

Estudio de Curvas Geodésicas y Cálculo con Métodos Iterativos Clásicos

Gastón Gabriel Aguilera Melogno (5164414-2),
Joaquin Urrisa Iriart (4917924-8),
Guillermo Guerrero Praderio (4817343-1)

Métodos Numéricos
Facultad de Ingeniería. Universidad de la República
Montevideo, Uruguay

Abstract

El objetivo del estudio de geodésicas es la búsqueda de la trayectoria más corta entre dos puntos pertenecientes a una superficie. Es claro que la distancia mínima entre dos puntos de un plano está dada por el segmento de recta que los une, pero en otras superficies distintas el problema se complejiza. El estudio de estas curvas es de vital importancia en distintas áreas que serán introducidas con el cometido de mostrar aplicaciones actuales del tema estudiado.

Por otra parte, se enfocará principalmente en la resolución de la curva geodésica del Paraboloide Hiperbólico a través de los distintos métodos iterativos clásicos programables para la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), más precisamente el Problema de Valores Iniciales (PVI), entre los que se encuentran el algoritmo de Euler, Método del Trapecio, algoritmo de Runge Kutta, entre otros. A su vez se realizará un estudio de error de cada método mediante la comparación de los resultados obtenidos con el uso de comandos propios del software GNU Octave, presentando distintos conceptos como son orden de consistencia y estabilidad numérica. Por último se llegará a la conclusión de cuál es el método que más se asemeja a la solución obtenida por el software.

Keywords: Curvas Geodésicas, Paraboloide Hiperbólico, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), Problema de Valores Iniciales (PVI), Métodos Iterativos Clásicos .

¹ Emails:{guilleguerrero23, joaquinurrisa, gastonaguilera7}@gmail.com

1 Introducción

El estudio de curvas minimizantes es de vital importancia en áreas como desplazamiento sobre territorio, instalación de cables submarinos, planificación de trayectorias de robots, mapeo de objetos de 3D a 2D, construcción de túneles, construcción de cascos de barcos, entre otros.

El nombre de las geodésicas surge en Grecia Antigua con el inicio del estudio de la Tierra al arribarse a la conclusión que la misma no era plana. Con el paso del tiempo se utilizó dicho nombre para hacer referencia a curvas de menor distancia entre dos puntos [3]. La teoría de estas curvas toma importancia cuando en 1697 Johann Bernoulli resolvió el problema de la distancia mínima entre dos puntos en una superficie convexa. Sin embargo, el estudio se formaliza fuertemente en el siglo XVIII con la obtención, por parte de Euler, de la ecuación de estas curvas [6]. Con el paso de los años distintos autores aplicaron distintos métodos, como el método de Runge-Kutta de cuarto orden, el método iterativo de Newton-Raphson para resolver problemas sobre las aplicaciones ya mencionadas.

Como ya se nombró, el estudio de este tipo de curvas es aplicado en variadas áreas, por esta razón se introducirá uno de estos como ejemplo. La Geodesia es la ciencia que estudia la figura, forma y dimensiones de la Tierra. Suele dividirse en Geodesia Teórica y Geodesia Práctica. La primera estudia la forma y dimensiones de la Tierra mientras que la segunda establece los procedimientos para la medida de proporciones terrestres. Dentro de esta última es donde toma un papel importante el estudio geodésico, ya que la toma de mediciones debe realizarse sobre la superficie terrestre la cual no es plana y muchas veces esta tarea puede dificultarse.

Cuando se debe realizar el estudio de la superficie terrestre de una cierta área, se separa dicha superficie en triángulos y lo que se busca es determinar el valor de cada ángulo, con los que luego se puede obtener la medida de cada lado. Para realizar este método a gran escala, se realizan los siguientes pasos: primero se mide con gran precisión una pequeña distancia y luego mediante una "red de ampliación de base" se obtiene la distancia entre los dos vértices correspondientes. Con la tecnología actual, dichas mediciones se realizan con el apoyo de herramientas como son los teodolitos (utilizados para la obtención de ángulos) o distanciómetros; pero este último mide la distancia entre dos puntos en línea recta. Esta no es la medida buscada, pues la distancia buscada debe ser medida sobre la superficie de referencia. Por lo tanto, la distancia entre dos puntos de la superficie

debe calcularse siguiendo la curva geodésica (de menor distancia, en caso de haber distintas) que los une. Aquí toma un papel muy importante la teoría de las curvas geodésicas (una breve exposición de la misma se encuentra en la sección 2). Se omite la descripción de la fórmula exacta para calcular la distancia entre dos puntos, pero el lector puede consultarla en las citas bibliográficas [1].

