1 Fourier-transformation og karakteristiske funktioner

1.1 Definition og indledende bemærkninger

Definition 1.1.1. *Lad μ være et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Den Fourier-transofrmerede af μ er funktionen $\hat{\mu} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ givet ved*

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle} \mu(\mathrm{d}\,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle t,x\rangle)\mu\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}^d} \sin(\langle t,x\rangle)\mu\,\mathrm{d}\,x$$

for ethvert t i $\mathbb{R}^d$. I tilfældet $d = 1$ ser vi specielt, at

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\,tx} \mu(\mathrm{d}\,x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\mu\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\mu\,\mathrm{d}\,x$$

for ethvert t i $\mathbb{R}$

Bemærkning 1.1.2. *Antag, at μ er et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ med tæthed f fra $\mathcal{L}^1(\lambda)^+$ med hensyn til λ. Det følger da for ethvert t i $\mathbb{R}$, at*

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\,tx} \mu(\mathrm{d}\,x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}\,tx} f(x)\lambda(\mathrm{d}\,x) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(-t),$$

hvor $\hat{f}$ betegner den Fourier-transformerede af f (jvf. Definition 12.1.1 i [M&I])

Eksempel 1.1.3 (Den Fourier-transformerede af normalfordelingen)**.** *Vi har*

$$\widehat{N(\xi,\sigma^2)}(t) = e^{\mathrm{i}\,t\xi} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

for ethvert t i $\mathbb{R}$

Sætning 1.1.4. *Lad μ og ν være ssh.-mål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ hhv. $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Da gælder følgende udsagn:*

(i) $|\hat{\mu}(t)| \leq \hat{\mu}(0) = 1$ *for alle t i $\mathbb{R}^d$*

(ii) $\hat{\mu} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *er en kontinuert funktion.*

(iii) $\hat{\mu}(-t) = \overline{\hat{\mu}(t)}$ *for alle t i $\mathbb{R}^d$*

(iv) *Hvis $d = m$ gælder der, at*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}(t)\nu(\mathrm{d}\,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\nu}(t)\mu(\mathrm{d}\,t)$$

(v) $\widehat{\mu \otimes \nu}(t,s) = \hat{\mu}(t)\hat{\nu}(s)$ *for alle (t,s) i $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{d+m}$*

(vi) $\widehat{\mu * \nu}(t,s) = \hat{\mu}(t) \cdot \hat{\nu}(t)$ *for alle t i $\mathbb{R}^d$*

Definition 1.1.5. *Lad* X *være en d-dimensionel stokastisk vektor defineret op sandsynlighedsfeltet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Den karakteristiske funktion for* X *er funktionen* $\varphi_{\mathsf{X}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *givet ved*

$$\varphi_{\mathsf{X}} = \hat{P_{\mathsf{X}}}, \quad \textit{hvor } P_{\mathsf{X}} = P \circ \mathsf{X}^{-1}$$

For ethvert t *i* $\mathbb{R}^d$ *hat vi altså, at*

$$\varphi_{\mathsf{X}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle} P_{\mathsf{X}}(\mathrm{d}\, x) = \int_{\Omega} e^{\mathrm{i}\langle t,\mathsf{X}(\omega)\rangle} P(\mathrm{d}\,\omega) = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle}]$$

Eksempel 1.1.6. *Hvis* X *er normalfordelt, så har vi*

$$\varphi_{\mathsf{X}}(t) = \widehat{N(\xi, \sigma^2)}(t) = e^{\mathrm{i}\, t\xi} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

for alle t *i* $\mathbb{R}$

Korollar 1.1.7 (Egenskaber ved den karakteristiske funktion)**.** *Lad* X *og* Y *være hhv. d- og m-dimensionale stokastiske vektorere definerede på* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Da gælder følgende udsagn:*

(i) $|\varphi_{\mathsf{X}}(t)| \leq \varphi_{\mathsf{X}}(0) = 1$ *for alle* t *i* $\mathbb{R}^d$

(ii) *Funktionen* $\varphi_{\mathsf{X}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *er kontinuert.*

(iii) $\varphi_{\mathsf{X}}(-t) = \varphi_{-\mathsf{X}}(t) = \overline{\varphi_{\mathsf{X}}(t)}$ *for alle* t *i* $\mathbb{R}^d$

(iv) *For enhver* $m \times n$ *matrix* A *og enhver vektor* b *i* $\mathbb{R}^m$ *gælder formlen:*

$$\varphi_{A\mathsf{X}+b}(s) = e^{\mathrm{i}\langle s,b\rangle} \varphi_{\mathsf{X}}(A^T s), \quad (s \in \mathbb{R}^m)$$

