Лекция 1.
Теоремы о лямбда-исчислении.

Некоторые базовые определения — повторение

Определение

Пред-лямбда-терм:

$$\Lambda ::= (\lambda x.\Lambda)|(\Lambda\ \Lambda)|x$$

Определение

Лямбда-терм: $\Lambda/(=_\alpha)$

Определение

$R \subseteq A \times B$ *— бинарное отношение.*

Запишем aRb*, если* $\langle a, b\rangle \in R$

Отношение для инфиксной операции $a \star b$*:* $\langle a, b\rangle \in (\star)$

β-редуцируемость

Определение

$(\twoheadrightarrow_\beta)$ — *транзитивное и рефлексивное замыкание отношения* $(\rightarrow_\beta)$
А именно, будем говорить, что $A \twoheadrightarrow_\beta B$*, если найдутся такие* $X_1 \dots X_n$*, что*
$A =_\alpha X_1 \rightarrow_\beta X_2 \rightarrow_\beta \dots \rightarrow_\beta X_{n-1} \rightarrow_\beta X_n =_\alpha B$.

Пример

$\Omega \twoheadrightarrow_\beta \Omega$

Определение (Ромбовидное свойство)

Отношение R обладает ромбовидным свойством, если для любых a, b, c:
из *aRb, aRc, $b \neq c$* **следует** *существование d, что bRd и cRd.*

Пример

$(\leqslant)$ *на $\mathbb{N}_0$ обладает ромбовидным свойством:*

$$d = max(b, c): \qquad 2 \leqslant 7, 3 \leqslant 7 \Rightarrow d = 7$$

$(>)$ *на $\mathbb{N}_0$ не обладает ромбовидным свойством:*

$$3 > 1, 3 > 0: \qquad \textit{нет } d : 1 > d, 0 > d$$

Теорема Чёрча-Россера

Теорема (Черча-Россера)

$(\twoheadrightarrow_\beta)$ обладает ромбовидным свойством.

Следствие

Если у A есть нормальная форма, то она единственная.

Доказательство.

Пусть $A \twoheadrightarrow_\beta B$ и $A \twoheadrightarrow_\beta C$. B, C — нормальные формы и $B \neq_\alpha C$. Тогда по теореме Черча-Россера найдётся D: $B \twoheadrightarrow_\beta D$ и $C \twoheadrightarrow_\beta D$. Тогда $B =_\alpha D$ и $C =_\alpha D \Rightarrow B =_\alpha C$. Противоречие. $\square$

Лемма

Если B — нормальная форма, то не существует Q такой, что $B \rightarrow_\beta Q$. Значит если $B \twoheadrightarrow_\beta Q$, то количество шагов редукции равно 0.

Лемма

Если R — обладает ромбовидным свойством, то и R^* (транзитивное, рефлексивное замыкание R) им обладает.

Доказательство.

Две вложенных индукции. $\square$

Лемма

$(\to_\beta)$ *не обладает ромбовидным свойством.*

Пусть $A = (\lambda x.xx)(\mathrm{I}\,\mathrm{I})$. Покажем, что в таком случае не будет выполняться ромбовидное свойство:

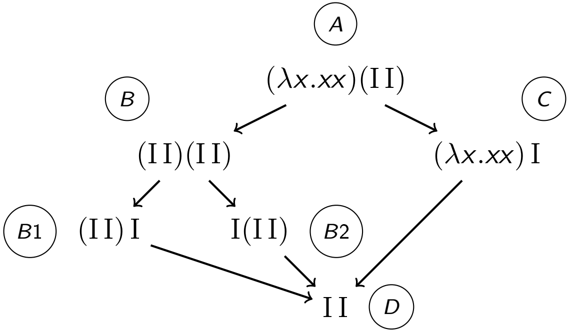

Рис.: Нет такого D, что $B \to_\beta D$ и $C \to_\beta D$.

