Теория типов

О курсе

Краткое содержание вступительного занятия

1. История вопроса: что вообще изучает теория типов, типы в математике, типы в лямбда-исчислении. Краткое повторение материала, знание которого ожидается от участников.
2. Содержание текущего курса: изоморфизм Карри-Ховарда и его применение в программировании и математике
3. Особенности преподавания.

Типы в математике

- Раздел не претендует на полноту, предназначен для построения контекста.
- Парадокс Рассела: $\{ x \mid x \notin x \}$. Напрашивается вопрос: разве эта запись законна? $a \in b$ — ожидаем, что слева элемент, а справа множество.
- A. N. Whitehead, B. Russel, Principa Mathematica (Cambridge University Press, 1910-1913) — один из первых примеров формализации математики в рамках программы Гильберта, включает запрет таких записей с помощью введения типов. Всем пропозициональным функциям («предикатам») теории присваиваем тип — и определяем правила построения формул с учётом типов.
- По силе P.M. примерно соответствует аксиоматике Цермело, но менее удобна из-за явных типов. Аксиоматика ZFC явных типов не имеет, но позволяет приписать множествам схожую характеристику («ранг»). В ZFC также невозможны множества вида $\{ x \mid x \notin x \}$, хотя запрет не формулируется синтаксически.
- Не пытаясь охватить всю тему про типы, сконцентрируемся только на типах в лямбда-исчислении.

Лямбда-исчисление: история возникновения

- Готлоб Фреге, 1893 год, «карринг». Двуместную функцию $a + b$ можно представить как композицию двух одноместных функций:

$$f(a) = \lambda x.a + x \qquad a + b = f(a)(b)$$

- Моисей Шейнфинкель, 1924, комбинаторы:

$$Kab = a \qquad Sabc = ac(bc)$$

- Алонзо Чёрч, 1932, лямбда-исчисление:

$$(\lambda x.M) = M[x := N]$$

- Алонзо Чёрч, 1932, 1934: формальная арифметика сложна (8 аксиом + схема аксиом индукции, исчисление предикатов...). В λ-исчислении арифметика выражается естественно. Попробуем λ-исчисление расширить до логики?
- С.Клини и Б.Россер, 1935, противоречие (модификация парадокса Ришара).

Краткое изложение формализма, напоминание

$$\Lambda ::= (\lambda x.\Lambda)|(\Lambda\ \Lambda)|x$$

Мета-язык:

- Мета-переменные:
  - $A \dots Z$ — мета-переменные для термов.
  - x, y, z — мета-переменные для переменных.
- Правила расстановки скобок аналогичны правилам для кванторов:
  - Лямбда-выражение ест всё до конца строки
  - Аппликация левоассоциативна

Пример

- $a\ b\ c\ (\lambda d.e\ f\ \lambda g.h)\ i \equiv \Big(\Big(((a\ b)\ c)\ \Big(\lambda d.((e\ f)\ (\lambda g.h))\Big)\Big)\ i\Big)$
- $0 := \lambda f.\lambda x.x; \quad (+1) := \lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x); \quad (+2) := \lambda x.(+1)\ ((+1)\ x)$

Альфа-эквивалентность

1. $A \equiv x$, $B \equiv y$, $x \equiv y$;
2. $A \equiv P_a Q_a$, $B \equiv P_b Q_b$ и $P_a =_\alpha P_b$, $Q_a =_\alpha Q_b$;
3. $A \equiv (\lambda x.P)$, $B \equiv (\lambda y.Q)$, $P[x := t] =_\alpha Q[y := t]$, где t не входит в A и B.

Лемма

$$\lambda a.\lambda b.a\ b =_\alpha \lambda b.\lambda a.b\ a$$

Доказательство.

$$\begin{array}{rcll} t & =_\alpha & t & \text{Правило 1} \\ s & =_\alpha & s & \text{Правило 1} \\ t\ s & =_\alpha & t\ s & \text{Правило 2} \\ \lambda b.(t\ b) & =_\alpha & \lambda a.(t\ a) & \text{Правило 3} \\ \lambda a.\lambda b.(a\ b) & =_\alpha & \lambda b.\lambda a.(b\ a) & \text{Правило 3} \end{array}$$

$\square$

Бета-редукция

Определение

Терм вида $(\lambda x.P)\ Q$ *— бета-редекс.*

Определение

$A \to_\beta B$, *если:*

1. $A \equiv (\lambda x.P)\ Q$, $B \equiv P\ [x := Q]$, *при условии свободы для подстановки;*
2. $A \equiv (P\ Q)$, $B \equiv (P'\ Q')$, *при этом* $P \to_\beta P'$ *и* $Q = Q'$, *либо* $P = P'$ *и* $Q \to_\beta Q'$;
3. $A \equiv (\lambda x.P)$, $B \equiv (\lambda x.P')$, *и* $P \to_\beta P'$.

