Лекция 3.
Нормализуемость $\lambda_{\to}$.
Система F

Нормализуемость

Определение

- *Терм A назовём слабо нормализуемым, если существует последовательность редукций, приводящих его в нормальную форму.*
- *Терм A назовём сильно нормализуемым, если не существует бесконечной последовательности его редукций.*
- *Исчисление назовём сильно нормализуемым, если любой его терм сильно нормализуем.*

Теорема

Бестиповое лямбда-исчисление не является сильно нормализуемым

Доказательство.

$\Omega \to_\beta \Omega$ $\square$

Теорема

Просто типизированное лямбда-исчисление является сильно нормализуемым

Сильно нормализуемые множества

Определение

SN — множество всех сильно нормализуемых лямбда-термов.
Насыщенное множество $\mathcal{X} \subseteq SN$ — такое, что:

1. *для любых $n \geqslant 0$ и $M_1, \dots, M_n \in SN$*

$$x\ M_1 \dots M_n \in \mathcal{X}$$

2. *для любых $n \geqslant 1$, $M_1, \dots, M_n \in SN$ и $N \in \Lambda$*

$$N[x := M_1]\ M_2 \dots M_n \in \mathcal{X} \text{ влечёт } (\lambda x.N)\ M_1\ M_2 \dots M_n \in \mathcal{X}$$

Лемма

SN — насыщенное.

Интересен пункт 2: если $N[x := M_1]\ M_2 \dots M_n \in SN$, то $\underline{(\lambda x.N)\ M_1}\ M_2 \dots M_n \in SN$.
Подстановка подчёркнутого возвращает к редукции посылки, бесконечная «локальная» подстановка может быть повторена с посылкой.

Определение

Если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \Lambda$, *то* $\mathcal{A} \to \mathcal{B} = \{X \in \Lambda \mid \forall Y \in \mathcal{A}\ .\ X\ Y \in \mathcal{B}\}$

Пример

$\{\lambda x.\lambda y.x\} \to \{X \mid X =_\beta \lambda x.\lambda y.y\} = \{Not, \lambda t.F, Xor\ T, \dots\}$

Определение

$$[\![\sigma]\!] = \begin{cases} SN, & \sigma = \alpha \\ [\![\tau_1]\!] \to [\![\tau_2]\!], & \sigma = \tau_1 \to \tau_2 \end{cases}$$

Лемма

Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *насыщены, то* $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *насыщено*

$[\![\sigma]\!]$ *насыщено.*

Лемма

$[\![\sigma]\!] \subseteq SN$

Оценка

Определение

Оценка $\rho : \mathcal{V} \to \Lambda$ *— отображение переменных в лямбда-термы.*
$M_\rho := M[x_1 := \rho(x_1), \ldots, x_n := \rho(x_n)]$, *где* x_i *— все свободные переменные* M*.*
Будем писать $\rho \models M : \sigma$, *если* $M_\rho \in [\![\sigma]\!]$*. Будем писать* $\rho \models \Gamma$, *если* $\rho(x) \in [\![\sigma]\!]$ *для всех* $x : \sigma \in \Gamma$*.*
$\Gamma \models M : \sigma$, *если для любой оценки* ρ *из* $\rho \models \Gamma$ *следует* $\rho \models M : \sigma$*.*

Теорема

$\Gamma \vdash M : \sigma$ *влечёт* $\Gamma \models M : \sigma$*.*

Доказательство индукцией по структуре вывода $\Gamma \vdash M : \sigma$ со следующим разбором случаев.

Аксиома

Вывод имеет вид:

$$\overline{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}$$

Фиксируем $\rho \models \Gamma \cup \{x : \sigma\}$, тогда $x_\rho = \rho(x) \in [\![\sigma]\!]$
Отсюда $\Gamma, x : \sigma \models x : \sigma$

Применение

Вывод имеет вид:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\ N : \tau}$$

Фиксируем $\rho \models \Gamma$. По индукционному предположению, $\Gamma \models M : \sigma \to \tau$ и $\Gamma \models N : \sigma$, так что $\rho \models M : \sigma \to \tau$ и $\rho \models N : \sigma$, что означает, что $M_\rho \in [\![\sigma]\!] \to [\![\tau]\!]$ и $N_\rho \in [\![\sigma]\!]$. Тогда $(M\ N)_\rho = M_\rho\ N_\rho \in [\![\tau]\!]$.

Абстракция

Вывод имеет вид:

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau}\ x \notin FV(\Gamma)$$

Пусть $\rho \models \Gamma$. Чтобы показать $(\lambda x.M)_\rho \in [\![\sigma \to \tau]\!]$, надо для всех $N \in [\![\sigma]\!]$ показать $(\lambda x.M)_\rho\ N \in [\![\tau]\!]$.
Фиксируем $N \in [\![\sigma]\!]$. Тогда $\rho^{x:=N} \models \Gamma, x : \sigma$. По индукционному предположению, $\Gamma, x : \sigma \models M : \tau$, так что $\rho^{x:=N} \models M : \tau$ (по определению $\models$). То есть, $M_{\rho^{x:=N}} \in [\![\tau]\!]$.
Произведём редукцию:

$$(\lambda x.M)_\rho N = (\lambda x.M)^{y_1:=\rho(y_1),\dots,y_n:=\rho(y_n)}\ N \to_\beta M^{y_1:=\rho(y_1),\dots,y_n:=\rho(y_n),x:=N} = M_{\rho^{x:=N}}$$

Заметим, $N \in [\![\sigma]\!] \subseteq SN$ и $M_{\rho^{x:=N}} \in [\![\tau]\!]$. Заметим ещё, что $M_{\rho^{x:=N}} = M_\rho[x := N]$.
По определению насыщенного множества из $M_\rho[x := N] \in [\![\tau]\!]$ следует требуемое $(\lambda x.M)_\rho\ N \in [\![\tau]\!]$.

