

## Tratamiento analítico de las olas

### El océano real

- (i) *Sobre la superficie del mar se propagan olas que se generaron en diferentes áreas del océano.*
- (ii) *Las olas en el mar se superponen, tiene distintas alturas ( $H$ ), períodos ( $T$ ), longitudes de onda ( $L$ ) y direcciones de propagación ( $Dir$ ).*
- (iii) *Cuando se mide el nivel instantáneo de la superficie del mar ( $\eta$ ) en un sitio y se grafica en función del tiempo, la serie de tiempo posee la siguiente apariencia:*

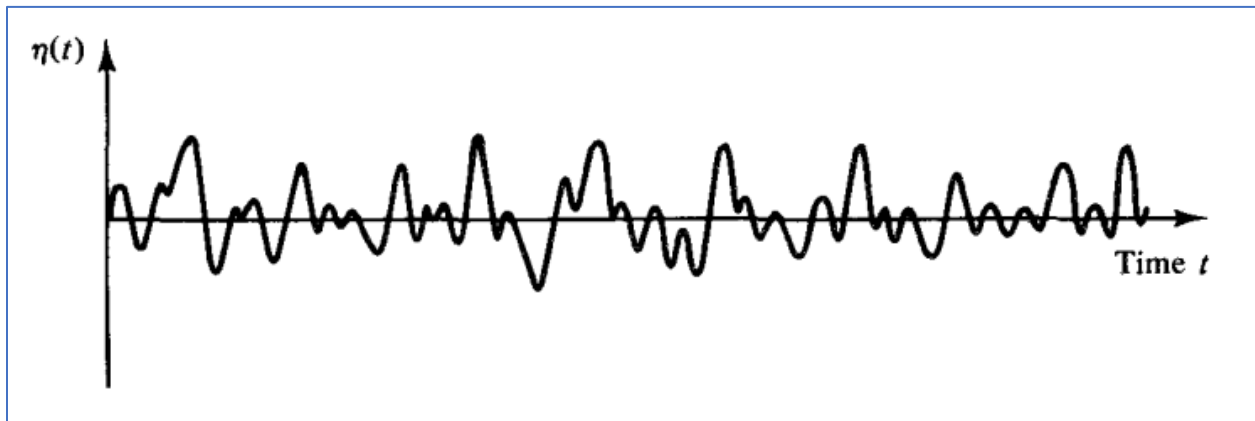
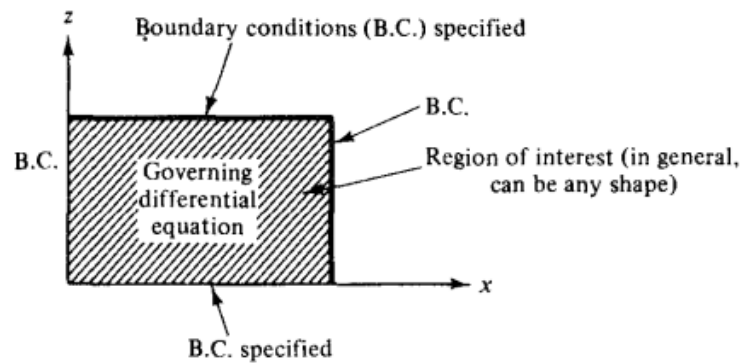
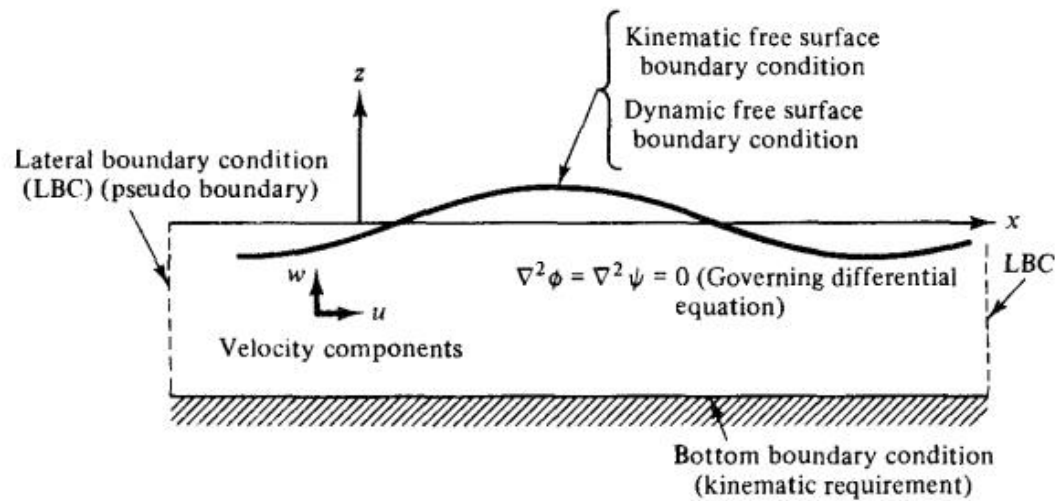


Figura 1. Serie de tiempo del nivel instantáneo del mar.

- (iv) *Se observa que las ondas que componen al nivel instantáneo del mar son irregulares.*
- (v) *Por lo tanto, no existe un enfoque analítico que permita estudiarlo.*
- (vi) *Debe recurrirse a un conjunto de simplificaciones que nos alejan de la realidad, pero nos acercan a una solución analítica manejable.*
- (vii) *Como veremos, el problema se resume en una ecuación diferencial con condiciones de borde apropiadas. Recordamos: las ecuaciones diferenciales pueden plantearse con condiciones iniciales y/o con condiciones de borde.*



**Figura 2. Esquema del planteo de un problema con condiciones de borde. Fuente: Dean & Dalrymple (1992).**



**Figura 3. Dominio de trabajo que vamos a adoptar. Fuente: Dean & Dalrymple (1992).**

### Algunas suposiciones:

- (i) Vamos a suponer ondas planas *¿qué quiere decir esto?*
- (ii) Se propagan unidireccionalmente.
- (iii) Vamos a considerar un dominio de trabajo bidimensional, plano, o 2D, en  $x - z$ , *¿qué implica esto?*

donde:

$x$  es el eje de coordenadas horizontal ubicado solidario al nmm (nmm: nivel medio del mar),

$z$  es el eje de coordenadas vertical, con origen en el nmm, positivo hacia arriba,

$\vec{V}$  es el vector velocidad,  $\vec{V} = u, w$

$u = f(x, z, t)$  es la componente horizontal de la velocidad del agua,

$w = f(x, z, t)$  es la componente vertical de la velocidad del agua,

Consideramos que el flujo es no viscoso e irrotacional *¿qué es esto? ¿qué implica? ¿qué pasa cerca del fondo?*

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{V} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{V} = -\text{grad}(\varphi)$$

$$\Rightarrow \varphi = f(x, z, t) \text{ es la función potencial de velocidades,}$$

$$\Rightarrow \Psi = f(x, z, t) \text{ es la función corriente}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\vec{V} &= -\nabla\varphi \\ u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\Psi}{\partial z} \\ w &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\end{aligned}$$

En el océano la densidad del agua  $\rho = f(x, z, t)$ , pero nosotros la vamos a considerar constante **¿es razonable esta suposición?**

$$\Rightarrow \rho = \text{constante},$$

La ecuación de continuidad para los fluidos es:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Si la densidad del agua de mar es constante, resulta:

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Como  $\vec{V} = \text{grad } \varphi$ , resulta que:

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \nabla \cdot \vec{V} = 0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi \text{ (Laplaciano de } \varphi)$$

- (i) La ecuación de Laplace **es lineal** y de segundo orden  $\Rightarrow$  vale el **principio de superposición**.
- (ii) Si  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son soluciones de la ecuación de Laplace, entonces,  $\varphi_3 = A \varphi_1 \pm B \varphi_2$  también lo es. Por lo tanto, podemos sumar algebraicamente distintas soluciones a la ecuación, de acuerdo al problema de interés.
- (iii) Si se combinan  $n$  ondas con amplitudes, períodos, y fases apropiadas se podría reproducir al “océano real” de la Figura 1. (sería una visión a lo Fourier).

## Condición de borde cinemática

### (Formulación General)

#### (Kinematic Boundary Condition)

- (i) *Está claro que, si la partícula de fluido pertenece al contorno o borde, y si éste es impermeable, la partícula no podrá atravesarlo ni abandonarlo.*
- (ii) *Es una condición que se debe satisfacer tanto en un borde rígido (como el fondo) o móvil (como la superficie libre).*

**la partícula de agua del borde siempre pertenecerá al borde**

- (iii) *Obviamente, procesos de evaporación, precipitación, “spray”, o salpicaduras, no están contemplados en este análisis.*

*Cuando el borde o contorno (fijo o móvil) puede ser representado por una función matemática implícita, la misma será de la forma:*

$$F(x, y, z, t) = 0$$

*Por ejemplo, para una esfera inmóvil la expresión de su superficie a considerar será =>*

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

*en dónde “r” es el radio (constante). Pero la superficie puede ser móvil como en el caso de la superficie (libre) del mar. Supondremos que se nos movemos solidarios a la superficie, ésta no cambiará con respecto a nosotros (propagación de una onda “rígida”). La derivada total de F respecto del t será:*

$$\frac{dF(x, y, z, t)}{dt} = 0 = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\text{en } F(x,y,z,t)=0}$$

En otras palabras, los cambios temporales se compensan con los espaciales (*piensemos en el avance de una cresta en la propagación de una onda “rígida”*).

La ecuación anterior podemos escribirla como:

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \vec{V} \cdot \vec{\nabla F} = \vec{V} \cdot \vec{n} |\nabla F|$$

en donde  $\vec{n}$  es el versor (es decir, un vector con módulo unitario) normal a la superficie el cual ha sido definido como:

$$\vec{n} = \vec{\nabla F} / |\vec{\nabla F}|$$

Reordenando, la condición cinemática resulta:

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\vec{\nabla F}|} \text{ en } F(x, y, z, t) = 0$$

donde

$$|\vec{\nabla F}| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

Esta condición relaciona a la componente de la velocidad normal a la superficie con la variación temporal de la superficie. Es decir,  $\vec{V} \cdot \vec{n}$  es el producto escalar entre la velocidad y el versor normal, entonces, si  $F$  no cambia (contorno estacionario) resulta que la proyección de  $\vec{V}$  sobre  $n$  es nula (la corriente normal a la superficie es nula).

### Algunos ejemplos de aplicación de la Condición de Borde Cinemática:

**E.1)** Establecer la Condición de Borde Cinemática (CBC) sobre una pared vertical, quieta e impermeable. (Esta podría representar la pared de una dársena o de un natatorio).

En primer lugar, debemos representar a la pared vertical con una ecuación matemática. Sin pérdida de generalidad podemos considerar que la pared está ubicada en el origen de coordenadas ( $x = 0, z = 0$ ). La expresión matemática de la pared es:

$$x = 0$$

La función implícita de esta superficie vertical es:

$$F = x = 0$$

usamos la ecuación de la CBC:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\text{en } F(x)=0} = 0$$

como  $F$  es sólo función de  $x$ , resulta:

$$u \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$u = 0, \text{ en } x = 0$

El resultado es el esperado => “la velocidad normal a una pared vertical es nula”. La partícula de agua puede deslizarse sobre la pared, pero no atravesarla. La condición de borde no nos dice cuanto vale  $w$ , nos dice como debe ser la velocidad sobre el borde, en este caso, como debe ser  $u$ .

---

**E.2)** Establecer la Condición de Borde Cinemática (CBC) sobre un fondo plano, horizontal, quieto e impermeable. (Este representaría el fondo del domino de la TLO, o el de una pileta o puerto).

Como antes, debemos representar en primer lugar al fondo plano y horizontal con una ecuación matemática. De la misma manera, y sin pérdida de generalidad podemos considerar que la superficie pasa por el origen de coordenadas ( $x = 0, z = 0$ ). La expresión es:

$$z = 0$$

La función implícita de esta superficie horizontal (fondo) es:

$$F = z = 0$$

usamos la ecuación general de la CBC:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{en F(z)=0} = 0$$

como  $F$  es sólo función de  $z$ , resulta:

$$w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

$w = 0, en z = 0$
-------------------

El resultado es el esperado => “la velocidad normal a un fondo plano y horizontal, es nula”. La partícula de agua puede deslizarse sobre el fondo, pero no puede atravesarlo.

