Investigación de Operaciones
Universidad Católica del Maule
Martín Mancilla V. - Claudio Durán N.
19.386.399-k - 19.215.697-1

TRABAJO FINAL

Resolución de Problemas de Optimización

1 Primer Problema

1.1 Formule el modelo que permita obtener el portafolio de inversión que optimice el retorno esperado de la corporación y simultáneamente no viole su política de inversión

1.1.1 Variable de Decisión

$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$X_i =$ Cantidad invertida en categoría i de la inversión. $\forall i \in N$

---

1 = Acciones comunes, 2 = Cuotas de fondos mutuos, 3 = Bonos de Oferta Pública, 4 = Bonos de Gobierno, 5 = Cuentas de Ahorro

1.1.2 Constantes

$RAE = [0.15,\ 0.12,\ 0.10,\ 0.05,\ 0.08]$
$FR = [1.6,\ 1.0,\ 0.5,\ 0.0,\ 0.1]$
$RAE_i =$ Retorno Anual Esperado para la categoría i de la inversión $\forall i \in N$.
$FR_i =$ Factor de riesgo para la categoría i de la inversión $\forall i \in N$.

1.1.3 Función Objetivo

$$maxZ = \sum_{i=1}^{5} X_i \times RAE_i$$

1.1.4 Restricciones

1. La inversión en acciones y en cuotas de fondos mutuos no debe ser mayor que un 30% del total de las inversiones.

$$x_1 + x_2 \leq 0.3 \times \sum_{i=1}^{5} x_i$$

2. La inversión en bonos de gobierno no debe ser inferior a la inversión en cuentas de ahorro.
$$x_4 \geq x_5$$
3. La inversión en debentures y bonos de gobierno no debe exceder el 50% del total de las inversiones.
$$x_3 + x_4 \leq 0.5 \times \sum_{i=1}^{5} x_i$$
4. La inversión en bonos de gobierno debe superar el 25% del total de las inversiones.
$$x_4 \geq 0.25 \times \sum_{i=1}^{5} x_i$$
5. La corporación Gamma requiere invertir la suma de US$ 1.000.000 en el próximo año fiscal.
$$\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 1,000,000$$
6. La corporación no permite que el portafolio de valores escogidos tenga un factor de riesgo ponderado mayor que 1.0.
$$\sum_{i=1}^{5} x_i \times FR_i \leq \sum_{i=1}^{i} x_i$$
7. No negatividad.
$$x_i \geq 0 \ \forall i \in N$$

