Линейные и уникальные типы

Контекст требует формализации

Напомним правила вывода:

$$\frac{}{\Gamma, \theta \vdash \theta}\,\text{Ax} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\,(\text{Уд.} \to)$$

Что такое контекст?

1. Это множество? Ведь $\alpha, \overset{(1)}{\alpha \to \beta} = \overset{(2)}{\alpha \to \beta}, \alpha$

$$\frac{\overset{(2)}{\frac{}{\alpha, \alpha \to \beta \vdash \alpha \to \beta}\,\text{Ax}} \qquad \overset{(1)}{\frac{}{\alpha \to \beta, \alpha \vdash \alpha}\,\text{Ax}}}{\alpha \to \beta, \alpha \vdash \beta}\,(\text{Уд} \to)$$

2. Разве это множество? Ведь $\alpha, \alpha \neq \alpha$.

$$\frac{\frac{\frac{}{\alpha, \alpha \vdash \alpha}}{\alpha \vdash \alpha \to \alpha}}{\vdash \alpha \to \alpha \to \alpha}$$

Структурные правила

Контекст - список формул.

Перестановка:

$$\frac{\Xi, \Delta, \Sigma, H \vdash \varphi}{\Xi, \Sigma, \Delta, H \vdash \varphi}$$

Сжатие:

$$\frac{\Xi, \delta, \delta \vdash \varphi}{\Xi, \delta \vdash \varphi}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \times \beta}$$

Ослабление:

$$\frac{\Xi \vdash \varphi}{\Xi, \delta \vdash \varphi}$$

Сжатие и ослабление предполагают содержательные действия.

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Delta \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \times \beta}$$

$$\frac{\dfrac{y : \beta \vdash y : \beta}{y : \beta, x : \alpha \vdash y : \beta}}{y : \beta \vdash \lambda x^{\alpha}.y : \alpha \to \beta} \qquad \frac{\dfrac{x : \alpha \vdash x : \alpha \qquad x : \alpha \vdash x : \alpha}{x : \alpha, x : \alpha \vdash (x, x) : \alpha \times \alpha}}{x : \alpha \vdash (x, x) : \alpha \times \alpha}$$

(Сж.)

Два варианта удаления конъюнкции

Вариант 1 (классический):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \beta}$$

λ-исч: проекции

$\pi_1 : \alpha \times \beta \to \alpha$

Вариант 2 (альтернативный):

let $(x, y) = p$ in $x \ldots$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \times \beta \quad \Delta, \alpha, \beta \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}$$

$x : \alpha, y : \beta \vdash x$

$\vdash \lambda p(x, y) . x$

Варианты эквивалентны, но только при наличии структурных правил:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma, \Gamma \vdash \alpha \times \beta}}{\Gamma \vdash \alpha \times \beta} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \alpha \times \beta \quad \dfrac{\dfrac{}{\alpha \vdash \alpha}}{\alpha, \beta \vdash \alpha}}{\Gamma \vdash \alpha}$$

Изоморфизм Карри-Ховарда

- Сжатие — копирование значения
- Ослабление — удаление значения
- Классическая конъюнкция:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}(P) : \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash P : \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}(P) : \beta}$$

- Альтернативная конъюнкция:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \alpha \times \beta \quad \Delta, x : \alpha, y : \beta \vdash E : \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{case}\ P\ \mathsf{of}\ (x, y) \to E : \varphi}$$

Линейная логика

(Филип Вадлер)

Грамматика:

мульт. конъ. · адд. к. · адд. дизъ. · мульт. д. · точно

$$\varphi ::= X \mid \varphi \multimap \varphi \mid \varphi \otimes \varphi \mid \varphi \,\&\, \varphi \mid \varphi \oplus \varphi \mid \varphi \parr \varphi \mid\ !\varphi$$

Два типа контекстов: $\langle\alpha\rangle$ — линейный, $[\beta]$ — интуиционистский

Структурные правила:

$$\frac{\Xi, \Gamma, \Delta, H \vdash \alpha}{\Xi, \Delta, \Gamma, H \vdash \alpha} \qquad \frac{\Gamma, [\alpha], [\alpha] \vdash \beta}{\Gamma, [\alpha] \vdash \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma, [\alpha] \vdash \beta}$$

Аксиомы:

$$\frac{}{[\alpha] \vdash \alpha} \qquad \frac{}{\langle\alpha\rangle \vdash \alpha}$$

Правила для связок

-ечно фабрика

Правила для «конечно» (возможно тиражировать построение α):

$$\frac{[\Gamma] \vdash \alpha}{[\Gamma] \vdash !\alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash !\alpha \qquad \Delta, [\alpha] \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}$$

Линейная импликация:

$$\frac{\Gamma, \langle\alpha\rangle \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \multimap \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \multimap \beta \qquad \Delta \vdash \alpha}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}$$

Правила для связок: конъюнкция и дизъюнкция

Мультипликативная конъюнкция (возможно построить и α и β одновременно):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Delta \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \otimes \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \otimes \beta \qquad \Delta, \langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}$$

Аддитивная конъюнкция (возможно построить α и возможно построить β, что-то одно по нашему выбору):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \beta}$$

Аддитивная дизъюнкция (возможно построить α или возможно построить β, что-то одно по "их" выбору):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta \qquad \Delta, \overset{[\alpha]}{\langle\alpha\rangle} \vdash \varphi \qquad \Delta, \overset{[\beta]}{\langle\beta\rangle} \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}$$

