ldots$ fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da gælder implikationen:

$$f_n \longrightarrow f, \;\; og \;\; f_n \longrightarrow g \quad \Longrightarrow \quad f = g \;\; \mu - \text{n.o}$$

Sætning 2.1.4. Lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p være et positivt tal. Da gælder følgende udsagn:

(i) Hvis $f_n \to f$ i $\mu - p$ middel, så gælder der også at $f_n \to f$ i $\mu-$mål.

(ii) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\,\mu < \infty$, så gælder der, at $f_n \to f \mu - n.o.$

(iii) Hvis $f_n \to f$ i $\mu-$mål, så findes en voksende følge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af naturlige tal, således at $f_{n_k} \to f\mu$-n.o. for $k \to \infty$

Sætning 2.1.5. Antag, at μ er et **endeligt mål**, lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p,r være positive tal. Da gælder følgende udsagn:

(i) Følgende betingelser er endbetydende:

  (i1) $f_n \to f$i $\mu -$ mål.

  (i2) $\forall K \in (0,\infty) : \lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} |f_n - f| \wedge K \,\mathrm{d}\,\mu = 0$.

  (i3) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} |f_n - f| \wedge 1 \,\mathrm{d}\,\mu = 0$.

(ii) Hvis $f_n \to f$ $\mu-$n.o., så gælder der også, at $f_n \to f$ i $\mu-$mål.

(iii) Hvis $r < p$, og $f_n \to f$ i $\mu-$p-middel, da gælder der også at $f_n \to f$ i $\mu-$r-middel.

2.2 Fuldstændighed

Definition 2.2.1. Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p være et strengt positivt tal. Vi siger da, at

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en **Cauchy-følge** i $\mu-$mål, hvis

$$\forall\epsilon > 0 : \lim_{n,m\to\infty} \mu\left(\{|f_n - f_m| > \epsilon\}\right) = 0.$$

eller udskrevet hvis

$$\forall\epsilon, \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \mu\left(\{|f_n - f_m| > \epsilon\}\right) \leq \delta$$

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en **Cauchy-følge** $\mu-$n.o., hvis $\mu(F^C) = 0$, hvor

$$F = \{x \in X | (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ er en Cauchy-følge i } \mathbb{R}\}$$

(c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en **Cauchy-følge** i $\mu - p$-middel, hvis

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_{\mathsf{X}} f_n - f_m|^p \,\mathrm{d}\,\mu = 0,$$

eller udskrevet hvis

$$\forall\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \int_{\mathsf{X}} |f_n - f_m|^p \,\mathrm{d}\,\mu \leq \epsilon.$$

Bemærkning 2.2.2. Mængden F er målelig - det følger af omskrivningen

$$F = \bigcap_{K\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m\geq N} \left\{ x \in X \middle| |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{K} \right\}.$$

Lemma 2.2.3. Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da gælder følgende udsagn:

(i) Lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og antag, at der findes en følge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af (strengt) positive tal, således at

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0, \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\{|f_n - f| > \epsilon_n\}\right) < \infty.$$

Da gælder der, at

$$f_n \to \ \mu - \text{n.o.}, \quad \text{og} \quad f_n \to f \text{ i } \mu\text{-mål}.$$

(ii) Antag, at der findes en følge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af (strengt) positive tal, således at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty, \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\{|f_{n+1} - f_n| > \epsilon_n\}\right) < \infty$$

Da findes der en funtkion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at

$$f_n \to f \ \mu\text{-n.o.}, \quad \text{og} \quad f_n \to f \text{ i } \mu\text{-mål}.$$

Sætning 2.2.4. Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) Der findes en funktion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at $f_n \to f$ i $\mu-$mål.

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i $\mu-$mål.

Med andre ord er konvergens i μ-mål et fuldstændigt konvergensbegreb.

Korollar 2.2.5. Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, lad (f_n) være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad p være et strengt positivt tal. Da er følgende betingelser ævkvivalente:

(i) Der findes en funktion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at $f_n \to f$ i μ-p-middel.

(ii) (f_n) er en Cauchy-følge i μ-p-middel.

Korollar 2.2.6. Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, lad p være et tal i $[1, \infty)$, og lad (f_n) være en følge af funktioner fra $\mathcal{L}^p(\mu)$. Da gælder implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ er konvergent i } \mu\text{-p-middel.}$$

Med andre ord gælder der, at **absolut konvergens medfører konvergens** i $\mathcal{L}^p(\mu)$.

2.3 Konvergens af f_n vs. konvergens af $|f_n|^p$

2.4 Konvergens i sandsynlighed

Definition 2.4.1. Lad (X_n) være en følge af stokastiske variable defineret på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og lad X være endnu en stokastisk variabel herpå. Lad endvidere r være et positivt tal. Vi siger da, at X_n konvergerer mod X

- **i sandsynlighed**, hvis der for ethvert positivt ϵ gælder, at

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mathsf{X}_n - \mathsf{X}| > \epsilon) = 0.$$

  I bekræftende fald skriver vi: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X}$ for $n \to \infty$.

- **i r-middel**, hvis

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|\mathsf{X}_n - \mathsf{X}|^r\right] = 0.$$

  I bekræftende fald skriver vi: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r(P)} \mathsf{X}$ for $n \to \infty$.

- **P-næsten overalt (eller P-næsten sikkert)**, hvis

$$P(\lim_{n\to\infty} \mathsf{X}_n = \mathsf{X}) = 1,$$

  eller mere udførligt, hvis $P(F) = 1$, hvor

$$F = \{\omega \in \Omega \big| \lim_{n\to\infty} \mathsf{X}_n(\omega) = \mathsf{X}(\omega)\} \in \mathcal{F}.$$

  I begræftende fald skriver vi: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X}$ (eller $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.s.}} \mathsf{X}$) for $n \to \infty$.

2.5 Konvergens i sandsynlighed på generelle metriske rum

Definition 2.5.1 (Produktmetrikker). Lad (S, ρ) og (T, δ) betegne metriske rum. En metrik η på $S \times T$ kaldes en **produktmetrik**, hvis den opfylder følgende betingelse:
For alle $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ i $S \times T$ galder bi-implikationen:

$$\lim_{n\to\infty} \eta\left((x_n, y_n), (x, y)\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n, x\right) = \lim_{n\to\infty} \delta\left(y_n, y\right) = 0$$

Bemærkning 2.5.2. Afbildningen $\rho : S \times S \to \mathbb{R}$ er $(B)(S \times S) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-målelig.

Definition 2.5.3 (Borel-algebraen på $S \times S$). Lad (S, ρ) være et metrisk rum. Borel-algebraen $\mathcal{B}(S \times S)$ på $S \times S$ defineres da ved

$$\mathcal{B}(S \times S) = \sigma(\mathcal{G}(\eta))$$

hvor η er en vilkårlig produktmetrik på $S \times S$.

Bemærkning 2.5.4. Hvis (S, ρ) er separabelt, så gælder:

$$\mathcal{B}(S \times S) = \mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(S).$$

Ydermere hvis X, Y er stokastiske funktioner på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et separabelt metrisk rum (S, ρ), da er afbildningen

$$D := \rho(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) : \Omega \to \mathbb{R}$$

$\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-målelig.

Definition 2.5.5. Lad (S, ρ) være et separabelt metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S, ρ).
Vi siger da, at

(a) X_n konvergerer mod X næsten overalt (skrevet: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X}$), hvis $P(F^C) = 0$, hvor

$$F = \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \to \infty} \rho\left(\mathsf{X}_n(\omega), \mathsf{X}(\omega)\right) = 0 \right\}$$

(b) X_n konvergerer mod X i sandsynlighed (skrevet: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{P}} \mathsf{X}$), hvis

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P\left(\rho\left(\mathsf{X}_n, \mathsf{X}\right) > \epsilon\right) = 0$$

Bemærkning 2.5.6. Betragt for hert n i $\mathbb{N}$ den stokastiske variable $D_n := \rho\left(\mathsf{X}_n, \mathsf{X}\right)$. Så har vi bi-implikationerne:

$$\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X} \iff D_n \xrightarrow{\text{n.o.}} 0, \quad \text{og} \quad \mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{P}} \mathsf{X} \iff D_n \xrightarrow{\text{P}} 0.$$

Sætning 2.5.7. Lad (S, ρ) være et separabelt metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S, ρ). Da gælder følgende udsagn:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X} \Longrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{P}} \mathsf{X}$.

(ii) Hvis $\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X}$, findes en voksende følge $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ af naturlige tal, således at $\mathsf{X}_{n_k} \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X}$.

(iii) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X} \iff \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\rho\left(\mathsf{X}_n, \mathsf{X}\right) \wedge 1\right] = 0$.

Sætning 2.5.8. Lad (S, ρ) være et separabelt metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S, ρ). Betragt endvidere endnu et separabelt metrisk rum $(\ T, \delta\ )$, og en $\mathcal{B}(S) - \mathcal{B}(T)$-målelig afbildning $f : S \to T$. Antag, at der findes en mængde C i $\mathcal{B}(S)$, således at

$$P(\mathsf{X} \in C) = 1, \quad \text{og} \quad f \text{ er kontinuert i ethvert punkt x fra C.}$$

Da gælder følgende implikationer:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X} \Longrightarrow f(\mathsf{X}_n) \xrightarrow{\text{n.o.}} f(\mathsf{X})$.

(ii) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X} \Longrightarrow f(\mathsf{X}_n) \xrightarrow{P} f(\mathsf{X})$.

Bemærkning 2.5.9. Antag, at ρ, ρ' er to ækvivalente metrikker på S, således at (S, ρ) og (S, ρ') er separable.

Betragt afbildningerne id: $(S, \rho) \to (S, \rho') \circ \text{ogid}' : (S, \rho') \to (S, \rho)$ givet ved

$$\text{id}(x) = \text{id}'(x) = x, \quad (x \in S)$$

Da ρ og ρ' er ækvivalente, er id og id $'$ begge kontinuerte. Det følger derfor umiddelbart fra Sætning 2.5.8, at

$$\mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o. /P}} \mathsf{X} \text{ mht. } \rho \Longrightarrow \mathsf{X}_n = \text{id}(\mathsf{X}_n) \xrightarrow{\text{n.o. /P}} \text{id}(\mathsf{X}) = \mathsf{X} \text{ mht. } \rho'.$$

Overgang til en ækvivalent metrik ændrer altså ikke på, om $\mathsf{X}_n \to \mathsf{X}$ n.o./ i sandsynlighed eller ej.

Sætning 2.5.10. Lad (S, ρ) og (T, δ) være separable metriske rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ samt $\mathsf{Y}, \mathsf{Y}_1, \mathsf{Y}_2, \mathsf{Y}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i hhv. (S, ρ) og (T, δ). Udstyr endvidere $S \times T$ med en produktmetrik η. Da gælder bi-implikationerne:

(i) $(\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n) \xrightarrow{\text{n.o.}} (\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \Longleftrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{X}$ og $\mathsf{Y}_n \xrightarrow{\text{n.o.}} \mathsf{Y}$.

(ii) $(\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n) \xrightarrow{P} (\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \Longleftrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X}$ og $\mathsf{Y}_n \xrightarrow{P} \mathsf{Y}$.

3 Uniform integrabilitet

3.1 Definition og indledende begreber

Definition 3.1.1. En delmængde $\mathcal{H}$ af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ siges at være uniformt integrabel (mht. μ), hvis den opfylder følgende betingelse:

$$\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 \forall f \in \mathcal{H} : \int_{\{|f|>K\}} |f| \mathrm{d}\mu \leq \epsilon.$$

eller ækvivalent:

$$\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 : \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{\{|f|>K\}} |f| \mathrm{d}\mu \leq \epsilon.$$

Bemærkning 3.1.2. (i) Hvis $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel, da gælder der automatisk at $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$. For hvis $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel kan vi f.eks. vælge $K > 0$, således at

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{\{|f|>K\}} |f| \mathrm{d}\mu \leq 1$$

For hvert f fra $\mathcal{H}$ har vi da, at

$$\begin{aligned}
\int_X |f| \mathrm{d}\mu &= \int_{\{|f| \leq K\}} |f| \mathrm{d}\mu + \int_{\{|f|>K\}} |f| \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_{\{|f| \leq K\}} K \, \mathrm{d}\mu + 1 \leq K\mu(X) + 1 < \infty
\end{aligned}$$

(ii) Hvis $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel, gælder dette også enhver delmængde $\mathcal{H}_0$ af $\mathcal{H}$.

Hvis $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ er endeligt mange uniformt integrable delmængder af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, da er $\bigcup_{j=1}^n \mathcal{H}_j$ ligeledes uniformt integrabel.

Specielt fremgår det, at enhver endelig delmængde $\{f_1, \ldots, f_n\}$ af $\mathcal{L}^1(\mu)$ er uniformt integrabel.

Lemma 3.1.3. Lad $\mathcal{H}$ være en delmængde af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad (f_n) og (g_n) være følger af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

(i) Hvis $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel, da er også mængden

$$\tilde{\mathcal{H}} := \{f \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \big| \exists g \in \mathcal{H} : |f| \leq |g| \mu\text{-n.o.}\},$$

uniformt integrabel.

(ii) For enhver funktion g fra $\mathcal{L}^1(\mu)^+$ er mængden $\{f \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \big| |f| \leq g \mu\text{-n.o.}\}$ uniformt integrabel.

(iii) Hvis mængden $\{g_n | n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel, og $|f_n| \leq |g_n| \mu$-n.o. for alle n, da er mængden $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ ligeledes uniformt integrabel.

Sætning 3.1.4. En delmængde $\mathcal{H}$ af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ er uniformt integrabel, hvis og kun hvis den opfylder følgende to betingelser:

(i) $\sup_{f \in \mathcal{H}} \int_X |f| \mathrm{d}\mu < \infty$.

(ii) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{E} : \mu(A) \leq \delta \Longrightarrow \sup_{\delta \in \nu} \int_\Delta |f| \mathrm{d}\mu \leq \epsilon$.

Korollar 3.1.5. Antag, at $\mathcal{H}_1$ og $\mathcal{H}_2$ er to uniformt integrable delmængder af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da er mængden

$$\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \{f_1 + f_2 \mid f_1 \in \mathcal{H}_1, f_2 \in \mathcal{H}_2\}$$

også uniformt integrabel.

Sætning 3.1.6. Lad $\mathcal{H}$ være en delmængde af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og antag, at der findes en Borel-målelig funktion $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, således at følgende to betingelser er opfyldte:

(i) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\varphi(x)} = 0$

(ii) $\sup_{f \in \mathcal{H}} \int_X \varphi \circ |f| \mathrm{d}\mu < \infty$.

Da er $\mathcal{H}$ uniformt integrabel.

3.2 Uniform integrabilitet vs. konvergens i μ-middel

Sætning 3.2.1. Lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.
Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $f \in \mathcal{L}^1(\mu), f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ for alle n, og $f_n \to f$ i μ-1-middel.

(ii) $f_n \to$ f i μ-mål, og mængden $\mathcal{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel.

Korollar 3.2.2. Lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad p være et tal $i(0, \infty)$.
Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i_p) $f \in \mathcal{L}^p(\mu), f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ for alle n, og $f_n \to f$ i μ-p-middel.

(ii_p) $f_n \to f$ i μ-mål, og mængden $\mathcal{H} = \{|f_n| \, p \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel.

4 Summer af uafhængige stokastiske variable og store tals stærke lov

4.1 Lévys Ulighed

Sætning 4.1.1 (Lévys Ulighed). Lad $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n$ være uafhængige, symmetriske stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da gælder uligheden:

$$P\left(\max_{k=1,\ldots,n}\left|\sum_{j=1}^{k}\mathsf{X}_j\right| > t\right) \leq 2P\left(\left|\sum_{j=1}^{n}\mathsf{X}_j\right| > t\right) \qquad \text{for alle } ti(0,\infty).$$

Hvis vi sætter

$$\mathsf{S}_k = \mathsf{X}_1 + \cdots + \mathsf{X}_k, \quad (k \in \{1, 2, \ldots, n\})$$

og

$$\mathsf{M}_n = \max_{k=1,\ldots,n} |\mathsf{S}_k|$$

da kan uligheden skrives:

$$P\left(M_n > t\right) \leq 2P\left(|\mathsf{S}_n| > t\right) \qquad \text{for alle t i } (0,\infty).$$

Korollar 4.1.2. Lad $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n$ være uafhængige, symmetriske stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Sæt

$$\mathsf{S}_k = \mathsf{X}_1 + \cdots + \mathsf{X}_k, \quad (k \in \{1, 2, \ldots, n\})$$

og

$$\mathsf{M}_n = \max_{k=1,\ldots,n} |\mathsf{S}_k|$$

Da gælder uligheden:

$$\mathbb{E}\left[\mathsf{M}_n^p\right] \leq 2\mathbb{E}\left[|\mathsf{S}_n|^p\right] \qquad \text{for alle } p \text{ i } (0,\infty)$$

4.2 Konvergens af summer af uafhænige stokastiske variable

Lemma 4.2.1. Lad (Y_n) være en følge af stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og definér for hvert p i $\mathbb{N}$:

$$\mathsf{L}_p = \sup_{k,\ell \geq p} |\mathsf{Y}_k - \mathsf{Y}_\ell| \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{F})^+$$

Da er følgende to udsagn ækvivalente:

(i) Der findes en stokastisk variabel Y på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, således at $\mathsf{Y}_n \to \mathsf{Y}$ P-n.o. for $n \to \infty$.