Recordar este ejemplo cuando planteemos las condiciones de borde para la Teoría Lineal de Olas (TLO).

---



**E.3)** Establecer la Condición de Borde Cinemática (CBC) sobre el vértice formado entre una pared vertical, y un fondo plano y horizontal ( $x = 0, z = 0$ ).

Este ejercicio se resuelve directamente combinando los resultados del E1 y E2. Sobre el vértice se tienen que cumplir ambas condiciones:

$$u = 0, \text{ sobre la pared } \text{ y } w = 0, \text{ sobre el fondo}$$

En consecuencia, la velocidad  $\vec{V} = (u, w)$  en el vértice debe ser nula. La figura de abajo permite visualizar los resultados de E1, E2 y E3. En rojo se esquematiza una línea de corriente. Sobre la pared y el fondo la velocidad es tangencial, y en el vértice es nula.

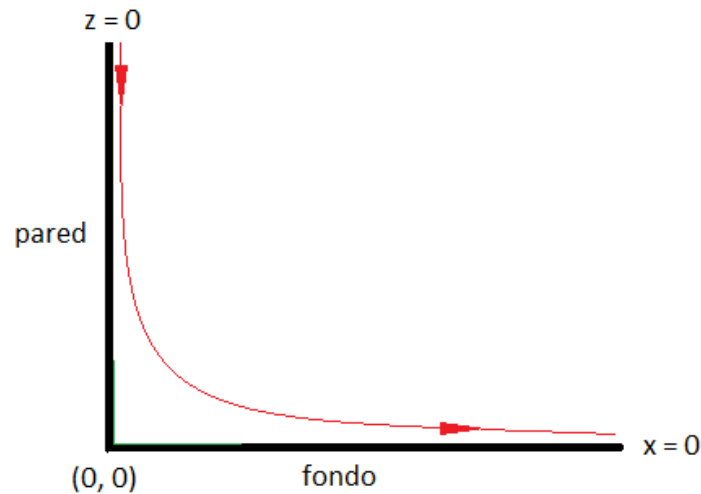


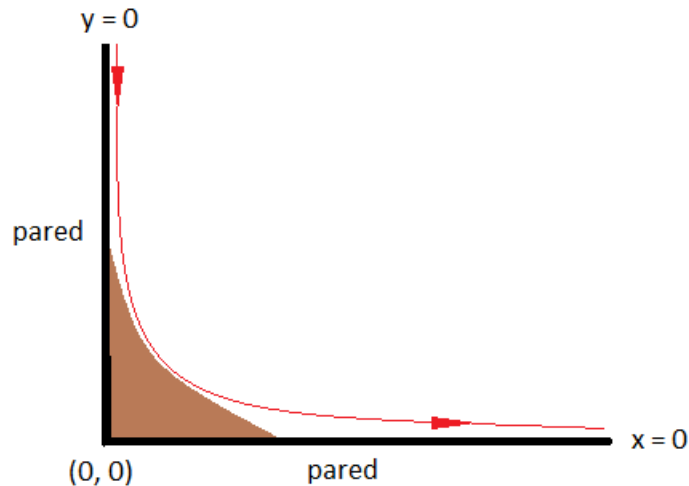
Figura 4. Línea de corriente (rojo) para el caso del entorno entre una pared vertical y el fondo. Notar la pátina verdosa adyacente al vértice.

Esto permite explicar por qué sobre el fondo de los natatorios, adyacente a la pared, es la zona en donde es más propenso el crecimiento de algas conocido como “verdín”. (mínimo movimiento del agua).

El mismo razonamiento se aplica para establecer la Condición de Borde Cinemática (CBC) sobre el vértice formado entre dos paredes verticales ( $x = 0, z = 0$ ). En este caso resulta:

$$u = 0, \text{ sobre una pared } \text{ y } v = 0, \text{ sobre la otra}$$

*La figura de abajo representa el rincón formado entre dos paredes verticales de una dársena portuaria, visto desde arriba. Como la velocidad allí es nula se dan las condiciones propicias para la sedimentación y la pérdida de profundidad (embancamiento).*

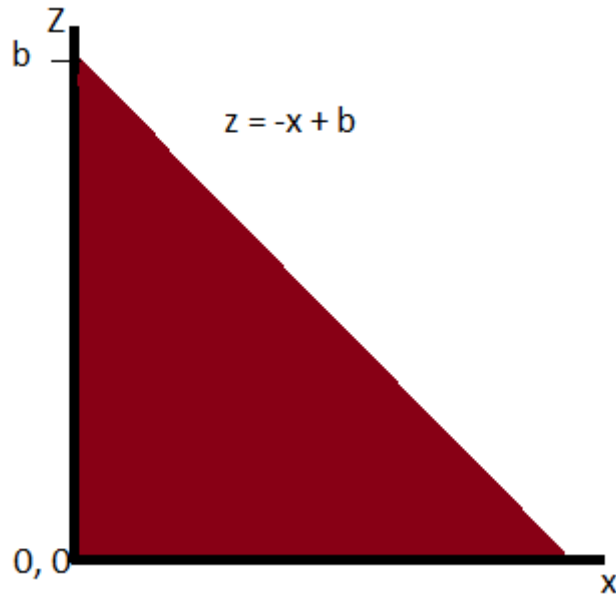


**Figura 5. Vista de planta. Línea de corriente (rojo) para el caso del entorno formado entre dos paredes. Notar a acumulación de sedimentos (marrón) adyacente al vértice.**



**Figura 6. Vista aérea de un puerto. Notar la forma curva de la playa adyacente al mismo (rojo) y la curva en el interior de la defensa (verde).**

**E.4)** Obtener la CBC sobre una superficie dispuesta a  $45^\circ$  respecto del suelo, quieta e impermeable.



**Figura 7.** Contorno impermeable inclinado  $45^\circ$ .

La ecuación matemática de la superficie es  $z = -x + b$ . La función implícita de esta superficie vertical es:

$$F = z + x - b = 0$$

usamos la ecuación general de la CBC:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\text{en } F(x,z)=0} = 0$$

Desarrollando las derivadas, resulta:

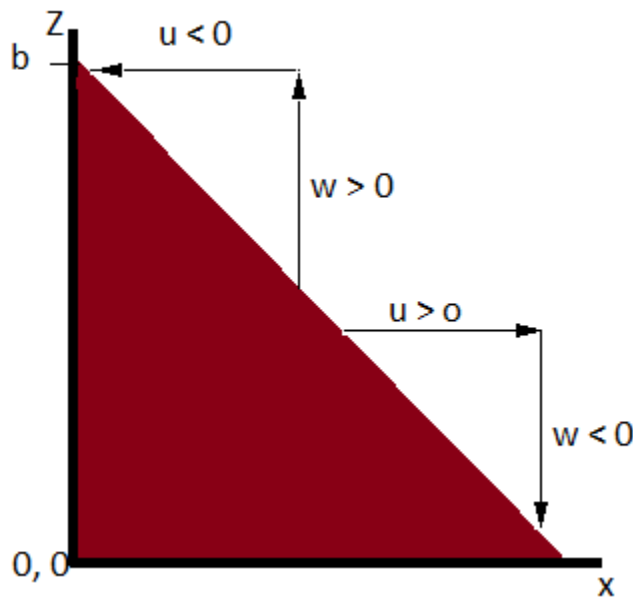
$$u \frac{\partial F}{\partial x} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\text{en } F(x,z)=0} = 0$$

$$u + w|_{\text{en } F(x,z)=0} = 0$$

$$u + w = 0$$

$$u = -w$$

*Es decir, cuando la componente horizontal (u) es positiva la vertical (w) es negativa y viceversa.*



*Figura 8. CBC para un fondo inclinado.*

*Un concepto muy importante es que la CBC no provee, por lo general, el valor de la velocidad en el contorno, sino, una relación entre componentes.*

*Supongamos ahora que el fondo es irregular y es  $f(x)$ . La ecuación matemática que lo representa es:*

$$z = -h(x)$$

*y, la función implícita es:*

$$F = z + h(x) = 0$$

*usamos la ecuación general de la CBC:*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{en F(x,z)=0} = 0$$

*Desarrollando las derivadas, resulta:*

$$u \frac{\partial F}{\partial x} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{en F(x,z)=0} = 0$$

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + w \Big|_{en F(x,z)=0} = 0$$

$$u \frac{dh}{dx} = -w$$

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{w}{u}$$

*Es decir, la velocidad  $\vec{V} = (u, w)$  es tangente al fondo en cada punto.*

---

**E.5)** Se genera una señal de presión variable sobre la rama B de un tubo en forma de “U” para que el líquido oscile sinusoidalmente en la rama “A”, tal como se muestra en la figura. Determinar la CBC sobre la superficie libre de la rama A.

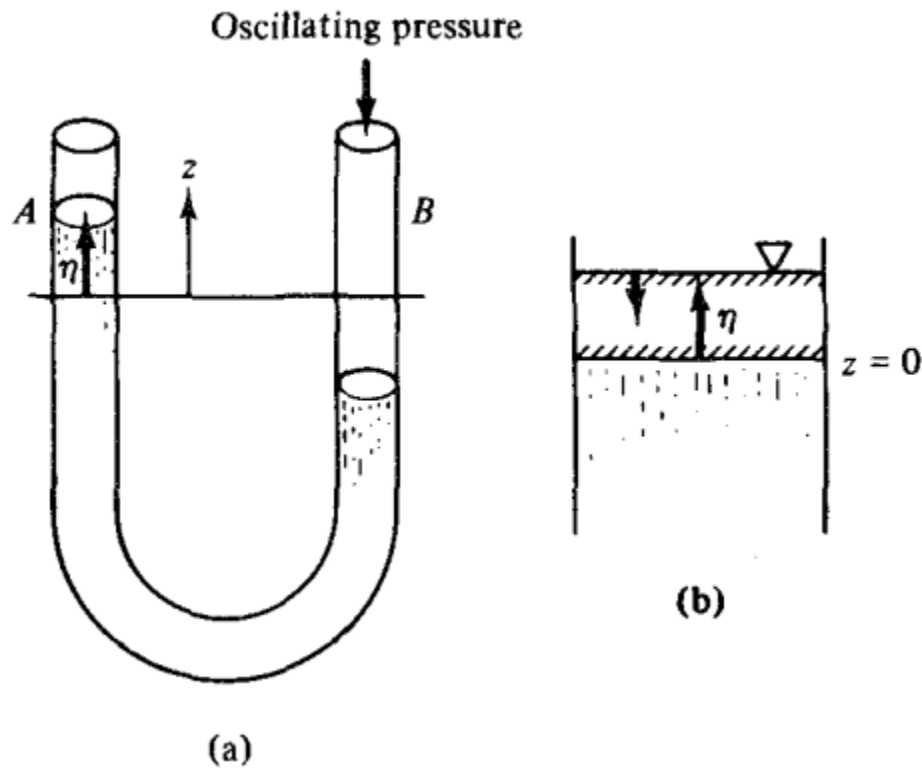


Figura 9. (a) Fluido oscilante en el tubo en “U”. (b) Detalle de la superficie libre. Fuente: Dean & Dalrymple (1992).

Podemos suponer que la expresión matemática de la superficie libre es:

$$z = \eta(t) = A \operatorname{sen}(\sigma t)$$

en donde  $z$  es la coordenada vertical,  $\eta$  es la elevación de la superficie libre,  $A$  la amplitud del movimiento,  $t$  el tiempo, y  $\sigma$  la frecuencia angular.

