Investigación de Operaciones
Universidad Católica del Maule
Martín Mancilla V. - Claudio Durán N.
19.386.399-k - 19.215.697-1
https://github.com/Marmanvii/ilog-cplex-problems

TRABAJO FINAL

Resolución de Problemas de Optimización

1 Primer Problema

1.1 Formule el modelo que permita obtener el portafolio de inversión que optimice el retorno esperado de la corporación y simultáneamente no viole su política de inversión

1.1.1 Variable de Decisión

$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$X_i =$ Cantidad invertida en categoría i de la inversión. $\forall i \in N$

---

1 = Acciones comunes, 2 = Cuotas de fondos mutuos, 3 = Bonos de Oferta Pública,
4 = Bonos de Gobierno, 5 = Cuentas de Ahorro

1.1.2 Constantes

$RAE = [0.15,\ 0.12,\ 0.10,\ 0.05,\ 0.08]$

$FR = [1.6,\ 1.0,\ 0.5,\ 0.0,\ 0.1]$

$RAE_i =$ Retorno Anual Esperado para la categoría i de la inversión $\forall i \in N$.

$FR_i =$ Factor de riesgo para la categoría i de la inversión $\forall i \in N$.

1.1.3 Función Objetivo

$$maxZ = \sum_{i=1}^{5} X_i \times RAE_i$$

1.1.4 Restricciones

1. La inversión en acciones y en cuotas de fondos mutuos no debe ser mayor que un 30% del total de las inversiones.

$$x_1 + x_2 \leq 0.3 \times \sum_{i=1}^{5} x_i$$

2. La inversión en bonos de gobierno no debe ser inferior a la inversión en cuentas de ahorro.
$$x_4 \geq x_5$$
3. La inversión en debentures y bonos de gobierno no debe exceder el 50% del total de las inversiones.
$$x_3 + x_4 \leq 0.5 \times \sum_{i=1}^{5} x_i$$
4. La inversión en bonos de gobierno debe superar el 25% del total de las inversiones.
$$x_4 \geq 0.25 \times \sum_{i=1}^{5} x_i$$
5. La corporación Gamma requiere invertir la suma de US$ 1.000.000 en el próximo año fiscal.
$$\sum_{i=1}^{5} x_i \leq 1,000,000$$
6. La corporación no permite que el portafolio de valores escogidos tenga un factor de riesgo ponderado mayor que 1.0.
$$\sum_{i=1}^{5} x_i \times FR_i \leq 1.0 \times \sum_{i=1}^{5} x_i$$
7. No negatividad.
$$x_i \geq 0 \ \forall i \in N$$

1.1.5 Valores óptimos y solución

- Soluciones óptimas:
  1. $x_1 = 300000$ dólares
  2. $x_2 = 0$ dólares
  3. $x_3 = 250000$ dólares
  4. $x_4 = 250000$ dólares
  5. $x_5 = 200000$ dólares

$\therefore$ Valor óptimo: $z = 98500$ dólares

1.2 Comentarios

El modelo que presentamos entrega información sobre la cantidad de dinero que hay que invertir en cada una de las categorías con el objetivo de maximizar el retorno esperado y minimizar el riesgo de la inversión. Como la economía depende de una infinidad de variables, el modelo, entrega una aproximación de cual sería la mejor forma de invertir el dinero en base a los datos que se entregan, pero no es 100% recomendable utilizarlo en la vida cotidiana, ya que solamente considera 2 datos en los cuales se basa la decisión: Retorno Anual esperado y Factor de Riesgo.