(ii) $\mathsf{L}_p \wedge 1 \to 0$ i sandsynlighed for $p \to \infty$.

Lemma 4.2.2. Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige, symmetriske stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da gælder bi-implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n \text{ konvergerer P-n.o.} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n \text{ konvergerer i sandsynlighed.}$$

Bemærkning 4.2.3 (Det målelige rum $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$). Betragt vektorrummet

$$\mathbb{R}^\infty = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \text{ for alle } n \text{ i } \mathbb{N} \right\}$$

For n i $\mathbb{N}$ og mængder $B_1, \dots, B_n$ i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sætter vi

$$[B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots] = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n \right\}$$

Vi sætter endvidere

$$\mathcal{J} = \{[B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots] \mid n \in \mathbb{N}, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

og

$$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^\infty\right) = \sigma(\mathcal{J})$$

For hvert k i $\mathbb{N}$ betragter vi afbildningen $p_k : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ givet ved

$$p_k\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = x_k, \quad \left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty\right)$$

Vi bemærker for B_k i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, at

$$\begin{aligned} p_k^{-1}(B_k) &= \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid x_k \in B_k \right\} \\ &= [\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{k-1 \text{ gange}} \times B_k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots] \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^\infty\right) \end{aligned}$$

og for $B_1, \dots, B_n$ i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, at

$$[B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots] = p_1^{-1}(B_1) \cap p_2^{-1}(B_2) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(B_n)$$

Dermed er $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ den mindste σ-algebra på $\mathbb{R}^\infty$, som g $\not f\, p_1, p_2, p_3, \ldots$ målelige. Bemærk specielt, at

$$\begin{aligned}
C &:= \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid \lim_{n\to\infty} x_n \text{ eksisterer i } \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ er en Cauchy-følge } \right\} \\
&= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}k,\ell\geq N} \bigcap_{n} \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \middle| \left| p_k((x_n)) - p_\ell((x_n)) \right| \leq \frac{1}{m} \right\} =: A \\
&= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}k,\ell\geq N} \bigcap_{N} (p_k - p_\ell)^{-1} \left(\left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m} \right] \right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty).
\end{aligned}$$

Bemærkning 4.2.4 (Den simultane fordeling af en følge af stokastiske variable). Betragt nu et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ og en følge $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af stokastiske variable defineret herpå. Vi kan da betragte afbildningen $\mathbb{X} : \Omega \to \mathbb{R}^\infty$ givet ved

$$\mathbb{X}(\omega) = (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}, \quad (\omega \in \Omega)$$

Vi bemærker, at $\mathbb{X}$ er $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$-målelig:

$$\mathbb{X}^{-1}([B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots]) = \{\mathsf{X}_1 \in B_1\} \cap \cdots \cap \{\mathsf{X}_n \in B_n\} \overset{?}{\in} \mathcal{F}$$

for alle n i $\mathbb{N}$ og $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dermed kan vi betragte fordelingen P_{X} af $\mathbb{X}$, dvs. ssh-målet

$$P_{\mathsf{X}}(A) = P(\mathbb{X} \in A) = P\left(\mathbb{X}^{-1}(A)\right), \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$$

Da $\mathcal{J}$ er $\cap$-stabilt, er P_{X} entydigt bestemt af tallene:

$$P_{\mathsf{X}}([B_1 \times \cdots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots]) = P(\mathsf{X}_1 \in B_1, \ldots, \mathsf{X}_n \in B_n)$$

for $n \in \mathbb{N}$ og $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (jvf. Sætn. 2.2.1 i [M&I]).

Bemærkning 4.2.5 (Konvergens i termer af den simultane fordeling). Vi bemærker specielt, at

$$(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergerer n.o. } \iff P(\mathbb{X} \in C) = 1 \iff P_{\mathsf{X}}(C) = 1$$

og at $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer i ssh. $\iff$ $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i ssh.

$$\begin{aligned}
&\iff \forall \epsilon > 0 : \lim_{n,m\to\infty} P(|\mathsf{X}_n - \mathsf{X}_m| > \epsilon) = 0 \\
&\iff \forall \epsilon > 0 : \lim_{n,m\to\infty} P_{\mathsf{X}}\left((p_n - p_m)^{-1} ([-\epsilon, \epsilon]^c) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Dermed afhænger konvergens n.o. og i ssh. kun af P_{X}. Hvis $P_{\mathsf{X}} = P_{\mathsf{Y}}$ gælder der altså, at $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer i ssh./n.o. $\iff$ $(\mathsf{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer i ssh./n.o. og at $(\sum_{k=1}^n \mathsf{X}_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. i ssh./n.o. $\iff$ $(\sum_{k=1}^n \mathsf{Y}_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. i ssh./n.o.

Lemma 4.2.6. Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Antag endvidere, at der findes endnu en følge $(\mathsf{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af stokastiske variable på $(\Omega,\mathcal{F},P)$, således at

$$\mathbb{X} = (\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ og } \mathbb{Y} = (\mathsf{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ er uafhængige, og } \quad P_{\mathbb{X}} = P_{\mathbb{Y}}$$

Da gælder bi-implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n \text{ konvergerer } P\text{-n.o.} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n \text{ konvergerer } i \text{ sandsynlighed.}$$

Sætning 4.2.7. Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Da gælder bi-implikationen: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n$ konvergerer P-n.o. $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n$ konvergerer i sandsynlighed.

Korollar 4.2.8. Lad $(\mathsf{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Da gælder for ethvert $r > 0$ implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Z}_n \text{ konvergerer i P-r-middel} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Z}_n \text{ konvergerer n.o.}$$

Korollar 4.2.9. Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af ufhængige stokastiske variable på $(\Omega,\mathcal{F},P)$, og antag, at $\mathsf{X}_n \in \mathcal{L}^2(P)$ for alle n.
Sæt endvidere $\mu_n = \mathbb{E}[\mathsf{X}_n]$ for alle n. Da gælder implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}[\mathsf{X}_n] < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} (\mathsf{X}_n - \mu_n) \quad \text{konvergerer P-n.o. og i P-2-middel.}$$

4.3 Store tals stærke lov

Lemma 4.3.1 (Kroneckers lemma). Lad $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være følger af reelle tal, således at

$$0 < b_1 < b_2 < b_3 < \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

og at $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}$ er konvergent i$\mathbb{R}$, dvs. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}$ eksisterer i$\mathbb{R}$. Da gælder der, at

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Sætning 4.3.2 ($\mathcal{L}^2$-udgave af Store tals lov). Lad $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at $\mathsf{X}_k \in \mathcal{L}^2(P)$ for alle $ki\mathbb{N}$. Sæt endvidere $\mu_k = \mathbb{E}[\mathsf{X}_k]$ for alle $ki\mathbb{N}$. Da gælder implikationen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{V}[\mathsf{X}_k]}{k^2} < \infty \Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\mathsf{X}_k - \mu_k) \underset{n\to\infty}{} 0 \quad \text{n.o. og i 2-middel.}$$

Eksempel 4.3.3.

Lemma 4.3.4. Lad $a, a_1, a_2, a_3, \dots$ være reelle tal, således at $a_n \to a$ for $n \to \infty$. Da gælder der også, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j = a.$$

Lemma 4.3.5. (i) For ethvert naturligt tal N gælder der, at

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{N}$$

(ii) For ethvert x i $(0, \infty)$ gælder der, at

$$\sum_{n\in\mathbb{N}:n\geq x} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{x}$$

Sætning 4.3.6 (Store tals stærke lov). Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af i.i.d. stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, således at $\mathbb{E}[|\mathsf{X}_1|] < \infty$, og sæt $\mathbb{E}[\mathsf{X}_1] = \mu$.
Da gælder der, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{X}_j = \mu \quad \text{P-n.o. og i P-1-middel.}$$

5 Konvergens i fordeling

5.1 Svag konvergens og konvergens i fordeling

Definition 5.1.1 (Svag konvergens af sandsynlighedsmål). Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ være sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$. Vi siger da, at μ_n **konvergerer svagt** imod μ for $n \to \infty$ (skrevet: $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$), hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall f \in C_b(S) : \lim_{n\to\infty} \int_S f(s)\mu_n(\mathrm{d}\, s) = \int_S f(s)\mu(\mathrm{d}\, s).$$

Definition 5.1.2 (Konvergens i fordeling). Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S, ρ).
Vi siger da, at X_n konvergerer mod X **i fordeling** (skrevet: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}$), hvis $P_{\mathsf{X}_n} \xrightarrow{w} P_{\mathsf{X}}$.
Udskrevet er betingelsen altså:

$$\forall f \in C_b(S) : \mathbb{E}\left[f\left(\mathsf{X}_n\right)\right] = \int_S f\ \mathrm{d}P_{\mathsf{X}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_S f\ \mathrm{d}P_{\mathsf{X}} = \mathbb{E}[f(\mathsf{X})].$$

Hvis μ er et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$, siger vi tilsvarende, at X_n konvergerer mod μ i fordeling (skrevet: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mu$), hvis $P_{\mathsf{X}_n} \xrightarrow{w} \mu$.
Udskrevet er betingelsen altså:

$$\forall f \in C_b(S) : \mathbb{E}\left[f\left(\mathsf{X}_n\right)\right] = \int_S f\ \mathrm{d}P_{\mathsf{X}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_S f\ \mathrm{d}\mu$$

Bemærkning 5.1.3. 1. **Udvidelse til komplekse funktioner:**
Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S, ρ).

Lad videre μ være et sandsynlighedsmål på ($S, \mathcal{B}(S)$), og antag, at $\mathsf{X}_k \xrightarrow{\sim} \mu$ for $k \to \infty$.

For enhver funktion f i $C_b(S, \mathbb{C})$ har vi oplagt, at $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in C_b(S, \mathbb{R})$, og dermed at

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f\left(\mathsf{X}_k\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathrm{Re}\left(f\left(\mathsf{X}_k\right)\right)\right] + \mathrm{i}\mathbb{E}\left[\mathrm{lm}\left(f\left(\mathsf{X}_k\right)\right)\right] \\ &\xrightarrow[k\to\infty]{} \int_S \mathrm{Re}(f)\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int_S \mathrm{Im}(f)\mathrm{d}\mu = \int_S f\ \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Specielt ser vi i tilfældet $S = \mathbb{R}^d$, at

$$\varphi_{\mathsf{X}_k}(t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, \mathsf{X}_k\rangle}\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle}\mu(\mathrm{d}x) = \hat{\mu}(t) \quad \text{for alle } t\mathbb{R}^d.$$

2. **Overgang til ækvivalent metrik**
Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner med værdier i et metrisk rum(S, ρ).

Da ændres definitionen af, at $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}$, ikke, hvis ρ erstattes af en ækvivalent metrik ρ' på S.

I denne situation gælder der nemlig, at

$$C_b(S, \rho) = C_b(S, \rho')$$

og dermed ændres ikke på betingelsen:

$$\forall f \in C_b(S, \rho) : \mathbb{E}\left[f\left(\mathsf{X}_n\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(\mathsf{X})]$$

Sætning 5.1.4 (Entydighedssætning for mål). Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad μ og ν være to sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$.
Antag videre, at

$$\int_S f \, \mathrm{d}\mu = \int_S f \, \mathrm{d}\nu \quad \text{for alle f i } C_b(S)^+$$

Da er $\mu = \nu$.

Korollar 5.1.5 (Entydighed af grænse ved konvergens i fordeling). Betragt et metrisk rum (S, ρ).

1. Lad $\nu, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ være sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$, og antag, at

   $$\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu, \text{ og } \mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \nu \text{ for } n \to \infty.$$

   Da gælder $\mu = \nu$.

2. Lad $\mathsf{Y}, \mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier $i(S, \rho)$, og antag, at

   $$\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}, \quad \text{og} \quad \mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{Y}$$

   Da gælder $\mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$.

Sætning 5.1.6 (Styrkeforhold). Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et separabelt metrisk rum (S, ρ).
Da gælder implikationen:

$$\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X} \Longrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}.$$

Sætning 5.1.7. Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et separabelt metrisk rum (S, ρ).
Antag endvidere, at

$$\exists a \in S : P(X = a) = 1$$

Da gælder bi-implikationen:

$$\mathsf{X}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathsf{X} \Longleftrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}.$$

Sætning 5.1.8. Lad $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et metrisk rum (S, ρ), og lad μ være et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$.
Antag, at $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mu$. Da gælder der, at

$$\int_S g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[g\left(\mathsf{X}_n\right)\right]$$

for enhver begr. funktion g i $\mathcal{M}(\mathcal{B}(S))$, som er kontinuert i μ-n.a. x i S.

Definition 5.1.9 (Lipschitz-afbildninger). Lad (S, ρ) og (T, δ) være metriske rum. En afbildning $f : S \to T$ siges da at være en Lipschitz afbildning, hvis der findes en konstant K i $(0, \infty)$, således at

$$\delta(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y) \quad \text{for alle } x, y \text{ i } S.$$

Med $\mathrm{Lip}(S, \rho)$ betegnes mængden af Lipschitz funktioner $f : (S, \rho) \to \mathbb{R}$.
Med $\mathrm{Lip}_b(S, \rho)$ betegnes mængden af begrænsede Lipschitz funktioner $f : (S, \rho) \to \mathbb{R}$.

Lemma 5.1.10. Lad S og T være ikke-tomme mængder, og lad $G : S \times T \to \mathbb{R}$ være en nedadtil begrænset funktion (dvs. G opfylder, at $\inf_{(x,y) \in S \times T} G(x, y) > -\infty$).
For vilkårlige x, x' i S gælder der da, at

$$\left| \inf_{y \in T} G(x, y) - \inf_{y \in T} G\left(x', y\right) \right| \leq \sup_{y \in T} \left| G(x, y) - G\left(x', y\right) \right|.$$

Lemma 5.1.11. Lad (S,ρ) være et metrisk rum, og lad $g : S \to [0,\infty)$ være en vilkårlig ikke-negativ funktion. Betragt for hvert $ki\mathbb{N}$ funktionen $g_k : S \to [0,\infty)$ givet ved

$$g_k(x) = \inf_{y\in S}(g(y) + k\rho(x,y)), \quad (x \in S)$$

(i) For hvert $ki\mathbb{N}$ er g_k en Lipschitz funktion med konstant k :

$$|g_k(x) - g_k(x')| \leq k\rho(x,x'), \quad (x,x' \in S)$$

(ii) For vilkårlige $ki\mathbb{N}, x$ iS og $r > 0$ gælder der, at

$$0 \leq \left(\inf_{y\in b(x,r)} g(y)\right) \wedge kr \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \leq g(x)$$

(iii) Hvis g er kontinuert i $x \in S$, gæ/der der, at $g_k(x) \uparrow g(x)$ for $k \to \infty$.

5.2 Portmanteau sætningerne

Sætning 5.2.1. Lad $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et metrisk rum (S,ρ), og lad μ være et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mu$.

(ii) $\forall f \in C(S)^+ : \int_S f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(\mathsf{X}_n)]$.

(iii) $\forall f \in C_b(S)^+ : \int_S f \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(\mathsf{X}_n)]$.

Bemærkning 5.2.2.

Sætning 5.2.3 (Portmanteau Sætning I). Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et metrisk rum (S,ρ), og lad μ være et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mu$.

(ii) $\int_S g \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[g(\mathsf{X}_n)]$ for alle $gi \operatorname{Lip}_b(S,\rho)^+$.

(iii) $\mu(G) \leq \liminf_{n\to\infty} P(\mathsf{X}_n \in G)$ for enhver åben delmængde. G af S.

(iv) $\mu(F) \geq \limsup_{n\to\infty} P(\mathsf{X}_n \in F)$ for enhver lukket delmængde. F af S.

Korollar 5.2.4. Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier *i* et metrisk rum (S, ρ), og lad μ være et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mu$.

(ii) For enhver mængde B i $\mathcal{B}(S)$ gælder der, at

$$\mu\left(B^{\circ}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} P\left(\mathsf{X}_n \in B\right) \leq \limsup_{n\to\infty} P\left(\mathsf{X}_n \in B\right) \leq \mu(\bar{B})$$

hvor $B^{\circ} = \left(\overline{B^c}\right)^c \subseteq \left(B^c\right)^c = B \subseteq \bar{B}$.

Hvis (i) og (ii) er opfyldte, gælder der yderligere, at

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} P\left(\mathsf{X}_n \in B\right)$$

for enhver mængde B fra $\mathcal{B}(S)$, således at $\mu\left(\bar{B} \backslash B^{\circ}\right) = 0$.

