

Cinemática y Dinámica de las olas – TLO

- *La TLO resuelve completamente la hidrodinámica de las olas.*
- *Permite obtener, además del potencial, la elevación de la superficie libre y la relación de dispersión, **el campo bidimensional de velocidades, de aceleraciones, de trayectorias, y de presiones.***
- *Nos da información tanto para ondas progresivas como estacionarias.*
- *Valen las aproximaciones vistas para APP, AP y AI =>*

$$\frac{h}{L} < \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad \frac{hk}{2\pi} < \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad kh < \frac{\pi}{10} \quad \text{Aguas Poco Profundas (APP)}$$

$$\frac{h}{L} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{hk}{2\pi} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad kh > \pi \quad \text{Aguas Profundas (AP)}$$

$$\frac{1}{20} \leq \frac{h}{L} \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{10} \leq kh \leq \pi \quad \text{Aguas Intermedias (AI)}$$

- *Desde el punto de vista de la ciencia y la ingeniería, la TLO es la primera herramienta a la que se recurre **siempre.***
- *Una buena medida es chequear el campo de validez de la TLO.*

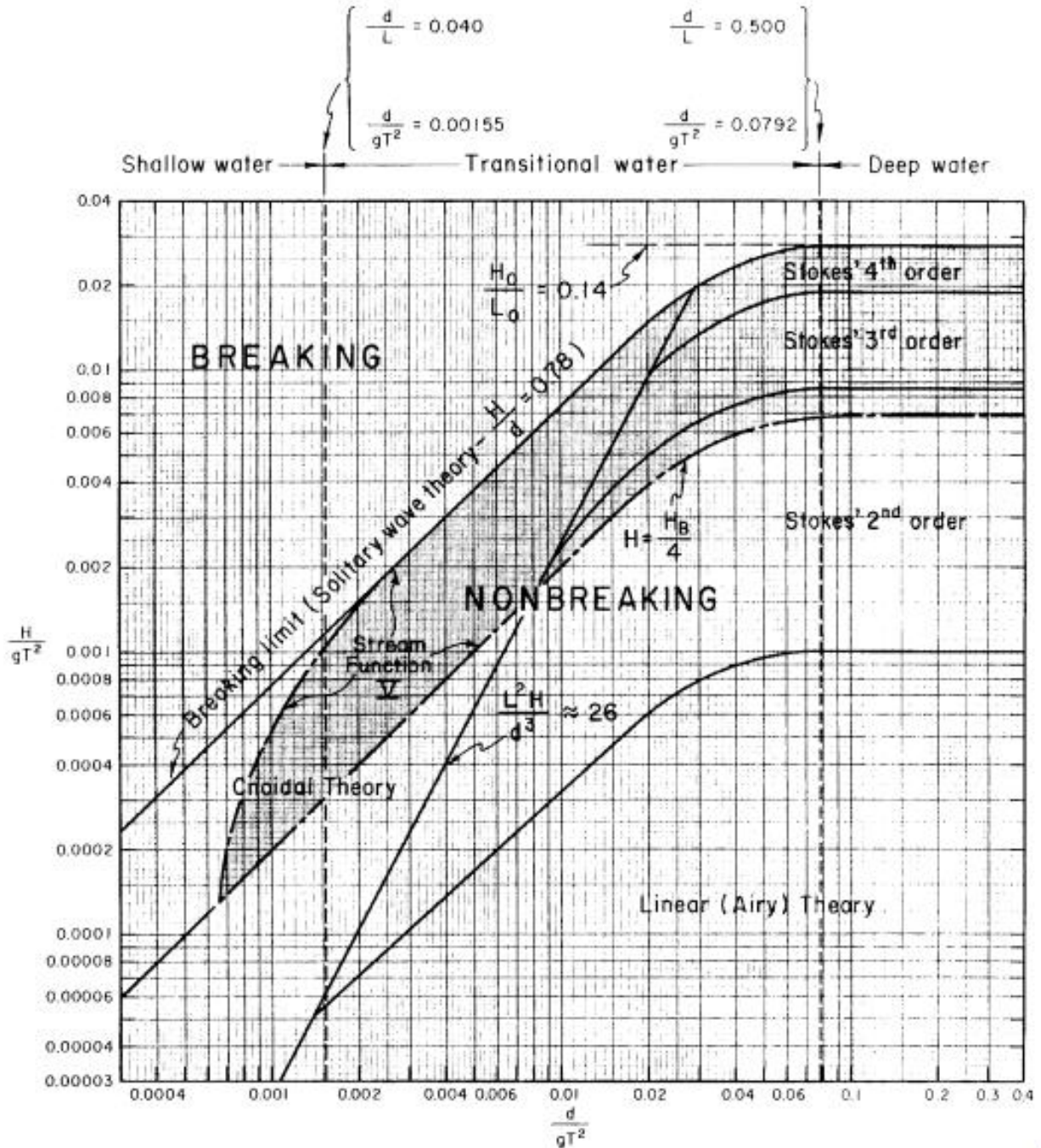


Figura 1. Campo de validez de la TLO (la imagen se tomó de CERC, Shore Protection Manual, Vol. I, 1984, <http://ft-sipil.unila.ac.id/dbooks/S%20P%20M%201984%20volume%201-1.pdf>)

Ondas Progresivas (OP)

Las expresiones obtenidas para las OP son:

$$\varphi(x, z, t) = -\frac{Hg \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh(kh)} \text{sen}(kx - \sigma t)$$

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t)$$

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh)$$

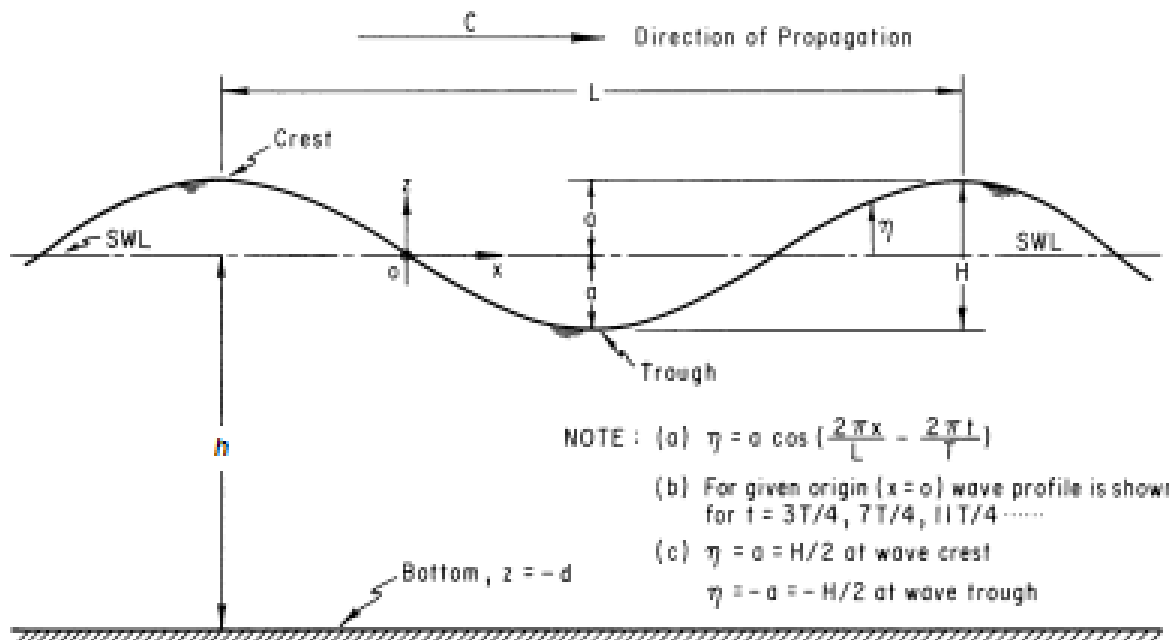


Figure 2-2. Definition of terms—elementary, sinusoidal, progressive wave.

Figura 2. Onda progresiva. Esquema.