(v) *Hvis* $d = m$, *gælder formlen:* $\mathbb{E}[\varphi_{\mathsf{Y}}(\mathsf{X})] = \mathbb{E}[\varphi_{\mathsf{X}}(\mathsf{Y})]$

(vi) *Hvis* X *og* Y *er uafhængige, gælder formlen:*

$$\varphi_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(t, s) = \varphi_{\mathsf{X}}(t)\varphi_{\mathsf{Y}}(s), \quad (t \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}^m)$$

(vii) *Hvis* $d = m$, *og* X *og* Y *er uafhængige, gælder formlen:*

$$\varphi_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}(t) = \varphi_{\mathsf{X}}(t)\varphi_{\mathsf{Y}}(t) = \varphi_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(t, t), \quad (t \in \mathbb{R}^d)$$

1.2 Entydighed og Inversionsætningen for karakteristiske funktioner

Lemma 1.2.1. *Lad* μ *og* ν *være to mål på* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *og antag at* $\mu((-n, n)^d) < \infty$ *for alle* n *i* $\mathbb{N}$, *samt at*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi \,\mathrm{d}\,\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \psi \,\mathrm{d}\,\nu \quad \textit{for alle } \psi \textit{ i } C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})^+$$

Da gælder der, at $\mu = \nu$

Altså at ψ tilhører alle kontinuerte funktioner med kompakt støtte.

Lemma 1.2.2. *Lad* X *og* Y *være uafhængiged d-dimensionale stokastiske vektorer definerede på sandsynlighedsfeltet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, og antag, at* X *er absolut kontinuert med tæthed* f_{X} *(med hensyn til* λ_d*).*
Da er $\mathsf{X}+\mathsf{Y}$ *ligeledes absolut kontinuert med* λ_d*-tæthed* $f_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}$ *givet ved*

$$f_{\mathsf{X}+\mathsf{Y}}(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f_{\mathsf{X}}(z-y) P_{\mathsf{Y}}(\mathrm{d}\, y), \quad (z \in \mathbb{R}^d)$$

Lemma 1.2.3. *Lad* X *og* U *være uafhængige d-dimensionale stokastiske vektorer på sandsynlighedsfeltet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, og antag, at* $\mathsf{U} = (\mathsf{U}_1, \dots, \mathsf{U}_d)$*, hvor* $\mathsf{U}_1, \dots, \mathsf{U}_d$ *er uafhængige identisk* $N(0,1)$*-fordelte stokastiske variable.*
For ethvert σ *i* $(0, \infty)$ *gælder der da, at* $\mathsf{X} + \sigma \mathsf{U}$ *er absolut kontinuert med tæthed* $f_{\mathsf{X}+\sigma\mathsf{U}}$ *givet ved:*

$$f_{\mathsf{X}+\sigma\mathsf{U}}(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 \|s\|^2} e^{-\,\mathrm{i}\langle t,s\rangle} \varphi_{\mathsf{X}}(s) \lambda_d(\mathrm{d}\, s), \quad (t \in \mathbb{R}^d),$$

hvor φ_{X} *er den karakteristiske funktion for* X

Lemma 1.2.4. *Lad* X *og* U *være d-dimensionale stokastiske vektorer defineret på* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, og betragt for ethvert* n *i* $\mathbb{N}$ *den stokastiske vektor* $\mathsf{X} + \frac{1}{n}\mathsf{U}$*.*
For enhver funktion ψ *fra* $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ *gælder der da, at*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(t) P_{\mathsf{X}+\frac{1}{n}\mathsf{U}}(\mathrm{d}\, t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t) P_{\mathsf{X}}(\mathrm{d}\, t)$$

Sætning 1.2.5. (i) *Lad* X *og* Y *være d-dimensionale stokastiske vektorer. Da gælder implikationen*

$$\varphi_{\mathsf{X}} = \varphi_{\mathsf{Y}} \Longrightarrow \mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$$

(ii) *Lad* μ *og* ν *være sandsynlighedsmål på* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$*. Da gælder implikationen:*

$$\hat{\mu} = \hat{\nu} \Longrightarrow \mu = \nu$$

Bemærkning 1.2.6. X *og* Y *behøver ikke at være defineret på samme sandsynlighedsfelt. Der kan derfor findes stokastiske variable* $\tilde{\mathsf{X}}, \tilde{\mathsf{Y}}$ *således at* $\tilde{\mathsf{X}} \sim \mathsf{X}$ *og* $\tilde{\mathsf{Y}} \sim \mathsf{Y}$ *og ræssonere:*

$$\varphi_{\mathsf{X}} = \varphi_{\mathsf{Y}} \Longleftrightarrow \varphi_{\tilde{\mathsf{X}}} = \varphi_{\tilde{\mathsf{Y}}} \Longrightarrow \tilde{\mathsf{X}} \sim \tilde{\mathsf{Y}} \Longrightarrow \mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$$

