Теоретические домашние задания

Теория типов, ИТМО, совместно M3232-M3239 и M3332-M3339, весна 2024 года

Домашнее задание №1: лямбда исчисление — бестиповое и просто-типизированное

1. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$\begin{array}{l} L := \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator) \\ R := LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL \end{array}$$

   В данном определении терм R является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм F, выполнено $R\ F =_\beta F\ (R\ F)$.

   (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.

   (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 33 параметрами и осмысленной русской фразой в терме L; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.

2. Найдите необитаемый тип в просто-типизированном лямбда-исчислении (напомним: тип τ называется необитаемым, если ни для какого P не выполнено $\vdash P : \tau$).

3. Напомним определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных. Также напомним:

$$\begin{array}{l} S := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ (y\ z) \\ K := \lambda x.\lambda y.x \\ I := \lambda x.x \end{array}$$

   Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что $X =_\beta P$. Будем говорить, что комбинатор P *выражает* комбинатор X в базисе SK.

   Косвенным аргументом (пояснением, но не доказательством!) в пользу этой теоремы являются два следующих соображения:

   - теорема о замкнутости ИфИИВ: если $\vdash \varphi$, то $\vdash_\to \varphi$, значит, если выражение имеет тип, то этот тип можно получить с помощью доказательства в стиле Гильберта;
   - типы комбинаторов S и K — это, соответственно, вторая и первая схемы аксиом.

   Докажите тип следующих выражений как логическое высказывание с помощью гильбертового вывода и, пользуясь этим доказательством как источником вдохновения, выразите комбинаторы в базисе SK:

   (a) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.y$

   (b) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.yxz$

   (c) $\overline{1}$

   (d) Not

   (e) Xor

   (f) InR

4. Покажите на основании следующего преобразования полноту комбинаторного базиса SKI (проведите полное рассуждение по индукции, из которого будет следовать отсутствие в результате других термов, кроме SKI, бета-эквивалентность и определённость результата для всех комбинаторов σ):

$$[\sigma] = \begin{cases} x, & \sigma = x \\ [\varphi]\ \ [\psi], & \sigma = \varphi\ \psi \\ K\ [\varphi], & \sigma = \lambda x.\varphi, \quad x \notin FV(\varphi) \\ I, & \sigma = \lambda x.x \\ [\lambda x.\,[\lambda y.\varphi]]\,, & \sigma = \lambda x.\lambda y.\varphi, \quad x \in FV(\varphi), x \neq y \\ S\ [\lambda x.\varphi]\ [\lambda x.\psi], & \sigma = \lambda x.\varphi\ \psi, \quad x \in FV(\varphi) \cup FV(\psi) \end{cases}$$

   Заметим, что данные равенства объясняют смысл названий комбинаторов:

S	verSchmelzung, «сплавление»
K	Konstanz
I	Identität

5. Покажите, что следующая система комбинаторов образует полный базис в бестиповом лямбда-исчислении, но соответствующая им система аксиом в исчислении гильбертового типа не образует $\lambda_{\to}$

6. Напомним определение аппликативного порядка редукции: редуцируется самый левый из самых вложенных редексов. Например, в случае выражения $(\lambda x.I\ I)\ (\lambda y.I\ I)$ самые вложенные редексы — применения $I\ I$:

$$(\lambda x.\underline{I\ I})\ (\lambda y.\underline{I\ I})$$

и надо выбрать самый левый из них:

$$(\lambda x.\underline{I\ I})\ (\lambda y.I\ I)$$

   (a) Проведите аппликативную редукцию выражения 2 2.

   (b) Докажите или опровергните, что параллельная бета-редукция из теоремы Чёрча-Россера не медленнее (в смысле количества операций для приведения выражения к нормальной форме), чем нормальный порядок редукции с мемоизацией.

   (c) Найдите лямбда-выражение, которое редуцируется медленнее при нормальном порядке редукции, чем при аппликативном, даже при наличии мемоизации.

7. Напомним определение бета-редукции. $A \to_\beta B$, если:

   - $A \equiv (\lambda x.P)\ Q$, $B \equiv P\ [x := Q]$, при условии свободы для подстановки;
   - $A \equiv (P\ Q)$, $B \equiv (P'\ Q')$, при этом $P \to_\beta P'$ и $Q = Q'$, либо $P = P'$ и $Q \to_\beta Q'$;
   - $A \equiv (\lambda x.P)$, $B \equiv (\lambda x.P')$, и $P \to_\beta P'$.

   (a) Найдите лямбда-выражение, бета-редукция которого не может быть произведена из-за нарушения правила свободы для подстановки (для продолжения редукции потребуется производить переименование связанных переменных). Поясните, какое ожидаемое ценное свойство будет нарушено, если ограничение правила проигнорировать.

   (b) Покажите, что недостаточно наложить требования на исходное выражение, и свобода для подстановки может быть нарушена уже в процессе редукции исходно полностью корректного лямбда-выражения.

8. Будем говорить, что выражение A находится в *слабой заголовочной нормальной форме* (WHNF), если оно не имеет вид $A \equiv (\lambda x.P)\ Q$ (то есть, самый верхний терм его не является редексом). Выражение находится в *заголовочной нормальной форме* (HNF), когда его верхний терм — не редекс и не лямбда-абстракция с бета-редексами в теле.

   (a) Приведите нормальным порядком редукции выражение 2 2 в СЗНФ.

   (b) Приведите нормальным порядком редукции выражение $Y\ (\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ 1\ (x \cdot f(x-1)))\ 3$ в СЗНФ.

   (c) Верно ли, что «нормальность» формы выражения может в процессе редукции только усиливаться (никакая — слабая заголовочная Н.Ф. — заголовочная Н.Ф. — нормальная форма)?

9. Как мы уже разбирали, $\nvdash x\ x : \tau$ в силу дополнительных ограничений правила

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}\ x \notin FV(\Gamma)$$

   Найдите лямбда-выражение N, что $\nvdash N : \tau$ в силу ограничений правила

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.N : \sigma \to \tau}\ x \notin FV(\Gamma)$$