Velocidad orbital

$$u(x, z, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = g \frac{Hk}{2\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \sigma t)$$

Pero, como

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh)$$

$$u = g \frac{Hk}{2\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \frac{\sinh(kh)}{\sinh(kh)} \cos(kx - \sigma t)$$

$$u = \frac{H\sigma}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh(kh)} \cos(kx - \sigma t)$$

$$w(x, z, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = g \frac{Hk}{2\sigma} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh(kh)} \frac{\sinh(kh)}{\sinh(kh)} \sin(kx - \sigma t)$$

$$w(x, z, t) = \frac{H\sigma}{2} \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh(kh)} \sin(kx - \sigma t)$$

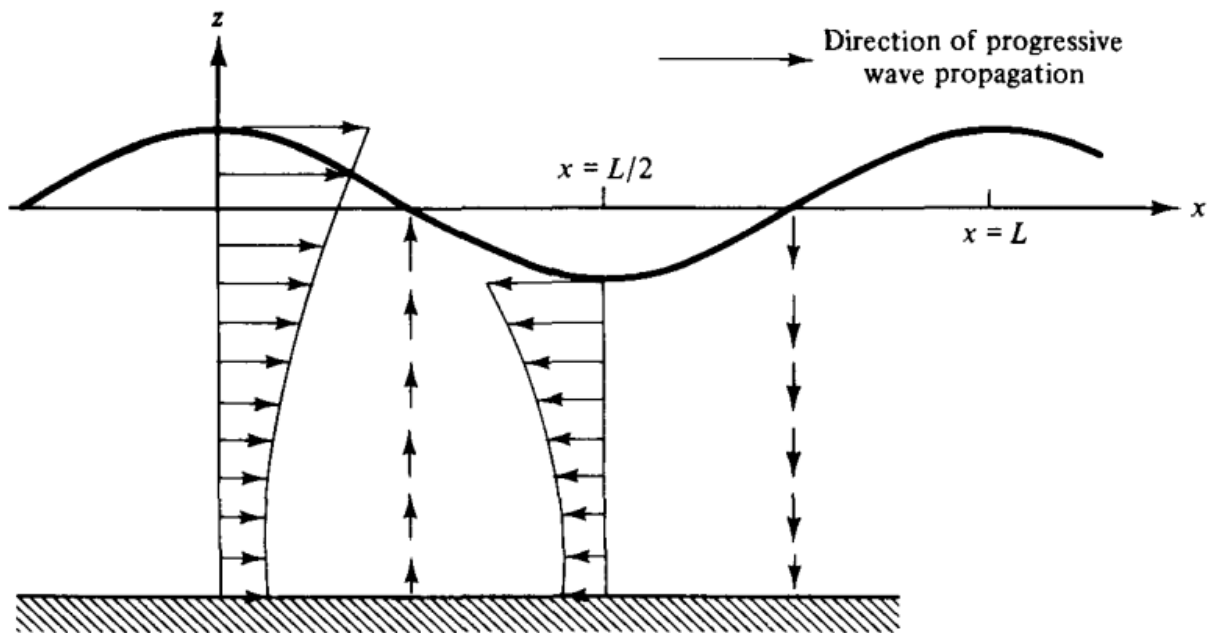


Figure 4.1 Water particle velocities in a progressive wave.

Figura 3. Campo de velocidades para la OP.

Aceleración de la partícula de agua

La definición de aceleración es:

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

Pero, en el marco de la TLO, los términos no lineales pueden ser despreciados:

$$a_x = \frac{du}{dt} \sim \frac{\partial u}{\partial t}; \quad a_z = \frac{dw}{dt} \sim \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$a_x = g \frac{Hk}{2} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \frac{\sinh(kh)}{\sinh(kh)} \sin(kx - \sigma t)$$

$$a_x = \frac{H}{2} \sigma^2 \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh(kh)} \sin(kx - \sigma t)$$

$$a_z = -\frac{H}{2} \sigma^2 \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh(kh)} \cos(kx - \sigma t)$$

En la siguiente imagen, tomada del SPM (1984) observamos que:

- (i) Debajo de la cresta, u es máximo (en la dirección de propagación de la ola, C), y w es nula, a_z presenta un extremo negativo, y a_x es nula.
- (ii) Debajo del valle, u presenta un extremo negativo, y w es nula, a_z presenta un máximo hacia arriba, y a_x es nula.
- (iii) En el punto de inflexión, entre la cresta y el valle (fase instantánea: $\pi/2$), u es nula, w presenta un máximo positivo, a_x es máximo, y a_z es nula.
- (iv) En el punto de inflexión, entre el valle y la cresta (fase instantánea: $3\pi/2$), u es nula, w y a_x presentan extremos negativos, y a_z es nula.
- (v) La cinemática en la vertical de la ola puede compararse con la de un péndulo en la horizontal. Cuando el péndulo está en el punto medio tiene máxima velocidad y aceleración cero \Rightarrow la partícula de agua en el punto de inflexión ($\pi/2$) tiene máximo w y a_z nulo. En los puntos de amplitud máxima, el péndulo está quieto (velocidad nula) y máxima aceleración \Rightarrow la partícula de agua en la cresta o el valle tiene w nula, y a_z máxima, hacia abajo y hacia arriba, respectivamente.

- (vi) Inferimos, además que u no puede superar a C , si no, la partícula se “escaparía” de la onda (este es un criterio básico de rotura de olas).
- (vii) En el fondo ($z = -h$), $w = 0$ y se satisface, obviamente, la BBC.
- (viii) w depende de $\sinh k(h + z)$, su valor aumenta desde el fondo hacia la superficie libre.
- (ix) En el fondo ($z = -h$), $\cosh k(h + z) = 1$, alcanza el valor mínimo. Como está en el numerador de u , hace que la velocidad orbital horizontal sea mínima en el fondo.
- (x) En superficie ($z = 0$), $\cosh kh$ es máximo. Idem (ix) la velocidad orbital horizontal es máxima en superficie.

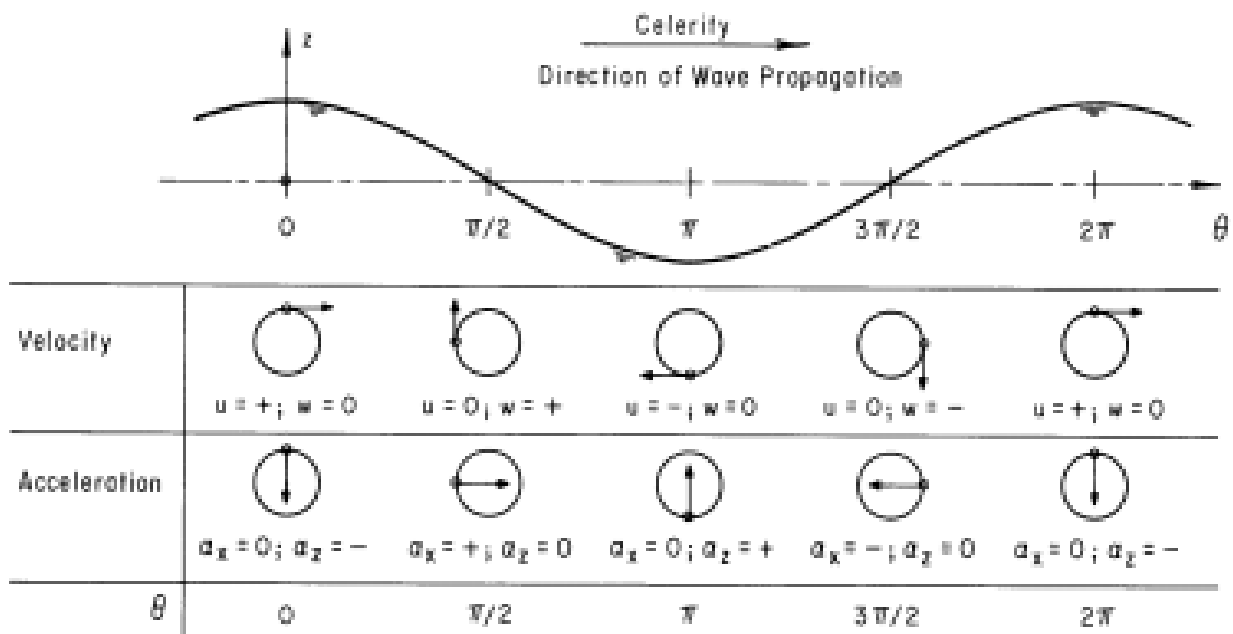


Figure 2-3. Local fluid velocities and accelerations.

Figura 4. Campo de velocidades y aceleraciones para la OP.

La aceleración es una variable muy utilizada para medir olas. Muchos equipos que miden olas se basan en el relevamiento 3D de la aceleración (utilizando acelerómetros de gran precisión) para obtener a través de integrales dobles los desplazamientos diferenciales y así todos los parámetros estadísticos de interés.

$$\Delta x = \iint a_x dt dt$$

$$\Delta y = \iint a_y dt dt$$

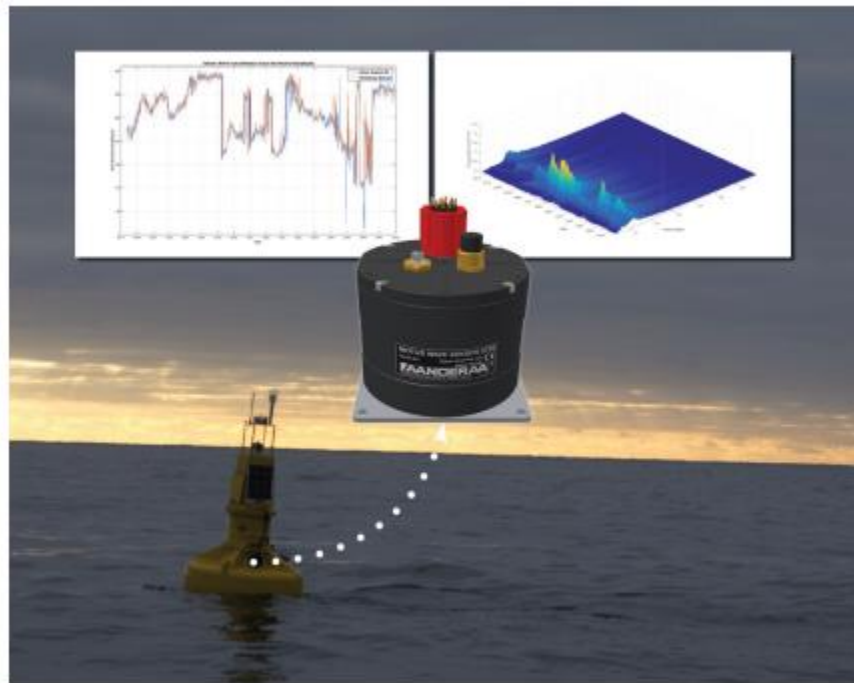
$$\Delta z = \iint a_z dt dt$$



Maniobra de fondeo de un WAVERIDER (DATAWELL).



