

Линейные и уникальные типы

Контекст требует формализации

Напомним правила вывода:

$$\frac{}{\Gamma, \theta \vdash \theta} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$$

Что такое контекст?

1. Это множество? Ведь $\alpha, \alpha \rightarrow \beta = \alpha \rightarrow \beta, \alpha$

$$\frac{\frac{}{\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{}{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \vdash \alpha}}{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \vdash \beta}$$

2. Разве это множество? Ведь $\alpha, \alpha \neq \alpha$.

$$\frac{\frac{\frac{}{\alpha, \alpha \vdash \alpha}}{\alpha \vdash \alpha \rightarrow \alpha}}{\vdash \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha}$$

Структурные правила

Перестановка:

$$\frac{\Xi, \Delta, \Sigma, H \vdash \varphi}{\Xi, \Sigma, \Delta, H \vdash \varphi}$$

Сжатие:

$$\frac{\Xi, \delta, \delta \vdash \varphi}{\Xi, \delta \vdash \varphi}$$

Ослабление:

$$\frac{\Xi \vdash \varphi}{\Xi, \delta \vdash \varphi}$$

Сжатие и ослабление предполагают содержательные действия.

$$\frac{\frac{y : \beta \vdash y : \beta}{y : \beta, x : \alpha \vdash y : \beta}}{y : \beta \vdash \lambda x^\alpha. y : \alpha \rightarrow \beta}$$

$$\frac{\frac{x : \alpha \vdash x : \alpha \quad x : \alpha \vdash x : \alpha}{x : \alpha, x : \alpha \vdash (x, x) : \alpha \times \alpha}}{x : \alpha \vdash (x, x) : \alpha \times \alpha}$$

Два варианта удаления конъюнкции

Вариант 1 (классический):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \beta}$$

Вариант 2 (альтернативный):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \times \beta \quad \Delta, \alpha, \beta \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}$$

Варианты эквивалентны, но только при наличии структурных правил:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma, \Gamma \vdash \alpha \times \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \times \beta \quad \frac{\overline{\alpha \vdash \alpha}}{\alpha, \beta \vdash \alpha}}{\Gamma \vdash \alpha}$$

Изоморфизм Карри-Ховарда

- ▶ Сжатие — копирование значения
- ▶ Ослабление — удаление значения
- ▶ Классическая конъюнкция:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \text{fst}(P) : \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash P : \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \text{snd}(P) : \beta}$$

- ▶ Альтернативная конъюнкция:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \alpha \times \beta \quad \Delta, x : \alpha, y : \beta \vdash E : \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \text{case } P \text{ of } (x, y) \rightarrow E : \varphi}$$

Линейная логика (вариант Филиппа Вадлера)

Грамматика:

$$\varphi ::= X \mid \varphi \multimap \varphi \mid \varphi \otimes \varphi \mid \varphi \& \varphi \mid \varphi \oplus \varphi \mid \varphi \wp \varphi \mid !\varphi$$

Два типа контекстов: $\langle \alpha \rangle$ — линейный, $[\beta]$ — интуиционистский

Структурные правила:

$$\frac{\Xi, \Gamma, \Delta, H \vdash \alpha}{\Xi, \Delta, \Gamma, H \vdash \alpha} \quad \frac{\Gamma, [\alpha], [\alpha] \vdash \beta}{\Gamma, [\alpha] \vdash \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma, [\alpha] \vdash \beta}$$

Аксиомы:

$$\overline{[\alpha] \vdash \alpha} \quad \overline{\langle \alpha \rangle \vdash \alpha}$$

Правила для связок

Правила для «конечно» (возможно тиражировать построение α):

$$\frac{[\Gamma] \vdash \alpha}{[\Gamma] \vdash !\alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash !\alpha \quad \Delta, [\alpha] \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}$$

Линейная импликация:

$$\frac{\Gamma, \langle \alpha \rangle \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \multimap \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \multimap \beta \quad \Delta \vdash \alpha}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}$$

Правила для связок: конъюнкция и дизъюнкция

Мультипликативная конъюнкция (возможно построить и α и β одновременно):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Delta \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \otimes \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \otimes \beta \quad \Delta, \langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}$$

Аддитивная конъюнкция (возможно построить α и возможно построить β , что-то одно по нашему выбору):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \beta}$$

Аддитивная дизъюнкция (возможно построить α или возможно построить β , что-то одно по их выбору):

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta \quad \Delta, \langle \alpha \rangle \vdash \varphi \quad \Delta, \langle \beta \rangle \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi}$$