Korollar 1.2.7. *Lad* X *og* Y *være hhv.* d*- og* m*-dimensionale stokastiske vektorer definerede på sandsynlighedsfeltet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Da er* X *og* Y *uafhængige, hvis og kun hvis der gælder, at*

$$\varphi_{(\mathsf{X},\mathsf{Y})}(t,s) = \varphi_{\mathsf{X}}(t)\varphi_{\mathsf{Y}}(s) \quad \textit{for alle } t \textit{ i } \mathbb{R}^d, \textit{og } s \textit{ i } \mathbb{R}^m$$

Sætning 1.2.8 (Inversionssætningen for karakteristiske funktioner)**.** *Lad* X *være en* d*-dimensional stokastisk vektor på sandsynlighedsfeltet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, og antag, at dens karakteristiske funktion* φ_{X} *er element i* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_d)$*. Da er* P_{X} *absolut kontinuert med tæthed* f_{X} *givet ved:*

$$f_{\mathsf{X}}(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\langle t,s\rangle} \varphi_{\mathsf{X}}(s)\lambda_d(\mathrm{d}\, s), \quad (t \in \mathbb{R}^d)$$

Proof. Proof □

1.3 Differentiabilitet og Taylor-udvikling for karakteristiske funktioner

Sætning 1.3.1 (Differentiabilitet for den karakteristiske funktion)**.** (i) *Lad* μ *være et sandsynligehdsmål på* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, og antag at* $p \in \mathbb{N}_0$*, således at* $\int_{\mathbb{R}} |x|^p \mu(\mathrm{d}\, x) < \infty$*.*
Da er $\hat{\mu}$ p*-gange differentiabel med afledede*

$$\hat{\mu}^{(k)}(t) = \mathrm{i}^k \int_{\mathbb{R}} \mathsf{x}^k e^{\mathrm{i}\, \mathsf{x} t} \mu(\mathrm{d}\, x), \quad (t \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \ldots, p).$$

(ii) *Lad* X *være en stokastisk variabel defineret på* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, og antag, at* $p \in \mathbb{N}_0$*, således at* $\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p] < \infty$*.*
Da er φ_{X} p*-gange differentiabel med afledede:*

$$\varphi_{\mathsf{X}}^{(k)}(t) = \mathrm{i}\, \mathbb{E}[\mathsf{X}^k e^{\mathrm{i}\, t\mathsf{X}}], \quad (t \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \ldots, p).$$

Specielt er

$$\mathbb{E}[\mathsf{X}^k] = \mathrm{i}^{-k}\, \varphi_{\mathsf{X}}^{(k)}(0), \quad (k = 0, 1, \ldots, p).$$

Bemærk at ii) følger af i)

Lemma 1.3.2. *For hvert $n \in \mathbb{N}_0$ defineres funktionen $r_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ved*

$$r_n(t) = e^{\mathrm{i}\, t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{i}^k\, t^k}{k!}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Da gælder vurderingen:

$$|r_n(t)| \leq \frac{2|t|^n}{n!} \wedge \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ovenstående kan også skrives som

$$|r_n(t)| \leq \min\{\frac{2|t|^n}{n!}, \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}\}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Korollar 1.3.3. *Lax X være en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, således at $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. For ethvert α i $[2, 3]$ gælder da vurderingen:*

$$\left|\varphi_{\mathsf{X}}(t) - 1 - \mathrm{i}\, t\mathbb{E}[\mathsf{X}] + \frac{1}{2}t^2\mathbb{E}[\mathsf{X}^2]\right| \leq |t|^\alpha \mathbb{E}[|\mathsf{X}|^\alpha], \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Korollar 1.3.4. *Lad X være en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og antag, at $\sigma^2 := \mathbb{E}[\mathsf{X}^2] < \infty$, samt at $\mathbb{E}[\mathsf{X}] = 0$.*
Da gælder der, at

$$\frac{\varphi_{\mathsf{X}}(t) - 1}{t^2} \longrightarrow -\frac{\sigma^2}{2} \quad \text{for } t \to 0.$$

