

Об алгебраической топологии

Ещё один способ определения эквивалентности

Теорема

$f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ и $f \circ g = id_B$, $g \circ f = id_A$ тогда и только тогда, когда f биективна и $f^{-1} = g$

Доказательство.

- ▶ f инъективна, поскольку если найдутся $x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)$, то и $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, значит, $id_A(x_1) = id_A(x_2)$.
- ▶ f сюръективна, поскольку если найдётся $y \in B$, что нет $x : f(x) = y$, то $f(g(y)) \neq y$, т.е. $id_B(y) \neq y$.
- ▶ $f^{-1} = g$, поскольку если $f(x) = y$, то $g(f(x)) = x$.

Обратное утверждение очевидно из разбора определения.



Гомеоморфизм

Определение

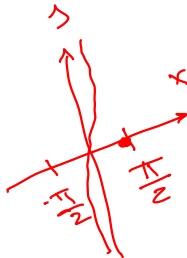
Топологические пространства X и Y гомеоморфны ($X \simeq Y$), если найдётся непрерывная биективная $f : X \rightarrow Y$, для которой f^{-1} также непрерывна.

Теорема

Гомеоморфизм сохраняет мощность и компактность.

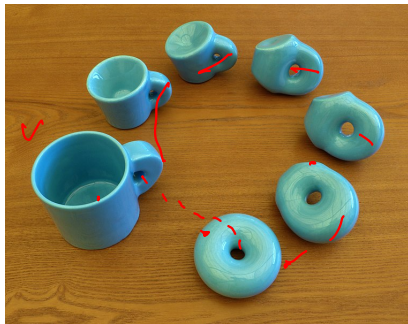
Пример

- ▶ Если пространства с дискретной топологией равномощны, то они гомеоморфны (очевидно).
- ▶ $[0, 1]$ не гомеоморфен \mathbb{R} (не сохраняется компактность).
- ▶ $(0, 1)$ гомеоморфен \mathbb{R} : пусть $f(x) = \operatorname{tg}(\pi(x - 0.5))$.



Бублик гомеоморфен чашке

Классическая шутка (файл с Wikimedia Commons, Topology_joke.jpg, Keenan Crane and Henry Segerman):



Гомотопия

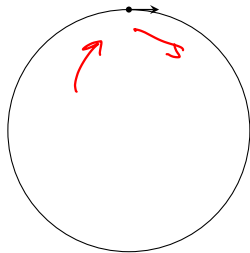
Определение

Будем говорить, что непрерывные функции $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ гомотопны ($f_0 \sim f_1$), если существует непрерывная функция $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, что $h(x, 0) = f_0$ и $h(x, 1) = f_1$. Иначе ещё будем обозначать $h_t(x) := h(x, t)$.

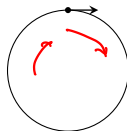
Пример

Эти петли гомотопны, $h_t(x) = t(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$:

$$f: [0, 1] \rightarrow X \\ f(0) = f(1)$$



$$h_1(x) = (\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$$



$$h_{0.5}(x) = \frac{1}{2}(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$$

$$h_0(x) = 0(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$$

Гомотопическая эквивалентность пространств

Определение

Будем называть топологические пространства X и Y гомотопически эквивалентными, если найдутся непрерывные функции $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$, что $g \circ f \sim id_X$ и $f \circ g \sim id_Y$.

$$[-1, 1] \sim \{0\}$$

\mathbb{R}

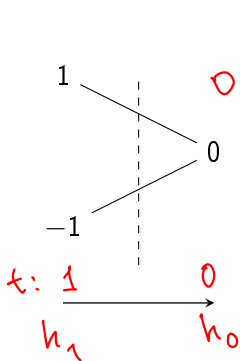
$$f: [-1, 1] \rightarrow 0$$

$$g: 0 \rightarrow [-1, 1]$$

$$h_0^{\leftarrow}(y) = 0 \quad h_1^{\leftarrow}(y) = 0$$

$$f \circ g \stackrel{\text{"}}{=} f \circ g \quad id_Y \stackrel{\text{"}}{=} id_Y$$

$[-1, 1] \sim \{0\}$: возьмём $f(x) := 0, g(x) := 0$. Очевидно, что $f(g(y)) \sim id_Y$: возьмём $h_t^{\leftarrow}(y) = 0$. В обратную сторону: $h_t^{\rightarrow}(x) = x \cdot (t)$. Тогда $h_0^{\rightarrow}(x) = 0 = g(f(x))$, и $h_1^{\rightarrow}(x) = x = id_X$



$$0 = x \cdot 0 = g \circ f(x)$$

$$h_1^{\rightarrow}(x) = x \cdot 1 = x = id_X$$

Связности



Определение

Пространство стягиваемо, если любая петля гомотопна точке (тождественной петле).

