

Парадокс Жирара

Расширение обобщённых типовых систем

Расширение обобщённых типовых систем, 5 уровней:

№	название	обозначение, примеры
0	термы: доказательства	$x, \lambda p.q, \dots$
1	типы: утверждения	$1 = 1$
2	рода: семейства утверждений	\star
3	сорт «квадратик»	\square (единственный представитель)
4	сорт «треугольник»	\triangle (единственный представитель)

Обобщённые типовые системы, системы U и U^-

Название	Аксиомы	Правила
λHOL	$\star : \square, \square : \triangle$	$(\star, \star), (\square, \square), (\square, \star)$
	$\star : \square, \square : \triangle$	$(\star, \star), (\square, \square), (\square, \star), (\triangle, \star)$
λU^-	$\star : \square, \square : \triangle$	$(\star, \star), (\square, \square), (\square, \star), (\triangle, \square)$
λU	$\star : \square, \square : \triangle$	$(\star, \star), (\square, \square), (\square, \star), (\triangle, \square), (\triangle, \star)$

Парадокс Бурали-Форте

Теорема

Множества всех ординалов не существует

Доказательство.

Пусть Ω — множество всех ординалов.

1. Легко заметить, что Ω является ординалом:

- ▶ Все ординалы сравнимы (если есть аксиома выбора) — линейный порядок
- ▶ Если множество ординалов $X \subseteq \Omega$ непусто ($x \in X$), то $\min X = \min(x' \cap X)$.
Поскольку x' — ординал, то в любом его непустом подмножестве есть минимум — полный порядок.
- ▶ Если $y \in x$ и $x \in \Omega$, то y ординал — транзитивность.

2. Однако, любой ординал $\alpha \in \Omega$, то есть $\Omega < \Omega$

3. Однако, это есть противоречие с определением строгого порядка.



Порядковые типы

Definition

Множества $(A, <)$ и (B, \sqsubset) имеют одинаковый *порядковый тип*, если существует биекция между ними, сохраняющая порядок:

$$\forall a \in A. \forall b \in A. a < b \leftrightarrow f(a) \sqsubset f(b)$$

Definition

Операции перехода от множества к порядковому типу и назад:

1. σ — по порядковому типу (по соответствующему ординалу) получить вполне упорядоченное множество: $\sigma\alpha = \{t : \text{ординал} \mid t < \alpha\}$
2. τ — по вполне упорядоченному множеству получить его порядковый тип: τX

Заметим, что (здесь X — некоторое множество ординалов):

$$\sigma\tau X = \{\beta : \text{ординал} \mid \beta < \tau X\} = \{\tau\sigma\alpha \mid \alpha \in X\}$$

Парадоксальные универсумы

Напомним, что $X \rightarrow Y := \prod_{x \in X} Y$.

Definition

Булеан множества S (power set) — множество всех предикатов на S :

$$\wp : S \rightarrow \star$$

Рассмотрим $\sigma : \mathcal{U} \rightarrow \wp \mathcal{U}$ и $\tau : \wp \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$

Definition

\mathcal{U} парадоксален, если для всех $X \in \wp \mathcal{U}$ выполнено

$$\sigma \tau X = \{ \tau \sigma x \mid x \in X \}$$

Предшественники

Фиксируем парадоксальный универсум \mathcal{U} вместе с отображениями σ и τ .

Definition

Назовём y *предшественником* x ($y < x$), если $y \in \sigma x$.

Lemma (о выражении предшественника)

Если $t < \tau\sigma x$, то $t = \tau\sigma u$ для некоторого $u < x$

Доказательство.

Пусть $X = \sigma x = \{y \mid y < x\}$; это множество всех предшественников x .

$t < \tau\sigma x$, то есть $t \in \sigma\tau\sigma x$, то есть $t \in \sigma\tau X$, то есть (по парадоксальности)

$t \in \{\tau\sigma u \mid u \in X\}$, то есть $t = \tau\sigma u$ для некоторого $u \in X$, то есть $t = \tau\sigma u$ при $u < x$.



Lemma

Если $p < q$, то $\tau\sigma p < \tau\sigma q$

Индуктивность и фундированность

Definition

Рассмотрим универсум \mathcal{U} . Индуктивность множеств и фундированность:

1. $X \subseteq \mathcal{U}$ — *индуктивное*, если всякий x , предшественники которого содержатся в X , сам содержится в X :

Если для всех $y < x$ выполнено $y \in X$, то $x \in X$

2. $x \in \mathcal{U}$ — *фундированный*, если x принадлежит всем индуктивным множествам.

Множество Ω

Definition

Фиксируем некоторый универсум $\langle \mathcal{U}, \sigma, \tau \rangle$. Тогда $\Omega = \tau\{x \mid x \text{ фундирован}, x \in \mathcal{U}\}$ — порядковый тип множества всех фундированных множеств.

Легко заметить, что $\Omega \in \mathcal{U}$.

Лемма

Если X индуктивно, то и $T = \{y \mid \tau\sigma u \in X\}$ также индуктивно.

Доказательство.

Для индуктивности T нужно показать, что если $y < x$ влечёт $y \in T$, то $x \in T$.

Фиксируем x , что $\tau\sigma u \in X$ для всех $u < x$. Тогда заметим, что если $k < \tau\sigma x$, то найдётся такой u , что $k = \tau\sigma u$ и $u < x$ (лемма о выражении предшественника), то есть $k \in X$. Значит (индуктивность X), $\tau\sigma x \in X$, то есть $x \in T$. \square

Ω фундировано

Лемма

В парадоксальном универсуме ($\sigma\tau X = \{\tau\sigma x \mid x \in X\}$) множество Ω фундировано.

Доказательство.