Sætning 5.2.5 (Portmanteau Sætning II). Lad (S, ρ) og (T, δ) være metriske rum, og udstyr $S \times T$ med en produktmetrik η. Betragt endvidere stokastiske funktioner $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ og $\mathsf{Y}, \mathsf{Y}_1, \mathsf{Y}_2, \mathsf{Y}_3, \ldots$ med værdier i hhv. (S, ρ) og (T, δ). Da gælder følgende udsagn:

(i) Hvis $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}$, gælder der også, at $f\left(\mathsf{X}_n\right) \xrightarrow{\sim} f(\mathsf{X})$ for enhver kontinuert afbildning $f : S \to T$.

(ii) Antag, at (T, δ) er separabelt. Hvis $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}, \mathsf{Y}_{\boldsymbol{n}} \xrightarrow{\sim} \mathsf{Y}$, og Y er udartet, så gælder der også, at $\left(\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n\right) \xrightarrow{\sim} (\mathsf{X}, \mathsf{Y})$.

(iii) Antag, at (S, ρ) og (T, δ) er separable. Hvis $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}, \mathsf{Y}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{Y}$ og $\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n$ er uafhængige for alle n, da gælder der også, at

$$\left(\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n\right) \xrightarrow{\sim} P_{\mathsf{X}} \otimes P_{\mathsf{Y}}, \quad \text{dvs.} \quad P_{\mathsf{X}_n} \otimes P_{\mathsf{Y}_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} P_{\mathsf{X}} \otimes P_{\mathsf{Y}}$$

Bemærkning 5.2.6. Udsagn (ii) i Portmanteau II gælder ikke generelt, hvis Y ikke er udartet. Betragt nemlig f.eks. en symmetrisk stokastisk variabel X(dvs.$\mathsf{X} \sim -\mathsf{X}$), og definér så

$$\mathsf{X}_k = \mathsf{X}, \quad \text{og} \quad \mathsf{Y}_k = -\mathsf{X}, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Så gælder der oplagt, at $\mathsf{X}_k \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}$, og $\mathsf{Y}_k \xrightarrow{\sim} -\mathsf{X} \sim \mathsf{X}$. Hvis (ii) gjaldt generelt, kunne vi så slutte, at $\left(\mathsf{X}_k, \mathsf{Y}_k\right) \xrightarrow{\sim} (\mathsf{X}, \mathsf{X})$. Anvendes så (i) i Portmanteau II på funktionen $f(x, y) = x + y$, ville det følge, at

$$0 = \mathsf{X}_k + \mathsf{Y}_k = f\left(\mathsf{X}_k, \mathsf{Y}_k\right) \xrightarrow{\sim} f(\mathsf{X}, \mathsf{X}) = 2\mathsf{X}.$$

Dette er oplagt forkert, med mindre $\mathsf{X} \sim \delta_0$ (jvf. 5.1.5).

5.3 Stramhed

Definition 5.3.1 (Stramhed). Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad $\mathcal{K}$ betegne systemet af kompakte delmængder af S.

(a) En familie $\mathcal{M}$ af sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$ siges at være stram, hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathcal{K} : \sup_{\mu \in \mathcal{M}} \mu\left(K^c\right) \leq \epsilon$$

(b) En familie $\mathcal{H}$ af stokastiske funktioner med værdier i (S, ρ) siges at være stram, hvis mængden $\{P_{\mathsf{X}} \mid \mathsf{X} \in \mathcal{H}\}$ er stram i henhold til (a); dvs. hvis

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathcal{K} : \sup_{\mathsf{X} \in \mathcal{H}} P\left(\mathsf{X} \in K^c\right) \leq \epsilon,$$

eller ækvivalent:

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathcal{K} : \inf_{\mathsf{X} \in \mathcal{H}} P(\mathsf{X} \in K) \geq 1 - \epsilon$$

Bemærkning 5.3.2. 1. Lad $\mathcal{M}_1$ og $\mathcal{M}_2$ være to mængder af sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$. Da gælder implikationerne:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 \text{ stram og } \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 &\Longrightarrow \mathcal{M}_1 \text{ stram} \\ \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \text{ stramme } &\Longrightarrow \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \text{ stram} \end{aligned}$$

2. For ethvert sandsynlighedsmål μ på $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ er $\{\mu\}$ stram. Vi har nemlig (i tilfældet $d = 1$), at

$$\mu\left([-N, N]^c\right) = 1 - \mu([-N, N]) \xrightarrow[N \to \infty]{} 1 - \mu(\mathbb{R}) = 0$$

Og her er $[-N, N]$ kompakt for alle N i $\mathbb{N}$.

3. Specielt er enhver endelig familie af ssh.-mål på $\mathbb{R}^d$ (eller af d-dim. stokastiske vektorer) automatisk stram.

4. En familie $\mathcal{H}$ af d-dimensionale stokastiske vektorer er stram, hvis der findes $\alpha > 0$, således at

$$\sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{H}} \mathbb{E}\left[\|\mathsf{X}\|^\alpha\right] < \infty.$$

Det følger nemlig fra Markovs Ulighed, at

$$\sup_{\mathsf{X} \in \mathcal{H}} P(\|\mathsf{X}\| > N) \leq \frac{1}{N^\alpha} \sup_{\mathsf{X} \in \mathcal{H}} \mathbb{E}\left[\|\mathsf{X}\|^\alpha\right], \text{ hvor } \frac{1}{N^\alpha} \to 0 \text{ for } N \to \infty.$$

Sætning 5.3.3. Lad $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge af d-dimensionale stokastiske vektorer. Det er følgende betingelser hver især tilstrækkelige for, at $\{\mathsf{X}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ er stram:

(i) Der findes et sandsynlighedsmål μ på $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, således at $\mathsf{X}_k \xrightarrow{\sim} \mu$.

(ii) $\forall \epsilon > 0 \exists a > 0 : \liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-a\|\mathsf{X}_k\|^2}\right] > 1 - \epsilon$.

5.4 Konvergens i fordeling for stokastiske variable

Sætning 5.4.1. Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og lad μ være et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Betragt endvidere de tilhørende fordelingsfunktioner:

$$\begin{aligned} &F_n(x) = P_{\mathsf{X}_n}((-\infty, x]) = P\left(\mathsf{X}_n \in (-\infty, x]\right), \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}), \\ &F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]), \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Da er følgende betingelser ækvivalente:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mu$.

(ii) $F_\mu(x-) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F_\mu(x)$ for alle $xi\mathbb{R}$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_\mu(x)$ for alle $xi\mathbb{R}$, hvor $\mu(\{x\}) = 0$.

(iv) Der findes en tæt delmængde D af $\mathbb{R}$, således at

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_\mu(x) \quad \text{for alle } xiD$$

(v) $\mu((a, b)) \le \liminf_{n\to\infty} P\left(a < \mathsf{X}_n < b\right)$ for alle $a, bi\overline{\mathbb{R}}$, så $a < b$.

Sætning 5.4.2. Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots$ være stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og betragt de tilhørende fordelingsfunktioner $F_{\mathsf{X}}, F_{\mathsf{X}_1}, F_{\mathsf{X}_2}, \ldots$. Antag at $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}$ for $n \to \infty$, og at F_{X} er kontinuert. Da gælder der at

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{\mathsf{X}_n}(x) - F_{\mathsf{X}}(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

dvs. $F_{\mathsf{X}_n} \to F_{\mathsf{X}}$ uniformt på $\mathbb{R}$

Definition 5.4.3 (limespunkt). Lad (X_k) være en følge af stokastiske funktioner med værdier i et metrisk rum (S, ρ).
Et sandsynlighedsmål μ på $(S, \mathcal{B}(S))$ kaldes da for et limespunkt for $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, hvis der findes en voksende følge $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ af naturlige tal, således at

$$\mathsf{X}_{k_\ell} \xrightarrow{\sim} \mu \quad \text{for } \ell \to \infty$$

Sætning 5.4.4 (Hellys Lemma). Lad $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge af fordelingsfunktioner. Da findes en voksende følge $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ af naturlige tal, og en voksende, højrekontinuert funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, således at

$$\lim_{\ell\to\infty} F_{k_\ell}(x) = F(x) \quad \text{for alle } x \text{ i } C_F$$

Her betegner C_F mængden af kontinuitetspunkter for F, dvs.

$$C_F = \{x \in \mathbb{R} \mid F \text{ er kontinuert } ix\}$$

Specielt gælder der, at $F_{k_\ell} \to F$ punktvist, for $\ell \to \infty$, hvis F er kontinuert.

Bemærkning 5.4.5.

Sætning 5.4.6 (Helly-Bray's Sætning). Lad $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge af d-dimensionale stokastiske vektorer, og antag, at $\{\mathsf{X}_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ er stram.
Da gælder følgende udsagn:

(i) $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ har mindst ét limespunkt.

(ii) Hvis $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kun har ét limespunkt μ, så gælder der, at $\mathsf{X}_k \xrightarrow{\sim} \mu$ for $k \to \infty$.

5.5 Kontinuitetssætningen

Korollar 5.5.1. Lad $(\mathsf{X}_k)_{hCN}$ æare en stram folge af d-dimensionale stokastiske vektorer, og antag, at

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{\mathsf{X}_k}(t) \text{ eksisterer } i\mathbb{C} \text{ for alle } ti\mathbb{R}^d.$$

Da findes et sandsynlighedsmål μ på $\mathbb{R}^d$, således at $\mathsf{X}_k \xrightarrow{\sim} \mu$ for $k \to \infty$. Der gælder yderligere, at

$$\hat{\mu}(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{\mathsf{X}_k}(t) \text{ for alle } ti\mathbb{R}^d$$

Sætning 5.5.2 (Kontinuitetssætningen for karakteristiske funktioner). For en følge $(\mathsf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af d-dimensionale stokastiske vektorer er følgende betingelser ækvivalente:

(i) Der findes et ssh-mål μ på $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, således at $X_k \xrightarrow{\sim} \mu$.

(ii) Der findes en funktion $\gamma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, som er kontinuert i 0 , således at

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{\mathsf{X}_k}(t) = \gamma(t) \quad \text{ for alle } ti\mathbb{R}^d$$

I bekræftende fald gælder der yderligere, at

$$\hat{\mu}(t) = \gamma(t) \quad \text{ for alle } t \text{ i } \mathbb{R}^d$$

Korollar 5.5.3. Lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være d-dimensionale stokastiske vektorer og $\mathsf{Y}, \mathsf{Y}_1, \mathsf{Y}_2, \mathsf{Y}_3, \ldots$ m-dimensionale stokastiske vektorer.
Antag endvidere, at X_n og Y_n er uafhængige for ethvert n i $\mathbb{N}$, samt at $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{X}$ og $\mathsf{Y}_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{Y}$.
Da gælder der også, at $(\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n) \xrightarrow{\sim} P_{\mathsf{X}} \otimes P_{\mathsf{Y}}$.

6 Centrale Grænseværdisætninger

6.1 Laplaces version

Sætning 6.1.1 (Laplaces CLT). Lad $(\mathsf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af i.i.d. stokastiske variable, således at $\mathbb{E}\left[\mathsf{X}_1^2\right] < \infty$.
Sæt endvidere

$$\sigma^2 := \mathbb{V}\left[\mathsf{X}_1\right], \quad \text{ og } \quad \mu := \mathbb{E}\left[\mathsf{X}_1\right]$$

Da gælder der, at

$$\frac{\sum_{k=1}^n \mathsf{X}_k - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \mathrm{U}_n := \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{k=1}^n (\mathsf{X}_k - \mu) \xrightarrow{\sim} N(0,1).$$

6.2 Lindebergs version

Definition 6.2.1. Et uafhængigt trekantsskema er en familie $\{\mathsf{X}_{nk} \mid n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, n\}\}$ af stokastiske variable, således at

$$\mathsf{X}_{n1}, \ldots, \mathsf{X}_{nn} \quad \text{er uafhængige for alle } n \text{ i } \mathbb{N}.$$

Et uafhængigt trekantsskema anskuelliggøres ofte på formen:

$$\begin{array}{l} \mathsf{X}_{11} \\ \mathsf{X}_{21}, \mathsf{X}_{22} \\ \mathsf{X}_{31}, \mathsf{X}_{32}, \mathsf{X}_{33} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathsf{X}_{n1}, \mathsf{X}_{n2}, \ldots\ldots, \mathsf{X}_{nn} \end{array}$$

Problemstilling 6.2.2. Lad $\{\mathsf{X}_{nk} | n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n\}$ være et uafhængigt trekantsskema. Det tilhørende CLT-problem udgøres da af følgende spørgsmål. Findes der:

- en familie $\{m_{nk} | n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n\}$ af reelle tal,
- en familie $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ af (strengt) positive tal,
- et ikke-udartet sandsynlighedsmål μ på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

således at

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} (\mathsf{X}_{nk} - m_{nk}) \underset{n\to\infty}{\sim} \mu?$$

Sætning 6.2.3 (Lindebergs CLT). Lad $\{\mathsf{X}_{nk} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n\}$ være et uafhængigt trekantsskema, således at $\mathbb{E}\left[\mathsf{X}_{nk}^2\right] < \infty$ for alle n, k. Sæt

$$\mu_{nk} = \mathbb{E}\left[\mathsf{X}_{nk}\right], \quad \sigma_{nk}^2 = \mathbb{V}\left[\mathsf{X}_{nk}\right], \quad \text{og} \quad s_n = \left(\sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + \cdots + \sigma_{nn}^2\right)^{1/2}$$

for alle n, k, og antag, at $s_n > 0$ for alle n. Sæt yderligere

$$\mathrm{U}_n = \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} \left(\mathsf{X}_{nk} - \mu_{nk}\right), \quad (n \in \mathbb{N})$$

Antag endvidere Lindebergs betingelse:

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{|\mathsf{X}_{nk} - \mu_{nk}| > \epsilon s_n\}} \left(\mathsf{X}_{nk} - \mu_{nk}\right)^2 \, \mathrm{d}P = 0.$$

Da gælder der, at $\mathrm{U}_n \xrightarrow{\sim} N(0,1)$.

Lemma 6.2.4. Lad $z_1, \ldots, z_n$ og $w_1, \ldots, w_n$ være komplekse tal, således at $|z_k| \leq 1$ og $|w_k| \leq 1$ for alle $ki\{1, 2, \ldots, n\}$.
Da gælder uligheden:

$$\left| \prod_{k=1}^{n} z_k - \prod_{k=1}^{n} w_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|$$

Lemma 6.2.5. For ethvert x i $[0, \infty)$ gælder uligheden:

$$\left| e^{-x} - 1 + x \right| \leq \frac{1}{2} x^2.$$

6.3 Bevis for Laplaces version

6.4 Lyapounovs version

Sætning 6.4.1 (Lyapounovs CLT). Lad $\{\mathsf{X}_{nk} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n\}$ være et uafhængigt trekantsskema, således at $\mathbb{E}\left[\mathsf{X}_{nk}^2\right] < \infty$ for alle n, k. Sæt

$$\mu_{nk} = \mathbb{E}\left[\mathsf{X}_{nk}\right], \quad \sigma_{nk}^2 = \mathbb{V}\left[\mathsf{X}_{nk}\right], \quad \text{og} \quad s_n = \left(\sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + \cdots + \sigma_{nn}^2\right)^{1/2}$$

for alle n, k, og antag, at $s_n > 0$ for alle n. Sæt yderligere

$$\mathrm{U}_n = \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} \left(\mathsf{X}_{nk} - \mu_{nk}\right), \quad (n \in \mathbb{N})$$

Antag endvidere Lyapounov's betingelse:

$$\exists \alpha > 2 : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{s_n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left|\mathsf{X}_{nk} - \mu_{nk}\right|^\alpha\right] = 0$$

Da gælder der, at $\mathrm{U}_n \xrightarrow{\sim} N(0,1)$.

7 Betingede middelværdier

7.1 Definition, eksistens og entydighed

Definition 7.1.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad $\mathcal{B}$ være en del-σ-algebra af $\mathcal{F}$(dvs. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$). Lad videre X være en stokastisk variabel fra $\mathcal{L}^1(P)$. En betinget middelværdi af X givet $\mathcal{B}$ er en stokastisk variabel U på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, der opfylder følgende tre betingelser:

1. $U \in \mathcal{L}^1(P)$.
2. U er $\mathcal{B}$-målelig.
3. Der gælder, at

$$\int_B \mathrm{U} \, \mathrm{d}P = \int_B \mathrm{x} \mathrm{d}P \quad \text{for alle } B \text{ i } \mathcal{B}.$$

Lemma 7.1.2 (Restriktion af mål til del-σ-algebra.). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad $\mathcal{B}$ være en del- σ-algebra af $\mathcal{F}$. Da defineres ved formlen:

$$P_{\mathcal{B}}(B) = P(B), \quad (B \in \mathcal{B})$$

et sandsynlighedsmål på $(\Omega, \mathcal{B})$, som kaldes restriktionen af P til $\mathcal{B}$. Der gælder endvidere, at

$$\mathcal{L}\left(P_{\mathcal{B}}\right) = \mathcal{L}(P) \cap \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{B}), \quad \text{og} \quad \mathcal{L}^1\left(P_{\mathcal{B}}\right) = \mathcal{L}^1(P) \cap \mathcal{M}(\mathcal{B})$$

samt at

$$\int_\Omega \mathrm{U}\ \mathrm{d}P_{\mathcal{B}} = \int_\Omega \mathrm{U}\ \mathrm{d}P \quad \text{for alle } \mathrm{U} \in \mathcal{L}\left(P_{\mathcal{B}}\right) \subseteq \mathcal{L}(P)$$

Korollar 7.1.3. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad $\mathcal{B}$ være en del-σ-algebra af $\mathcal{F}$.
Lad videre $\mathcal{D}$ være et $\cap$-stabilt frembringersystem for $\mathcal{B}$, således at $\Omega \in \mathcal{D}$. Lad endelig U og U$'$ være to $\mathcal{B}$-målelige stokastiske variable fra $\mathcal{L}^1(P)$. Da gælder følgende bi-implikationer:

(i) $\mathrm{U} \leq \mathrm{U}'$ P-n.o. $\iff \int_B \mathrm{U}\mathrm{d}P \leq \int_B \mathrm{U}'\mathrm{d}P$ for alle B i $\mathcal{B}$.