Пример

$$f: [0, 1] \rightarrow D^2$$

/ петля в $\{0\}$

$D^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| < 1\}$ стягиваемо. Пусть f — некоторая петля и $g(z) = (0, 0)$. Тогда $h_t(z) = (1 - t) \cdot f(z)$ покажет, что $f \sim g$.

Определение

Пространство линейно связно, если любые две точки соединены путём.

Пространство односвязно, если оно линейно связно и стягиваемо.

Сферы

$$A \cdot t + B(1-t)$$


ретракция

$$S^0 = \{-1, 1\}$$



$$S^1$$



Определение

$$S^k := \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid |x| = 1\}$$

Пример

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \sim S^1: \text{ пусть } f(\langle x, y \rangle) = \frac{\langle x, y \rangle}{|\langle x, y \rangle|}, \text{ и } g(\langle x, y \rangle) = \langle x, y \rangle.$$



$$g \circ f = \frac{(x, y)}{(x, y) + 1(x, y) \cdot t} = h_t(x, y)$$

$$f \circ g = \frac{(x, y)}{1(x, y) = 1} = (x, y) = \text{id}_{S^1}$$

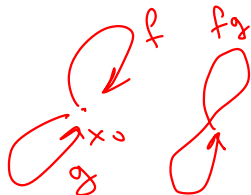
$$h_t(z) = z$$

Произведение петель

Определение

Рассмотрим пространство X с отмеченной точкой $x_0 \in X$ и петли f и g , что $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = x_0$. Тогда

$$fg(x) = \begin{cases} f(2x), & x < 0.5 \\ g(2x - 1), & x \geq 0.5 \end{cases}$$



Теорема

Если f, g, h — петли в пространстве $\langle X, x_0 \rangle$, то

1. $f(\underline{gh}) \sim (fg)h$
2. Если $e(x) := x_0$, то $fe \sim ef \sim f$
3. Если $f^{-1}(x) := f(1 - x)$, то $ff^{-1} \sim f^{-1}f \sim e$.

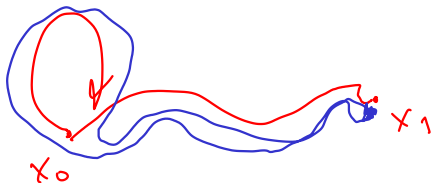
Фундаментальная группа

Определение

Группа петель в пространстве $\langle X, x_0 \rangle$ — фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$.

Теорема

Если пространство X линейно-связно, то $\pi_1(X, x_0)$ изоморфна $\pi_1(X, x_1)$ при любом выборе x_0 и x_1 .



Ветви функции



Теорема

Множество непрерывных отображений $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ и множество непрерывных функций $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(0) = 0$ и $f(1) \in \mathbb{Z}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии.

Доказательство.

Рассмотрим некоторое отображение $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ и рассмотрим

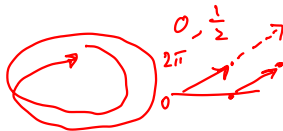
- ▶ $\alpha(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$. Заметим, что уравнение $\alpha(f(x)) = \varphi(\alpha(x))$ позволяет как выразить f по φ с точностью до прибавления целого значения, $\alpha^{-1}(t) \in [0, 1)$:

$$f(x) = \alpha^{-1}(\varphi(\alpha(x))) + C_1(x)$$

так и φ по f :

$$\varphi(a) = \alpha(f(\alpha^{-1}(a)))$$

$[0, 1]$



Однако, поскольку $f(0) = 0$ и функция непрерывна, мы можем доопределить $C_1(x)$ единственным образом.



Фундаментальная группа S^1

Теорема

Фундаментальная группа S^1 эквивалентна группе целых чисел, \mathbb{Z} .

Доказательство.

Возьмём петлю $\alpha(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$. Тогда $\psi : S^1 \rightarrow S^1$ сопоставим петлю $\psi(\alpha(t))$.