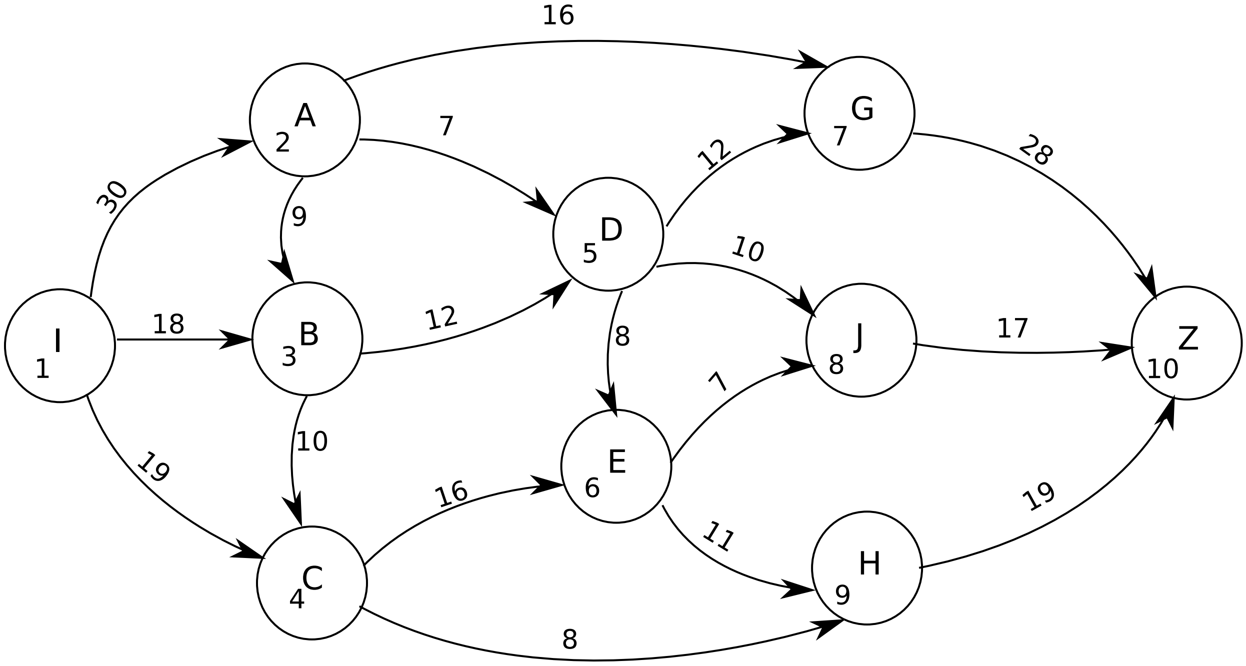
Comentario de Claudio Durán

1: Para evitar crear la función objetivo y las restricciones de manera prolongada, se optó por hacer uso de matrices de una dimensión y hacer uso de las sumatorias en estas, por lo que se puede representar de manera ordenada el modelado del problema. Se debe reconocer la diferencia entre el RAE y FR, ya que el FR solo afectaba a una restricción, no a todas como se pensó en un momento, además de que para el FR, se hablaba de una ponderación y haciendo uso de la calculadora, se ubicó la sumatoria que divide a la suma total para obtener la ponderación al lado derecho. A través de las soluciones óptimas obtenidas, se puede tomar la decisión de manera clara acerca de la cantidad a invertir en cada categoría de inversión, en dólares, obteniendo un retorno anual esperado de \$98.500 dólares.

Comentario de Martin Mancilla

2 Segundo Problema

2.1 Dibuje el grafo que represente el problema.



2.2 Formule el modelo que le permite resolver este problema

2.2.1 Nodos y Aristas

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$A = \{(1,2)(1,3)(1,4)(2,3)(2,5)(2,7)(3,4)(3,5)(4,6)$$
$$(4,9)(5,6)(5,7)(5,8)(6,8)(6,9)(7,10)(8,10)(9,10)\}$$

2.2.2 Variable de Decisión

X_{ij} = Cantidad de mensajes transmitidos de nodo i a nodo j $(\forall(i,j) \in A)$

v = Flujo máximo de los nodos

2.2.3 Función Objetivo

$$maxZ = v$$

2.2.4 Restricciones

- Nodo Oferta

$$(1)\ X_{12} + X_{13} + X_{14} = v$$

- Nodo Demanda

$$(10) - X_{710} - X_{810} - X_{910} = -v$$

- Nodos Transición

$$
\begin{aligned}
&(2)\ X_{23} + X_{25} + X_{27} - X_{12} = 0\\
&(3)\ X_{34} + X_{35} - X_{13} - X_{23} = 0\\
&(4)\ X_{46} + X_{49} - X_{14} - X_{34} = 0\\
&(5)\ X_{56} + X_{57} + X_{58} - X_{25} - X_{35} = 0\\
&(6)\ X_{68} + X_{69} - X_{46} - X_{56} = 0\\
&(7)\ X_{710} - X_{27} - X_{57} = 0\\
&(8)\ X_{810} - X_{58} - X_{68} = 0\\
&(9)\ X_{910} - X_{49} - X_{69} = 0
\end{aligned}
$$

