

1 Fourier-transformation og karakteristiske funktioner

1.1 Definition og indledende bemærkninger

Definition 1.1.1. Lad μ være et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Den Fourier-transformerede af μ er funktionen $\hat{\mu} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ givet ved

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(\langle t, x \rangle) \mu(dx) + i \int_{\mathbb{R}^d} \sin(\langle t, x \rangle) \mu(dx)$$

for ethvert t i \mathbb{R}^d . I tilfældet $d = 1$ ser vi specielt, at

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \mu(dx) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) \mu(dx)$$

for ethvert t i \mathbb{R}

Bemærkning 1.1.2. Antag, at μ er et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ med tæthed f fra $\mathcal{L}^1(\lambda)^+$ med hensyn til λ . Det følger da for ethvert t i \mathbb{R} , at

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) \lambda(dx) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(-t),$$

hvor \hat{f} betegner den Fourier-transformerede af f (jvf. Definition 12.1.1 i [M&I])

Eksempel 1.1.3 (Den Fourier-transformerede af normalfordelingen). Vi har

$$\widehat{N(\xi, \sigma^2)}(t) = e^{it\xi} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

for ethvert t i \mathbb{R}

Sætning 1.1.4. Lad μ og ν være ssh.-mål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ hhv. $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Da gælder følgende udsagn:

- (i) $|\hat{\mu}(t)| \leq \hat{\mu}(0) = 1$ for alle t i \mathbb{R}^d
- (ii) $\hat{\mu} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ er en kontinuert funktion.
- (iii) $\hat{\mu}(-t) = \overline{\hat{\mu}(t)}$ for alle t i \mathbb{R}^d
- (iv) Hvis $d = m$ gælder der, at

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mu}(t) \nu(dt) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\nu}(t) \mu(dt)$$

- (v) $\widehat{\mu \otimes \nu}(t, s) = \hat{\mu}(t) \hat{\nu}(s)$ for alle (t, s) i $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{d+m}$
- (vi) $\widehat{\mu * \nu}(t, s) = \hat{\mu}(t) \cdot \hat{\nu}(s)$ for alle t i \mathbb{R}^d

Definition 1.1.5. Lad X være en d -dimensionel stokastisk vektor defineret op sandsynlighedsfeltet (Ω, \mathcal{F}, P) . Den karakteristiske funktion for X er funktionen $\varphi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ givet ved

$$\varphi_X = \hat{P}_X, \quad \text{hvor } P_X = P \circ X^{-1}$$

For ethvert t i \mathbb{R}^d har vi altså, at

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} P_X(dx) = \int_{\Omega} e^{i\langle t, X(\omega) \rangle} P(d\omega) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X \rangle}]$$

Eksempel 1.1.6. Hvis X er normalfordelt, så har vi

$$\varphi_X(t) = \widehat{N(\xi, \sigma^2)}(t) = e^{it\xi} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

for alle t i \mathbb{R}

Korollar 1.1.7 (Egenskaber ved den karakteristiske funktion). Lad X og Y være hhv. d - og m -dimensionale stokastiske vektorer definerede på (Ω, \mathcal{F}, P) . Da gælder følgende udsagn:

- (i) $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1$ for alle t i \mathbb{R}^d
- (ii) Funktionen $\varphi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ er kontinuert.
- (iii) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$ for alle t i \mathbb{R}^d
- (iv) For enhver $m \times n$ matrix A og enhver vektor b i \mathbb{R}^m gælder formelen:

$$\varphi_{AX+b}(s) = e^{i\langle s, b \rangle} \varphi_X(A^T s), \quad (s \in \mathbb{R}^m)$$

- (v) Hvis $d = m$, gælder formelen: $\mathbb{E}[\varphi_Y(X)] = \mathbb{E}[\varphi_X(Y)]$
- (vi) Hvis X og Y er uafhængige, gælder formelen:

$$\varphi_{(X,Y)}(t, s) = \varphi_X(t) \varphi_Y(s), \quad (t \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}^m)$$

- (vii) Hvis $d = m$, og X og Y er uafhængige, gælder formelen:

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t) = \varphi_{(X,Y)}(t, t), \quad (t \in \mathbb{R}^d)$$

1.2 Entydighed og Inversionsætningen for karakteristiske funktioner

Lemma 1.2.1. Lad μ og ν være to mål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ og antag at $\mu((-n, n)^d) < \infty$ for alle n i \mathbb{N} , samt at

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \psi d\nu \quad \text{for alle } \psi \text{ i } C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})^+$$

Da gælder der, at $\mu = \nu$

Altså at ψ tilhører alle kontinuerte funktioner med kompakt støtte.

Lemma 1.2.2. Lad X og Y være uafhængige d -dimensionale stokastiske vektorer definerede på sandsynlighedsfeltet (Ω, \mathcal{F}, P) , og antag, at X er absolut kontinuert med tæthed f_X (med hensyn til λ_d).
Da er $X + Y$ ligeledes absolut kontinuert med λ_d -tæthed f_{X+Y} givet ved

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f_X(z-y) P_Y(dy), \quad (z \in \mathbb{R}^d)$$

Lemma 1.2.3. Lad X og U være uafhængige d -dimensionale stokastiske vektorer på sandsynlighedsfeltet (Ω, \mathcal{F}, P) , og antag, at $U = (U_1, \dots, U_d)$, hvor U_1, \dots, U_d er uafhængige identisk $N(0, 1)$ -fordelte stokastiske variable.
For ethvert σ i $(0, \infty)$ gælder der da, at $X + \sigma U$ er absolut kontinuert med tæthed $f_{X+\sigma U}$ givet ved:

$$f_{X+\sigma U}(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 \|s\|^2} e^{-i\langle t, s \rangle} \varphi_X(s) \lambda_d(ds), \quad (t \in \mathbb{R}^d),$$

hvor φ_X er den karakteristiske funktion for X

Lemma 1.2.4. Lad X og U være d -dimensionale stokastiske vektorer defineret på (Ω, \mathcal{F}, P) , og betragt for ethvert n i \mathbb{N} den stokastiske vektor $X + \frac{1}{n}U$.
For enhver funktion ψ fra $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ gælder der da, at