По теореме выше каждому отображению $\psi : S^1 \rightarrow S^1$ можно сопоставить $f_\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда определим отображение группы петель на целые числа так:
 $|\psi| = f_\psi(1)$. Найдём $|\psi\xi|$:

$$f_{\psi\xi}(x) = \begin{cases} f_\psi(2x), & x < 0.5 \\ f_\psi(2x - 1) + f_\xi(1), & x \geq 0.5 \end{cases}$$

$$\sum_0^1 f_{\psi\xi} = \sum_0^{0.5} f_\psi + \sum_{0.5}^1 f_\psi + f_\xi(1) = f_\psi(1) + f_\xi(1)$$

Заметим, что $f_{\psi\xi}$ непрерывна и удовлетворяет граничным условиям, $f_{\psi\xi}(x) = \alpha^{-1}(\psi\xi(\alpha(x))) + C(x)$. Такая функция единственна, значит, это функция, соответствующая $\psi\xi$. Поэтому $|\psi\xi| = |\psi| + |\xi|$. Значит, мы задали изоморфизм групп.



$$S^1 \not\sim [0, 1]$$

Теорема

Если $X \sim Y$, то $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$.

Теорема

$$S^1 \not\sim [0, 1]$$

Доказательство.

$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, однако $\pi_1([0, 1]) = \{0\}$, так как $[0, 1]$ стягиваемо.

Теорема

S^1 не односвязна.

$$f: X \rightarrow Y$$

$$\varphi(x_0): I \rightarrow X$$

$$f(\varphi(x_0)): I \rightarrow Y$$

$$|\varphi| \rightarrow 1$$

$$|\varphi| \rightarrow 0$$



π_1 в Аренде

```
\instance Aut {A : \1-Type} (a : A) : Group (a = a)
| ide => idp
| * => * > - ком. негати
| ide-left => idp_* >
| ide-right _ => idp
| *-assoc => * > -assoc
| inverse => inv
| inverse-left => inv_* >
| inverse-right => * > -inv
```

idp



```
\func  $\pi_1$ -1 (X : \1-Type) (x : X) => Aut x
```

```
\func  $\pi_1$ Mult {X : \1-Type} {x : X} (a b :  $\pi_1$ -1 X x) => a * b
```

Отображение наматывания

```
\data Sphere1
  | base1
  | loop : base1 = base1
\where \func ploop => path loop
```

S^1

base1
loop

```
\func wind (x : Int) : base1 = base1
  | pos 0 => idp
  | pos (suc n) => wind (pos n) n-1 *> path loop
  | neg (suc n) => wind (neg n) *> inv (path loop)
```

+1

-1

+1 s.

```
\func code (x : Sphere1) : \Set0
  | base1 => Int
  | loop i => iso isuc ipred ipred_isuc isuc_ipred i
```

```
\func encode (x : Sphere1) (p : base1 = x) : code x => transport code p 0
```


Аксиома унивалентности

Определение

$A \simeq B$, если найдутся $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$, $f \circ g = id_B$, $g \circ f = id_A$ ✓

Аксиома унивалентности: $(A \simeq B) \simeq (A = B)$

```
\func Equiv (A B : \Type) => \Sigma (f : A -> B)           1
                                   (g : B -> A)           2
                                   (\Pi (x : A) -> g (f x) = x) 3
                                   (\Pi (y : B) -> f (g y) = y) 4
```

Из равенства легко получить эквивалентность:

```
\func equality=>equivalence (A B : \Type) (p : A = B) : Equiv A B =>
  transport (Equiv A) p (\lam x => x, \lam x => x, \lam x => idp, \lam x => idp)
```

Обратное же постулирует аксиома унивалентности:

```
\func equivalence=>equality (A B : \Type) (e : Equiv A B) : A = B =>
  path (iso e.1 e.2 e.3 e.4)
```

Доказательство $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

```
\func encode_decode {x : Sphere1} (p : base1 = x) : decode x (encode x p) =  
  | idp => idp
```

```
\func encode_wind (x : Int) : encode base1 (wind x) = x  
  | ...
```

```
\func Loop_S1 : (base1 = base1) = Int =>  
  path (iso (encode base1) wind encode_decode encode_wind)
```

$f : S^1 \rightarrow \text{Int}$, $g : \text{Int} \rightarrow S^1$, причём $g(fx) = x$ и $f(gx) = x$.