La función implícita de esta superficie vertical es:

$$F(z, t) = z - \eta(t) = 0$$

*usamos la ecuación de la CBC:*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\text{en } F(z,t)=0} = 0$$

*como  $F$  es sólo función de  $z$  y  $t$ , resulta:*

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + w \Big|_{\text{en } F(z,t)=0} = 0$$

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

*La velocidad vertical  $w$  coincide con la variación temporal de la superficie libre. De no ser así, la partícula de agua se escaparía de la superficie.*

---

## Retomamos el problema de las olas

- ⇒ fluido no viscoso (no hay capa límite, ni fricción en el fondo),
- ⇒ densidad constante  $\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = 0$ ,
- ⇒ flujo irrot.  $\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{V} = \operatorname{grad}(\varphi) \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\varphi)) = \nabla^2 \varphi$ ,
- ⇒  $\nabla$  variaciones de presión atmosférica, ni en espacio ni en tiempo,
- ⇒  $\nabla$  viento (entonces ... ¿cómo se generan las olas?),
- ⇒ fondo plano y horizontal ( $w = 0$ , en el fondo, CBC),
- ⇒ onda plana, no consideramos a la coordenada “y”  $\Rightarrow \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = 0$ ,
- ⇒ dominio espacial ilimitado (no hay costas),
- ⇒  $\frac{H}{L} \ll 1$ , la altura es muy pequeña respecto de la longitud de onda.

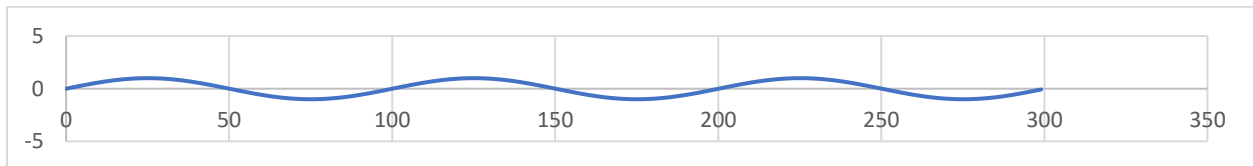


Figura 10. Onda de amplitud pequeña:  $H/L \ll 1$ ,  $H = 2$  m,  $L = 100$  m.



### Condiciones de borde para el problema de las olas:

**(1) Condición de Borde Cinemática sobre la Superficie Libre (Kinematic Free Surface Boundary Condition, KFSBC)**

**Retomamos la ecuación general de la CBC:**

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{\text{en } F(x,y,z,t)=0} = 0$$

**Consideramos que  $\eta$  es la elevación de la superficie libre, la cual es  $f(x, t)$ . La función implícita de la superficie libre es:**

$$F(x, z, t) = z - \eta(x, t) = 0$$

**Como  $F$  no depende de “ $y$ ”, la CBC general resulta:**

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + w \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{\text{en } F(x,z,t)=0} = 0$$

**y, por lo tanto:**

$$\left. -\frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w \right|_{\text{en } z=\eta} = 0$$

**La KFSBC es:**

$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad z = \eta(x, t)$
---

**Comparar con el resultado para el ejemplo del tubo en “U”.**

**(2) Condición de Borde Cinemática sobre el fondo (Kinematic Bottom Surface Boundary Condition, KBSBC).**

**Retomamos la ecuación general de la CBC:**

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{\text{en } F(x,y,z,t)=0} = 0$$

**Consideramos que  $h = \text{constante}$  es la profundidad del recinto. La función implícita del fondo es:**

$$F(z) = z + h = 0$$

$$w|_{\text{en } F(z)=0} = 0$$

**La KBSBC es:**

$w = 0$	$z = -h$
---------	----------

**Idem al resultado del E.2.**

**(3) Condición de Borde Dinámica sobre la Superficie Libre (Dynamic Free Surface Boundary Condition, KFSBC)**

- (i) *El concepto central de esta condición es que el campo de presión no puede sufrir una discontinuidad cuando se pasa de un medio a otro (interfaz aire-agua).*
- (ii) *Como la presión atmosférica es constante en espacio y tiempo, la condición debe ser tal que garantice que la presión sea uniforme a lo largo de todo el perfil de la onda.*
- (iii) *Sin embargo, debemos recordar que justamente el perfil de la onda (es decir, su forma) es desconocida hasta el momento y es, justamente, una incógnita del problema a resolver.*

**Debemos plantear una condición de borde sobre una superficie que no conocemos!!!**

*Se recurre a la ecuación de Bernoulli para los fluidos ideales.*

**NOTA sobre la ec. De Bernoulli:** *Partiendo de las ecuaciones de Euler (conservación de cantidad de movimiento para fluido ideal) dadas por:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

*y considerando flujo irrotacional y plano, introduciendo el concepto de potencial de velocidades, integrando la primera en  $x$ , y la segunda en  $z$ , y combinándolas, se llega a la ecuación de Bernoulli, la cual aplicada sobre la superficie libre ( $\eta$ ) nos da la DFSBC:*

$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p_\eta}{\rho} + gz = C(t)$	$z = \eta(x, t)$
--	------------------

*En donde  $C(t)$  surge de la integración de las ecuaciones de Euler, y  $p_\eta$  es la presión en la superficie libre (interfaz agua-aire).*

*El dominio de trabajo tiene un contorno inferior (fondo), superior (superficie libre), y al ser una onda plana permitimos que lateralmente no haya cambios (es decir, la solución se repite sobre cualquier plano vertical paralelo al plano  $x - z$ . Pero ¿qué ocurre cuando nos movemos en la dirección  $x$ ? ¿Dónde termina el dominio? Como no hay costas ni bordes la condición que proponemos es que la onda se propague periódicamente en “ $x$ ” y en “ $t$ ”. Por lo tanto, debemos imponer dos condiciones “laterales” de periodicidad.*

**(4) Condición de Borde Lateral - en el espacio. Lateral Boundary Condition in space (LBCx)**

$$\varphi(x, z, t) = \varphi(x + L, z, t)$$

*Donde veremos que  $L$  es la longitud de onda.*

**(5) Condición de Borde Lateral - en el tiempo. Lateral Boundary Condition in time (LBCt)**

$$\varphi(x, z, t) = \varphi(x, z, t + T)$$

*Donde veremos que  $T$  es el período de la onda.*

**Resumiendo, la ecuación diferencial a resolver y las condiciones de contorno son:**

<b>Ec. Laplace</b>	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = 0 \quad \forall x, \forall z$
<b>KFSBC</b>	$-\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad z = \eta(x, t)$
<b>DFSBC</b>	$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p_\eta}{\rho} + gz = C(t) \quad z = \eta(x, t)$
<b>BBC</b>	$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad z = -h$
<b>LBCx</b>	$\varphi(x, z, t) = \varphi(x + L, z, t)$
<b>LBCt</b>	$\varphi(x, z, t) = \varphi(x, z, t + T)$

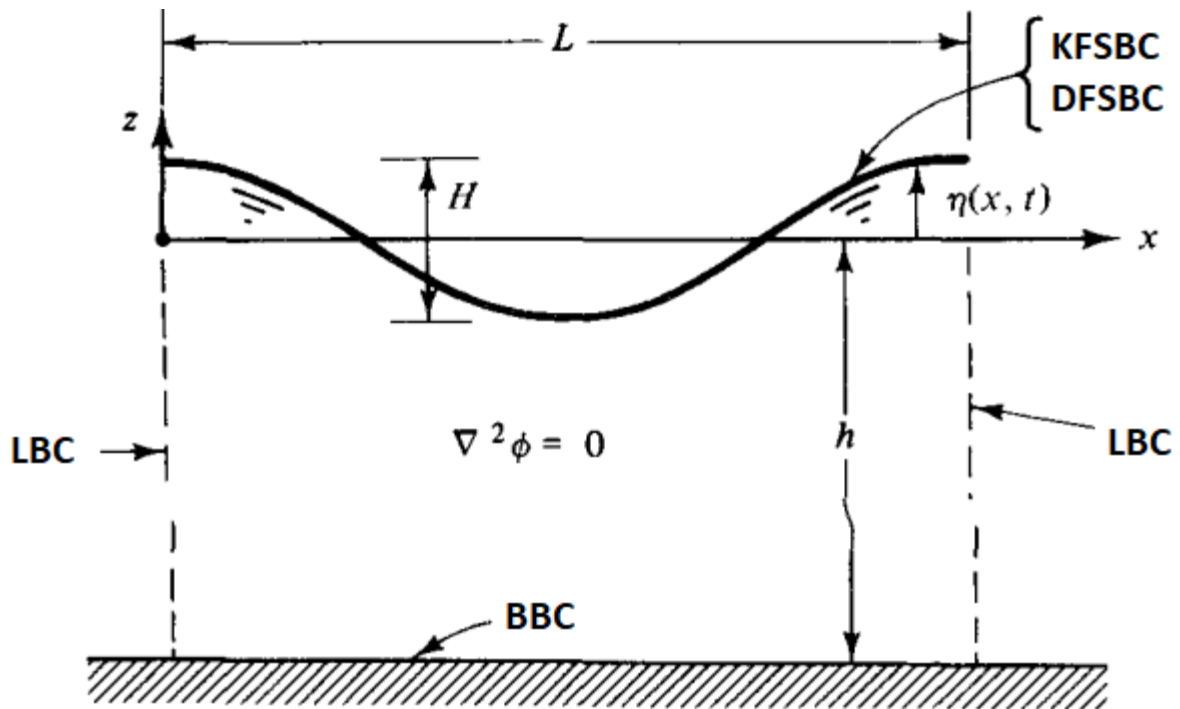


Figura 11. Dominio de la ecuación de Laplace y condiciones de borde.

**SOLUCIÓN CON CONDICIONES DE BORDE LINEALIZADAS**  
**TEORÍA LINEAL DE OLAS (TLO)**

***“Small Amplitude Water Wave Theory” (Airy, 1845)***

*Utilizaremos el “método de separación de variables”. Al potencial de velocidades lo podemos escribir como:*

$$\varphi(x, z, t) = X(x) Z(z) \tau(t)$$

*en donde está claro que  $X$  es sólo función de  $x$ ,  $Z$  de  $z$ , y  $\tau$  de  $t$ . Como impusimos que la solución sea periódica en  $t$ , podemos considerar:*

$$\tau(t) = \text{sen}(\sigma t)$$

*(también podría ser cualquier función matemática periódica, o alguna combinación lineal entre ellas pero, por simplicidad, adoptamos la de arriba). Aplicando la LBCt, resulta:*

$$\varphi(x, z, t) = \varphi(x, z, t + T)$$

$$\text{sen}(\sigma t) = \text{sen} \sigma(t + T) = \text{sen}(\sigma t) \cos(\sigma T) + \text{sen}(\sigma T) \cos(\sigma t)$$

*tal que, para que se satisfaga la igualdad debe cumplirse que:*

$$\cos(\sigma T) = 1$$

$$\text{sen}(\sigma T) = 0$$

$$\sigma T = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, n\pi; \text{ con } n \text{ par}$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{T}$$

$\sigma$  : frecuencia angular, en  $s^{-1}$  o Hz.

Luego, el potencial puede escribirse como:

$$\varphi(x, z, t) = X(x) Z(z) \text{sen}(\sigma t)$$

Si se substituye  $\varphi$  en la ecuación de Laplace, resulta:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Z(z) \text{sen}(\sigma t) + X(x) \frac{d^2 Z}{dz^2} \text{sen}(\sigma t) = 0$$

y, dividiendo por  $\varphi(x, z, t)$ :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

La única manera de satisfacer esta ecuación es que la derivada segunda de  $X$  sea una constante y que la derivada segunda sea  $Z$  la misma constante, pero con signo cambiado:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = +k^2$$

El haber asignado, arbitrariamente, un signo negativo a la ecuación en  $x$  es, como se verá a continuación, irrelevante. Las dos ecuaciones diferenciales anteriores son ordinarias. Por lo tanto, pueden ser resueltas por separado. Para ello debe considerarse que  $k$  puede ser (i) un número real, (ii) cero o (iii) un número imaginario puro. Se obtiene, entoces, el siguiente conjunto de posibles soluciones:



**TABLE 3.1 Possible Solutions to the Laplace Equation, Based on Separation of Variables**

Character of $k$ , the Separation Constant	Ordinary Differential Equations	Solutions
<b>Real</b>	$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0$	$X(x) = A \cos kx + B \sin kx$
$k^2 > 0$	$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$	$Z(z) = Ce^{kz} + De^{-kz}$
$k = 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$	$X(x) = Ax + B$
	$\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$	$Z(z) = Cz + D$
<b>Imaginary</b>		
$k^2 < 0, k = i k $	$\frac{d^2 X}{dx^2} -  k ^2 X = 0$	$X(x) = Ae^{ k x} + Be^{- k x}$
$ k  = \text{magnitude of } k$	$\frac{d^2 Z}{dz^2} +  k ^2 Z = 0$	$Z(z) = C \cos  k z + D \sin  k z$

(Fuente: Dean & Dalrymple, 1992)

- (i) Como se aprecia de la Tabla anterior, hay tres posibles soluciones al problema.
- (ii) Todas satisfacen la ecuación de Laplace, pero sólo una los requerimientos planteados.
- (iii) Con la solución correspondiente a  $k = 0$  se obtiene un potencial de velocidades que es función lineal de  $x$ , es decir, la componente  $u$  sería constante, y por consiguiente no satisface la condición de periodicidad en  $x$ .
- (iv) Por otro lado, con  $k$  es imaginario puro, se obtiene una dependencia en  $x$  que hace que la onda se amplifique o se atenúe.
- (v) En cambio, con  $k$  real obtenemos una dependencia armónica en  $x$ .

