

Лекция 3.
Нормализуемость λ_{\rightarrow} .
Система F

Нормализуемость

Определение

- ▶ Терм A назовём слабо нормализуемым, если существует последовательность редукций, приводящих его в нормальную форму.
- ▶ Терм A назовём сильно нормализуемым, если не существует бесконечной последовательности его редукций.
- ▶ Исчисление назовём сильно нормализуемым, если любой его терм сильно нормализуем.

Теорема

Бестиповое лямбда-исчисление не является сильно нормализуемым

Доказательство.

$$\Omega \rightarrow_{\beta} \Omega$$



Теорема

Просто типизированное лямбда-исчисление является сильно нормализуемым

Сильно нормализуемые множества

Определение

SN — множество всех сильно нормализуемых лямбда-термов.

Насыщенное множество $\mathcal{X} \subseteq SN$ — такое, что:

1. для любых $n \geq 0$ и $M_1, \dots, M_n \in SN$

$$x \ M_1 \dots M_n \in \mathcal{X}$$

2. для любых $n \geq 1$, $M_1, \dots, M_n \in SN$ и $N \in \Lambda$

$$N[x := M_1] \ M_2 \dots M_n \in \mathcal{X} \text{ влечёт } (\lambda x.N) \ M_1 \ M_2 \dots M_n \in \mathcal{X}$$

Лемма

SN — насыщенное.

Интересен пункт 2: если $N[x := M_1] \ M_2 \dots M_n \in SN$, то $(\lambda x.N) \ M_1 \ M_2 \dots M_n \in SN$.

Подстановка подчёркнутого возвращает к редукции посылки, бесконечная «локальная» подстановка может быть повторена с посылкой.

Определение

Если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \Lambda$, то $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} = \{X \in \Lambda \mid \forall Y \in \mathcal{A} . X \ Y \in \mathcal{B}\}$

Пример

$\{\lambda x. \lambda y. x\} \rightarrow \{X \mid X =_{\beta} \lambda x. \lambda y. y\} = \{Not, \lambda t. F, Xor \ T, \dots\}$

Определение

$$\llbracket \sigma \rrbracket = \begin{cases} SN, & \sigma = \alpha \\ \llbracket \tau_1 \rrbracket \rightarrow \llbracket \tau_2 \rrbracket, & \sigma = \tau_1 \rightarrow \tau_2 \end{cases}$$

Лемма

Если \mathcal{A}, \mathcal{B} насыщены, то $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ насыщено

$\llbracket \sigma \rrbracket$ насыщено.

Лемма

$\llbracket \sigma \rrbracket \subseteq SN$

Оценка

Определение

Оценка $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \Lambda$ — отображение переменных в лямбда-термы.

$M_\rho := M[x_1 := \rho(x_1), \dots, x_n := \rho(x_n)]$, где x_i — все свободные переменные M .

Будем писать $\rho \models M : \sigma$, если $M_\rho \in \llbracket \sigma \rrbracket$. Будем писать $\rho \models \Gamma$, если $\rho(x) \in \llbracket \sigma \rrbracket$ для всех $x : \sigma \in \Gamma$.

$\Gamma \models M : \sigma$, если для любой оценки ρ из $\rho \models \Gamma$ следует $\rho \models M : \sigma$.

Теорема

$\Gamma \vdash M : \sigma$ влечёт $\Gamma \models M : \sigma$.

Доказательство индукцией по структуре вывода $\Gamma \vdash M : \sigma$ со следующим разбором случаев.

Аксиома

Вывод имеет вид:

$$\overline{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}$$

Фиксируем $\rho \models \Gamma \cup \{x : \sigma\}$, тогда $x_\rho = \rho(x) \in \llbracket \sigma \rrbracket$

Отсюда $\Gamma, x : \sigma \models x : \sigma$

Применение

Вывод имеет вид:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau}$$

Фиксируем $\rho \models \Gamma$. По индукционному предположению, $\Gamma \models M : \sigma \rightarrow \tau$ и $\Gamma \models N : \sigma$, так что $\rho \models M : \sigma \rightarrow \tau$ и $\rho \models N : \sigma$, что означает, что $M_\rho \in \llbracket \sigma \rrbracket \rightarrow \llbracket \tau \rrbracket$ и $N_\rho \in \llbracket \sigma \rrbracket$. Тогда $(M N)_\rho = M_\rho N_\rho \in \llbracket \tau \rrbracket$.

Абстракция

Вывод имеет вид:

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau} \quad x \notin FV(\Gamma)$$

Пусть $\rho \models \Gamma$. Чтобы показать $(\lambda x.M)_\rho \in \llbracket \sigma \rightarrow \tau \rrbracket$, надо для всех $N \in \llbracket \sigma \rrbracket$ показать $(\lambda x.M)_\rho N \in \llbracket \tau \rrbracket$.

Фиксируем $N \in \llbracket \sigma \rrbracket$. Тогда $\rho^{x:=N} \models \Gamma, x : \sigma$. По индукционному предположению, $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$, так что $\rho^{x:=N} \models M : \tau$ (по определению \models). То есть, $M_{\rho^{x:=N}} \in \llbracket \tau \rrbracket$.

Произведём редукцию:

$$(\lambda x.M)_\rho N = (\lambda x.M)^{y_1:=\rho(y_1), \dots, y_n:=\rho(y_n)} N \rightarrow_\beta M^{y_1:=\rho(y_1), \dots, y_n:=\rho(y_n), x:=N} = M_{\rho^{x:=N}}$$

Заметим, $N \in \llbracket \sigma \rrbracket \subseteq SN$ и $M_{\rho^{x:=N}} \in \llbracket \tau \rrbracket$. Заметим ещё, что $M_{\rho^{x:=N}} = M_\rho[x := N]$. По определению насыщенного множества из $M_\rho[x := N] \in \llbracket \tau \rrbracket$ следует требуемое $(\lambda x.M)_\rho N \in \llbracket \tau \rrbracket$.

