Theoretisches Seminar:

Nicht lineare Dynamik und Chaos

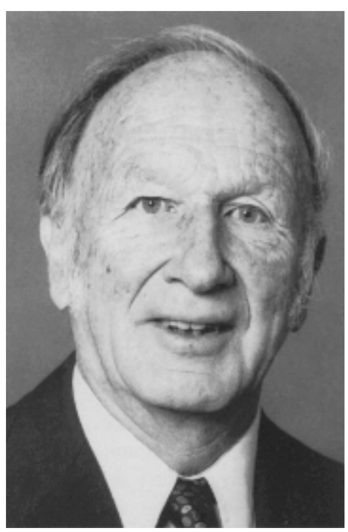
Lorenz-System und seltsame Attraktoren

von Andreas Jung

Gliederung:

1. Einleitung:

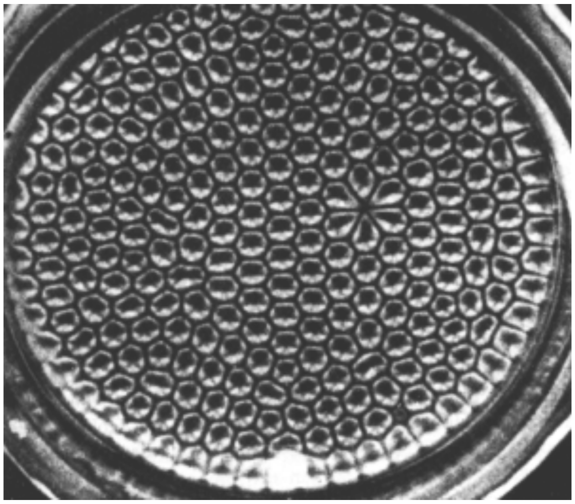
Ursprung des Lorenz-System:



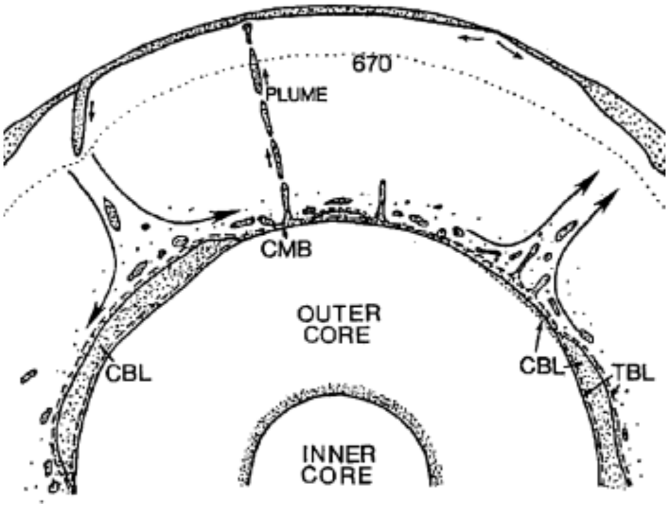
Edward N. Lorenz, ein Meteorologe der sich am MIT (Massachusetts Institute of Technology) mit Wettermodellen befa�t hat, probierte die Strömungen in Flüssigkeiten und Gasen, die durch die Navier-Stockes-Gleichungen beschrieben werden, so zu reduzieren, daß man Aussagen für das Langzeitverhalten machen kann. 1962 entwickelte Lorenz das sogenannte "*Lorenz-System*" - der ertse seltsame Attraktor!

Wieso war das von Interesse ?

Man kannte stabile Strömungen und Musterbildung in Flüssigkeiten oder Gasen unter Einfluß von Temperaturinhomogenitäten - Konvektion, wie in diesem Beispiel, bei dem die Unterseite erhitz wird und die viskose Flüssigkeit (z.B. Öl) Bénard-Zellen ausbildet:



Geophysikalisches Beispiele sind ausserdem: Zirkulation in der Atmosphäre und in den Ozeanen, Kontinentalverschiebungen durch Strömungen im Erdmantel, die Gasatmosphäre des Jupiters.

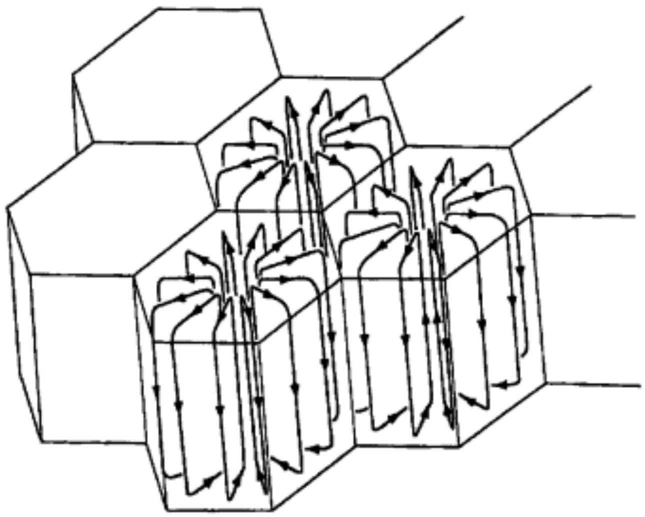


Was ist Konvektion ?

Das Grundlegende Phänomen der Konvektion ist ein aufsteigender Wärmeflu� in einem Gravitationsfeld - durch Erwärmung verringert sich die Dichte, damit können Volumenelemente aufsteigen - in der Schwerelosigkeit gibt es dieses Phänomen also nicht!

Man unterscheidet zwischen *freier* und *erzwungener* Konvektion, bei der erzwungenen Konvektion wird z.B. mechanische Energie hinzugefügt.

Erst um die Jahrhundertwende lieferte der französische Physiker *Henri Bénard* wichtige experimentelle Beiträge, er entdeckte die bienenwabenartige fluide Zellstruktur.



2. Grundlegendes Modell:

Das Modell:

Im Gegensatz zum Experiment von Bénard nehmen wir jetzt an, da� wir zwischen zwei festen Platten eine *viskose inkompressible* Flüssigkeit haben, wobei die Platten in x- und y-Richtung unendlich ausgedehnt sind, um störende Randeffekte zu eleminieren.
Au�erdem ändert sich die *Dichte nur durch Erwärmung* und die *einzige äu�ere Kraft ist die Schwerkraft*.
Die untere Platte kann nun von unten beheizt werden, Wärmeenergie kann hinzugefügt werden, und es stellt sich dann zwischen Ober- und Unterseite eine Temperaturdifferenz von DT ein.