Пример: интуиционистская импликация

Введём обозначение:

$$\alpha \to \beta := \underline{!\alpha} \multimap \beta$$

Заметим, что такая импликация ведёт себя как интуиционистская:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle !\alpha \rangle \vdash !\alpha}\ (\text{Акс.}) \qquad \Gamma, [\alpha] \vdash \beta\ (\text{исх.})}{\Gamma, \langle !\alpha \rangle \vdash \beta}\ (\text{удал. }!) + (\text{перест.})}{\Gamma \vdash !\alpha \multimap \beta}$$

$$\dfrac{(\text{гип.})\ \Gamma \vdash !\alpha \multimap \beta \qquad \dfrac{[\Delta] \vdash \alpha}{[\Delta] \vdash !\alpha}\ (\text{вв. }!)}{\Gamma, [\Delta] \vdash \beta}\ (\text{удал. } \multimap)$$

Вложение остальных интуиционистских связок в линейные

Например, можно так:

$$\alpha \to \beta := !\alpha \multimap \beta \qquad \checkmark$$

$$\alpha \times \beta := \alpha \& \beta \qquad - \qquad !\alpha \otimes !\beta$$

$$\alpha + \beta := !\alpha \oplus !\beta \qquad -$$

Комбинаторный базис BCKW

S verSchmelzung

Карри.

- $B := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ (y\ z)$ (комбинатор Z, Zusammensetzung)
- $C := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ y$ (комбинатор T, verTauschnung)
- $K := \underline{\lambda x.\lambda y.x}$ (Konstanz) $: \alpha \to \beta \to \alpha$ $\quad \alpha, \beta \vdash \alpha$
- $W := \lambda x.\lambda y.x\ y\ y$

осл.

сжатие.

BC — линейная логика (значение нельзя ни удалить, ни скопировать)
BCK — аффинная логика (значение можно удалить, но не скопировать)
$BCKW$ — интуиционистская логика

$\lambda x^{\alpha\to\alpha\to\beta}.\lambda y^{\alpha}.x\ y^{\alpha}\ y^{\alpha} : \beta$ $\quad y$

Почему? Например, $W : (\alpha \to \underbrace{\alpha \to \beta}_{\gamma}) \to (\alpha \to \beta)$.

Уникальные типы

Язык уникальных типов

λc

Роды:

$$\kappa ::= \mathcal{T} \mid \mathcal{U} \mid \star \mid \kappa \to \kappa$$

Типы:

$$\begin{array}{ll}
\mathtt{Int} & : \mathcal{T} \\
\to & : \star \to \star \to \mathcal{T} \\
\circ, \times & : \mathcal{U} \\
\vee, \wedge & : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \to \mathcal{U} \\
\neg & : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \\
\mathtt{Attr} & : \mathcal{T} \to \mathcal{U} \to \star
\end{array}$$

простые типы

признаки уникальн.

↳ лог. опер.

полный тип (прост + уник)

Обозначения:

$$t^u := \mathtt{Attr}\ t\ u$$
$$a \to^u b := \mathtt{Attr}\ (a \to b)\ u$$

Значения:

уник. неуник.

$$E ::= x^{\odot} \mid x^{\otimes} \mid \lambda x.E \mid E\ E$$

Типизация

× — ложь

• — истина.

$\Gamma : x \to t^u$

$fv : x \to \mathcal{U}$

Правила типизации имеют такой вид:

$$\Gamma \vdash E : \tau|_{fv}$$

Здесь Γ сопоставляет переменным типы рода $\star$. fv сопоставляет переменным типы рода $\mathcal{U}$.

Правила вывода:

$$\frac{}{\Gamma, x : t^u \vdash x^{\odot} : t^u|_{x:u}} \qquad \frac{}{\Gamma, x : t^{\times} \vdash x^{\otimes} : t^{\times}|_{x:\times}}$$

(Акс.)

$$\frac{\Gamma, x : a \vdash E : b|_{fv}}{\Gamma \vdash \lambda x.E : a \to^{\bigvee fv'} b|_{fv'}} \; fv' := fv \backslash \{x : \tau\} \qquad \frac{\Gamma \vdash E_1 : a \to^u b|_{fv_1} \qquad \Gamma \vdash E_2 : a|_{fv2}}{\Gamma \vdash E_1 \; E_2 : b|_{fv_1 \cup fv_2}}$$

$\lambda \overset{\times}{x}. x + x$

$\lambda x. f(x)$

Смысл булевский выражений

Будем считать уникальность истиной, а неуникальность — ложью. И рассмотрим, например, функцию fst:

$$\texttt{fst} : (t^u, s^v)^{w \vee u} \to t^u$$

Это то же самое, что и

$$\texttt{fst} : (t^u, s^v)^w \to t^u, w \leqslant u$$

Однако, подобные выражения могут быть разрешены с помощью *булевской унификации*.

Где применяются линейные/уникальные типы

Ручное распределение памяти:

C++

```
void compute() {
    char* x = new char[1024];
    char* y = x;
    y[10] = 'a';
    delete x;       // delete y; нельзя! будут ошибки.
}
```

руками

Автоматическое распределение памяти (сборка мусора, подсчёт ссылок):

Java

```
public void compute() {
    int[] x = new int[1024];
    int[] y = x;
    x[10] = 15;
}
```

GC в рт-

Rust

```
fn compute() {
    let x = Arc::new("abcde");
    let y = x.clone();
}
```

Подсчёт ссылок

Rust, Clean, Ghc

А давайте посчитаем количество ссылок при компиляции. Линейный тип всегда существует в единственном экземпляре.