

Simulaciones y análisis de Pulsos de Nyquist ISI-Free

Proyecto 1

Alumno: Ariel Núñez Lobos
Profesor: Cesar Azurdia M.
Ayudantes: Jorge Ignacio Sandoval
Pablo Palacios J.
Fecha de entrega: 31 de octubre de 2022
Santiago, Chile

1. Introducción

Dentro de los sistemas de transmisión de información digitales, la corrección de errores resulta uno de los aspectos más vitales para el rendimiento de esta, debido a la alta sensibilidad de las señales a transmitir y el canal, siendo estos afectados por posibles ruidos, retardos, interferencias, entre otros. La interferencia intersimbólica (ISI) es uno de los principales aspectos a corregir al transmitir información en tasas altas, el cual puede ser enfrentado mediante filtros conformados a partir de pulsos propuestos a partir de los criterios de Nyquist [1], al tomar muestras de la señal en intervalos que garanticen la falta de interferencia.

El presente informe tiene como objetivo recapitular el trabajo realizado para la simulación y análisis de Pulsos de Nyquist ISI-Free en un sistema de comunicaciones modelado a través de MATLAB. Se espera, a partir de este trabajo, contrastar el comportamiento de los pulsos dentro de un ambiente realista a partir de recursos visuales como gráficos que describen el comportamiento del pulso en el dominio del tiempo y frecuencia, al igual que calcular las tasas de error en la información transmitida mediante el cálculo del *Bit Error Rate* (BER). Esto con el propósito de evaluar el rendimiento de los pulsos en su labor de reducción de errores en el envío de información digital.

2. Marco Teórico

2.1. Criterios de Nyquist e ISI-Free Pulse

En 1928, Harry Nyquist señala criterios para la transmisión ISI dentro del sistema del telégrafo [1], mas su análisis respecto a las señales y la interferencia intersimbólica resulta relevante para los sistemas contemporáneos de comunicaciones digitales. Es por esto que se proponen pulsos que cumplan los criterios de Nyquist (principalmente el primer criterio) para filtrar una señal y reducir la interferencia en esta, aumentando su rendimiento.

El primer criterio de Nyquist para transmisión sin distorsión señala que “Una onda es no distorsionada si el valor en el instante medio de su unidad de tiempo es proporcional al factor de magnitud de su elemento correspondiente”. Esto indica que la contribución de otros símbolos en la transmisión debe ser igual a 0 en el instante de tiempo que se tomará una muestra de su respectivo símbolo. Otra manera de señalar este criterio de forma matemática corresponde a la siguiente expresión (1):

$$h(kT) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pm 4, \dots \end{cases} \quad (1)$$

Como se ve en la previa ecuación, para cumplir el primer criterio de Nyquist, un conjunto de pulsos deben cumplir que en el instante, o *time slot* kT correspondiente a un pulso P_k , solo se realizan contribuciones a la señal por parte de este pulso P_k , mientras que los otros pulsos dentro de la transmisión no suman o restan al instante muestreado. Los pulsos, por tanto, pueden tener distintas formas y parámetros que los describan, con tal de cumplir este criterio. A continuación

se presentan cuatro pulsos que cumplen con el primer criterio de Nyquist a evaluar dentro de este trabajo.

2.1.1. Raised Cosine

El pulso Raised Cosine (RC) [2], o coseno alzado, corresponde a uno de los principales pulsos que cumplen el primer criterio de Nyquist, propuesto por el grupo 3GPP para sus UE y además provee la base a otros pulsos vistos en este trabajo. Se describe a lo largo del tiempo ($\tau = t/T$) con la siguiente ecuación:

$$h(t)_{RC} = \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} \times \frac{\cos(\pi\alpha\tau)}{1 - 4\alpha^2\tau^2} \quad (2)$$

El aspecto más relevante a tratar respecto a RC corresponde al parámetro α conocido como el *roll-off factor*, el cual indica el ancho de banda y la deformación a los costados del pulso. Dado un mayor valor α se presenta menos deformidades a los lobulos de un pulso, reduciendo la influencia de estos en otros intervalos de tiempo, mas esto implica un mayor ancho de banda utilizado por el pulso.

2.1.2. Better than Raised Cosine

Presentado en 2021 [3], el Better than Raised Cosine, también conocido como Parametric Exponential Pulse, corresponde a una mejora al pulso de coseno alzado mediante el uso del parámetro β en función del roll-off factor α , al igual que la inclusión de una parametrización respecto a esto factor. Comparte la función *sinc* del pulso RC, al igual que el resto de pulsos que se verán a continuación. La ecuación del pulso respecto al tiempo corresponde a:

$$h(t)_{BTRC} = \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} \cdot \frac{4\beta\pi t \sin(\pi\alpha\tau) + 2\beta^2 \cos(\pi\alpha\tau) - \beta^2}{4\pi^2 t^2 + \beta^2} \quad (3)$$

$$\beta = \frac{2T \ln 2}{\alpha}$$

2.1.3. Improved Parametric Linear Combination Pulse

El Improved Parametric Linear Pulse (IPLCP) [4] corresponde a un pulso parametrizado a partir de la combinación de dos sinusoidales principales (\sin^2 y \sin), cuya influencia en el pulso es determinada por el parámetros μ . Junto a esto, se presentan los parámetros ϵ , γ y el previamente visto α para el cálculo de este pulso, donde el resultado total será igual a 1 en el tiempo normalizado $\tau = 0$ independiente de sus parámetros. Dentro del paper que propone este pulso se identifican los valores óptimos de los parámetros de forma numérica, llegando a ser $\mu = 1.60$, $\epsilon = 0.1$ y $\gamma = 1$). La ecuación del pulso respecto al tiempo corresponde a:

$$h(t)_{IPLCP} = \exp\left(-\epsilon\pi^2(\tau)^2\right) \cdot \left[\frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau} \cdot \frac{4(1-\mu)\sin^2(\pi\alpha\tau/2) + \pi\alpha\mu\tau\sin(\pi\alpha\tau)}{\pi^2\alpha^2\tau^2} \right]^\gamma \quad (4)$$

2.1.4. Exponential Linear Pulse

El Exponential Linear Pulse(ELP) [5] consiste en una combinación entre el factor de un pulso de Nyquist junto a una exponencial. La amplitud del pulso y sus lóbulos laterales es controlada por el parámetro β dentro de la exponencial junto al factor α . Para efectos de este trabajo se utilizó un valor $\beta = 0.1$ para la simulación de este pulso. La ecuación del pulso respecto al tiempo corresponde a:

$$h(t)_{\text{ELP}} = e^{-\pi(\beta/2)(\tau)^2} \cdot \frac{\sin(\pi\tau)}{(\pi\tau)} \cdot \frac{\sin(\pi\alpha\tau)}{(\pi\alpha\tau)} \quad (5)$$

