# Парадокс Жирара

# Расширение обобщённых типовых систем

Расширение обобщённых типовых систем, 5 уровней:

| № | название | обозначение, примеры |
|---|---|---|
| 0 | термы: доказательства | x, $\lambda p.q$, ... |
| 1 | типы: утверждения | $1 = 1$ |
| 2 | рода: семейства утверждений | $\star$ |
| 3 | сорт «квадратик» | $\square$ (единственный представитель) |
| 4 | сорт «треугольник» | $\triangle$ (единственный представитель) |

# Обобщённые типовые системы, системы $U$ и $U^-$

| Название | Аксиомы | Правила |
| --- | --- | --- |
| $\lambda HOL$ | $\star : \Box,\ \Box : \triangle$ | $(\star,\star),\ (\Box,\Box),\ (\Box,\star)$ |
| | $\star : \Box,\ \Box : \triangle$ | $(\star,\star),\ (\Box,\Box),\ (\Box,\star),\ (\triangle,\star)$ |
| $\lambda U^-$ | $\star : \Box,\ \Box : \triangle$ | $(\star,\star),\ (\Box,\Box),\ (\Box,\star),\ (\triangle,\Box)$ |
| $\lambda U$ | $\star : \Box,\ \Box : \triangle$ | $(\star,\star),\ (\Box,\Box),\ (\Box,\star),\ (\triangle,\Box),\ (\triangle,\star)$ |

# Парадокс Бурали-Форте

### Теорема

*Множества всех ординалов не существует*

### Доказательство.

Пусть $\Omega$ — множество всех ординалов.

1. Легко заметить, что $\Omega$ является ординалом:
   - Все ординалы сравнимы (если есть аксиома выбора) — линейный порядок
   - Если множество ординалов $X \subseteq \Omega$ непусто $(x \in X)$, то в $\min X = \min(x' \cap X)$. Поскольку $x'$ — ординал, то в любом его непустом подмножестве есть минимум — полный порядок.
   - Если $y \in x$ и $x \in \Omega$, то $y$ ординал — транзитивность.
2. Однако, любой ординал $\alpha \in \Omega$, то есть $\Omega < \Omega$
3. Однако, это есть противоречие с определением строгого порядка.

$\square$

# Порядковые типы

## Definition

Множества $(A, \prec)$ и $(B, \sqsubset)$ имеют одинаковый *порядковый тип*, если существует биекция между ними, сохраняющая порядок:

$$\forall a \in A.\forall b \in A.a \prec b \leftrightarrow f(a) \sqsubset f(b)$$

## Definition

Операции перехода от множества к порядковому типу и назад:

1. $\sigma$ — по порядковому типу (по соответствующему ординалу) получить вполне упорядоченное множество: $\sigma\alpha = \{t : \text{ординал} | t < \alpha\}$
2. $\tau$ — по вполне упорядоченному множеству получить его порядковый тип: $\tau X$

Заметим, что (здесь $X$ — некоторое множество ординалов):

$$\sigma\tau X = \{\beta : \text{ординал} | \beta < \tau X\} = \{\tau\sigma\alpha | \alpha \in X\}$$

# Парадоксальные универсумы

Напомним, что $X \to Y := \Pi x^X . Y$.

### Definition

*Булеан* множества $S$ (power set) — множество всех предикатов на $S$:

$$\wp : S \to \star$$

Рассмотрим $\sigma : \mathcal{U} \to \wp\mathcal{U}$ и $\tau : \wp\mathcal{U} \to \mathcal{U}$

### Definition

$\mathcal{U}$ парадоксален, если для всех $X \in \wp\mathcal{U}$ выполнено

$$\sigma\tau X = \{\tau\sigma x | x \in X\}$$

## Предшественники

Фиксируем парадоксальный универсум $\mathcal{U}$ вместе с отображениями $\sigma$ и $\tau$.

### Definition

Назовём $y$ *предшественником* $x$ ($y < x$), если $y \in \sigma x$.