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(t) P_{X+\frac{1}{n}U}(dt) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(t) P_X(dt)$$

Sætning 1.2.5. (i) Lad X og Y være d -dimensionale stokastiske vektorer. Da gælder implikationen

$$\varphi_X = \varphi_Y \implies X \sim Y$$

(ii) Lad μ og ν være sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Da gælder implikationen:

$$\hat{\mu} = \hat{\nu} \implies \mu = \nu$$

Bemærkning 1.2.6. X og Y behøver ikke at være defineret på samme sandsynlighedsfelt. Der kan derfor findes stokastiske variable \tilde{X}, \tilde{Y} således at $\tilde{X} \sim X$ og $\tilde{Y} \sim Y$ og ræsonere:

$$\varphi_X = \varphi_Y \iff \varphi_{\tilde{X}} = \varphi_{\tilde{Y}} \implies \tilde{X} \sim \tilde{Y} \implies X \sim Y$$

Korollar 1.2.7. Lad X og Y være hhv. d - og m -dimensionale stokastiske vektorer definerede på sandsynlighedsfeltet (Ω, \mathcal{F}, P) . Da er X og Y uafhængige, hvis og kun hvis der gælder, at

$$\varphi_{(X,Y)}(t, s) = \varphi_X(t)\varphi_Y(s) \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R}^d, \text{ og } s \in \mathbb{R}^m$$

Sætning 1.2.8 (Inversionssætningen for karakteristiske funktioner). Lad X være en d -dimensional stokastisk vektor på sandsynlighedsfeltet (Ω, \mathcal{F}, P) , og antag, at dens karakteristiske funktion φ_X er element i $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\lambda_d)$. Da er P_X absolut kontinuert med tæthed f_X givet ved:

$$f_X(t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, s \rangle} \varphi_X(s) \lambda_d(ds), \quad (t \in \mathbb{R}^d)$$

Proof. Proof □

1.3 Differentiabilitet og Taylor-udvikling for karakteristiske funktioner

Sætning 1.3.1 (Differentiabilitet for den karakteristiske funktion). (i)

Lad μ være et sandsynligheds mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, og antag at $p \in \mathbb{N}_0$, således at $\int_{\mathbb{R}} |x|^p \mu(dx) < \infty$.

Da er $\hat{\mu}$ p -gange differentiable med afledede

$$\hat{\mu}^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} \mu(dx), \quad (t \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, p).$$

(ii) Lad X være en stokastisk variabel defineret på (Ω, \mathcal{F}, P) , og antag, at $p \in \mathbb{N}_0$, således at $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$.

Da er φ_X p -gange differentiable med afledede:

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}], \quad (t \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, p).$$

Specielt er

$$\mathbb{E}[X^k] = i^{-k} \varphi_X^{(k)}(0), \quad (k = 0, 1, \dots, p).$$

Bemærk at ii) følger af i)

Lemma 1.3.2. For hvert $n \in \mathbb{N}_0$ defineres funktionen $r_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ved

$$r_n(t) = e^{it} - \sum_{k=0}^n \frac{i^k t^k}{k!}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Da gælder vurderingen:

$$|r_n(t)| \leq \frac{2|t|^n}{n!} \wedge \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Ovenstående kan også skrives som

$$|r_n(t)| \leq \min\left\{\frac{2|t|^n}{n!}, \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}\right\}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Korollar 1.3.3. Lad X være en stokastisk variabel på (Ω, \mathcal{F}, P) , således at $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. For ethvert $\alpha \in [2, 3]$ gælder da vurderingen:

$$\left| \varphi_X(t) - 1 - it\mathbb{E}[X] + \frac{1}{2}t^2\mathbb{E}[X^2] \right| \leq |t|^\alpha \mathbb{E}[|X|^\alpha], \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Korollar 1.3.4. Lad X være en stokastisk variabel på (Ω, \mathcal{F}, P) , og antag, at $\sigma^2 := \mathbb{E}[X^2] < \infty$, samt at $\mathbb{E}[X] = 0$.

Da gælder der, at

$$\frac{\varphi_X(t) - 1}{t^2} \longrightarrow -\frac{\sigma^2}{2} \quad \text{for } t \rightarrow 0.$$

Sætning 1.3.5 (Taylor-udvikling af den karakteristiske funktion). Lad X være en stokastisk variabel på (Ω, \mathcal{F}, P) med momenter af enhver orden. Antag yderligere at følgende betingelse er opfyldt:

$$\exists \rho \in (0, \infty) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho^n \mathbb{E}[|X|^n]}{n!} = 0, \quad (1)$$

og vælg et ρ i henhold hertil. For ethvert $a \in \mathbb{R}$ gælder der da, at Taylor-rækken for φ_X i a er konvergent i $[a - \rho, a + \rho]$ med sum φ_X , dvs.

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_X^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \mathbb{E}[X^k e^{iaX}]}{k!} (t-a)^k, \quad (t \in [a - \rho, a + \rho]).$$

Bemærkning 1.3.6. Betingelsen (1) er ækvivalent med følgende betingelse:

$$\exists c \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[|X|^n] \leq c^n n!$$

Betingelsen er altså en begrænsning på hvor hurtigt momenterne må vokse med n .

1.4 Anvendelser af den karakteristiske funktion

Sætning 1.4.1. (i) Lad X være en symmetrisk stokastisk variabel, og lad videre X_1, X_2, X_3, \dots være i.i.d stokastiske variable, således at $X_n \sim X$ for alle n .
Hvis yderligere $X \sim \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$ for alle n , da gælder der, at $X \sim N(0, \sigma^2)$ for passende σ i $[0, \infty)$

(ii) Lad X være en stokastisk variabel, og antag at $\sigma^2 := \mathbb{E}[X^2] < \infty$. Antag endvidere, at $X \sim \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$, hvor X_1, X_2 er i.i.d, og $X_1 \sim X$.
Da gælder der, at $X \sim N(0, \sigma^2)$

For $\sigma = 0$ tænker vi på X som dirac-målet.