2.2. Evaluación de desempeño mediante BER para ISI y CCI

Para la evaluación del rendimiento de los pulsos respecto a la probabilidad de error por bit, se hace uso del método presentado por Beaulieu [6] haciendo uso de la serie de Fourier truncada para el cálculo de error debido a ISI, CCI o una combinación entre ambos. Las siguientes ecuaciones señalan la probabilidad de error en estos casos:

$$\mathbb{P}_e^{\text{ISI}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ odd}}}^M \left\{ \frac{\exp(-m^2\omega^2/2) \sin(m\omega g_o)}{m} \right\} \prod_{\substack{k=N_1 \\ k \neq 0}}^{N_2} \cos(m\omega g_k) \quad (6)$$

$$\mathbb{P}_e^{\text{CCI}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^M \frac{\exp(-m^2\omega^2/2) \sin(m\omega g_o)}{m} \prod_{i=1}^L J_0(m\omega r_i) \quad (7)$$

$$\mathbb{P}_e^{\text{CCI+ISI}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ odd}}}^M \left\{ \frac{\exp(-m^2\omega^2/2) \sin(m\omega g_o)}{m} \right\} \prod_{\substack{k=N_1 \\ k \neq 0}}^{N_2} \cos(m\omega g_k) \prod_{i=1}^L J_0(m\omega r_i) \quad (8)$$

En estas ecuaciones la función g_k representan la evaluación del pulso de Nyquist en el instante del tiempo correspondiente, siendo en particular $g_o^2 = \text{SNR}$ de la señal. El valor ω corresponde al periodo en la serie y M la cantidad de pulsos a evaluar en el cálculo de error. Las funciones J y r_i son relevantes para el cálculo de error por CCI, siendo J_o la función de Bessel de orden 0 y r_i la amplitud del ruido calculado a partir del SNR y SIR de la transmisión a partir de la relación $r_i = \frac{\text{SNR}}{\text{SIR}} \sqrt{\frac{1}{L}}$ [7]. Se puede apreciar que el cálculo de ISI y CCI en conjunto corresponde a una multiplicación de los factores relevantes al cálculo particular de cada uno.

3. Código y Resultados

La presente sección muestra los resultados de las simulaciones de pulsos dentro de MATLAB. Los pulsos fueron programados como funciones particulares y dentro de las rutinas correspondientes. Los

parámetros utilizados en cada experimento serán señalados en su sección particular.

3.1. Transmisión de datos con modulación BPSK

A continuación se presentan extractos del código utilizado y los resultados de la simulación de pulsos de Nyquist en transmisión de datos a partir de modulación BPSK, mediante MATLAB. Los códigos utilizados en particular se encuentran adjuntos al informe, mas los parámetros relevantes a la ejecución del programa se detallan a continuación.

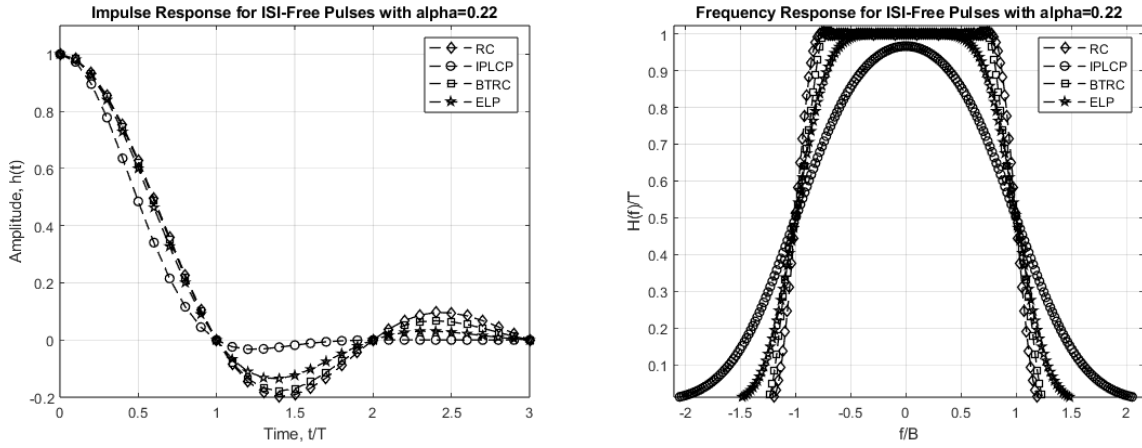
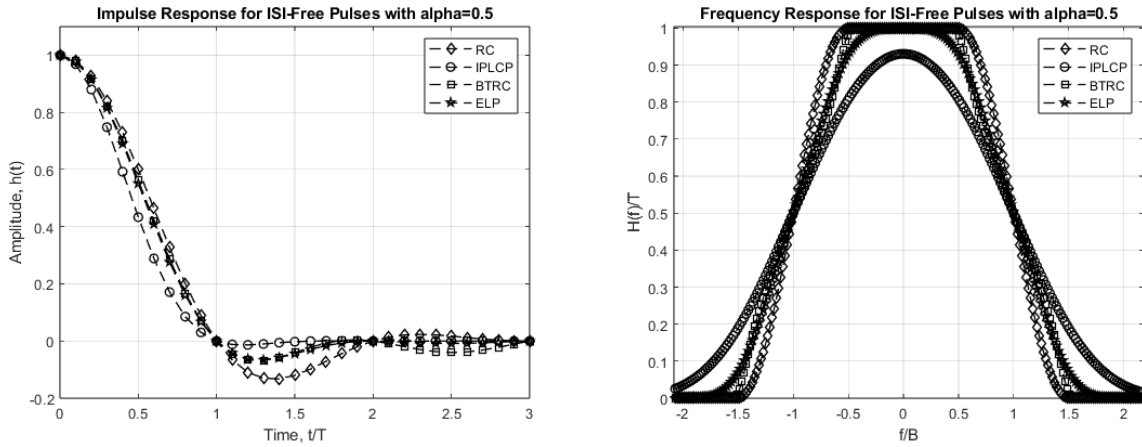
Tabla 1: Parámetros de simulación para respuestas al impulso, tiempo y diagramas de ojo.

Parámetro	Valor
N (número de símbolos)	10^5
fs (Frecuencia de muestreo)	10[Hz]
Canal	AWGN
Tipo de Modulación	BPSK
α (roll-off factor)	0.22, 0.50

Los archivos asociados a esta sección corresponden a [Impulse_Frequency_Responses_RC_BTRC_IPLCP_ELP.m](#) y [Eye_DiagramRC_BTRC_IPLCP_ELP.m](#), a los cuales se les debe modificar el valor *alpha* con el roll-off factor adecuado antes de ejecuta.

3.1.1. Respuesta a Impulso y Frecuencia

La presente sección muestra los resultados de las simulaciones ejecutadas, respecto al comportamiento de pulsos de Nyquist en la transmisión de datos y sus respuestas al impulso y frecuencia. Dentro de estas simulaciones se destacan los cuatro pulsos estudiados: Raised Cosine, Improved Parametric Linear Combination Pulse, Better-than Raised Cosine y Exponential Linear Pulse. Finalmente, se contrastan los pulsos con dos valores de α , 0.22 y 0.50, parámetro *roll-off factor* determinando el ancho de banda de exceso de los pulsos.