(ii) $\mathrm{U} = \mathrm{U}'$ P-n.o. $\iff \int_B \mathrm{U}\mathrm{d}P = \int_B \mathrm{U}'\mathrm{d}P$ for alle $B; \mathcal{D}$.

Sætning 7.1.4. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad $\mathcal{B}$ være en del-σ-algebra af $\mathcal{F}$.
For enhver stokastisk variabel X i $\mathcal{L}^1(P)$ findes da en betinget middelværdi U af X givet $\mathcal{B}$.
Hvis U, U' begge er betingede middelværdier af X givet $\mathcal{B}$, da gælder der, at $\mathrm{U} = \mathrm{U}'P - n.o.$
Enhver betinget middelværdi af X givet $\mathcal{B}$ betegnes med $\mathbb{E}[\mathsf{X}|\mathcal{B}]$.

7.2 Egenskaber for betingede middelværdier

Sætning 7.2.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et ssh-felt, og lad $\mathcal{B}$ være en del- σ-algebra af $\mathcal{F}$. Antag videre, at $\mathsf{X}, \mathsf{Y} \in \mathcal{L}^1(P)$, og at $a \in \mathbb{R}$. Da gæ/der følgende udsagn:

(i) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}]] = \mathbb{E}[\mathsf{X}]$.

(ii) $\mathbb{E}[a\mathsf{X} + \mathsf{Y} \mid \mathcal{B}] = a\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] + \mathbb{E}[\mathsf{Y} \mid \mathcal{B}]$ P-n.o.

(iii) Hvis $\mathsf{X} \leq \mathsf{Y} P$-n.o. gælder følgende udsagn:

- (a) $\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] \leq \mathbb{E}[\mathsf{Y} \mid \mathcal{B}]$ P-n.o.
- (b) Hvis $\mathsf{X} = \mathsf{Y}$ P-n.o., har vi også, at $\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] = \mathbb{E}[\mathsf{Y} \mid \mathcal{B}] P$-n.o.
- (c) Hvis $\mathsf{X} < \mathsf{Y}$ P-n.o., har vi også, at $\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] < \mathbb{E}[\mathsf{Y} \mid \mathcal{B}] P$-n.o.
- (d) Sættes $A = \{\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] = \mathbb{E}[\mathsf{Y} \mid \mathcal{B}]\}$, har vi, at $\mathsf{X}1_A = \mathsf{Y}1_A$ P-n.o.

(iv) Hvis X er $\mathcal{B}$-målelig, gælder der, at $\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] = \mathsf{X} P$-n.o.

Sætning 7.2.2. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, lad $\mathcal{B}$ være en del- σ-algebra af $\mathcal{F}$, og antag, at $\mathsf{X} \in \mathcal{L}^1(P)$.
Lad videre I være et interval i $\mathbb{R}$ med endepunkter:

$$v \in [-\infty, \infty), \quad \text{og} \quad h \in (-\infty, \infty]$$

og antag, at $P(\mathsf{X} \in I) = 1$. Da gælder der, at

$$P(\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] \in I) = 1$$

og at

$$\mathsf{X} = v\text{-n.o. på } \{\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid B] = v\}$$

og at

$$\mathsf{X} = h\text{-n.o. på } \{\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid B] = h\}.$$

Terminologi 7.2.3. Lad X og Y være stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og lad A være en mængde fra $\mathcal{F}$.
Vi siger da (f.eks.), at $\mathsf{X} \geq \mathsf{Y} P$-n.o. på A, hvis følgende ækvivalente betingelser er opfyldte:

(1) $P(A \backslash \{\mathsf{X} \geq \mathsf{Y}\}) = 0$.

(2) $P(A \cap \{\mathsf{X} \geq \mathsf{Y}\}) = P(A)$.

(3) $\mathsf{X}\mathbb{1}_A \geq \mathsf{Y}\mathbb{1}_A P$-n.o.

Bemærk nemlig, at

$$P(A) = P(A \backslash \{\mathsf{X} \geq \mathsf{Y}\}) + P(A \cap \{\mathsf{X} \geq \mathsf{Y}\})$$

og at

$$P\left(\mathsf{X}\mathbb{1}_A < \mathsf{Y}\mathbb{1}_A\right) = P(A \cap \{\mathsf{X} < \mathsf{Y}\}) = P(A \backslash \{\mathsf{X} \geq \mathsf{Y}\})$$

Sætning 7.2.4 (Tårnegenskaben). Lad$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, lad X være en integrabel stokastisk variabel herpå, og lad $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1$ være del- σ-algebraer af $\mathcal{F}$.
Hvis $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$, gælder der, at

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] \mid \mathcal{B}_1\right] = \mathbb{E}\left[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}_1\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}_1\right] \mid \mathcal{B}\right] \quad \text{P-n.o.}$$

7.3 Jensens ulighed for betingede middelværdier

Lemma 7.3.1. Lad I være et interval i $\mathbb{R}$, og lad $\varphi : I \to \mathbb{R}$ være en konveks funktion. Da findes en følge $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af affine funktioner på $\mathbb{R}$, således at

$$\varphi(t) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \ell_n(t) \quad \text{for alle } til,$$

og

$$\varphi(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \ell_n(t) \quad \text{for alle } til^\circ.$$

Sætning 7.3.2. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad $\mathcal{B}$ være en del-σ-algebra af $\mathcal{F}$. Lad videre Z være en stokastisk variabel i $\mathcal{L}^1(P)$.
For enhver mængde A fra $\mathcal{B}$ gælder der da, at

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mathrm{Z} \mid \mathcal{B}\right] = \mathbb{1}_A \mathbb{E}[\mathrm{Z} \mid \mathcal{B}] \quad \text{P-n.o.}$$

Sætning 7.3.3 (Jensens ulighed for betingede middelværdier.). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, lad $\mathcal{B}$ være en del- σ-algebra af $\mathcal{F}$, og antag, at $\mathsf{X} \in \mathcal{L}^1(P)$. Lad videre $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en Borel-funktion, som er konveks på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Antag, at $P(\mathsf{X} \in I) = 1$, og at $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathcal{L}^1(P)$. Da gælder der, at

$$P(\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] \in I) = 1, \quad \text{og} \quad \varphi(\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(\mathsf{X}) \mid \mathcal{B}] \text{ P-n.o.}$$

7.4 Konvergens resultater for betingede middelværdier

Sætning 7.4.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad $\mathcal{B}$ være en del-σ-algebra af $\mathcal{F}$.
For ethvert r i $[1, \infty)$ gælder da implikationen:

$$\mathsf{X} \in \mathcal{L}^r(P) \Longrightarrow \mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] \in \mathcal{L}^r(P)$$

Hvis $\mathsf{X}, \mathsf{Y} \in \mathcal{L}^1(P)$, og $\mathsf{X} - \mathsf{Y} \in \mathcal{L}^r(P)$, gæ/der der endvidere, at

$$\|\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] - \mathbb{E}[\mathsf{Y} \mid \mathcal{B}]\|_r \leq \|\mathsf{X} - \mathsf{Y}\|_r$$

For stokastiske variable $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ i $\mathcal{L}^1(P)$, kan vi derfor slutte, at

$$\mathsf{X}_n \to \mathsf{X} \text{ i } r\text{-middel} \Longrightarrow \mathbb{E}\left[\mathsf{X}_n \mid \mathcal{B}\right] \to \mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] \text{ i } r\text{-middel.}$$

Sætning 7.4.2 (Monoton konvergens for betingede middelværdier). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, lad $\mathcal{B}$ være en del- σ-algebra af $\mathcal{F}$, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske variable i $\mathcal{L}^1(P)$.

(i) Hvis $\mathsf{X}_n \uparrow \mathsf{X}$ P-n.o., da gælder der også, at $\mathbb{E}\left[\mathsf{X}_n \mid \mathcal{B}\right] \uparrow \mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}]$ P-n.o. og i 1-middel.

(ii) Hvis $\mathsf{X}_n \downarrow \mathsf{X}$ P-n.o., da gælder der også, at $\mathbb{E}\left[\mathsf{X}_n \mid \mathcal{B}\right] \downarrow \mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}]$ P-n.o. og i 1-middel.

Korollar 7.4.3 (Fatous lemma for betingede middelværdier). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad $\mathcal{B}$ være en del- σ-algebra af $\mathcal{F}$.
Lad videre $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske variable i $\mathcal{L}^1(P)$, og antag, at $\mathsf{X}_n \geq 0$-n.o. for alle n i $\mathbb{N}$, samt at $\mathsf{X} \leq \liminf_{n\to\infty} \mathsf{X}_n P$-n.o.
Da gælder uligheden:

$$\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathsf{X}_n \mid \mathcal{B}\right] \text{ P-n.o.}$$

Hvis $\liminf_{n\to\infty} \mathsf{X}_n \in \mathcal{L}^1(P)$, kan vi specielt slutte, at (?)

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} \mathsf{X}_n \mid \mathcal{B}\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\mathsf{X}_n \mid \mathcal{B}\right] \text{ P-n.o.}$$

Sætning 7.4.4 (Domineret konvergens for betingede middelværdier). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, lad $\mathcal{B}$ være en del- σ-algebra af $\mathcal{F}$, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Antag, at - $\mathsf{X}_n \to \mathsf{X}$ P-n.o. for $n \to \infty$. - Der findes en stokastisk variabel Y fra $\mathcal{L}^1(P)^+$, således at $|\mathsf{X}_n| \leq \mathsf{Y}$ P-n.o. for alle n i $\mathbb{N}$.
Da gælder der, at $\mathsf{X} \in \mathcal{L}^1(P)$, at $\mathsf{X}_n \in \mathcal{L}^1(P)$ for alle n, og at

$$\mathbb{E}\left[\mathsf{X}_n \mid \mathcal{B}\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] \quad \text{P-n.o. og i 1-middel.}$$

7.5 $\mathcal{B}$-målelige variable som konstanter

Sætning 7.5.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, lad $\mathcal{B}$ være en del- σ-algebra af $\mathcal{F}$, og lad X være en stokastisk variabel i $\mathcal{L}^1(P)$.
Betragt endvidere to $\mathcal{B}$-målelige stokastiske variable U_1 og U_2, og antag, at

$$P\left(\mathrm{U}_1 \leq \mathsf{X} \leq \mathrm{U}_2\right) = 1$$

Da gælder der også, at

$$P\left(\mathrm{U}_1 \leq \mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] \leq \mathrm{U}_2\right) = 1.$$

Sætning 7.5.2. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, lad $\mathcal{B}$ være en del- σ-algebra af $\mathcal{F}$, og lad X være en stokastisk variabel i $\mathcal{L}^1(P)$. Betragt videre en $\mathcal{B}$-målelig stokastisk variabel U , således at $\mathrm{UX} \in \mathcal{L}^1(P)$. Da gælder der, at

$$\mathbb{E}[\mathrm{UX} \mid \mathcal{B}] = \mathrm{U}\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] \text{ P-n.o.}$$

7.6 Uafhængighed vs. betinget middelværdi

Sætning 7.6.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, lad $\mathcal{B}$ være en del- σ-algebra af $\mathcal{F}$, og lad X være en stokastisk variabel i $\mathcal{L}^1(P)$.
Antag videre, at X og $\mathcal{B}$ er uafhængige. Da gælder der, at

$$\mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] = \mathbb{E}[\mathsf{X}] \quad \text{P-n.o.}$$

Sætning 7.6.2. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, lad $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1$ være del- σ-algebraer af $\mathcal{F}$, og lad X være en stokastisk variabel i $\mathcal{L}^1(P)$.
Antag, at $(\mathsf{X}, \mathcal{B})$ og $\mathcal{B}_1$ er uafhængige, dvs. at

$$\sigma(\sigma(\mathsf{X}) \cup \mathcal{B}) \text{ og } \mathcal{B}_1 \text{ er uafhængige.}$$

Da gælder formlen:

$$\mathbb{E}\left[\mathsf{X} \mid \sigma\left(\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_1\right)\right] = \mathbb{E}[\mathsf{X} \mid \mathcal{B}] \quad \text{P-n.o.}$$

Sætning 7.6.3. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, lad X, Y være stokastiske variable herpå, og lad $\mathcal{B}$ være en del- σ-alg. af $\mathcal{F}$.
Antag, at X og $\mathcal{B}$ er uafhængige, og at Y er $\mathcal{B}$-målelig. Betragt endvidere en begrænset Borel-funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, og indfør funktionen $\tilde{H} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved

$$\tilde{H}(y) = \mathbb{E}[H(\mathsf{X}, y)], \quad (y \in \mathbb{R})$$

Da gælder formlen:

$$\mathbb{E}[H(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \mid \mathcal{B}] = \tilde{H}(\mathsf{Y}) \text{ P-n.o.}$$

7.7 Uniform integrabilitet af betingede middelværdier

Sætning 7.7.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ være en familie af del- σ-algebraer af $\mathcal{F}$.
Lad videre $\mathcal{H}$ være en uniformt integrabel familie af stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Da er familien

$$\{\mathbb{E}\left[\mathrm{X} \mid \mathcal{B}_i\right] \mid \mathrm{x} \in \mathcal{H}, \quad i \in I\}$$

igen uniformt integrabel.

7.8 Betinget middelværdi givet en stokastisk funktion

Definition 7.8.1 (Betinget middelværdi af X givet Y). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad X være en stokastisk variabel i $\mathcal{L}^1(P)$.
Betragt videre en stokastisk funktion $\mathrm{Y} : \Omega \to E$ med værdier i et måleligt rum $(E, \mathcal{E})$, og definér:

$$\sigma(\mathrm{Y}) := \mathrm{Y}^{-1}(\mathcal{E}) = \left\{\mathrm{Y}^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{E}\right\} = \{\{\mathrm{Y} \in B\} \mid B \in \mathcal{E}\} \subseteq \mathcal{F}$$

En betinget middelværdi $\mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}]$ af X givet Y defineres da ved:

$$\mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}] = \mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \sigma(\mathrm{Y})] \quad P\text{-n.o.}$$

M.a.o. er $\mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}]$ en integrabel, $\sigma(\mathrm{Y})$-målelig stokastisk variabel, så

$$\int_{\{\mathrm{Y} \in B\}} \mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}] \mathrm{d}P = \int_{\{\mathrm{Y} \in B\}} \mathrm{X} \; \mathrm{d}P \quad \text{for alle } B \mathrm{i} \mathcal{E}$$

Lemma 7.8.2. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad X være en stokastisk variabel i $\mathcal{L}^1(P)$. Betragt videre en stokastisk funktion $\mathrm{Y} : \Omega \to E$ med værdier i et måleligt rum $(E, \mathcal{E})$.

(i) Der findes en funktion $\varphi : E \to \mathbb{R}$ fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at $\mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}] = \varphi(\mathrm{Y})$ P-n.o.

(ii) Hvis $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ og opfylder, at $\mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}] = \varphi(\mathrm{Y})$ P-n.o., så gælder der automatisk, at $\varphi \in \mathcal{L}^1(P_{\mathrm{Y}})$.

(iii) Antag, at φ, ψ er to funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at

$$\varphi(\mathrm{Y}) = \mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}] = \psi(\mathrm{Y}) \quad \text{P-n.o.}$$

Så gælder der automatisk, at $\psi(y) = \varphi(y)$ for $P_Y - n$.a. y i E.

Definition 7.8.3 (Betinget middelværdi af X givet Y). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad X være en stokastisk variabel i $\mathcal{L}^1(P)$.
Betragt videre en stokastisk funktion $\mathrm{Y} : \Omega \to E$ med værdier i et måleligt rum$(E, \mathcal{E})$.
Enhver funktion φ i $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ der opfylder, at

$$\mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}] = \varphi(\mathrm{Y}), P\text{-n.o.},$$

kaldes en betinget middelværdi af X givet værdien af Y . Man benytter ofte notationen:

$$\varphi(y) = \mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y} = y], \quad (y \in E)$$

Lemma 7.8.4. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, lad X være en stokastisk variabel i $\mathcal{L}^1(P)$, og lad $Y : \Omega \to E$ være en stokastisk funktion med værdier i et måleligt rum $(E, \mathcal{E})$.
Betragt videre en funktion $\varphi : E \to \mathbb{R}$ fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da er φ en betinget middelværdi af X givet værdien af Y , hvis og kun hvis den opfylder følgende to betingelser:

(i) $\varphi \in \mathcal{L}^1(P_{\mathrm{Y}})$.