Lemma 1.4.2. Lad $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ være en følge af komplekse tal, således at $a_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$ for $n \rightarrow \infty$. Da gælder der, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = \exp(a),$$

hvor $\exp(a) = e^{\operatorname{Re}(a)}(\cos(\operatorname{Im}(a))) + i \sin(\operatorname{Im}(a))$.

1.5 Momentproblemet

Problemstilling 1.5.1 (Momentproblemet). Lad X og Y være to stokastiske variable, og antag, at $\mathbb{E}[|X|^p], \mathbb{E}[|Y|^p] < \infty$ for alle $p \in \mathbb{N}$, samt at

$$\mathbb{E}[|X|^p] = \mathbb{E}[|Y|^p] \quad \text{for alle } p \in \mathbb{N}$$

Under hvilke yderligere betingelser kan man da slutte at $X \sim Y$?

Sætning 1.5.2. Lad X og Y være to stokastiske variable, og antag, at $\mathbb{E}[|X|^p], \mathbb{E}[|Y|^p] < \infty$ for alle $p \in \mathbb{N}$, samt at

$$\mathbb{E}[|X|^p] = \mathbb{E}[|Y|^p] \quad \text{for alle } p \in \mathbb{N}$$

Hvis yderligere

$$\exists \rho \in (0, \infty) : \mathbb{E}[e^{\rho|X|}] < \infty,$$

da gælder der, at $X \sim Y$

Til beviset for Sætning 1.5.2 får vi brog for følgende lemma:

Lemma 1.5.3. Lad X være en stokastisk variabel på (Ω, \mathcal{F}, P) . Da er følgende betingelser ækvivalente:

- (i) $\exists \rho \in (0, \infty) : \mathbb{E}[e^{\rho|X|}] < \infty$.
- (ii) $\exists c \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[|X|^n] \leq c^n n!$.
- (iii) $\exists c \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}[X^{2n}] \leq c^{2n} (2n)!$.

Korollar 1.5.4. Lad X og Y være stokastiske variable på (Ω, \mathcal{F}, P) , og antag, at P_X og P_Y begge har kompakt støtte, dvs.

$$\exists b < \infty : P(X \in [-b, b]) = 1 = P(Y \in [-b, b])$$

Da X og Y har momenter af enhver orden. Hvis yderligere $\mathbb{E}[X^p] = \mathbb{E}[Y^p]$ for alle p i \mathbb{N} , da gælder der, at $X \sim Y$.

Korollar 1.5.5. Lad X være en ikke-negativ stokastisk variabel, og betragt dens Laplace transformerede:

$$L_X(s) = \mathbb{E}[e^{-sX}], \quad (s \in [0, \infty)).$$

Da er P_X entydigt bestemt af L_X . Med andre ord: Hvis Y er en anden ikke-negativ stokastisk variabel, således at $L_Y(s) = L_X(s)$ for alle s i $[0, \infty)$, da gælder der, at $X \sim Y$.

2 Konvergens i mål og i sandsynlighed

2.1 De tre fundamentale konvergenstyper og deres indbyrdes styrkeforhold

Definition 2.1.1. Lad (X, \mathcal{E}, μ) være et målrum, og lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p være et (strengt) positivt tal. Vi siger da, at

- (a) f_n konvergerer mod f i μ -mål for $n \rightarrow \infty$, hvis

$$\forall \epsilon > 0 : \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

I så fald benyttes notationen: $f_n \rightarrow f$ i μ -mål.

- (b) f_n konvergerer mod f μ -n.o. for $n \rightarrow \infty$, hvis

$$\mu\left(\{x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\}^c\right) = 0.$$

I så fald benyttes notationen: $f_n \rightarrow f$ μ -n.o.

- (c) f_n konvergerer mod f i μ - p middel for $n \rightarrow \infty$, hvis

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0, \quad \text{for } n \rightarrow \infty$$

I så fald benyttes notationen: $f_n \rightarrow f$ i μ - p -middel.

Bemærkning 2.1.2. Blandt andet linearitet bevarer konvergens.

Sætning 2.1.3. Lad ” \rightarrow ” betegne én af de tre konvergensformer indført i Definition 2.1.1, og betragt funktioner $f, g, f_1, f_2, f_3, \dots$ fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da gælder implikationen:

$$f_n \rightarrow f, \text{ og } f_n \rightarrow g \implies f = g \text{ } \mu\text{-n.o.}$$

Sætning 2.1.4. Lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p være et positivt tal. Da gælder følgende udsagn:

- (i) Hvis $f_n \rightarrow f$ i μ - p middel, så gælder der også at $f_n \rightarrow f$ i μ -mål.
- (ii) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu < \infty$, så gælder der, at $f_n \rightarrow f$ μ -n.o.
- (iii) Hvis $f_n \rightarrow f$ i μ -mål, så findes en voksende følge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ af naturlige tal, således at $f_{n_k} \rightarrow f$ μ -n.o. for $k \rightarrow \infty$

Sætning 2.1.5. Antag, at μ er et **endeligt mål**, lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p, r være positive tal. Da gælder følgende udsagn:

- (i) Følgende betingelser er endbetydende:
 - (i1) $f_n \rightarrow f$ i μ -mål.
 - (i2) $\forall K \in (0, \infty) : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| \wedge K \, d\mu = 0$.
 - (i3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| \wedge 1 \, d\mu = 0$.
- (ii) Hvis $f_n \rightarrow f$ μ -n.o., så gælder der også, at $f_n \rightarrow f$ i μ -mål.
- (iii) Hvis $r < p$, og $f_n \rightarrow f$ i μ - p -middel, da gælder der også at $f_n \rightarrow f$ i μ - r -middel.