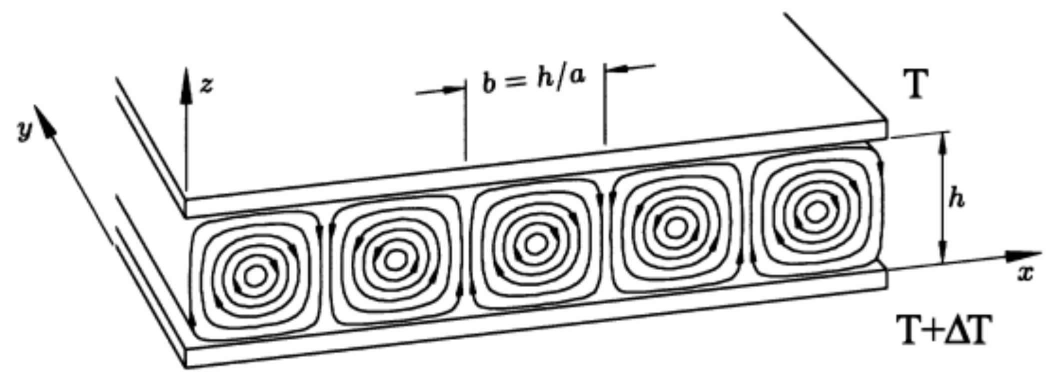
Es können nun verschiedene Fälle auftreten:

i. Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite DT = 0 :
   Sämtliche relevanten Grö�en sind *homogen* verteilt, insbesondere die

Temperatur. Es gibt keine *makroskopischen* Strömungen, dafür aber *mirkoskopische*, d.h. kleine lokale (Temperatur-) Störungen sterben aus - **asymptotisch stabil**

ii. Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite $DT < DT_{cr}$:
Druck, Dichte und Temperatur variieren linear zwischen Ober- und Unterseite - für kleine Temperatur-Differenzen (DT) ist das System **stabil** (*keine* makroskopische Strömungen)

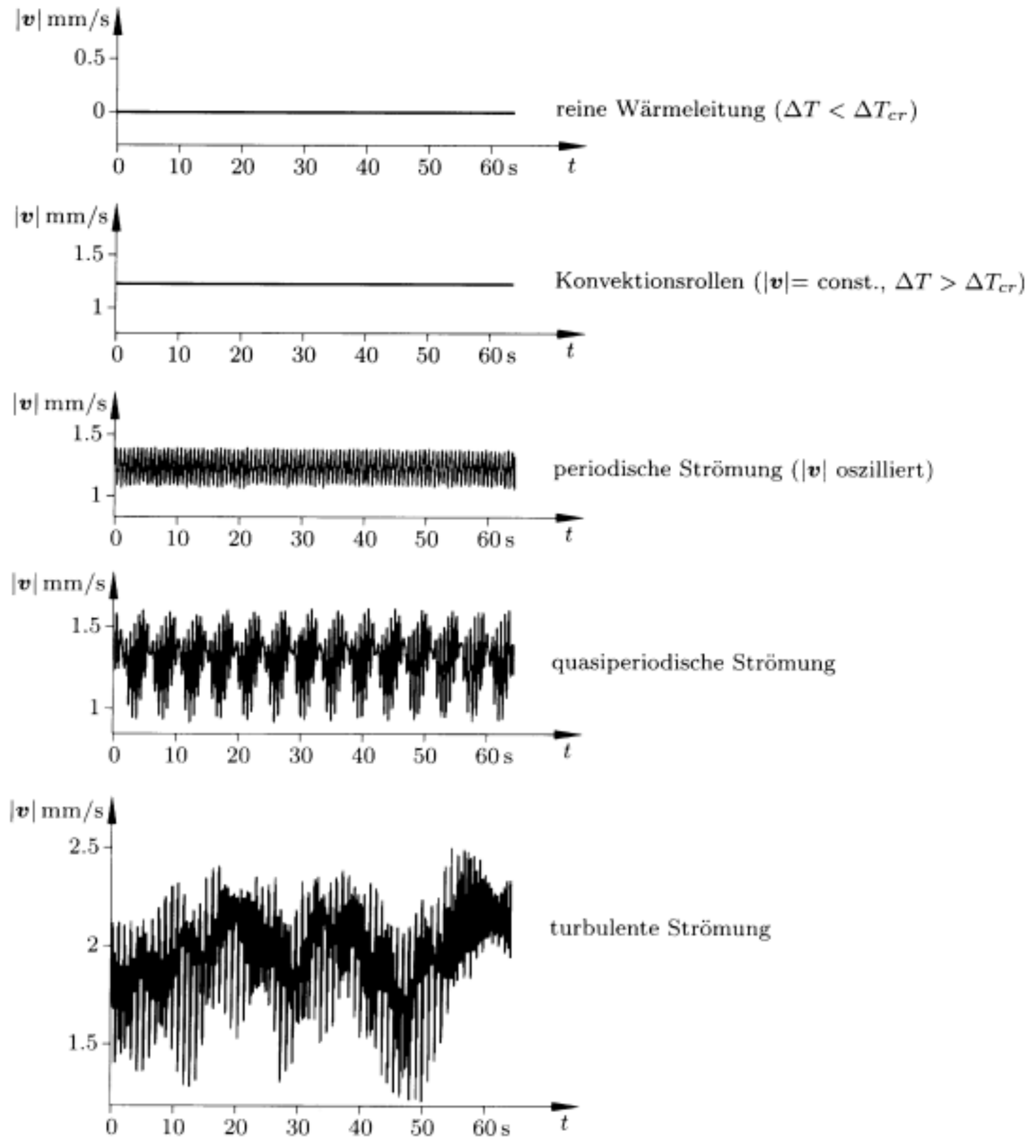
iii. Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite $DT >= DT_{cr}$:
Beginn spontaner makroskopischer Strömung - Bénard-Konvektion. Die Strömung ist zunächst *regelmä�ig und laminar*.
Durch die Erwärmung entsteht ein Dichtegradient, eine *instabile Dichteverteilung*, d.h. kleine Flüssigkeitsverschiebungen durch Molekularbewegung erzeugen Strömung und somit Konvektion.
Der Konvektion entgegen wirken aber die *Viskosität* und die *Wärmeleitung*, weswegen eine minimale Temperaturdifferenz (DT_{cr}) zwischen Ober- und Unterseite nötig ist!



