

# Об алгебраической топологии

## Ещё один способ определения эквивалентности

### Теорема

$f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow A$  и  $f \circ g = id_B$ ,  $g \circ f = id_A$  тогда и только тогда, когда  $f$  биективна и  $f^{-1} = g$

### Доказательство.

- ▶  $f$  инъективна, поскольку если найдутся  $x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)$ , то и  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ , значит,  $id_A(x_1) = id_A(x_2)$ .
- ▶  $f$  сюръективна, поскольку если найдётся  $y \in B$ , что нет  $x : f(x) = y$ , то  $f(g(y)) \neq y$ , т.е.  $id_B(y) \neq y$ .
- ▶  $f^{-1} = g$ , поскольку если  $f(x) = y$ , то  $g(f(x)) = x$ .

Обратное утверждение очевидно из разбора определения.



# Гомеоморфизм

## Определение

Топологические пространства  $X$  и  $Y$  гомеоморфны ( $X \simeq Y$ ), если найдётся непрерывная биективная  $f : X \rightarrow Y$ , для которой  $f^{-1}$  также непрерывна.

## Теорема

Гомеоморфизм сохраняет мощность и компактность.

## Пример

- ▶ Если пространства с дискретной топологией равномощны, то они гомеоморфны (очевидно).
- ▶  $[0, 1]$  не гомеоморфен  $\mathbb{R}$  (не сохраняется компактность).
- ▶  $(0, 1)$  гомеоморфен  $\mathbb{R}$ : пусть  $f(x) = \operatorname{tg}(\pi(x - 0.5))$ .

## Бублик гомеоморфен чашке

Классическая шутка (файл с Wikimedia Commons, [Topology\\_joke.jpg](#), Keenan Crane and Henry Segerman):



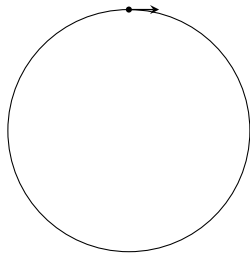
# Гомотопия

## Определение

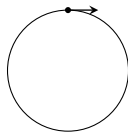
Будем говорить, что непрерывные функции  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  гомотопны ( $f_0 \sim f_1$ ), если существует непрерывная функция  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , что  $h(x, 0) = f_0$  и  $h(x, 1) = f_1$ . Иначе ещё будем обозначать  $h_t(x) := h(x, t)$ .

## Пример

Эти петли гомотопны,  $h_t(x) = t(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$ :



$$h_1(x) = (\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$$



$$h_{0.5}(x) = \frac{1}{2}(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$$

$$h_0(x) = 0(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$$

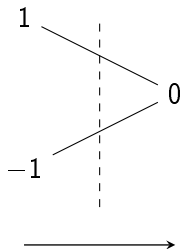
# Гомотопическая эквивалентность пространств

## Определение

Будем называть топологические пространства  $X$  и  $Y$  гомотопически эквивалентными, если найдутся непрерывные функции  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow X$ , что  $g \circ f \sim id_X$  и  $f \circ g \sim id_Y$ .

$$[-1, 1] \sim \{0\}$$

$[-1, 1] \sim \{0\}$ : возьмём  $f(x) := 0, g(x) := 0$ . Очевидно, что  $f(g(y)) \sim id_Y$ : возьмём  $h_t^{\leftarrow}(y) = 0$ . В обратную сторону:  $h_t^{\rightarrow}(x) = x \cdot (t)$ . Тогда  $h_0^{\rightarrow}(x) = 0 = g(f(x))$ , и  $h_1^{\rightarrow}(x) = x = id_X$



# Связности

## Определение

*Пространство стягиваемо, если оно гомотопически эквивалентно точке (топологическому пространству из одного элемента).*

## Пример

$S = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < 1\}$  стягиваемо. Доказательство аналогично написанному выше.

## Определение

*Пространство линейно связно, если любые две точки соединены путём.*

*Пространство односвязно, если оно линейно связно и каждая петля в нём гомотопна точке.*



# Сферы

## Определение

$$S^k := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$$

## Пример

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0, 0 \rangle\} \sim S^1: \text{ пусть } f(\langle x, y \rangle) = \frac{\langle x, y \rangle}{|\langle x, y \rangle|}, \text{ и } g(\langle x, y \rangle) = \langle x, y \rangle.$$

# Произведение петель

## Определение

Рассмотрим пространство  $X$  с отмеченной точкой  $x_0 \in X$  и петли  $f$  и  $g$ , что  $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = x_0$ . Тогда

$$fg(x) = \begin{cases} f(2x), & x < 0.5 \\ g(2x - 1), & x \geq 0.5 \end{cases}$$

## Теорема

Если  $f, g, h$  — петли в пространстве  $\langle X, x_0 \rangle$ , то

1.  $f(gh) \sim (fg)h$
2. Если  $e(x) := x_0$ , то  $fe \sim ef \sim f$
3. Если  $f^{-1}(x) := f(1 - x)$ , то  $ff^{-1} \sim f^{-1}f \sim e$ .