Efecto del “fouling” sobre el olígrafo.



Acelerómetro montado en una boya

Desplazamiento de partículas de agua bajo las olas, trayectorias, u órbitas

Consideremos una partícula de agua trasladándose alrededor de una posición media dada por x_1, z_1 , bajo la influencia de las presiones ejercidas en el fluido bajo la acción de un campo de OP. El desplazamiento a lo largo de la trayectoria realizado por la partícula de agua dependerá de la posición instantánea x y z de la misma, la cual será función de las coordenadas relativas ζ, ξ respecto del centro de la órbita x_1, z_1 (ver la figura de abajo):

$$\zeta(x_1, z_1, t) = \int u(x_1 + \zeta, z_1 + \xi, t) dt$$

$$\xi(x_1, z_1, t) = \int w(x_1 + \zeta, z_1 + \xi, t) dt$$

pero ζ y ξ son cantidades desconocidas y, por lo tanto, no puedo resolver las integrales planteadas. Recurriendo a las argumentaciones de la TLO, podemos suponer que ζ y ξ , son cantidades muy pequeñas, por lo cual podemos admitir la siguiente aproximación:

$$u(x_1 + \zeta, z_1 + \xi, t) \rightarrow u(x_1, z_1, t)$$

$$w(x_1 + \zeta, z_1 + \xi, t) \rightarrow w(x_1, z_1, t)$$

Lo cual equivale a suponer que todo ocurre en un entorno pequeño del punto x_1, z_1 . Esto equivale a aceptar que, en cada instante, los valores de u y w en cualquier punto del perímetro de la trayectoria (ver figura de abajo) son iguales a los valores de u y w en el centro de la órbita o punto medio (x_1, z_1) . Al ser la TLO una formulación desarrollada para ondas de amplitud pequeña esta suposición es muy razonable.

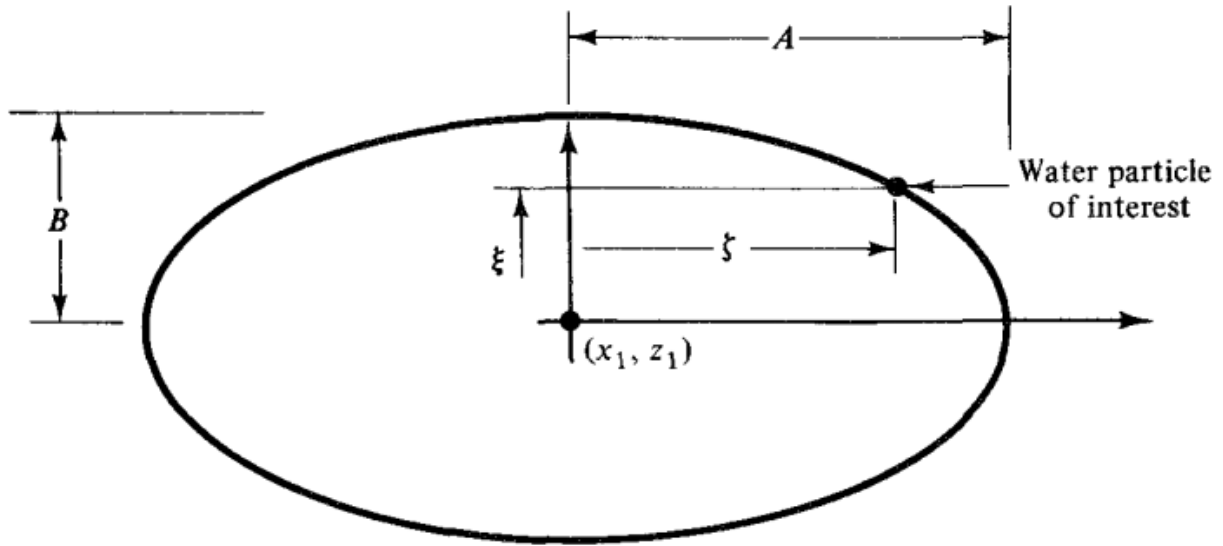


Figure 4.2 Elliptical form of water particle trajectory.

Figura 5. Trayectorias elípticas OP

Por lo tanto, las integrales anteriores se reducen a:

$$\zeta(x_1, z_1, t) = \int u(x_1 + \zeta, z_1 + \xi, t) dt \rightarrow \int u(x_1, z_1, t) dt$$

$$\xi(x_1, z_1, t) = \int w(x_1 + \zeta, z_1 + \xi, t) dt \rightarrow \int w(x_1, z_1, t) dt$$

$$\zeta(x_1, z_1, t) = \int g \frac{Hk}{2\sigma} \frac{\cosh k(h + z_1)}{\cosh(kh)} \cos(kx_1 - \sigma t) dt =$$

$$\zeta = -g \frac{Hk}{2\sigma^2} \frac{\cosh k(h + z_1)}{\cosh(kh)} \sin(kx_1 - \sigma t)$$

$$\xi = g \frac{Hk}{2\sigma^2} \frac{\sinh k(h + z_1)}{\cosh(kh)} \cos(kx_1 - \sigma t)$$

Tal que, introduciendo la relación de dispersión resulta:

$$\zeta = -\frac{H}{2} \frac{\cosh k(h + z_1)}{\sinh(kh)} \sin(kx_1 - \sigma t)$$

$$\xi = \frac{H}{2} \frac{\sinh k(h + z_1)}{\sinh(kh)} \cos(kx_1 - \sigma t)$$

Estos desplazamientos pueden reescribirse como:

$$\zeta(x_1, z_1, t) = -A \sin(kx_1 - \sigma t)$$

$$\xi(x_1, z_1, t) = B \cos(kx_1 - \sigma t)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\frac{\zeta^2}{A^2} + \frac{\xi^2}{B^2} = 1$$

y vemos que corresponde a la ecuación de una elipse. Notar:

$$A = \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h + z_1)}{\sinh(kh)}$$

$$B = \frac{H}{2} \frac{\sinh k(h + z_1)}{\sinh(kh)}$$

- (i) *Las órbitas de las partículas son cerradas. No hay transporte neto de masa.*
- (ii) *$\cosh(kh) > \sinh(kh) \Rightarrow A > B$, a lo sumo igual cuando (kh) es grande (AP).
Por lo tanto, en eje horizontal de la elipse es mayor que el vertical.*
- (iii) *Sobre el fondo $A \neq 0$; $B = 0$ (compatible con $w = 0$).*
- (iv) *En AP ($kh > \pi$), $A = B = \frac{H}{2} \Rightarrow$ trayectorias circulares,*
- (v) *Notar que no hay partículas por encima del nmm (el dominio de extiende desde $z_1 = 0$ hasta $z_1 = -h$).*