Utilizando la solución correspondiente a  $k$  real, el potencial resulta:

$$\phi(x, z, t) = (A \cos kx + B \operatorname{sen} kx)(Ce^{kz} + De^{-kz})\operatorname{sen}(\sigma t)$$

El requerimiento de la LBCx implica que:

$$\begin{aligned} A \cos(kx) + B \operatorname{sen}(kx) &= A \cos k(x + L) + B \operatorname{sen} k(x + L) = \\ &= A (\cos kx \cos kL - \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} kL) + B (\operatorname{sen} kx \cos kL + \operatorname{sen} kL \cos kx) \end{aligned}$$

tal que, para que se cumpla la igualdad,  $\cos kL = 1$  y  $\operatorname{sen} kL = 0$ , para lo cual:

$$kL = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, n\pi; \text{ con } n \text{ par, y}$$

$$k = \frac{2\pi}{L}$$

$k$ : número de onda, en  $m^{-1}$ . Invocando al principio de superposición, podemos prescindir de  $B \operatorname{sen}(kx)$ , y escribir al potencial de velocidades de la siguiente manera:

$$\phi(x, z, t) = A \cos kx (Ce^{kz} + De^{-kz})\operatorname{sen}(\sigma t)$$

Aplicamos ahora la BBC:

$$\frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial z} = A k \cos kx (Ce^{kz} - De^{-kz})\operatorname{sen}(\sigma t) = 0; \quad z = -h$$

$$A k \cos kx (Ce^{-kh} - De^{kh})\operatorname{sen}(\sigma t) = 0$$

Para que esa igualdad sea siempre nula, debe cumplirse que  $(Ce^{-kh} - De^{kh}) = 0$ , por lo tanto, se obtiene que  $Ce^{-kh} = De^{kh}$ , o sea  $C = De^{2kh}$ . Luego, el potencial puede escribirse de la siguiente manera:

$$\phi(x, z, t) = A \cos kx (De^{2kh} e^{kz} + De^{-kz}) \sin(\sigma t)$$

$$\phi(x, z, t) = A De^{kh} \cos kx (e^{kh} e^{kz} + e^{-kh} e^{-kz}) \sin(\sigma t)$$

$$\phi(x, z, t) = A De^{kh} \cos kx (e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}) \sin(\sigma t)$$

$$\phi(x, z, t) = G \cos kx \cosh k(h+z) \sin(\sigma t)$$

donde  $G = 2A De^{kh}$  es una nueva constante. Hemos usado:  $\cosh k(h+z) = \frac{(e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)})}{2}$

Utilizamos ahora la DFSBC en  $z = \eta(x, t)$ . Como  $\eta$  es una superficie hasta ahora desconocida, y como esta es una teoría de amplitud pequeña, vamos a evaluar la DFSBC sobre una expresión dada por la serie de Taylor truncada, **alrededor de  $z = 0$** .

**NOTA sobre Series de Taylor:** Recordamos que para la función  $f(z)$  la expansión en series de Taylor en el entorno de  $z = 0$  se escribe de la siguiente manera:

$$f(z) = f(0) + (z - 0) \frac{df}{dz} + (z - 0)^2 \frac{d^2f}{dz^2} + \dots$$

Tal que, reteniendo hasta el primer orden resulta:

$$f(z) \sim f(0) + z \frac{df}{dz}$$

***Volviendo a la DFSBC, a la ecuación de Bernoulli la vamos a desarrollar de la siguiente manera:***

$$(ec. \text{ Bernoulli})_{z=\eta} \sim (ec. \text{ Bernoulli})_{z=0} + \eta \left[ \frac{\partial(ec. \text{ Bernoulli})}{\partial z} \right]_{z=0}$$

***Por otro lado, dado que la presión atmosférica ( $p_\eta$ ) es uniforme y estacionaria, la adoptamos igual a cero. Sería como redefinir a la función  $C(t)$  como  $C'(t)$ , incorporándole un valor constante ( $p_\eta$ ). Escribimos entonces:***

$$\begin{aligned} \left[ gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} [u^2 + w^2] \right]_{z=\eta} &\sim \left[ gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} [u^2 + w^2] \right]_{z=0} \\ &+ \eta \left[ g - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [u^2 + w^2] \right]_{z=0} = C(t) \end{aligned}$$

***Ahora, si consideramos que las ondas son de amplitud pequeña, por lo tanto,  $\eta \ll 1$ ,  $\eta u \ll \eta$ ,  $\eta w \ll \eta$ ,  $u^2 \ll 1$ ,  $w^2 \ll 1$ , resulta:***

$$\left[ gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} [u^2 + w^2] \right]_{z=\eta} \sim \left[ -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \eta g \right]_{z=0} = C(t)$$

***El procedimiento que aplicamos a la ecuación de Bernoulli se conoce como **linealización**. Esta última ecuación vincula al potencial de velocidades con la elevación de la superficie libre.***

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} + \frac{C(t)}{g}$$

***Si sustituimos la expresión de la derivada temporal del potencial de velocidades, evaluada en  $z=0$ , resulta:***

$$\eta = \frac{G \sigma}{g} \cosh(kh) \cos(kx) \cos(\sigma t) + \frac{C(t)}{g}$$

Donde lo resaltado en verde es constante, y lo llamamos  $\Rightarrow \frac{H}{2} = \frac{G \sigma}{g} \cosh(kh)$

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx) \cos(\sigma t) + \frac{C(t)}{g}$$

Como la elevación de la superficie libre tiene que estar centrada en el nmm, tanto el promedio espacial (en  $x$ ) como temporal de  $\eta$  tienen que ser nulos. El único requisito necesario para que esta condición se cumpla es que  $C(t) = 0$ . Consecuentemente, la elevación de la superficie libre queda:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx) \cos(\sigma t)$$

Si la presión atmosférica es constante y no hay viento ¿Podría ser  $C(t)$  función del tiempo? Luego, podemos obtener fácilmente:

$$G = \frac{gH}{2\sigma \cosh(kh)}$$

y, en consecuencia, el potencial de velocidades resulta:

$$\varphi(x, z, t) = \frac{Hg \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh(kh)} \cos(kx) \sin(\sigma t)$$

y corresponde a la expresión del potencial en función de  $H, \sigma, k$ , y  $h$ . Nos resta por aplicar la KFSBC. También procedemos a linealizarla.

$$\left(w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{z=\eta} = \left(w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{z=0} + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{z=\eta} + \dots = 0$$

*dado que los términos resaltados son no lineales, podemos escribirla de la siguiente manera:*

$$w = \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{z=0}$$

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0}$$

*sustituyendo las expresiones de  $\eta$  y  $\varphi$ , en la anterior, evaluándola en  $z = 0$ , y recordando que  $\eta$  no es función de  $z$ , resulta:*

$$- \sigma \frac{H}{2} \cos(kx) \sin(\sigma t) = - \frac{Hk g \sinh k(h)}{2\sigma \cosh(kh)} \cos(kx) \sin(\sigma t)$$

$$\boxed{\sigma^2 = gk \tanh(kh)}$$

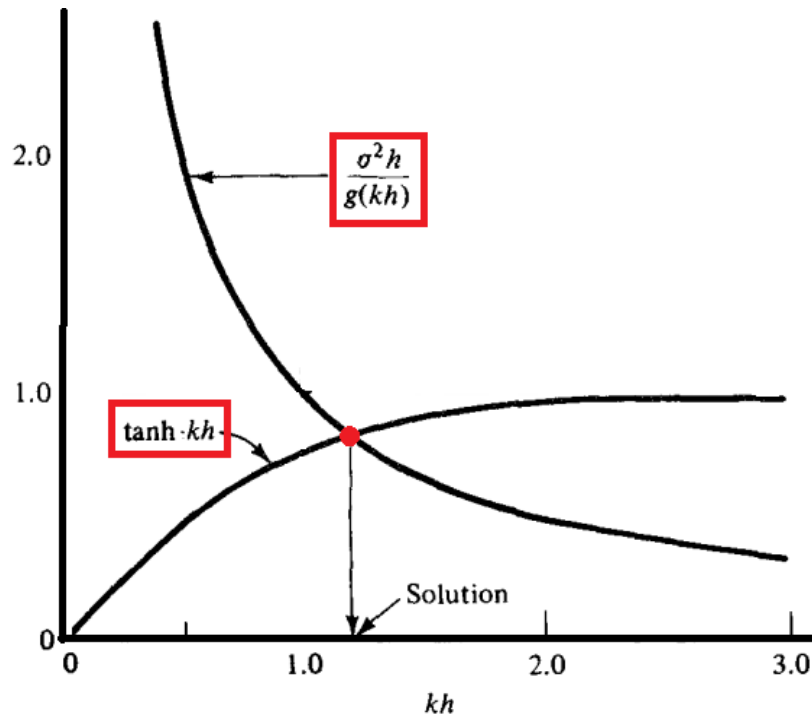
*la cual se conoce como “relación de dispersión”.*

*Si multiplicamos ambos miembros de la relación de dispersión por  $h$ , resulta:*

$$C_1 = \frac{h \sigma^2}{g} = (kh) \tanh(kh)$$

$$\frac{C_1}{(kh)} = \tanh(kh)$$

*lo cual, gráficamente, corresponde a la intersección entre una tangente hiperbólica y una hipérbola equilátera:*



**Figura 12. Relación de dispersión. Comprobación gráfica de su solución única.**

- (i) **Analizando esta figura podemos concluir que para un valor dado de  $\sigma$ , es decir, de período, y para una profundidad  $h$  prefijada, existe tan sólo un único valor de  $k$ , o sea, de longitud de onda como solución de la relación de dispersión.**
- (ii) **En consecuencia, de las tres variables  $(\sigma, k, h)$  tan sólo se puede prefijar dos, la tercera debe calcularse.**

