Problem (3.5)

Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ være et sandsynlighedsfelt, og lad (X_n) være en følge af stokastiske variable herpå, som er identisk fordelte. Vi da, at der gælder bi-implikationen:

$$X_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \iff \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ er uniformt integrabel.}$$

Solution

Fra Opgave 3.1 ved vi, at

$$X_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \iff \{X_1\} \text{ er uniformt integrabel.}$$

For $n \in \mathbb{N}$ har vi, at $X_n \sim X_1$. Det følger, at $|X_n| 1_{\{|X_n|>K\}} \sim |X_1| 1_{\{|X_1|>K\}}$ for ethvert $K > 0$. Dermed gælder der, at

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n| 1_{\{|X_n|>K\}}\right] = \mathbb{E}\left[|X_1| 1_{\{|X_1|>K\}}\right]$$

for alle $K > 0$. Det følger nu fra defintionen af uniform integrabilitet, at familien $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel hvis og kun hvis $\{X_1\}$ er uniformt integrabel. Vi har nu, at

$$\begin{aligned} X_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) &\iff \{X_1\} \text{ er uniformt integrabel} \\ &\iff \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ er uniformt integrabel,} \end{aligned}$$

som ønsket.

Problem (3.8)

Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et endeligt målrum, og lad (f_n) være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, saledes at $\{f_n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel.

(a) Vis, at mængden $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ligeledes er uniformt integrabel.

(b) Vis, at $f_n \to f$ i μ-1-middel og i μ-2-middel.

(c) Vis, at $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f \, \mathrm{d}\mu$, og at $\int_X f_n^2 \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f^2 \, \mathrm{d}\mu$ for $n \to \infty$.

Solution

(a) Idet $\{f_n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel, er $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n|^2 \, \mathrm{d}\mu < \infty$ jf. Sætning 3.1.4. Eksempel 3.1.7 med $p = 2$ giver da, at $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel.

Antag nu yderligere, at der findes en funktion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, saledes at $f_n \to f$ i μ-mal for $n \to \infty$.

(b) Konvergensen i μ-1-middel følger fra Sætning 3.2.1, idet $f_n \to f$ i μ-mãl og mængden $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel. Konvergensen i μ-2-middel følger tilsvarende fra Korollar 3.2.2, idet $f_n \to f$ i μ-mål og $\{f_n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel.

(c) Idet $f_n \to f$ i μ-1-middel, galder der, at

$$\left| \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$$

Dette viser, at $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Idet $f_n \to f$ i μ-2-middel, ved vi fra Opgave 2.2 , at $f_n^2 \to f^2$ i μ-1-middel. Pà sammme made som ovenfor følger det nu, at $\int_X f_n^2 \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f^2 \, \mathrm{d}\mu$.

Problem (4.1)

Problem (4.7)

Lad (X_n) være en følge af i.i.d. stokastiske variable på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, og antag, at $X_1 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$. Sæt endvidere $\xi = \mathbb{E}\left[X_1\right], \sigma^2 = \operatorname{Var}\left(X_1\right)$, og betragt for hvert $n \in \mathbb{N}$ de stokastiske variable

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k, \bar{X}_n := \frac{S_n}{n}, SS_n := \sum_{k=1}^n X_k^2, SSD_n := \sum_{k=1}^n \left(X_k - \bar{X}_n\right)^2, s_n := \frac{SSD_n}{n-1}.$$

(a) Vis, at $SSD_n = SS_n - \frac{S_n^2}{n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Beregn for hvert $n \in \mathbb{N}$ størrelserne: $\mathbb{E}[\bar{X}_n]$, $\operatorname{Var}(\bar{X}_n)$ og $\mathbb{E}[s_n]$

(c) Vis, at $\bar{\mathsf{X}}_n \to \xi$ P-n.o. og i 2-middel.

(d) Vis, at $s_n \to \sigma^2$ P-n.o. og i 1-middel.

Resultaterne i (c)-(d) udtrykker, at $\bar{\mathsf{X}}_n$ og s_n er konsistente estimatorer for hhv. ξ og σ^2.

Solution

(a)

For ethvert $n \in \mathbb{N}$ har vi, at

$$\begin{aligned}
SSD_n &= \sum_{k=1}^n \left(X_k - \bar{X}_n\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^n X_k^2 + \bar{X}_n^2 - 2X_k\bar{X}_n \\
&= SS_n + n\bar{X}_n^2 - 2\bar{X}_n \sum_{k=1}^n X_k \\
&= SS_n + \frac{S_n^2}{n} - 2\frac{S_n^2}{n} \\
&= SS_n - \frac{S_n^2}{n}
\end{aligned}$$

(b)

For ethvert $n \in \mathbb{N}$ har vi, at

$$\begin{aligned}
SSD_n &= \sum_{k=1}^n \left(X_k - \bar{X}_n\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^n X_k^2 + \bar{X}_n^2 - 2X_k\bar{X}_n \\
&= SS_n + n\bar{X}_n^2 - 2\bar{X}_n \sum_{k=1}^n X_k \\
&= SS_n + \frac{S_n^2}{n} - 2\frac{S_n^2}{n} \\
&= SS_n - \frac{S_n^2}{n}
\end{aligned}$$

(c) Vi benytter $\mathcal{L}^2$-udgaven af Store Tals Lov. Vi ser, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Var}(X_k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{k^2} < \infty$$

Da har vi (jf. Sætning 4.3.2), at $\bar{X}_n - \xi \to 0 \mathbb{P}$-n.o. og i 2-middel. Dette viser, at $\bar{X}_n \to \xi \mathbb{P}$-n.o. og i 2 -middel.