### Lemma (о выражении предшественника)

*Если $t < \tau\sigma x$, то $t = \tau\sigma y$ для некоторого $y < x$*

### Доказательство.

Пусть $X = \sigma x = \{y | y < x\}$; это множество всех предшественников $x$.
$t < \tau\sigma x$, то есть $t \in \sigma\tau\sigma x$, то есть $t \in \sigma\tau X$, то есть (по парадоксальности) $t \in \{\tau\sigma y | y \in X\}$, то есть $t = \tau\sigma y$ для некоторого $y \in X$, то есть $t = \tau\sigma y$ при $y < X$. $\square$

### Lemma

*Если $p < q$, то $\tau\sigma p < \tau\sigma q$*

# Индуктивность и фундированность

## Definition

Рассмотрим универсум $\mathcal{U}$. Индуктивность множеств и фундированность:

1. $X \subseteq \mathcal{U}$ — *индуктивное*, если всякий $x$, предшественники которого содержатся в $X$, сам содержится в $X$:

$$\text{Если для всех } y < x \text{ выполнено } y \in X\text{, то } x \in X$$

2. $x \in \mathcal{U}$ — *фундированный*, если $x$ принадлежит всем индуктивным множествам.

# Множество $\Omega$

## Definition

Фиксируем некоторый универсум $\langle \mathcal{U}, \sigma, \tau \rangle$. Тогда $\Omega = \tau\{x | x \text{ фундирован}, x \in \mathcal{U}\}$ — порядковый тип множества всех фундированных множеств.

Легко заметить, что $\Omega \in \mathcal{U}$.

## Лемма

*Если $X$ индуктивно, то и $T = \{y | \tau\sigma y \in X\}$ также индуктивно.*

## Доказательство.

Для индуктивности $T$ нужно показать, что если $y < x$ влечёт $y \in T$, то $x \in T$. Фиксируем $x$, что $\tau\sigma y \in X$ для всех $y < x$. Тогда заметим, что если $k < \tau\sigma x$, то найдётся такой $y$, что $k = \tau\sigma y$ и $y < x$ (лемма о выражении предшественника), то есть $k \in X$. Значит (индуктивность $X$), $\tau\sigma x \in X$, то есть $x \in T$. $\square$

# $\Omega$ фундировано

## Лемма

*В парадоксальном универсуме* ($\sigma\tau X = \{\tau\sigma x | x \in X\}$) *множество* $\Omega$ *фундировано.*

## Доказательство.

- Фиксируем индуктивное $X \subseteq \mathcal{U}$. Чтобы показать $\Omega \in X$, по определению индуктивности надо показать, что если $t < \Omega$, то $t \in X$. Пусть $F$ — множество всех фундированных элементов, $F \subseteq \mathcal{U}$.
- Пусть $t < \Omega$, тогда $t \in \sigma\Omega$ (определение предшествования), отсюда $\sigma\Omega = \sigma\tau F$ (определение $\Omega$).
- По парадоксальности, $\sigma\tau F \subseteq \{\tau\sigma x | x \in F\}$, то есть $t \in \sigma\Omega \subseteq \{\tau\sigma x | x \in F\}$, то есть $t = \tau\sigma\omega$ при некотором $\omega \in F$.
- Поскольку $X$ индуктивно, то по лемме и множество $T = \{y | \tau\sigma y \in X\}$ индуктивно. По определению, ему принадлежат все фундированные элементы: $F \subseteq T$. Значит, $\omega \in F$ влечёт $\omega \in T$, то есть $t = \tau\sigma\omega \in X$.

$\square$

# Множество $\Omega$ противоречиво

### Лемма

*$\Omega$ не может быть фундировано.*

### Доказательство.

Можно показать, используя обратное включение: $\{\tau\sigma x | x \in X\} \subseteq \sigma\tau X$. $\square$

### Теорема

*Множество $\Omega$ не существует*

### Доказательство.

$\Omega$ фундировано, но его фундированность ведёт к противоречию. $\square$

# Построение парадокса в $U^-$

Теперь, имея идею парадокса, покажем, что в $U^-$ есть парадоксальные универсумы.