APROXIMACIONES PARA APP Y AP

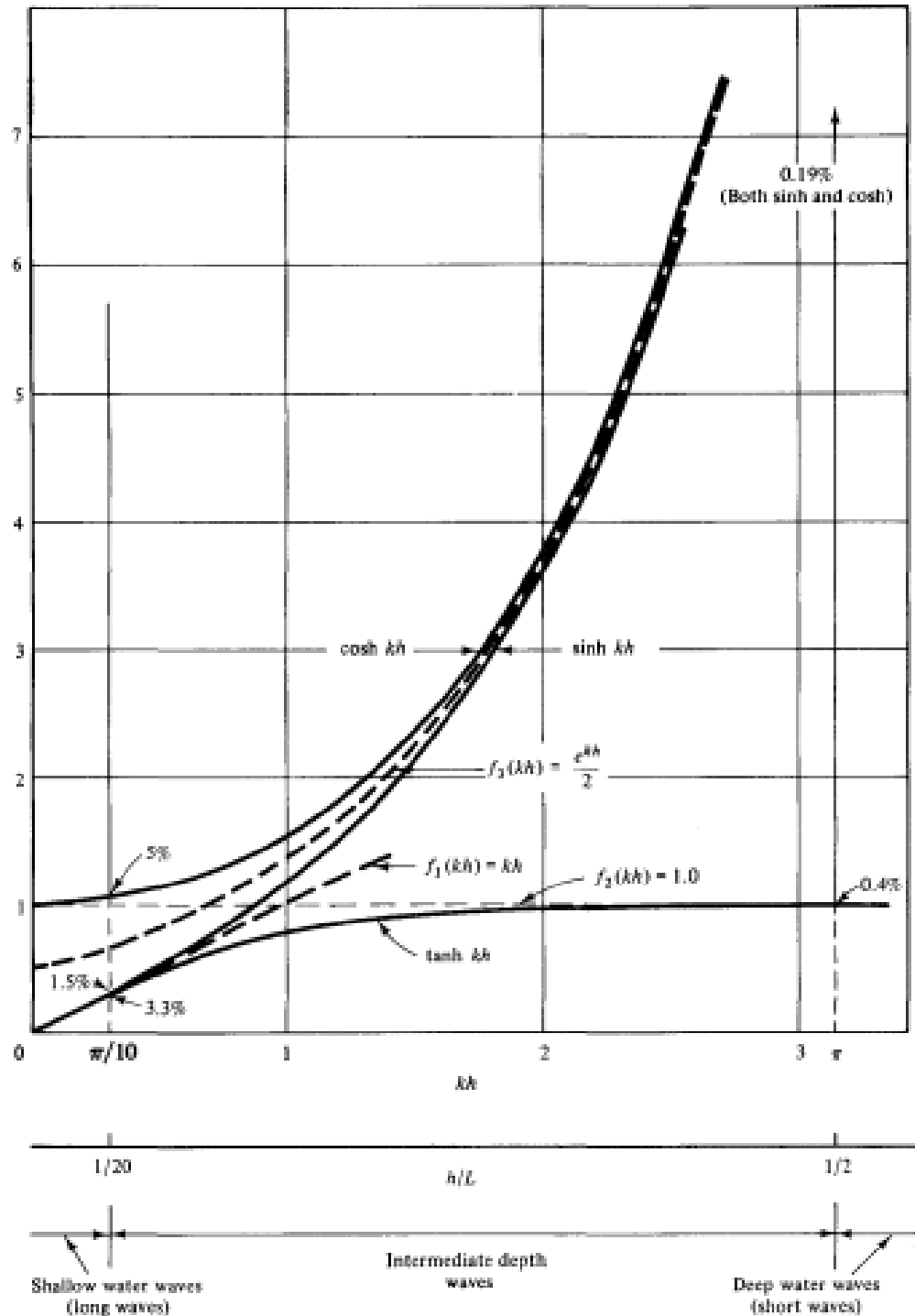


Figura 6. Aproximaciones asintóticas de las funciones hiperbólicas.

Aguas Poco Profundas (APP)

$$A = \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h + z_1)}{\sinh kh} = \frac{H}{2} \frac{1}{kh} = \frac{HL}{4\pi h} = \frac{HT}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}; \quad L = \sqrt{gh} T$$

$$B = \frac{H}{2} \frac{\sinh k(h + z_1)}{\sinh kh} = \frac{H}{2} \frac{k(h + z_1)}{kh} = \frac{H}{2} \left(1 + \frac{z_1}{h}\right)$$

- (i) El semieje A es independiente de la coordenada vertical, constante en profundidad. La excursión horizontal de la partícula es independiente de la profundidad.
- (ii) La excursión vertical de la partícula de agua disminuye hacia el fondo, siendo nula en $z_1 = -h$.

Ejemplo de aplicación (veamos a la onda de marea como una onda en APP):

La marea es una onda que tiene cientos de km de longitud ($L \sim 10^5$ km) que se propaga por el océano que tiene una profundidad media de 3.8 km.

$$\frac{h}{L} \sim 10^{-4} \Rightarrow \frac{h}{L} < \frac{1}{20} \Rightarrow APP$$

En general, podemos ver a la marea como una onda propagándose en APP. Supongamos que en una zona costera de 10 m de profundidad se encuentra fondeado un barco. En esa zona la marea es semidiurna ($T = 12$ h), y tiene 1 m de amplitud. Repentinamente se cae por la borda una caja plástica, estanca, con flotabilidad positiva. Suponiendo que se cae entre el instante de la bajamar que ya ocurrió y la pleamar que está por venir (conocido como momento de “media marea”), ¿hasta dónde se alejará la caja? Suponer un día muy calmo, sin viento ni oleaje. ¿Cuál es la intensidad media de la corriente de marea durante ese lapso?

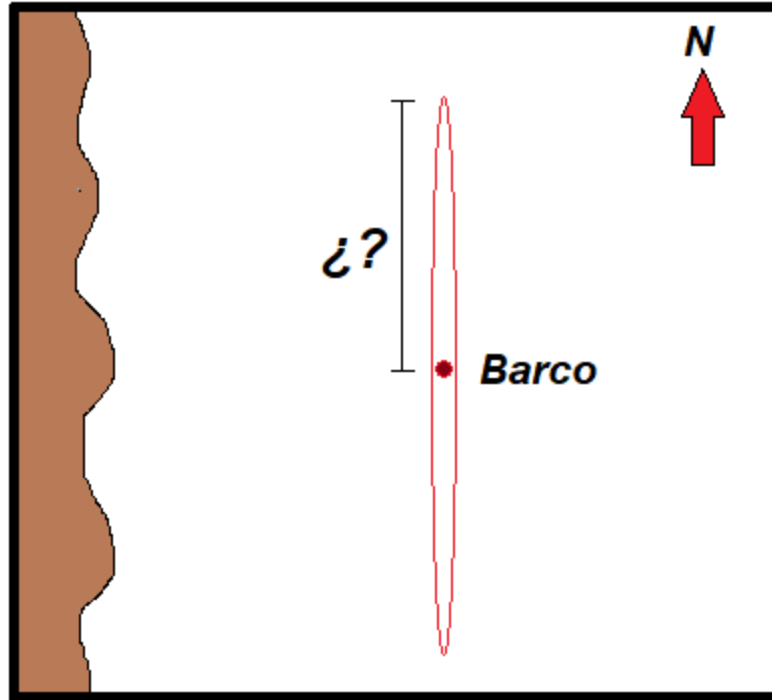


Figura 7. Trayectoria realizada por un objeto a la deriva en un campo de corrientes dominado por la marea.

Aguas Profundas (AP)

$$A = \frac{H}{2} \frac{\cosh k(h + z_1)}{\sinh(kh)} = \frac{H}{2} \frac{e^{kh} e^{kz_1}}{e^{kh}} = \frac{H}{2} e^{kz_1}$$

$$B = \frac{H}{2} \frac{\sinh k(h + z_1)}{\sinh(kh)} = \frac{H}{2} \frac{e^{kh} e^{kz_1}}{e^{kh}} = \frac{H}{2} e^{kz_1}$$

$$A = B = \frac{H}{2} e^{kz_1}$$

- (i) **En AP las trayectorias son circunferencias y decaen exponencialmente hacia el fondo.**
- (ii) **En $z_1 = -\frac{L}{2} \Rightarrow$ el exponente es: $-\frac{2\pi}{L} \frac{L}{2} = -\pi \Rightarrow e^{-\pi} = 0.043$, es decir, A es un 4% del valor en superficie. En la práctica se acepta que si la profundidad es mayor**

que $\frac{L}{2}$ el movimiento orbital de las olas es despreciable. Pero vemos que estrictamente la actividad penetraría, muy débilmente, hasta el fondo. Por ejemplo, a una profundidad $z_1 = -L$, A es un 0.1 % del valor en superficie.

La siguiente figura ilustra las trayectorias de las partículas de agua en APP, AI y AP:

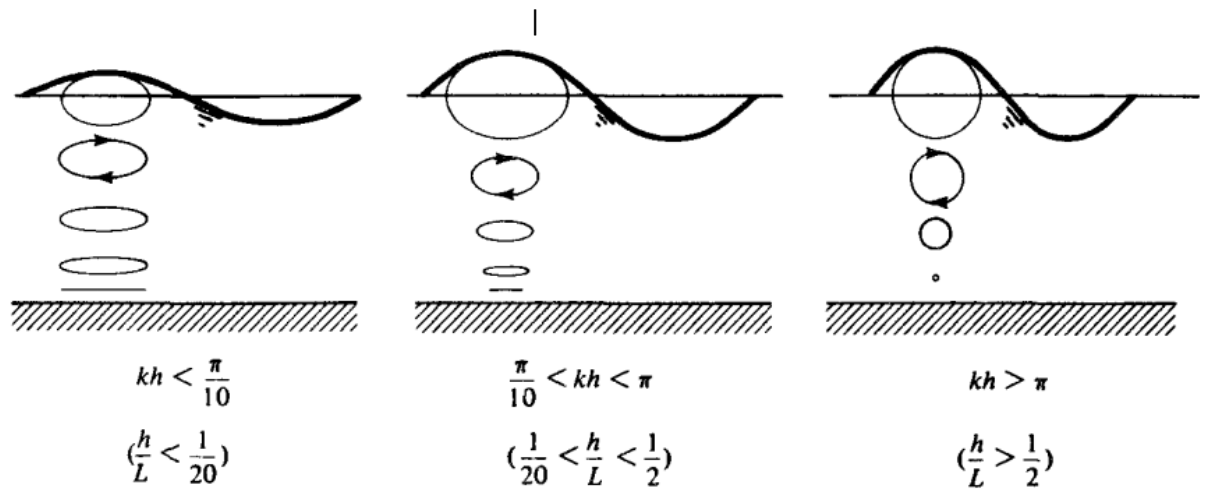


Figure 4.3 Water particle trajectories in progressive water waves of different relative depths.