Sætning 1.3.5 (Taylor-udvikling af den karakteristiske funktion)**.** *Lad X være en stokastisk variabel på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med momenter af enhver orden. Antag yderligere at følgende betingelse er opfyldt:*

$$\exists \rho \in (0, \infty) : \lim_{n \to \infty} \frac{\rho^n \mathbb{E}[|\mathsf{X}|^n]}{n!} = 0, \tag{1}$$

og vælg et ρ i henhold hertil. For ethvert a i $\mathbb{R}$ gælder der da, at Taylor-rækken for φ_{X} i a er konvergent i $[a - \rho, a + \rho]$ med sum φ_{X}, dsv.

$$\varphi_{\mathsf{X}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_{\mathsf{X}}^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k\, \mathbb{E}[\mathsf{X}^k e^{\mathrm{i}\, a\mathsf{X}}]}{k!}(t-a)^k, \quad (t \in [a - \rho, a + \rho]).$$

Bemærkning 1.3.6. *Betingelsen (1) er ækvivalent med følgende betingelse:*

$$\exists c \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[|\mathsf{X}|^n] \leq c^n n!$$

Betingelsen er altså en begrænsning på hvor hurtigt momenterne må vokse med n.

1.4 Anvendelser af den karakteristiske funktion

Sætning 1.4.1. (i) *Lad* X *være en symmetrisk stokastisk variabel, og lad videre* $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \dots$ *være i.i.d stokastiske variable, således at* $\mathsf{X}_n \sim \mathsf{X}$ *for alle n.*

Hvis yderligere $\mathsf{X} \sim \frac{\mathsf{X}_1 + \cdots + \mathsf{X}_n}{\sqrt{n}}$ *for alle n, da gælder der, at* $\mathsf{X} \sim N(0, \sigma^2)$ *for passende* σ *i* $[0, \infty)$

(ii) *Lad* X *være en stokastisk variabel, og antag at* $\sigma^2 := \mathbb{E}[\mathsf{X}^2] < \infty$*. Antag endvidere, at* $\mathsf{X} \sim \frac{\mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2}{\sqrt{2}}$*, hvor* $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2$ *er i.i.d, og* $\mathsf{X}_1 \sim \mathsf{X}$*.*

Da gælder der, at $\mathsf{X} \sim N(0, \sigma^2)$

For $\sigma = 0$ tænker vi på X som dirac-målet.

Lemma 1.4.2. *Lad* $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ *være en følge af komplekse tal, således at* $a_n \longrightarrow a \in \mathbb{C}$ *for* $n \to \infty$*. Da gælder der, at*

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = \exp(a),$$

hvor $\exp(a) = e^{\mathrm{Re}(a)}(\cos(\mathrm{Im}(a))) + \mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}(a)).$

1.5 Momentproblemet

Problemstilling 1.5.1 (Momentproblemet)**.** *Lad* X *og* Y *være to stokastiske variable, og antag, at* $\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p], \mathbb{E}[|\mathsf{Y}|^p] < \infty$ *for alle p i* $\mathbb{N}$*, samt at*

$$\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p] = \mathbb{E}[|\mathsf{Y}|^p] \quad \textit{for alle } p \textit{ i } \mathbb{N}$$

Under hvilke yderligere betingelser kan man da slutte at $X \sim \mathsf{Y}$*?*

Sætning 1.5.2. *Lad* X *og* Y *være to stokastiske variable, og antag, at* $\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p], \mathbb{E}[|\mathsf{Y}|^p] < \infty$ *for alle p i* $\mathbb{N}$*, samt at*

$$\mathbb{E}[|\mathsf{X}|^p] = \mathbb{E}[|\mathsf{Y}|^p] \quad \textit{for alle } p \textit{ i } \mathbb{N}$$

Hvis yderligere

$$\exists \rho \in (0, \infty) : \mathbb{E}[e^{\rho|\mathsf{X}|}] < \infty,$$

da gælder der, at $\mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$

Til beviset for Sætning 1.5.2 får vi brog for følgende lemma:

Lemma 1.5.3. *Lad* X *være en stokastisk variabel på* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Da er følgende betingelser ækvivalente:*

(i) $\exists \rho \in (0, \infty) : \mathbb{E}[e^{\rho|\mathsf{X}|}] < \infty$.

(ii) $\exists c \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[|\mathsf{X}|^n] \leq c^n n!$.

(iii) $\exists c \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[\mathsf{X}^{2n}] \leq c^{2n} (2n)!$.