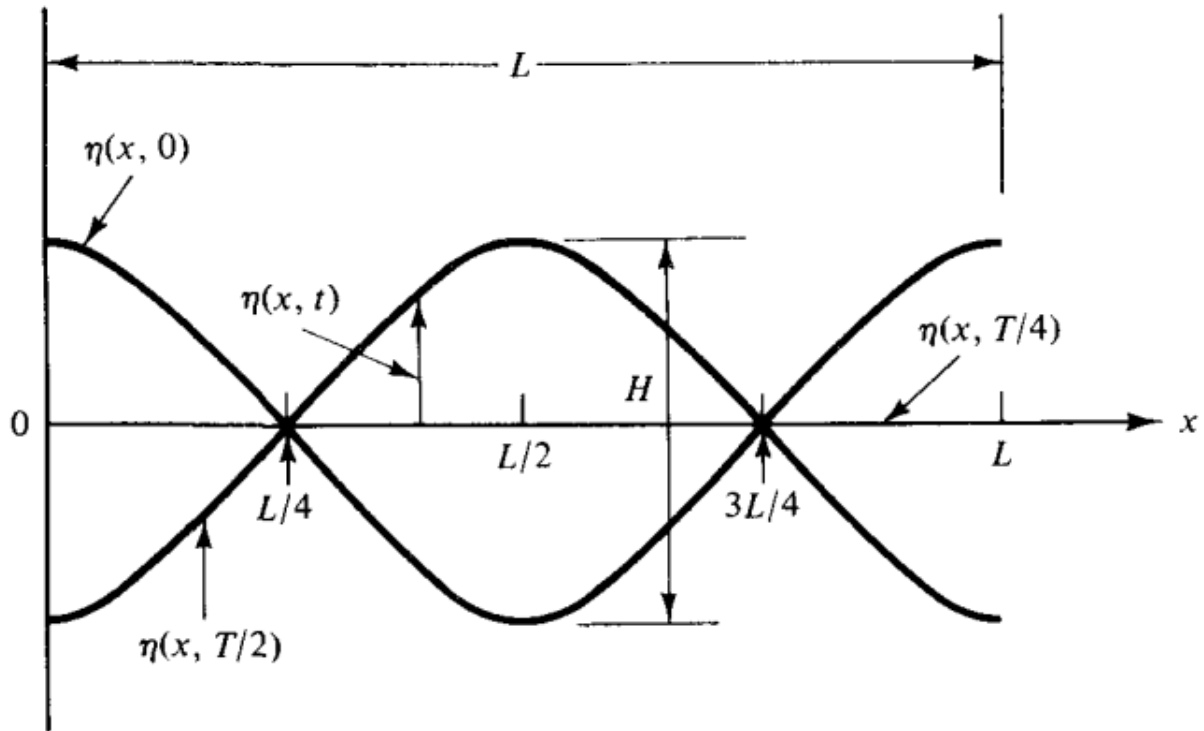
**Resumiendo, las expresiones básicas que surgen de la TLO son:**

<b>Período</b>	$T = \frac{2\pi}{\sigma}$
<b>Longitud de onda</b>	$L = \frac{2\pi}{k}$
<b>Elevación de la superficie libre</b>	$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx) \cos(\sigma t)$
<b>Potencial de velocidades</b>	$\varphi(x, z, t) = \frac{Hg \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh(kh)} \cos(kx) \sin(\sigma t)$
<b>Relación de dispersión</b>	$\sigma^2 = gk \tanh(kh)$

**Tabla 2. TLO: Resumen**

- ⇒ **Planteamos la ecuación de Laplace con cinco Condiciones de Borde** (dos en superficie, una en el fondo y dos laterales). De su resolución obtenemos **cinco** resultados (ver Tabla de arriba).
- ⇒ **¿Cómo interpretamos estos resultados?** Como vimos, en este desarrollo no hay forzante (viento). Por lo tanto, lo que la TLO representa son los posibles modos de oscilación de las olas en condiciones particulares (profundidad constante, fluido no viscosos, flujo irrotacional, etc.). Es decir, para una  $h$  dada, si consideramos un  $T$  comprendido entre 1 y 30 s, la TLO nos describe **COMPLETAMENTE** una ola con  $L$  que satisface la relación de dispersión.
- ⇒ **Otro detalle muy interesante es la estructura espacio-temporal de la solución** => es de la forma  $\cos(kx) \cos(\sigma t)$  o  $\cos(kx) \sin(\sigma t)$ . Cuando la variable espacial y temporal están separadas, una en cada función trigonométrica, corresponde a una **ONDA ESTACIONARIA (OE)**. En la figura 13 se grafica el perfil de la misma. La OE no se propaga. Tiene anti-nodos en  $x = 0, \frac{L}{2}, \dots$  y nodos en  $x = \frac{L}{4}, \frac{3L}{4}, \dots$





*Figura 13. Perfil de una onda estacionaria.*

⇒ Como vale el principio de superposición, podemos combinar linealmente soluciones similares a las obtenidas y crear nuevas soluciones. Vamos a ver como obtenemos una ONDA PROGRESIVA a partir de dos ondas estacionarias.

**Consideremos la siguiente solución (se puede demostrar fácilmente que satisface la ecuación de Laplace y todas las CC):**

$$\varphi(x, z, t) = \frac{Hg \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh(kh)} \operatorname{sen}(kx) \cos(\sigma t)$$

**Si esta última expresión se la sustraemos a la obtenida anteriormente, resulta:**

$$\varphi(x, z, t) = \frac{Hg \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh(kh)} [\cos(kx) \operatorname{sen}(\sigma t) - \operatorname{sen}(kx) \cos(\sigma t)]$$

$$\varphi(x, z, t) = -\frac{Hg \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh(kh)} \operatorname{sen}(kx - \sigma t)$$

el cual corresponde al potencial de velocidades de una onda PROGRESIVA. Ahora, recurriendo a la DFSBC obtenemos la expresión de  $\eta$  para la onda PROGRESIVA, cuyo perfil se muestra en la Figura 14:

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t)$$

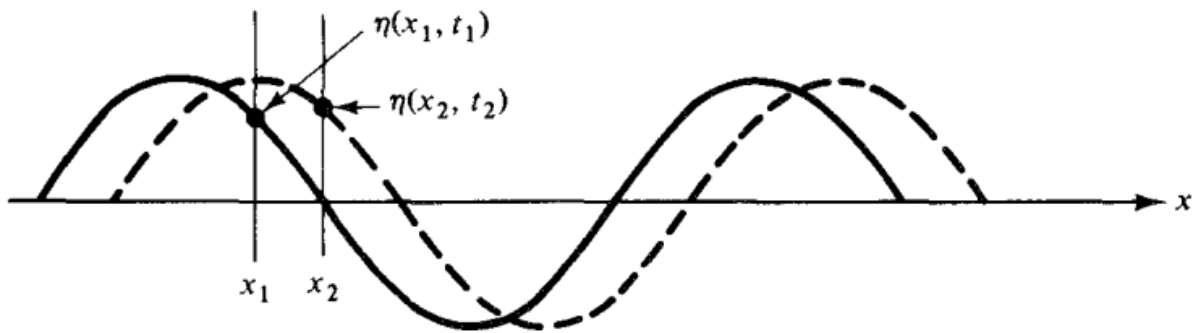


Figura 14. Perfil de una onda progresiva.

Si llamamos a la fase instantánea  $\theta = kx - \sigma t$ , y nos movemos solidario a la, contenida en el plano  $x - z$  (es decir, en un punto del perfil tal que conservemos la fase), resulta:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + C \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\sigma + Ck = 0$$

$$C = \frac{\sigma}{k} = \frac{L}{T}$$

siendo  $C$  la **celeridad** de la onda progresiva, la cual es positiva y por lo tanto se propaga hacia la derecha. Se puede demostrar análogamente que si la fase instantánea fuese de la forma  $\theta = kx + \sigma t$  la onda se propagaría hacia la izquierda (onda retrógrada,  $C = -\frac{\sigma}{k}$ ).

¿Por qué la llamamos celeridad y no velocidad? La velocidad es un vector, si probamos que  $C$  no cumple con alguna regla vectorial demostraríamos que  $C$  no es un vector y, en consecuencia, no sería apropiado llamarla velocidad. Analicemos el siguiente gráfico:

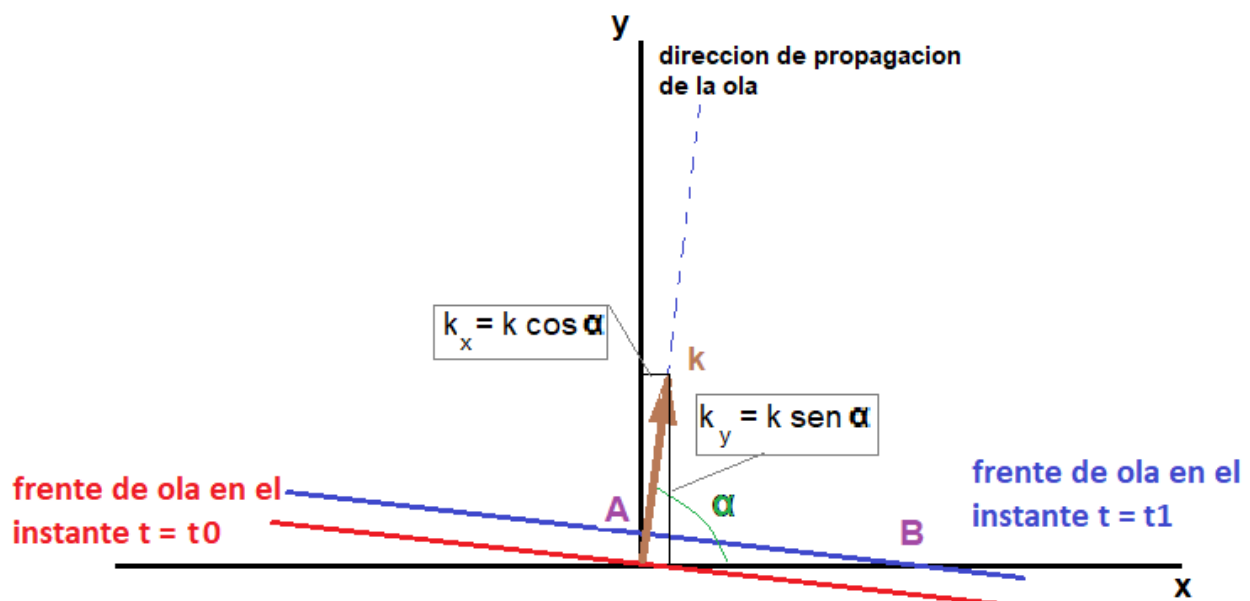


Figura 15. Esquema de propagación de una onda progresiva plana. Vista en planta.

Observamos el frente de olas en el instante  $t_0$  (rojo). Un breve lapso después, en el instante  $t_1$  (azul), el frente avanzó en la dirección de propagación, la cual está dada por la dirección de  $\vec{k}$  (número de onda), que forma un ángulo ( $\alpha$ , próximo a  $90^\circ$ ) con el eje  $x$ . Nos preguntamos ahora **¿Cuál será mayor  $C_x$  o  $C_y$ ?** Basta con observar el gráfico. En el lapso de tiempo dado por  $(t_1 - t_0)$  el frente llegó al punto B sobre el eje  $x$  y al A sobre el eje  $y$ . Claramente la distancia recorrida sobre  $x$  es superior que sobre  $y$ . Por lo tanto, **se observa que:**

$$C_x \gg C_y$$

Por otro lado, la componente  $x$  de  $C$  la calcularíamos  $C_x = C \cos \alpha$ , y la componente  $y$  como  $C_y = C \sin \alpha$ . Como  $\alpha$  es cercano a  $90^\circ$ :

$$\cos \alpha \ll \sin \alpha$$

Y, en consecuencia,

$$C_x \ll C_y$$

Evidentemente  $C_x \gg C_y$  porque lo observamos de la Figura 15. Por lo tanto  $C$  no cumple con la regla de descomposición vectorial. Por eso se llama celeridad y no velocidad.