(d) Store Tals Stærke Lov (Sætning 4.3.6) giver, at $\frac{SS_n}{n} \to \mathbb{E}\left[X_1^2\right] \mathbb{P}$-n.o. og i 1middel. Det følger fra (c) og Opgave 2.2, at $\bar{X}_n^2 \to \xi^2 \mathbb{P}$-n.o. og i 1-middel. Vi ser nu, at

$$\frac{SSD_n}{n} = \frac{SS_n}{n} - \bar{X}_n^2 \to \mathbb{E}\left[X_1^2\right] - \xi^2 = \mathbb{E}\left[X_1^2\right] - \mathbb{E}\left[X_1\right]^2 = \operatorname{Var}(X_1) = \sigma^2$$

P-n.o. og i 1-middel jf. Opgave 2.8. Vi har nu, at

$$s_n = \frac{SSD_n}{n-1} = \frac{n}{n-1} \frac{SSD_n}{n} \to \sigma^2$$

$\mathbb{P}$-n.o. Vi ser desuden, at

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|s_n - \sigma^2\right|\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\frac{n}{n-1} \frac{SSD_n}{n} - \sigma^2\right|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|\frac{n}{n-1} \frac{SSD_n}{n} - \frac{SSD_n}{n}\right|\right] + \mathbb{E}\left[\left|\frac{SSD_n}{n} - \sigma^2\right|\right] \\
&= \left|\frac{n}{n-1} - 1\right| \mathbb{E}\left[\frac{SSD_n}{n}\right] + \mathbb{E}\left[\left|\frac{SSD_n}{n} - \sigma^2\right|\right]
\end{aligned}$$

Der gælder, at $\mathbb{E}\left[\left|\frac{SSD_n}{n} - \sigma^2\right|\right] \to 0$, samt at $\mathbb{E}\left[\frac{SSD_n}{n}\right] \to \sigma^2$, idet $\frac{SSD_n}{n} \to \sigma^2$ i 1-middel. Udregningen ovenfor viser da, at $s_n \to \sigma^2$ i 1-middel.

Problem (4.8)

Lad (X_n) være en følge af uafhængige stokastiske variable defineret på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, og antag for hvert $n \in \mathbb{N}$, at X_n er binomialfordelt med antalsparameter 1 og sandsynlighedsparameter $p_{\mathrm{n}} \in [0,1]$. Antag endvidere, at der findes $a \in [0,1]$, saledes at

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k \to a \text{ for } n \to \infty$$

(a) Vis, at $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to a$ ¶-n.o. for $n \to \infty$.

(b) Vis for ethvert $r \in (0, \infty)$, at $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to a$ i r-middel for $n \to \infty$.

Solution

(a) Vi benytter Sætning 4.3.2. Vi husker, at $\operatorname{Var}(X_k) = p_k(1-p_k) \leq 1$. Vi ser, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Var}(X_k)}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

Da giver Sætning 4.3.2, at $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - p_k) \to 0 \mathbb{P}$-n.o. Vi har dermed, at

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - p_k) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k \to a$$

$\mathbb{P}$-n.o.

(b) Idet X_n 'erne kun antager værdierne 0 og 1 , gælder der, at $0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \leq 1$ for alle n. For $r \in (0, \infty)$ gælder der derfor, at

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - a \right|^r \leq (1+a)^r$$

Det følger, vha. domineret konvergens med majoranten $(1+a)^r$, at

$$\mathbb{E}\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - a \right|^r \right] \to 0$$

idet $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to a \mathbb{P}$-n.o. Dette viser, at $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to a$ i r-middel som $\emptyset$ nsket.

Problem (4.9)

Lad (X_n) være en følge af i.i.d. stokastiske variable defineret på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, og antag, at $\mathbb{E}\left[X_1^-\right] < \infty$, og at $\mathbb{E}\left[X_1^+\right] = \infty$. Opgaven går ud på at vise, at Store Tals Stærke Lov også gælder i denne situation, i den forstand at

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to \infty \quad \mathbb{P}\text{-n.o.}, \tag{1}$$

idet vi noterer, at $\mathbb{E}\left[X_1\right] = \infty$.

(a) Vis for ethvert $M \in (0, \infty)$, at $X_1 \wedge M \in \mathcal{L}^1(¶)$, og at

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \wedge M \to \mathbb{E}[X_1 \wedge M] \text{ ¶-n.o.}$$

(b) Vis for ethvert $M \in (0, \infty)$, at

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq \mathbb{E}\left[X_1 \wedge M\right] \qquad \text{P-n.o.}$$

(c) Udled (1) ved at lade $M \to \infty$ i (b).

Solution

(a) For ethvert $M \in (0, \infty)$ gælder der, at $\mathbb{E}\left[(X_1 \wedge M)^-\right] = \mathbb{E}\left[X_1^-\right] < \infty$, og at $\mathbb{E}\left[(X_1 \wedge M)^+\right] \leq M < \infty$. Dermed har vi, at $X_1 \wedge M \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. Store Tals Stærke Lov giver nu, at

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \wedge M \to \mathbb{E}\left[X_1 \wedge M\right]$$

P-n.o., idet $(X_n \wedge M)$ er en i.i.d. følge.

(b) For ethvert $M \in (0, \infty)$ gælder der, at $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \wedge M$ for alle n. Dermed har vi, at

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \wedge M = \mathbb{E}\left[X_1 \wedge M\right]$$

$\mathbb{P}$-n.o. jf. delopgave (a).

(c) Ved anvendelse af generaliseret monoton konvergens, făr vi, at

$$\mathbb{E}\left[X_1 \wedge M\right] \to \mathbb{E}\left[X_1\right] = \infty$$

for $M \to \infty$. Delopgave (b) giver så, at

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \infty$$

$\mathbb{P}$-n.o. Idet $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$, gælder der altså, at

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = \infty$$

$\mathbb{P}$-n.o. Dette viser (1).