Определение (Параллельная β-редукция)

$A \rightrightarrows_\beta B$, *если*

1. $A = B$
2. $A = P_1\ Q_1$, $B = P_2\ Q_2$ *и* $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$
3. $A = \lambda x.P_1$, $B = \lambda x.P_2$ *и* $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$
4. $A =_\alpha (\lambda x.P_1)Q_1$, $B =_\alpha P_2[x := Q_2]$, *причем* Q_2 *свободна для подстановки вместо* x *в* P_2 *и* $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$

Лемма: если $P_1 \rightrightarrows_\beta P_2$ и $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_2$, то $P_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta P_2[x := Q_2]$

- Пусть $P_1 =_\alpha P_2$. Индукция по структуре выражения.
- Пусть $P_1 \equiv A_1 B_1$, $P_2 \equiv A_2 B_2$. По определению ($\rightrightarrows_\beta$) $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$ и $B_1 \rightrightarrows_\beta B_2$. Тогда:
  1. $x \in FV(A_1)$. По индукционному предположению $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$. Тогда $A_1[x := Q_1]B_1 \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]B_2$. Тогда $A_1 B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2 B_2[x := Q_2]$.
  2. $x \in FV(B_1)$. По индукционному предположению $B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta B_2[x := Q_2]$. Тогда $A_1 B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2 B_2[x := Q_2]$.
- Пусть $P_1 \equiv \lambda y.A_1$, $P_2 \equiv \lambda y.A_2$. По определению ($\rightrightarrows_\beta$) $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$. Тогда по индукционному предположению $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$. Тогда $\lambda y.(A_1[x := Q_1]) \rightrightarrows_\beta \lambda y.(A_2[x := Q_2])$ по определению ($\rightrightarrows_\beta$). Следовательно $\lambda y.A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta \lambda y.A_2[x := Q_2]$ по определению подстановки.
- Пусть $P_1 =_\alpha (\lambda y.A_1)B_1$, $P_2 =_\alpha A_2[y := B_2]$ и $A_1 \rightrightarrows_\beta A_2$, $B_1 \rightrightarrows_\beta B_2$. По индукционному предположению получаем, что $A_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[x := Q_2]$, $B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta B_2[x := Q_2]$. По определению ($\rightrightarrows_\beta$) тогда $(\lambda y.A_1[x := Q_1])B_1[x := Q_1] \rightrightarrows_\beta A_2[y := B_2][x := Q_2]$

Лемма: $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает ромбовидным свойством

Будем доказывать индукцией по определению $(\rightrightarrows_\beta)$. Покажем, что если $M \rightrightarrows_\beta M_1$ и $M \rightrightarrows_\beta M_2$, то существует M_3, что $M_1 \rightrightarrows_\beta M_3$ и $M_2 \rightrightarrows_\beta M_3$. Рассмотрим случаи:

- Если $M \equiv M_1$, то просто возьмем $M_3 \equiv M_2$.
- Если $M \equiv \lambda x.P, M_1 \equiv \lambda x.P_1, M_2 \equiv \lambda x.P_2$ и $P \rightrightarrows_\beta P_1, P \rightrightarrows_\beta P_2$, то по предположению индукции существует P_3, что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3, P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$, тогда возьмем $M_3 \equiv \lambda x.P_3$.
- Если $M \equiv PQ, M_1 \equiv P_1 Q_1$ — естественное доказательство.
- Если $M \equiv (\lambda x.P)Q$, $M_1 \equiv P_1[x := Q_1]$ и $P \rightrightarrows_\beta P_1$, $Q \rightrightarrows_\beta Q_1$, то рассмотрим случаи:
  1. $M_2 \equiv (\lambda x.P_2)Q_2$, $P \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q \rightrightarrows_\beta Q_2$. Тогда по предположению индукции и лемме существует такой $M_3 \equiv P_3[x := Q_3]$, что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_3$ и $P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_2 \rightrightarrows_\beta Q_3$.
  2. $M_2 \equiv P_2[x := Q_2]$, $P \rightrightarrows_\beta P_2$, $Q \rightrightarrows_\beta Q_2$. Тогда по предположению индукции и лемме существует такой $M_3 \equiv P_3[x := Q_3]$, что $P_1 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_1 \rightrightarrows_\beta Q_3$ и $P_2 \rightrightarrows_\beta P_3$, $Q_2 \rightrightarrows_\beta Q_3$.

Лемма

1. $(\rightrightarrows_\beta)^* \subseteq (\rightarrow_\beta)^*$
2. $(\rightarrow_\beta)^* \subseteq (\rightrightarrows_\beta)^*$

Следствие

$(\rightarrow_\beta)^* = (\rightrightarrows_\beta)^*$

Из приведенных выше лемм и следствия докажем теорему Черча-Россера.