Figura 8. Trayectorias de la partícula en APP (izquierda), AI (centro) y AP (derecha).

Presión bajo un campo de olas progresivas

Para estudiar el campo de presión recurrimos a la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}[u^2 + w^2] - \frac{\partial \phi}{\partial t} = C(t)$$

Ahora, igualamos la ecuación de Bernoulli entre dos puntos, uno ubicado a una profundidad z y el otro en η , utilizando la expresión linealizada (sin términos cuadráticos) y considerando que en superficie $p = 0$, resulta:

$$\left| \frac{p}{\rho} + gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_z = g\eta - \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

Recordando la DFSBC linealizada =>

$$g\eta = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

Y, por lo tanto:

$$\frac{p}{\rho} = -gz + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Tal que, introduciendo al potencial de velocidades:

$$\phi(x, z, t) = -\frac{Hg \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh(kh)} \operatorname{sen}(kx - \sigma t)$$

$$p = -\rho g z + \rho g \frac{H \cosh k(h+z)}{2 \cosh(kh)} \cos(kx - \sigma t)$$

$$p = -\rho g z + \rho g \eta K_p(z)$$

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t)$$

$$K_p(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)}$$

La expresión recuadrada corresponde al campo de presión total de bajo el efecto de las olas:

- (i) $-\rho g z$ es, desde luego, la presión hidrostática. La cual existe con o sin presencia del oleaje.
- (ii) $\rho g \eta K_p(z)$ se denomina “presión dinámica”, y es debida a la presencia del oleaje.
- (iii) $K_p(z)$ se denomina “factor de respuesta bórico”.
- (iv) La presión dinámica (p_D) tiene dos contribuciones. La más obvia es el sobrepeso o déficit producido por η (debajo de la cresta hay más presión y debajo el valle menos). Si $K_p = 1$, p_D podría explicarse solamente desde el punto de vista hidrostático.
 Pero no => **bajo el campo de olas existen aceleraciones verticales!!!**

$$a_z = -\frac{H}{2} \sigma^2 \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh(kh)} \cos(kx - \sigma t)$$

a_z está desfasado 180° respecto de η .

- (v) En superficie $K_p(z = 0) = 1$, siendo éste su valor máximo.
- (vi) En el fondo $K_p(z = -h) = \frac{1}{\cosh(kh)}$, siendo éste su valor mínimo.

Notar que, si se fondeara un sensor de presión a gran profundidad con el objeto de medir olas, éste puede quedar fuera del efecto o de la influencia del campo orbital, velocidades y presiones. Ver figura de abajo.

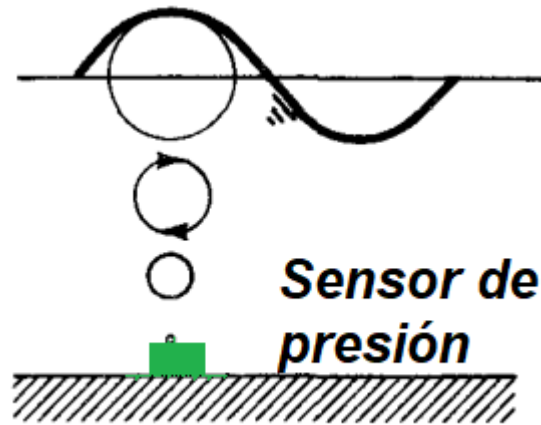


Figura 9. Sensor de presión para medir olas (erróneamente fondeado).

- (vii) Un tema muy interesante es ver que pasa con la presión por encima del nmm (es decir, dentro de la cresta). Para eso recurrimos a una expansión de la expresión de p_D en el entorno de $z = 0$, particularmente queremos saber cuanto vale la presión en $0 < z_1 < \eta$:

$$p(z_1) = [-\rho g z + \rho g \eta K_p(z)]_{z=0} + z_1 \frac{\partial}{\partial z} [-\rho g z + \rho g \eta K_p(z)]_{z=0} + \dots$$

$$p(z_1) = \rho g (\eta - z_1)$$

ya que

$$K_p(z = 0) = 1$$

Observándose que la presión entre la cresta y el nmm es hidrostática.

(viii) En APP =>

$$K_p(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \rightarrow 1$$

Luego,

$$p = \rho g(\eta - z)$$

(ix) En AP =>

$$K_p(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \rightarrow e^{kz}$$

Luego,

$$p = -\rho g z + \rho g \eta e^{kz}$$

(x) Para el caso de una onda monocromática, si se dispone de la serie de tiempo de la presión ($p(t)$), medida en el fondo, la elevación de la superficie libre se obtiene fácilmente:

$$\eta(t) = \frac{p(t) - \rho g h}{\rho g K_p(-h)} = \frac{p(t) - \rho g h}{\rho g \cosh(kh)}$$

Para pensar y discutir en clase

- (1) Una técnica muy utilizada para medir olas es a través del relevamiento de la aceleración. Pero, ¿por qué no se mide la marea con un sensor de aceleraciones? Ayuda: analizar el orden de magnitud de una y otra.
- (2) ¿Las olas, es un problema hidrostático?
- (3) Relacione el concepto de presión dinámica con la ecuación de Navier-Stokes en la dirección z .
- (4) Las olas ¿dejan marcas útiles para los paleontólogos? Ver la figura de abajo.
- (5) ¿Por qué son importantes las olas para algunos seres bentónicos (por ejemplo, esponjas y corales)?



Figura suplementaria. "Ripple marks" en rocas sedimentarias.

Ondas Estacionarias (OE)

Consideremos la función potencial de velocidades de una onda estacionaria (φ_E) formada por la suma de expresiones correspondientes a dos ondas progresivas (φ_{P1} y φ_{P2}), con idénticos períodos, alturas y longitudes de onda, pero que se propagan en direcciones opuestas:

$$\varphi_{P1}(x, z, t) = -\frac{H_P g \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh(kh)} \operatorname{sen}(kx - \sigma t)$$

$$\varphi_{P2}(x, z, t) = +\frac{H_P g \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh(kh)} \operatorname{sen}(kx + \sigma t)$$

$$\varphi_E = \varphi_{P2} + \varphi_{P1} = \frac{H_P g \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh(kh)} [\operatorname{sen}(kx + \sigma t) - \operatorname{sen}(kx - \sigma t)] =$$

$$\varphi_E = \frac{H_P g \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh(kh)} [\cancel{\operatorname{sen} kx \cos \sigma t} + \operatorname{sen} \sigma t \cos kx - \cancel{\operatorname{sen} kx \cos \sigma t} + \operatorname{sen} \sigma t \cos kx] =$$

$$\varphi_E = \frac{H_P g \cosh k(h+z)}{\sigma \cosh(kh)} \cos kx \operatorname{sen} \sigma t$$

Comparando las expresiones de φ_E y φ_P , resulta que:

$$H_P = \frac{H_E}{2} \Rightarrow H_E = 2 H_P$$

Por lo tanto, utilizaremos:

$$\varphi_E = \frac{H_E g \cosh k(h+z)}{2 \sigma \cosh(kh)} \cos kx \sin \sigma t$$

$$\eta_E = \frac{H_E}{2} \cos kx \cos \sigma t$$

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh)$$

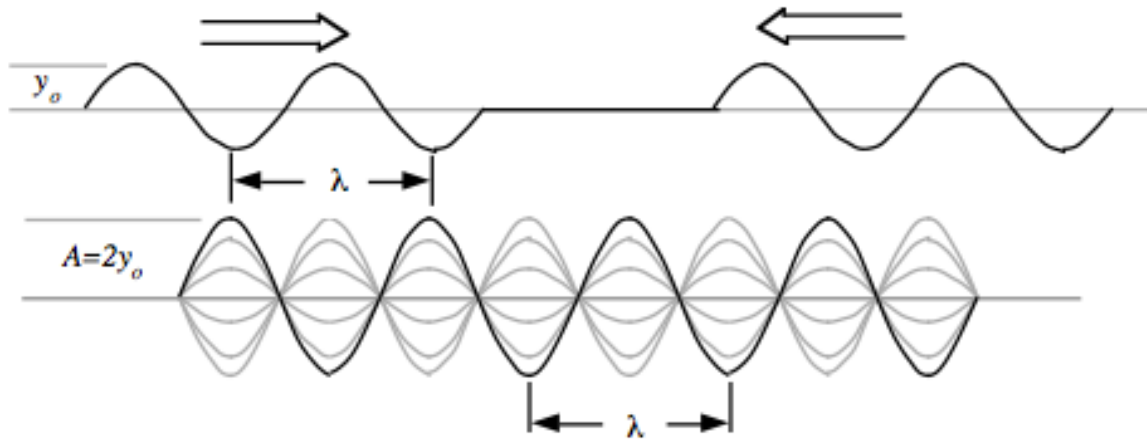


Figura 10. OE. Esquema.

