

TDE #2

Filipe J. Zabala

2024-09-25

INSTRUÇÕES - LEIA COM ATENÇÃO!

1. Esta lista de exercícios pode ser discutida entre os colegas, e pode ser entregue **em até 3 pessoas**.
2. Entregue a resolução em **papel** na aula do dia **07/10/2024** ou em formato **eletrônico nativo** via Moodle, indicando o(s) **nome(s) completo(s)** e **a turma** no cabeçalho do documento.
3. Apresente o **desenvolvimento completo** das questões, podendo ser composto de desenhos ou esquemas.
4. Lembre-se que o padrão de notação utilizado é o americano, i.e., nos exercícios apresentados pontos separam decimais e vírgulas separam milhares. **Use o padrão de sua preferência.**

Questões

Q1. (2.0) Um experimento conduzido por (Campbell 1934) resultou na seguinte tabela cruzada entre as variáveis X e Y .

	y	0	1	2	3	4	5	6	7	f_x
x 0	24	19	12	7	2					64
1	28	39	45	17	2					131
2	12	41	47	32	3	3	2			140
3	6	23	29	21	11	6			1	97
4		1	12	14	13	4	2	2		48
5	1		3	1	1	2	4			12
6			1		2	2				5
7					1	1	1			3
f_y	71	123	149	92	35	18	9	3		500

- a) (0.5) Considerando a v.a. (X, Y) com distribuição de Poisson bivariada¹, obtenha $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ e $\hat{\lambda}_3$ por máxima verossimilhança.
- b) (0.5) A partir do modelo obtido no item a, calcule $Pr(X = 2, Y = 3)$. Compare com a probabilidade obtida através da proporção amostral da tabela acima.
- c) (0.5) A partir do modelo obtido no item a, calcule $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ e $V(Y)$.
- d) (0.5) Calcule $Pr(X \leq 2, Y \geq 3)$. Compare com a proporção amostral.

¹<https://filipezabala.com/ea/distr-contagem.html#poisson-bivariada>

Q2. (3.0) Um estudo apontou as seguintes proporções de cada tipo sanguíneo humano:

A	B	AB	O
0.35	0.12	0.04	0.49

Com base nas informações do estudo e considerando que 7 pessoas forem escolhidas aleatoriamente, responda:

- (1.0) Qual a probabilidade de que uma tenha sangue do tipo A, uma do B, duas do AB e três do O?
- (1.0) Qual a probabilidade de que todas tenham sangue do tipo A?
- (1.0) Qual a probabilidade de que todas tenham o mesmo tipo de sangue?

Q3. (2.0) Considere a pesquisa Datafolha de 2024-09-12² com $n = 1204$ entrevistados.

Candidato	A	B	C	D	E	F	G	Branco/Nulo	Indecisos
Proporção	0.27	0.25	0.19	0.08	0.06	0.03	0.01	0.07	0.04

```
t(desempateTecnico::bayes(p = c(0.27, 0.25, 0.19, 0.08, 0.06, 0.03, 0.01),
                             n = 1204, p.nv = 0.07, p.und = 0.04))
```

```
##          [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8]          [,9]          [,10] [,11]
## cenario  "A"  "B"  "C"  "D"  "E"  "F"  "G"  "AB"          "AC"          "AD"  "AE"
## posteriori "0"  "0"  "0"  "0"  "0"  "0"  "0"  "0"  "0.9997" "3e-04" "0"  "0"
##          [,12] [,13] [,14] [,15] [,16] [,17] [,18] [,19] [,20] [,21] [,22]
## cenario  "AF"  "AG"  "BC"  "BD"  "BE"  "BF"  "BG"  "CD"  "CE"  "CF"  "CG"
## posteriori "0"  "0"  "0"  "0"  "0"  "0"  "0"  "0"  "0"  "0"  "0"  "0"
##          [,23] [,24] [,25] [,26] [,27] [,28]
## cenario  "DE"  "DF"  "DG"  "EF"  "EG"  "FG"
## posteriori "0"  "0"  "0"  "0"  "0"  "0"
```

- (1.0) Sabendo que a função `desempateTecnico::bayes()` assume uma priori Dirichlet(1,1,...,1), indique a distribuição a posteriori e seus hiperparâmetros. Considere apenas os 1117 votos válidos, com os indecisos já distribuídos proporcionalmente entre os candidatos.

Candidato	A	B	C	D	E	F	G	TOTAL
# votos declarados	339	314	238	100	75	38	13	1117

- (1.0) Comente a afirmação da reportagem de que “[a] pesquisa Datafolha para a Prefeitura de São Paulo divulgada nesta quinta-feira (12) mostra um empate técnico na liderança entre os candidatos [A] (...) com 27%, e [B], com 25%”.

²<https://www.cnnbrasil.com.br/eleicoes/nunes-tem-27-boulos-25-e-marcacal-19-em-sp-diz-datafolha/>

Q4. (3.0) Considere a distribuição normal³ nos casos uni, bi e multivariados.

- a) (1.0) Verifique analiticamente (i.e., parta das definições e apresente o desenvolvimento das equações) que o produto de duas normais univariadas equivale à definição no caso bivariado quando $\rho = 0$.
- b) (1.0) Obtenha a matriz de covariâncias Σ considerando uma normal de 3 dimensões onde $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 5$, $\sigma_3 = 1.5$, $\boldsymbol{\mu}' = [1 \quad 1 \quad 1]$ e

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{11}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{11}{15} & 1 \end{bmatrix}$$

- c) (1.0) Calcule a probabilidade $Pr(X_1 > 0.5, X_2 > 1, X_3 < 2)$, indicando a integral que está sendo calculada e o código utilizado.

Referências

Campbell, JT. 1934. “The Poisson Correlation Function.” *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 4 (1): 18–26. <https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/S0013091500024135>.

³<https://filipezabala.com/ea/normal.html>