(ii) $\int_B \varphi(y) P_{\mathrm{Y}}(\mathrm{d}y) = \int_{\{\mathrm{Y} \in B\}} \mathrm{X} \mathrm{d}P \quad$ for alle B fra $\mathcal{E}$.

Lemma 7.8.5. Lad$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad $\mathrm{X}, \tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{x}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \ldots$ være stokastiske variable fra $\mathcal{L}^1(P)$. Lad videre $\mathrm{Y} : \Omega \to E$ være en stokastisk funktion med værdier $i(E, \mathcal{E})$.

(i) For ethvert $\alpha i \mathbb{R}$ gælder der, at

$$\mathbb{E}[\alpha \mathrm{X} + \tilde{\mathrm{X}} \mid \mathrm{Y} = y] = \alpha \mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y} = y] + \mathbb{E}[\tilde{\mathrm{X}} \mid \mathrm{Y} = y] \quad \text{for } P_{\mathrm{Y}} - \text{ n.a. } y.$$

(ii) Hvis $\tilde{\mathrm{X}} \leq \mathrm{X}$ P-n.o., gælder der også, at $\mathbb{E}[\tilde{\mathrm{X}} \mid \mathrm{Y} = y] \leq \mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y} = y]$ fo P_Y- n.a. y.

(iii) Hvis $\mathrm{X}_n \uparrow \mathrm{X}$ P-n.o., gælder der også, at $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n \mid \mathrm{Y} = y\right] \uparrow \mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y} = y]$ for $P_Y - n.a.y.$

(iv) Hvis $\mathrm{X}_n \downarrow \mathrm{X}$ P-n.o., gælder der også, at $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n \mid \mathrm{Y} = y\right] \downarrow \mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y} = y]$ for $P_{\mathrm{Y}}-$ n.a. y.

Sætning 7.8.6. Lad X, X' være stokastiske variable i $\mathcal{L}^1(P)$, og lad $\mathrm{Y}, \mathrm{Y}' : \Omega \to E$ være to stokastiske funktioner med værdier i et måleligt rum $(E, \mathcal{E})$.
Antag, at

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \sim (\mathrm{x}', \mathrm{Y}'), \quad \text{altså at} \quad P_{(\mathrm{x},\mathrm{Y})} = P_{(\mathrm{x}',\mathrm{Y}')} p \text{ å } (\mathbb{R} \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{E})$$

Da vil enhver betinget middelværdi af X givet værdien af Y også være en betinget middelværdi af X′ givet værdien af Y′.
For φ i $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ gælder der således implikationen:

$$\mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}] = \varphi(\mathrm{Y}) \text{ P-n.o.} \quad \Longrightarrow \mathbb{E}\left[\mathrm{X}' \mid \mathrm{Y}'\right] = \varphi\left(\mathrm{Y}'\right) \text{ P-n.o.}$$

8 Betingede fordelinger

8.1 Definition, eksempler og entydighed

Definition 8.1.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad X og Y være stok. fkt. med værdier i målelige rum hhv. $(E_1, \mathcal{E}_1)$ og $(E_2, \mathcal{E}_2)$.
En betinget fordeling af X givet (værdien af) Y er en afbildning $\varphi : \mathcal{E}_1 \times E_2 \to [0,1]$, der opfylder følgende tre betingelser:

1. For hvert fast y i E_2 er afbildningen

$$\varphi(\cdot, y) : A \mapsto \varphi(A, y) : \mathcal{E}_1 \to [0,1]$$

   et sandsynlighedsmål på ($E_1, \mathcal{E}_1$).

2. For enhver fast mængde A i $\mathcal{E}_1$ er afbildningen

$$\varphi(A, \cdot) : y \mapsto \varphi(A, y) : E_2 \to [0,1]$$

   $\mathcal{E}_2$-målelig.

3. For enhver mængde A i $\mathcal{E}_1$ og enher mængde B i $\mathcal{E}_2$ gælder der, at

$$\int_B \varphi(A, y) P_Y(\,\mathrm{d}y) = P(\mathrm{X} \in A, \mathrm{Y} \in B)$$

Man skriver ofte $P_{\mathbf{X}}(A \mid \mathrm{Y} = y)$ i stedet for $\varphi(A, y)$. For hvert y i E_2 kaldes sandsynlighedsmålet

$$\varphi(\cdot, y) = P_{\mathrm{x}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = y)$$

for den betingede fordeling af X givet $\mathrm{Y} = y$.

Bemærkning 8.1.2.

Eksempel 8.1.3. Lad X og Y være stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at Y er Poisson fordelt med parameter $\ell > 0$.

Vi definerer så $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to [0,1]$ ved

$$\begin{aligned}
\varphi(A, y) &= \begin{cases} \frac{P(\mathbb{X} \in A, \mathrm{Y} = y)}{P(\mathrm{Y} = y)}, & \text{hvis } y \in \mathbb{N}_0 \\ \delta_0(A), & \text{hvis } y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{P(\mathbb{X} \in A, \mathrm{Y} = y)}{\mathrm{e}^{-\varepsilon_\ell y / y!}}, & \text{hvis } y \in \mathbb{N}_0 \\ \delta_0(A), & \text{hvis } y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Da er φ en betinget fordeling af X givet værdien af Y . Bemærk, at der for alle A i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ og y i $\mathbb{R}$ gælder formlen:

$$\varphi(A, y) = \delta_0(A) 1_{\mathrm{R} \backslash\ \mathrm{N}_0}(y) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(\mathrm{X} \in A, \mathrm{Y} = n)}{\mathrm{e}^{-\ell \ell^n / n!}} 1_{\{n\}}(y)$$

Eksempel 8.1.4. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad X og Y være stokastiske variable herpå.

Antag, at $P_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})}$ er absolut kontinuert med tæthed $f \in \mathcal{M}\left(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)^+$med hensyn til λ_2.

Husk, at P_X og P_Y da automatisk er absolut kontinuerte mht. λ, med tætheder givet ved (jvf. 13.3.4 i [M&l]):

$$f_\mathrm{X}(x) = \int_\mathbb{R} f(x,t)\lambda(\mathrm{d}t), \quad \text{og} \quad f_\mathrm{Y}(y) = \int_\mathbb{R} f(s,y)\lambda(\mathrm{d}s), \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Det følger da, at der ved formlen:

$$\varphi(A,y) = \begin{cases} \frac{1}{f_Y(y)} \int_A f(x,y)\lambda(\mathrm{d}x), & \text{hvis } f_Y(y) > 0, \\ \delta_0(A), & \text{hvis } f_Y(y) = 0, \end{cases} \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), y \in \mathbb{R}),$$

defineres en betinget fordeling af X givet (værdien af) Y. (a) For fast y i $\mathbb{R}$ ses det umiddelbart, at $A \mapsto \varphi(A,y)$ er et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Hvis $f_\mathrm{Y}(y) > 0$ er det målet med tæthed $f_\mathrm{Y}(y)^{-1} f(\cdot, y)$ med hensyn til λ. (b) For fast A i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ følger det fra Tonelli's Sætning, at funktionen

$$y \mapsto \int_A f(x,y)\lambda(\mathrm{d}x) = \int_\mathbf{R} f(x,y) 1_A(x)\lambda(\mathrm{d}x)$$

er $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-målelig. Dermed sikrer Sætning 4.4.3 i [M&I], at

$$y \mapsto \varphi(A,y) = \begin{cases} \frac{1}{f_\mathrm{Y}(y)} \int_A f(x,y)\lambda(\mathrm{d}x), & \text{hvis } f_\mathrm{Y}(y) > 0 \\ \delta_0(A), & \text{hvis } f_\mathrm{Y}(y) = 0 \end{cases}$$

er $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-målelig.

(c) For endnu en Borel-mængde B i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ finder vi endelig, at

$$\begin{aligned} \int_B \varphi(A,y) P_\mathrm{Y}(\,\mathrm{d}y) &= \int_{B \cap \{f_\mathrm{Y} > 0\}} \varphi(A,y) f_\mathrm{Y}(y)\lambda(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{B \cap \{f_\mathrm{Y} > 0\}} \left(\frac{1}{f_\mathrm{Y}(y)} \int_A f(x,y)\lambda(\mathrm{d}x)\right) f_\mathrm{Y}(y)\lambda(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{B \cap \{f_\mathrm{r} > 0\}} \left(\int_A f(x,y)\lambda(\mathrm{d}x)\right) \lambda(\mathrm{d}y) \\ &= \int_B \left(\int_A f(x,y)\lambda(\mathrm{d}x)\right) \lambda(\mathrm{d}y) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{A \times B} f \, \mathrm{d}\lambda_2 \\ &= P((\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in A \times B) \\ &= P(\mathrm{X} \in A, \mathrm{Y} \in B) \end{aligned}$$

Eksempel 8.1.5. Antag, at (X,Y) er 2-dimensionalt normalfordelt med middelværdi-vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og kovariansmatrix $\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Mao. er $(\ \mathrm{X}, \mathrm{Y}\ )$ absolut kontinuert med λ_2-tæthed givet ved

$$
\begin{aligned}
f_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\det(\Sigma)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \Sigma^{-1}\binom{x}{y},\binom{x}{y}\right\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} 1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}\binom{x}{y},\binom{x}{y}\right\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2-4xy+5y^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

Bemærk også, at $\mathrm{Y}\sim N(0,1)$, dvs. Y har λ-tæthed:

$$
f_{\mathrm{Y}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)
$$

Det følger derfor fra Eksempel 8.1.4, at $P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y}=y)$ er målet med λ-tæthed:

$$
\begin{aligned}
x \mapsto \frac{f_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})}(x,y)}{f_{\mathrm{Y}}(y)} &= \frac{\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2-4xy+5y^2\right)\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2-4xy+4y^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-2y)^2\right)
\end{aligned}
$$

Det følger således at, $P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y}=y) = N(2y,1)$ for alle y i $\mathbb{R}$.

Eksempel 8.1.6. Lad $(\Omega,\mathcal{F},P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad X og Y være stok. fkt. med værdier i målelige rum hhv. $(E_1,\mathcal{E}_1)$ og $(E_2,\mathcal{E}_2)$.

Da er X og Y uafhængige, hvis og kun hvis der findes et sandsynlighedsmål μ på $(E_1,\mathcal{E}_1)$, således at der ved

$$
\varphi(A,y) = \mu(A), \quad (A\in\mathcal{E}_1, y\in E_2)
$$

defineres en betinget fordeling af X givet (værdien af) Y. I bekræftende fald gælder der, at $\mu = P_{\mathrm{X}}$. Antag nemlig, at X og Y er uafhængige, og definér $\varphi:\mathcal{E}_1\times E_2\to[0,1]$ ved

$$
\varphi(A,y) = P_{\mathrm{X}}(A), \quad (A\in\mathcal{E}_1, y\in E_2)
$$

(i) Det er klart, at $A\mapsto\varphi(A,y)$ er et sandsynlighedsmål for ethvert y i E_2.
(ii) For enher fast mængde A i $\mathcal{E}_1$ er det også klart, at $y\mapsto\varphi(A,y)$ er $\mathcal{E}_2$-målelig.
(iii) For en vilkårlig mængde B fra $\mathcal{E}_2$ finder vi endelig, at

$$
\begin{aligned}
\int_B \varphi(A,y)P_{\mathrm{Y}}(\,\mathrm{d}y) &= \int_B P_{\mathrm{X}}(A)P_{\mathrm{Y}}(\,\mathrm{d}y) = P_{\mathrm{X}}(A)P_{\mathrm{Y}}(B)\\
&= P(\mathrm{X}\in A)P(\mathrm{Y}\in B) = P(\mathrm{X}\in A,\mathrm{Y}\in B)
\end{aligned}
$$

Antag omvendt, at der findes et ssh-mål μ på $(E_1,\mathcal{E}_1)$, således at

$$
\varphi(A,y) = \mu(A), \quad (A\in\mathcal{E}_2, y\in E_2)
$$

definerer en betinget fordeling af X givet (værdien af) Y. For vilkårlige A i $\mathcal{E}_1$ og B i $\mathcal{E}_2$ følger det da, at

$$P(\mathrm{X} \in A, \mathrm{Y} \in B) = \int_B \varphi(A, y) P_{\mathrm{Y}}(\,\mathrm{d}y) = \int_B \mu(A) P_{\mathrm{Y}}(\,\mathrm{d}y)$$
$$= \mu(A) P_{\mathrm{Y}}(B) = \mu(A) P(\mathrm{Y} \in B)$$

Sættes specielt $B = E_2$, fremgår det, at

$$P(\mathrm{X} \in A) = P\left(\mathrm{X} \in A, \mathrm{Y} \in E_2\right) = \mu(A) P\left(\mathrm{Y} \in E_2\right) = \mu(A)$$

således at $\mu = P_{\mathbf{x}}$. Dermed viser udregningen ovenfor videre, at

$$P(\mathrm{x} \in A, \mathrm{Y} \in B) = P_{\mathrm{X}}(A) P(\mathrm{Y} \in B) = P(\mathrm{X} \in A) P(\mathrm{Y} \in B).$$

Sætning 8.1.7. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad X og Y være stokastiske funktioner med værdier i målelige rum hhv. $(E_1, \mathcal{E}_1)$ og $(E_2, \mathcal{E}_2)$.
Antag, at $\varphi, \tilde{\varphi} : \mathcal{E}_1 \times E_2 \to [0, 1]$ er to betingede fordelinger af X givet (værdien af) Y.
Antag endvidere, at $\mathcal{E}_1$ er tælleligt frembragt. Da findes en mængde N fra $\mathcal{E}_2$, således at

(i) $P(Y \in N) = 0$.

(ii) $\varphi(A, y) = \tilde{\varphi}(A, y)$ for alle A i $\mathcal{E}_1$ og y i N^c.

8.2 Transformation og integration med funktioner af én variabel

Sætning 8.2.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad X og Y være stokastiske funktioner herpå med værdier i målelige rum hhv. $(E_1, \mathcal{E}_1)$ og $(E_2, \mathcal{E}_2)$.
Lad $(E_3, \mathcal{E}_3)$ være endnu et måleligt rum, og betragt en $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$-målelig afbildning $\psi : E_1 \to E_3$.
Antag, at der findes en betinget fordeling

$$P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = \cdot) : \mathcal{E}_1 \times E_2 \to [0, 1]$$

af X givet værdien af Y . Da er afbildningen

$$\varphi(C, y) = P_{\mathrm{X}}\left(\psi^{-1}(C) \mid \mathrm{Y} = y\right), \quad \left(C \in \mathcal{E}_3, y \in E_2\right),$$

en betinget fordeling af $\psi(\mathrm{X})$ givet værdien af Y .

Sætning 8.2.2. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et ssh.-felt, og lad X og Y være stok. fkt. med værdier i målelige rum ***hhv.*** $(E_1, \mathcal{E}_1)$ og $(E_2, \mathcal{E}_2)$. Antag, at der findes en betinget fordeling $P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = \cdot\ )$ af X givet (værdien af) Y. Antag videre, at $\psi : E_1 \to \mathbb{R}$ er en $\mathcal{E}_1 - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-målelig funktion, således at $\mathbb{E}[\|\psi(\mathrm{X})\| < \infty$.

(i) Mængden $N_\psi := \left\{y \in E_2 \mid \psi \notin \mathcal{L}^1\left(P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = y)\right)\right\}$ er element $i\mathcal{E}_2$, og $P\left(Y \in N_\psi\right) = 0$.

(ii) Funktionen

$$w(y) = \begin{cases} \int_{E_1} \psi(x) P_{\mathrm{X}}(\ \mathrm{d}x \mid \mathrm{Y} = y), & \text{hvis } y \in N_\psi^c \\ 0, & \text{hvis } y \in N_\psi \end{cases}$$

er en version af $y \mapsto \mathbb{E}[\psi(\mathrm{X}) \mid \mathrm{Y} = y]$.

Eksempel 8.2.3. Antag, at $(\ \mathrm{X}, \mathrm{Y}\ )$ er 2-dimensionalt normalfordelt med middelværdivektor $\underline{0}$ og kovariansmatrix $\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Vi har tidligere set, at $P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = y) = N(2y, 1)$ for alle y i $\mathbb{R}$. Vha. Sætning 8.2.2 følger det så specielt for P_Y-n.a. y, at

$$\mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y} = y] = \int_{\mathbb{R}} x P_{\mathrm{X}}(\ \mathrm{d}x \mid \mathrm{Y} = y) = \int_{\mathbb{R}} x N(2y, 1)(\mathrm{d}x) = 2y$$

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X}^2 \mid \mathrm{Y} = y\right] = \int_{\mathbb{R}} x^2 P_{\mathrm{X}}(\ \mathrm{d}x \mid \mathrm{Y} = y) = \int_{\mathbb{R}} x^2 N(2y, 1)(\mathrm{d}x) = 1 + 4y^2$$

således at $\mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}] = 2\mathrm{Y}, \mathbb{E}\left[\mathrm{X}^2 \mid \mathrm{Y}\right] = 1 + 4\mathrm{Y}^2$, og $\mathbb{V}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}] = 1$.