Figura 1: Respuesta al Impulso y Frecuencia con $\alpha = 0.22$ Figura 2: Respuesta al Impulso y Frecuencia con $\alpha = 0.5$

3.1.2. Diagrama de Ojo

Las siguientes figuras presentan los diagramas de ojo resultantes para la simulación de pulsos filtrando símbolos BPSK enviados. Se presentan para valores $\alpha = 0.22$ y 0.50 .

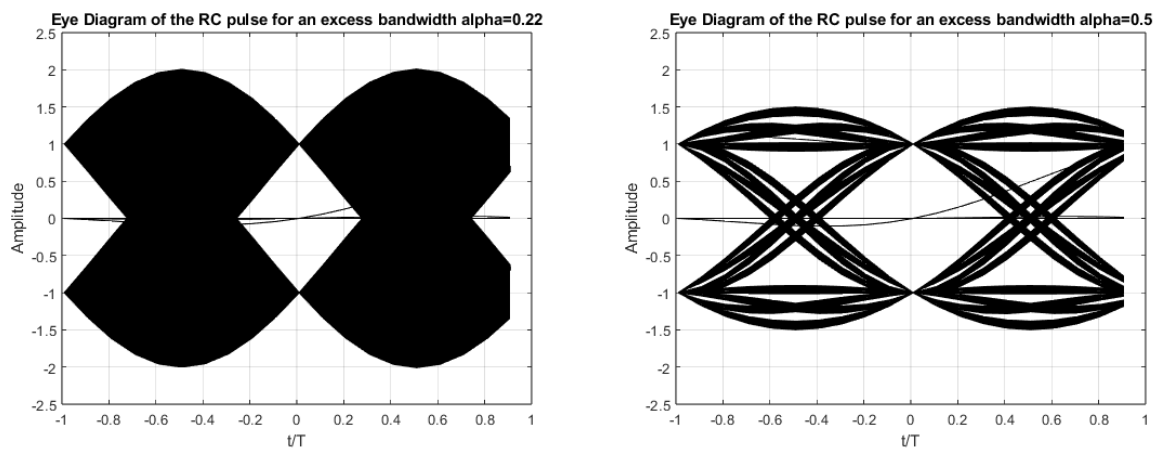


Figura 3: Diagrama de Ojo para RC.

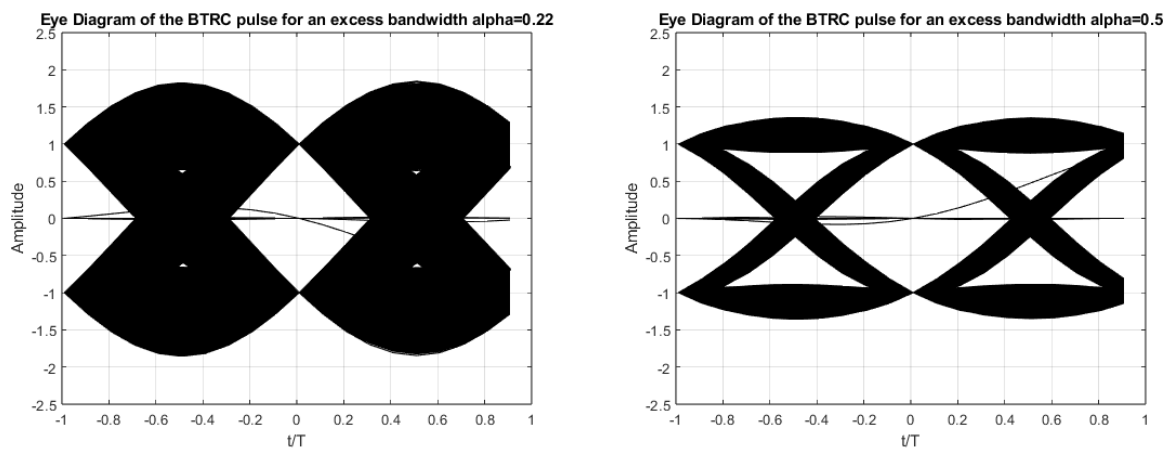


Figura 4: Diagrama de Ojo para BTRC.

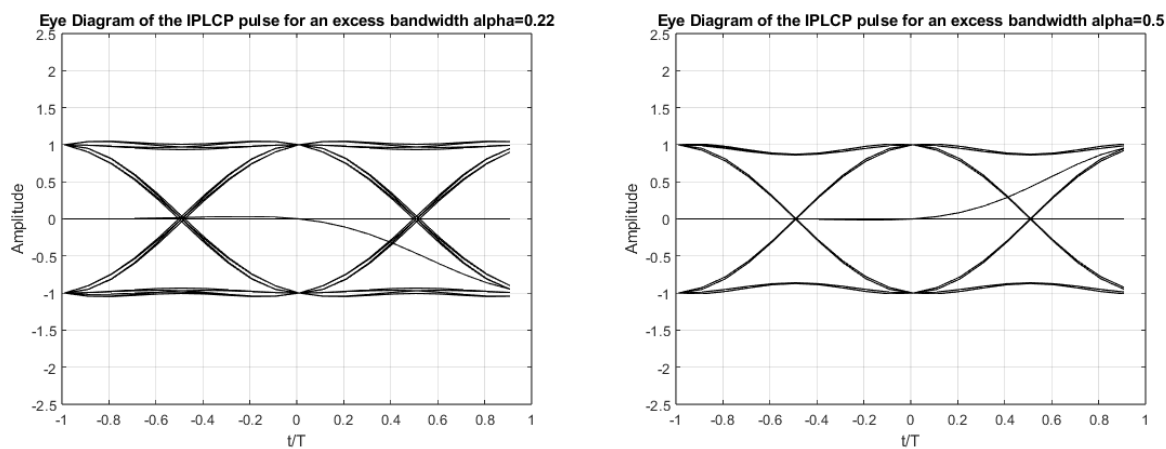


Figura 5: Diagrama de Ojo para IPLCP.