Доказательство.

$(\rightarrow_\beta)^* = (\twoheadrightarrow_\beta)$. Тогда $(\twoheadrightarrow_\beta) = (\rightrightarrows_\beta)^*$. Значит из того, что $(\rightrightarrows_\beta)$ обладает ромбовидным свойством и леммы 2, следует, что $(\twoheadrightarrow_\beta)$ обладает ромбовидным свойством. $\square$

Нормальный и аппликативный порядок вычислений

Пример

Выражение $KI\Omega$ можно редуцировать двумя способами:

1. $K\,I\,\Omega =_\alpha ((\lambda a.\lambda b.a)\ I)\Omega \to_\beta (\lambda b.\ I)\Omega \to_\beta I$
2. $K\,I\,\Omega =_\alpha ((\lambda a.\lambda b.a)\ I)((\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)) \twoheadrightarrow_\beta$
   $((\lambda a.\lambda b.a)\ I)((\lambda x.x\ x)(\lambda x.x\ x)) \to_\beta K\,I\,\Omega$

Определение (нормальный порядок редукции)

Редукция самого левого β-редекса.

Определение (аппликативный порядок редукции)

Редукция самого левого β-редекса из самых вложенных.

Теорема (Приводится без доказательства)

Если нормальная форма существует, она может быть достигнута нормальным порядком редукции.

Нормальный порядок — медленный

Пример

Рассмотрим λ*-выражение* $(\lambda x.x\ x\ x\ x)(I\,I)$*. Попробуем редуцировать его нормальным порядком:*

$$(\lambda x.x\ x\ x\ x)(I\,I) \rightarrow_\beta (I\,I)(I\,I)(I\,I)(I\,I) \rightarrow_\beta I(I\,I)(I\,I)(I\,I) \rightarrow_\beta (I\,I)(I\,I)(I\,I) \rightarrow_\beta \ldots \rightarrow_\beta I$$

Как мы увидим, в данной ситуации аппликативный порядок редукции оказывается значительно эффективней:

$$(\lambda x.x\ x\ x\ x)(I\,I) \rightarrow_\beta (\lambda x.x\ x\ x\ x)\,I \rightarrow_\beta I\,I\,I\,I \rightarrow_\beta I\,I\,I \rightarrow_\beta I\,I \rightarrow_\beta I$$

Как программировать? Любое значение – замыкание

```
let x = sqrt 256   let x = fun () -> sqrt 256
```

Плюс мемоизация:

```
let x = fun () -> sqrt 256;;
let y = x;;
y () + x () (* вычисляется два раза *)
```

Давайте запоминать результаты!

```
type int-value = Compute of unit -> int | Result of int;;
let compute v = match !v with
    Compute f -> let res = f () in v := Result res; res
  | Result r -> r;;

let x = ref (Compute (fun () -> sqrt 256));;
let y = x;;
compute y + compute x
```

Ленивые и энергичные вычисления

Энергичные вычисления: аппликативный порядок. Ленивые вычисления: нормальный порядок + мемоизация.
If всегда ленив

```
let fact n = if n > 1 then n * fact (n-1) else 1
```

Ленивое общение с внешним миром бессмысленно.

Импликационный фрагмент ИИВ

Рассмотрим подмножество ИИВ, со следующей грамматикой: $\Phi ::= x \mid (\Phi \to \Phi)$
Добавим в него схему аксиом

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

Правило введения импликации:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$

Правило удаления импликации:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Теорема

Если Γ и φ состоят только из импликаций, то $\Gamma \vdash \varphi$ равносильна $\Gamma \vdash_{\to} \varphi$.

Замкнутость И.Ф.ИИВ

Lemma

Если $\Gamma \vdash \varphi$*, то в любой модели Крипке из* $\Vdash \Gamma$ *следует* $\Vdash \varphi$

Доказательство.

