1 Fourier-transformation og karakteristiske funktioner

1.1 Definition og indledende bemærkninger

Definition 1.1.1. *Lad μ være et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Den Fourier-transofrmerede af μ er funktionen $\hat{\mu} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ givet ved*

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle} \mu(\mathrm{d}\, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle t,x\rangle)\mu \,\mathrm{d}\, x + \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}^d} \sin(\langle t,x\rangle)\mu \,\mathrm{d}\, x$$

for ethvert t i $\mathbb{R}^d$. I tilfældet $d = 1$ ser vi specielt, at

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\, tx} \mu(\mathrm{d}\, x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\mu \,\mathrm{d}\, x + \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\mu \,\mathrm{d}\, x$$

for ethvert t i $\mathbb{R}$

Bemærkning 1.1.2. *Antag, at μ er et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ med tæthed f fra $\mathcal{L}^1(\lambda)^+$ med hensyn til λ. Det følger da for ethvert t i $\mathbb{R}$, at*

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\, tx} \mu(\mathrm{d}\, x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\, tx} f(x)\lambda(\mathrm{d}\, x) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(-t),$$

hvor $\hat{f}$ betegner den Fourier-transformerede af f (jvf. Definition 12.1.1 i [M&I])

Eksempel 1.1.3 (Den Fourier-transformerede af normalfordelingen)**.** *Vi har*

$$\widehat{N(\xi, \sigma^2)}(t) = e^{\mathrm{i}\, t\xi} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

for ethvert t i $\mathbb{R}$

Sætning 1.1.4. *Lad μ og ν være ssh.-mål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ hhv. $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Da gælder følgende udsagn:*

(i) $|\hat{\mu}(t)| \leq \hat{\mu}(0) = 1$ *for alle t i $\mathbb{R}^d$*

(ii) $\hat{\mu} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *er en kontinuert funktion.*

(iii) $\hat{\mu}(-t) = \overline{\hat{\mu}(t)}$ *for alle t i $\mathbb{R}^d$*

(iv) Hvis $d = m$ gælder der, at

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}(t)\nu(\mathrm{d}\, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\nu}(t)\mu(\mathrm{d}\, t)$$

(v) $\widehat{\mu \otimes \nu}(t,s) = \hat{\mu}(t)\hat{\nu}(s)$ *for alle (t,s) i $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{d+m}$*

(vi) $\widehat{\mu * \nu}(t,s) = \hat{\mu}(t) \cdot \hat{\nu}(t)$ *for alle t i $\mathbb{R}^d$*

Definition 1.1.5. *Lad* X *være en d-dimensionel stokastisk vektor defineret op sandsynlighedsfeltet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Den karakteristiske funktion for* X *er funktionen* $\varphi_{\mathsf{X}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *givet ved*

$$\varphi_{\mathsf{X}} = \hat{P_{\mathsf{X}}}, \quad \text{hvor } P_{\mathsf{X}} = P \circ \mathsf{X}^{-1}$$

For ethvert t *i* $\mathbb{R}^d$ *hat vi altså, at*

$$\varphi_{\mathsf{X}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle} P_{\mathsf{X}}(\mathrm{d}\,x) = \int_{\Omega} e^{\mathrm{i}\langle t,\mathsf{X}(\omega)\rangle} P(\mathrm{d}\,\omega) = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle}]$$

Eksempel 1.1.6. *Hvis* X *er normalfordelt, så har vi*

$$\varphi_{\mathsf{X}}(t) = \widehat{N(\xi,\sigma^2)}(t) = e^{\mathrm{i}\,t\xi} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

for alle t *i* $\mathbb{R}$

Korollar 1.1.7 (Egenskaber ved den karakteristiske funktion)**.** *Lad* X *og* Y *være hhv. d- og m-dimensionale stokastiske vektorere definerede på* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Da gælder følgende udsagn:*

(i) $|\varphi_{\mathsf{X}}(t)| \le \varphi_{\mathsf{X}}(0) = 1$ *for alle* t *i* $\mathbb{R}^d$

(ii) Funktionen $\varphi_{\mathsf{X}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *er kontinuert.*

(iii) $\varphi_{\mathsf{X}}(-t) = \varphi_{-\mathsf{X}}(t) = \overline{\varphi_{\mathsf{X}}(t)}$ *for alle* t *i* $\mathbb{R}^d$

(iv) For enhver $m \times n$ *matrix* A *og enhver vektor* b *i* $\mathbb{R}^m$ *gælder formlen:*

$$\varphi_{A\mathsf{X}+b}(s) = e^{\mathrm{i}\langle s,b\rangle} \varphi_{\mathsf{X}}(A^T s), \quad (s \in \mathbb{R}^m)$$

(v) Hvis $d = m$, *gælder formlen:* $\mathbb{E}[\varphi_{\mathsf{Y}}(\mathsf{X})] = \mathbb{E}[\varphi_{\mathsf{X}}(\mathsf{Y})]$

(vi) Hvis X *og* Y *er uafhængige, gælder formlen:*

$$\varphi_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(t,s) = \varphi_{\mathsf{X}}(t)\varphi_{\mathsf{Y}}(s), \quad (t \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}^m)$$