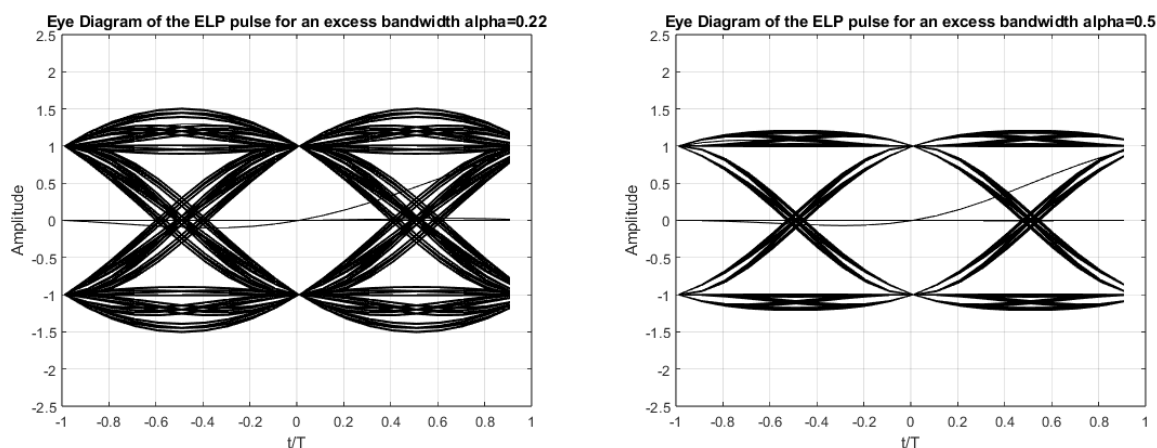


Figura 6: Diagrama de Ojo para ELP.

Vemos visualmente la distorsión máxima aproximada de los pulsos para $\alpha = 0.22$, presentados en la siguiente tabla:

Tabla 2: Valores de distorsión máxima determinados visualmente para pulsos con roll-off factor α de 0.22

Pulso	Intervalo	Distorsión Máxima (amplitud)
RC	± 0.5	2
BTRC	± 0.5	1.8
IPLCP	± 0.5	1
ELP	± 0.5	1.5

3.2. Bit Error Rate

Para obtener los valores de probabilidad de error se siguió el método definido por Beaulieu, desarrollado en la sección de Marco Teórico. Además, se contrastaron los resultados con investigaciones previas [7], buscando replicar las tendencias y valores obtenidos de esta investigación. A continuación se presentan los parámetros utilizados en las simulaciones:

Tabla 3: Parámetros de simulación para el cálculo de probabilidad de error por bit.

Parámetro	Valor
N (símbolos interferentes)	2^{10}
M	100
ω	0.1 [Hz]
Offsets, t/T	$\pm 0.05, 0.10, 0.20, 0.25$
α (roll-off factor)	0.22, 0.35, 0.5
L_{CCI} (interferencias de canal)	2, 6
$L_{ISI+CCI}$	6
SNR_{ISI}	10, 20 [dB]
SNR_{CCI}	15 [dB]
$SNR_{ISI+CCI}$	15 [dB]
SIR_{CCI}	10, 20 [dB]
$SIR_{ISI+CCI}$	15 [dB]

Los códigos asociados en esta sección se encuentran en la carpeta 'Pulsos', donde los scripts *ISIexec*, *CCIexec* y *ISICCIexec* hacen uso de las funciones que calculan BER con distintos parámetros para llegar a los resultados presentados a continuación.

3.2.1. ISI

Las siguientes tablas muestran los cálculos de error considerando solamente ISI:

Tabla 4: Probabilidades de error por bit en distintos intervalos de Jitter considerando ISI para $SNR = 10[db]$ con distintos valores de α .

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
0.22	RC	0.0011	0.0024	0.0146	0.0312
	BTRC	0.0010	0.0021	0.0118	0.0256
	IPLCP	0.0009	0.0012	0.0039	0.0086
	ELP	0.0010	0.0017	0.0083	0.0181
0.35	RC	0.0010	0.0020	0.0110	0.0239
	BTRC	0.0010	0.0017	0.0080	0.0175
	IPLCP	0.0009	0.0012	0.0037	0.0082
	ELP	0.0009	0.0015	0.0066	0.0144
0.5	RC	0.0010	0.0017	0.0081	0.0176
	BTRC	0.0009	0.0014	0.0054	0.0119
	IPLCP	0.0009	0.0012	0.0036	0.0078
	ELP	0.0009	0.0013	0.0050	0.0110

Tabla 5: Probabilidades de error por bit en distintos intervalos de Jitter considerando ISI para $SNR = 20[db]$ con distintos valores de α .

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
0.22	RC	0.0000	0.0000	0.0000	0.0017
	BTRC	0.0000E-03	0.0000E-03	0.0008E-03	0.1948E-03
	IPLCP	0.0000E-10	0.0000E-10	0.0001E-10	0.1372E-10
	ELP	0.0000E-5	0.0000E-5	0.0002E-5	0.1613E-5
0.35	RC	0.0000E-4	0.0000E-4	0.0021E-4	0.7461E-4
	BTRC	0.0000E-5	0.0000E-5	0.0002E-5	0.1369E-5
	IPLCP	0.0000E-11	0.0000E-11	0.0004E-11	0.5159E-11
	ELP	0.0000E-7	0.0000E-7	0.0006E-7	0.5141E-7
0.5	RC	0.0000E-6	0.0000E-6	0.0013E-6	0.9140E-6
	BTRC	0.0000E-8	0.0000E-8	0.0010E-8	0.8939E-8
	IPLCP	0.0000E-11	0.0000E-11	0.0001E-11	0.1355E-11
	ELP	0.0000E-9	0.0000E-9	0.0007E-9	0.7341E-9

3.2.2. CCI

Las siguientes tablas muestran los cálculos de error considerando solamente CCI:

Tabla 6: Probabilidades de error por bit considerando CCI para $SNR = 15[db]$, $SIR = 10[db]$, $L = 2$ con distintos valores de α .

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
0.22	RC	0.0379E-03	0.0489E-03	0.1270E-03	0.2444E-03
	BTRC	0.0380E-03	0.0493E-03	0.1313E-03	0.2564E-03
	IPLCP	0.0399E-03	0.0599E-03	0.2541E-03	0.6394E-03
	ELP	0.0383E-03	0.0507E-03	0.1449E-03	0.2948E-03
0.35	RC	0.0380E-03	0.0495E-03	0.1332E-03	0.2617E-03
	BTRC	0.0383E-03	0.0507E-03	0.1450E-03	0.2951E-03
	IPLCP	0.0403E-03	0.0617E-03	0.2808E-03	0.7312E-03
	ELP	0.0385E-03	0.0520E-03	0.1575E-03	0.3314E-03
0.5	RC	0.0382E-03	0.0507E-03	0.1447E-03	0.2940E-03
	BTRC	0.0387E-03	0.0532E-03	0.1715E-03	0.3737E-03
	IPLCP	0.0408E-03	0.0650E-03	0.3324E-03	0.9156E-03
	ELP	0.0389E-03	0.0541E-03	0.1814E-03	0.4036E-03

Tabla 7: Probabilidades de error por bit considerando CCI para $SNR = 15[db]$, $SIR = 10[db]$, $L = 6$ con distintos valores de α .