Este proyecto se organizará en las siguientes secciones:

Sección 2 define una introducción a la teoría de las geodésicas; como son las ecuaciones que la caracterizan y se muestra la curva geodésica del Paraboloide Hiperbólico. Se presentan los algoritmos de Métodos Iterativos Clásicos para la resolución de PVI en la Sección 3. La siguiente sección, la Sección 4, contiene un análisis cuantitativo y cualitativo del rendimiento de los algoritmos implementados para la solución de la superficie; dando paso así a la sección 5 la cual presenta las conclusiones obtenidas.

2 Problema

Dada una superficie en \mathbb{R}^3 se trabajará con una parametrización de la misma. Se define una parametrización como una función continua e inyectiva $\phi : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ siendo $x, y, z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. La imagen de la función ϕ es la superficie parametrizada en \mathbb{R}^3 .

Tomando como razonamiento inicial que la distancia mínima entre dos puntos en el espacio, es la dada por el segmento de recta que los une y que lo que caracteriza a la recta es que su derivada segunda es nula, se tratará de razonar de manera análoga en superficies de \mathbb{R}^3 . El problema reside al momento de evaluar la distancia en superficies que ya presentan curvaturas, por lo que las curvas que pertenecen a dichas superficies no tendrán nunca derivada segunda nula. Nombraremos a una curva expresada en la parametrización de la superficie como :

$$\alpha(t) = \phi(u(t), v(t)) \quad (1)$$

Utilizando esta expresión para descomponer a la derivada segunda en la siguiente ecuación :

$$\alpha''(t) = a\phi_{u(t)} + b\phi_{v(t)} + cN \quad (2)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y N hace referencia al vector normal del plano tangente al punto de la curva estudiado. (Notar que $\{\phi_u, \phi_v, N\}$ forma una base de vectores de \mathbb{R}^3).

Por lo ya mencionado, en superficies que presentan curvatura, $\alpha''(t) \neq 0$, pues la componente de la normal es distinta de cero y ortogonal a $\phi_{u(t)}$ y $\phi_{v(t)}$. Entonces se busca que $a\phi_{u(t)} + b\phi_{v(t)} = 0$, en otras palabras, que la curvatura geodésica sea

igual a cero. Por lo tanto, se toma como primera definición de geodésicas a aquellas curvas que presentan curvatura geodésica cero.

Derivando la ecuación (1) dos veces, se obtiene:

$$\alpha''(t) = \phi_u u'' + \phi_v v'' + \phi_{uu}(u')^2 + \phi_{vv}(v')^2 + 2\phi_{uv}u'v' \quad (3)$$

y para lograr la expresión de la ecuación (2) se deben escribir los vectores ϕ_{uu} , ϕ_{vv} y ϕ_{uv} en la base de vectores $\{\phi_u, \phi_v, N\}$. Entonces:

$$\phi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \phi_u + \Gamma_{11}^2 \phi_v + C_1 N \quad (4)$$

$$\phi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \phi_u + \Gamma_{12}^2 \phi_v + C_2 N \quad (5)$$

$$\phi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \phi_u + \Gamma_{22}^2 \phi_v + C_3 N \quad (6)$$

Nombraremos Γ_{jk}^i con $i, j, k = 1, 2$ como los símbolos de Christoffel, los cuales se calculan a través de la llamada Primera Forma Fundamental [7].

Sustituyendo en (3) las ecuaciones (4), (5) y (6) obtenemos:

$$\alpha''(t) = \phi_u [u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 v' u' + \Gamma_{22}^1 (v')^2] + \phi_v [v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 v' u' + \Gamma_{22}^2 (v')^2] + CN$$

por [8].