Componentes de la velocidad

$$u(x, z, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = g \frac{Hk}{2\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \sin kx \sin \sigma t$$

$$w(x, z, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -g \frac{Hk}{2\sigma} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh(kh)} \cos kx \sin \sigma t$$

Notar que hemos prescindido del subíndice “E” ($H_E \rightarrow H$). Utilizando la relación de dispersión las expresiones obtenidas pueden escribirse como:

$$u(x, z, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{H}{2} \sigma \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh(kh)} \sin kx \sin \sigma t$$

$$w(x, z, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{H}{2} \sigma \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh(kh)} \cos kx \sin \sigma t$$

Usando las expresiones obtenidas para u y para w podríamos construir la siguiente figura:

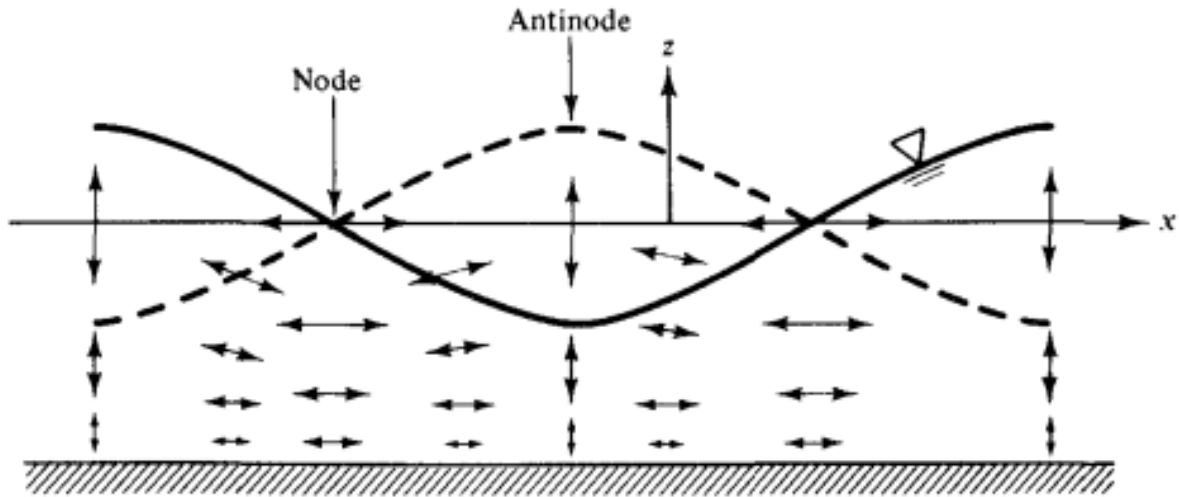


Figure 4.6 Distribution of water particle velocities in a standing water wave.

Figura 11. Velocidades de la partícula de agua. OE.

Notar:

- (i) *Ambas componentes aumentan desde el fondo hacia arriba, al igual que para la onda progresiva,*
- (ii) *Los extremos de ambas componentes ocurren bajo los nodos y los antinodos,*
- (iii) *Tanto u y w dependen de $\sin \sigma t$. Por lo tanto, cuando $\sigma t = n\pi$, la función seno se anula \rightarrow por lo tanto todas las partículas están quietas. Es evidente que en esos instantes la energía cinética es nula (y la potencial máxima).*
- (iv) *Si en el dominio existiera una pared vertical, en ella se debería cumplir la condición de borde cinemática. Por lo tanto, sobre dicha pared $u = 0$. Como se observa en la figura de arriba esa condición se da solamente en las posiciones de los antinodos. En consecuencia, como regla general en un recinto (dársena, puerto, lago, etc.) la onda estacionaria tendrá un antinodo en el contorno vertical.*
- (v) *Más adelante veremos los posibles modos de oscilación de “seiches” en recintos cerrados.*

Aceleración de la partícula de agua

De la misma manera que para la onda progresiva, los términos no lineales pueden ser despreciados:

$$a_x = \frac{du}{dt} \sim \frac{\partial u}{\partial t}; \quad a_z = \frac{dw}{dt} \sim \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$a_x = \frac{H}{2} \sigma^2 \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh(kh)} \sin kx \cos \sigma t$$

$$a_z = -\frac{H}{2} \sigma^2 \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh(kh)} \cos kx \cos \sigma t$$

Si tenemos en cuenta que la elevación de la superficie libre está dada por:

$$\eta = \frac{H}{2} \cos kx \cos \sigma t$$

(i) Observamos que bajo los antinodos (i.e., $kx = \pi$), $a_z \rightarrow$ máximo y $a_x = 0$,

(ii) Contrariamente, bajo los nodos (i.e., $kx = \frac{\pi}{2}$), $a_z = 0$ y $a_x \rightarrow$ máximo,

Desplazamiento de partículas de agua bajo las olas - trayectorias

Razonando de la misma manera que para la onda progresiva tenemos que, para el caso de la onda estacionaria, también podemos suponer que las componentes de la velocidad en el entorno de un punto (alrededor de la posición media de la trayectoria, dada por x_1, z_1 , es la misma que en x_1, z_1 . Por lo tanto, los desplazamientos diferenciales pueden calcularse como:

$$\zeta(x_1, z_1, t) = \int u(x_1 + \zeta, z_1 + \xi, t) dt \rightarrow \int u(x_1, z_1, t) dt$$

$$\xi(x_1, z_1, t) = \int w(x_1 + \zeta, z_1 + \xi, t) dt \rightarrow \int w(x_1, z_1, t) dt$$

$$\zeta = -\frac{H \cosh k(h + z_1)}{2 \sinh(kh)} \cos kx_1 \cos \sigma t = -A \cos \sigma t$$

$$\xi = \frac{H \sinh k(h + z_1)}{2 \sinh(kh)} \sin kx_1 \cos \sigma t = B \sin \sigma t$$

tal que, si hacemos la división miembro a miembro entre ambas expresiones se obtiene:

$$\frac{\xi}{\zeta} = -\frac{B}{A} = -\frac{\sinh k(h + z_1)}{\cosh k(h + z_1)} \frac{\sin kx_1}{\cos kx_1} = -\frac{\tanh k(h + z_1)}{\tan(kx_1)} = m(x_1, z_1)$$

$$\xi = m \zeta = \tan \theta$$

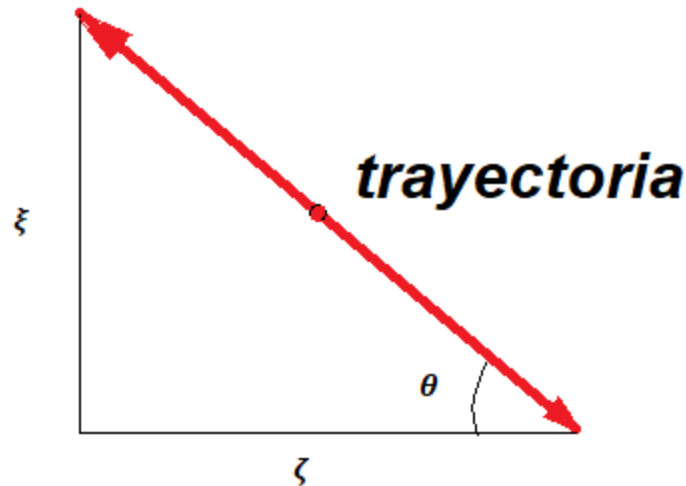


Figura 12. Trayectoria de una partícula. OE. Esquema.

- (i) **En la figura de arriba se observa que la trayectoria de la partícula de agua correspondiente a una OE está representada por un segmento.**
- (ii) **La trayectoria (segmento) está inclinada un ángulo θ respecto al fondo, el cual es $f(x_1, z_1)$ y no de t . La inclinación de la trayectoria no cambia en el tiempo.**
- (iii) **Bajo los antinodos ($kx_1 = \pi$), $\tan(kx_1) = 0 \Rightarrow \tan \theta \rightarrow \infty \Rightarrow \theta \rightarrow 90^\circ$, es decir, la partícula de agua oscila verticalmente. Sobre bordes verticales siempre habrá un antinodo.**
- (iv) **Bajo los nodos ($kx_1 = \frac{\pi}{2}$), $\tan(kx_1) \rightarrow \infty \Rightarrow \tan \theta \rightarrow 0 \Rightarrow \theta \rightarrow 0^\circ$, es decir, la partícula de agua oscila horizontalmente.**
- (v) **En el fondo, independientemente de x , la trayectoria es horizontal $\Rightarrow \tanh k(h + z_1) = 0$ en $z_1 = -h \Rightarrow \theta \rightarrow 0^\circ$**

Seiching

La OE es útil para presentar una primera aproximación de los “seiches” en recintos cerrados como puertos, lagos o mares interiores. Los seiches pueden generarse debido a varios mecanismos, por ejemplo, el viento o un terremoto. Cuando la superficie del cuerpo de agua se perturba y luego el forzante desaparece, el agua continúa oscilando. Para cumplir con las premisas hidrodinámicas sobre los bordes (verticales) siempre encontraremos un antinodo (velocidades y trayectorias verticales). La figura de abajo representa una perturbación atmosférica inicial que fuerza la superficie del agua.