Основная теорема

Теорема

$\Gamma \vdash M : \sigma$ влечёт $M \in SN$

Доказательство.

По предыдущей теореме, $\Gamma \models M : \sigma$. Построим «тождественную» оценку, $\rho(x) = x$ для всех $x : \tau \in \Gamma$.

Рассмотрим каждый $x : \tau$ из контекста. По лемме выше, $\llbracket \tau \rrbracket$ насыщенное. По определению насыщенного, $x \in \llbracket \tau \rrbracket$. Поэтому $\rho \models \Gamma$.

Поскольку $\Gamma \vdash M : \sigma$, то $M = M_\rho \in \llbracket \sigma \rrbracket$. А по лемме выше, $\llbracket \sigma \rrbracket \subseteq SN$. □

О свойстве сильной нормализуемости

Правило сечения в S_∞ (без одной боковой формулы):

$$\frac{\sigma \vee \neg\beta \quad \beta}{\sigma}$$

Или перепишем в привычной грамматике (подобно Modus Ponens):

$$\frac{\beta \rightarrow \sigma \quad \beta}{\sigma}$$

И заметим нечто похожее в просто-типизированном лямбда-исчислении:

$$\frac{(\lambda x.P) : \tau \rightarrow \sigma \quad Q : \tau}{(\lambda x.P) Q : \sigma} \quad \beta - \text{редекс}$$

Поэтому добавим пункты к изоморфизму Карри-Ховарда:

Логика	λ_{\rightarrow}
Правило сечения, М.Р.	Бета-редекс
Устранение сечения	Бета-редукция
Теорема об устранении сечений	Нормализуемость

ИИП второго порядка

- ▶ Алфавит: $a - z$, \vee , $\&$, \rightarrow , \neg , \forall , \exists .
- ▶ Метаварьиные: α для формул, p, x, y, z для переменных.
- ▶ $F ::= p \mid (F \star F) \mid (\forall p.F) \mid (\exists p.F) \mid \perp$
- ▶ Сокращения записи: приоритеты как в ИИВ, подкванторное выражение продолжается направо настолько, насколько возможно.

Пример

$$\forall p. \forall q. p \rightarrow q \rightarrow p$$

Теория доказательств

Правила вывода совпадают с правилами для ИИВ, добавлены 4 новых:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall p. \varphi} (p \notin FV(\Gamma)) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall p. \varphi}{\Gamma \vdash \varphi[p := \theta]}$$
$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[p := \theta]}{\Gamma \vdash \exists p. \varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash \exists p. \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} (p \notin FV(\Gamma, \psi))$$

Теория моделей

Простая неполная модель.

$$V = \{И, Л\}$$

$$\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket = \begin{cases} Л, \llbracket P \rrbracket = И, \llbracket Q \rrbracket = Л \\ И, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$\llbracket \forall p. Q \rrbracket = \begin{cases} И, \llbracket Q \rrbracket^{p:=Л, И} = И \\ Л, \text{ иначе} \end{cases}$$

Выразимость всех связок через \forall, \rightarrow

Заметим, что достаточно определить связки \forall и \rightarrow .

Связка	Способ выразить
$\alpha \& \beta$	$\forall p. (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow p) \rightarrow p$
$\alpha \vee \beta$	$\forall p. (\alpha \rightarrow p) \rightarrow (\beta \rightarrow p) \rightarrow p$
\perp	$\forall p. p$
$\exists p. \varphi$	$\forall f. (\forall p. \varphi \rightarrow f) \rightarrow f$

С так определёнными связками оказывается возможно показать все правила вывода. Например, примем $\alpha \& \beta$ за $\forall p. (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow p) \rightarrow p$ и покажем, что из $\alpha \& \beta$ следует α :

$$\frac{\frac{\frac{\alpha, \beta \vdash \alpha}{\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha}}{\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha} \quad \frac{\vdash \forall p. (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow p) \rightarrow p}{\vdash (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha} \quad p := \alpha}{\alpha}$$

Система F

Определение

Типы в системе F:

$$\tau = \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \dots & (\text{атомарные типы}) \\ \tau \rightarrow \tau \\ \forall \alpha. \tau & (\alpha - \text{переменная}) \end{cases}$$

Определение

Пред-лямбда-терм в системе F (типизировано по Чёрчу):

$$F ::= x \mid (\lambda x^{\tau}. F) \mid (F F) \mid (\Lambda \alpha. F) \mid (F \tau)$$

Типовая абстракция и применение

Примеры соответствующих конструкций из C++.

- ▶ Типовая абстракция, $\Lambda\tau.W$:

```
template<typename t>
class W {
    t x;
}
```

- ▶ Типовое применение, $W \text{ int}$:

```
W<int> w_test;
```


В системе F определены следующие правила вывода:

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x^\tau. M : \tau \rightarrow \sigma} \quad (x \notin FV(\Gamma))$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda \alpha. M : \forall \alpha. \sigma} \quad (\alpha \notin FV(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \sigma}{\Gamma \vdash M \tau : \sigma[\alpha := \tau]}$$

Начнем с β -редукции:

1. Типовая β -редукция: $(\Lambda \alpha. M^\sigma) \tau \rightarrow_\beta M[\alpha := \tau] : \sigma[\alpha := \tau]$
2. Классическая β -редукция: $(\lambda x^\sigma. M)^{\sigma \rightarrow \tau} X \rightarrow_\beta M[x := X] : \tau$