Teniendo en cuenta lo mencionado sobre la componente normal (no será nula) y que ϕ_u y ϕ_v son vectores linealmente independientes se busca que se cumpla el siguiente sistema de ecuaciones:

$$u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 v' u' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0 \quad (7)$$

$$v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 v' u' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0 \quad (8)$$

De aquí surge la ecuación que cumplen las geodésicas, notar que estas son Ecuaciones Diferenciales:

$$u'' = -\Gamma_{11}^1 (u')^2 - 2\Gamma_{12}^1 v' u' - \Gamma_{22}^1 (v')^2 \quad (9)$$

$$v'' = -\Gamma_{11}^2 (u')^2 - 2\Gamma_{12}^2 v' u' - \Gamma_{22}^2 (v')^2 \quad (10)$$

Sin embargo en esta investigación se utilizará el siguiente sistema de ecuaciones

diferenciales que es equivalente al anterior:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = p \quad (11)$$

$$\frac{\delta v}{\delta t} = q \quad (12)$$

$$\frac{\delta p}{\delta t} = -\Gamma_{11}^1 p^2 - 2\Gamma_{12}^1 pq - \Gamma_{22}^1 q^2 \quad (13)$$

$$\frac{\delta q}{\delta t} = -\Gamma_{11}^2 p^2 - 2\Gamma_{12}^2 pq - \Gamma_{22}^2 q^2 \quad (14)$$

Por lo tanto se tiene como una segunda posible definición para curvas geodésicas a aquellas que cumplen con el planteado sistema de ecuaciones diferenciales.

Se estudiará ahora el sistema de ecuaciones que determinan la curva geodésica del paraboloides hiperbólico. Para comenzar, se parametrizará a esta superficie como $\alpha(t) = \phi(u(t), v(t)) = (u, v, uv)$. Al derivar se obtiene que $\phi_u = (1, 0, v)$ y $\phi_v = (0, 1, u)$. Entonces los símbolos de Cristoffel son: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^1 = \frac{v}{u^2+v^2+1}$ y $\Gamma_{12}^2 = \frac{u}{u^2+v^2+1}$. Por lo tanto se tiene que el sistema que debe cumplir una curva para ser geodésica en el paraboloides hiperbólico es:

$$\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta t} &= p \\ \frac{\delta v}{\delta t} &= q \\ \frac{\delta p}{\delta t} &= \frac{-2v}{u^2 + v^2 + 1} \times p \times q \\ \frac{\delta q}{\delta t} &= \frac{-2u}{u^2 + v^2 + 1} \times p \times q \end{aligned}$$

Notar que estas son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, pues la función incógnita solo depende de una variable independiente que en este caso es t (simboliza el tiempo) y además en cada ecuación aparecen a lo sumo derivadas primeras [5]. Para lograr escribir este sistema como un Problema de Valores Iniciales es necesario, además de contar con las ecuaciones diferenciales con las características ya mencionadas, partir de una solución inicial del sistemas. Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \\ \frac{-2v(t)}{u(t)^2+v(t)^2+1} \times p(t) \times q(t) \\ \frac{-2u(t)}{u(t)^2+v(t)^2+1} \times p(t) \times q(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y}(t)' = f(u(t), v(t), p(t), q(t))$$

Entonces el sistema queda expresado como un problema de valores iniciales de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}(t)' = f(u(t), v(t), p(t), q(t)) = f(\mathbf{Y}(t)) \\ \mathbf{Y}(t_0) = (u(t_0), v(t_0), p(t_0), q(t_0)) \end{cases}$$

3 Metodología

Se presentan los Métodos Iterativos Clásicos empleados para la resolución del PVI. La idea en la cual se basan dichos métodos es que dado un intervalo $[a, b]$ se lo discretiza en M subintervalos de longitud $h = \frac{b-a}{M}$ generando así una sucesión de puntos x_0, x_1, \dots, x_m . Luego cada uno aproximará la solución utilizando distintas recursiones que emplean distintos métodos. En general, la estructura del algoritmo de estos métodos es:

Require: $F(y_i), a, b, M, y_0$

- 1: $h = (b - a) / M$
 - 2: Declarar Valores[1,M]= \emptyset
 - 3: Valores[1,1] $\leftarrow y_0$
 - 4: **for** $i=1 \rightarrow M-1$ **do**
 - 5: Utilizando la recurrencia del método calcular y_i
 - 6: Valores[1,i+1] $\leftarrow y_i$
 - 7: **end for**
 - 8: **return** Valores
-

A continuación se presentarán seis de los métodos anteriormente descritos.