2.2 Fuldstændighed

Definition 2.2.1. Lad (X, \mathcal{E}, μ) være et målrum, og lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Lad endvidere p være et strengt positivt tal. Vi siger da, at

- (a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en **Cauchy-følge** i μ -mål, hvis

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n, m \rightarrow \infty} \mu(\{|f_n - f_m| > \epsilon\}) = 0.$$

eller udskrevet hvis

$$\forall \epsilon, \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \mu(\{|f_n - f_m| > \epsilon\}) \leq \delta$$

- (b) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en **Cauchy-følge** μ -n.o., hvis $\mu(F^C) = 0$, hvor

$$F = \{x \in X \mid (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ er en Cauchy-følge i } \mathbb{R}\}$$

- (c) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en **Cauchy-følge** i μ - p -middel, hvis

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f_m|^p \, d\mu = 0,$$

eller udskrevet hvis

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \int_X |f_n - f_m|^p \, d\mu \leq \epsilon.$$

Bemærkning 2.2.2. Mængden F er målelig - det følger af omskrivningen

$$F = \bigcap_{K \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n, m \geq N} \left\{ x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{K} \right\}.$$

Lemma 2.2.3. Lad (X, \mathcal{E}, μ) være et målrum, og lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da gælder følgende udsagn:

- (i) Lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og antag, at der findes en følge $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af (strengt) positive tal, således at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0, \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f_n - f| > \epsilon_n\}) < \infty.$$

Da gælder der, at

$$f_n \rightarrow \mu - \text{n.o.}, \quad \text{og} \quad f_n \rightarrow f \text{ i } \mu\text{-mål}.$$

- (ii) Antag, at der findes en følge $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af (strengt) positive tal, således at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty, \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f_{n+1} - f_n| > \epsilon_n\}) < \infty$$

Da findes der en funktion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-n.o.}, \quad \text{og} \quad f_n \rightarrow f \text{ i } \mu\text{-mål}.$$

Sætning 2.2.4. Lad (X, \mathcal{E}, μ) være et målrum, og lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

- (i) Der findes en funktion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at $f_n \rightarrow f$ i μ -mål.
(ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i μ -mål.

Med andre ord er konvergens i μ -mål et fuldstændigt konvergensbegreb.

Korollar 2.2.5. Lad (X, \mathcal{E}, μ) være et målrum, lad (f_n) være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad p være et strengt positivt tal. Da er følgende betingelser ækvivalente:

- (i) Der findes en funktion f fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, således at $f_n \rightarrow f$ i μ - p -middel.
(ii) (f_n) er en Cauchy-følge i μ - p -middel.

Korollar 2.2.6. Lad (X, \mathcal{E}, μ) være et målrum, lad p være et tal i $[1, \infty)$, og lad (f_n) være en følge af funktioner fra $\mathcal{L}^p(\mu)$. Da gælder implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ er konvergent i } \mu\text{-}p\text{-middel}.$$

Med andre ord gælder der, at **absolut konvergens medfører konvergens** i $\mathcal{L}^p(\mu)$.

2.3 Konvergens af f_n vs. konvergens af $|f_n|^p$

2.4 Konvergens i sandsynlighed

Definition 2.4.1. Lad (X_n) være en følge af stokastiske variable defineret på sandsynlighedsfeltet (Ω, \mathcal{F}, P) , og lad X være endnu en stokastisk variabel herpå. Lad endvidere r være et positivt tal. Vi siger da, at X_n konvergerer mod X

- **i sandsynlighed**, hvis der for ethvert positivt ϵ gælder, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

I bekræftende fald skriver vi: $X_n \xrightarrow{P} X$ for $n \rightarrow \infty$.

- **i r -middel**, hvis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^r] = 0.$$

I bekræftende fald skriver vi: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r(P)} X$ for $n \rightarrow \infty$.

- **P-næsten overalt (eller P-næsten sikkert)**, hvis

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1,$$

eller mere udførligt, hvis $P(F) = 1$, hvor

$$F = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} \in \mathcal{F}.$$

I bekræftende fald skriver vi: $X_n \xrightarrow{n.o.} X$ (eller $X_n \xrightarrow{n.s.} X$) for $n \rightarrow \infty$.

2.5 Konvergens i sandsynlighed på generelle metriske rum

Definition 2.5.1 (Produktmetrikker). Lad (S, ρ) og (T, δ) betegne metriske rum. En metrik η på $S \times T$ kaldes en **produktmetrik**, hvis den opfylder følgende betingelse:

For alle $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ i $S \times T$ galder bi-implikationen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta((x_n, y_n), (x, y)) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(y_n, y) = 0$$

Bemærkning 2.5.2. Afbildningen $\rho : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ er $(\mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(S))$ -målelig.

Definition 2.5.3 (Borel-algebraen på $S \times S$). Lad (S, ρ) være et metrisk rum. Borel-algebraen $\mathcal{B}(S \times S)$ på $S \times S$ defineres da ved

$$\mathcal{B}(S \times S) = \sigma(\mathcal{G}(\eta))$$

hvor η er en vilkårlig produktmetrik på $S \times S$.

Bemærkning 2.5.4. Hvis (S, ρ) er separabelt, så gælder:

$$\mathcal{B}(S \times S) = \mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(S).$$

Ydermere hvis X, Y er stokastiske funktioner på sandsynlighedsfeltet (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i et separabelt metrisk rum (S, ρ) , da er afbildningen

$$D := \rho(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -målelig.

Definition 2.5.5. Lad (S, ρ) være et separabelt metrisk rum, og lad X, X_1, X_2, X_3, \dots være stokastiske funktioner på (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i (S, ρ) .

Vi siger da, at

- (a) X_n konvergerer mod X næsten overalt (skrevet: $X_n \xrightarrow{\text{n.o.}} X$), hvis $P(F^C) = 0$, hvor

$$F = \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n(\omega), X(\omega)) = 0 \right\}$$

- (b) X_n konvergerer mod X i sandsynlighed (skrevet: $X_n \xrightarrow{P} X$), hvis

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} P(\rho(X_n, X) > \epsilon) = 0$$

Bemærkning 2.5.6. Betragt for hert n i \mathbb{N} den stokastiske variable $D_n := \rho(X_n, X)$. Så har vi bi-implikationerne:

$$X_n \xrightarrow{\text{n.o.}} X \iff D_n \xrightarrow{\text{n.o.}} 0, \quad \text{og} \quad X_n \xrightarrow{P} X \iff D_n \xrightarrow{P} 0.$$

Sætning 2.5.7. Lad (S, ρ) være et separabelt metrisk rum, og lad X, X_1, X_2, X_3, \dots være stokastiske funktioner på (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i (S, ρ) . Da gælder følgende udsagn:

- (i) $X_n \xrightarrow{\text{n.o.}} X \implies X_n \xrightarrow{P} X$.
- (ii) Hvis $X_n \xrightarrow{P} X$, findes en voksende følge $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ af naturlige tal, således at $X_{n_k} \xrightarrow{\text{n.o.}} X$.
- (iii) $X_n \xrightarrow{P} X \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\rho(X_n, X) \wedge 1] = 0$.