8.3 Transformation og integration med funktioner af to variable

Lemma 8.3.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad X og Y være stok. fkt. med værdier i målelige rum hhv. $(E_1, \mathcal{E}_1)$ og $(E_2, \mathcal{E}_2)$.
Antag, at der findes en betinget fordeling $P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = \cdot\ )$ af X givet (værdien af) Y. For enhver mængde H i $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ gælder der da, at funktionen

$$w_H(y) := \int_{E_1} 1_H(x, y) P_{\mathrm{X}}(\ \mathrm{d}x \mid \mathrm{Y} = y), \quad (y \in E_2)$$

er en version af $y \mapsto \mathbb{E}\left[1_H(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mid \mathrm{Y} = y\right]$. Der gælder altså, at

$$\mathbb{E}\left[1_H(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mid \mathrm{Y} = y\right] = \int_{E_1} 1_H(x, y) P_{\mathrm{X}}(\ \mathrm{d}x \mid \mathrm{Y} = y), \quad (y \in E_2)$$

Korollar 8.3.2. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad X og Y være stok. fkt. med værdier i målelige rum hhv. $(E_1, \mathcal{E}_1)$ og $(E_2, \mathcal{E}_2)$.
Antag, at der findes en betinget fordeling $P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = \cdot)$ af X givet (værdien af) Y.
Antag videre, at $(E_3, \mathcal{E}_3)$ er et måleligt rum, og at $\psi : E_1 \times E_2 \to E_3$ er en $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$-målelig funktion.
Da er afbildningen $\varphi : \mathcal{E}_3 \times E_2 \to [0, 1]$ givet ved

$$\varphi(C, y) = P_{\mathrm{X}}\left(\psi(\cdot, y)^{-1}(C) \mid \mathrm{Y} = y\right), \quad (C \in \mathcal{E}_3, y \in E_2)$$

en betinget fordeling af $\psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ givet (værdien af) Y. Med andre ord gælder der altså, at

$$P_{\psi(\mathrm{X},\mathrm{Y})}(\cdot \mid \mathrm{Y} = y) = P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = y) \circ \psi(\cdot, y)^{-1} \quad \text{for } P_{\mathrm{Y}} - \text{ n.a. } \ y \ \text{ i } E_2.$$

Sætning 8.3.3. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad X og Y være stok. fkt. med værdier i målelige rum hhv. $(E_1, \mathcal{E}_1)$ og $(E_2, \mathcal{E}_2)$.
Antag, at der findes en betinget fordeling $P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = \cdot\ )$ af X givet (værdien af) Y.
Antag videre, at $\psi : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ er en $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-målelig funktion, således at $\mathbb{E}[\|\psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\| < \infty$.

(i) Mængden $N := \left\{y \in E_2 \mid \psi(\cdot, y) \notin \mathcal{L}^1\left(P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = y)\right)\right\}$ er element i $\mathcal{E}_2$, og $P(\mathrm{Y} \in N) = 0$.

(ii) Funktionen

$$W(y) = \begin{cases} \int_{E_1} \psi(x, y) P_{\mathrm{X}}(\,\mathrm{d}x \mid \mathrm{Y} = y), & \text{hvis } y \in N^c \\ 0, & \text{hvis } y \in N \end{cases}$$

er en version af $y \mapsto \mathbb{E}[\psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mid \mathrm{Y} = y]$.

Eksempel 8.3.4. Antag, at (X, Y) er 2-dimensionalt normalfordelt med middelværdivektor $\underline{0}$ og kovariansmatrix $\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vi ønsker at bestemme $\mathbb{E}[\cos(\mathrm{XY}) \mid \mathrm{Y}]$. Vi har tidligere set, at $P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = y) = N(2y, 1)$ for alle y i $\mathbb{R}$. Vi finder så ved brug af Sætning 8.3.4, at

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\cos(\mathrm{XY}) \mid \mathrm{Y} = y] &= \int_{\mathbb{R}} \cos(xy) P_{\mathrm{X}}(\,\mathrm{d}x \mid \mathrm{Y} = y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cos(xy) N(2y, 1)(\mathrm{d}x) = \operatorname{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} N(2y, 1)(\mathrm{d}x)\right) \\ &= \operatorname{Re}(\widehat{N(2y, 1)}(y)) \overset{\overset{1.1.3}{\downarrow}}{=} \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2y(y)} \mathrm{e}^{-y^2/2}\right) = \cos\left(2y^2\right) \mathrm{e}^{-y^2/2}. \end{aligned}$$

Vi kan dermed slutte, at

$$\mathbb{E}[\cos(\mathrm{XY}) \mid \mathrm{Y}] = \cos\left(2\mathrm{Y}^2\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{Y}^2/2}$$

8.4 Eksistens af betingede fordelinger

Sætning 8.4.1. Lad X være en reel stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og lad Y være en stokastisk funktion på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et måleligt rum $(E, \mathcal{E})$.
Da findes en betinget fordeling $P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = \cdot)$ af X givet værdien af Y .

Lemma 8.4.2. Lad $G : \mathbb{Q} \to [0, 1]$ være en voksende funktion, således at

$$\lim_{n\to\infty} G(-n) = 0, \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} G(n) = 1$$

Definér funktionen $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ ved

$$F(x) = \inf\{G(q) \mid q \in (x, \infty) \cap \mathbb{Q}\}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

Da er F voksende, højrekontinuert, og der gælder at

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \text{og} \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

Med andre ord er F fordelingsfunktionen for et sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$ (Lebesgue-Stieltjes målet hørende til F - jvf. 3.5.7 i [M&I]).

Definition 8.4.3. Et måleligt rum $(E, \mathcal{E})$ kaldes for et Borel-rum, hvis der findes en mængde M i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, og en afbildning $\psi : E \to M$, således at

1. ψ er bijektiv.
2. ψ er $\mathcal{E} - \mathcal{B}(\mathbb{R})_M$-målelig.
3. $\psi^{\langle -1 \rangle} : M \to E$ er $\mathcal{B}(\mathbb{R})_M$-$\mathcal{E}$-målelig.

Husk, at

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})_M = \{M \cap A \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid B \subseteq M\}$$

Sætning 8.4.4. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad X og Y være stokastiske funktioner herpå med værdier i målelige rum hhv. $(E_1, \mathcal{E}_1)$ og $(E_2, \mathcal{E}_2)$.
Antag, at $(E_1, \mathcal{E}_1)$ er et Borel-rum. Da findes en betinget fordeling

$$P_{\mathrm{X}}(\cdot \mid \mathrm{Y} = \cdot) : \mathcal{E}_1 \times E_2 \to [0, 1]$$

af X givet værdien af Y.

9 Martingaler

9.1 Definition, eksempler og grundlæggende egenskaber

Definition 9.1.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt.

1. Et filter på $(\Omega, \mathcal{F})$ er en voksende følge $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ af del- σ-algebraer af $\mathcal{F}$.
2. Hvis $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er et filter på $(\Omega, \mathcal{F})$, siges $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ at være et filtreret sandsynlighedsfelt.
3. En følge $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ af stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kaldes tilpasset med hensyn til et filter $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, hvis X_n er $\mathcal{F}_n$-målelig for alle n i $\mathbb{N}_0$.
4. En følge $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ af stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kaldes forudsigelig (eller predictabel) med hensyn til et filter $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, hvis x_n er $\mathcal{F}_{(n-1)\vee 0^{-malelig}}$ for alle n i $\mathbb{N}_0$.

Definition 9.1.2 (Martingaler, sub-martingaler og super-martingaler). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en følge af stokastiske variable herpå. Antag, at

(a) $\mathrm{X}_n \in \mathcal{L}^1(P)$ for alle n.

(b) $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er tilpasset med hensyn til $(\mathcal{F}_n)$.
Vi siger da, at

(c1) $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en martingal, hvis $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathrm{X}_n P$-n.o. for alle n.

c2 $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en sub-martingal, hvis $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \geq \mathrm{X}_n P$-n.o. for alle n.

c3 $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en super-martingal, hvis $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \leq \mathrm{X}_n$ P-n.o. for alle n.

Bemærkning 9.1.3. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad (X_n) være en følge af stokastiske variable.

1. Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en martingal, gælder der, at

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_m \mid \mathcal{F}_n\right] \overset{.2.4}{\underset{1}{=}} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_m \mid \mathcal{F}_{m-1}\right] \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_{m-1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \cdots = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathrm{X}_n$$

   for alle m, n i $\mathbb{N}$, så $n < m$. Specielt ses, at $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_m\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n\right]$.

2. Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en sub-martingal, gælder der, at

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_m \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_m \mid \mathcal{F}_{m-1}\right] \mid \mathcal{F}_n\right] \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_{m-1} \mid \mathcal{F}_n\right] \geq \cdots \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathrm{X}_n$$

   for alle m, n i $\mathbb{N}$, så $n < m$. Specielt ses, at $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_m\right] \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n\right]$.

3. Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en super-martingal, gælder der, at $\mathbb{E}[\mathrm{X}_m \mid \mathcal{F}_n] \leq \mathrm{X}_n$ og $\mathbb{E}[\mathrm{X}_m] \leq \mathbb{E}[\mathrm{X}_n]$ for alle m, n i $\mathbb{N}$, så $n < m$.

Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ være en følge af stokastiske variable herpå.

Der gælder da, at

$$(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n) \text{ er en sub-MG } \iff (-\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n) \text{ er en super-MG,}$$
$$\text{og } (\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n) \text{ er en MG} \iff (\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n) \text{ er både en sub-MG og en super-MG.}$$

Eksempel 9.1.4. En spiller deltager i en (uendelig) følge af uafhængige spil på et casino. For hvert n i $\mathbb{N}_0$ sætter vi

$$\mathrm{X}_n = \text{ gevinsten (eller tabet) ved det } n \text{ 'te spil.}$$

Vi antager, at hvert spil er fair, dvs. at $\mathbb{E}[\mathrm{X}_n] = 0$ for alle n i $\mathbb{N}_0$ (specielt antages det, at $\mathrm{X}_n \in \mathcal{L}^1(P)\big)$.

Vi sætter endelig

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n = &\text{ spillerens samlede gevinst (eller tab) efter det } n \text{ 'te spil} \\ = &\sum_{j=0}^{n} \mathrm{X}_j \end{aligned}$$

Da er $(\mathrm{S}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ en martingal med hensyn til følgen:

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n), \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Eksempel 9.1.5 (Lévy martingaler). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad X være en stokastisk variabel i $\mathcal{L}^1(P)$.

Sæt $\mathrm{X}_n = \mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_n]$ for alle n i $\mathbb{N}_0$. Da er $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ en martingal. Det er nemlig klart, at $\mathrm{X}_n = \mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_n]$ er integrabel og $\mathcal{F}_n$-målelig for ethvert n i $\mathbb{N}_0$.

For hvert n i $\mathbb{N}_0$ finder vi videre, at

$$\mathbb{E}[\mathrm{X}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_{n+1}] \mid \mathcal{F}_n] \overset{\substack{7.2.4\\ \downarrow}}{=} \mathbb{E}[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_n] \overset{?}{=} \mathrm{X}_n \quad \text{P-n.o.}$$

Ifølge 7.7.1 er $\{\mathrm{X}_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ uniformt integrabel.

Eksempel 9.1.6. Se øvelse 9.1

Lemma 9.1.7. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ og $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være følger af stokastiske variable herpå.

(i) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ og $(\mathrm{Y}_n, \mathcal{F}_n)$ er martingaler, og $a, b \in \mathbb{R}$, da er $(a\mathrm{X}_n + b\mathrm{Y}_n, \mathcal{F}_n)$ igen en martingal.

(ii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ og $(\mathrm{Y}_n, \mathcal{F}_n)$ er sub-martingaler, og $a, b \in [0, \infty)$, da er $(a\mathrm{X}_n + b\mathrm{Y}_n, \mathcal{F}_n)$ igen en sub-martingal.

(iii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ og $(\mathrm{Y}_n, \mathcal{F}_n)$ er super-martingaler, og $a, b \in [0, \infty)$, da er $(a\mathrm{X}_n + b\mathrm{Y}_n, \mathcal{F}_n)$ igen en super-martingal.

Sætning 9.1.8 (Konvekse transformationer af martingaler og sub-martingaler). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en følge af stokastiske variable herpå.
Lad videre $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en konveks-funktion, således at $\varphi(\mathrm{X}_n) \in \mathcal{L}^1(P)$ for alle n.
Da gælder følgende udsagn:

(i) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en martingal, da er $(\varphi(\mathrm{X}_n), \mathcal{F}_n)$ en submartingal.

(ii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en sub-martingal, og φ yderligere er voksende, da er $(\varphi(\mathrm{X}_n), \mathcal{F}_n)$ igen en submartingal.

Lemma 9.1.9. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret ssh-felt, og lad $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en følge af stokastiske variable herpå.

(i) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en sub-martingal, så gæ/der der, at

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\left[|\mathrm{X}_n|\right] < \infty \Longleftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n^+\right] < \infty.$$

(ii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en sub-MG, og der findes en stok. var. Z i $\mathcal{L}^1(P)$, så $\mathrm{X}_n \leq Z$ P-n.o. for alle n, da er $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\left[|\mathrm{X}_n|\right] < \infty$.

(iii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en super-martingal, så gæ/der der, at

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\left[|\mathrm{X}_n|\right] < \infty \Longleftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n^-\right] < \infty$$

(iv) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en super-MG, og der findes en stok. var. Z i $\mathcal{L}^1(P)$, så $\mathrm{X}_n \geq Z$ P-n.o. for alle n, da er $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\left[|\mathrm{X}_n|\right] < \infty$.

9.2 Konstruktioner med martingaler

Sætning 9.2.1 (Doob-dekompositionen). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en tilpasset følge af stokastiske variable fra $\mathcal{L}^1(P)$. Da kan $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dekomponeres på formen:

$$\mathrm{X}_n = \mathrm{M}_n + \mathrm{A}_n, \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

hvor

1. $(\mathrm{M}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en martingal.
2. $\mathrm{A}_0 \equiv 0$, og $\mathrm{A}_n \in \mathcal{L}^1(P)$, og A_n er $\mathcal{F}_{n-1}$-målelig for alle $ni\mathbb{N}$.

Hvis $\mathrm{X}_n = \tilde{\mathrm{M}}_n + \tilde{\mathrm{A}}_n$ er endnu en dekomposition af X_n, således at (a) og (b) er opfyldte, da gælder der, at

$$\mathrm{M}_n = \tilde{\mathrm{M}}_n \quad P\text{-n.o.} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{A}_n = \tilde{\mathrm{A}}_n \quad P\text{-n.o.} \qquad \text{for alle } ni\mathbb{N}_0.$$

Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en sub-martingal (hhv. en super-martingal), da er følgen $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ voksende P-n.o. (hhv. aftagende P-n.o.)

Sætning 9.2.2 (Martingal transforms). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en tilpasset følge af stokastiske variable fra $\mathcal{L}^1(P)$. Lad endvidere $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en forudsigelig proces (dvs. V_n er $\mathcal{F}_{0\vee(n-1)}$-målelig for alle n), og antag, at hvert V_n er begrænset. Definér nu

$$\Delta\mathrm{X}_n = \mathrm{X}_n - \mathrm{X}_{n-1} \qquad \text{for alle } ni\mathbb{N},$$

og

$$\mathrm{V} \bullet \mathrm{X}_n = \mathrm{V}_0\mathrm{X}_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}_k \Delta\mathrm{X}_k \qquad \text{for alle } ni\mathbb{N}_0$$

(i) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en martingal, da er $(\mathrm{V} \bullet \mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ igen en MG.

(ii) Hvis $\mathrm{V}_n \geq 0$ for alle n, og $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en sub-MG (hhv. super- MG), da er $(\mathrm{V} \bullet \mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ igen en sub-MG (hhv. super-MG).

9.3 Stoppetider

Definition 9.3.1 (Stoppetider). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynligheds-felt. En stoppetid (med hensyn til filteret $\left(\mathcal{F}_n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$) er en afbildning $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, der opfylder betingelsen:

$$\{\tau > n\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{for alle } n \text{ i } \mathbb{N}_0$$

Betingelsen kan ækvivalent formuleres som:

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{for alle } n \text{ i } \mathbb{N}_0$$

eller som

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{for alle } n \text{ i } \mathbb{N}_0$$

Specielt følger det, at τ er $\mathcal{F} - \mathcal{P}\left(\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\right)$-målelig.
En stoppetid $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ kaldes
- endelig, hvis $P(\tau < \infty) = 1$.
- begrænset, hvis der findes en konstant K i $\mathbb{N}$, således at $\tau(\omega) \leq K$ for alle ω i Ω.