La componente  $x$  de  $\vec{k}$  ( $\vec{k}$  es una magnitud vectorial) está dada por  $k_x = |\vec{k}| \cos \alpha$ , y su componente  $y$  por  $k_y = |\vec{k}| \sin \alpha$ . Como  $\alpha$  es cercano a  $90^\circ$ :

$$k_x \ll k_y$$

Teniendo en cuenta que  $C = \frac{\sigma}{k}$  entonces,  $C_x$  puede ser calculada como  $\frac{\sigma}{k_x}$  y  $C_y$  como  $\frac{\sigma}{k_y}$ . Por lo tanto:

$$C_x = \frac{\sigma}{|\vec{k}| \cos \alpha} = \frac{C}{\cos \alpha}$$

$$C_y = \frac{\sigma}{|\vec{k}| \sin \alpha} = \frac{C}{\sin \alpha}$$

***C no es un vector y, por lo tanto, lo llamamos celeridad***

Para pensar y discutir en clase

- (1) *L, T y h están relacionados a través de la relación de dispersión. ¿Pero H, de qué depende?*
- (2) *¿Puede ser  $u > C$ ?*
- (3) *La TLO es un típico problema hidrodinámico. ¿Dónde entra la ecuación de Navier-Stokes en todo esto?*
- (4) *La ecuación de Bernoulli es una típica ecuación de conservación de energía. ¿Cómo escribiría la ecuación de Bernoulli para que sea consistente con la TLO?*
- (5) *La ecuación diferencial que gobierna la TLO es la de Laplace, la cual es lineal y por eso vale el principio de superposición. ¿Por eso esta teoría se llama lineal?*



### **George Biddell Airy**

***(Alnwick, 27 de julio de 1801 - Greenwich, 2 de enero de 1892)***

***Fue un astrónomo y matemático inglés. Profesor de astronomía en Cambridge (1826-185), fue nombrado astrónomo real (1835-1881), dirigió el observatorio de Cambridge (1828), al que dio gran impulso, y el de Greenwich (1835-1886), al que reorganizó y dotó de aparatos más modernos. Realizó numerosas investigaciones en el campo de la física matemática y la matemática aplicada a los cálculos astronómicos: en el campo de la astronomía observacional legó a la posteridad el "disco de Airy", el tamaño mínimo aparente de una estrella (o fuente puntual de luz) debido a la difracción de la luz en el objetivo del telescopio.***

***Publicó "Small Amplitude Water Wave Theory" en la Encyclopædia Metropolitana (1845).***

**Clasificación en aguas profundas (AP), aguas intermedias (AI), y aguas poco profundas (APP)**

*Como vimos en la TLO, las soluciones contienen funciones hiperbólicas. Como sabemos, las funciones hiperbólicas se definen de la siguiente manera:*

$$\cosh kz = \frac{(e^{kz} + e^{-kz})}{2}$$

$$\sinh kz = \frac{(e^{kz} - e^{-kz})}{2}$$

$$\tanh kz = \frac{(e^{kz} - e^{-kz})}{(e^{kz} + e^{-kz})}$$

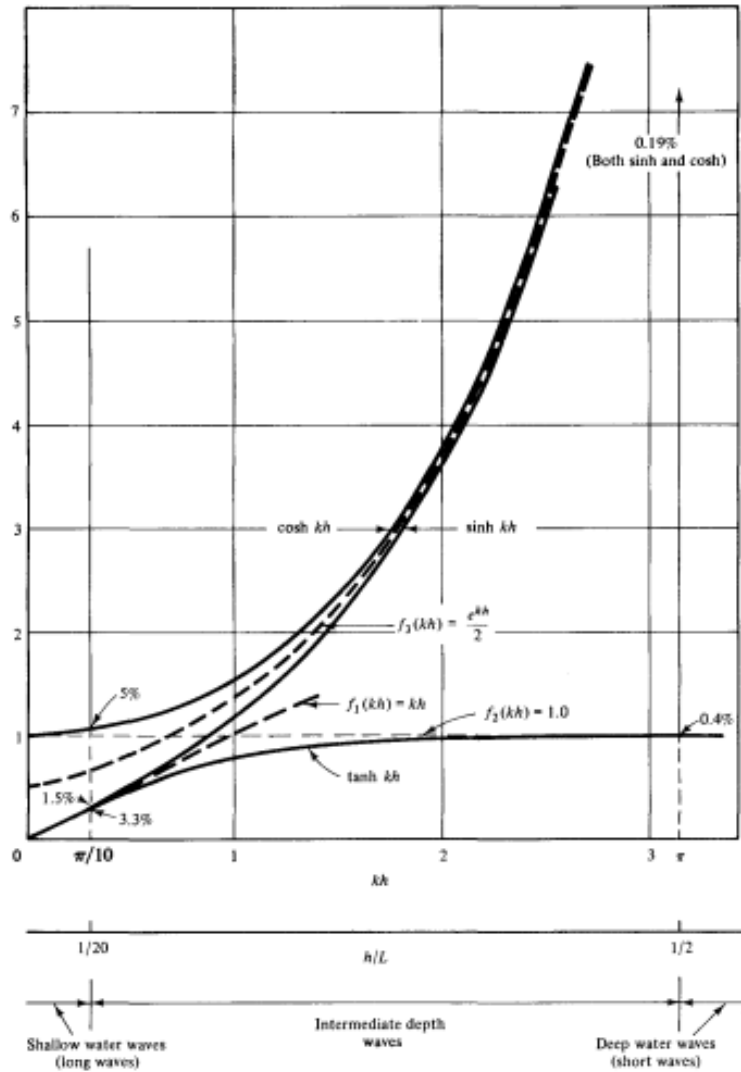
*y, para valores muy pequeños o muy grandes del argumento las funciones anteriores se pueden aproximar como se muestra en el siguiente cuadro:*

**TABLE 3.2 Asymptotic Forms of Hyperbolic Functions**

Function	Large $kh$	Small $kh$
$\cosh kh$	$e^{kh}/2$	1
$\sinh kh$	$e^{kh}/2$	$kh$
$\tanh kh$	1	$kh$

*(Fuente: Dean & Dalrymple, 1992)*

*La demostración de esas aproximaciones puede realizarse mediante el desarrollo de las funciones por series de Taylor, conservando hasta los términos lineales. La siguiente figura ilustra lo antedicho:*



**Figura 16. Profundidades relativas y asíntota para cada función hiperbólica. Los porcentajes indicados corresponden a los máximos errores cometidos en la aproximación. (Fuente: Dean & Dalrymple, 1992).**

**Observamos de la figura tres zonas definidas según los cocientes entre  $h$  y  $L$ :**

$$\frac{h}{L} < \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{hk}{2\pi} < \frac{1}{20} \Rightarrow kh < \frac{\pi}{10} \quad \text{Aguas Poco Profundas (APP)}$$



$$\frac{h}{L} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{hk}{2\pi} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad kh > \pi \quad \text{Aguas Profundas (AP)}$$

$$\frac{1}{20} \leq \frac{h}{L} \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{10} \leq kh \leq \pi \quad \text{Aguas Intermedias (AI)}$$

- (i) *Por lo tanto, para AP y APP podremos utilizar soluciones aproximadas, pero mucho más simples.*
- (ii) *En cambio, para AI se deben utilizar las expresiones dadas por la TLO sin aproximaciones.*

## La relación de dispersión

La relación de dispersión es una herramienta central en el tratamiento de las olas ya que vincula a  $k$ ,  $\sigma$ , y  $h$ :

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh)$$

o

$$C^2 = \left(\frac{L}{T}\right)^2 = \left(\frac{g}{k}\right) \tanh(kh)$$

$$L = \left(\frac{g}{2\pi}\right) T^2 \tanh(kh)$$

En AP  $\Rightarrow kh > \pi \quad \tanh(kh) \rightarrow 1$

$$L_o = \left(\frac{g}{2\pi}\right) T^2 = 1.56 T^2$$

(se adopta en todos los ámbitos el subíndice “o” para indicar AP, a para todos los parámetros de las olas). Combinando las dos últimas expresiones, se obtiene:

$$L = L_o \tanh(kh)$$

Esta última indica que a medida que  $h$  disminuye (en términos generales, nos acercamos a la costa) la longitud de onda ( $L$ ) disminuye.

*El nombre “relación de dispersión” se adoptó porque esta expresión nos indica como un tren de olas formado por un grupo de ondas con distintos periodos se va dispersando (las olas más rápidas le ganan a las más lentas) a medida que se propaga.*

*Si dividimos la expresión anterior por el período, se obtiene:*

$$C = C_0 \tanh(kh)$$

*De la misma manera, esta última indica que a medida que  $h$  disminuye,  $C$  también disminuye.*

*Para un mismo período, las olas en AP viajan más rápido que en APP. Recordemos esto para explicar, más adelante, la refracción batimétrica.*

*Otro concepto muy importante:*

*“la longitud de onda en AP es un sinónimo del período de las olas”*

$$L_0 = \left(\frac{g}{2\pi}\right) T^2$$

*En los problemas, si nos dan como dato  $T$  nos están dando  $L_0$ , si nos dan  $L_0$  nos están dando  $T$ .*

**Aproximación de la relación de dispersión en AP ( $kh > \pi$ )**

$$\tanh(kh) \rightarrow 1$$

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh) \rightarrow gk$$

$$\sigma^2 \sim gk$$

*Habíamos demostrado arriba que:*

$$L_0 = \left(\frac{g}{2\pi}\right) T^2$$

*Dividiendo ambos miembros por el período, obtenemos:*

$$C_0 = \left(\frac{g}{2\pi}\right) T$$

**Aproximación de la relación de dispersión en APP ( $kh < \frac{\pi}{10}$ )**

$$\tanh(kh) \rightarrow kh$$

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh) \rightarrow gk^2 h$$

$$\sigma^2 \sim gk^2 h$$

$$\frac{\sigma^2}{k^2} = kh \Rightarrow C = \sqrt{gh}$$

*en AP la celeridad de las olas es  $\Rightarrow C_0 = \left(\frac{g}{2\pi}\right) T$*

*Y*

*en APP está dada por  $\Rightarrow C = \sqrt{gh}$ .*

*Observamos muy claramente que en APP la celeridad de las ondas es sólo función de  $h$ , es decir, todas se propagan con la misma rapidez independientemente de  $T$ .*

*Por esa razón decimos que las APP son un medio NO DISPERSIVO.*

*En cambio, en AP la celeridad es función de  $T$ . Por lo tanto, cuanto mayor sea el período de la ola ésta se propagará más rápidamente.*

*En consecuencia, las AP constituyen un medio DISPERSIVO.*

*No debemos confundir “dispersión” con “disipación”. Este último usualmente se emplea en tratamientos energéticos, por ejemplo, “...disipación de energía por fricción de fondo...”.*

*AP  $\Rightarrow$  medio DISPERSIVO*

*APP  $\Rightarrow$  medio NO DISPERSIVO*

*En la práctica se nos pueden plantear tres problemas:*

**(1) Conocemos  $L$  y  $T$ , y tenemos que calcular  $h$ ,**

**(2) Conocemos  $L$  y  $h$ , y tenemos que calcular  $T$ ,**

**(3) Conocemos  $T$  y  $h$ , y tenemos que calcular  $L$ ,**

*Para todos ellos recurrimos a la relación de dispersión, en alguna de sus múltiples expresiones. Tomemos la clásica:*

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh)$$

**(1)  $h = \frac{1}{k} \operatorname{arc} \tanh\left(\frac{\sigma^2}{gk}\right)$**

**(2)  $\sigma^2 = gk \tanh(kh)$**

**(3)  $k$  está dentro y fuera de la  $\tanh \Rightarrow$  no la podemos despejar. Debemos recurrir a algún método de resolución numérico.**

*Recordamos que  $\Rightarrow$*   $L = \frac{2\pi}{k}$  *y*  $T = \frac{2\pi}{\sigma}$

### **Método numérico para la resolución de la relación de dispersión**

*Como vimos la clase pasada, si multiplicamos ambos miembros de la relación de dispersión por  $h$ , resulta:*

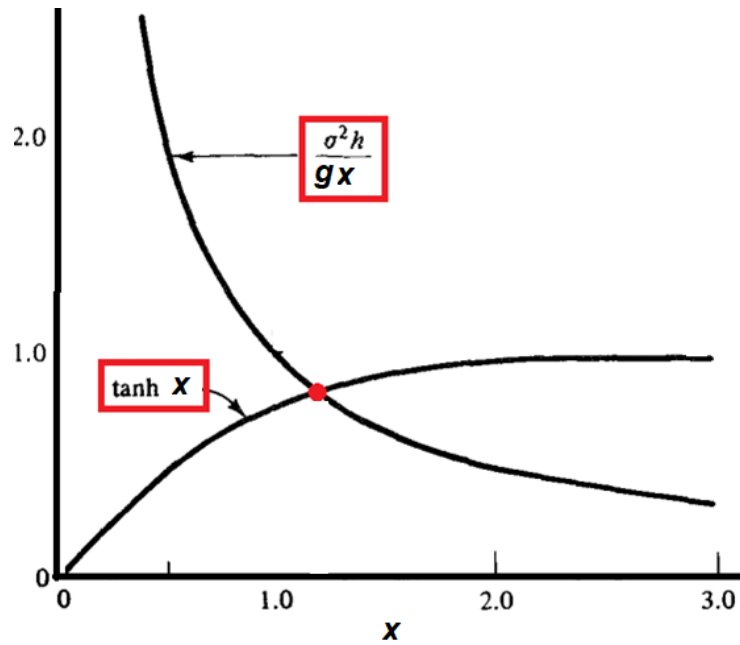
$$C_1 = \frac{h \sigma^2}{g} = (kh) \tanh(kh)$$

$$\frac{C_1}{(kh)} = \tanh(kh)$$

*Definimos  $x = kh$*

$$\frac{C_1}{x} = \tanh(x)$$

*Lo que debemos obtener es el  $x$  de la intersección entre la tangente hiperbólica y la hipérbola equilátera:*