(vii) Hvis $d = m$, *og* X *og* Y *er uafhængige, gælder formlen:*

$$\varphi_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}(t) = \varphi_{\mathsf{X}}(t)\varphi_{\mathsf{Y}}(t) = \varphi_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(t,t), \quad (t \in \mathbb{R}^d)$$

1.2 Entydighed og Inversionsætningen for karakteristiske funktioner

Lemma 1.2.1. *Lad* μ *og* ν *være to mål på* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *og antag at* $\mu((-n,n)^d) < \infty$ *for alle* n *i* $\mathbb{N}$, *samt at*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi \,\mathrm{d}\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \psi \,\mathrm{d}\,\nu \quad \text{for alle } \psi \text{ i } C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})^+$$

Da gælder der, at $\mu = \nu$

Lemma 1.2.2. *Lad* X *og* Y *være uafhængiged d-dimensionale stokastiske vektorer definerede på sandsynlighedsfeltet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, og antag, at* X *er absolut kontinuert med tæthed* f_{X} *(med hensyn til* λ_d*).*
Da er $\mathsf{X}+\mathsf{Y}$ *ligeledes absolut kontinuert med* λ_d*-tæthed* $f_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}$ *givet ved*

$$f_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f_{\mathsf{X}}(z-y) P_{\mathsf{Y}}(\mathrm{d}\, y), \quad (z \in \mathbb{R}^d)$$

Lemma 1.2.3. *Lad* X *og* U *være uafhængige d-dimensionale stokastiske vektorer på sandsynlighedsfeltet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, og antag, at* $\mathsf{U} = (\mathsf{U}_1, \dots, \mathsf{U}_d)$*, hvor* $\mathsf{U}_1, \dots, \mathsf{U}_d$ *er uafhængige identisk* $N(0,1)$*-fordelte stokastiske variable.*
For ethvert σ *i* $(0, \infty)$ *gælder der da, at* $\mathsf{X} + \sigma\mathsf{U}$ *er absolut kontinuert med tæthed* $f_{\mathsf{X}+\sigma\mathsf{U}}$ *givet ved:*

$$f_{\mathsf{X}+\sigma\mathsf{U}}(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\|s\|^2} e^{-\,\mathrm{i}\langle t,s\rangle} \varphi_{\mathsf{X}}(s) \lambda_d(\mathrm{d}\, s), \quad (t \in \mathbb{R}^d),$$

hvor φ_{X} *er den karakteristiske funktion for* X

Lemma 1.2.4. *Lad* X *og* U *være d-dimensionale stokastiske vektorer defineret på* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, og betragt for ethvert* n *i* $\mathbb{N}$ *den stokastiske vektor* $\mathsf{X} + \frac{1}{n}\mathsf{U}$*.*
For enhver funktion ψ *fra* $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ *gælder der da, at*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(t) P_{\mathsf{X}+\frac{1}{n}\mathsf{U}}(\mathrm{d}\, t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t) P_{\mathsf{X}}(\mathrm{d}\, t)$$

Sætning 1.2.5. *(i) Lad* X *og* Y *være d-dimensionale stokastiske vektorer. Da gælder implikationen*

$$\varphi_{\mathsf{X}} = \varphi_{\mathsf{Y}} \Longrightarrow \mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$$

(ii) Lad μ *og* ν *være sandsynlighedsmål på* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$*. Da gælder implikationen:*

$$\hat{\mu} = \hat{\nu} \Longrightarrow \mu = \nu$$

Bemærkning 1.2.6. X *og* Y *behøver ikke at være defineret på samme sandsynlighedsfelt. Der kan derfor findes stokastiske variable* $\tilde{\mathsf{X}}, \tilde{\mathsf{Y}}$ *således at* $\tilde{\mathsf{X}} \sim \mathsf{X}$ *og* $\tilde{\mathsf{Y}} \sim \mathsf{Y}$ *og ræssonere:*

$$\varphi_{\mathsf{X}} = \varphi_{\mathsf{Y}} \Longleftrightarrow \varphi_{\tilde{\mathsf{X}}} = \varphi_{\tilde{\mathsf{Y}}} \Longrightarrow \tilde{\mathsf{X}} \sim \tilde{\mathsf{Y}} \Longrightarrow \mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$$

Korollar 1.2.7. *Lad* X *og* Y *være hhv. d- og m-dimensionale stokastiske vektorer definerede på sandsynlighedsfeltet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Da er* X *og* Y *uafhængige, hvis og kun hvis der gælder, at*

$$\varphi_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(t,s) = \varphi_{\mathsf{X}}(t)\varphi_{\mathsf{Y}}(s) \quad \textit{for alle } t \textit{ i } \mathbb{R}^d, \textit{og } s \textit{ i } \mathbb{R}^m$$

Sætning 1.2.8. *Lad* X *være en d-dimensional stokastisk vektor på sandsynligheds-feltet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, og antag, at dens karakteristiske funktion* φ_{X} *er element i* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$*. Da er* P_{X} *absolut kontinuert med tæthed* f_{X} *givet ved:*

$$f_{\mathsf{X}}(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle t,s\rangle} \varphi_{\mathsf{X}}(s) \lambda_d(\mathrm{d}\, s), \quad (t \in \mathbb{R}^d)$$