Euler Hacia Adelante:

Este método aproxima la derivada de cada punto x_i a través del cociente incremental hacia adelante: $\frac{\delta y}{\delta x}(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$. Si se denota $y(x_i) := y_i$ y $\frac{\delta y}{\delta x}(x_i) := f(y_i)$, despejando se obtiene que $y_{i+1} = y_i + h \times f(y_i)$ [4].

Esta igualdad puede expresarse en términos de algoritmo como:

Require: $F(y_i), a, b, M, y_0$

```
1:  $h=(b-a)/M$ 
2: Declarar Valores[1,M]= $\emptyset$ 
3: Valores[1,1]  $\leftarrow y_0$ 
4: for  $i=1 \rightarrow M-1$  do
5:    $y_i \leftarrow y_{i-1} + h \times F(y_{i-1})$ 
6:   Valores[1,i+1]  $\leftarrow y_i$ 
7: end for
8: return Valores
```

El algoritmo debe recibir la función F donde se evaluarán los y_i y los valores de a, b que son el inicio y fin del intervalo discretizado respectivamente, además del valor de la cantidad de subintervalos que se quiere dividir $[a, b]$, o sea, M . Por último debe ser un parámetro de entrada el valor inicial de y , es decir y_0 .

En el paso 1 se calcula el valor de h , que es la longitud de los subintervalos; y en el paso 2 se declara una variable Valores del tamaño apropiado donde se guardarán los valores y_i y en el paso 3 se inicia con el valor de y_0 .

El paso que destaca de este algoritmo es el paso 5, pues es donde se realizan el cálculo de y_i utilizando el valor de y_{i-1} , h y $F(y_{i-1})$. Notar que como se utiliza una aproximación de la derivada hacia adelante solamente se pueden calcular los valores de y_i con $i \in \{1, \dots, M-1\}$ como es expresado en la condición de iteración (paso 4). Finalmente en el paso 6 se guardan en la variable Valores los valores de y_i y dicha variable es devuelta en el paso 8.

El error local e_{k+1} en el punto x_{k+1} es la diferencia entre y_{k+1} y el valor en x_{k+1} de la solución exacta del PVI con $y(x_k) = y_k$; por lo que en este método dicho error es: $e_{k+1} = \frac{h^2}{2} \times y(\epsilon_k)''$ con $\epsilon_k \in (x_k, x_{k+1})$. Debido a que el orden de consistencia se define como el orden del $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(h)}{h}$, en palabras esto significa que el orden de consistencia es uno menos que el orden local; teniéndose así que este método es consistente de orden uno [2].

Euler Hacia Atrás:

Es un método de orden uno que aproxima la derivada de cada punto x_i a través del cociente incremental hacia adelante pero utilizando la siguiente equivalencia $\frac{\delta y}{\delta x}(x_{i+1}) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$. Por lo tanto se tiene la siguiente recurrencia: $y_{i+1} = y_i + h \times f(y_{i+1})$. Notar que esta ecuación es implícita (pues y_{i+1} está en función de si misma) por lo tanto para poder hallar los valores de y_{i+1} será necesario implementar un Método Iterativo General (MIG). En particular se puede utilizar el método de punto fijo tomando: $y_{i+1} = G(y_{i+1}) = y_i + h \times f(y_{i+1})$ e iterando $y_{i+1}^{k+1} = G(y_{i+1}^k)$.