Пусть $\Gamma \vdash \varphi$. Тогда $\vdash \&\Gamma \to \varphi$, где $\&\Gamma$ — конъюнкция всех утверждений в Γ. По корректности моделей Крипке, будет выполнено $\Vdash \&\Gamma \to \varphi$. Переписывая $\&$ и $\to$ по определению, получаем $\Vdash \Gamma \ \Rightarrow \Vdash \varphi$. $\square$

Замкнутость И.Ф.ИИВ

Теорема

$\Gamma \vdash_{\to} \varphi$ т.и.т.т. в любой модели Крипке из $\Vdash \Gamma$ следует $\Vdash \varphi$

Доказательство.

- $(\Rightarrow)$ Очевидно по лемме 5.
- $(\Leftarrow)$ Пусть в любой модели Крипке из $\Vdash \Gamma$ следует $\Vdash \varphi$. Докажем $\Gamma \vdash_{\to} \varphi$.
  Выберем подходящую модель Крипке. Напомним, что моделью Крипке называется тройка $\langle C, \succcurlyeq, \Vdash \rangle$, где C – множество миров, $\succcurlyeq$ – отношение частичного порядка на C, $\Vdash$ – отношение вынужденности переменной.
  Построим модель Крипке $\mathcal{C} = \langle C, \succcurlyeq, \Vdash \rangle$.
  Пусть $C = \{\Delta \mid \Gamma \subseteq \Delta, \Delta$ замкнут относительно $\vdash_{\to}\}$. Δ замкнут относительно доказуемости, когда для любого φ если $\Delta \vdash_{\to} \varphi$, то $\varphi \in \Delta$.
  $C_1 \succcurlyeq C_2$, если $C_1 \supseteq C_2$.
  $\Delta \Vdash \alpha$, если $\alpha \in \Delta$, α – переменная.

$\square$

Лемма: В модели $\mathcal{C}$ $\Delta \Vdash \varphi$ т.и.т.т. $\varphi \in \Delta$

Доказательство.

База. $\varphi \equiv \alpha$. $\Delta \Vdash \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Delta$ следует из определения вынужденности.

Индукционный переход. $\varphi \equiv \psi \to \sigma$

Индукционное предположение: $\forall \Delta \in C : \Delta \Vdash \psi \Leftrightarrow \psi \in \Delta$, $\Delta \Vdash \sigma \Leftrightarrow \sigma \in \Delta$.

Докажем, что $\Delta \Vdash \psi \to \sigma \Leftrightarrow \psi \to \sigma \in \Delta$ (два включения). $\square$

Доказательство $\Delta \Vdash \psi \to \sigma \Leftrightarrow \psi \to \sigma \in \Delta$

$(\Rightarrow)$ Пусть $\Delta \Vdash \psi \to \sigma$.
Рассмотрим мир $\Pi = (\Delta \cup \{\psi\})^*$. $\Pi \Vdash \psi \to \sigma$, т.к. $\Delta \preccurlyeq \Pi$.
$\psi \in \Pi$. Тогда, по инд. пред., $\Pi \Vdash \psi$. Значит, $\Pi \Vdash \sigma$. В самом деле, из определения вынужденности импликации в Π следует, что если $\Pi \Vdash \psi$, то $\Pi \Vdash \sigma$.
По инд. пред. заключаем $\sigma \in \Pi$, т.е. $\Pi \vdash_{\to} \sigma$, т.к. Π – замкнут по доказуемости.
Ясно, что $\Delta, \psi \vdash_{\to} \sigma$. Действительно, в гипотезах доказательства $\Pi \vdash_{\to} \sigma$ использовалось не все бесконечное множество Π, а лишь конечный набор утверждений из него. Каждое такое утверждение выводится из Δ, ψ, потому что Π - замыкание $\Delta \cup \{\psi\}$.
Из $\Delta, \psi \vdash_{\to} \sigma$ следует $\Delta \vdash_{\to} \psi \to \sigma$. Таким образом, $\psi \to \sigma \in \Delta$.
$(\Leftarrow)$ Пусть $\psi \to \sigma \in \Delta$.
Рассмотрим произвольный мир $\Pi : \Delta \preccurlyeq \Pi \wedge \Pi \Vdash \psi$. По инд. пред. $\psi \in \Pi$.
$\psi \to \sigma \in \Pi$, т.к. $\Delta \subseteq \Pi$. $\Pi \vdash_{\to} \psi$, $\Pi \vdash_{\to} \psi \to \sigma$. Очевидно, $\Pi \vdash_{\to} \sigma$. $\sigma \in \Pi$. Тогда, по инд. пред., $\Pi \Vdash \sigma$. Таким образом, $\Pi \Vdash \psi \to \sigma$, а следовательно, $\Delta \Vdash \psi \to \sigma$.