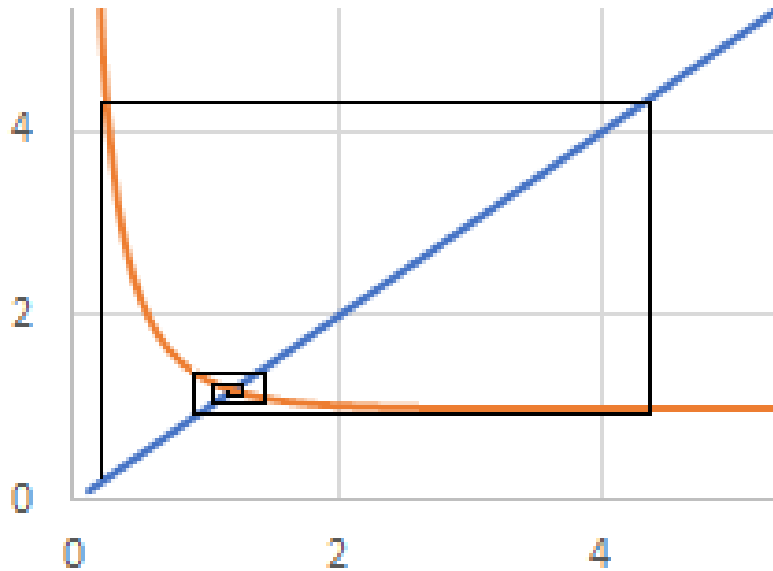
**Figura 17. Solución numérica de la relación de dispersión. Intersección entre tangente hiperbólica e hipérbola equilátera.**

**Reorganizando la expresión anterior, resulta:**

$$x = \frac{C_1}{\tanh(x)}$$

**Lo cual se reduce a calcular la intersección entre una recta y la inversa de la tangente hiperbólica:**





**Figura 18. Solución numérica de la relación de dispersión. Intersección entre la inversa de la tangente hiperbólica (marrón) y una recta (azul).**

**El procedimiento es muy simple. Pensemos que tenemos que encontrar la intersección entre dos funciones:**

$$y_1 = x$$

$$x = y_2 = \frac{C_1}{\tanh(x)}$$

**Comenzamos con un valor inicial de  $x$  ( $x_0$ ), calculamos  $\tanh(x_0)$ , dividimos a  $C_1$  por ese valor, y obtenemos  $y_2$ , es decir, un nuevo valor de  $x$  ( $x_1$ ), calculamos  $\tanh(x_1)$ , dividimos a  $C_1$  por ese valor, y obtenemos  $y_3$ , es decir, un nuevo valor de  $x$  ( $x_2$ ). ... Repetimos esto hasta que:**

$$|x_i - x_{i+1}| < \epsilon$$

**en donde  $\epsilon$  es la diferencia entre dos valores de  $x$ , o sea,  $k_i h$ , consecutivos. Por lo tanto,  $\epsilon$  es una medida del error cometido en el procedimiento. Como se aprecia de la Figura 18, este método converge siempre. El resultado obtenido es independiente del valor inicial. Pero la cantidad de bucles realizados hasta alcanzar la convergencia es función del valor inicial.**

*A veces, cuando se necesita obtener una solución aproximada de  $L$ , tal que no se necesita realizar un cálculo numérico sobre la relación de dispersión, puede recurrirse a la solución obtenida por Eckart (1951):*

$$\sigma^2 = gk \sqrt{\tanh\left(\frac{\sigma^2}{g} h\right)}$$

*De esta expresión se obtiene un valor de  $k$  que puede ser (aunque tenga un pequeño error) definitivo, o puede ser utilizado como valor inicial para la iteración utilizando algún procedimiento numérico.*

**Ver en Dean & Dalrymple (1992) la solución aproximada obtenida por Hunt (1979).**

**De los tres parámetros que tiene la relación de dispersión ( $\sigma$ ,  $k$ ,  $h$ ):**

**$\sigma$  se puede obtener midiendo el período en un punto fijo,**

**$h$  puede obtenerse de una carta náutica o con una sonda,**

**en cambio,  $k$  es función de la longitud de onda ( $L$ ), la cual en general no se obtiene directamente ni se mide.**

**Por eso, en la práctica,  $k$  se calcula resolviendo la relación de dispersión.**

**El potencial de velocidades con corriente uniforme:**

- (i) *Para afianzar el procedimiento para la obtención del potencial de la TLO, vamos a repetir el método incorporando una corriente estacionaria, unidireccional y uniforme ( $U_0$ ).*
- (ii) *Para abreviar algunos pasos, partimos de una expresión del potencial para una onda progresiva, que prevé la posibilidad de corriente uniforme y estacionaria:*

$$\phi(x, z, t) = -U_0 x + A \cosh k(h + z) \cos(kx - \sigma t)$$

- (iii) *Se puede verificar fácilmente que esta solución cumple con las dos condiciones de periodicidad y con la KBC.*
- (iv) *Resta aplicar la KFSBC y la DFSBC.*
- (v) *No podemos suponer que  $U_0$  es pequeña y, por lo tanto, despreciable frente a otras cantidades.*
- (vi) *De la misma manera que antes, expandimos en series de Taylor a la ecuación de Bernoulli:*

$$\left[ gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} [u^2 + w^2] \right]_{z=\eta} \sim \left[ gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} [u^2 + w^2] \right]_{z=0} +$$
$$+ \eta \left[ g - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [u^2 + w^2] \right]_{z=0} = C(t)$$

**La velocidad horizontal y su expresión cuadrática están dadas por:**

$$u = - \frac{\partial \phi}{\partial x} = U_0 + A k \cosh k(h + z) \sin(kx - \sigma t)$$

$$u^2 = U_0^2 + A^2 k^2 \cosh^2 k(h+z) \sin^2(kx - \sigma t) + 2U_0 A k \cosh k(h+z) \sin(kx - \sigma t)$$

*Dado que las ondas son de amplitud pequeña ( $A k$ ) es pequeño, pero  $(A k)^2$  lo es aún más.*

*Desechando los términos no lineales y los de orden menor, la DFSBC linealizada queda:*

$$g\eta - A \sigma \cosh kh \sin(kx - \sigma t) + \frac{1}{2} [U_0^2 + 2U_0 A k \cosh kh \sin(kx - \sigma t)] = C(t)$$

$$g\eta = A \sigma \cosh kh \sin(kx - \sigma t) - \frac{1}{2} U_0^2 - U_0 A k \cosh kh \sin(kx - \sigma t) + C(t)$$

$$g\eta = A \cosh kh (\sigma - k U_0) \sin(kx - \sigma t) - \frac{1}{2} U_0^2 + C(t)$$

$$\eta(x, t) = \frac{A\sigma}{g} \cosh kh \left(1 - \frac{k U_0}{\sigma}\right) \sin(kx - \sigma t) - \frac{U_0^2}{2g} + C'(t)$$

*Dado que el promedio espacial de  $\eta(x, t)$  es cero (o sea, el agua que ocupa la cresta es la del valle), de la anterior resulta que:*

$$C'(t) = \frac{U_0^2}{2g}$$

*Por otro lado, definiendo:*

$$\eta(x, t) = \frac{H}{2} \sin(kx - \sigma t)$$

$$\frac{H}{2} = \frac{A\sigma}{g} \left(1 - \frac{k U_0}{\sigma}\right) \cosh kh$$

$$A = \frac{Hg}{2\sigma \left(1 - \frac{U_0}{C}\right) \cosh kh}$$

**Aplicamos ahora la KFSBC, también expandida en series de Taylor:**

$$\left(w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{z=\eta} = \left(w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{z=0} + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(w - \frac{\partial \eta}{\partial t} - u \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_{z=0} + \dots = 0$$

**Resultando:**

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad z = 0$$

**Sustituyendo  $\varphi(x, z, t)$  y  $\eta(x, t)$  en la anterior:**

$$-\frac{Hg}{2\sigma \left(1 - \frac{U_0}{C}\right) \cosh kh} k \sinh kh \cos(kx - \sigma t) = -\frac{H}{2} \sigma \cos(kx - \sigma t) + U_0 k \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t)$$

$$-\frac{g}{2\sigma \left(1 - \frac{U_0}{C}\right) \cosh kh} k \sinh kh = -\frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{U_0}{C}\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{gk}{\left(1 - \frac{U_0}{C}\right)^2} \tanh kh$$

**Otra manera de escribirla es:**

$$\frac{\sigma^2}{C^2}(C - U_0)^2 = gk \tanh kh$$

$$k^2(C - U_0)^2 = gk \tanh kh$$

$$(C - U_0)^2 = \frac{g}{k} \tanh kh$$

$$C - U_0 = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh}$$

- (i) *Esto nos permite ver a este problema como a uno de “movimiento relativo” (típicamente, el caso del hombre que camina con velocidad  $V_1$  sobre un tren que marcha a  $V_2$ ).*
- (ii) *En nuestro caso, podemos pensar que navegamos en un barco con velocidad  $U_0$  en la dirección de un tren de olas que se mueve con  $C$ .*
- (iii) *Este tratamiento teórico es simple y ha sido pensado para calcular el cambio en  $T'$  ante la presencia de una corriente uniforme (las cantidades primadas corresponden a los parámetros de olas ante la presencia de corriente, o medidas desde un sistema móvil con velocidad  $U_0$ ). Se considera que:*

*(1) La longitud de onda es la misma en ambos sistemas  $\Rightarrow L' = L$*

*(2)  $T'$  puede obtenerse en función de  $T$ ,*

$$C = \frac{L}{T}$$

*y*

$$C' = \frac{L'}{T'}$$

$$L' = L \Rightarrow C' T' = C T \Rightarrow (C - U_0)T' = C T \Rightarrow T = T' \left(1 - \frac{U_0}{C}\right)$$

*En esta última relación puede apreciarse que, para el sistema de referencia moviéndose con la corriente estacionaria (podríamos estar en un barco que navega exactamente a la velocidad de la corriente), si la celeridad de las olas coincide con la intensidad de la corriente ( $C = U_0$ ) el período de las olas respecto al sistema en movimiento tendería a infinito ( $T' \rightarrow \infty$ ). Es decir, si la proa del barco estuviera sobre la cresta de la ola, esta situación no cambiaría en el tiempo. Por lo tanto, al querer medir el período de la ola desde el barco me daría un valor infinito.*

*(3) La velocidad total ( $u_t$ ) de las partículas de agua se calcula de la siguiente manera  $u_t = U_0 + u_w$ , en donde  $u_w$  es la velocidad orbital de las olas.*

*(4) Si se dispone de  $T$  y de  $h$ , el número de onda (igual en ambos sistemas) se debe calcular iterando la relación de dispersión obtenida =>*

