

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, совместно М3232-М3239 и М3332-М3339, весна 2024 года

Домашнее задание №1: лямбда исчисление — бестиповое и просто-типизированное

1. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$\begin{aligned} L &:= \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr.r(\text{this is a fixed point combinator}) \\ R &:= LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL \end{aligned}$$

В данном определении терм R является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм F , выполнено $R F =_{\beta} F (R F)$.

- (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.
(b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 33 параметрами и осмысленной русской фразой в терме L ; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.
2. Найдите необитаемый тип в просто-типизированном лямбда-исчислении (напомним: тип τ называется необитаемым, если ни для какого P не выполнено $\vdash P : \tau$).

3. Напомним определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных. Также напомним:

$$\begin{aligned} S &:= \lambda x.\lambda y.\lambda z.x z (y z) \\ K &:= \lambda x.\lambda y.x \\ I &:= \lambda x.x \end{aligned}$$

Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что $X =_{\beta} P$. Будем говорить, что комбинатор P *выражает* комбинатор X в базисе SK .

Косвенным аргументом (пояснением, но не доказательством!) в пользу этой теоремы являются два следующих соображения:

- теорема о замкнутости ИФИИВ: если $\vdash \varphi$, то $\vdash_{\rightarrow} \varphi$, значит, если выражение имеет тип, то этот тип можно получить с помощью доказательства в стиле Гильберта;
- типы комбинаторов S и K — это, соответственно, вторая и первая схемы аксиом.

Докажите тип следующих выражений как логическое высказывание с помощью гильбертового вывода и, пользуясь этим доказательством как источником вдохновения, выразите комбинаторы в базисе SK :

- (a) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.y$
(b) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.yxz$
(c) \bar{I}
(d) Not
(e) Xor
(f) InR

4. Покажите на основании следующего преобразования полноту комбинаторного базиса SKI (проведите полное рассуждение по индукции, из которого будет следовать отсутствие в результате других термов, кроме SKI , бета-эквивалентность и определённость результата для всех комбинаторов σ):

$$[\sigma] = \begin{cases} x, & \sigma = x \\ [\varphi] [\psi], & \sigma = \varphi \psi \\ K [\varphi], & \sigma = \lambda x.\varphi, \quad x \notin FV(\varphi) \\ I, & \sigma = \lambda x.x \\ [\lambda x. [\lambda y.\varphi]], & \sigma = \lambda x.\lambda y.\varphi, \quad x \in FV(\varphi), x \neq y \\ S [\lambda x.\varphi] [\lambda x.\psi], & \sigma = \lambda x.\varphi \psi, \quad x \in FV(\varphi) \cup FV(\psi) \end{cases}$$

Заметим, что данные равенства объясняют смысл названий комбинаторов:

S verSchmelzung, «сплавнение»
 K Konstanz
 I Identität

5. Покажите, что следующая система комбинаторов образует полный базис в бестиповом лямбда-исчислении, но соответствующая им система аксиом в исчислении гильбертового типа не образует полного базиса для импликативного фрагмента:

$$\begin{aligned}
 I &:= \lambda x.x \\
 K &:= \lambda x.\lambda y.x \\
 S' &:= \lambda i.\lambda x.\lambda y.\lambda z.i \ (i \ ((x \ (i \ z)) \ (i \ (y \ (i \ z)))))
 \end{aligned}$$

Указание: покажите невыводимость $(\varphi \rightarrow \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

6. Напомним определение аппликативного порядка редукции: редуцируется самый левый из самых вложенных редексов. Например, в случае выражения $(\lambda x.I \ I) \ (\lambda y.I \ I)$ самые вложенные редексы — применения $I \ I$:

$$(\lambda x.\underline{I \ I}) \ (\lambda y.\underline{I \ I})$$

и надо выбрать самый левый из них:

$$(\lambda x.\underline{I \ I}) \ (\lambda y.I \ I)$$

- (a) Проведите аппликативную редукцию выражения 2 2.
- (b) Докажите или опровергните, что параллельная бета-редукция из теоремы Чёрча-Россера не медленнее (в смысле количества операций для приведения выражения к нормальной форме), чем нормальный порядок редукции с мемоизацией.
- (c) Найдите лямбда-выражение, которое редуцируется медленнее при нормальном порядке редукции, чем при аппликативном, даже при наличии мемоизации.
7. Напомним определение бета-редукции. $A \rightarrow_\beta B$, если:
- $A \equiv (\lambda x.P) \ Q$, $B \equiv P \ [x := Q]$, при условии свободы для подстановки;
 - $A \equiv (P \ Q)$, $B \equiv (P' \ Q')$, при этом $P \rightarrow_\beta P'$ и $Q \rightarrow_\beta Q'$, либо $P = P'$ и $Q \rightarrow_\beta Q'$;
 - $A \equiv (\lambda x.P)$, $B \equiv (\lambda x.P')$, и $P \rightarrow_\beta P'$.
- (a) Найдите лямбда-выражение, бета-редукция которого не может быть произведена из-за нарушения правила свободы для подстановки (для продолжения редукции потребуется производить переименование связанных переменных). Поясните, какое ожидаемое ценное свойство будет нарушено, если ограничение правила проигнорировать.
- (b) Покажите, что недостаточно наложить требования на исходное выражение, и свобода для подстановки может быть нарушена уже в процессе редукции исходно полностью корректного лямбда-выражения.
8. Будем говорить, что выражение A находится в *слабой заголовочной нормальной форме* (WHNF), если оно не имеет вид $A \equiv (\lambda x.P) \ Q$ (то есть, самый верхний терм его не является редексом). Выражение находится в *заголовочной нормальной форме* (HNF), когда его верхний терм — не редекс и не лямбда-абстракция с бета-редексами в теле.
- (a) Приведите нормальным порядком редукции выражение 2 2 в СЗНФ.
- (b) Приведите нормальным порядком редукции выражение $Y \ (\lambda f.\lambda x.(IsZero \ x) \ 1 \ (x \cdot f(x - 1))) \ 3$ в СЗНФ.
- (c) Верно ли, что «нормальность» формы выражения может в процессе редукции только усиливаться (никакая — слабая заголовочная Н.Ф. — заголовочная Н.Ф. — нормальная форма)?
9. Как мы уже разбирали, $\not\vdash x \ x : \tau$ в силу дополнительных ограничений правила

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \quad x \notin FV(\Gamma)$$

Найдите лямбда-выражение N , что $\not\vdash N : \tau$ в силу ограничений правила

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.N : \sigma \rightarrow \tau} \quad x \notin FV(\Gamma)$$