Korollar 1.5.4. *Lad* X *og* Y *være stokastiske variable på* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *og antag, at* P_{X} *og* P_{Y} *begge har kompakt støtte, dvs.*

$$\exists b < 0 : P(\mathsf{X} \in [-b, b]) = 1 = P(\mathsf{Y} \in [-b, b])$$

Da X *og* Y *har momenter af enhver orden. Hvis yderligere* $\mathbb{E}[\mathsf{X}^p] = \mathbb{E}[\mathsf{Y}^p]$ *for alle* p *i* $\mathbb{N}$, *da gælder der, at* $\mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$.

Korollar 1.5.5. *Lad* X *være en ikke-negativ stokastisk variabel, og betragt dens* ***Laplace transformerede****:*

$$L_{\mathsf{X}}(s) = \mathbb{E}[e^{-s\mathsf{X}}], \quad (s \in [0, \infty)).$$

Da er P_{X} *entydigt bestemet af* L_{X}. *Med andre ord: Hvis* Y *er en anden ikke-negativ stokastisk variabel, således at* $\text{Ł}_{\mathsf{Y}}(s) = L_{\mathsf{X}}(s)$ *for alle* s *i* $[0, \infty)$, *da gælder der, at* $\mathsf{X} \sim \mathsf{Y}$.

2 Konvergens i mål og i sandsynlighed

2.1 De tre fundamentale konvergenstyper og deres indbyrdes styrkeforhold

Definition 2.1.1. *Lad $(X,\mathcal{E},\mu)$ være et målrum, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p være et (strengt) positivt tal. Vi siger da, at*

(a) *f_n konvergerer mod f i $\mu-$mål for $n \to \infty$, hvis*

$$\forall \epsilon > 0 : \mu\left(\{x \in \mathsf{X} \big| |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{for } n \to \infty.$$

I så fald benyttes notationen: $f_n \to f$ i $\mu-$mål.

(b) *f_n konvergerer mod f $\mu-$n.o. for $n \to \infty$, hvis*

$$\mu\left(\{x \in X | \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}^c\right) = 0.$$

I så fald benyttes notationen: $f_n \to f \mu-$n.o.

(c) *f_n konvergerer mod f i $\mu - p$ middel for $n \to \infty$, hvis*

$$\int_X |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\,\mu \longrightarrow 0, \quad \text{for } n \to \infty$$

I så fald benyttes notationen: $f_n \to f$ i $\mu - p$-middel.

Bemærkning 2.1.2. *Blandt andet linearitet bevarer konvergens.*

Sætning 2.1.3. *Lad" $\to$ " betegne én af de tre konvergensformer indført i Definition 2.1.1, og betragt funktioner $f, g, f_1, f_2, f_3, \ldots$ fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da gælder implikationen:*

$$f_n \longrightarrow f, \;\text{ og }\; f_n \longrightarrow g \implies f = g \;\; \mu - n.o$$

Sætning 2.1.4. *Lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p være et positivt tal. Da gælder følgende udsagn:*

(i) *Hvis $f_n \to f$ i $\mu - p$ middel, så gælder der også at $f_n \to f$ i $\mu-$mål.*

(ii) *Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\,\mu < \infty$, så gælder der, at $f_n \to f \mu - n.o.$*

(iii) *Hvis $f_n \to f$ i $\mu-$mål, så findes en voksende følge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af naturlige tal, således at $f_{n_k} \to f \mu$-n.o. for $k \to \infty$*

Sætning 2.1.5. *Antag, at μ er et* ***endeligt mål****, lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p,r være positive tal. Da gælder følgende udsagn:*

(i) *Følgende betingelser er endbetydende:*

  (i1) $f_n \to f$ *i* $\mu -$ *mål.*

  (i2) $\forall K \in (0,\infty) : \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \wedge K \,\mathrm{d}\,\mu = 0.$

  (i3) $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \wedge 1 \,\mathrm{d}\,\mu = 0.$

(ii) *Hvis $f_n \to f$ $\mu-$n.o., så gælder der også, at $f_n \to f$ i $\mu-$mål.*

(iii) *Hvis $r < p$, og $f_n \to f$ i $\mu-p$-middel, da gælder der også at $f_n \to f$ i $\mu-r$-middel.*

2.2 Fuldstændighed

Definition 2.2.1. *Lad $(X,\mathcal{E},\mu)$ være et målrum, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p være et strengt positivt tal. Vi siger da, at*

(a) *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en* ***Cauchy-følge*** *i $\mu-$mål, hvis*

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n,m\to\infty} \mu\left(\{|f_n - f_m| > \epsilon\}\right) = 0.$$

eller udskrevet hvis

$$\forall \epsilon, \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \mu\left(\{|f_n - f_m| > \epsilon\}\right) \leq \delta$$