Pero para comenzar a iterar se necesita tomar $y_{i+1}^0 = y_i + h \times f(y_i)$, el algoritmo es :

Require: $F(y_i), a, b, M, y_0$

- 1: $h = (b - a) / M$
- 2: Declarar Valores[1,M]= \emptyset
- 3: Valores[1,1] $\leftarrow y_0$
- 4: **for** $i=1 \rightarrow M-1$ **do**
- 5: $y_i^{k+1} \leftarrow G(y_i^k)$, hasta que encuentre un \bar{k} que $|y_i^{\bar{k}+1} - y_i^{\bar{k}}| < \text{Tolerancia}$.
- 6: $y_i \leftarrow y_i^{\bar{k}}$
- 7: Valores[1,i+1] $\leftarrow y_i$
- 8: **end for**
- 9: **return** Valores

El algoritmo es muy similar al utilizando en el método anterior; la principal diferencia está en el paso 5 en el cual se realiza la iteración del MIG de punto fijo hasta que la diferencia entre valores consecutivos sea menor a cierta tolerancia (por lo general 10^{-3}) momento en el cual se considera que el valor obtenido es el valor a tomar para y_i .

Punto Medio:

Dicho método, que consta de orden dos, toma como aproximación de la derivada la diferencia centrada, es decir: $\frac{\delta y}{\delta x}(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h}$. Por lo tanto la fórmula de recurrencia es: $y_{i+1} = y_{i-1} + 2h \times f(y_i)$. Como en este caso para hallar el valor de y_{i+1} es necesario conocer los valor de y_{i-1} e y_i no basta para comenzar a iterar conocer solo el valor de y_0 , es necesario además conocer y_1 el cual se halla de la siguiente maner: $y_1 = y_0 + h f(y_0)$ (se aplica Euler hacia Adelante).

Require: $F(y_i), a, b, M, y_0$

- 1: $h = (b - a) / M$
- 2: Declarar Valores[1,M]= \emptyset
- 3: Valores[1,1] $\leftarrow y_0$
- 4: $y_1 \leftarrow y_0 + h \times f(y_0)$
- 5: Valores[1,2] $\leftarrow y_1$
- 6: **for** $i=1 \rightarrow M-2$ **do**
- 7: $y_{i+1} \leftarrow y_{i-1} + 2h \times f(y_i)$
- 8: Valores[1,i+2] $\leftarrow y_{i+1}$
- 9: **end for**
- 10: **return** Valores

Trapezio:

Es análogo al método de Euler pero en lugar de aproximar el área debajo de la función estudiada en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ con el área de un rectángulo lo hace mediante el área del trapecio de bases $f(y_i)$ y $f(y_{i+1})$; quedando así la siguiente iteración: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(y_i) + f(y_{i+1})]$. Nuevamente, al igual que el caso de Euler hacia Atrás, esta es una ecuación implícita por lo que para hallar los valores de y_{i+1} es necesario utilizar la siguiente iteración de MIG de punto fijo: $y_{i+1} = G(y_{i+1}) = y_i + \frac{h}{2} \times f(y_{i+1}) + \frac{h}{2} \times f(y_i)$ donde el último sumando es fijo durante cada iteración de $y_{i+1}^{k+1} = G(y_{i+1}^k)$. Se omite la descripción del pseudo-código de este algoritmo debido que es muy similar al algoritmo de Euler hacia Atrás. Es importante notar que este método es consistente de orden dos, debido a que el orden local es tres.

Heun:

Si se toma el método anterior pero para hallar el siguiente valor se utiliza Euler hacia Adelante en lugar de realizar iteraciones de punto fijo, se tiene la iteración: $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(y_i) + f(y_i + h \times f(y_i))]$; y este es el método de Heun, el cual es de orden dos.

Runge Kutta

Estos métodos son una familia de métodos multipasos que a diferencia de los casos ya mencionados, utilizan información de varios puntos interiores del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Se trabajará con el método de cuarto orden dado por la siguiente iteración:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2 \times k_2 + 2 \times k_3 + k_4] \\ k_1 = f(y_i) \\ k_2 = f(y_i + \frac{h}{2} \times k_1) \\ k_3 = f(y_i + \frac{h}{2} \times k_2) \\ k_4 = f(y_i + h \times k_3) \end{array} \right.$$

Entonces, el algoritmo es el siguiente:

Require: $F(y_i), a, b, M, y_0$

```
1:  $h=(b-a)/M$ 
2: Declarar Valores[1,M]= $\emptyset$ 
3: Valores[1,1]  $\leftarrow y_0$ 
4: for  $i=1 \rightarrow M-1$  do
5:    $k_1 \leftarrow F(y_{i-1})$ 
6:    $k_2 \leftarrow F(y_{i-1} + h \times k_1)$ 
7:    $k_3 \leftarrow F(y_{i-1} + \frac{h}{2} \times k_2)$ 
8:    $k_4 \leftarrow F(y_{i-1} + h \times k_3)$ 
9:    $y_i \leftarrow y_{i-1} + \frac{h}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4]$ 
10:  Valores[1,i+1]  $\leftarrow y_i$ 
11: end for
12: return Valores
```

Sin embargo es importante destacar que los de Runge Kutta son una familia amplia de métodos y existen distintas variantes de estos. Por ejemplo existen un conjunto denominado Segundo Método de Runge Kutta que siguen cierta recurrencia y dependiendo del valor que se tome de ciertos parámetros de dicha recurrencia se obtienen los métodos de Heun y de Punto Medio, entre otros [4].

4 Resultados Obtenidos

Utilizando el software GNU Octave se implementaron los algoritmos presentados para el cálculo de la curva geodésica del paraboloides hiperbólico. Además se utilizó el comando propio del software, "lsode", para la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden. Como hipótesis de trabajo, se tomó que los resultados obtenidos por el comando "lsode" son más exactos que aquellos obtenidos por las distintas implementación de los algoritmos.

El código² cuenta con los algoritmos de los métodos iterativos clásicos y el comando "lsode" que obtienen los valores de $u(t)$ y $v(t)$ en el intervalo discretizado $[a, b]$.

Finalmente se obtienen los vectores $\alpha(t) = (u(t), v(t), u(t)v(t))$ de cada iteración. Estos vectores son los utilizados para la medida de error: denotamos como $\alpha_{Metodo}(t)$ a los valores de $\alpha(t)$ calculados según $u(t)$ y $v(t)$ obtenidos por alguno de los métodos y análogamente denotamos $\alpha_{Octave}(t)$ a los valores de $\alpha(t)$ calculados según $u(t)$ y $v(t)$ obtenidos por Octave. Entonces el error relativo será $E = \frac{\|\alpha_{Metodo}(t) - \alpha_{Octave}(t)\|}{\|\alpha_{Octave}(t)\|}$.

² <https://github.com/Octave-Geodesicas/Metodos.Iterativos/blob/master/Programa-Principal.m>

La ejecución se realizó en el software ya nombrado GNU Octave utilizando un equipo con un procesador Intel i7, 2.40 GHz y 6GB RAM.

A continuación se presentan los resultados obtenidos al ejecutar el código con los valores de $a = 0$, $b = 10$ y $M = 10$ y el vector de valores iniciales: (0.50148, 0.50148, 0.70293, 0.70293) que son los valores iniciales de $u(t)$, $v(t)$, $p(t)$ y $q(t)$ respectivamente. El vector de valores iniciales fue tomado de esta forma ya que se está calculando una geodésica parametrizada por longitud de arco, por lo que la norma de la derivada de dicha curva debe ser igual a 1; y dichos valores cumplen con esta restricción. Es importante destacar que los valores de a , b y M fueron tomados simplemente a modo de ejemplo, el lector puede acceder al código y seleccionar sus propios valores iniciales para realizar las pruebas que desee.

La tabla 1 ilustra los valores de $u(t)$ (los valores de $v(t)$ son exactamente los mismos) obtenidos a través de los algoritmos presentados y la figura 1 muestra gráficamente dichos valores junto a los valores de $u(t)$ obtenidos a través del uso del comando lsode.

Table 1
Comparación de los valores $u(t)$ obtenidos a través de los distintos métodos iterativos clásicos

	Euler Adelante	Euler Atrás	Punto Medio	Trapezio	Heun	Runge Kutta
	0.50148	0.50148	0.50148	0.50148	0.50148	0.50148
	1.20441	1.02349	1.20441	1.08686	1.03954	1.07333
	1.57761	1.44677	1.24788	1.50104	1.45402	1.48919
	1.86481	1.80704	2.26628	1.83353	1.79741	1.82713
	2.10847	2.12457	1.31031	2.11868	2.09422	2.11791
	2.32430	2.41121	3.32658	2.37223	2.35840	2.37656
	2.52027	2.67362	0.70825	2.60271	2.59837	2.61163
	2.70112	2.91683	4.28263	2.81547	2.81957	2.82846
	2.86993	3.14424	-0.54012	3.01393	3.02569	3.03066
	3.02887	3.35860	4.88444	3.20062	3.21938	3.22082