- Capacidad de aristas

$$
\begin{array}{lll}
X_{12} \leq 30 & X_{34} \leq 10 & X_{58} \leq 10\\
X_{13} \leq 18 & X_{35} \leq 12 & X_{68} \leq 7\\
X_{14} \leq 19 & X_{46} \leq 16 & X_{69} \leq 11\\
X_{23} \leq 9 & X_{49} \leq 8 & X_{710} \leq 28\\
X_{25} \leq 7 & X_{56} \leq 8 & X_{810} \leq 17\\
X_{27} \leq 16 & X_{57} \leq 12 & X_{910} \leq 19
\end{array}
$$

$$X_{ij} \geq 0 \ \forall (i,j) \in A$$

2.2.5 Valores óptimos y solución

- Soluciones óptimas: $X_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 15 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mensajes

- Valor óptimo = 59 mensajes simultáneos

2.3 Comentarios

El modelo presenta cómo será el flujo de mensajes de telegramas a través de la red que conecta las centrales I (emisor) y Z (receptor). En base a esto se puede obtener cual sería la mayor cantidad de mensajes que soportaría la red. En la vida cotidiana, un modelo similar podría describir la mejor manera de transmitir información entre dos computadoras que tienen de por medio una red de otros dispositivos.

Comentario de Claudio Durán

2c) Al pedir un modelado del problema que permita determinar la cantidad máxima de mensajes transmitidos de manera simultánea, fue casi directo determinar que se trataba de un problema de flujo máximo, en donde es necesario maximizar una variable que represente el flujo máximo que debe fluir entre los nodos de comienzo a fin, con el modelamiento, se obtiene que la cantidad de mensajes máxima a enviar de manera simultánea es de 59 mensajes que se distribuye entre los distintos nodos como se muestra en la matriz obtenida

Comentario de Martin Mancilla

3 Tercer Problema

3.1 Formule el modelo que permita construir las plantas de tratamiento de aguas servidas al mínimo costo asumiendo que cada sitio tiene capacidad ilimitada para recibir aguas servidas y que cada área de recolección debe ser atendida únicamente por una planta

3.1.1 Constantes

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$Costo = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 10 & 8 & 14 & 10 & 16 \\ 12 & 11 & 12 & 14 & 14 & 12 & 14 \\ 13 & 8 & 9 & 11 & 13 & 15 & 12 \\ 10 & 15 & 14 & 12 & 16 & 15 & 13 \\ 8 & 12 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 11 & 10 & 8 & 6 & 11 & 8 & 9 \\ 13 & 18 & 9 & 9 & 13 & 11 & 15 \\ 15 & 12 & 11 & 14 & 12 & 16 & 10 \\ 10 & 11 & 18 & 17 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 16 & 13 & 12 & 10 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$
$$CostoOP = [8, 10, 9, 11, 9, 10, 12]$$
$$CostoFijo = [1000, 800, 700, 1200, 950, 1150]$$
$$MArea = [500, 700, 1500, 1000, 1800, 1200, 1500, 1000, 900, 1600]$$

3.1.2 Variables de Decisión

$X_j = 1$; Si se utiliza sitio $j \quad \forall j \in B$
$X_j = 0$; En otro caso

$Y_{ij} = 1$; Área i es atendida por sitio $j \quad \forall i \in A \wedge \forall j \in B$
$Y_{ij} = 0$; En otro caso

3.1.3 Función Objetivo

$$minZ = \sum_{j=1}^{7} X_j \times CostoFijo[j] + \sum_{i=1}^{10} MArea[i] \sum_{j=1}^{7} Costo[i][j] \times Y_{ij}$$
$$+ \sum_{j=1}^{7} CostoOP[j] \sum_{i=1}^{10} Y_{ij} \times MArea[i]$$