(b) *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en* ***Cauchy-følge*** *$\mu-$n.o., hvis $\mu(F^C) = 0$, hvor*

$$F = \{x \in X | (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ er en Cauchy-følge i } \mathbb{R}\}$$

(c) *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en* ***Cauchy-følge*** *i $\mu - p$-middel, hvis*

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_X f_n - f_m|^p \,\mathrm{d}\,\mu = 0,$$

eller udskrevet hvis

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \int_X |f_n - f_m|^p \,\mathrm{d}\,\mu \leq \epsilon.$$

Bemærkning 2.2.2. *Mængden F er målelig - det følger af omskrivningen*

$$F = \bigcap_{K\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m\geq N} \left\{ x \in X \big| |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{K} \right\}.$$

Lemma 2.2.3. *Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da gælder følgende udsagn:*

(i) *Lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og antag, at der findes en følge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af (strengt) positive tal, således at*

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0, \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\{|f_n - f| > \epsilon_n\}\right) < \infty.$$

Da gælder der, at

$$f_n \to \ \mu - n.o., \quad \text{og} \quad f_n \to f \ \text{i} \ \mu\text{-mål}.$$

(ii) *Antag, at der findes en følge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af (strengt) positive tal, således at*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty, \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\{|f_{n+1} - f_n| > \epsilon_n\}\right) < \infty$$

Da findes der en funtkion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at

$$f_n \to f \ \mu\text{-n.o.}, \quad \text{og} \quad f_n \to f \ \text{i} \ \mu\text{-mål}.$$

Sætning 2.2.4. *Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da er følgende betingelser ækvivalente:*

(i) *Der findes en funktion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at $f_n \to f$ i $\mu-$mål.*

(ii) *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i $\mu-$mål.*

Med andre ord er konvergens i μ-mål et fuldstændigt konvergensbegreb.

Korollar 2.2.5. *Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, lad (f_n) være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad p være et strengt positivt tal. Da er følgende betingelser ævkvivalente:*

(i) *Der findes en funktion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at $f_n \to f$ i μ-p-middel.*

(ii) *(f_n) er en Cauchy-følge i μ-p-middel.*

Korollar 2.2.6. *Lad $(X, \mathcal{E}, \mu)$ være et målrum, lad p være et tal i $[1, \infty)$, og lad (f_n) være en følge af funktioner fra $\mathcal{L}^p(\mu)$. Da gælder implikationen:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \ \text{er konvergent i} \ \mu\text{-}p\text{-middel}.$$

Med andre ord gælder der, at ***absolut konvergens medfører konvergens*** *i $\mathcal{L}^p(\mu)$.*

2.3 Konvergens af f_n vs. konvergens af $|f_n|^p$

2.4 Konvergens i sandsynlighed

Definition 2.4.1. *Lad* (X_n) *være en følge af stokastiske variable defineret på sandsynlighedsfeltet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, og lad* X *være endnu en stokastisk variabel herpå. Lad endvidere* r *være et positivt tal. Vi siger da, at* X_n *konvergerer mod* X

- ***i sandsynlighed****, hvis der for ethvert positivt* ϵ *gælder, at*

$$\lim_{n\to\infty} P(|\mathsf{X}_n - \mathsf{X}| > \epsilon) = 0.$$

I bekræftende fald skriver vi: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X}$ *for* $n \to \infty$.

- ***i r-middel****, hvis*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|\mathsf{X}_n - \mathsf{X}|^r\right] = 0.$$

I bekræftende fald skriver vi: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r(P)} \mathsf{X}$ *for* $n \to \infty$.

- ***P-næsten overalt (eller P-næsten sikkert)****, hvis*

$$P(\lim_{n\to\infty} \mathsf{X}_n = \mathsf{X}) = 1,$$

eller mere udførligt, hvis $P(F) = 1$*, hvor*

$$F = \{\omega \in \Omega \big| \lim_{n\to\infty} \mathsf{X}_n(\omega) = \mathsf{X}(\omega)\} \in \mathcal{F}.$$

I begræftende fald skriver vi: $\mathsf{X}_n \xrightarrow{n.o.} \mathsf{X}$ *(eller* $\mathsf{X}_n \xrightarrow{n.s.} \mathsf{X}$*) for* $n \to \infty$.