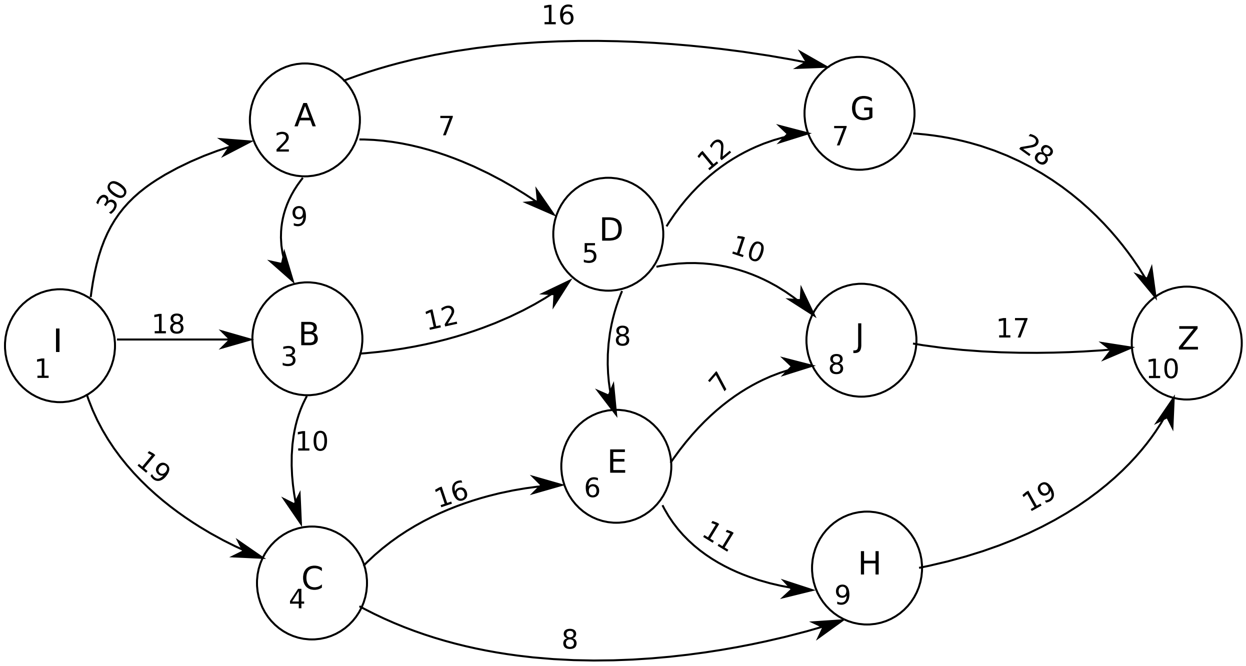
1.1.5 Valores óptimos y solución

- Soluciones óptimas:
  1. $x_1 = 300000$
  2. $x_2 = 0$
  3. $x_3 = 250000$
  4. $x_4 = 250000$
  5. $x_5 = 200000$

$\therefore$ Valor óptimo: $z = 98500$

2 Segundo Problema

2.1 Dibuje el grafo que represente el problema.



2.2 Formule el modelo que le permite resolver este problema

2.2.1 Nodos y Aristas

$$
\begin{aligned}
N =& \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\
A =& \{(1,2)(1,3)(1,4)(2,3)(2,5)(2,7)(3,4)(3,5)(4,6) \\
& (4,9)(5,6)(5,7)(5,8)(6,8)(6,9)(7,10)(8,10)(9,10)\}
\end{aligned}
$$

2.2.2 Variable de Decisión

X_{ij} = Cantidad de mensajes transmitidos de nodo i a nodo j $(\forall(i,j) \in A)$

v = Flujo máximo de los nodos

2.2.3 Función Objetivo

$$maxZ = v$$

2.2.4 Restricciones

- Oferta

$$(1)\ X_{12} + X_{13} + X_{14} = v$$

- Demanda

$$(10) - X_{710} - X_{810} - X_{910} = -v$$

- Transición

$$
\begin{aligned}
&(2) X_{23} + X_{25} + X_{27} - X_{12} = 0 \\
&(3) X_{34} + X_{35} - X_{13} - X_{23} = 0 \\
&(4) X_{46} + X_{49} - X_{14} - X_{34} = 0 \\
&(5) X_{56} + X_{57} + X_{58} - X_{25} - X_{35} = 0 \\
&(6) X_{68} + X_{69} - X_{46} - X_{56} = 0 \\
&(7) X_{710} - X_{27} - X_{57} = 0 \\
&(8) X_{810} - X_{58} - X_{68} = 0 \\
&(9) X_{910} - X_{49} - X_{69} = 0
\end{aligned}
$$

- Capacidad de aristas

$$
\begin{array}{lll}
X_{12} \leq 30 & X_{34} \leq 10 & X_{58} \leq 10 \\
X_{13} \leq 18 & X_{35} \leq 12 & X_{68} \leq 7 \\
X_{14} \leq 19 & X_{46} \leq 16 & X_{69} \leq 11 \\
X_{23} \leq 9 & X_{49} \leq 8 & X_{710} \leq 28 \\
X_{25} \leq 7 & X_{56} \leq 8 & X_{810} \leq 17 \\
X_{27} \leq 16 & X_{57} \leq 12 & X_{910} \leq 19
\end{array}
$$

$$X_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j) \in A$$

2.2.5 Valores óptimos y solución

- Soluciones óptimas: $X_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 15 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Valor óptimo = 59