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
0.22	RC	0.1419E-03	0.1725E-03	0.3604E-03	0.5990E-03
	BTRC	0.1421E-03	0.1738E-03	0.3699E-03	0.6217E-03
	IPLCP	0.0001	0.0002	0.0006	0.0013
	ELP	0.1429E-03	0.1776E-03	0.3992E-03	0.6932E-03
0.35	RC	0.1422E-03	0.1743E-03	0.3740E-03	0.6318E-03
	BTRC	0.1429E-03	0.1776E-03	0.3994E-03	0.6937E-03
	IPLCP	0.0001	0.0002	0.0007	0.0014
	ELP	0.1436E-03	0.1808E-03	0.4258E-03	0.7594E-03
0.5	RC	0.1429E-03	0.1775E-03	0.3986E-03	0.6918E-03
	BTRC	0.1443E-03	0.1843E-03	0.4549E-03	0.8341E-03
	IPLCP	0.0002	0.0002	0.0008	0.0017
	ELP	0.1448E-03	0.1866E-03	0.4751E-03	0.8861E-03

Tabla 8: Probabilidades de error por bit considerando CCI para $SNR = 15[db]$, $SIR = 20[db]$, $L = 2$ con distintos valores de α .

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
0.22	RC	0.0088E-05	0.0130E-05	0.0584E-05	0.1643E-05
	BTRC	0.0089E-05	0.0140E-05	0.0747E-05	0.2340E-05
	IPLCP	0.0096E-05	0.0186E-05	0.1969E-05	0.8981E-05
	ELP	0.0090E-05	0.0143E-05	0.0811E-05	0.2624E-05
0.35	RC	0.0087E-05	0.0124E-05	0.0484E-05	0.1252E-05
	BTRC	0.0087E-05	0.0125E-05	0.0508E-05	0.1343E-05
	IPLCP	0.0093E-05	0.0165E-05	0.1326E-05	0.5218E-05
	ELP	0.0088E-05	0.0131E-05	0.0585E-05	0.1649E-05
0.5	RC	0.0087E-05	0.0126E-05	0.0518E-05	0.1385E-05
	BTRC	0.0088E-05	0.0131E-05	0.0586E-05	0.1651E-05
	IPLCP	0.0094E-05	0.0172E-05	0.1535E-05	0.6386E-05
	ELP	0.0088E-05	0.0135E-05	0.0660E-05	0.1959E-05

Tabla 9: Probabilidades de error por bit considerando CCI para $SNR = 15[dB]$, $SIR = 20[dB]$, $L = 6$ con distintos valores de α .

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
0.22	RC	0.0087E-05	0.0124E-05	0.0484E-05	0.1252E-05
	BTRC	0.0087E-05	0.0125E-05	0.0508E-05	0.1343E-05
	IPLCP	0.0093E-05	0.0165E-05	0.1326E-05	0.5218E-05
	ELP	0.0088E-05	0.0131E-05	0.0585E-05	0.1649E-05
0.35	RC	0.0087E-05	0.0126E-05	0.0518E-05	0.1385E-05
	BTRC	0.0088E-05	0.0131E-05	0.0586E-05	0.1651E-05
	IPLCP	0.0094E-05	0.0172E-05	0.1535E-05	0.6386E-05
	ELP	0.0088E-05	0.0135E-05	0.0660E-05	0.1959E-05
0.5	RC	0.0088E-05	0.0130E-05	0.0584E-05	0.1643E-05
	BTRC	0.0089E-05	0.0140E-05	0.0747E-05	0.2340E-05
	IPLCP	0.0096E-05	0.0186E-05	0.1969E-05	0.8981E-05
	ELP	0.0090E-05	0.0143E-05	0.0811E-05	0.2624E-05

3.2.3. ISI + CCI

Las siguientes tablas muestran los cálculos de error considerando ambos ISI y CCI:

Tabla 10: Probabilidades de error por bit considerando ISI y CCI para $SNR = 15[dB]$, $SIR = 15[dB]$, $L = 6$ con distintos valores de α .

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
0.22	RC	0.0064	0.0099	0.0296	0.0494
	BTRC	0.0063	0.0092	0.0263	0.0440
	IPLCP	0.0058	0.0071	0.0150	0.0248
	ELP	0.0061	0.0084	0.0216	0.0362
0.35	RC	0.0063	0.0091	0.0253	0.0424
	BTRC	0.0061	0.0083	0.0212	0.0355
	IPLCP	0.0058	0.0070	0.0147	0.0244
	ELP	0.0060	0.0079	0.0192	0.0320
0.5	RC	0.0061	0.0083	0.0214	0.0357
	BTRC	0.0059	0.0075	0.0173	0.0288
	IPLCP	0.0058	0.0070	0.0147	0.0242
	ELP	0.0059	0.0074	0.0167	0.0278

3.3. Pulsos truncados

La presente sección busca desarrollar el estudio de pulsos truncados en $\pm 5t/T$ y $\pm 10t/T$ con respecto al BER calculado en los experimentos previos. Para truncar los pulsos se hizo uso de la función de apoyo dada para el proyecto, modificándola para hacer uso de esta en cualquier pulso. Dado un intervalo para truncar $[-Tr, Tr]$, si al evaluar un pulso este se encuentra con parámetros

fuera de este intervalo, la función entrega un 0, efectivamente anulando su influencia dentro de la sumatoria del BER.

Debido a las limitantes de la versión de MATLAB proporcionada (sin toolboxes), las cifras significativas de MATLAB se reducen a cuatro. Para poder evidenciar los cambios que provoca truncar los pulsos se multiplicó el resultado final por 10^4 , para así observar como afecta el resultado.

Visto lo anterior, a continuación se presentan tablas con los experimentos previos, truncando los pulsos en $t/T \pm 5.0$ y $t/T \pm 10.0$. Para ejecutar el código, se debe ejecutar del mismo modo que la sección anterior, para las variaciones *exec_trunc* correspondientes.

Tabla 11: Probabilidades de error multiplicadas por 10^4 por bit considerando ISI, $SNR = 10$ [dB], para distintos valores de alfa, con pulsos truncados.

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
Truncado en $t/T = \pm 5.0$					
0.22	RC	10.9160	24.0456	146.0228	311.6223
	BTRC	10.4279	21.0626	117.0209	253.3111
	IPLCP	8.6923	11.9004	39.1931	85.9924
	ELP	9.7592	17.3061	82.6437	180.5615
0.35	RC	10.3033	20.3386	110.2244	239.2211
	BTRC	9.7016	16.9927	79.7476	174.0613
	IPLCP	8.6520	11.6960	37.4739	82.0389
	ELP	9.3900	15.3648	66.0744	144.4472
0.5	RC	9.7258	17.1185	80.8106	176.4138
	BTRC	9.0921	13.8736	54.2947	118.7529
	IPLCP	8.6221	11.5306	35.7992	77.9018
	ELP	8.9936	13.3795	50.3932	110.2497
Truncado en $t/T = \pm 10.0$					
0.22	RC	10.9199	24.0695	146.2361	312.0126
	BTRC	10.4443	21.1656	118.0801	255.4901
	IPLCP	8.6923	11.9004	39.1931	85.9924
	ELP	9.7592	17.3061	82.6437	180.5615
0.35	RC	10.3037	20.3416	110.2561	239.2878
	BTRC	9.7052	17.0123	79.9238	174.4399
	IPLCP	8.6520	11.6960	37.4739	82.0389
	ELP	9.3900	15.3648	66.0744	144.4472
0.5	RC	9.7259	17.1189	80.8147	176.4230
	BTRC	9.0944	13.8855	54.3985	118.9929
	IPLCP	8.6221	11.5306	35.7992	77.9018
	ELP	8.9936	13.3795	50.3932	110.2498

Tabla 12: Probabilidades de error multiplicadas por 10^4 por bit considerando ISI, $SNR = 20$ [dB], para distintos valores de alfa, con pulsos truncados.