Verblüffend ist die Anzahl der Moleküle die sich in einer Konvektionszelle befinden, etwa 10^{21} Moleküle (charakteristische Länge 1mm, intermolekulare Kräfte 10^{-7}mm), jedoch ist keine Aussage möglich über die Richtung, in die eine Flüssigkeitsmolekül flie�en wird!

iv. Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite $DT >> DT_{cr}$:
Erst *periodische*, dann *quasiperiodische* und zum Schlu� *turbulente*, damit räumlich und zeitlich chaotische Strömung!

Zusammenfassend in einem Diagramm dargestellt (jeweils der Betrag der Konvektionsgeschwindigkeit über der Zeit aufgetragen):



Fünf unterschiedliche Strömungszustände des Bénard-Experiments bei steigender Temperaturdifferenz ΔT (nach Graham, 1982)

3. Mathematische Behandlung:

Nach der qualitativen Beschreibung, soll das System mathematisch erfasst werden. Man nimmt ein Einkomponenten-Fluid an und beschreibt es als Kontinuum:

> Dichtefeld: r($\underline{x}$,t)
> Druck: p($\underline{x}$,t)
> Temperatur: T($\underline{x}$,t)

Geschwindigeitsverteilung: $\underline{v}(\underline{x},t)$

Aus den drei Erhaltungssätzen bekommt man die Grundgleichungen:

i. Erhaltung der Masse - Kontinuitätsgleichung:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Kompression}} + \underbrace{\mathrm{div}(\rho \underline{v})}_{\text{Fluß}} = 0$$

ii. Impulserhaltung - Navier-Stokes-Gleichung:

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho(\underline{v}^t \nabla)\underline{v} = \underbrace{\rho F}_{\substack{\text{äußere}\\ \text{Kraft}}} - \underbrace{\nabla p}_{\substack{\text{Druck}-\\ \text{gradient}}} + \underbrace{\eta \nabla^2 \underline{v}}_{\text{Viskosität}}$$

iii. Energieerhaltung - Wärmetransportgleichung:

$$\rho c_V \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{\underline{v}^t \nabla T}_{\text{Konvektionsterm}} \right)}_{=\frac{dT}{dt}} = \underbrace{\lambda \nabla^2 T}_{\substack{\text{Konduktion}\\ \text{(Wärmeleitung)}}} + \underbrace{2\,\eta\,\varepsilon : \varepsilon}_{\substack{\text{Energieverlust}\\ \text{durch innere}\\ \text{Reibung}}}$$

Dabei ist l=Wärmeleitkoeffizient, h=dynamische Viskosität und c_V=Wärmekapazität. Damit lä�t sich nun die Bénard-Konvektion beschreiben, jedoch lassen sich Vereinfachungen anbringen, die sogenannte "*Boussinesq-Oberbeck-Approximation*":

- Die Dichte kann überall als konstant angesehen werden (inkompressible Strömung), au�er im Term der volumenspezifischen äu�eren Kraft (rF mit $\underline{F}$~(0,0,-g)).

- Es gibt keine Dichteänderung durch Druckänderung, aber infolge von einer inhomogener Temperaturverteilung. Man kann erwarten, da� die Dichteänderung linear von der Temperaturdifferenz abhängt (r($\underline{x}$,t)= r(T($\underline{x}$,t))= r_0[1-a(T-T_0)]).

- Den Term, der den Energieverlust aufgrund von innere Reibung beschreibt, wird vernachlässigt, da er um 10^{-7} kleiner ist, als der Wärmeleitterm.

Damit erhält man folgende *drei Gleichungen*:

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0$$

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}^t \nabla)\underline{v} = \left[1 - \alpha\left(T - T_0\right)\right]g - \frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\eta}{\rho_0}\nabla^2 \underline{v} \qquad (*)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\underline{v}^t \nabla\right)T = \chi \nabla^2 T$$

Saltzman reduzierte 1962 das 3D-Konvektionsproblem auf ein *zweidimensionales*, indem er annahm, da� sich die Konvektionsrollen in der x,z-Ebene unabhängig von der y-Richtung entwickeln. Man führt neuen Variablen ein:

$$x = x_1 \quad z = x_3 \quad u = v_1 \quad w = v_3$$

Es wird eine *Stromfunktion* (oder auch Potentialfunktion) Y(x,z,t) eingeführt mit den Eigenschaften:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \qquad w = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Das Minuszeichen wird gebraucht, um die 2D-Kontinuitätsgleichung zu erfüllen. Au�erdem wird noch eine zweite *Potentialfunktion* Q(x,z,t) eingeführt, die die Abweichung vom linearen Temperaturprofil (= reiner Wärmeleitung) angibt ($T(x,z,t)=T_0+DT*(1-z/h)+Q(x,z,t)$).
Um den Druck aus der zweiten Gleichung (*) zu eliminieren, wird die Rotation gebildet:

$$\frac{\partial}{\partial z}(*) - \frac{\partial}{\partial x}(*)$$

Man erhält damit *zwei Gleichungen*, die nur noch abhängig sind von Y und Q, wobei man diese Variablen au�erdem noch zusätzlich *dimensionslos* macht.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Psi &= -\frac{\partial(\Psi, \nabla^2\Psi)}{\partial(x,z)} + \nu\nabla^4\Psi + g\alpha\frac{\partial\Theta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t}\Theta &= -\frac{\partial(\Psi,\Theta)}{\partial(x,z)} + \frac{\Delta T}{h}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \chi\nabla^2\Theta \end{aligned} \qquad (\#)$$

Dabei ist n=h/r_0=kinematische Viskosität und c=l/(r_0*c_V)=Temperaturleitfähigkeit. An den Oberflächen müssen Randbedingungen erfüllt werden: Lorenz wählte dabei *freie Grenzflächen* an denen w=0 und die Schubspannungen s_{zx}=0 sein sollen. Die freien Grenzflächen wurden gewählt, da diese mathematisch einfacher zu behandeln sind.