# Фундаментальная группа

## Определение

*Группа петель в пространстве  $\langle X, x_0 \rangle$  — фундаментальная группа  $\pi_1(X, x_0)$ .*

## Теорема

*Если пространство  $X$  линейно-связно, то  $\pi_1(X, x_0)$  изоморфна  $\pi_1(X, x_1)$  при любом выборе  $x_0$  и  $x_1$ .*

# Ветви функции

## Теорема

Множество непрерывных отображений  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$  и множество непрерывных функций  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $f(0) = 0$  и  $f(1) \in \mathbb{Z}$  находятся во взаимно-однозначном соответствии.

## Доказательство.

Рассмотрим некоторое отображение  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$  и рассмотрим  $\alpha(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$ . Заметим, что уравнение  $\alpha(f(x)) = \varphi(\alpha(x))$  позволяет как выразить  $f$  по  $\varphi$  с точностью до прибавления целого значения,  $\alpha^{-1}(t) \in [0, 1)$ :

$$f(x) = \alpha^{-1}(\varphi(\alpha(x))) + C_1(x)$$

так и  $\varphi$  по  $f$ :

$$\varphi(a) = \alpha(f(\alpha^{-1}(a)))$$

Однако, поскольку  $f(0) = 0$  и функция непрерывна, мы можем доопределить  $C_1(x)$  единственным образом.



# Фундаментальная группа $S^1$

## Теорема

Фундаментальная группа  $S^1$  эквивалентна группе целых чисел,  $\mathbb{Z}$ .

## Доказательство.

Возьмём петлю  $\varphi(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$ . Тогда  $\psi : S^1 \rightarrow S^1$  сопоставим петлю  $\psi(\varphi(t))$ .

По теореме выше каждому отображению  $\psi : S^1 \rightarrow S^1$  можно сопоставить  $f_\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда определим отображение группы петель на целые числа так:  $|\psi| = f_\psi(1)$ . Найдём  $|\psi\xi|$ :

$$f_{\psi\xi}(x) = \begin{cases} f_\psi(2x), & x < 0.5 \\ f_\xi(2x - 1) + f_\psi(1), & x \geq 0.5 \end{cases}$$

Заметим, что  $f_{\psi\xi}$  непрерывна и удовлетворяет граничным условиям,  $f_{\psi\xi}(x) = \alpha^{-1}(\psi\xi(\alpha(x))) + C(x)$ . Такая функция единственна, значит, это функция, соответствующая  $\psi\xi$ . Поэтому  $|\psi\xi| = |\psi| + |\xi|$ . Значит, мы задали изоморфизм групп. □

$$S^1 \not\sim [0, 1]$$

### Теорема

Если  $X \sim Y$ , то  $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$ .

### Теорема

$$S^1 \not\sim [0, 1]$$

### Доказательство.

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ , однако  $\pi_1([0, 1]) = \{0\}$ , так как  $[0, 1]$  стягиваемо.



### Теорема

$S^1$  не односвязна.

## $\pi_1$ в Аренде

```
\instance Aut {A : \1-Type} (a : A) : Group (a = a)
```

```
| ide => idp
```

```
| * => *>
```

```
| ide-left => idp_*>
```

```
| ide-right _ => idp
```

```
| *-assoc => *>-assoc
```

```
| inverse => inv
```

```
| inverse-left => inv_*>
```

```
| inverse-right => *>_inv
```

```
\func pi1-1 (X : \1-Type) (x : X) => Aut x
```

```
\func pi1Mult {X : \1-Type} {x : X} (a b : pi1-1 X x) => a * b
```

## Отображение наматывания

```
\data Sphere1
  | base1
  | loop : base1 = base1
  \where \func ploop => path loop

\func wind (x : Int) : base1 = base1
  | pos 0 => idp
  | pos (suc n) => wind (pos n) *> path loop
  | neg (suc n) => wind (neg n) *> inv (path loop)

\func code (x : Sphere1) : \Set0
  | base1 => Int
  | loop i => iso isuc ipred ipred_isuc isuc_ipred i

\func encode (x : Sphere1) (p : base1 = x) : code x => transport code p 0
```



# Аксиома унивалентности

## Определение

$A \simeq B$ , если найдутся  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow A$ ,  $f \circ g = id_B$ ,  $g \circ f = id_A$

Аксиома унивалентности:  $(A \simeq B) \simeq (A = B)$

```
\func Equiv (A B : \Type) => \Sigma (f : A -> B)
                                     (g : B -> A)
                                     (\Pi (x : A) -> g (f x) = x)
                                     (\Pi (y : B) -> f (g y) = y)
```

Из равенства легко получить эквивалентность:

```
\func equality=>equivalence (A B : \Type) (p : A = B) : Equiv A B =>
  transport (Equiv A) p (\lam x => x, \lam x => x, \lam x => idp, \lam x => idp)
```

Обратное же постулирует аксиома унивалентности:

```
\func equivalence=>equality (A B : \Type) (e : Equiv A B) : A = B =>
  path (iso e.1 e.2 e.3 e.4)
```

Доказательство  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

```
\func encode_decode {x : Sphere1} (p : base1 = x) : decode x (encode x p) =  
  | idp => idp
```

```
\func encode_wind (x : Int) : encode base1 (wind x) = x  
  | ...
```

```
\func Loop_S1 : (base1 = base1) = Int =>  
  path (iso (encode base1) wind encode_decode encode_wind)
```

$f : S^1 \rightarrow \text{Int}$ ,  $g : \text{Int} \rightarrow S^1$ , причём  $g(fx) = x$  и  $f(gx) = x$ .