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
Truncado en $t/T = \pm 5.0$					
0.22	RC	0.0000	0.0000	0.1873	17.0503
	BTRC	0.0000	0.0000	0.0051	1.4755
	IPLCP	-0.0000E-06	0.0000E-06	0.0001E-06	0.1372E-06
	ELP	0	0.0000	0.0000	0.0161
0.35	RC	0.0000	0.0000	0.0021	0.7388
	BTRC	0.0000	0.0000	0.0000	0.0120
	IPLCP	0.0000E-07	0.0000E-07	0.0004E-07	0.5159E-07
	ELP	0.0000	0	0.0006E-03	0.5141E-03
0.5	RC	0.0000	0.0000	0.0000	0.0091
	BTRC	0.0000	-0.0000	0.0008E-04	0.7784E-04
	IPLCP	0.0000	0.0000	0.0001E-07	0.1355E-07
	ELP	0.0000	-0.0000	0.0007E-05	0.7341E-05
Truncado en $t/T = \pm 10.0$					
0.22	RC	0.0000	0.0000	0.1955	17.3563
	BTRC	0.0000	0.0000	0.0075	1.8958
	IPLCP	0.0000	0.0000	0.0075	1.8958
	ELP	0	0.0000	0.0000	0.0161
0.35	RC	0.0000	0.0000	0.0021	0.7459
	BTRC	0.0000	0.0000	0.0000	0.0134
	IPLCP	0.0000E-07	0.0000E-07	0.0004E-07	0.5159E-07
	ELP	0.0000	0	0.0006E-03	0.5141E-03
0.5	RC	0.0000	0.0000	0.0000	0.0091
	BTRC	0.0000	-0.0000	0.0008E-04	0.7784E-04
	IPLCP	0.0000	0.0000	0.0001E-07	0.1355E-07
	ELP	0.0000	-0.0000	0.0007E-05	0.7341E-05

Tabla 13: Probabilidades de error multiplicadas por 10^4 por bit considerando CCI, $SNR = 15$ [dB], $SIR = 10$ [dB], $L = 2$, para distintos valores de α , con pulsos truncados.

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
Truncado en $t/T = \pm 5.0$					
0.22	RC	0.3788	0.4885	1.2697	2.4440
	BTRC	0.3798	0.4932	1.3133	2.5641
	IPLCP	0.3994	0.5986	2.5415	6.3943
	ELP	0.3825	0.5073	1.4493	2.9479
0.35	RC	0.3802	0.4952	1.3324	2.6173
	BTRC	0.3825	0.5073	1.4501	2.9507
	IPLCP	0.4026	0.6171	2.8080	7.3116
	ELP	0.3849	0.5195	1.5750	3.3138
0.5	RC	0.3825	0.5070	1.4466	2.9405
	BTRC	0.3873	0.5324	1.7153	3.7365
	IPLCP	0.4082	0.6501	3.3244	9.1560
	ELP	0.3890	0.5412	1.8140	4.0363
Truncado en $t/T = \pm 10.0$					
0.22	RC	0.3788	0.4885	1.2697	2.4440
	BTRC	0.3798	0.4932	1.3133	2.5641
	IPLCP	0.3994	0.5986	2.5415	6.3943
	ELP	0.3825	0.5073	1.4493	2.9479
0.35	RC	0.3802	0.4952	1.3324	2.6173
	BTRC	0.3825	0.5073	1.4501	2.9507
	IPLCP	0.4026	0.6171	2.8080	7.3116
	ELP	0.3849	0.5195	1.5750	3.3138
0.5	RC	0.3825	0.5070	1.4466	2.9405
	BTRC	0.3873	0.5324	1.7153	3.7365
	IPLCP	0.4082	0.6501	3.3244	9.1560
	ELP	0.3890	0.5412	1.8140	4.0363

Tabla 14: Probabilidades de error multiplicadas por 10^4 por bit considerando CCI, $SNR = 15$ [dB], $SIR = 10$ [dB], $L = 6$, para distintos valores de α , con pulsos truncados.

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
Truncado en $t/T = \pm 5.0$					
0.22	RC	1.4186	1.7250	3.6036	5.9896
	BTRC	1.4213	1.7376	3.6988	6.2175
	IPLCP	1.4774	2.0170	6.1749	12.7172
	ELP	1.4292	1.7756	3.9923	6.9315
0.35	RC	1.4225	1.7431	3.7405	6.3178
	BTRC	1.4293	1.7757	3.9938	6.9367
	IPLCP	1.4865	2.0647	6.6737	14.1357
	ELP	1.4360	1.8085	4.2580	7.5942
0.5	RC	1.4291	1.7748	3.9864	6.9179
	BTRC	1.4430	1.8429	4.5492	8.3414
	IPLCP	1.5023	2.1493	7.6133	16.8895
	ELP	1.4478	1.8663	4.7509	8.8606
Truncado en $t/T = \pm 10.0$					
0.22	RC	1.4186	1.7250	3.6036	5.9896
	BTRC	1.4213	1.7376	3.6988	6.2175
	IPLCP	1.4774	2.0170	6.1749	12.7172
	ELP	1.4292	1.7756	3.9923	6.9315
0.35	RC	1.4225	1.7431	3.7405	6.3178
	BTRC	1.4293	1.7757	3.9938	6.9367
	IPLCP	1.4865	2.0647	6.6737	14.1357
	ELP	1.4360	1.8085	4.2580	7.5942
0.5	RC	1.4291	1.7748	3.9864	6.9179
	BTRC	1.4430	1.8429	4.5492	8.3414
	IPLCP	1.5023	2.1493	7.6133	16.8895
	ELP	1.4478	1.8663	4.7509	8.8606

Tabla 15: Probabilidades de error multiplicadas por 10^4 por bit considerando CCI, $SNR = 15$ [dB], $SIR = 20$ [dB], $L = 2$, para distintos valores de α , con pulsos truncados.