Saltzman entwickelte Y und Q in einer *zweifachen Fourier-Reihe* und betrachtete in einer *numerischen Analyse 52 Moden*. Das Ergebnis: Nur *drei Moden* streben nicht gegen Null, zeigen sogar irreguläres, nicht-periodisches Verhalten.

Davon inspiriert setzte Lorenz Y und Q mit diesen *drei Amplituden* an und erhielt damit:

$$\Psi(x,z,t) = \frac{\chi(1+a^2)\sqrt{2}}{a} \cdot X(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right)$$

$$\Theta(x,z,t) = \frac{\Delta T}{\pi} \frac{Ra_{cr}}{Ra} \left[\sqrt{2} \cdot Y(t) \cdot \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) - \right.$$
$$\left. - Z(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \right]$$

Setzt man diese nun in die zwei Gleichungen (#) von oben ein, so erhält man das *Lorenz-System*:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= -bZ + XY \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \sigma &= \frac{\nu}{\chi} \\ b &= \frac{4}{1+a^2} \\ r &= \frac{Ra}{Ra_{cr}} \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} Ra &= \frac{\alpha g h^3 \Delta T}{\chi \nu} \\ Ra_{cr} &= \frac{\pi^4 (1+a^2)^3}{a^2} \end{aligned}$$

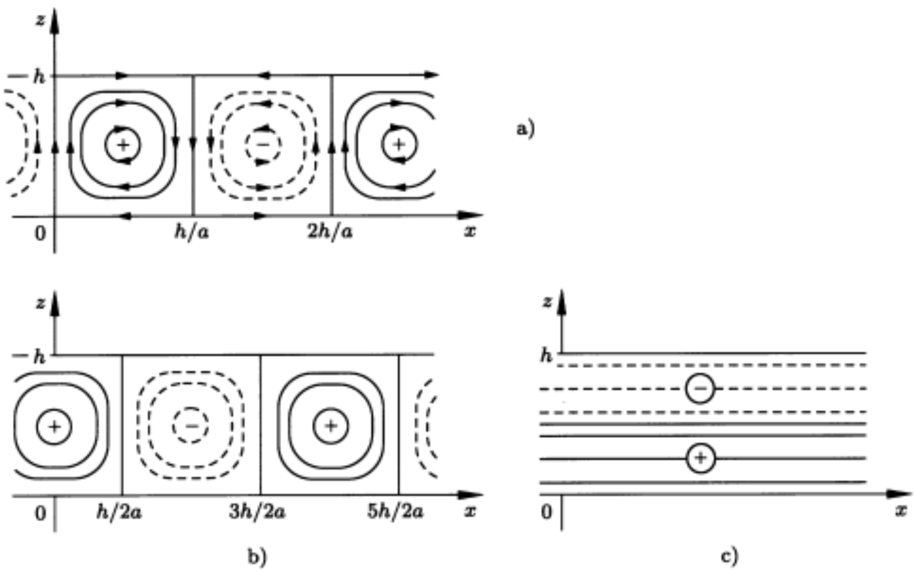
Man nennt *s* die Prandtl-Zahl, *b* ist ein Ma� für die Zellengeometrie und *r* ist die relative Rayleighzahl, die später als Kontrollparameter verwendet wird. Alle Koeffizienten wie auch die Variablen X,Y,Z sind dimensionslos!

Man kann nun probieren die Amplituden *X,Y,Z* zu deuten, jedoch kann man eigentlich nur Proportionalitäten angeben:

- *X* = proportional zum Betrag der *Konvektionsgeschwindigkeit*

- Y = proportional zur *Temperaturdifferenz* zwischen aufsteigender und fallender Strömung (Repräsentant für die *Temperaturzellen*)
- Z = proportional zur *Abweichung* vom linearen vertikalen Temperaturprofil (Repräsentant für die nicht-lineare *Temperaturschichtung*)

In der folgenden Grafik wird dies nochmal verdeutlicht:



Die Lorenz-Moden
a) Strömungsmuster (X-Mode), b) Temperaturzellen (Y-Mode),
c) Temperaturschichtung (Z-Mode)

4. Dynamik des Lorenz-Systems:

Für das Verständnis des Lorenz-System ist es notwendig, die *Gleichgewichtszustände* zu kennen und die Abhängigkeit des System vom *freien Parameter r* - dem Kontrollparameter, der ein Ma� für die aufgebrachte Temperaturdifferenz DT ist - zu ermitteln.

Eine wichtige Vorabinformation eines dissipativen Systems, welches das Lorenz-System ist, ist seine *Volumenkontraktion.* Die Spur der Jacobi-Matrix ist:

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\sigma(Y-X)\right)+\frac{\partial}{\partial Y}(rX-Y-XZ)+\frac{\partial}{\partial Z}(-bZ+XY)=-(\sigma+1+b)$$

negativ, soda� sich ein Volumenelement V(0) durch den Flu� exponentiell in der Zeit auf das Volumen:

$$V(t) = V(0)\, e^{-(\sigma+1+b)t}$$

kontrahiert. Dies ist eine wichtige Eigenschaft, die eigentlich alle Attraktoren besitzen, entweder lokal oder sogar global. Das Lorenz-System erfüllt dieses Kriterium sogar global, da -(s+1+b) *nicht* abhängig ist von den Koordinaten (X,Y,Z).

