на классе F называют величину

$$R_N(F) = \sup_{f\in F} |\ R_N(f)\ |,$$

где, как обычно,

$$R_N(f) = I(f) - S_N(f).$$

Нижняя грань

$$W_N(F) = \inf_{D_j\ P_j} R_N(F)$$

называется *оптимальной оценкой погрешности квадратур на рассматриваемом классе*. Если существует квадратура, для которой $R_N(F) = W_N(F)$, то такую квадратуру называют *оптимальной*, или *наилучшей, на рассматриваемом классе*.

Обратимся к случаю

$$I(f) = \int\limits_0^1 f(x)dx, \quad f \in F = C_1(A, [0, 1]);$$

$C_1(A, [0, 1])$ — класс непрерывных функций с кусочно-непрерывной первой производной, удовлетворяющей условию $|f'(x)\ | \leqslant A$.

Квадратурную сумму записываем в виде

$$S_N(f) = \sum_{j=1}^{N} D_j f(x_j), \quad x_1 < ... < x_N.$$

Потребуем выполнения условия

$$\sum_{j=1}^{N} D_j = 1. \tag{1}$$

Если (1) не выполнено, то при $f(x) = c = const$ имеем

$$R_N(f) = \left(1 - \sum_{j=1}^{N} D_j\right) c \neq 0.$$

Все функции $f(x) = const$ принадлежат рассматриваемому классу, и следовательно,

$$R_N(F) \geqslant \sup_c \left(\left|1 - \sum_{j=1}^{N} D_j\right| |c|\right) = \infty.$$

Ясно, что об оптимальности такой квадратуры говорить не приходится. Квадратура, удовлетворяющая условию (1), точна для постоянных, т. е. всех многочленов нулевой степени. Для таких квадратур, согласно (2.6), справедливо соотношение

$$R_N(C_1(A, [0, 1])) = A \int\limits_0^1 |\ K_N(y)\ |dy,$$

где

$$K_N(y) = 1 - y - \sum_{j=1}^{N} D_j(\overline{x_j - y})^0,$$

$$(\bar{t})^0 = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Для $x_{m-1} \leqslant y < x_m$ имеем

$$(\overline{x_j - y})^0 = \begin{cases} 1 & \text{при } j < m, \\ 0 & \text{при } j \geqslant m, \end{cases}$$

(здесь мы положили $0^0 = 0$); поэтому

$$\sum_{j=1}^{N} D_j(\overline{x_j - y})^0 =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{при} \quad y < x_1, \\ Q_m = \sum\limits_{j=m}^{N} D_j & \text{при} \quad x_{m-1} \leqslant y < x_m, \quad m = 2, ..., N, \\ 0 & \text{при} \quad x_N \leqslant y. \end{cases} \tag{2}$$

Мы видим, что исходная задача минимизации погрешности на классе свелась к решению слудующей задачи: приблизить наилучшим образом в метрике $L_1 : || \, f \, || = \int\limits_0^1 | \, f(x) \, | dx$ функцию $1 - y$ функциями вида (2). Обозначим

$$\int\limits_0^1 | \, K_N(y) \, | dy \quad \text{через} \quad V(Q_2, ..., Q_N; x_1, ..., x_N)$$

Имеем равенство

$$V(Q_2, ..., Q_N; x_1, ..., x_N) =$$

$$= \int\limits_0^{x_1} | \, y \, | dy + \sum_{m=2}^{N} \int\limits_{x_{m-1}}^{x_m} | \, (1 - y) - Q_m \, | dy + \int\limits_{x_N}^{1} | \, 1 - y \, | dy. \tag{3}$$

От фиксированного Q_m зависит только одно слагаемое

$$V(Q_m) = \int\limits_{x_{m-1}}^{x_m} | \, (1 - y) - Q_m \, | dy.$$