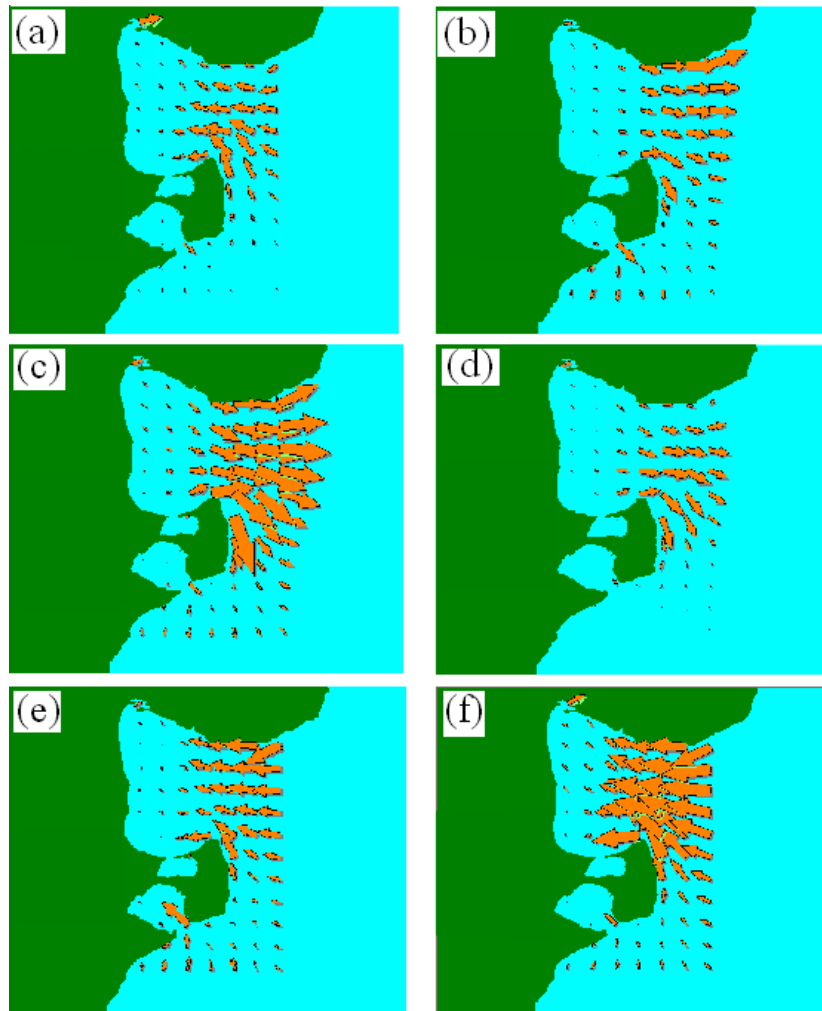
$$\sigma^2 = \frac{gk}{\left(1 - \frac{U_0}{C}\right)^2} \tanh kh$$

*(5)  $U_0 \rightarrow 0$  la relación de dispersión tiende a la de la TLO ( $\frac{U_0}{C} \rightarrow 0 \Rightarrow \sigma^2 \rightarrow gk \tanh kh$ ).*

*(6) Dejando por el momento este tratamiento analítico de lado, en la práctica la situación es bastante diferente. Cuando las olas se propagan en la misma dirección de la corriente  $L$  aumenta y  $H$  disminuye (es decir, la ola “se estira”). En cambio, cuando las olas se propagan en dirección opuesta de la corriente  $L$  se acorta y  $H$  aumenta (es decir, la ola “se comprime”). Este último efecto se conoce en la náutica como “escarceo”. Los escarceos son peligrosos para las embarcaciones pequeñas porque son transitorios y a veces acompañados de rompientes.*

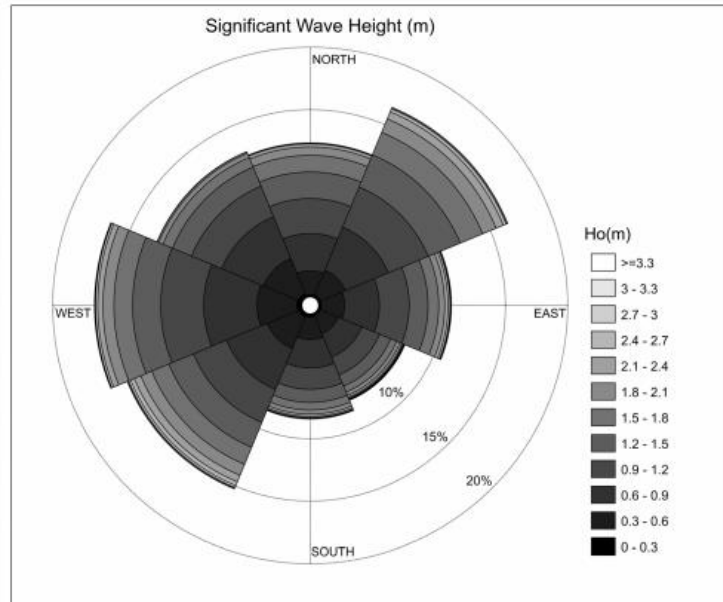
*Veamos el caso particular de península Valdés. En la Figura 19.b se observa que la boca del golfo Nuevo y el sector S de la boca del golfo San Matías experimentan una condición de reflujo (marea bajante), con corrientes predominantes fluyendo hacia el SE. El caso opuesto se observa en la Figura 19.e, con corrientes de marea hacia el NW durante el flujo (creciente). En la Figura 20 se aprecia que el oleaje predominante en la región se propaga desde el NW, W y SW. Por lo tanto, la condición del flujo es la propicia para la ocurrencia de escarceos (corriente opuesta a la dirección del oleaje). Como en la*

*Patagonia la marea es semidiurna, esta situación se repite dos veces al día y, por lo tanto, los escauceos se manifiestan bastante regularmente dos veces al día. Por esa razón, este fenómeno es indicado en las cartas náuticas de la región con un símbolo cartográfico específico (ver Figura 21). En las Figuras 22 y 23 se presentan detalles de la carta náutica H-214 (SHN) indicando zonas de escauceos.*

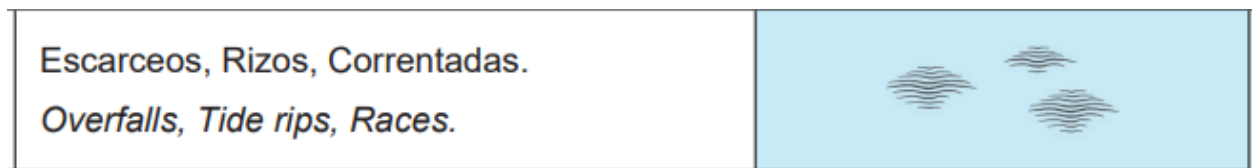


**Figura 19. Corriente de marea en los golfos nor-patagónicos. Simulaciones numéricas realizadas con WQMap Model.**

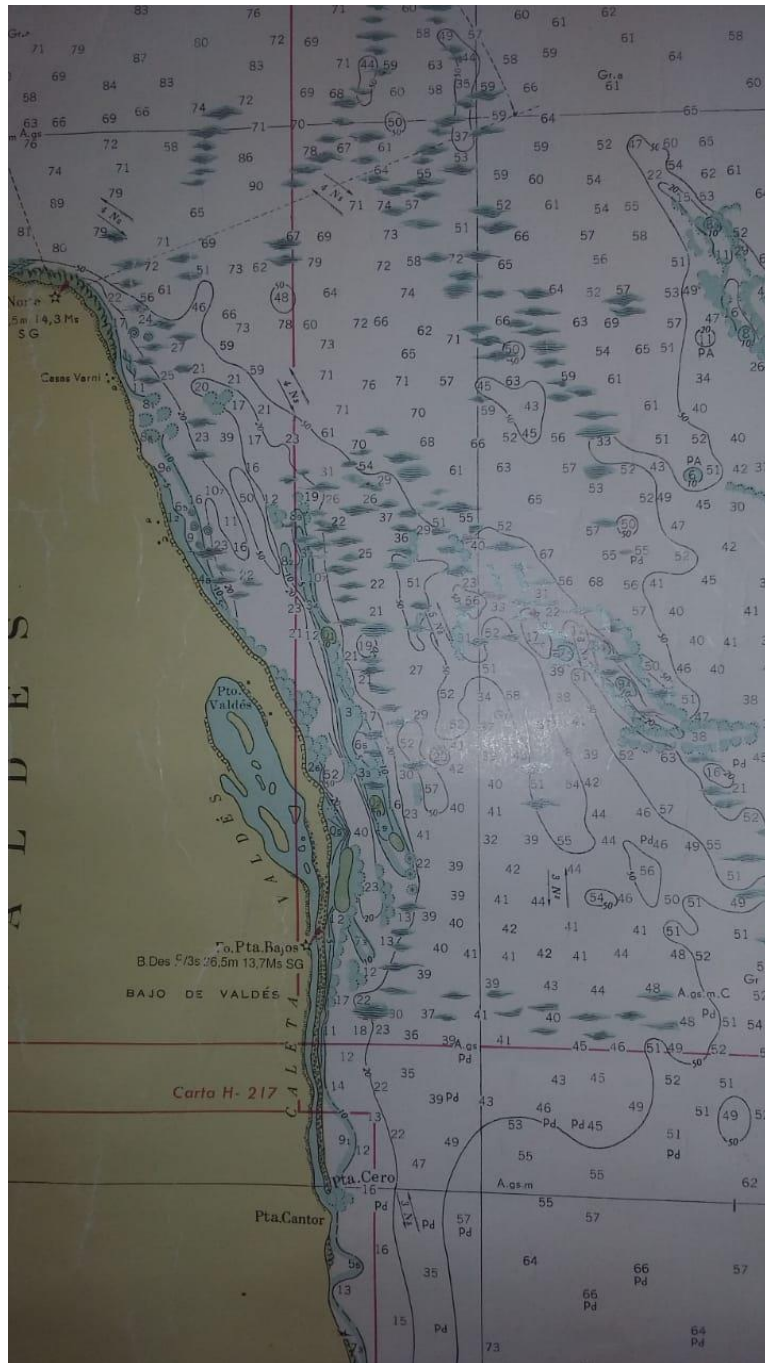




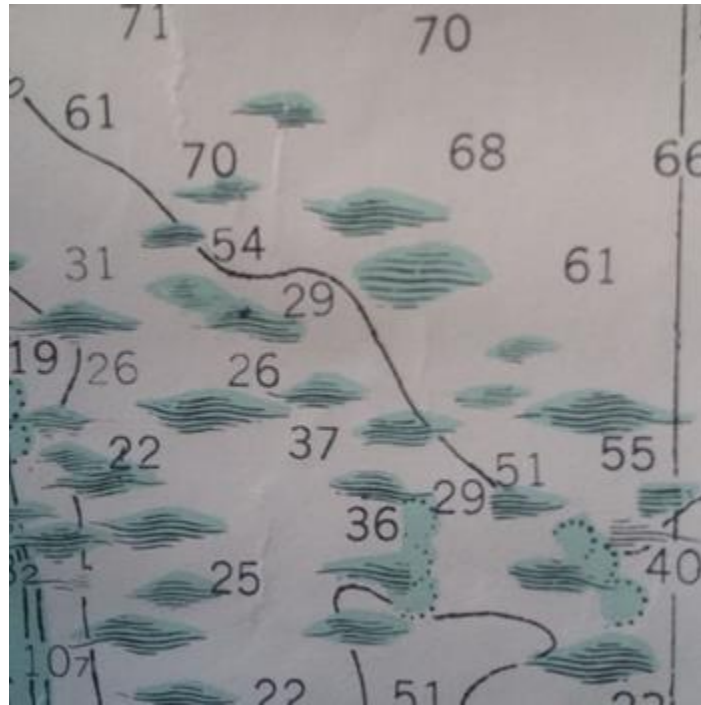
**Figura 20. Rosa direccional de olas correspondiente al golfo San Matías. Obtenidas de simulaciones numéricas realizadas con SWAN model.**



**Figura 21. Símbolo cartográfico para indicar la presencia de escarceos.**



**Figura 21. Sector N de la península Valdés: zona de escarceos.**



***Figura 22. Detalle de la zona de escarceos.***

Para pensar y discutir en clase

- (1) ¿Cuál es la falencia más grande del tratamiento analítico presentado?
- (2) Ante una condición estacionaria de oleaje ¿varían las alturas de los escarceos a lo largo del mes?
- (3) En la práctica, ¿quién es mayor  $U_0$  o  $C$ ?
- (4) ¿Cuál es el valor de la intensidad de la corriente de marea en el sector N de la península Valdés?
- (5) En la relación de dispersión obtenida:

$$\sigma^2 = \frac{gk}{\left(1 - \frac{U_0}{C}\right)^2} \tanh kh$$

el  $k$  que aparece, ¿es el mismo valor que nos daría la TLO sin corrientes?