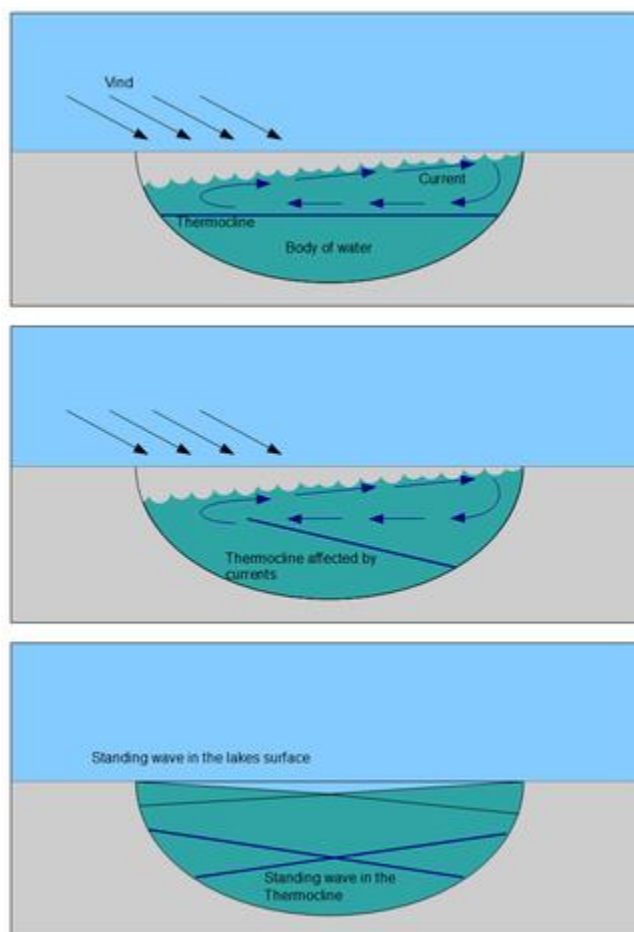


Figura 13. Seiche en una cuenca cerrada.

Hay varias formas posibles de cumplir con los requerimientos hidrodinámicos mencionados. Como se aprecia en la figura de abajo entre ambas paredes puede haber uno, dos, tres o más nodos. Cuando la elevación de la superficie libre se parece a la figura de la izquierda se dice que está dominando el “primer modo de oscilación”, si se parece a la del centro el “segundo modo”, y si es similar al de la derecha, el “tercer modo”.

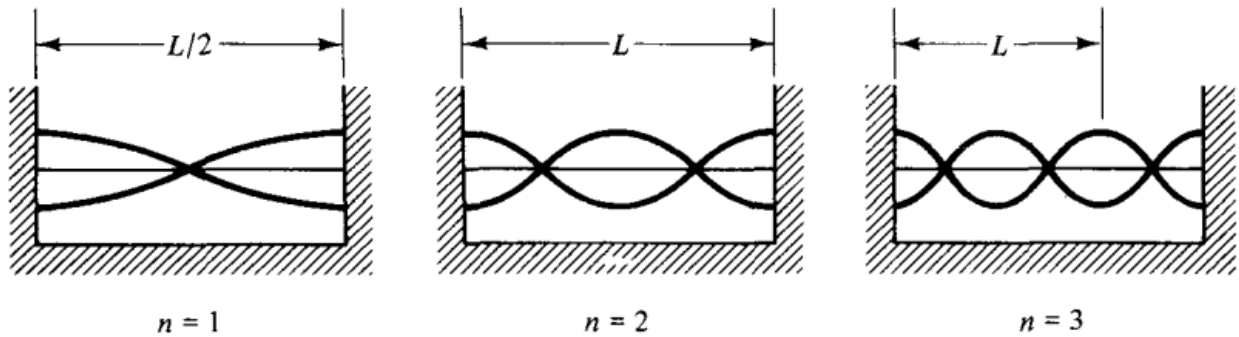


Figura 14. Primer (izquierda), segundo (centro) y tercer (derecha) modo de una OE.

Si observamos al **primer** modo (izquierda), vemos que en la longitud del recinto (l) coincide exactamente con el valor de media longitud de onda:

$$l = \frac{1}{2} L$$

El **segundo** modo muestra que en el recinto entra exactamente una longitud de onda:

$$l = \frac{2}{2} L$$

Y, finalmente, el **tercer** modo vemos que la longitud de onda ocupa las 2/3 partes del recinto:

$$l = \frac{3}{2} L$$

El **numerador** de la fracción representa la **cantidad de nodos (n)** o el número del modo. En términos generales podemos escribir la expresión como:

$$l = \frac{n}{2} L \Rightarrow L = \frac{2l}{n}$$

Puede suponerse muy razonablemente que los seiches ocurren en APP, en consecuencia:

$$C = \sqrt{gh} = \frac{L}{T}$$

$$L = \sqrt{gh} T$$

Igualando las dos expresiones para L:

$$\sqrt{gh} T = \frac{2l}{n}$$

$$T = \frac{2l}{n\sqrt{gh}}$$

Esta expresión es conocida como la “fórmula de Merian”.

Merian, J. R. (1828). Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefäßen [On the motion of drippable liquids in containers] (thesis) (in German). Basel: Schweighauser

Como se observa, la fórmula de Merian es de muy fácil aplicación. Teniendo una estimación de la longitud del recinto (se puede obtener, por ejemplo, de Google Earth) y de la profundidad media de la cuenca (por ejemplo, de una carta náutica o de alguna base global, por ejemplo, GEBCO) se puede obtener el período de los diferentes modos de oscilación.

Ejemplos de aplicación (para hacer en casa):

Obtener el período de oscilación del primer modo para:

(1) El Mar Mediterráneo,

(2) El Mar Negro,

(3) La laguna Mar Chiquita, Pcia. de Córdoba, Argentina)

Los modos pueden verse también en dos dimensiones. Aquí abajo tenemos un gráfico correspondiente a una membrana (no válido para un fluido confinado ¿por qué no?).

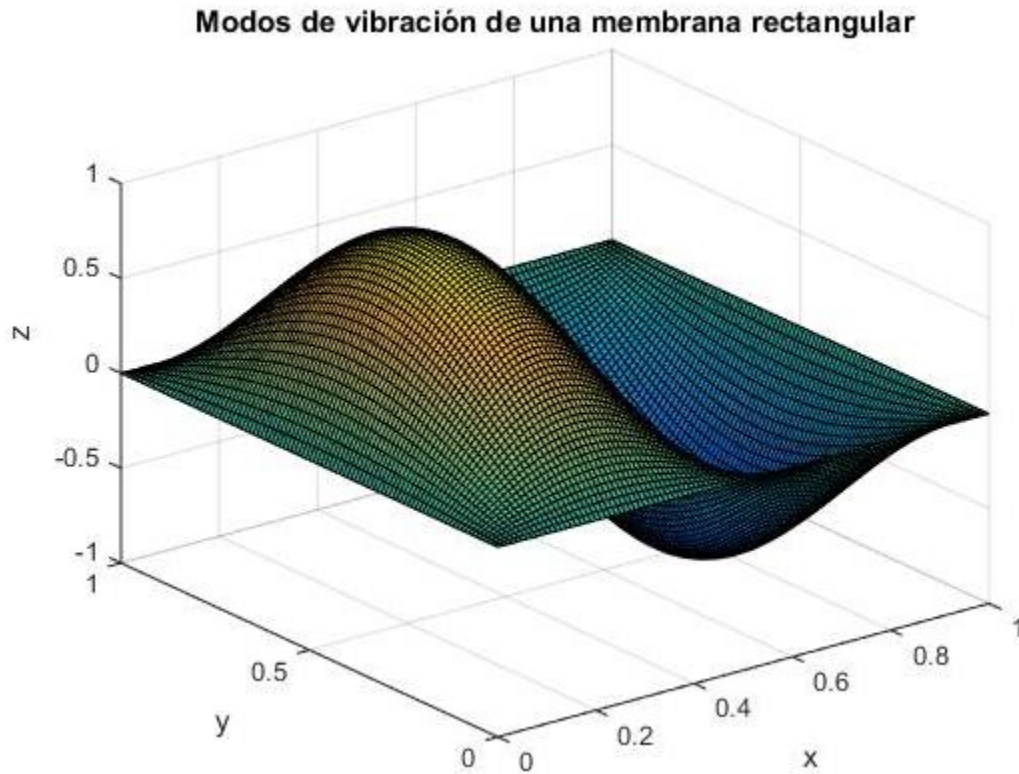


Figura 15. Oscilación bidimensional en una membrana.

Ver la animación en:

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/ondas/membrana_1/membrana_1.html

¿Qué ocurre en el caso 2D cuando hay rotación?