Diskutieren wir nun das Verhalten im Phasenraum (X,Y,Z), dabei wollen wir uns die Gleichgewichtszustände ansehen, bei denen natürlich

$$\dot{X} = 0 \qquad \dot{Y} = 0 \qquad \dot{Z} = 0$$

sein mu�, d.h. es mu� das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= -\sigma X + \sigma Y \\ 0 &= rX - Y - XZ \\ 0 &= -bZ + XY \end{aligned}$$

gelö�t werden. Man erhält folgende Lösung:

$$(i) \quad X_1 = 0 \quad Y_1 = 0 \quad Z_1 = 0$$

$$(ii) \quad X_{2/3} = \pm\sqrt{(r-1)b} \quad Y_{2/3} = \pm\sqrt{(r-1)b} \quad Z_{2/3} = (r-1)$$

Die Lösungen $\underline{X}_{2,3}$ sind nur für r>=1 Gleichgewichtszustände, da für r<1 die diskriminante der wurzel negativ wird und man somit imaginäre lösungen erhalten würde!
Berechnet man nun die Eigenwerte aus dem charakteristischen Polynom:

$$P(\lambda) = \left| \left. \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{X}} \right|_{Gleichgewichtspunkt} - \lambda \underline{\underline{E}} \right| = 0$$

mit der Jacobimatrix:

$$\underline{\underline{J}} = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{X}} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-Z & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{pmatrix} \qquad J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial X_j}$$

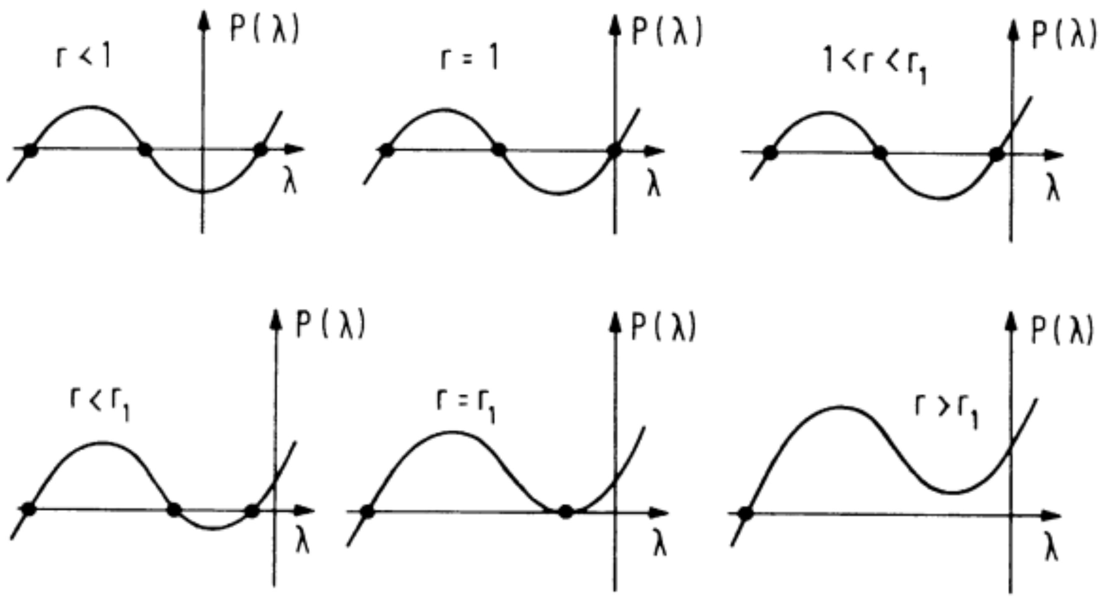
so erhält man für den Nullpunkt $\underline{X}_1(0,0,0)$ folgende Eigenwerte:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma(r-1)} \qquad \lambda_3 = -b$$

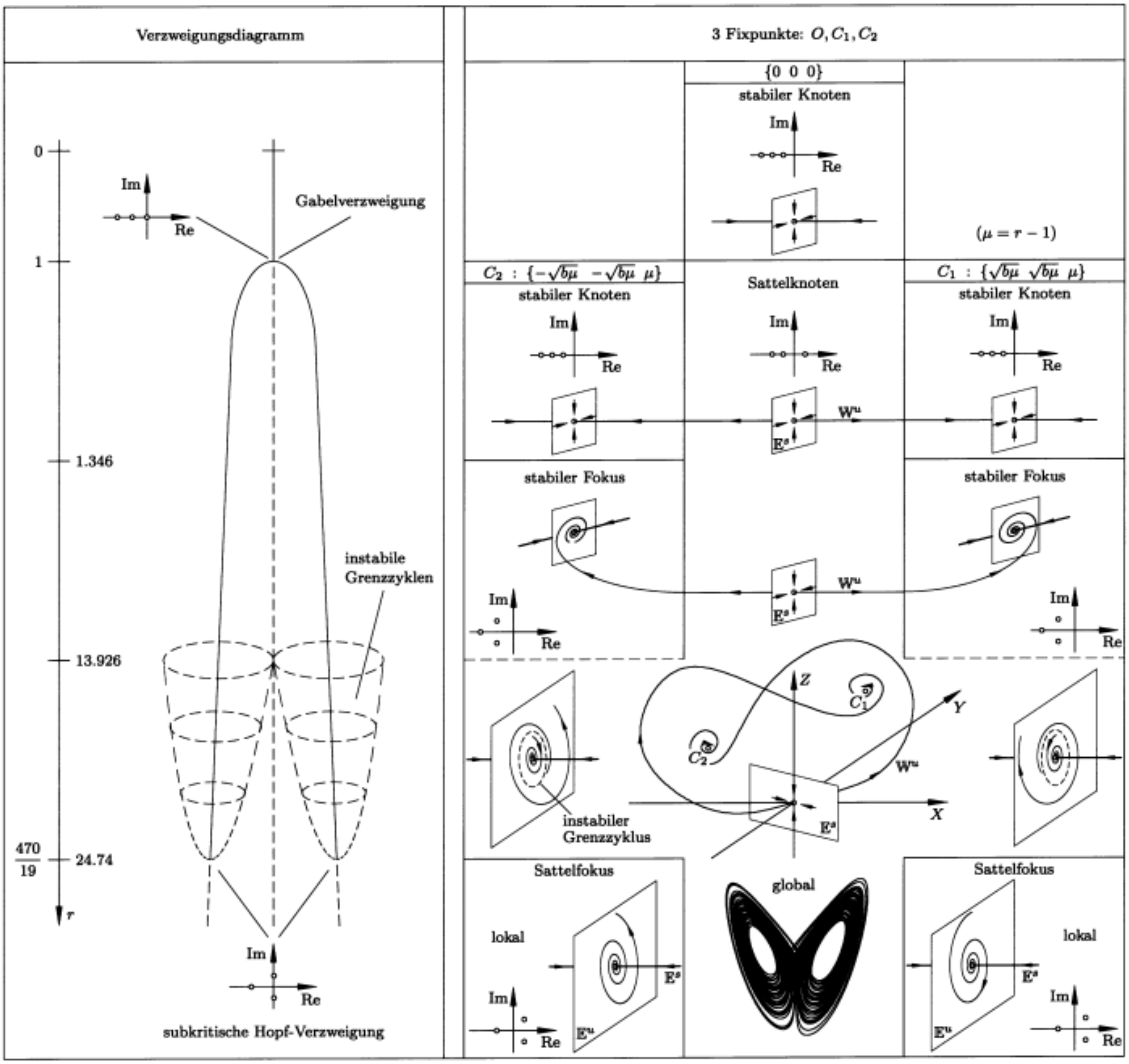
Für die Gleichgewichtspunke ($\underline{X}_{2,3}$) erhält man folgendes charakteristisches Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma+b+1)\,\lambda^2 + b(\sigma+r)\,\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0$$