Пример

$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda n.n) \to_\beta (\lambda n.n)\ (\lambda n.n) \to_\beta \lambda n.n$

Пример

$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x) \to_\beta (\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$

Бета-эквивалентность, неподвижная точка

Определение

$(=_\beta)$ — *транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание* $(\to_\beta)$.

Теорема (следствие из теоремы Чёрча-Россера)

Если $A =_\beta B$, *то найдётся* C, *что* $A \twoheadrightarrow_\beta C$ *и* $B \twoheadrightarrow_\beta C$.

То есть, можно интуитивно воспринимать $A =_\beta B$ как вычислительное равенство, равенство результатов.

Теорема

Для любого терма N *найдётся такой терм* R, *что* $R =_\beta N\ R$.

Доказательство.

Пусть $Y = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$. Тогда $R := Y\ N$:

$$Y\ N =_\beta (\lambda x.N\ (x\ x))\ (\lambda x.N\ (x\ x)) =_\beta N\ ((\lambda x.N\ (x\ x))\ (\lambda x.N\ (x\ x)))$$

$\square$

Подробнее о лямбда-исчислении как логике

«Анахроническое» изложение, пересказ современным языком.

- В лямбда-исчисление введём логический символ $\rightarrow$. Все формулы исчисления будем считать логическими высказываниями. Добавим логические аксиомы. Ожидаем такое: $\vdash 0+1=1$
- Получение противоречия: определим минимальные требования к исчислению. Очевидно, хотя бы следующее мы должны уметь доказывать:
  1. $\vdash A \rightarrow A$
  2. $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
  3. Если $\vdash A$ и $\vdash A \rightarrow B$, то $\vdash B$.
- Менее очевидное: $\vdash A \rightarrow B$, если $A =_\beta B$. Мотивация: если $0+1 =_\beta 1$, то $X(0+1)$ всегда можно заменить на $X(1)$, следует из определения равенства по Лейбницу.
- Заметим: $0+1 \twoheadrightarrow_\beta 1$, поэтому $\vdash (1=1) \rightarrow (0+1=1)$. Из чего уже видны возможные контуры исчисления.

Парадокс Карри

$\Phi_\alpha := Y\ (\lambda x.x \rightarrow \alpha)$
Редуцируя Φ_α, получаем:

$$\Phi_\alpha \twoheadrightarrow_\beta (\lambda x.x \rightarrow \alpha)\ (Y\ (\lambda x.x \rightarrow \alpha)) \twoheadrightarrow_\beta \Phi_\alpha \rightarrow \alpha$$

И доказательство:

1) $\Phi_\alpha \rightarrow (\Phi_\alpha \rightarrow \alpha)$	$(A \rightarrow A)$ и $\Phi_\alpha =_\beta \Phi_\alpha \rightarrow \alpha$
2) $(\Phi_\alpha \rightarrow \Phi_\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\Phi_\alpha \rightarrow \alpha)$	Так как $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
3) $\Phi_\alpha \rightarrow \alpha$	MP 1, 2
4) $(\Phi_\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \Phi_\alpha$	$(A \rightarrow A)$ и $\Phi_\alpha \rightarrow \alpha =_\beta \Phi_\alpha$
5) Φ_α	MP 3, 4
6) α	MP 5, 3