3.1.4 Restricciones

$$(1)\ \sum_{j=1}^{7} Y_{ij} = 1 \quad \forall i \in A$$

$$(2)\ \sum_{j=1}^{7} Y_{ij} \leq 10 \times X_{ij} \quad \forall j \in B$$

$$(3)\ X_{ij} \in \{0,1\} \forall i \in A \wedge \forall j \in B$$

3.1.5 Valores óptimos y solución

- Soluciones óptimas: $Y_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

  $X_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Valor óptimo = \$ 209800

3.2 Formule el modelo que permita construir las plantas de tratamiento de aguas servidas al mínimo costo, sabiendo que cada sitio puede tratar a lo más 2.000 mirialitros mensuales y cada área de recolección debe ser atendida por una única planta

Basta con agregar una restricción además del modelado creado para la parte anterior, junto a las demás restricciones:

$$\sum_{i=1}^{10} MArea[i] \times Y_{ij} \leq 2000 \times X_j \quad \forall j \in B$$

3.2.1 Valores óptimos y solución

- Soluciones óptimas: $Y_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

  $X_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Valor óptimo = \$ 227500

3.3 Formule el modelo que permita construir las plantas de tratamiento de aguas servidas al mínimo costo, asumiendo que cada sitio tiene capacidad ilimitada de recibir aguas servidas y que cada área de recolección puede enviar las aguas servidas a diferentes plantas de tratamiento

3.3.1 Constantes

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$Costo = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 10 & 8 & 14 & 10 & 16 \\ 12 & 11 & 12 & 14 & 14 & 12 & 14 \\ 13 & 8 & 9 & 11 & 13 & 15 & 12 \\ 10 & 15 & 14 & 12 & 16 & 15 & 13 \\ 8 & 12 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 11 & 10 & 8 & 6 & 11 & 8 & 9 \\ 13 & 18 & 9 & 9 & 13 & 11 & 15 \\ 15 & 12 & 11 & 14 & 12 & 16 & 10 \\ 10 & 11 & 18 & 17 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 16 & 13 & 12 & 10 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$
$$CostoOP = [8, 10, 9, 11, 9, 10, 12]$$
$$CostoFijo = [1000, 800, 700, 1200, 950, 1150]$$
$$MArea = [500, 700, 1500, 1000, 1800, 1200, 1500, 1000, 900, 1600]$$

3.3.2 Variables de Decisión

$$X_{ij} = \text{ Cantidad enviada desde área } i \text{ a sitio } j$$

$$Y_j = 1; \text{ Si se utiliza el sitio } j$$
$$Y_j = 0; \text{ En otro caso}$$

3.3.3 Función Objetivo

$$minZ = \sum_{j=1}^{7} Y_j \times CostoFijo[j] + \sum_{j=1}^{7}\sum_{i=1}^{10} Costo[i][j] \times X_{ij}$$
$$+ \sum_{j=1}^{7}\sum_{i=1}^{10} CostoOP[j] \times X_{ij}$$

3.3.4 Restricciones

$$(1)\ \sum_{i=1}^{10} X_{ij} \leq Y_j \times \sum_{i=1}^{10} MArea[i] \quad \forall j \in B$$
$$(2)\ \sum_{j=1}^{7} X_{ij} = MArea[i] \quad \forall i \in A$$

3.3.5 Valores óptimos y solución

- Soluciones óptimas: $X_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

  $Y_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Valor óptimo = \$ 209800

3.4 Formule el modelo que permita construir las plantas de tratamiento de aguas servidas al mínimo costo, asumiendo que cada área de recolección debe ser atendida únicamente por una planta y que puede ser construida solo una planta de tratamiento con capacidad ilimitada para recibir aguas servidas

3.4.1 Constantes

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$Costo = \begin{bmatrix} 14 & 16 & 10 & 8 & 14 & 10 & 16 \\ 12 & 11 & 12 & 14 & 14 & 12 & 14 \\ 13 & 8 & 9 & 11 & 13 & 15 & 12 \\ 10 & 15 & 14 & 12 & 16 & 15 & 13 \\ 8 & 12 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 11 & 10 & 8 & 6 & 11 & 8 & 9 \\ 13 & 18 & 9 & 9 & 13 & 11 & 15 \\ 15 & 12 & 11 & 14 & 12 & 16 & 10 \\ 10 & 11 & 18 & 17 & 9 & 14 & 9 \\ 9 & 16 & 13 & 12 & 10 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$
$$CostoOP = [8, 10, 9, 11, 9, 10, 12]$$
$$CostoFijo = [1000, 800, 700, 1200, 950, 1150]$$
$$MArea = [500, 700, 1500, 1000, 1800, 1200, 1500, 1000, 900, 1600]$$