2.5 Konvergens i sandsynlighed på generelle metriske rum

Definition 2.5.1 (Produktmetrikker)**.** *Lad* (S, ρ) *og* (T, δ) *betegne metriske rum. En metrik* η *på* $S \times T$ *kaldes en* ***produktmetrik****, hvis den opfylder følgende betingelse: For alle* $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ *i* $S \times T$ *galder bi-implikationen:*

$$\lim_{n\to\infty} \eta\left(\left(x_n, y_n\right), (x, y)\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n, x\right) = \lim_{n\to\infty} \delta\left(y_n, y\right) = 0$$

Bemærkning 2.5.2. *Afbildningen* $\rho : S \times S \to \mathbb{R}$ *er* $(B)(S \times S) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$*-målelig.*

Definition 2.5.3 (Borel-algebraen på $S \times S$)**.** *Lad* (S, ρ) *være et metrisk rum. Borel-algebraen* $\mathcal{B}(S \times S)$ *på* $S \times S$ *defineres da ved*

$$\mathcal{B}(S \times S) = \sigma(\mathcal{G}(\eta))$$

hvor η *er en vilkårlig produktmetrik på* $S \times S$.

Bemærkning 2.5.4. *Hvis (S, ρ) er separabelt, så gælder:*

$$\mathcal{B}(S \times S) = \mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(S).$$

Ydermere hvis X, Y er stokastiske funktioner på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i et separabelt metrisk rum (S, ρ), da er afbildningen

$$D := \rho(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) : \Omega \to \mathbb{R}$$

$\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$*-målelig.*

Definition 2.5.5. *Lad (S, ρ) være et separabelt metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S, ρ).*
Vi siger da, at

(a) X_n *konvergerer mod* X *næsten overalt (skrevet:* $\mathsf{X}_n \xrightarrow{n.o.} \mathsf{X}$ *), hvis* $P(F^C) = 0$*, hvor*

$$F = \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \to \infty} \rho\left(\mathsf{X}_n(\omega), \mathsf{X}(\omega)\right) = 0 \right\}$$

(b) X_n *konvergerer mod* X *i sandsynlighed (skrevet:* $\mathsf{X}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathsf{X}$*), hvis*

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n \to \infty} P\left(\rho\left(\mathsf{X}_n, \mathsf{X}\right) > \epsilon\right) = 0$$

Bemærkning 2.5.6. *Betragt for hert n i $\mathbb{N}$ den stokastiske variable $D_n := \rho\left(\mathsf{X}_n, \mathsf{X}\right)$. Så har vi bi-implikationerne:*

$$\mathsf{X}_n \xrightarrow{n.o.} \mathsf{X} \iff D_n \xrightarrow{n.o.} 0, \quad og \quad \mathsf{X}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathsf{X} \iff D_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

Sætning 2.5.7. *Lad (S, ρ) være et separabelt metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S, ρ). Da gælder følgende udsagn:*

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{n.o.} \mathsf{X} \Longrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathsf{X}$.

(ii) *Hvis* $\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X}$*, findes en voksende følge* $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ *af naturlige tal, således at* $\mathsf{X}_{n_k} \xrightarrow{n.o.} \mathsf{X}$.

(iii) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X} \iff \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\rho\left(\mathsf{X}_n, \mathsf{X}\right) \wedge 1\right] = 0$.

Sætning 2.5.8. *Lad (S,ρ) være et separabelt metrisk rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i (S,ρ). Betragt endvidere endnu et separabelt metrisk rum $(\ T, \delta\ )$, og en $\mathcal{B}(S) - \mathcal{B}(T)$-målelig afbildning $f : S \to T$. Antag, at der findes en mængde C i $\mathcal{B}(S)$, således at*

$$P(\mathsf{X} \in C) = 1, \quad \textit{og} \quad f \textit{ er kontinuert i ethvert punkt } x \textit{ fra } C.$$

Da gælder følgende implikationer:

(i) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{n.o.} \mathsf{X} \Longrightarrow f(\mathsf{X}_n) \xrightarrow{n.o.} f(\mathsf{X})$.

(ii) $\mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X} \Longrightarrow f(\mathsf{X}_n) \xrightarrow{P} f(\mathsf{X})$.