Собственно парадокс Карри: «Если данное высказывание верно, то луна сделана из зелёного сыра». То есть,

$$\Phi_\alpha \leftrightarrow (\Phi_\alpha \rightarrow \alpha)$$

Лямбда-исчисление как вычислительная модель

- Из исчисления А. Чёрч выделил некоторую часть и доказал её непротиворечивость: Church, A. (1935). “A Proof of Freedom from Contradiction.” Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 21(5):275–281.
- Но затем предложил смотреть на исчисление как на вычислительную модель: Church, A. (1936). “An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory.” American Journal of Mathematics, 58(2):345–363, 1936.
- Начала современного понимания теории типов были заложены в этой работе: Church, A. (1940). A formulation of the simple theory of types, Journal of Symbolic Logic 5, pp. 56–68.
- Применение типов в лямбда-исчислении позволяет достичь схожих результатов с Principa Mathematica: синтаксическое ограничение допустимых формул, исключение части формул из исчисления. Мы начнём с краткого повторения просто-типизированного лямбда-исчисления и покажем невыразимость в нём Y-комбинатора.

Импликационный фрагмент ИИВ

Рассмотрим подмножество ИИВ, со следующей грамматикой:

$\Phi ::= x \mid \Phi \to \Phi \mid (\Phi)$

Добавим в него схему аксиом

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

Правило введения импликации:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$

Правило удаления импликации:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Theorem

Если Γ и φ состоят только из импликаций, то $\Gamma \vdash \varphi$ равносильна $\Gamma \vdash_{\to} \varphi$.

Пример

Пример

Докажем $\vdash \varphi \to \psi \to \varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi, \psi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \psi \to \varphi}\ (\textit{Введение импликации})}{\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)}\ (\textit{Введение импликации})$$

Пример

Докажем $\alpha \to \beta \to \gamma,\ \alpha,\ \beta \vdash \gamma$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \to \beta \to \gamma,\ \alpha,\ \beta \vdash \alpha \to \beta \to \gamma \qquad \alpha \to \beta \to \gamma,\ \alpha,\ \beta \vdash \alpha}{\alpha \to \beta \to \gamma,\ \alpha,\ \beta \vdash \beta \to \gamma} \qquad \alpha \to \beta \to \gamma, \alpha,\ \beta \vdash \beta}{\alpha \to \beta \to \gamma,\ \alpha,\ \beta \vdash \gamma}$$

Просто типизированное по Карри λ-исчисление

Определение

Тип в просто типизированном λ-исчислении по Карри — это либо маленькая греческая буква $(\alpha, \phi, \theta, \dots)$, либо импликация $(\theta_1 \rightarrow \theta_2)$
Таким образом, $\Theta ::= \theta_i | (\Theta \rightarrow \Theta)$
Импликация при этом считается правоассоциативной операцией.

Определение

Язык просто типизированного λ-исчисления — это язык бестипового λ-исчисления.

Определение

Контекст Γ — это список выражений вида $A : \theta$, где A — λ-терм, а θ — тип.

Исчисление по Карри

Аксиома

$$\frac{}{\Gamma, x : \theta \vdash x : \theta} \text{ если } x \text{ не входит в } \Gamma$$

Правило типизации абстракции

$$\frac{\Gamma, x : \varphi \vdash P : \psi}{\Gamma \vdash (\lambda\, x.\ P) : \varphi \to \psi} \text{ если } x \text{ не входит в } \Gamma$$

Правило типизации аппликации:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash Q : \varphi}{\Gamma \vdash PQ : \psi}$$

Мы допускаем в исчислении только те лямбда-выражения, которые имеют тип.

Пример

Докажем $\vdash \lambda\, x.\, \lambda\, y.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{x : \alpha, y : \beta \vdash x : \alpha}{x : \alpha \vdash \lambda\, y.\, x : \beta \to \alpha}\ \text{(Правило типизации абстракции)}}{\vdash \lambda\, x.\, \lambda\, y.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha}\ \text{(Правило типизации абстракции)}$$

Пример

Докажем $\vdash \lambda\, x.\, \lambda\, y.\, x\, y : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \alpha \to \beta, y : \alpha \vdash x : \alpha \to \beta \qquad x : \alpha \to \beta, y : \alpha \vdash y : \alpha}{x : \alpha \to \beta, y : \alpha \vdash x\, y : \beta}}{x : \alpha \to \beta \vdash \lambda\, y.\, x\, y : \alpha \to \beta}}{\vdash \lambda\, x.\, \lambda\, y.\, x\, y : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta}$$

Отсутствие типа у Y-комбинатора

Теорема

Y-комбинатор не типизируется в просто типизированном по Карри λ-исчислении.