Se puede ver que el desempeño de los algoritmos son "aceptables" al compararse con los resultados del comando del propio Octave. Los valores de los métodos de Runge Kutta, Heun y Trapecio son los que más próximos se

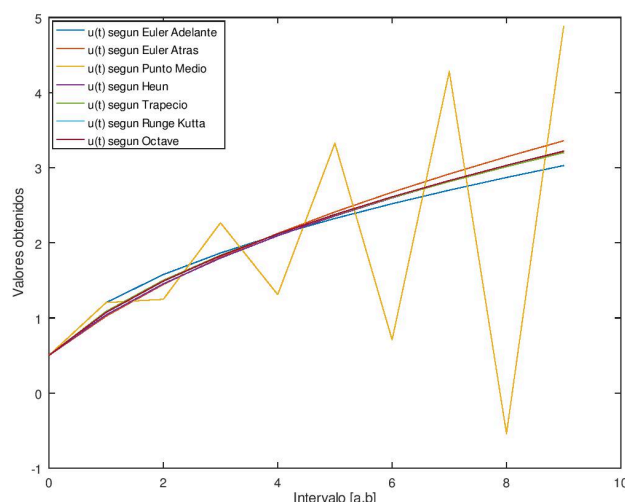


Fig. 1. Valores de $u(t)$ según los distintos métodos y el comando Isode

mantienen a los del comando Isode durante todo el intervalo discretizado; mientras que los valores de ambos métodos de Euler mantienen una cierta diferencia pero que es tolerable pues no debe olvidarse que estos métodos utilizan aproximaciones de las derivadas en cada punto del intervalo estudiado. Sin embargo hay un caso que sobresale al resto y este es el método del Punto Medio. Podemos ver en la tabla 1 que a partir de la cuarta iteración los valores de $u(t)$ según este método son considerablemente distintos al resto de los métodos. Esto se ve reflejado en la figura 1 a partir del valor 4 del intervalo $[a, b]$, ya que los valores de $u(t)$ a partir de dicho punto son notoriamente distintos a los valores de $u(t)$ obtenidos utilizando el comando de Octave.

Se podría pensar entonces que este método no sirve para aproximar la curva geodésica del paraboloide hiperbólico, pero esto no es así. Recordar que el método del Punto Medio aproxima la derivada del punto actual utilizando la diferencia centrada, es decir, $\frac{\delta y}{\delta x}(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h}$. Entonces si se busca mejorar dicha aproximación es necesario aumentar el valor de M por lo que se estará aumentando la cantidad de subintervalos en los que se divide el intervalo estudiado. De esta manera al calcular la derivada del punto actual se utilizará el valor funcional del siguiente punto y del punto anterior del intervalo que cumplirán con ser más cercanos al punto actual, generando así una mejora en la aproximación. Un ejemplo de esto es mostrado en la tabla 2, la cual muestra para distintos valores de M cuál es el promedio del error del método en cuestión.

Table 2
Variación del Error

Cantidad de Subintervalos	Promedio Error Punto Medio
10	0.65616
20	0.27944
50	0.040450
100	0.0094020
200	0.0023036
400	0.00057369

A partir del valor $M=50$, los valores de $u(t)$ convergen rápidamente a la solución esperada del sistema de ecuaciones diferenciales manteniendo obviamente un error que se debe a las aproximaciones realizadas por el método y errores de redondeo y truncamiento realizados por el software.