Sætning 2.5.8. Lad (S, ρ) være et separabelt metrisk rum, og lad X, X_1, X_2, X_3, \dots være stokastiske funktioner på (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i (S, ρ) . Betragt endvidere endnu et separabelt metrisk rum (T, δ) , og en $\mathcal{B}(S) - \mathcal{B}(T)$ -målelig afbildning $f : S \rightarrow T$. Antag, at der findes en mængde C i $\mathcal{B}(S)$, således at

$$P(X \in C) = 1, \quad \text{og} \quad f \text{ er kontinuert i ethvert punkt } x \text{ fra } C.$$

Da gælder følgende implikationer:

$$(i) \quad X_n \xrightarrow{\text{n.o.}} X \implies f(X_n) \xrightarrow{\text{n.o.}} f(X).$$

$$(ii) \quad X_n \xrightarrow{P} X \implies f(X_n) \xrightarrow{P} f(X).$$

Bemærkning 2.5.9. Antag, at ρ, ρ' er to ækvivalente metrikker på S , således at (S, ρ) og (S, ρ') er separable.

Betrakt afbildningerne $\text{id} : (S, \rho) \rightarrow (S, \rho') \circ \text{id}' : (S, \rho') \rightarrow (S, \rho)$ givet ved

$$\text{id}(x) = \text{id}'(x) = x, \quad (x \in S)$$

Da ρ og ρ' er ækvivalente, er id og id' begge kontinuerte. Det følger derfor umiddelbart fra Sætning 2.5.8, at

$$X_n \xrightarrow{\text{n.o.}/P} X \text{ mht. } \rho \implies X_n = \text{id}(X_n) \xrightarrow{\text{n.o.}/P} \text{id}(X) = X \text{ mht. } \rho'.$$

Overgang til en ækvivalent metrik ændrer altså ikke på, om $X_n \rightarrow X$ n.o./ i sandsynlighed eller ej.

Sætning 2.5.10. Lad (S, ρ) og (T, δ) være separable metriske rum, og lad X, X_1, X_2, X_3, \dots samt Y, Y_1, Y_2, Y_3, \dots være stokastiske funktioner på (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i hhv. (S, ρ) og (T, δ) . Udstyr endvidere $S \times T$ med en produktmetrik η . Da gælder bi-implikationerne:

$$(i) \quad (X_n, Y_n) \xrightarrow{\text{n.o.}} (X, Y) \iff X_n \xrightarrow{\text{n.o.}} X \text{ og } Y_n \xrightarrow{\text{n.o.}} Y.$$

$$(ii) \quad (X_n, Y_n) \xrightarrow{P} (X, Y) \iff X_n \xrightarrow{P} X \text{ og } Y_n \xrightarrow{P} Y.$$

3 Uniform integrabilitet

3.1 Definition og indledende begreber

Definition 3.1.1. En delmængde \mathcal{H} af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ siges at være uniformt integrabel (mht. μ), hvis den opfylder følgende betingelse:

$$\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 \forall f \in \mathcal{H} : \int_{\{|f| > K\}} |f| d\mu \leq \epsilon.$$

eller ækvivalent:

$$\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 : \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{\{|f| > K\}} |f| d\mu \leq \epsilon.$$

Bemærkning 3.1.2. (i) Hvis \mathcal{H} er uniformt integrabel, da gælder der automatisk at $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$. For hvis \mathcal{H} er uniformt integrabel kan vi f.eks. vælge $K > 0$, således at

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} \int_{\{|f| > K\}} |f| d\mu \leq 1$$

For hvert f fra \mathcal{H} har vi da, at

$$\begin{aligned} \int_X |f| d\mu &= \int_{\{|f| \leq K\}} |f| d\mu + \int_{\{|f| > K\}} |f| d\mu \\ &\leq \int_{\{|f| \leq K\}} K d\mu + 1 \leq K\mu(X) + 1 < \infty \end{aligned}$$

(ii) Hvis \mathcal{H} er uniformt integrabel, gælder dette også enhver delmængde \mathcal{H}_0 af \mathcal{H} .

Hvis $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ er endeligt mange uniformt integrable delmængder af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, da er $\bigcup_{j=1}^n \mathcal{H}_j$ ligeledes uniformt integrabel.

Specielt fremgår det, at enhver endelig delmængde $\{f_1, \dots, f_n\}$ af $\mathcal{L}^1(\mu)$ er uniformt integrabel.

Lemma 3.1.3. Lad \mathcal{H} være en delmængde af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad (f_n) og (g_n) være følger af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

(i) Hvis \mathcal{H} er uniformt integrabel, da er også mængden

$$\tilde{\mathcal{H}} := \{f \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \mid \exists g \in \mathcal{H} : |f| \leq |g| \mu\text{-n.o.}\},$$

uniformt integrabel.

(ii) For enhver funktion g fra $\mathcal{L}^1(\mu)^+$ er mængden $\{f \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) \mid |f| \leq g \mu\text{-n.o.}\}$ uniformt integrabel.

(iii) Hvis mængden $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel, og $|f_n| \leq |g_n| \mu\text{-n.o.}$ for alle n , da er mængden $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ligeledes uniformt integrabel.

Sætning 3.1.4. En delmængde \mathcal{H} af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ er uniformt integrabel, hvis og kun hvis den opfylder følgende to betingelser:

- (i) $\sup_{f \in \mathcal{H}} \int_X |f| d\mu < \infty$.
- (ii) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \mathcal{E} : \mu(A) \leq \delta \implies \sup_{f \in \mathcal{H}} \int_A |f| d\mu \leq \epsilon$.

Korollar 3.1.5. Antag, at \mathcal{H}_1 og \mathcal{H}_2 er to uniformt integrable delmængder af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Da er mængden

$$\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 = \{f_1 + f_2 \mid f_1 \in \mathcal{H}_1, f_2 \in \mathcal{H}_2\}$$

også uniformt integrabel.