Докажем от противного. Есть вывод типа выражения $x\ x$. Единственный вариант типизации:

$$\frac{\Gamma \vdash x : \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash x : \varphi}{\Gamma \vdash xx : \psi}$$

Рассмотрим типизацию $\Gamma \vdash x : \varphi \to \psi$ и $\Gamma \vdash x : \varphi$. x типизируется неизбежно следующим образом.

$$\frac{\Gamma', x : \varphi \to \psi, x : \varphi \vdash x : \varphi \to \psi \qquad \Gamma', x : \varphi \to \psi, x : \varphi \vdash x : \varphi}{\Gamma', x : \varphi \to \psi, x : \varphi \vdash xx : \psi}$$

В Γ переменная x встречается два раза.

Изоморфизм Карри-Ховарда

Просто типизированное λ-исчисление	Импликативный фрагмент ИИВ
$\Gamma, x : \theta \vdash x : \theta$	$\Gamma, \varphi \vdash \varphi$
$\dfrac{\Gamma, x : \varphi \vdash P : \psi}{\Gamma \vdash (\lambda\, x.\ P) : \varphi \to \psi}$	$\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$
$\dfrac{\Gamma \vdash P : \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash Q : \varphi}{\Gamma \vdash PQ : \psi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$

Просто типизированное λ-исчисление	Импликативный фрагмент ИИВ
Тип	Высказывание
Терм	Доказательство высказывания
Проверка типа	Проверка доказательства на корректность
Обитаемый тип	Доказуемое высказывание

Часть 2. Анонс содержания курса

- Формальный материал до этого момента должен быть всем знаком — выше были соображения по поводу истории вопроса и напоминание общих определений. Если встретилось что-то неизвестное, задавайте вопросы сами.
- С этого момента начнётся нечто новое, сейчас будут анонсированы основные темы курса.
- Курс строится вокруг изоморфизма Карри-Ховарда — изоморфизма между матлогом и лямбда-исчислением. Он состоит из обсуждения двух частей: что мы можем получить из матлога для программирования, и что можем получить для матлога из программирования.

($\Rightarrow$): изучение языков программирования

- Малая выразительная сила просто-типизированного лямбда исчисления (полиномы).
- Добавим дополнительные конструкции (например, кванторы).
- Логика первого порядка: зависимые типы. Какой тип у `sprintf`?

  ```
  sprintf "%d" : int -> string
  sprintf "%d + %d" : int*int -> string
  ```

  Например, Идрис позволяет тип выписать.
- Логика второго порядка: генерики.

Программа	Доказывает
`let id x = x`	$\forall x.x \rightarrow x$

- Классические функциональные языки — типовая система Хиндли-Милнера (разрешимый вариант системы F, соответствующей логике второго порядка).
- Алгоритмы вывода типов, анализ и верификация программ — используют матлог.

$(\Leftarrow)$: изучение логики и доказательств через написание программ

- Пер Мартин-Лёф, Intuonistic Type Theory: версии 1972 и 1979.
- Множество расширений и вариантов.
- Такие инструменты как Coq, Agda, Lean используют варианты этой теории.
- Мы будем рассматривать некоторую родственную теорию, гомотопическую теорию типов.

Гомотопическая теория типов

- Центральный вопрос — что такое равенство.
- Классический матлог: это предикат, удовлетворяющий свойствам.
- Однако, свойства обычно слишком общие (класс эквивалентности?). Интуитивно хочется большего, равенство не всегда просто эквивалентность.
- Изоморфизм Карри-Ховарда-Воеводского:

Логика	λ-исчисление	Топология
Утверждение	Тип	Пространство
Доказательство	Значение	Точка в пространстве
Предикат $(=)$	Зависимый тип $(=)$	Путь между точками

- Реализация: кубическая теория типов, Аренд.

Часть 3. Построение курса

1. Аналогично с матлогом, будет разделение на теорию и практику.
2. Теория: знание определений, идей, теорем.
3. Практика: лабы на доказательства теорем с использованием языка Аренд, возможны дополнительные околокомпиляторные лабы.
4. Для закрытия предмета надо набрать баллы практическими заданиями и сдать зачёт/экзамен.