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
Truncado en $t/T = \pm 5.0$					
0.22	RC	0.0009	0.0012	0.0048	0.0125
	BTRC	0.0009	0.0013	0.0051	0.0134
	IPLCP	0.0009	0.0017	0.0133	0.0522
	ELP	0.0009	0.0013	0.0059	0.0165
0.35	RC	0.0009	0.0013	0.0052	0.0138
	BTRC	0.0009	0.0013	0.0059	0.0165
	IPLCP	0.0009	0.0017	0.0154	0.0639
	ELP	0.0009	0.0014	0.0066	0.0196
0.5	RC	0.0009	0.0013	0.0058	0.0164
	BTRC	0.0009	0.0014	0.0075	0.0234
	IPLCP	0.0010	0.0019	0.0197	0.0898
	ELP	0.0009	0.0014	0.0081	0.0262
Truncado en $t/T = \pm 10.0$					
0.22	RC	0.0009	0.0012	0.0048	0.0125
	BTRC	0.0009	0.0013	0.0051	0.0134
	IPLCP	0.0009	0.0017	0.0133	0.0522
	ELP	0.0009	0.0013	0.0059	0.0165
0.35	RC	0.0009	0.0013	0.0052	0.0138
	BTRC	0.0009	0.0013	0.0059	0.0165
	IPLCP	0.0009	0.0017	0.0154	0.0639
	ELP	0.0009	0.0014	0.0066	0.0196
0.5	RC	0.0009	0.0013	0.0058	0.0164
	BTRC	0.0009	0.0014	0.0075	0.0234
	IPLCP	0.0010	0.0019	0.0197	0.0898
	ELP	0.0009	0.0014	0.0081	0.0262

Tabla 16: Probabilidades de error multiplicadas por 10^4 por bit considerando CCI, $SNR = 15$ [dB], $SIR = 20$ [dB], $L = 6$, para distintos valores de α , con pulsos truncados.

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
Truncado en $t/T = \pm 5.0$					
0.22	RC	0.0009	0.0012	0.0048	0.0125
	BTRC	0.0009	0.0013	0.0051	0.0134
	IPLCP	0.0009	0.0017	0.0133	0.0522
	ELP	0.0009	0.0013	0.0059	0.0165
0.35	RC	0.0009	0.0013	0.0052	0.0138
	BTRC	0.0009	0.0013	0.0059	0.0165
	IPLCP	0.0009	0.0017	0.0154	0.0639
	ELP	0.0009	0.0014	0.0066	0.0196
0.5	RC	0.0009	0.0013	0.0058	0.0164
	BTRC	0.0009	0.0014	0.0075	0.0234
	IPLCP	0.0010	0.0019	0.0197	0.0898
	ELP	0.0009	0.0014	0.0081	0.0262
Truncado en $t/T = \pm 10.0$					
0.22	RC	0.0009	0.0012	0.0048	0.0125
	BTRC	0.0009	0.0013	0.0051	0.0134
	IPLCP	0.0009	0.0017	0.0133	0.0522
	ELP	0.0009	0.0013	0.0059	0.0165
0.35	RC	0.0009	0.0013	0.0052	0.0138
	BTRC	0.0009	0.0013	0.0059	0.0165
	IPLCP	0.0009	0.0017	0.0154	0.0639
	ELP	0.0009	0.0014	0.0066	0.0196
0.5	RC	0.0009	0.0013	0.0058	0.0164
	BTRC	0.0009	0.0014	0.0075	0.0234
	IPLCP	0.0010	0.0019	0.0197	0.0898
	ELP	0.0009	0.0014	0.0081	0.0262

Tabla 17: Probabilidades de error multiplicadas por 10^4 por bit considerando ISI y CCI, $SNR = 15$ [dB], $SIR = 15$ [dB], $L = 6$, para distintos valores de alfa, con pulsos truncados.

α	Pulso	$t/T = \pm 0.05$	$t/T = \pm 0.10$	$t/T = \pm 0.20$	$t/T = \pm 0.25$
Truncado en $t/T = \pm 5.0$					
0.22	RC	0.0533	0.5783	33.8166	135.2714
	BTRC	0.0441	0.3715	19.0095	83.6244
	IPLCP	0.0192	0.0469	0.8711	4.7713
	ELP	0.0334	0.1947	7.5796	36.2860
0.35	RC	0.0419	0.3316	16.2875	73.0067
	BTRC	0.0326	0.1830	6.8644	32.9334
	IPLCP	0.0186	0.0422	0.7338	4.0973
	ELP	0.0283	0.1299	4.0951	20.1646
0.5	RC	0.0329	0.1869	7.0539	33.8522
	BTRC	0.0245	0.0918	2.4397	12.1868
	IPLCP	0.0179	0.0374	0.5870	3.3573
	ELP	0.0232	0.0791	1.9090	9.6591
Truncado en $t/T = \pm 10.0$					
0.22	RC	0.0329	0.1869	7.0552	33.8582
	BTRC	0.0245	0.0922	2.4582	12.2802
	IPLCP	0.0179	0.0374	0.5870	3.3573
	ELP	0.0232	0.0791	1.9090	9.6591
0.35	RC	0.0420	0.3318	16.3029	73.0655
	BTRC	0.0327	0.1839	6.9204	33.1760
	IPLCP	0.0186	0.0422	0.7338	4.0973
	ELP	0.0283	0.1299	4.0951	20.1646
0.5	RC	0.0329	0.1869	7.0552	33.8582
	BTRC	0.0245	0.0922	2.4582	12.2802
	IPLCP	0.0179	0.0374	0.5870	3.3573
	ELP	0.0232	0.0791	1.9090	9.6591

4. Análisis de resultados

4.1. Transmisión de datos con modulación BPSK

Observando los resultados gráficos respecto a la respuesta al impulso y frecuencia de los pulsos evaluados, se contrasta la forma de cada pulso a partir de su elaboración. Se evidencia que el RC tiene los mayores lóbulos laterales en la respuesta al impulso pero menor ancho de banda en la respuesta en frecuencia. Del mismo modo, el IPLCP tiene los menores lobulos laterales, tendiendo casi a 0, mientras que su respuesta en frecuencia no llega a 1 comparado al resto de pulsos y tiene el mayor ancho de banda entre los pulsos evaluados. Todo esto es acorde a los parámetros definidos en la elaboración de los pulsos y evidencian su rendimiento en distintas circunstancias, donde se deba reducir mayormente ISI o usar un menor ancho de banda correspondientemente.

Asimismo, se evidencia como el parámetro α cambia la forma de los pulsos. Las respuestas al impulso con $\alpha = 0.22$ tienen mayores lóbulos laterales por general en los cuatro puntos en comparación a los lóbulos de el gráfico para $\alpha = 0.5$. De modo análogo, para la respuesta en frecuencia los gráficos con $\alpha = 0.22$ presentan un menor ancho de banda en comparación a los pulsos utilizando $\alpha = 0.5$.

Finalmente, el diagrama de ojo permite observar como para los cuatro pulsos estudiados, todos cumplen con el primer criterio de Nyquist al evaluarse en 1 o -1 dentro del instante de muestreo $t/T = 0$. Los pulsos con $\alpha = 0.22$ por general muestran más pulsos superpuestos a lo largo del intervalo cercano al instante de muestreo, mientras que al incrementar el α a 0.50, los pulsos se presentan mayormente definidos con menores superposiciones a lo largo del intervalo, mostrando como los lóbulos laterales al reducirse, reducen justamente el ISI asociado.

