Множества, Сетоиды, Теорема Диаконеску

Set — не множество

Акс. выбора:

Если сем мн-в R состоит из непустых эл-тов. ②

$A \quad B$

$R \subseteq A \times B$ — бин. отн.

Rab — a состоит с b отн. R ①

индекс мн-в.

```
Theorem choice :
 forall (A B : Type) (R : A->B->Prop),
   (forall x : A, exists y : B, R x y) ->
    exists f : A->B, (forall x : A, R x (f x)).
```

Тогда заметим, что choice докажем.

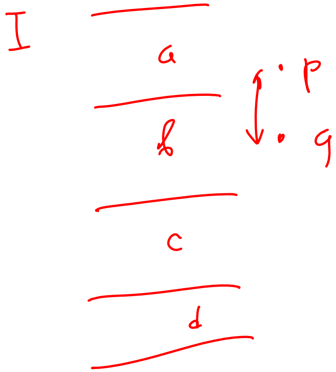
③

$\forall x^A.\ \exists y^B.\ R\,x\,y$

③: тогда есть $f : A \to B$, что $f(x) \in B$

Сетоид

$f : A \to x^{B(A)}$



Определение

Сетоид — ~~множество~~ Set *с отношением эквивалентности*

Idris

```
Reflx: {A : Type} -> (R: A -> A -> Type) -> Type
Reflx {A} R = (x : A) -> R x x

Symm: {A : Type} -> (R: A -> A -> Type) -> Type
Symm {A} R = (x : A) -> (y : A) -> R x y -> R y x

Trans: {A : Type} -> (R: A -> A -> Type) -> Type
Trans {A} R = (x : A) -> (y : A) -> (z : A) -> R x y -> R y z -> R x z

data IsEquivalence: {A : Type} -> (R: A -> A -> Type) -> Type where
   EqProof: {A: Type} -> (R: A -> A -> Type) ->
      Reflx {A} R -> Symm {A} R -> Trans {A} R -> IsEquivalence {A} R

record Setoid where
   constructor MkSetoid
   Carrier: Type
   Equiv: Carrier -> Carrier -> Type
   EquivProof: IsEquivalence Equiv
```

```
data Map: (A:Setoid) -> (B:Setoid) -> Type where
  MkMap: {A:Setoid} -> {B:Setoid} -> (f: (Carrier A) -> (Carrier B)) ->
     ({x:Carrier A} -> {y:Carrier A} ->
     ((Equiv A) x y) -> ((Equiv B) (f x) (f y))) -> Map A B

MapF: {A:Setoid} -> {B:Setoid} -> Map A B -> (Carrier A -> Carrier B)
MapF (MkMap {A} {B} f ext) = f

MapExt: {A:Setoid} -> {B:Setoid} -> (p: Map A B) ->
     ({x:Carrier A} -> {y:Carrier A} -> ((Equiv A) x y) -> ((Equiv B) (MapF p x) (MapF p y
MapExt (MkMap {A} {B} f ext) = ext

Rel: Type -> Type -> Type
Rel a b = a -> b -> Type

postulate ext_ac: {I: Setoid} -> {S: Setoid} ->
  (A: Rel (Carrier I) (Carrier S)) ->
  ((x: Carrier I) -> (g : Carrier S ** A x g)) ->
  (chs: (Map I S) ** ((w: Carrier I) -> A w ((MapF chs) w)))

excluded_middle: (P: Type) -> Or P (Not P)
```

I – индексы для мн-в

S – универсумы

Sigma (g, A x g)

– д-во непустоты A x g для каждого x

Тогда можно док-ть т. Диаконеску

Аксиома выбора в HoTT

1. Диаконеску.

Если в ZF поверх ИИП есть Акс. выб., то $P \vee \neg P$

Фикс. предикат P.

$U = \{0, 1\}$

1) $A = \{x \in U \mid x = 0 \vee P\}$ $\quad B = \{x \in U \mid x = 1 \vee P\}$

Сх. акс. выд.

2) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

$R_A = A$ $\quad R_B = B$

$R \subseteq \{A, B\} \times U$

По акс. выбора $f : \{A, B\} \to U$ причём $f(A) \in A$, $f(B) \in B$

$f(A) \in A \to f(A) = 0 \vee P$

$f(B) \in B \to f(B) = 1 \vee P$

$f(A) \neq f(B) \vee P$

$\neg P \vee P$

$A = B \to f(A) = f(B)$

$f(A) \neq f(B) \to A \neq B$

$f(A) \neq f(B) \to \neg P$

$\{x \in U \mid x = 1 \vee P\}$

Акс. выбора в HoTT

1) Проп. усеч. $\|T\|$ — все эл. одинаковы.

Пусть $B : E \to \mathrm{Set}$ — семейство мн-в

Акс. выбора: $\left(\Pi x^E . \|B\, x\|\right) \to \|\Pi x^E . B\, x\|$

семейство непустых мн-в.

Сущ. ф-я (без предъявл. объекта)