Вспомним изоморфизм Карри-Ховарда: $P(x) \approx x \in \{t \mid P(t)\} \approx X : P(x)$

После этого выразим операции $\sigma$, $\tau$ и построим $\Omega$.

1. $\mathcal{U} = \Pi X : \Box.((\wp X \to X) \to \wp X)$
2. $\tau = \lambda X : \wp\mathcal{U}.\lambda A : \Box.\lambda c : (\wp A \to A).\lambda a : A.\varphi$,
   где $\varphi = \Pi P^{\wp\mathcal{U}}.\Pi x^{\mathcal{U}}.(X\ x \Rightarrow (P(c(\{x\ A\}\ c)))) \Rightarrow P\ a$
3. $\sigma = \lambda x : \mathcal{U}.((x\,\mathcal{U})\ \tau)$

Заметим, что для задания $\mathcal{U}$ нам требуются правила $(\triangle, \Box)$.

Несложно показать, что $(\mathcal{U}, \sigma, \tau)$ — парадоксальный: $\mathcal{U}$ парадоксален, если для всех $X \in \wp\mathcal{U}$ выполнено

$$\sigma\tau X = \{\tau\sigma x | x \in X\}$$

Например потому, что для всех $X : \wp\mathcal{U}$ выполнено
$\sigma\tau X =_\beta \bigcap\{P \subseteq \mathcal{U} \mid \forall x \in X.\tau\sigma x \in P\}$

А далее строим $\Omega$ и выписываем применение двух утверждений: $\Omega$ фундирован и $\Omega$ фундирован $\to \perp$.

# Упрощённая формула

Рассмотрим $\sigma : \mathcal{U} \to \wp\wp\mathcal{U}$ и $\tau : \wp\wp\mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Назовём $\mathcal{U}$ мощным универсумом, если при $C \in \wp\wp\mathcal{U}$ выполнено

$$\sigma\tau C = \{X \mid \{y | \tau\sigma y \in X\} \in C\}$$

Дадим следующие обозначения:

1. Универсум:
$$\mathcal{U} = \Pi x^{\square}.(\wp\wp x \to x) \to \wp\wp x$$
2. Отображения:
$$\tau t = \lambda X^{\square}.\lambda f^{\wp\wp X \to X}.\lambda p^{\wp X}.t \lambda x^{\mathcal{U}}.p(f\ (x\ X)\ f)$$
$$\sigma s = (s\ \mathcal{U})\ \lambda t^{\wp\wp\mathcal{U}}.\tau t$$
3. Вспомогательное:
$$\Delta = \lambda y^{\mathcal{U}}.(\Pi p^{\wp\mathcal{U}}.\sigma y p \to p \tau\sigma y) \to \bot$$

# Омега и парадокс

В качестве $\Omega$ берём $\tau\{X|X$ индуктивен$\}$:

$$\Omega = \tau\ \lambda p^{\wp\mathcal{U}}.\Pi x^{\mathcal{U}}.\sigma x p \to p x$$

Тогда следующее выражение обитает в типе «ложь» ($\bot = \Pi p^{\star}.p$):

$$\begin{gathered}
\lambda a_0 : \Pi p : \wp\mathcal{U}.(\Pi x : \mathcal{U}.(\sigma x p) \to (p x)) \to (p\Omega)). \\
((a_0\ \Delta)\ \lambda x^{\mathcal{U}}.\lambda a_2^{(\sigma x \Delta)}.\lambda a_3^{\Pi p:\wp\mathcal{U}.(\sigma x p)\to p\tau\sigma x}. \\
((a_3\ \Delta)\ a_2)\ \lambda p^{\wp\mathcal{U}.(a_3\ \lambda y:\mathcal{U}.p\tau\sigma y)}(\lambda p^{\wp\mathcal{U}}.a_0\ \lambda y : \mathcal{U}.(p\tau\sigma y))) \\
\lambda p^{\wp\mathcal{U}}.\lambda a_1^{\Pi x:\mathcal{U}.\sigma x p\to p x}.(a_1\ \Omega)\ \lambda x^{\mathcal{U}}.a_1\ \tau\sigma x
\end{gathered}$$