Завершение доказательства

Теперь можем доказать теорему о замкнутости ИФИИВ.

Доказательство.

Следствие $\Gamma \vdash_{\to} \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$ очевидно.
Пусть $\Gamma \vdash \varphi$. По 5 получаем, что в любой модели Крипке из $\Vdash \Gamma$ следует $\Vdash \varphi$.
Отсюда, по теореме 0.4, доказывается $\Gamma \vdash_{\to} \varphi$. $\square$

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение ($\lambda_{\to}$ по Карри)

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x.A : \varphi \to \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Определение ($\lambda_{\to}$ по Чёрчу)

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}.A : \varphi \to \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение ($\lambda_{\rightarrow}$ по Карри)

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x.A : \varphi \rightarrow \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Определение ($\lambda_{\rightarrow}$ по Чёрчу)

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}.A : \varphi \rightarrow \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Пример

По Карри	*По Чёрчу*
$\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	$\lambda f^{\alpha \rightarrow \alpha}.\lambda x^{\alpha}.f\ (f\ x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение ($\lambda_\rightarrow$ по Карри)

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x.A : \varphi \rightarrow \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Определение ($\lambda_\rightarrow$ по Чёрчу)

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}.A : \varphi \rightarrow \psi}\ x \notin \Gamma \qquad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \qquad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Пример

По Карри	*По Чёрчу*
$\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	$\lambda f^{\alpha \rightarrow \alpha}.\lambda x^{\alpha}.f\ (f\ x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
$\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x) : (\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$	$\lambda f^{\beta \rightarrow \beta}.\lambda x^{\beta}.f\ (f\ x) : (\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$

Теоремы о $\lambda_{\to}$

Лемма (о редукции, subject reduction)

Если $A \twoheadrightarrow_\beta B$ *и* $\vdash A : \tau$, *то* $\vdash B : \tau$.

Лемма

Если $\vdash A : \tau$, *то любое подвыражение* A *также имеет тип.*

Теорема (Чёрча-Россера)

Если $\vdash A : \tau$, $A \twoheadrightarrow_\beta B$, $A \twoheadrightarrow_\beta C$ *и* $B \neq C$, *то найдётся* D, *что* $\vdash D : \tau$, *и* $B \twoheadrightarrow_\beta D$, $C \twoheadrightarrow_\beta D$.

Соответствие между исчислениями

Определение

$$|A| = \begin{cases} x, & A = x \\ \lambda x.|Q| & A = \lambda x^\tau.Q \\ |P|\ |Q| & A = P\ Q \end{cases}$$

Теорема

1. *Если* $\Gamma \vdash_{ч} A : \tau$, *то* $|Gamma| \vdash_{к} |A| : \tau$;
2. *Если* $\Gamma \vdash_{к} A : \tau$, *то найдётся такой* $B : A = |B|$, *что* $\Gamma \vdash_{ч} B : \tau$.

Теорема (уникальность типов, для исчисления по Чёрчу)

1. $\Gamma \vdash_{ч} M : \sigma$ *и* $\Gamma \vdash_{ч} M : \tau$ *влечёт* $\sigma = \tau$;
2. $\Gamma \vdash_{ч} M : \sigma$, $\Gamma \vdash_{ч} N : \tau$ *и* $M =_\beta N$ *влечёт* $\sigma = \tau$.

Лемма (о расширении, subject expansion)

Если $\Gamma \vdash_{ч} A : \tau$ *и* $B \twoheadrightarrow_\beta A$, *то* $\Gamma \vdash_{ч} B : \tau$.

Изоморфизм Карри-Ховарда

Теорема (изоморфизм Карри-Ховарда)

1. *Если* $\Gamma \vdash \tau$, *то найдётся* Δ, A, *что* $\Gamma = |\Delta|$ *и* $\Delta \vdash A : \tau$;
2. *Если* $\Gamma \vdash A : \tau$, *то* $|\Gamma| \vdash \tau$.