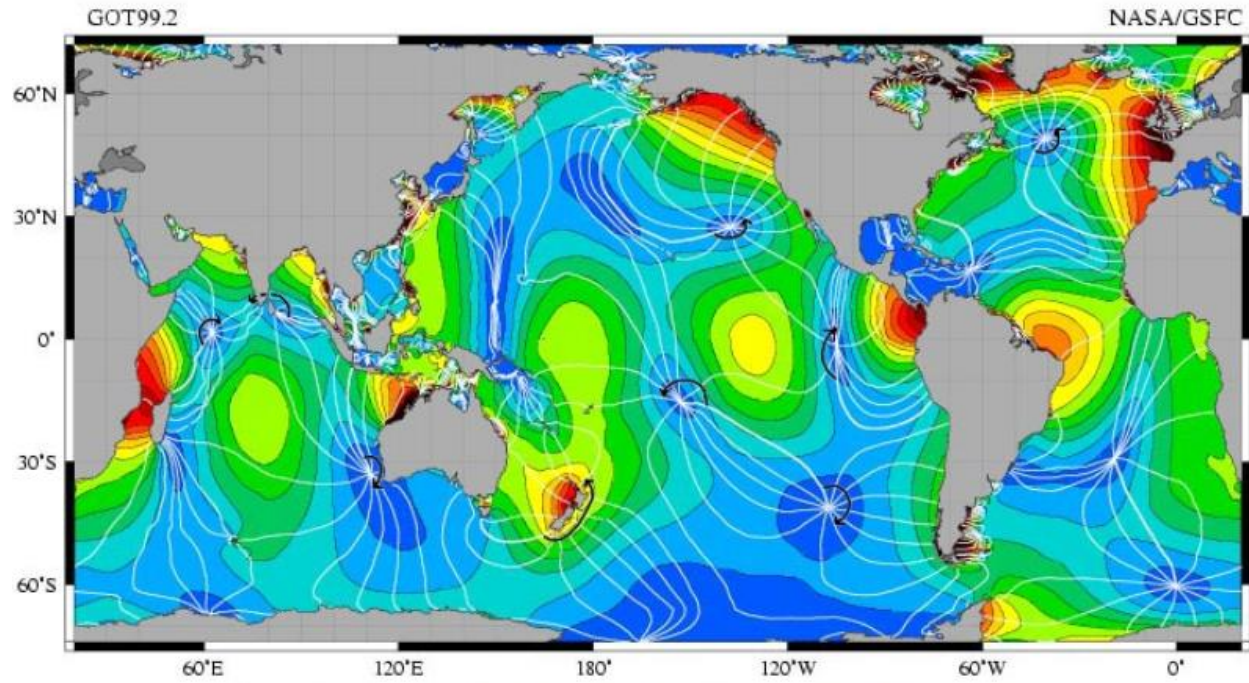


Figura 16. Líneas cotidales e isoamplitudes de la marea.

La marea puede verse como un caso en que los modos normales de oscilación (cada componente), en una Tierra rotante, se propaga rotando en torno a un punto (anfídromo).

Presión bajo un campo de olas estacionarias

Al igual que antes (onda progresiva), para estudiar el campo de presión en el caso de la onda estacionaria recurrimos a la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}[u^2 + w^2] - \frac{\partial \phi}{\partial t} = C(t)$$

Siguiendo los mismos pasos que antes:

- igualamos la ec. de Bernoulli entre dos puntos, uno ubicado a una profundidad z y el otro en η ,
- utilizamos la expresión linealizada (sin términos cuadráticos),
- considerando que en superficie $p = 0$, resulta:

$$p = -\rho gz + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Tal que, introduciendo al potencial de velocidades:

$$\phi(x, z, t) = \frac{Hg \cosh k(h+z)}{2\sigma \cosh(kh)} \cos(kx) \sin(\sigma t)$$

$$p = -\rho gz + \rho g \frac{H \cosh k(h+z)}{2 \cosh(kh)} \cos(kx) \cos(\sigma t)$$

o

$$p = -\rho gz + \rho g \eta K_p(z)$$

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx) \cos(\sigma t)$$

$$K_p(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)}$$

La expresión recuadrada corresponde al campo de presión bajo el efecto de ondas estacionarias. $K_p(z)$ es el mismo factor obtenido para las ondas progresivas. La única diferencia, entre la expresión obtenida para la onda progresiva y la estacionaria, es que η está dada por la expresión recuadrada en amarillo.

Observamos:

- (i) Bajo los nodos ($kx = \frac{\pi}{2}$) la presión es puramente hidrostática.*
- (ii) La presión dinámica está en fase con la superficie libre.*

Fuerza ejercida por la presión sobre una pared vertical (onda estacionaria)

Para el caso de una onda estacionaria, sobre una pared vertical, siempre habrá un antinodo. Veamos el siguiente esquema para un murallón de defensa costera:

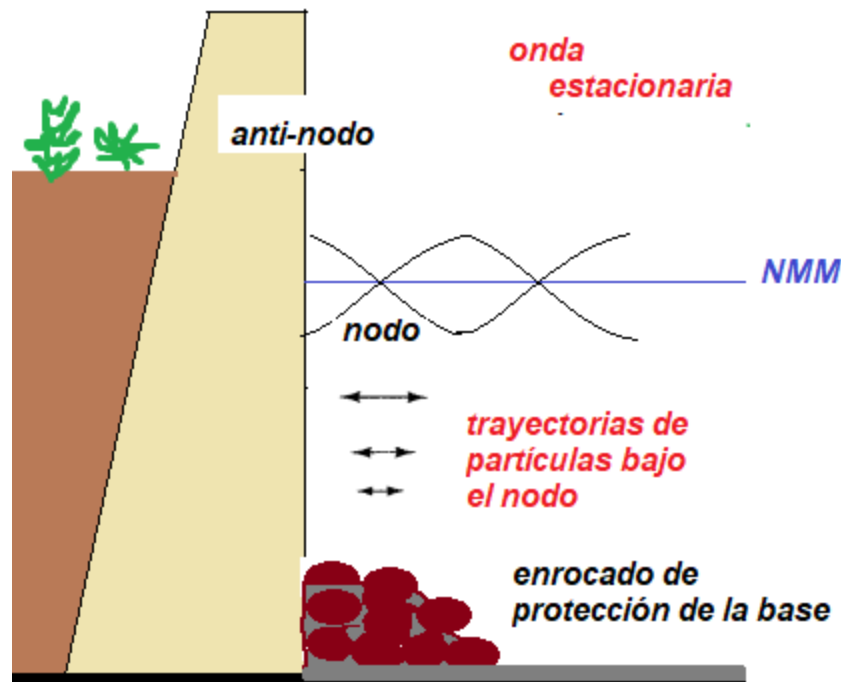


Figura 16. Defensa costera: Paredón vertical y enrocado de protección.

Bajo el nodo adyacente al murallón suele producirse un socavamiento debido a las velocidades horizontales. Por dicha razón se suele proteger el pie de la obra con rocas. Pero la pregunta es ¿cuál será la fuerza resultante sobre el murallón debido a las olas.

La fuerza se calcula integrando la presión, desde el fondo hasta la superficie libre:

$$F = \int_{-h}^{\eta_w} p(z) dz = \int_{-h}^0 \left[-\rho g z + \rho g \eta_w \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh(kh)} \right] dz + \int_0^{\eta_w} \rho g (\eta_w - z) dz =$$

$$\eta_w = \frac{H}{2} \cos(\sigma t)$$

$\cos(kx) = 1$, porque en la pared hay un antinodo. Notar que la segunda integral de la mano derecha es de orden menor respecto a la primera integral. Representa la presión de la ola dentro de la cresta. Integrando, resulta:

$$F = \left[-\rho g \frac{z^2}{2} + \rho g \eta_w \frac{\sinh k(h+z)}{k \cosh(kh)} \right]_{-h}^0 + \left[\rho g \left(z \eta_w - \frac{z^2}{2} \right) \right]_0^{\eta_w} =$$

$$F = \rho g \frac{h^2 + (\eta_w)^2}{2} + \rho g h \frac{\tanh kh}{kh} \eta_w =$$

Observamos que la fuerza tiene dos componentes: una debida a la presión hidrostática y otra a la presión dinámica. La fuerza máxima ocurre cuando η_w es máxima, o sea, $\eta_w = \frac{H}{2}$:

$$F_{MAX} = \rho g \frac{4h^2 + H^2}{8} + \rho g h \frac{H}{2} \frac{\tanh kh}{kh}$$

Para pensar y discutir en clase

- (1) Normalmente en “inlets” la marea se comporta como onda estacionaria. Discutir que ocurre con los sedimentos durante el flujo y el refluo. ¿Estime cómo sería entonces el balance sedimentario después de un ciclo de marea?*
- (2) ¿En el Río de la Plata, la marea se comporta como OP u OE?*
- (3) ¿Cómo puede amplificarse un seiche? Resonancia.*
- (4) ¿Qué ocurre si dos ondas con L y T idénticos, pero con H distintos se propagan con sentido opuesto?*