3.4.2 Variables de Decisión

$$Y_j = 1; \text{ Si se utiliza sitio } j \quad \forall j \in B$$
$$Y_j = 0; \text{ En otro caso } \quad \forall j \in B$$

3.4.3 Función Objetivo

$$minZ = \sum_{j=1}^{7} Y_j \times CostoFijo[j] + \sum_{i=1}^{10} MArea[i] \times \sum_{j=1}^{7} Costo[i][j] \times Y_j$$
$$+ \sum_{i=1}^{10} MArea[i] \times \sum_{j=1}^{7} CostoOP[j] \times Y_j$$

3.4.4 Restricciones

$$(1) \sum_{j=1}^{7} Y_j = 1$$

3.4.5 Valores óptimos y solución

- Soluciones óptimas: $Y_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Valor óptimo = \$ 225000

3.5 Comentarios

En base a los análisis obtenidos la solución para conseguir el menor costo para tratar las aguas servidas que generan 10 áreas es la que se obtiene en el ítem 3A y 3C (Son las mismas, pero obtenidas de distinta manera). En base a esto, se crean 2 plantas de tratamiento, en el sitio 1 y en el sitio 3. La planta del sitio 1 trata el agua de las áreas: 2, 4, 5, 9 y 10 y el sitio 3 trata el agua de las áreas: 1, 3, 6, 7 y 8. En ambos sitios cada área envió el total de mirialitros que necesitan recolectar al sitio correspondiente. Consiguiendo así un coste de $209.800.

En relación a la vida real, en caso de que se hayan analizado anteriormente todas las otras variables que intervienen en el problema (tráfico, empleados, materiales, etc) la solución que entrega el modelo es factible ya que busca la manera de reducir los costos en base a la información suministrada. Aunque, habría que considerar la capacidad de cada sitio, ya que, se consideró que tenían capacidad ilimitada de tratamiento, cosa que es imposible.

En base a lo anterior, el 3B es el ítem que se acerca más a la realidad, ya que considera la capacidad de cada una de las plantas como 2000, y en base a esto, es necesario utilizar los 7 sitios y el costo total sube a $227.500, lo que genera una diferencia con el caso anterior de $17.700.

En cuanto al 3D, se apega a la realidad por el hecho de construir solo una planta, ya que si consideramos el costo de la construcción de las plantas, sin duda, ésta sería la opción más efectiva.

Comentario de Claudio Durán

3.- Al haber distintos costos dados por el problema, se separó en notaciones, una dimensión para los costos de operación, costo fijo y variables mensuales, y una en dos dimensiones para para el costo de transporte, ya que involucra tanto un área como un sitio a diferencia del resto que sólo considera o el área o el sitio. Para el primer caso, no hay límite en la cantidad de agua a recibir, basta con restringir que un sitio pueda abastecer como máximo a diez áreas, y además que la suma de áreas abastecidas por un sitio sea igual a 1, obteniendo que se deberán crear dos plantas de tratamiento, el primer caso para el sitio 1 y el segundo para el sitio 3, en donde el primero abastece a las áreas 2, 4, 5, 9, 10, y el segundo al 1, 3, 6, 7, 8, minimizando los costos de operación a 209800. Para el segundo caso, se limita a 2000 millones de litros mensuales, imponiendo una restricción más aplicable a la realidad, ya que no se puede asumir una capacidad infinita como realista, para este caso, se modela de manera similar al primer caso agregando una restricción, minimizando los costos a $227500, representando un costo mayor, pero realista. Para el tercer caso resulta el mismo costo minimizado y áreas con sitios usados, ya que se trata de un modelo similar, pero a través de la restricción. Finalmente, se debe elegir sólo un sitio a construir para que trate con todas las áreas, resultando como mejor opción el sitio 1, con un costo minimizado de $225.000 dólares.

Comentario de Martin Mancilla