Sætning 3.1.6. Lad \mathcal{H} være en delmængde af $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og antag, at der findes en Borel-målelig funktion $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, således at følgende to betingelser er opfyldte:

- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\varphi(x)} = 0$
- (ii) $\sup_{f \in \mathcal{H}} \int_X \varphi \circ |f| d\mu < \infty$.

Da er \mathcal{H} uniformt integrabel.

3.2 Uniform integrabilitet vs. konvergens i μ -middel

Sætning 3.2.1. Lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

Da er følgende betingelser ækvivalente:

- (i) $f \in \mathcal{L}^1(\mu), f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ for alle n , og $f_n \rightarrow f$ i μ -1-middel.
- (ii) $f_n \rightarrow f$ i μ -mål, og mængden $\mathcal{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel.

Korollar 3.2.2. Lad $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af funktioner fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, lad f være endnu en funktion fra $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, og lad p være et tal i $(0, \infty)$.

Da er følgende betingelser ækvivalente:

- (i_p) $f \in \mathcal{L}^p(\mu), f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ for alle n , og $f_n \rightarrow f$ i μ -p-middel.
- (ii_p) $f_n \rightarrow f$ i μ -mål, og mængden $\mathcal{H} = \{|f_n|^p \mid n \in \mathbb{N}\}$ er uniformt integrabel.

4 Summer af uafhængige stokastiske variable og store tals stærke lov

4.1 Lévy's Ulighed

Sætning 4.1.1 (Lévy's Ulighed). Lad X_1, \dots, X_n være uafhængige, symmetriske stokastiske variable på (Ω, \mathcal{F}, P) . Da gælder uligheden:

$$P\left(\max_{k=1, \dots, n} \left| \sum_{j=1}^k X_j \right| > t\right) \leq 2P\left(\left| \sum_{j=1}^n X_j \right| > t\right) \quad \text{for alle } t \in (0, \infty).$$

Hvis vi sætter

$$S_k = X_1 + \dots + X_k, \quad (k \in \{1, 2, \dots, n\})$$

og

$$M_n = \max_{k=1, \dots, n} |S_k|$$

da kan uligheden skrives:

$$P(M_n > t) \leq 2P(|S_n| > t) \quad \text{for alle } t \in (0, \infty).$$

Korollar 4.1.2. Lad X_1, \dots, X_n være uafhængige, symmetriske stokastiske variable på (Ω, \mathcal{F}, P) .

Sæt

$$S_k = X_1 + \dots + X_k, \quad (k \in \{1, 2, \dots, n\})$$

og

$$M_n = \max_{k=1, \dots, n} |S_k|$$

Da gælder uligheden:

$$\mathbb{E}[M_n^p] \leq 2\mathbb{E}[|S_n|^p] \quad \text{for alle } p \in (0, \infty)$$

4.2 Konvergens af summer af uafhængige stokastiske variable

Lemma 4.2.1. Lad (Y_n) være en følge af stokastiske variable på (Ω, \mathcal{F}, P) , og definér for hvert $p \in \mathbb{N}$:

$$L_p = \sup_{k, \ell \geq p} |Y_k - Y_\ell| \in \overline{\mathcal{M}}(\mathcal{F})^+$$

Da er følgende to udsagn ækvivalente:

- (i) Der findes en stokastisk variabel Y på (Ω, \mathcal{F}, P) , således at $Y_n \rightarrow Y$ P-n.o. for $n \rightarrow \infty$.
- (ii) $L_p \wedge 1 \rightarrow 0$ i sandsynlighed for $p \rightarrow \infty$.

Lemma 4.2.2. Lad $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige, symmetriske stokastiske variable på (Ω, \mathcal{F}, P) . Da gælder bi-implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergerer P-n.o.} \iff \sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergerer i sandsynlighed.}$$

Bemærkning 4.2.3 (Det målelige rum $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$). Betragt vektorrummet

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \text{ for alle } n \in \mathbb{N}\}$$

For $n \in \mathbb{N}$ og mængder B_1, \dots, B_n i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sætter vi

$$[B_1 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots] = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n\}$$

Vi sætter endvidere

$$\mathcal{J} = \{[B_1 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots] \mid n \in \mathbb{N}, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

og

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma(\mathcal{J})$$

For hvert $k \in \mathbb{N}$ betragter vi afbildningen $p_k : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$p_k((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x_k, \quad ((x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty)$$

Vi bemærker for B_k i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, at

$$\begin{aligned} p_k^{-1}(B_k) &= \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid x_k \in B_k\} \\ &= [\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k-1 \text{ gange}} \times B_k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots] \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) \end{aligned}$$

og for B_1, \dots, B_n i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, at

$$[B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots] = p_1^{-1}(B_1) \cap p_2^{-1}(B_2) \cap \dots \cap p_n^{-1}(B_n)$$

Dermed er $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ den mindste σ -algebra på \mathbb{R}^∞ , som g $\nrightarrow p_1, p_2, p_3, \dots$ målelige. Bemærk specielt, at

$$\begin{aligned} C &:= \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ eksisterer i } \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ er en Cauchy-følge} \right\} \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}, \ell \geq N} \bigcap_n \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty \mid |p_k((x_n)) - p_\ell((x_n))| \leq \frac{1}{m} \right\} =: A \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}, \ell \geq N} \bigcap_N (p_k - p_\ell)^{-1} \left(\left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m} \right] \right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty). \end{aligned}$$

Bemærkning 4.2.4 (Den simultane fordeling af en følge af stokastiske variable). Betragt nu et sandsynlighedsfelt (Ω, \mathcal{F}, P) og en følge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af stokastiske variable defineret herpå. Vi kan da betragte afbildningen $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ givet ved

$$\mathbb{X}(\omega) = (X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}, \quad (\omega \in \Omega)$$

Vi bemærker, at \mathbb{X} er $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ -målelig:

$$\mathbb{X}^{-1}([B_1 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots]) = \{X_1 \in B_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\} \stackrel{?}{\in} \mathcal{F}$$

for alle n i \mathbb{N} og $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dermed kan vi betragte fordelingen P_X af \mathbb{X} , dvs. ssh-målet

$$P_X(A) = P(\mathbb{X} \in A) = P(\mathbb{X}^{-1}(A)), \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$$

Da \mathcal{J} er \cap -stabilt, er P_X entydigt bestemt af tallene:

$$P_X([B_1 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots]) = P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n)$$

for $n \in \mathbb{N}$ og $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (jvf. Sætn. 2.2.1 i [M&I]).