Основная теорема

Теорема

$\Gamma \vdash M : \sigma$ *влечёт* $M \in SN$

Доказательство.

По предыдущей теореме, $\Gamma \models M : \sigma$. Построим «тождественную» оценку, $\rho(x) = x$ для всех $x : \tau \in \Gamma$.

Рассмотрим каждый $x : \tau$ из контекста. По лемме выше, $[\![\tau]\!]$ насыщенное. По определению насыщенного, $x \in [\![\tau]\!]$. Поэтому $\rho \models \Gamma$.

Поскольку $\Gamma \models M : \sigma$, то $M = M_\rho \in [\![\sigma]\!]$. А по лемме выше, $[\![\sigma]\!] \subseteq SN$. $\square$

О свойстве сильной нормализуемости

Правило сечения в S_∞ (без одной боковой формулы):

$$\frac{\sigma \vee \neg\beta \qquad \beta}{\sigma}$$

Или перепишем в привычной грамматике (подобно Modus Ponens):

$$\frac{\beta \rightarrow \sigma \qquad \beta}{\sigma}$$

И заметим нечто похожее в просто-типизированном лямбда-исчислении:

$$\frac{(\lambda x.P) : \tau \rightarrow \sigma \qquad Q : \tau}{(\lambda x.P)\ Q : \sigma}\ \beta - \text{редекс}$$

Поэтому добавим пункты к изоморфизму Карри-Ховарда:

Логика	$\lambda_\rightarrow$
Правило сечения, M.P.	Бета-редекс
Устранение сечения	Бета-редукция
Теорема об устранении сечений	Нормализуемость

ИИП второго порядка

- Алфавит: $a - z$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$.
- Метапеременные: α для формул, p, x, y, z для переменных.
- $F ::= p \mid (F \star F) \mid (\forall p.F) \mid (\exists p.F) \mid \perp$
- Сокращения записи: приоритеты как в ИИВ, подкванторное выражение продолжается направо настолько, насколько возможно.

Пример

$\forall p.\forall q.p \rightarrow q \rightarrow p$

Теория доказательств

Правила вывода совпадают с правилами для ИИВ, добавлены 4 новых:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall p.\varphi}(p \notin FV(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall p.\varphi}{\Gamma \vdash \varphi[p := \theta]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[p := \theta]}{\Gamma \vdash \exists p.\varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists p.\varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}(p \notin FV(\Gamma, \psi))$$

Теория моделей

Простая неполная модель.

$$V = \{\text{И}, \text{Л}\}$$

$$[\![\varphi \rightarrow \psi]\!] = \begin{cases} \text{Л}, [\![\varphi]\!] = \text{И}, [\![\psi]\!] = \text{Л} \\ \text{И}, \text{иначе} \end{cases}$$

$$[\![\forall p.\varphi]\!] = \begin{cases} \text{И}, [\![\varphi]\!]^{p:=\text{Л},\ \text{И}} = \text{И} \\ \text{Л}, \text{иначе} \end{cases}$$

Выразимость всех связок через $\forall$, $\rightarrow$

Заметим, что достаточно определить связки $\forall$ и $\rightarrow$.

Связка	Способ выразить
$\alpha \& \beta$	$\forall p.(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow p) \rightarrow p$
$\alpha \vee \beta$	$\forall p.(\alpha \rightarrow p) \rightarrow (\beta \rightarrow p) \rightarrow p$
$\perp$	$\forall p.p$
$\exists p.\varphi$	$\forall f.(\forall p.\varphi \rightarrow f) \rightarrow f$

С так определёнными связками оказывается возможно показать все правила вывода. Например, примем $\alpha \& \beta$ за $\forall p.(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow p) \rightarrow p$ и покажем, что из $\alpha \& \beta$ следует α:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\alpha, \beta \vdash \alpha}}{\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha}}{\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha} \qquad \dfrac{\vdash \forall p.(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow p) \rightarrow p}{\vdash (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha}\; p := \alpha}{\alpha}$$

Система F

Определение

Типы в системе F:

$$\tau = \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma ... & (\textit{атомарные типы}) \\ \tau \to \tau \\ \forall \alpha . \tau & (\alpha \textit{ - переменная}) \end{cases}$$

Определение

Пред-лямбда-терм в системе F (типизировано по Чёрчу):

$$F ::= x \mid (\lambda x^{\tau}.F) \mid (F\ F) \mid (\Lambda \alpha.F) \mid (F\ \tau)$$

Типовая абстракция и применение

Примеры соответствующих конструкций из C++.

- Типовая абстракция, $\Lambda\tau.W$:

```
template<typename t>
class W {
    t x;
}
```

- Типовое применение, $W\ int$:

```
W<int> w_test;
```

В системе F определены следующие правила вывода:

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x^{\tau}.M : \tau \to \sigma} \quad (x \notin FV(\Gamma))$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha.M : \forall\alpha.\sigma} \quad (\alpha \notin FV(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.\sigma}{\Gamma \vdash M\tau : \sigma[\alpha := \tau]}$$

Начнем с β-редукции:

1. Типовая β-редукция: $(\Lambda\alpha.M^{\sigma})\tau \to_{\beta} M[\alpha := \tau] : \sigma[\alpha := \tau]$
2. Классическая β-редукция: $(\lambda x^{\sigma}.M)^{\sigma\to\tau} X \to_{\beta} M[x := X] : \tau$