Por último, la figura 2 muestra el error de cada método implementado al variar la cantidad de subintervalos en el que se divide el intervalo $[a, b]$. Se aprecia que el método con menor error es el de Runge Kutta lo cual es esperable

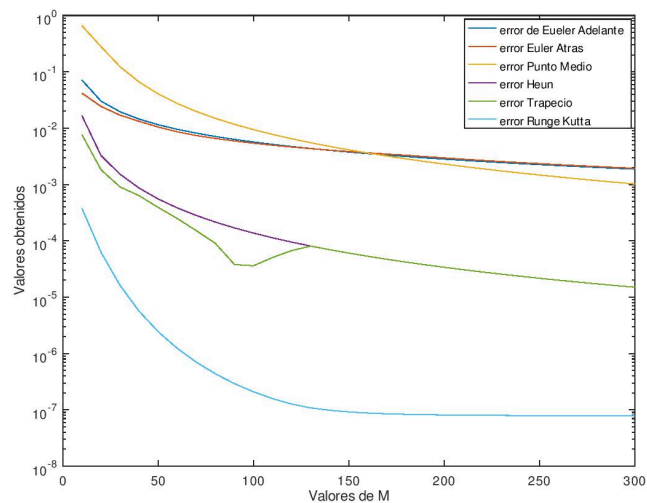


Fig. 2. Errores de los métodos implementados

debido a que es el único de orden cuatro. También se observa que el método del Punto Medio, si bien comienza siendo el método con mayor error, con una cantidad de subintervalos mayor a 200 mejora las aproximaciones realizadas en comparación de los algoritmos de Euler. Por último, sin importar el valor de M , es claro que la aproximación a la solución en cada punto del intervalo estudiado obtenida por el método del Trapecio es mejor a la obtenida por los métodos de Euler. Esto se debe a que mientras que los últimos aproximan el área bajo la curva estudiada por el área de un rectángulo, el primero lo hace utilizando el área de un trapecio como su nombre lo indica; generando así una mejor aproximación.

5 Conclusión

Se trató el tema de curvas geodésicas y se mostró la posibilidad de su cálculo, a través de herramientas computacionales, implementadas para la curva geodésica de una superficie en concreto: el paraboloide hiperbólico. Se llegó a que el sistema de ecuaciones diferenciales que deben cumplir la curva geodésica en dicha superficie puede ser expresado en un problema de valores iniciales.

Se presentaron distintos métodos iterativos clásicos para la resolución de EDO's en su versión de PVI. Cada uno de ellos presenta distintos grados de complejidad y distintos grados de error al comparar sus resultados con los resultados obtenidos por el software utilizado. Se mostró además que si bien es posible mejorar las aproximaciones de cada método al dividir la región discretizada en una gran cantidad de intervalos (al aumentar M), hay un método que es el que mejor aproxima a la solución (sin importar el valor de M). Este es el método de Runge Kutta de cuarto orden, que como su nombre lo indica es de orden cuatro por lo que es esperable que su error sea menor al resto de métodos (pues los restantes métodos presentados son de orden uno o dos). Se puede concluir entonces que dicho método es el que mejor aproxima la solución (bajo las hipótesis de trabajo consideradas) y el más rápido pues el aumentar el tamaño de M se traduce en un aumento de la cantidad de iteraciones del algoritmo que conlleva un aumento en el tiempo de ejecución.

References

- [1] Victor Corchete. *Geodesia Geométrica y Geodesia Física: Objetivo y Aplicaciones*, chapter 1.1, 1.4, 2.1, 2.2. Universidad de Almería, 2009.
- [2] Instituto de Matemáticas y Estadística "Rafael Laguardia". *Apuntes de Teórico, Métodos Numéricos*, chapter 6. Facultad de Ingeniería, Universidad de la República,

2016.

- [3] J. P. Fatelo and N. Martins-Ferreira. *Curvas geodésicas em superfícies*, 2014.
- [4] G. Fritz. Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias. Technical report, Laboratori de Càlcul Numéric.
- [5] Benito J. González Rodríguez, Domingo González Abreu, Mateo M. Jiménez Paiz, M. Isabel Marrero Rodríguez, and Sanabria García Alejandra. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias De Primer Orden*. Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna.
- [6] Nicholas M. Patrikalakis and Takashi. Maekawa. *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*, pages 265–291. Cambridge University Press, 2002.
- [7] Esmeralda Pereira de Faria. Um estudo sobre curvas, superfícies e suas parametrizações, 2017.
- [8] Antonio Valdés. Geometría diferencial con aplicaciones, 2013.