Bemærkning 4.2.5 (Konvergens i termer af den simultane fordeling). Vi bemærker specielt, at

$$(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergerer n.o.} \iff P(\mathbb{X} \in C) = 1 \iff P_X(C) = 1$$

og at $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergerer i ssh. $\iff (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en Cauchy-følge i ssh.

$$\iff \forall \epsilon > 0 : \lim_{n, m \rightarrow \infty} P(|X_n - X_m| > \epsilon) = 0$$

$$\iff \forall \epsilon > 0 : \lim_{n, m \rightarrow \infty} P_X \left((p_n - p_m)^{-1}([- \epsilon, \epsilon]^c) \right) = 0.$$

Dermed afhænger konvergens n.o. og i ssh. kun af P_X . Hvis $P_X = P_Y$ gælder der altså, at $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergerer i ssh./n.o. $\iff (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergerer i ssh./n.o. og at $(\sum_{k=1}^n X_k)_{n \in \mathbb{N}}$ konv. i ssh./n.o. $\iff (\sum_{k=1}^n Y_k)_{n \in \mathbb{N}}$ konv. i ssh./n.o.

Lemma 4.2.6. Lad $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på (Ω, \mathcal{F}, P) . Antag endvidere, at der findes endnu en følge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af stokastiske variable på (Ω, \mathcal{F}, P) , således at

$$\mathbb{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ og } \mathbb{Y} = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ er uafhængige, og } P_{\mathbb{X}} = P_{\mathbb{Y}}$$

Da gælder bi-implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergerer } P\text{-n.o.} \iff \sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergerer i sandsynlighed.}$$

Sætning 4.2.7. Lad $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på (Ω, \mathcal{F}, P) . Da gælder bi-implikationen: $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergerer P -n.o. $\iff \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergerer i sandsynlighed.

Korollar 4.2.8. Lad $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på (Ω, \mathcal{F}, P) . Da gælder for ethvert $r > 0$ implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n \text{ konvergerer i } P\text{-}r\text{-middel} \implies \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \text{ konvergerer n.o.}$$

Korollar 4.2.9. Lad $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på (Ω, \mathcal{F}, P) , og antag, at $X_n \in \mathcal{L}^2(P)$ for alle n . Sæt endvidere $\mu_n = \mathbb{E}[X_n]$ for alle n . Da gælder implikationen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{V}[X_n] < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mu_n) \text{ konvergerer } P\text{-n.o. og i } P\text{-2-middel.}$$

4.3 Store tals stærke lov

Lemma 4.3.1 (Kroneckers lemma). Lad $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være følger af reelle tal, således at

$$0 < b_1 < b_2 < b_3 < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

og at $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}$ er konvergent i \mathbb{R} , dvs. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k}$ eksisterer i \mathbb{R} . Da gælder der, at

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sætning 4.3.2 (\mathcal{L}^2 -udgave af Store tals lov). Lad $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable på (Ω, \mathcal{F}, P) , og antag, at $X_k \in \mathcal{L}^2(P)$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Sæt endvidere $\mu_k = \mathbb{E}[X_k]$ for alle $k \in \mathbb{N}$. Da gælder implikationen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{V}[X_k]}{k^2} < \infty \implies \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{n.o. og i 2-middel.}$$

Eksempel 4.3.3.

Lemma 4.3.4. Lad a, a_1, a_2, a_3, \dots være reelle tal, således at $a_n \rightarrow a$ for $n \rightarrow \infty$. Da gælder der også, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j = a.$$

Lemma 4.3.5. (i) For ethvert naturligt tal N gælder der, at

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{N}$$

(ii) For ethvert x i $(0, \infty)$ gælder der, at

$$\sum_{n \in \mathbb{N}: n \geq x} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{x}$$

Sætning 4.3.6 (Store tals stærke lov). Lad $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af i.i.d. stokastiske variable på (Ω, \mathcal{F}, P) , således at $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, og sæt $\mathbb{E}[X_1] = \mu$. Da gælder der, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \mu \quad \text{P-n.o. og i P-1-middel.}$$

5 Konvergens i fordeling

5.1 Svag konvergens og konvergens i fordeling

Definition 5.1.1 (Svag konvergens af sandsynlighedsmål). Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad μ, μ_1, μ_2, \dots være sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$. Vi siger da, at μ_n **konvergerer svagt** imod μ for $n \rightarrow \infty$ (skrevet: $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$), hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall f \in C_b(S) : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f(s) \mu_n(d s) = \int_S f(s) \mu(d s).$$

Definition 5.1.2 (Konvergens i fordeling). Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad X, X_1, X_2, \dots være stokastiske funktioner på (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i (S, ρ) . Vi siger da, at X_n konvergerer mod X i **fordeling** (skrevet: $X_n \xrightarrow{\sim} X$), hvis $P_{X_n} \xrightarrow{w} P_X$.

Udskrevet er betingelsen altså:

$$\forall f \in C_b(S) : \mathbb{E}[f(X_n)] = \int_S f dP_{X_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_S f dP_X = \mathbb{E}[f(X)].$$

Hvis μ er et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$, siger vi tilsvarende, at X_n konvergerer mod μ i fordeling (skrevet: $X_n \xrightarrow{\sim} \mu$), hvis $P_{X_n} \xrightarrow{w} \mu$.

Udskrevet er betingelsen altså:

$$\forall f \in C_b(S) : \mathbb{E}[f(X_n)] = \int_S f dP_{X_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_S f d\mu$$

Bemærkning 5.1.3. 1. Udvidelse til komplekse funktioner:

Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad X, X_1, X_2, X_3, \dots være stokastiske funktioner på (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i (S, ρ) .

Lad videre μ være et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$, og antag, at $X_k \xrightarrow{\sim} \mu$ for $k \rightarrow \infty$.