Um eine grobe Aussage über die Lösungen der Gleichung machen zu können, plotten wir für verschiedene r die Graphen und erhalten folgende Resultate (r_1=1,346):



Wir wollen jetzt das Verhalten des Lorenz-System diskutieren, indem wir uns die Eigenwerte der Gleichgewichtspunkte ($\underline{X}_1$=0, $\underline{X}_2$=C_1, $\underline{X}_3$=C_2) bei Variation des Kontrollparameter r ansehen. Betrachten wir dazu das folgenden Diagramm, welches das Lorenz-System in Abhängigkeit vom *Kontrollparameter r* zeigt (s = 10, b = 8/3):



1. 0 < r < 1:
   - 0: Man sieht, da� die Realteile der Eigenwerte $l_{1,2,3}$ in diesem Bereich alle negativ bleiben, d.h. man hat einen **stabilen Knoten** bei (0,0,0).
   - $C_{1,2}$: Wie oben schon diskutiert, existieren diese Gleichgewichtszustände nur für r>=1.
2. r = 1: **"Gabelverzweigung"**
   - 0: Der Realteile des ersten Eigenwertes l_1 wird Null, die Realteile der beiden anderen Eigenwerte bleiben negativ.

- $C_{1,2}$: Man hat bei diesem Gleichgewichtspunkt die selben Verhälntisse wie bei 0, d.h. die Realteile zweier Eigenwerte sind negativ, der dritte ist Null.

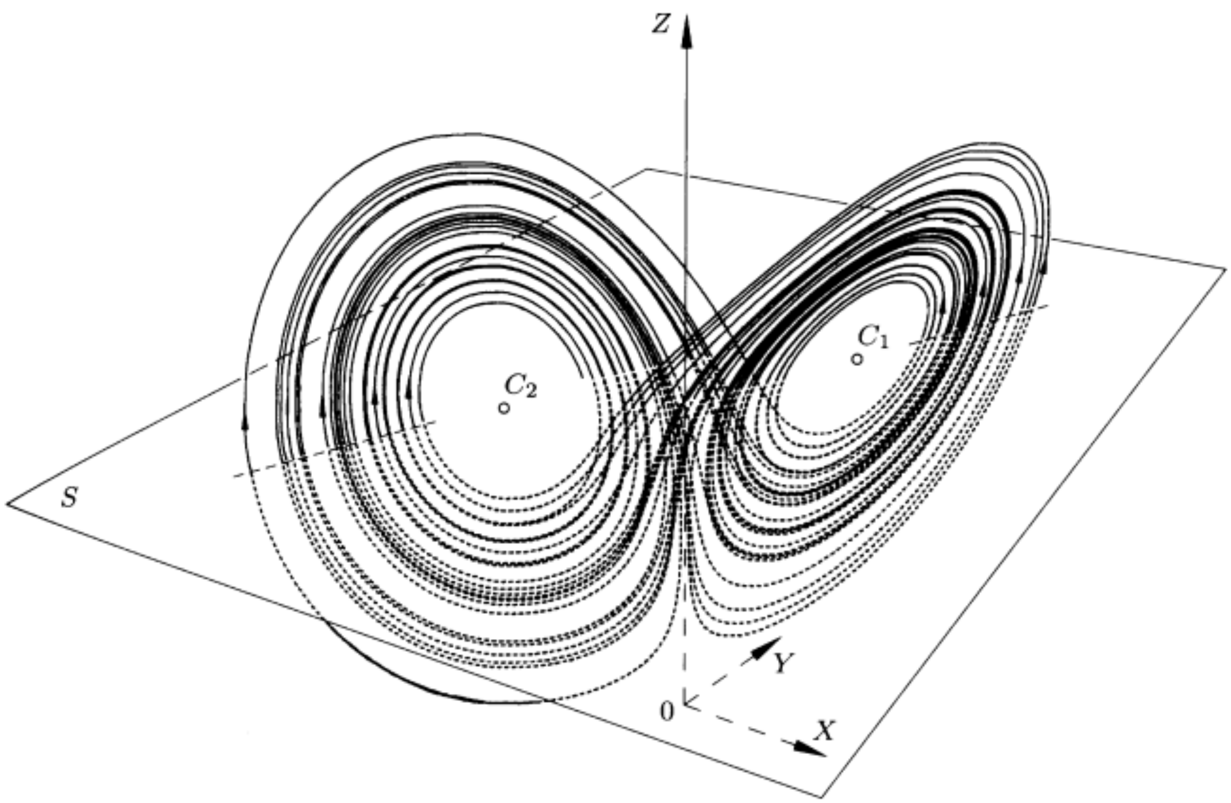
3. 1 < r < 1,346:
   - 0: Der Realteile des ersten Eigenwertes l_1 ist jetzt für *alle r>1* immer positiv und die Realteile der beiden anderen Eigenwerte immer negativ, wodurch man einen **Sattelknoten** bekommt!
   - $C_{1,2}$: Alle Realteile der Eigenwerte sind negativ, d.h. man hat einen **stabilen Knoten**.
4. r = 1,346:
   - 0: Es bleibt der **Sattelknoten** erhalten.
   - $C_{1,2}$: Zwei Eigenwerte sind gleich, aber negativ und nicht imaginär, der Realteil des *dritten Eigenwertes* bleibt immer noch negativ und wird auch *für alle r>1 negativ* bleiben!
5. 1,346 < r < 13,926:
   - 0: Es bleibt der **Sattelknoten** erhalten.
   - $C_{1,2}$: Zwei Eigenwerte werden imaginär, der dritte bleibt reell und negativ, wodurch wir einen **stabilen Fokus** bekommen. Alle Trajektorien die bei 0 starten landen in diesen Gleichgewichtspunkten.
6. r = 13,926:
   - 0: Es bleibt der **Sattelknoten** erhalten.
   - $C_{1,2}$: An den Eigenwerten ändert sich nichts wesentliches, aber die instabile Mannigfaltigkeit bei 0 landet nicht mehr in den Fixpunkten $C_{1,2}$, sondern geht in die stabile zweidimensionale Mannigfaltigkeit am Nullpunkt über. Eine Trajektorie die bei 0 startet und wieder zum Nullpunkt zurück kommt nennt man einen **homoklinen Orbit**! *Dies ist ein typisches Beispiel für einen globale Bifurkation*.
7. 13,926 < r < 24,74:
   - 0: Es bleibt der **Sattelknoten** erhalten.
   - $C_{1,2}$: An den Eigenwerten ändert sich wieder nichts wesentliches, aber man bekommt um die Gleichgewichtspunkte **instabile Grenzzyklen**.
8. r = 24,74 = 470/19: **"subkritische Hopf-Verzweigung"**
   - 0: Es bleibt der **Sattelknoten** erhalten.
   - $C_{1,2}$: Die Realteile zweier Eigenwerte werden Null, d.h. die instabilen