Bemærkning 9.3.2.

Eksempel 9.3.3. 1. For ethvert n i $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ er $\tau \equiv n$ en stoppetid.

2. Antag, at $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ er en tilpasset følge af stokastiske variable, og at $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ er en følge af Borel-mængder i $\mathbb{R}$.

   Da definerer udtrykket

   $$\tau_A(\omega) = \inf\left\{k \in \mathbb{N}_0 \mid x_k(\omega) \in A_k\right\}, \quad (\omega \in \Omega)$$

   en stoppetid. Her benyttes konventionen: $\inf(\emptyset) = \infty$. For ethvert n i $\mathbb{N}_0$ har vi nemlig, at

   $$\{\tau > n\} = \{\mathrm{x}_0 \notin A_0\} \cap \{\mathrm{X}_1 \notin A_1\} \cap \cdots \cap \{\mathrm{X}_n \notin A_n\} \overset{?}{\in} \mathcal{F}_n.$$

3. (C) En afbildning $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ er en stoppetid, hvis og kun hvis der findes en følge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ af hændelser, således at

   $$\tau(\omega) = \inf\left\{k \in \mathbb{N}_0 \mid \omega \in F_k\right\}$$

   (*) og

   $$F_n \in \mathcal{F}_n \quad \text{for alle } n \text{ i } \mathbb{N}_0$$

   (**)

   Hvis (*) og (**) er opfyldte, har vi nemlig for heert n i $\mathbb{N}_0$, at

   $$\{\tau > n\} = F_0^c \cap \cdots \cap F_n^c \overset{?}{\in} \mathcal{F}_n.$$

Omvendt kan vi for en givet stoppetid τ definere

$$F_n = \{\tau \leq n\}, \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

hvorved (*) og (**) er opfyldte.

Sætning 9.3.4. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynligheds-felt. Da gælder følgende udsagn:

(i) Lad τ_1, τ_1 være stoppetider på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$.
Da er $\tau_1 + \tau_2, \tau_1 \vee \tau_2$ og $\tau_1 \wedge \tau_2$ igen stoppetider.

(ii) Lad $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ være en følge af stoppetider på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$.
Da er $\sup_{k\in\mathbb{N}} \tau_k, \inf_{k\in\mathbb{N}} \tau_k$ og $\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k$ igen stoppetider.

Definition 9.3.5 (σ-algebraen $\mathcal{F}_\tau$). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være et filter herpå.
Vi definerer så

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n\right).$$

Lad videre $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ være en stoppetid mht. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Vi definerer så

$$\mathcal{F}_\tau = \{F \in \mathcal{F}_\infty \mid F \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ for alle } n \text{ i } \mathbb{N}_0\}$$

Bemærk, at for F fra $\mathcal{F}_\tau$ gælder der automatisk, at

$$F \cap \{\tau = \infty\} \in \mathcal{F}_\infty$$

idet $F \in \mathcal{F}_\infty$, og $\{\tau = \infty\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0}\{\tau > k\} \in \mathcal{F}_\infty$.

Lemma 9.3.6. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt.

(i) For enhver stoppetid $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ er $\mathcal{F}_\tau$ en σ-algebra.

(ii) For enhver $\mathcal{F}_\tau$-målelig stokastisk variabel $\mathrm{Y} : \Omega \to \mathbb{R}$ gælder der, at $\mathrm{Y}1_{\{\tau=n\}}$ er $\mathcal{F}_n$-målelig for alle $n i\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

Sætning 9.3.7. Lad τ være en stoppetid med hensyn til filteret $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Da gælder følgende udsagn:

(i) $A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_n$ for alle $ni\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ og A i $\mathcal{F}_n$.

(ii) τ er $\mathcal{F}_\tau - \mathcal{P}\,(\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$-målelig.

(iii) For ethvert n i $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ og X i $\mathcal{L}^1(P)$ gælder formlen:

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_\tau\right] 1_{\{\tau=n\}} = \mathbb{E}\left[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_n\right] 1_{\{\tau=n\}} \overset{\substack{7.3.2\\ \downarrow}}{=} \mathbb{E}\left[\mathrm{X}1_{\{\tau=n\}} \mid \mathcal{F}_n\right] \qquad \text{P-n.o.}$$

Sætning 9.3.8. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynligheds-felt, og lad τ, τ_1, τ_2 være stoppetider herpå.

(i) Hvis $\tau \equiv n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, gælder der, at $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_n$.

(ii) Hvis $\tau_1 \leq \tau_2$, gælder der, at $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.

(iii) $\mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.

(iv) $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n\wedge\tau}$ for alle $ni\mathbb{N}_0$.

(v) For alle A i $\mathcal{F}_{\tau_1}$ gælder der, at

$$A \cap \{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2}, \qquad \text{og} \qquad A \cap \{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2}$$

(vi) For enhver mængde A i $\mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2}$ er $\tau_A := \tau_1 1_A + \tau_2 1_{A^c}$ igen en stoppetid.

Sætning 9.3.9. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynligheds-felt, og lad τ være en stoppetid herpå.
Da gælder formlen:

$$\mathcal{F}_\tau = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_{\tau\wedge n}\right)$$

Sætning 9.3.10. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, lad σ, τ være stoppetider herpå, og betragt de tilhørende σ-algebraer $\mathcal{F}_\tau$ og $\mathcal{F}_\sigma$.
For enhver stokastisk variabel X fra $\mathcal{L}^1(P)$ gælder da følgende udsagn:

(i) Hvis X@$\mathcal{F}_\tau$, gælder formlen:

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right].$$

(ii) Generelt gælder formlen:

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_\tau\right] \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \mid \mathcal{F}_\tau\right]$$

Den stokastiske variabel X_τ

Lad $(\mathrm{X}_{n\in\mathbb{N}})$ være en tilpasset følge af stok. var. på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$. Vi definerer da den stokastiske variable $\mathrm{X}_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$ ved

$$\mathrm{X}_\infty(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n(\omega), & \text{hvis } \lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n(\omega) \text{ eksisterer i } \mathbb{R} \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Det følger fra Korollar 4.3.11 i [M&I], at X_∞ er $\mathcal{F}_\infty - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-målelig. For enhver stoppetid τ definerer vi den stok. var. X_τ ved formlen:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_\tau(\omega) = \mathrm{X}_{\tau(\omega)}(\omega) &= \begin{cases} \mathrm{X}_n(\omega), & \text{hvis } \tau(\omega) = n \text{ for et } n \text{ i } \mathbb{N}_0 \\ \mathrm{X}_\infty(\omega), & \text{hvis } \tau(\omega) = \infty \end{cases} \\ &= \mathrm{X}_\infty(\omega) 1_{\{\tau=\infty\}}(\omega) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{X}_k(\omega) 1_{\{\tau=k\}}(\omega) \end{aligned}$$

Specielt viser (2), at X_τ@$\mathcal{F}_\infty$. Husk: $\mathrm{X}_\tau(\omega) = \begin{cases} \mathrm{X}_n(\omega), & \text{hvis } \tau(\omega) = n \text{ for et } n \text{ i } \mathbb{N}_0, \\ \mathrm{X}_\infty(\omega), & \text{hvis } \tau(\omega) = \infty, \end{cases}$

Alternativt kan vi skrive X_τ på formen:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_\tau(\omega) &= \begin{cases} \mathrm{X}_n(\omega), & \text{hvis } \tau(\omega) = n \text{ for et } n\mathrm{i}\mathbb{N}_0, \\ \lim_{k\to\infty} \mathrm{X}_k(\omega), & \text{hvis } \tau(\omega) = \infty, \text{ og } \lim_{k\to\infty} \mathrm{X}_k(\omega) \text{ eksisterer i}\mathbb{R}, \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lim_{k\to\infty} \mathrm{X}_{\tau(\omega)\wedge k}(\omega), & \text{hvis grænseværdien eksisterer i}\mathbb{R}, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \end{aligned}$$

Specielt ser vi, at

$$|\mathrm{X}_\tau| \leq \liminf_{k\to\infty} |\mathrm{X}_{\tau\wedge k}|.$$

Definition 9.3.11. For enhver stoppetid τ definerer vi den stok. var. X_τ ved formlen:

$$X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega), & \text{hvis } \tau(\omega) = n \text{ for et } n \text{ i } \mathbb{N}_0 \\ X_\infty(\omega), & \text{hvis } \tau(\omega) = \infty \end{cases}$$
$$= X_\infty(\omega) 1_{\{\tau=\infty\}}(\omega) + \sum_{k=0}^{\infty} X_k(\omega) 1_{\{\tau=k\}}(\omega)$$

Bemærkning 9.3.12. Alternativt kan vi skrive X_τ på formen:

$$X_\tau(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega), & \text{hvis } \tau(\omega) = n \text{ for et } n\text{i}\mathbb{N}_0, \\ \lim_{k\to\infty} X_k(\omega), & \text{hvis } \tau(\omega) = \infty, \text{ og } \lim_{k\to\infty} X_k(\omega) \text{ eksisterer i}\mathbb{R}, \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \lim_{k\to\infty} X_{\tau(\omega)\wedge k}(\omega), & \text{hvis grænseværdien eksisterer i}\mathbb{R}, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Sætning 9.3.13. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynligheds-felt, og lad $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en tilpasset følge af stokastiske variable herpå.
Lad videre τ være en stoppetid på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$. Da gælder følgende udsagn:

(i) $X_\tau \Subset \mathcal{F}_\tau$.

(ii) Hvis $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_{\tau\wedge n}|\right] < \infty$, gælder der, at $X_\tau \in \mathcal{L}^1(P)$.

(iii) Hvis τ er begrænset, og $X_n \in \mathcal{L}^1(P)$ for alle n i $\mathbb{N}$, gælder der, at $X_\tau \in \mathcal{L}^1(P)$.

9.4 Optional sampling(første version)

Sætning 9.4.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, lad τ være en stoppetid, og lad $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en følge af stokastiske variable.
Da gælder følgende udsagn:

(i) Hvis $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en sub-martingal, da er $(X_{n\wedge\tau}, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ igen en sub-martingal.

(ii) Hvis $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en super-martingal, da er $(X_{n\wedge\tau}, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ igen en super-martingal.

(iii) Hvis $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en martingal, da er $(X_{n\wedge\tau}, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ igen en martingal.

Sætning 9.4.2. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad σ, τ være begrænsede stoppetider, således at $\sigma \leq \tau$.

(i) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en sub-martingal, gælder der, at $\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{X}_\tau \in \mathcal{L}^1(P)$, og at

$$\mathbb{E}[\mathrm{x}_0] \leq \mathbb{E}[\mathrm{x}_\sigma] \leq \mathbb{E}[\mathrm{x}_\tau], \quad \text{og} \quad \mathbb{E}[\mathrm{x}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \geq \mathrm{X}_\sigma \quad \text{P-n.o.}$$

(ii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en super-martingal, gælder der, at $\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{X}_\tau \in \mathcal{L}^1(P)$, og at

$$\mathbb{E}[\mathrm{x}_0] \geq \mathbb{E}[\mathrm{x}_\sigma] \geq \mathbb{E}[\mathrm{X}_\tau], \quad \text{og} \quad \mathbb{E}[\mathrm{X}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] \leq \mathrm{X}_\sigma \quad \text{P-n.o.}$$

(iii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en martingal, gælder der, at $\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{X}_\tau \in \mathcal{L}^1(P)$, og at $\mathbb{E}[\mathrm{X}_0] = \mathbb{E}[\mathrm{X}_\sigma] = \mathbb{E}[\mathrm{X}_\tau], \quad \text{og} \quad \mathbb{E}[\mathrm{X}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] = \mathrm{X}_\sigma \quad$ P-n.o.

Korollar 9.4.3. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad τ være en stoppetid. Lad videre $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en tilpasset følge fra $\mathcal{L}^1(P)$.

(i) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en sub-MG (hhv. super-MG), da er $(\mathrm{X}_{n\wedge\tau}, \mathcal{F}_n)$ igen en sub-MG (hhv. super-MG), og der gælder implikationen:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}[|\mathrm{X}_n|] < \infty \Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}[|\mathrm{X}_{n\wedge\tau}|] < \infty$$

(ii) (a) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en sub-MG og $\{\mathrm{X}_n^+ \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ er uniformt integrabel, da er $\left\{\mathrm{X}_{n\wedge\tau}^+ \mid n \in \mathbb{N}_0\right\}$ ligeledes uniformt integrabel.

(b) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en super- MG og $\{\mathrm{X}_n^- \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ er uniformt integrabel, da er $\left\{\mathrm{X}_{n\wedge\tau}^- \mid n \in \mathbb{N}_0\right\}$ ligeledes uniformt integrabel.

(c) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en uniformt integrabel MG, da er $\{\mathrm{X}_{n\wedge\tau} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ligeledes uniformt integrabel.

9.5 Martingale Maximal-uligheder

Sætning 9.5.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, lad $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en tilpasset følge af integrable stokastiske variable, og lad ℓ være et strengt positivt tal.

(i) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en sub-MG, da gælder for hvert n i $\mathbb{N}$ uligheden:

$$\ell P\left(\max_{0\le k\le n} \mathrm{X}_k > \ell\right) \le \int_{\left\{\max_{0\le k\le n} \mathrm{x}_k > \ell\right\}} \mathrm{X}_n \, \mathrm{d}P \le \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n^+\right].$$

(ii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en sub-MG, da gælder for hvert n i $\mathbb{N}$ uligheden:

$$\ell P\left(\min_{0\le k\le n} \mathrm{X}_k < -\ell\right) \le \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n^+\right] - \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_0\right].$$

(iii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en sub-MG eller en super-MG, da gælder for hvert ni $\mathbb{N}$ ulighederne:

$$\ell P\left(\max_{0\le k\le n} |\mathrm{X}_k| > \ell\right) \le 2\mathbb{E}\left[|\mathrm{X}_n|\right] + \mathbb{E}\left[|\mathrm{X}_0|\right] \le 3 \max_{0\le k\le n} \mathbb{E}\left[|\mathrm{X}_k|\right]$$

(iv) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en sub-MG eller en super-MG, da gælder uligheden:

$$\ell P\left(\sup_{k\in\mathbb{N}_0} |\mathrm{x}_k| > \ell\right) \le 3 \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\left[|\mathrm{x}_k|\right].$$

Korollar 9.5.2. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ være en sub-MG eller en super-MG. Antag, at

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\left[|\mathrm{X}_n|\right] < \infty$$

Da gælder der, at

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |\mathrm{X}_n| < \infty\right) = 1$$

Sætning 9.5.3. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ være en tilpasset følge, således at $(|\mathrm{X}_n|, \mathcal{F}_n)$ er en sub-MG.
Lad videre p være et tal $i(1, \infty)$, og lad q $i(1, \infty)$ være bestemt ved, at $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(i) For ethvert $ni\mathbb{N}_0$ gælder uligheden:

$$\left\| \max_{0 \leq k \leq n} |\mathrm{X}_k| \right\|_p \leq q \left\| \mathrm{X}_n \right\|_p$$

(ii) Der gælder endvidere uligheden:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} |\mathrm{X}_n|^p\right] \leq q^p \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{E}\left[|\mathrm{X}_n|^p\right]$$

Lemma 9.5.4. Lad X og Y være ikke-negative stokastiske variable på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at

$$\forall \ell > 0 : \ell P(\mathrm{x} > \ell) \leq \int_{\{\mathrm{x} > \ell\}} \mathrm{Y} \; \mathrm{d}P.$$

For ethvert p i $(1, \infty)$ gælder da uligheden:

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X}^p\right]^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}\left[\mathrm{Y}^p\right]^{1/p}.$$

9.6 Opkrydsninger og Martingal Konvergens Sætningen

Definition af opkrydsninger Lad r, s være reelle tal, således at $r < s$. For en følge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ af reelle tal, definerer vi tallene

$$0 \leq \tau_1 \leq \sigma_1 \leq \tau_2 \leq \sigma_2 \leq \tau_3 \leq \sigma_3 \leq \cdots$$

ved:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid x_n < r\}, \quad \text{og} \quad \sigma_1 = \inf\{n > \tau_1 \mid x_n > s\} \\ \tau_2 &= \inf\{n > \sigma_1 \mid x_n < r\}, \quad \text{og} \quad \sigma_2 = \inf\{n > \tau_2 \mid x_n > s\} \end{aligned}$$

og generelt for $ki\{2, 3, 4, \ldots\}$ sætter vi

$$\tau_k = \inf\{n > \sigma_{k-1} \mid x_n < r\}, \quad \text{og} \quad \sigma_k = \inf\{n > \tau_k \mid x_n > s\}.$$

Som sædvanlig benytter vi her konventionen: $\inf(\emptyset) = +\infty$. Bemærk, at der for ethvert k**i**$\mathbb{N}$ gælder implikationerne:

$$\tau_k = \sigma_k \Longrightarrow \tau_k = \infty, \quad \text{og} \quad \sigma_k = \tau_{k+1} \Longrightarrow \sigma_k = \infty$$

Vi definerer derefter antallet af opkrydsninger fra r til s for $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ved formlen:

$$U_{r,s} = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[0,\infty)}(\sigma_k) = \#\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma_k < \infty\}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{hvis } \sigma_1 = \infty \\ m, & \text{hvis } \sigma_m < \infty, \text{ og } \sigma_{m+1} = \infty \\ \infty, & \text{hvis } \sigma_m < \infty \text{ for alle } m \text{ i } \mathbb{N} \end{cases}$$

Vi definerer endvidere antallet af opkrydsninger fra r til si "tidsintervallet" $[0, n]$ for $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ved formlen:

$$U_{r,s}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[0,n]}(\sigma_k) = \#\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma_k \le n\}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{hvis } \sigma_1 > n \\ m, & \text{hvis } \sigma_m \le n, \text{ og } \sigma_{m+1} > n. \end{cases}$$

Bemærkning 9.6.1.