3 Tercer Problema

3.1 Formule el modelo que permita construir las plantas de tratamiento de aguas servidas al mínimo costo asumiendo que cada sitio tiene capacidad ilimitada para recibir aguas servidas y que cada área de recolección debe ser atendida únicamente por una planta

3.1.1 Constantes

$$
\begin{aligned}
A &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\
B &= \{1,2,3,4,5,6,7\} \\
Costo &= \begin{bmatrix}
14 & 16 & 10 & 8 & 14 & 10 & 16 \\
12 & 11 & 12 & 14 & 14 & 12 & 14 \\
13 & 8 & 9 & 11 & 13 & 15 & 12 \\
10 & 15 & 14 & 12 & 16 & 15 & 13 \\
8 & 12 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\
11 & 10 & 8 & 6 & 11 & 8 & 9 \\
13 & 18 & 9 & 9 & 13 & 11 & 15 \\
15 & 12 & 11 & 14 & 12 & 16 & 10 \\
10 & 11 & 18 & 17 & 9 & 14 & 9 \\
9 & 16 & 13 & 12 & 10 & 8 & 8
\end{bmatrix} \\
CostoOP &= [8,10,9,11,9,10,12] \\
CostoFijo &= [1000,800,700,1200,950,1150] \\
MArea &= [500,700,1500,1000,1800,1200,1500,1000,900,1600]
\end{aligned}
$$

3.1.2 Variables de Decisión

$X_j = 1$; Si se utiliza sitio $j \quad \forall j \in B$

$X_j = 0$; En otro caso

$Y_{ij} = 1$; área i es atendida por sitio $j \quad \forall i \in A \wedge \forall j \in B$

$Y_{ij} = 0$; en otro caso

3.1.3 Función Objetivo

$$
\begin{aligned}
minZ = &\sum_{j=1}^{7} X_j \times CostoFijo[j] + \sum_{i=1}^{10} MArea[i] \sum_{j=1}^{7} Costo[i][j] \times Y_{ij} \\
&+ \sum_{j=1}^{7} CostoOP[j] \sum_{i=1}^{10} Y_{ij} \times MArea[i] \quad \forall i \in A \wedge \forall j \in B
\end{aligned}
$$

3.1.4 Restricciones

$$(1)\sum_{j=1}^{7} Y_{ij} = 1 \quad \forall i \in A$$

$$(2)\sum_{i=1}^{10} Y_{ij} \leq 10 \quad \forall j \in B$$

$$(3) X_{ij} \in \{0,1\} \forall i \in A \wedge \forall j \in B$$

3.1.5 Valores óptimos y solución

- Soluciones óptimas: $Y_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

  $X_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Valor óptimo = 209800

3.2 Formule el modelo que permita construir las plantas de tratamiento de aguas servidas al mínimo costo, sabiendo que cada sitio puede tratar a lo más 2.000 mirialitros mensuales y cada área de recolección debe ser atendida por una única planta

Basta con agregar una restricción además del modelado creado para la parte anterior, junto a las demás restricciones:

$$\sum_{i=1}^{10} MArea[i] \times Y_{ij} \leq 2000 \times X_j \quad \forall j \in B$$

3.2.1 Valores óptimos y solución

- Soluciones óptimas: $Y_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

  $X_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Valor óptimo = 227500

3.3 Formule el modelo que permita construir las plantas de tratamiento de aguas servidas al mínimo costo, asumiendo que cada sitio tiene capacidad ilimitada de recibir aguas servidas y que cada área de recolección puede enviar las aguas servidas a diferentes plantas de tratamiento