For enhver funktion f i $C_b(S, \mathbb{C})$ har vi oplagt, at $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) \in C_b(S, \mathbb{R})$, og dermed at

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_k)] &= \mathbb{E}[\operatorname{Re}(f(X_k))] + i\mathbb{E}[\operatorname{Im}(f(X_k))] \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_S \operatorname{Re}(f) d\mu + i \int_S \operatorname{Im}(f) d\mu = \int_S f d\mu \end{aligned}$$

Specielt ser vi i tilfældet $S = \mathbb{R}^d$, at

$$\varphi_{X_k}(t) = \mathbb{E}\left[e^{i(t, X_k)}\right] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t, x)} \mu(dx) = \hat{\mu}(t) \quad \text{for alle } t \in \mathbb{R}^d.$$

2. Overgang til ækvivalent metrik

Lad X, X_1, X_2, X_3, \dots være stokastiske funktioner med værdier i et metrisk rum (S, ρ) .

Da ændres definitionen af, at $X_n \xrightarrow{\sim} X$, ikke, hvis ρ erstattes af en ækvivalent metrik ρ' på S .

I denne situation gælder der nemlig, at

$$C_b(S, \rho) = C_b(S, \rho')$$

og dermed ændres ikke på betingelsen:

$$\forall f \in C_b(S, \rho) : \mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$

Sætning 5.1.4 (Entydighedssætning for mål). Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad μ og ν være to sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$.

Antag videre, at

$$\int_S f \, d\mu = \int_S f \, d\nu \quad \text{for alle } f \text{ i } C_b(S)^+$$

Da er $\mu = \nu$.

Korollar 5.1.5 (Entydighed af grænse ved konvergens i fordeling). Betragt et metrisk rum (S, ρ) .

1. Lad $\nu, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ være sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$, og antag, at

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu, \text{ og } \mu_n \xrightarrow{w} \nu \text{ for } n \rightarrow \infty.$$

Da gælder $\mu = \nu$.

2. Lad $Y, X, X_1, X_2, X_3, \dots$ være stokastiske funktioner på (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i (S, ρ) , og antag, at

$$X_n \xrightarrow{\sim} X, \quad \text{og} \quad X_n \xrightarrow{\sim} Y$$

Da gælder $X \sim Y$.

Sætning 5.1.6 (Styrkeforhold). Lad X, X_1, X_2, X_3, \dots være stokastiske funktioner på (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i et separabelt metrisk rum (S, ρ) .

Da gælder implikationen:

$$X_n \xrightarrow{P} X \implies X_n \xrightarrow{\sim} X.$$

Sætning 5.1.7. Lad X, X_1, X_2, X_3, \dots være stokastiske funktioner på (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i et separabelt metrisk rum (S, ρ) .

Antag endvidere, at

$$\exists a \in S : P(X = a) = 1$$

Da gælder bi-implikationen:

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff X_n \xrightarrow{\sim} X.$$

Sætning 5.1.8. Lad X_1, X_2, X_3, \dots være stokastiske funktioner på (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i et metrisk rum (S, ρ) , og lad μ være et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$.

Antag, at $X_n \xrightarrow{\sim} \mu$. Da gælder der, at

$$\int_S g \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(X_n)]$$

for enhver begr. funktion g i $\mathcal{M}(\mathcal{B}(S))$, som er kontinuert i μ -n.a. x i S .

Definition 5.1.9 (Lipschitz-afbildninger). Lad (S, ρ) og (T, δ) være metriske rum. En afbildning $f : S \rightarrow T$ siges da at være en Lipschitz afbildning, hvis der findes en konstant K i $(0, \infty)$, således at

$$\delta(f(x), f(y)) \leq K\rho(x, y) \quad \text{for alle } x, y \text{ i } S.$$

Med $\text{Lip}(S, \rho)$ betegnes mængden af Lipschitz funktioner $f : (S, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$.

Med $\text{Lip}_b(S, \rho)$ betegnes mængden af begrænsede Lipschitz funktioner $f : (S, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 5.1.10. Lad S og T være ikke-tomme mængder, og lad $G : S \times T \rightarrow \mathbb{R}$ være en nedadtil begrænset funktion (dvs. G opfylder, at $\inf_{(x,y) \in S \times T} G(x, y) > -\infty$).

For vilkårlige x, x' i S gælder der da, at

$$\left| \inf_{y \in T} G(x, y) - \inf_{y \in T} G(x', y) \right| \leq \sup_{y \in T} |G(x, y) - G(x', y)|.$$

Lemma 5.1.11. Lad (S, ρ) være et metrisk rum, og lad $g : S \rightarrow [0, \infty)$ være en vilkårlig ikke-negativ funktion. Betragt for hvert $k \in \mathbb{N}$ funktionen $g_k : S \rightarrow [0, \infty)$ givet ved

$$g_k(x) = \inf_{y \in S} (g(y) + k\rho(x, y)), \quad (x \in S)$$

(i) For hvert $k \in \mathbb{N}$ er g_k en Lipschitz funktion med konstant k :

$$|g_k(x) - g_k(x')| \leq k\rho(x, x'), \quad (x, x' \in S)$$

(ii) For vilkårlige $k \in \mathbb{N}$, $x \in S$ og $r > 0$ gælder der, at

$$0 \leq \left(\inf_{y \in b(x, r)} g(y) \right) \wedge kr \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \leq g(x)$$

(iii) Hvis g er kontinuert i $x \in S$, gælder der, at $g_k(x) \uparrow g(x)$ for $k \rightarrow \infty$.

5.2 Portmanteau sætningerne

Sætning 5.2.1. Lad X_1, X_2, X_3, \dots være stokastiske funktioner på (Ω, \mathcal{F}, P) med værdier i et metrisk rum (S, ρ) , og lad μ være et sandsynlighedsmål på $(S, \mathcal{B}(S))$. Da er følgende betingelser ækvivalente:

- (i) $X_n \xrightarrow{d} \mu$.
- (ii) $\forall f \in C(S)^+ : \int_S f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)]$.
- (iii) $\forall f \in C_b(S)^+ : \int_S f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)]$.