Grenzzyklen ziehen sich in den Gleichgewichtspunkt zusammen, wodurch man die "Stabilität" verliert.

9. r > 24,74:
   - 0: Es bleibt der **Sattelknoten** erhalten.
   - $C_{1,2}$: Die Realteile zweier Eigenwerte werden positiv, der dritte Eigenwert bleibt negativ und reell, d.h. man hat einen **Sattelfokus**.

Für r>24,74 verhält sich das System chaotisch, man hat den "typischen" Lorenz-Attraktor! Das Wechselspiel von stabil und instabil dieser drei Gleichgewichtspunkte (Fixpunkte) führt zur *global begrenzten* und *lokal erratischen* Struktur des Lorenz-Attraktors. Da der Lorenz-Attraktor der einzige Attraktor im Phasenraum ist führen alle Anfangsbedingungen zu chaotischen Bewegungen.
Es ist festzuhalten, da� sich für bestimmte r>24,74 periodische Orbits einstellen (z.B. r=100,5), d.h. man hat Bereiche in denen kein Chaos herrscht!

Um einen Eindruck vom Lorenz-Attraktor zu bekommen, soll die folgende Grafik helfen:



Lorenz-Attraktor für $r = 28, \sigma = 10$ und $b = 8/3$.
Der Trajektorienbereich, den die Ebene $Z = r - 1 = 27$ verdeckt, ist punktiert (Lanford, 1977)

Nach numerischen Analysen kann man für das Lorenz-System feststellen, da� für r=28

i. von einer Trajektorie für t gegen +� ein begrenzter Bereich im Phasenraum durchlaufen wird,
ii. die Bewegung erratisch ist, d.h. da� sich die Bahnkurven chaotisch verhalten und ein Überwechseln von der C_1- in die C_2-Hemnisphäre unvorhersagbar ist,
iii. die Trajktorien äu�erst sensibel auf die Anfangsbedingungen reagieren und
iv. für unterschiedliche Anfangsbedingungen die Attraktoreigenschaften offensichtlich sind.

Im Anhang kann man sich mit Hilfe von VRML 2.0 (Virtual Reality Modelling Language) den Lorenz-Attraktor auch interaktiv ansehen.

5. Defintion des (seltsamen) Attraktors:

Wie schon oben erwähnt, zeichnet sich ein dissipatives System durch seine Volumenkontraktion aus, d.h. da� sich unter der Wirkung des Phasenflusses sein Volumen für t gegen +� auf einen Attraktor von niedrigerer Dimension als der des Phasenraums zusammenzieht.

Betrachtet man die Geometrie des Lorenz-Attraktors, so sieht man deutlich, da� die Dimension des Attraktors kleiner ist als die des Phasenraums, doch es wäre falsch darauf zu schließen, da� es sich um einen zweidimensionale Struktur handelt! Analysiert man den Attraktor genauer, so kann gezeigt werden, da� die Kapazitätsdimension D_c=2,06 ist, also keine ganze Zahl.

Wir wollen jetzt den Attraktor definieren:

Ein Attraktor A eines Phasenflusses f_t ist eine abgeschlossene Menge mit folgenden Eigenschaften:

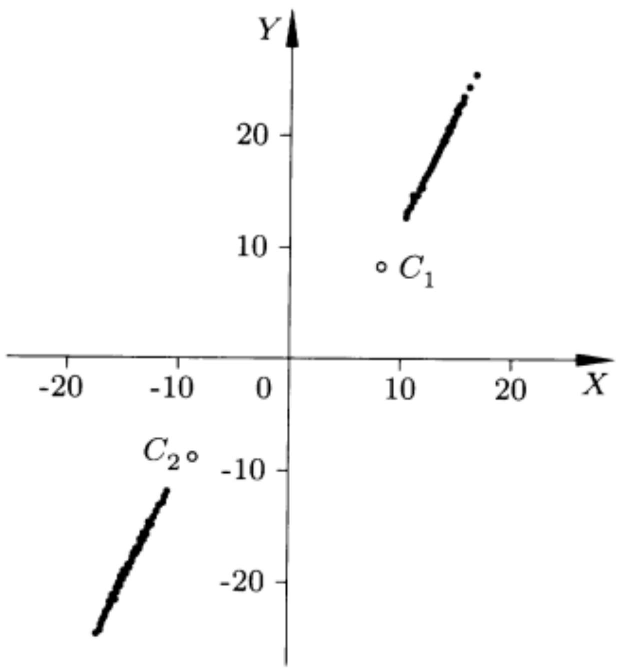
i. Der Attraktor A ist für alle t invariant unter der Wirkung des Phasenflusses f_t, d.h. f_t(A) � A.
ii. Der Attraktor A hat einen offene Umgebung U, die sich unter dem Phasenflu� f_t auf A zusammenzieht.
iii. Der Attraktor A kann nicht in zwei abgeschlossene, nichtüberlappende, invariante Mengen zerlegt werden.