- ▶ Фиксируем индуктивное $X \subseteq \mathcal{U}$. Чтобы показать $\Omega \in X$, по определению индуктивности надо показать, что если $t < \Omega$, то $t \in X$. Пусть F — множество всех фундированных элементов, $F \subseteq \mathcal{U}$.
- ▶ Пусть $t < \Omega$, тогда $t \in \sigma\Omega$ (определение предшествования), откуда $\sigma\Omega = \sigma\tau F$ (определение Ω).
- ▶ По парадоксальности, $\sigma\tau F \subseteq \{\tau\sigma x \mid x \in F\}$, то есть $t \in \sigma\Omega \subseteq \{\tau\sigma x \mid x \in F\}$, то есть $t = \tau\sigma\omega$ при некотором $\omega \in F$.
- ▶ Поскольку X индуктивно, то по лемме и множество $T = \{y \mid \tau\sigma y \in X\}$ индуктивно. По определению, ему принадлежат все фундированные элементы: $F \subseteq T$. Значит, $\omega \in F$ влечёт $\omega \in T$, то есть $t = \tau\sigma\omega \in X$.



Множество Ω противоречиво

Лемма

Ω не может быть фундировано.

Доказательство.

Можно показать, используя обратное включение: $\{\tau\sigma x \mid x \in X\} \subseteq \sigma\tau X$.



Теорема

Множество Ω не существует

Доказательство.

Ω фундировано, но его фундированность ведёт к противоречию.



Построение парадокса в U^-

Теперь, имея идею парадокса, покажем, что в U^- есть парадоксальные универсумы.

Вспомним изоморфизм Карри-Ховарда: $P(x) \approx x \in \{t \mid P(t)\} \approx X : P(x)$

После этого выразим операции σ , τ и построим Ω .

1. $\mathcal{U} = \Pi X : \Box.((\wp X \rightarrow X) \rightarrow \wp X)$
2. $\tau = \lambda X : \wp \mathcal{U}. \lambda A : \Box. \lambda c : (\wp A \rightarrow A). \lambda a : A. \varphi,$
где $\varphi = \Pi P^{\wp A}. (\Pi x^{\mathcal{U}}. X \ x \Rightarrow (P(c(\{x \ A\} \ c)))) \Rightarrow P \ a$
3. $\sigma = \lambda x : \mathcal{U}. ((x \ \mathcal{U}) \ \tau)$

Заметим, что для задания \mathcal{U} нам требуются правила (Δ, \Box) .

Несложно показать, что $(\mathcal{U}, \sigma, \tau)$ — парадоксальный: \mathcal{U} парадоксален, если для всех $X \in \wp \mathcal{U}$ выполнено

$$\sigma \tau X = \{\tau \sigma x \mid x \in X\}$$

Например потому, что для всех $X : \wp \mathcal{U}$ выполнено

$$\sigma \tau X =_{\beta} \bigcap \{P \subseteq \mathcal{U} \mid \forall x \in X. \tau \sigma x \in P\}$$

А далее строим Ω и выписываем применение двух утверждений: Ω фундирован и Ω фундирован $\rightarrow \perp$.

Упрощённая формула

Рассмотрим $\sigma : \mathcal{U} \rightarrow \wp\wp\mathcal{U}$ и $\tau : \wp\wp\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$. Назовём \mathcal{U} мощным универсумом, если при $C \in \wp\wp\mathcal{U}$ выполнено

$$\sigma\tau C = \{X \mid \{y \mid \tau\sigma y \in X\} \in C\}$$

Дадим следующие обозначения:

1. Универсум:

$$\mathcal{U} = \Pi x^{\square}.(\wp\wp x \rightarrow x) \rightarrow \wp\wp x$$

2. Отображения:

$$\tau t = \lambda X^{\square}.\lambda f^{\wp\wp X \rightarrow X}.\lambda p^{\wp X}.t \lambda x^{\mathcal{U}}.p(f (x X) f)$$

$$\sigma s = (s \mathcal{U}) \lambda t^{\wp\wp\mathcal{U}}.\tau t$$

3. Вспомогательное:

$$\Delta = \lambda y^{\mathcal{U}}.(\Pi p^{\wp\mathcal{U}}.\sigma y p \rightarrow p \tau \sigma y) \rightarrow \perp$$

Омега и парадокс

В качестве Ω берём $\tau\{X \mid X \text{ индуктивен}\}$:

$$\Omega = \tau \lambda p^{\wp\mathcal{U}}. \Pi x^{\mathcal{U}}. \sigma x p \rightarrow p x$$

Тогда следующее выражение обитает в типе «ложь» ($\perp = \Pi p^{\star}. p$):

$$\begin{aligned} & \lambda a_0 : \Pi p : \wp\mathcal{U}. (\Pi x : \mathcal{U}. (\sigma x p) \rightarrow (p x)) \rightarrow (p \Omega)). \\ & ((a_0 \Delta) \lambda x^{\mathcal{U}}. \lambda a_2^{(\sigma x \Delta)}. \lambda a_3^{\Pi p : \wp\mathcal{U}. (\sigma x p) \rightarrow p \tau \sigma x}. \\ & ((a_3 \Delta) a_2) \lambda p^{\wp\mathcal{U}. (a_3 \lambda y : \mathcal{U}. p \tau \sigma y)} (\lambda p^{\wp\mathcal{U}}. a_0 \lambda y : \mathcal{U}. (p \tau \sigma y))) \\ & \lambda p^{\wp\mathcal{U}}. \lambda a_1^{\Pi x : \mathcal{U}. \sigma x p \rightarrow p x}. (a_1 \Omega) \lambda x^{\mathcal{U}}. a_1 \tau \sigma x \end{aligned}$$