4.2. Bit Error Rate

Vistas las tablas de BER se evidencia como afecta el ISI, CCI y su combinación a distintos niveles dependiendo tanto del SNR, SIR y canales. Para empezar, se ve que los ordenes de magnitud para las probabilidades de error cambian notoriamente respecto a los parámetros. Los valores de ISI pasan de orden 10^{-3} a generalmente valores desde 10^{-5} al aumentar el SNR de 10 a 20 [dB]. Esto está acorde a lo esperado ya que incrementa la potencia de la señal respecto al ruido que podría afectarle. Para ISI el pulso con menores probabilidades de error es generalmente el IPLCP, seguido por ELP, BTRC y RC con la mayor probabilidad de error.

Para CCI, al aumentar el número de canales el error mantiene su orden con excepción del IPLCP, el cual aumenta notoriamente con respecto al resto. De aumentar el valor de SIR, los valores de probabilidad pasan de un orden 10^{-3} a un orden 10^{-5} . Estos resultados son consistente a lo esperado, ya que al aumentar el número de canales incrementa la probabilidad de error, pero al incrementar el SIR se reduce el error con mayor relevancia al comportamiento del BER. Para CCI, el pulso con menores probabilidades de error fue el RC, seguido por BTRC, ELP y IPLCP con mayor probabilidades de error.

Finalmente al ser afectado por ISI y CCI, las probabilidades de error se encuentran en magnitudes mayores, cercanas a las entregadas en las tablas de ISI. En esta circunstancia resulta mayormente relevante el análisis del comportamiento de cada pulso, donde el pulso con menor probabilidad de error por general es el IPLCP, seguido por ELP, BTRC y finalmente RC.

Considerando la tendencia de pulsos con menor y mayor probabilidad de error, vemos como los parámetros de un pulso afectan el BER dependiendo del caso a tratar. Para ISI, el IPLCP tiene el mejor rendimiento, pero para CCI tiene el peor, lo cual puede asociarse a su menor amplitud general lo cual hace que interferencia entre canales reduzca mayormente el efecto del pulso, mientras que sus mínimos lóbulos laterales dan un mejor rendimiento para ISI. RC resulta el caso contrario, con mayores probabilidades de error para ISI pero menores para CCI, lo cual puede asociarse a su mayor amplitud en respuesta en frecuencia y mayores lóbulos laterales. El resto de pulsos se encontraba en niveles similares, evidenciado por su similitud entre ambos tipos de pulsos.

Finalmente, respecto a los pulsos truncados notamos que los valores que cambian en la gran

mayoría de datos resulta mínimo, llegando a solo la unidad, en una cifra que lleva una amplificación del orden de 10^4 . Esto se explica ya que los sumandos dentro de la ecuación propuesta para BER, al aumentar el m por naturaleza de la exponencial y la división son sumandos cada vez menores, lo cual implica que cada vez sumaran menos a la sumatoria total, modificando cada vez menos el valor. La única tabla que presenta valores substancialmente diferentes se encuentra en la tabla que considera ISI y CCI en conjunto, sin embargo hay que considerar que todos los valores se encuentran, nuevamente, multiplicados por un orden de 4 decimales, lo cual a lo largo implica que el cambio no es demasiado notorio. Queda evidente, eso sí, notando los cambios de las cifras que el truncar los pulsos efectivamente cambia los resultados de BER, llegando a aumentar la probabilidad de error por valores pequeños, sin afectar de forma notoria el orden de los valores.

5. Conclusiones

A partir de los estudios y simulaciones realizadas, se logró contrastar los distintos pulsos evaluados y como sus parámetros y diferencias afectan el rendimiento de un modelo de canal de comunicaciones para distintos casos. Se observa como todos los pulsos cumplen el primer criterio de Nyquist para el filtrado de los símbolos enviados, garantizando un valor aceptable modulado en los tiempos de muestreo. Asimismo, se evidencian y contrastan las diferencias entre pulsos, dando mayor o menor rendimiento dependiendo del caso.

Esto se complementa con el estudio de BER, donde observamos que, por ejemplo, el uso de pulsos IPLCP resulta idóneo para casos con mucho ISI, mientras que es el con menor rendimiento para casos con CCI. Por lo tanto, vemos que a pesar de que un pulso tenga métricas mayores por general que otro, unos tienen una mejor utilidad dependiendo de las circunstancias del canal (por ejemplo, un canal con muchas interferencia co-canal preferirá otro tipo de pulso al IPLCP que uno que no presenta esto, por ejemplo el RC).

Finalmente, vemos como afecta el jitter a la transmisión, contrastando los datos de error obtenidos en distintos intervalos de tiempo. Junto a esto, el efecto de truncar los pulsos genera cambios en las probabilidades, sin embargo los valores de estos pulsos truncados son tan bajos que no resultan lo suficientemente relevantes para generar cambios a las tendencias totales de los resultados.

Referencias

- [1] H. Nyquist, "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory," in Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, vol. 47, no. 2, pp. 617-644, April 1928, doi: 10.1109/T-AIEE.1928.5055024.
- [2] Arrano, H. F., Azurdia-Meza, C. (2014). ICI reduction in OFDM systems using a new family of Nyquist-I pulses. 2014 IEEE Latin-America Conference on Communications (LATINCOM). doi:10.1109/latincom.2014.7041838
- [3] Lee, S. J., Beaulieu, N. C. (2007). Performance of the Raised-Cosine and "Better Than Raised-Cosine" Pulses in Non-Data-Aided Symbol Timing-Error Detection. IEEE GLOBECOM 2007-2007 IEEE Global Telecommunications Conference. doi:10.1109/glocom.2007.340
- [4] Azurdia-Meza, C. A., Falchetti, A., Arrano, H. F., Kamal, S., Lee, K. (2015). Evaluation of the improved parametric linear combination pulse in digital baseband communication systems. 2015 International Conference on Information and Communication Technology Convergence (ICTC). doi:10.1109/ictc.2015.7354591
- [5] Aranda-Cubillo, J., Azurdia-Meza, C. A., Montejó-Sánchez, S., Maciel-Barboza, F. M., Jiron, I. (2017). Analysis of the exponential linear pulse in baseband digital communication systems. 2017 IEEE 9th Latin-American Conference on Communications (LATINCOM). doi:10.1109/latincom.2017.8240170
- [6] N. C. Beaulieu, "The evaluation of error probabilities for intersymbol and cochannel interference," in IEEE Transactions on Communications, vol. 39, no. 12, pp. 1740-1749, Dec. 1991, doi: 10.1109/26.120161.
- [7] Aranda, J., Azurdia-Meza, C. A., Souza, R. D., Montejó-Sánchez, S., Jiron, I. (2018). Error Probability Analysis of Nyquist-I Pulses in Intersymbol and Cochannel Interference. 2018 IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC). doi:10.1109/iscc.2018.8538639