Bemærkning 2.5.9. *Antag, at ρ, ρ' er to ækvivalente metrikker på S, således at (S,ρ) og (S,ρ') er separable.*

Betragt afbildningerne id: $(S,\rho) \to (S,\rho') \circ \mathrm{ogid}' : (S,\rho') \to (S,\rho)$ givet ved

$$\mathrm{id}(x) = \mathrm{id}'(x) = x, \quad (x \in S)$$

Da ρ og ρ' er ækvivalente, er id og id $'$ begge kontinuerte. Det følger derfor umiddelbart fra Sætning 2.5.8, at

$$\mathsf{X}_n \xrightarrow{n.o.\ /\mathrm{P}} \mathsf{X} \textit{ mht. } \rho \Longrightarrow \mathsf{X}_n = \mathrm{id}(\mathsf{X}_n) \xrightarrow{n.o.\ /\mathrm{P}} \mathrm{id}(\mathsf{X}) = \mathsf{X} \textit{ mht. } \rho'.$$

Overgang til en ækvivalent metrik ændrer altså ikke på, om $\mathsf{X}_n \to \mathsf{X}$ n.o./ i sandsynlighed eller ej.

Sætning 2.5.10. *Lad (S,ρ) og (T,δ) være separable metriske rum, og lad $\mathsf{X}, \mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \mathsf{X}_3, \ldots$ samt $\mathsf{Y}, \mathsf{Y}_1, \mathsf{Y}_2, \mathsf{Y}_3, \ldots$ være stokastiske funktioner på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ med værdier i hhv. (S,ρ) og (T,δ). Udstyr endvidere $S \times T$ med en produktmetrik η. Da gælder bi-implikationerne:*

(i) $(\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n) \xrightarrow{n.o.} (\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \Longleftrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{n.o.} \mathsf{X}$ *og* $\mathsf{Y}_n \xrightarrow{n.o.} \mathsf{Y}$.

(ii) $(\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_n) \xrightarrow{P} (\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \Longleftrightarrow \mathsf{X}_n \xrightarrow{P} \mathsf{X}$ *og* $\mathsf{Y}_n \xrightarrow{P} \mathsf{Y}$.

3 Uniform integrabilitet

3.1 Definition og indledende begreber

Definition 3.1.1. *En delmængde $\mathcal{H}$ af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ siges at være uniformt integrabel (mht. μ), hvis den opfylder følgende betingelse:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 \forall f \in \mathcal{H} : \int_{\{|f|>K\}} |f| \mathrm{d}\mu \leq \epsilon.$$

eller ækvivalent:

$$\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 : \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{\{|f|>K\}} |f| \mathrm{d}\mu \leq \epsilon.$$

Bemærkning 3.1.2. (i) *Hvis $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel, da gælder der automatisk at $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$. For hvis $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel kan vi f.eks. vælge $K > 0$, således at*

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{\{|f|>K\}} |f| \mathrm{d}\mu \leq 1$$

For hvert f fra $\mathcal{H}$ har vi da, at

$$\begin{aligned} \int_X |f| \mathrm{d}\mu &= \int_{\{|f| \leq K\}} |f| \mathrm{d}\mu + \int_{\{|f|>K\}} |f| \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_{\{|f| \leq K\}} K \ \mathrm{d}\mu + 1 \leq K\mu(X) + 1 < \infty \end{aligned}$$

(ii) *Hvis $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel, gælder dette også enhver delmængde $\mathcal{H}_0$ af $\mathcal{H}$.*

Hvis $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ er endeligt mange uniformt integrable delmængder af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, da er $\bigcup_{j=1}^n \mathcal{H}_j$ ligeledes uniformt integrabel.

Specielt fremgår det, at enhver endelig delmængde $\{f_1, \ldots, f_n\}$ af $\mathcal{L}^1(\mu)$ er uniformt integrabel.

Lemma 3.1.3. *Lad $\mathcal{H}$ være en delmængde af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad (f_n) og (g_n) være følger af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.*

(i) *Hvis $\mathcal{H}$ er uniformt integrabel, da er også mængden*

$$\tilde{\mathcal{H}} := \{f \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \big| \exists g \in \mathcal{H} : |f| \leq |g| \mu\text{-n.o.}\},$$

uniformt integrabel.

(ii) *For enhver funktion g fra $\mathcal{L}^1(\mu)^+$ er mængden $\{f \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \big| |f| \leq g \mu\text{-n.o.}\}$ uniformt integrabel.*

(iii) *Hvis mængden $\{g_n | n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel, og $|f_n| \leq |g_n| \mu$-n.o. for alle n, da er mængden $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ ligeledes uniformt integrabel.*

Sætning 3.1.4. *En delmængde $\mathcal{H}$ af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ er uniformt integrabel, hvis og kun hvis den opfylder følgende to betingelser:*

(i) $\sup_{f \in \mathcal{H}} \int_X |f| \mathrm{d}\mu < \infty$.

(ii) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{E} : \mu(A) \leq \delta \Longrightarrow \sup_{\delta \in \nu} \int_\Delta |f| \mathrm{d}\mu \leq \epsilon$.