Пример: интуиционистская импликация

Введём обозначение:

$$\alpha \rightarrow \beta := !\alpha \multimap \beta$$

Заметим, что такая импликация ведёт себя как интуиционистская:

$$\frac{\overline{\langle !\alpha \rangle \vdash !\alpha} \quad \Gamma, [\alpha] \vdash \beta}{\Gamma, \langle !\alpha \rangle \vdash \beta} \\ \hline \Gamma \vdash !\alpha \multimap \beta$$

$$\frac{\Gamma \vdash !\alpha \multimap \beta \quad \frac{[\Delta] \vdash \alpha}{[\Delta] \vdash !\alpha}}{\Gamma, [\Delta] \vdash \beta}$$

Вложение остальных интуиционистских связок в линейные

Например, можно так:

$$\alpha \rightarrow \beta := !\alpha \multimap \beta$$

$$\alpha \times \beta := \alpha \& \beta$$

$$\alpha + \beta := !\alpha \oplus !\beta$$

Комбинаторный базис BCKW

- ▶ $B := \lambda x. \lambda y. \lambda z. x (y z)$ (комбинатор Z , Zusammensetzung)
- ▶ $C := \lambda x. \lambda y. \lambda z. x z y$ (комбинатор T , verTauschnung)
- ▶ $K := \lambda x. \lambda y. x$ (Konstanz)
- ▶ $W := \lambda x. \lambda y. x y y$

BC — линейная логика (значение нельзя ни удалить, ни скопировать)

BCK — аффинная логика (значение можно удалить, но не скопировать)

$BCKW$ — интуиционистская логика

Почему? Например, $W : (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

Реализация, уникальные типы

Язык

Роды:

$$\kappa ::= \mathcal{T} \mid \mathcal{U} \mid \star \mid \kappa \rightarrow \kappa$$

Типы:

$$\begin{aligned}\text{Int} &: \mathcal{T} \\ \rightarrow &: \star \rightarrow \star \rightarrow \mathcal{T} \\ \circ, \times &: \mathcal{U} \\ \vee, \wedge &: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \\ \neg &: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \\ \text{Attr} &: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \star\end{aligned}$$

Обозначения:

$$\begin{aligned}t^u &:= \text{Attr } t \ u \\ a \rightarrow^u b &:= \text{Attr } (a \rightarrow b) \ u\end{aligned}$$

Значения:

$$E ::= x^{\odot} \mid x^{\otimes} \mid \lambda x. E \mid E \ E$$

Типизация

Правила типизации имеют такой вид:

$$\Gamma \vdash E : \tau|_{fv}$$

Здесь Γ сопоставляет переменным типы рода \star . fv сопоставляет переменным типы рода \mathcal{U} .

Правила вывода:

$$\overline{\Gamma, x : t^u \vdash x^{\odot} : t^u|_{x:u}}$$

$$\overline{\Gamma, x : t^{\times} \vdash x^{\otimes} : t^{\times}|_{x:\times}}$$

$$\frac{\Gamma, x : a \vdash E : b|_{fv}}{\Gamma \vdash \lambda x.E : a \rightarrow \bigvee^{fv'} b|_{fv'}} \quad fv' := fv \setminus \{x : \tau\}$$

$$\frac{\Gamma \vdash E_1 : a \rightarrow^u b|_{fv_1} \quad \Gamma \vdash E_2 : a|_{fv_2}}{\Gamma \vdash E_1 E_2 : b|_{fv_1 \cup fv_2}}$$

Смысл булевский выражений

Будем считать уникальность истиной, а неуникальность — ложью. И рассмотрим, например, функцию `fst`:

$$\text{fst} : (t^u, s^v)^{w \vee u} \rightarrow t^u$$

Это то же самое, что и

$$\text{fst} : (t^u, s^v)^w \rightarrow t^u, w \leq u$$

Однако, подобные выражения могут быть разрешены с помощью *булевской унификации*.

Где применяются линейные/уникальные типы

Ручное распределение памяти:

```
void compute() {  
    char* x = new char[1024];  
    char* y = x;  
    y[10] = 'a';  
    delete [] x;          // delete y; нельзя! будут ошибки.  
}
```

Автоматическое распределение памяти (сборка мусора, подсчёт ссылок):

<pre>public void compute() { int[] x = new int[1024]; int[] y = x; x[10] = 15; }</pre>	<pre>fn compute() { let x = Arc::new("abcde"); let y = x.clone(); }</pre>
--	---

А давайте посчитаем количество ссылок при компиляции. Линейный тип всегда существует в единственном экземпляре.