1. For ethvert n i $\mathbb{N}$ gælder der, at

$$U_{r,s}^{(n)} \le \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

2. Vi finder ved anvendelse af Monoton Konvergens, at

$$U_{r,s}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[0,n]}(\sigma_k) \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[0,\infty)}(\sigma_k) = U_{r,s}$$

for $n \to \infty$.

3. Der gælder bi-implikationen:

$$U_{r,s} = \infty \iff \#\{k \in \mathbb{N}_0 \mid x_k < r\} = +\infty = \#\{k \in \mathbb{N}_0 \mid x_k > s\}.$$

Lemma 9.6.2. For enhver følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ af reelle tal er følgende udsagn ækvivalente:

(i) $\lim_{n\to\infty} x_n$ eksisterer $i\overline{\mathbb{R}}$

(ii) $U_{r,s} < \infty$ for alle r, s i $\mathbb{R}$, således at $r < s$.

(iii) $U_{r,s} < \infty$ for alle $r, si\mathbb{Q}$, således at $r < s$.

Sætning 9.6.3 (Doobs opkrydsningsmulighed). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ være en super-martingal herpå.
Lad endvidere r, s være reelle tal, således at $r < s$. Definér

$$\tau_1 = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \mathrm{X}_n < r\}, \quad \text{og} \quad \sigma_1 = \inf\{n > \tau_1 \mid \mathrm{X}_n > s\},$$

og for $ki\{2, 3, 4, \ldots\}$

$$\tau_k = \inf\{n > \sigma_{k-1} \mid \mathrm{X}_n < r\}, \quad \text{og} \quad \sigma_k = \inf\{n > \tau_k \mid \mathrm{X}_n > s\}.$$

Definér endvidere,

$$\mathrm{U}_{r,s}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[0,n]}(\sigma_k), \quad (n \in \mathbb{N}),$$

og

$$\mathrm{U}_{r,s} = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{[0,\infty)}(\sigma_k).$$

Da gælder følgende udsagn:

(i) τ_k, σ_k er stoppetider for alle $ki\mathbb{N}$.

(ii) For ethvert n i $\mathbb{N}$ er $\mathrm{U}_{r,s}^{(n)} \mathcal{F}$-målelig, og der gælder ulighederne:

$$(s-r)\mathbb{E}\left[\mathrm{U}_{r,s}^{(n)}\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n^-\right] + r^+$$

(iii) Også $\mathrm{U}_{r,s}$ er $\mathcal{F}$-målelig, og der gælder uligheden:

$$(s-r)\mathbb{E}\left[\mathrm{U}_{r,s}\right] \leq r^+ + \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_n^-\right]$$

Bemærkning 9.6.4.

Sætning 9.6.5 (Martingal konvergenssætningen). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ være en sub-martingal eller en super-martingal.
Antag, at $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{E}[|\mathrm{X}_n|] < \infty$. Da eksisterer $\lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n(\omega) i\mathbb{R}$ for P-n.a. ω. Med andre ord gælder der, at $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}_\infty$ P-n.o., hvor

$$\mathrm{X}_\infty(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n(\omega), & \text{hvis } \lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n(\omega) \text{ eksisterer } i\mathbb{R}, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Der gæ/der endvidere, at

$$\mathbb{E}[|\mathrm{X}_\infty|] < \infty.$$

9.7 Uniformt integrable (sub- og super-)martingaler

Korollar 9.7.1. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en sub-martingal eller en super-martingal.
Hvis $\{\mathrm{X}_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ er uniformt integrabel, gælder der, at $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}_\infty$ n.o. og i 1-middel.

Korollar 9.7.2. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en følge af stokastiske variable herpå.

(i) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en sub-martingal, og $\{\mathrm{X}_n^+ \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ er uniformt integrabel, så gælder der, at $\mathrm{X}_\infty \in \mathcal{L}^1(P)$, og

$$\mathrm{X}_n \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\infty \mid \mathcal{F}_n\right] \quad \text{for alle } ni\mathbb{N}_0$$

(ii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en martingal, og $\{\mathrm{X}_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ er uniformt integrabel, så gælder der, at $\mathrm{X}_\infty \in \mathcal{L}^1(P)$, og

$$\mathrm{X}_n = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\infty \mid \mathcal{F}_n\right] \quad \text{for alle } ni\mathbb{N}_0$$

Sætning 9.7.3. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og sæt

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n\right)$$

Lad videre X være en stokastisk variabel i $\mathcal{L}^1(P)$, og definér

$$\mathrm{X}_n = \mathbb{E}\left[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_n\right], \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Da gælder følgende udsagn:

(i) $\mathrm{X}_n \to \mathbb{E}\left[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_\infty\right]$ P-n.o. og i 1-middel.

(ii) Hvis X yderligere er $\mathcal{F}_\infty$-målelig, så gælder der, at $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ P-n.o. og i 1-middel.

(iii) For enhver stoppetid τ med hensyn til $(\mathcal{F}_n)$ gælder der, at

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X} \mid \mathcal{F}_\tau\right] = \mathrm{X}_\tau$$

9.8 Optional Sampling (anden version)

Definition 9.8.1. Lad $\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og betragt enmm tilpasset følge $(Y_n)_{n\geq 0}$ af stokastiske variable herpå. Lad viodere τ være en stoppetid mht. $(\mathcal{F}_\backslash)$. Vi siger da, at τ er optional for (Y_n), hvis familien $\{Y_{\tau\wedge n|n\in\mathbb{N}_0}\}$ er uniformt integrabel.

Bemærkning 9.8.2. Bemærkninger om optionalitet Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\ \mathrm{N}_0}$ være en tilpasset følge af stokastiske variable herpå.
(1) Antag, at σ og τ er to stoppetider, som begge er optionale for $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Da er $\sigma\wedge\tau$ og $\sigma\vee\tau$ igen optionale for $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\ \mathrm{N}_0}$. Vi har nemlig for ethvert n i N_0, at

$$\left|\mathrm{Y}_{(\sigma\wedge\tau)\wedge n}\right| = |\mathrm{Y}_{\sigma\wedge n}|\, 1_{\{\sigma\leq\tau\}} + |\mathrm{Y}_{\tau\wedge n}|\, 1_{\{\sigma>\tau\}} \leq |\mathrm{Y}_{\sigma\wedge n}| + |\mathrm{Y}_{\tau\wedge n}|\,,$$

og

$$\left|\mathrm{Y}_{(\sigma\vee\tau)\wedge n}\right| = |\mathrm{Y}_{\tau\wedge n}|\, 1_{\{\sigma\leq\tau\}} + |\mathrm{Y}_{\sigma\wedge n}|\, 1_{\{\sigma>\tau\}} \leq |\mathrm{Y}_{\tau\wedge n}| + |\mathrm{Y}_{\sigma\wedge n}|\,,$$

hvor $\{|\mathrm{Y}_{\sigma\wedge n}| \mid n\in\mathbb{N}_0\} + \{|\mathrm{Y}_{\tau\wedge n}| \mid n\in\mathbb{N}_0\}$ er UI (jvf. 3.1.5 og 3.1.3).
(2) Hvis τ optional for $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\ \mathrm{N}_0}$, gælder der specielt, at $\mathrm{Y}_\tau\in\mathcal{L}^1(P)$. Der gælder nemlig

$$(\mathrm{Y}_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ er UI } \overset{\substack{3.3.2\\ \downarrow}}{\Longrightarrow} \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathrm{E}\left[|\mathrm{Y}_{\tau\wedge n}|\right] < \infty \overset{9.3.13}{\Longrightarrow} \mathrm{Y}_\tau\in\mathcal{L}^1(P).$$

Lemma 9.8.3 (Kriterier for optionalitet). Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, lad $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en tilpasset følge af stokastiske variable herpå, og lad τ være en stoppetid mht. $(\mathcal{F}_n)$.
Da er følgende betingelser hver især tilstrækkelige for, at τ er optional for $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:

1. Der findes en stokastisk variabel Y i $\mathcal{L}^1(P)$, således at

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |\mathrm{Y}_{\tau\wedge n}| \leq |\mathrm{Y}| P\text{-n.o.}$$

   [Jvf. Lemma 3.1.3(ii).]
2. Der findes α i $(1,\infty)$, således at $\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}\left[|\mathrm{Y}_{\tau\wedge n}|^\alpha\right] < \infty$. [Jvf. Eksempel 3.1.6.]
3. $\mathrm{Y}_{\tau\wedge n}\in\mathcal{L}^1(P)$ for alle n, og der findes Z i $\mathcal{L}^1(P)$, så $\mathrm{Y}_{\tau\wedge n}\to Z$ i 1 -middel for $n\to\infty$. [Jvf. Sætning 3.2.1.]

Eksempel 9.8.4. (A) Betingelse (a) er specielt opfyldt, hvis $\mathrm{Y}_n\in\mathcal{L}^1(P)$ for alle n, og der findes en konstant M i $\mathbb{N}$, saledes at $\tau\leq MP$-n.o.
For ethvert n i N_0 har vi nemlig da, at

$$\begin{aligned}|\mathrm{Y}_{\tau\wedge n}| &\overset{\text{m.o.o.}}{=} \sum_{k=0}^{M} |\mathrm{Y}_{\tau\wedge n}|\, 1_{\{\tau\wedge n=k\}}\\ &= \sum_{k=0}^{M} |\mathrm{Y}_k|\, 1_{\{\tau\wedge n=k\}} \leq \sum_{k=0}^{M} |\mathrm{Y}_k| \in\mathcal{L}^1(P)\end{aligned}$$

(B) Betragt reelle tal $a<b$ og stoppetiden (jvf. 9.3.3)

$$\tau_{a,b} = \inf\left\{n\in\mathbb{N}_0 \mid \mathrm{Y}_n\notin(a,b)\right\}.$$

Antag, at $\mathrm{Y}_0\in\mathcal{L}^1(P)$, og at der findes en konstant Mi$(0,\infty)$, således at $|\mathrm{Y}_n-\mathrm{Y}_{n-1}|\leq MP$-n.o. for alle n i $\mathbb{N}$.

Da er $\tau_{a,b}$ optional for $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. For alle n i $\mathbb{N}_0$ har vi nemlig, at

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{Y}_{\tau_{a,b}\wedge n}\right| = \left|\mathrm{Y}_{\tau_{a,b}}\right| 1_{\{\tau_{a,b}\leq n\}} + |\mathrm{Y}_n|\, 1_{\{\tau_{a,b}>n\}} \\
&= |\mathrm{Y}_0|\, 1_{\{\tau_{a,b}=0\}} + \left|\mathrm{Y}_{\tau_{a,b}-1} + \left(\mathrm{Y}_{\tau_{a,b}} - \mathrm{Y}_{\tau_{a,b}-1}\right)\right| 1_{\{1\leq\tau_{a,b}\leq n\}} \\
&\quad + |\mathrm{Y}_n|\, 1_{\{\tau_{a,b}>n\}} \\
&\overset{\text{n.o.}}{\leq} \ |\mathrm{Y}_0| + ((|a|\vee|b|)+M)1_{\{1\leq\tau_{a,b}\leq n\}} + (|a|\vee|b|)1_{\{\tau_{a,b}>n\}} \\
&= |\mathrm{Y}_0| + 2(|a|\vee|b|) + M \in \mathcal{L}^1(P)
\end{aligned}$$

Sætning 9.8.5. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, lad $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en tilpasset følge af stokastiske variable herpå, og lad τ være en endelig stoppetid mht. $(\mathcal{F}_n)$.
Da er τ optional for $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, hvis og kun hvis følgende 3 betingelser alle er opfyldte:

1. $\mathbb{E}\left[|Y_\tau|\right] < \infty$,
2. $\int_{\{\tau>n\}} |\mathrm{Y}_n|\,\mathrm{d}P < \infty \quad$ for alle n i $\mathbb{N}_0$,
3. $\lim_{n\to\infty} \int_{\{\tau>n\}} |\mathrm{Y}_n|\,\mathrm{d}P = 0$.

Sætning 9.8.6. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, lad $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en tilpasset følge af stokastiske variable herpå, og lad σ, τ være stoppetider *mht.* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Antag, at $\sigma \leq \tau$, og at τ er optional for $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Da er σ optional for $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, hvis og kun hvis $\mathbb{E}\left[|\mathrm{Y}_\sigma|\right] < \infty$.

Sætning 9.8.7. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en tilpasset følge af stokastiske variable herpå. Lad videre σ og τ være stoppetider mht. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, og antag, at $\sigma \leq \tau$.

(i) Antag, at $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en sub-MG, og at τ er optional for $(\mathrm{X}_n^+)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Da gælder der, at $\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{X}_\tau \in \mathcal{L}^1(P)$, og at

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_0\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\sigma\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau\right], \quad \text{samt} \quad \mathrm{X}_\sigma \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \quad \text{P-n.o.}$$

(ii) Antag, at $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en super-MG, og at τ er optional for $(\mathrm{X}_n^-)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Da gælder der, at $\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{X}_\tau \in \mathcal{L}^1(P)$, og at

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_0\right] \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\sigma\right] \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau\right], \quad \text{samt} \quad \mathrm{X}_\sigma \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \quad \text{P-n.o.}$$

(iii) Antag, at $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)$ er en MG, og at τ er optional for $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Da gælder der, at $\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{X}_\tau \in \mathcal{L}^1(P)$, og at

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_0\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\sigma\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau\right], \quad \text{samt} \quad \mathrm{X}_\sigma = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \quad \text{P-n.o.}$$

Korollar 9.8.8. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, og lad $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en ikke-negativ super-martingal.

(i) For enhver stoppetid τ mht. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gælder der, at $\mathrm{X}_\tau \in \mathcal{L}^1(P)$.

(ii) Hvis σ, τ er stoppetider mht. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, og $\sigma \leq \tau$, gælder der, at

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{x}_0\right] \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{x}_\sigma\right] \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{x}_\tau\right] \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{x}_\infty\right], \quad \text{og} \quad \mathrm{x}_\sigma \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{x}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \text{ P-n.o.}$$

(iii) For et vilkårligt tal $\ell i(0, \infty)$ gælder der, at

$$\ell P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathrm{x}_n > \ell\right) \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{x}_0\right]$$

Korollar 9.8.9. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, lad $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en tilpasset følge af stokastiske variable herpå, og lad σ, τ være stoppetider mht. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(i) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en sub-MG, og τ er optional for $(\mathrm{X}_n^+)_{n\in\mathbb{N}_0}$, så gælder der, at

$$\mathrm{X}_{\sigma\wedge\tau} \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \quad \text{P-n.o.}$$

(ii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en super-MG, og τ er optional for $(\mathrm{X}_n^-)_{n\in\mathbb{N}_0}$, så gælder der, at

$$\mathrm{X}_{\sigma\wedge\tau} \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \quad \text{P-n.o.}$$

(iii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en MG, og τ er optional for $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, så gælder der, at

$$\mathrm{X}_{\sigma\wedge\tau} = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right] \quad \text{P-n.o.}$$

Korollar 9.8.10. Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ være et filtreret sandsynlighedsfelt, lad $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være en tilpasset følge af stokastiske variable herpå, og lad σ, τ være stoppetider mht. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, således at $\sigma \leq \tau$.

(i) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en sub-MG, og $\{\mathrm{X}_n^+ \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ er UI, da gælder der, at $\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{X}_\tau \in \mathcal{L}^1(P)$, og at $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_0\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\sigma\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\infty\right],$ samt at $\mathrm{X}_\sigma \leq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right]$ P-n.o.

(ii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en super-MG, og $\{\mathrm{X}_n^- \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ er Ul, da gælder der, at $\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{X}_\tau \in \mathcal{L}^1(P)$, og at $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_0\right] \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\sigma\right] \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau\right] \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\infty\right],$ samt at $\mathrm{X}_\sigma \geq \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right]$ P-n.o.

(iii) Hvis $(\mathrm{X}_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ er en MG, og $\{\mathrm{X}_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ er UI, da gælder der, at $\mathrm{X}_\sigma, \mathrm{X}_\tau \in \mathcal{L}^1(P)$, og at $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}_0\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\sigma\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\infty\right],$ samt at $\mathrm{X}_\sigma = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\right]$ P-n.o.