Глава 11

„$\frac{0}{0}$“ И АНАЛОГИЧНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

$\frac{0}{0}$ до сих пор не имело никакого смысла, и впредь мы не собираемся приписывать ему какой-нибудь смысл. На самом деле мы будем иметь в виду следующее.

Как мы знаем,

$$\lim_{x=0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x=0} \frac{x^2}{x} = 0,$$

$$\lim_{x=0} \frac{x}{x^2} \text{ не существует,}$$

$$\lim_{x=0} \frac{\frac{x^2}{x}}{\frac{x^2}{x}} = 1.$$

Четыре выражения, стоящие под знаком предела имеют вид

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

где

$$\lim_{x=0} f(x) = 0, \quad \lim_{x=0} g(x) = 0.$$

Если

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

где

$$\lim_{x=\xi} f(x) = \eta, \quad \lim_{x=\xi} g(x) = \zeta,$$

то в том случае, когда

$$\zeta \neq 0,$$

мы, по теореме 92, имеем

$$\lim_{x=\xi} \varphi(x) = \frac{\eta}{\zeta}$$

Таким образом интерес представляет лишь случай $\zeta = 0$ (как в приведенных выше четырех примерах).

Если

$$\zeta = 0, \quad \eta \neq 0,$$

то $\lim\limits_{x=\xi} f(x)$, очевидно, не существует; действительно, в противном случае мы имели бы

$$\eta = \lim_{x=\xi} f(x) = \lim_{x=\xi}(g(x)\varphi(x)) = \lim_{x=\xi} g(x) \lim_{x=\xi} \varphi(x) = \\ = 0 \cdot \lim_{x=\xi} \varphi(x) = 0.$$

К случаю

$$\eta = 0, \quad \zeta = 0$$

и относится первые рассмотрения этой главы.

Теорема 187. *Пусть*

$$\lim_{x=\xi} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x=\xi} g(x) = 0,$$

$$f'(\xi) \textit{ существует},$$

$$g'(\xi) \neq 0.$$

Тогда

$$\lim_{x=\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в ξ, а, следовательно, и непрерывны. Поэтому

$$f(\xi) = g(\xi) = 0,$$

$$f'(\xi) = \lim_{x=\xi} \frac{f(x)}{x - \xi},$$

$$g'(\xi) = \lim_{x=\xi} \frac{g(x)}{x - \xi},$$