3.3.1 Constantes

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$
$$B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$Costo = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 10 & 8 & 14 & 10 & 16 \\ 12 & 11 & 12 & 14 & 14 & 12 & 14 \\ 13 & 8 & 9 & 11 & 13 & 15 & 12 \\ 10 & 15 & 14 & 12 & 16 & 15 & 13 \\ 8 & 12 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 11 & 10 & 8 & 6 & 11 & 8 & 9 \\ 13 & 18 & 9 & 9 & 13 & 11 & 15 \\ 15 & 12 & 11 & 14 & 12 & 16 & 10 \\ 10 & 11 & 18 & 17 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 16 & 13 & 12 & 10 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$
$$CostoOP = [8,10,9,11,9,10,12]$$
$$CostoFijo = [1000,800,700,1200,950,1150]$$
$$MArea = [500,700,1500,1000,1800,1200,1500,1000,900,1600]$$

3.3.2 Variables de Decisión

$$X_{ij} = \text{Cantidad enviada desde área } i \text{ a sitio } j$$

$$Y_j = 1\text{Si se utiliza el sitio } j$$
$$Y_j = 0\text{En otro caso}$$

3.3.3 Función Objetivo

$$minZ = \sum_{j=1}^{7} Y_j \times CostoFijo[j] + \sum_{j=1}^{7}\sum_{i=1}^{10} Costo[i][j] \times X_{ij}$$
$$+ \sum_{j=1}^{7}\sum_{i=1}^{10} CostoOP[j] \times X_{ij} \quad \forall i \in A \wedge \forall j \in B$$

3.3.4 Restricciones

$$(1) \sum_{i=1}^{10} X_{ij} \leq Y_j \times \sum_{i=1}^{10} MArea[i] \quad \forall j \in B; \text{ Máxima Capacidad}$$

$$(2) \sum_{j=1}^{7} X_{ij} = MArea[i] \quad \forall i \in A; \text{ Satisfacer Demanda}$$

3.3.5 Valores óptimos y solución

- Soluciones óptimas: $X_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

  $Y_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Valor óptimo = 209800

3.4 Formule el modelo que permita construir las plantas de tratamiento de aguas servidas al mínimo costo, asumiendo que cada área de recolección debe ser atendida únicamente por una planta y que puede ser construida solo una planta de tratamiento con capacidad ilimitada para recibir aguas servidas

3.4.1 Constantes

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$Costo = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 10 & 8 & 14 & 10 & 16 \\ 12 & 11 & 12 & 14 & 14 & 12 & 14 \\ 13 & 8 & 9 & 11 & 13 & 15 & 12 \\ 10 & 15 & 14 & 12 & 16 & 15 & 13 \\ 8 & 12 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 11 & 10 & 8 & 6 & 11 & 8 & 9 \\ 13 & 18 & 9 & 9 & 13 & 11 & 15 \\ 15 & 12 & 11 & 14 & 12 & 16 & 10 \\ 10 & 11 & 18 & 17 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 16 & 13 & 12 & 10 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$
$$CostoOP = [8, 10, 9, 11, 9, 10, 12]$$
$$CostoFijo = [1000, 800, 700, 1200, 950, 1150]$$
$$MArea = [500, 700, 1500, 1000, 1800, 1200, 1500, 1000, 900, 1600]$$

3.4.2 Variables de Decisión

$$Y_j = 1 \text{ Si se utiliza sitio } j \quad \forall j \in B$$
$$Y_j = 0 \text{ En otro caso} \quad \forall j \in B$$

3.4.3 Función Objetivo

$$minZ = \sum_{j=1}^{7} Y_j \times CostoFijo[j] + \sum_{j=1}^{7}\sum_{i=1}^{10} MArea[i] \times Costo[i][j] \times Y_j$$
$$+ \sum_{j=1}^{7}\sum_{i=1}^{10} MArea[i] \times CostoOP[j] \times Y_j \quad \forall i \in A \wedge \forall j \in B$$
$$\sum_{i=1}^{10} MArea[i] \times Y_{ij} \leq 2000 \times X_j \quad \forall i \in A \wedge \forall j \in B$$

3.4.4 Valores óptimos y solución

- Soluciones óptimas: $Y_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Valor óptimo = 225000