Diese Definition erfüllen die bereits bekannte Attraktoren, wie z.B. Fixpunkte, Grenzzyklen und Tori, sie sind Manigfaltigkeiten. Doch ein seltsamer Attraktor ist keine Mannigfaltigkeit! Nach der Lanford (1981) könnte man den seltsamen Attraktor wie folgt definieren:

iv. *Seltsame Attraktoren* zeichnen sich aus durch ihr unvorhersagbares, chaotisches Verhalten, aber dennoch nehmen sie im Phasenraum einen Unterraum mit niedrigerer Dimension ein. Betrachtet man benachbarte Trajektorien auf dem Attraktor, so ist deren exponentielle Divergenz charakteristisch. Aufgrund des Längenwachstums in einzelnen Richtungen, reagiert der seltsame Attraktor äu�erst *sensibel auf kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen*. Eine Vorhersagbarkeit ist ausgeschlossen, weil die Bewegung weder periodisch ist noch zeitlich weit auseinanderliegende Zustände korreliert sind. Obwohl Langzeitvorhersagen für chaotische Bewegungen unmöglich sind, bewahrt der seltsame Attraktor seine topologische Struktur, er ist unter dem Phasenflu� f_t invariant.

"*Als geometrische Objekte sind seltsame Attraktoren Fraktale, als dynamische Objekte sind sie chaotisch.*"

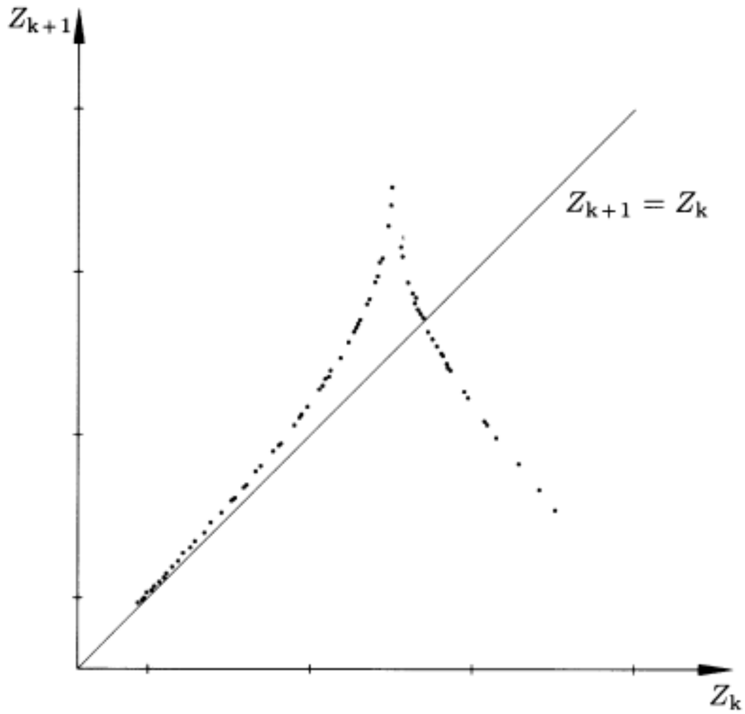
Um die (Kapazitäts-)Dimension des Lorenz-Attraktors von 2,06 plausibel zu machen, kann man sich einmal einen Poincareschnitt vorstellen, der bei Z=r-1 liegt. In dieser Ebene liegen genau die beiden Gleichgewichtspunkte $C_{1,2}$ (siehe dazu auch obige Grafik). Zeichnet man alle Durchsto�punkte in positiver z-Richtung auf, so erhält man folgende Grafik:



Man kann eine leichte Rauhigkeit erkennen. Es kann gezeigt werden, da� sich der Lorenz-Attraktor aus unendlich vielen dicht gepackten Schichten zusammensetzt, deren Gesamtstruktur mit Nullvolumen aber dennoch keine Fläche der Dimension

$D_c=2$ im Phasenraum formt.

Eine weiter Möglichkeit zu zeigen, da� das Lorenz-System für r=28 keinen stabilen periodischen Orbit besitzt, ist die Auftragung des relativen maximalen Z_{k+1}-Wertes als Funktion der vorangegangenen maximalen Z_k-Wertes. Dabei ist Z_k der maximale Z-Wert, der beim Umlauf k erreicht wird.



Verbindet man die einzelnen Punkte, so wird deutlich, da� die Steigung der Kurve überall grö�er als 1 ist, d.h. da� im betrachteten Intervall für jeden Anfangswert Z_0 die Abbildung zumindest keinen stabilen Fixpunkt besitzt.

6. Anhang:

Animierte Beispiele:

Achtung: Hierzu benötigen sie einen VRML2.0-Browser, doch es lohnt sich!

Der normale Lorenz-Attraktor, einer genaueren Integrationsmethode, mit Poincar�schnitt, sowie mit zwei Trajektorien.
Ausserdem der Rössler-Attraktor.

Darstellung in einem eigenem Fenster (mit JavaScript):
Der normale Lorenz-Attraktor, einer genaueren Integrationsmethode, mit

Poincar�schnitt, sowie mit zwei Trajektorien.
Ausserdem der Rössler-Attraktor.

Folien und Handzettel zum Vortrag:

PDF-Dateien: Lorenz-Bifurkations-Diagramm, Vortrag (diese HTML-Seite), Folien zum Vortrag
Postscript-Dateien (zip): Lorenz-Bifurkations-Diagramm, Vortrag (diese HTML-Seite), Folien zum Vortrag

Literatur zum Vortrag:

Agyris, John H. "*Die Erforschung des Chaos*", Vieweg 1995
Peitgen "*CHAOS Bausteine der Ordnung*", Springer-Verlag

Dokument letztes Mal editiert am Sonntag, 11. März 2001