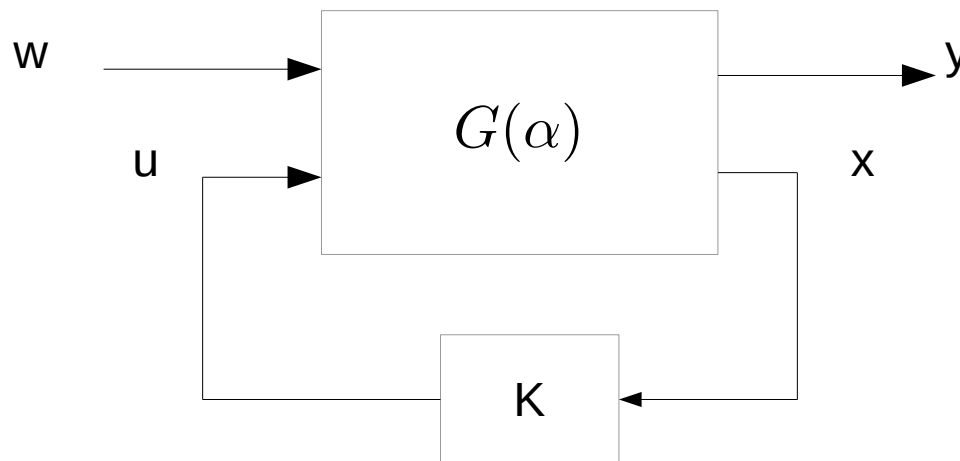


Mini Curso

Controle Robusto

via LMIs

Marcos Rogério Fernandes



Parte 0: Introdução aos sistemas incertos

Parte I: Como analisar?

Parte II: Como estabilizar?

Parte III: Como otimizar?

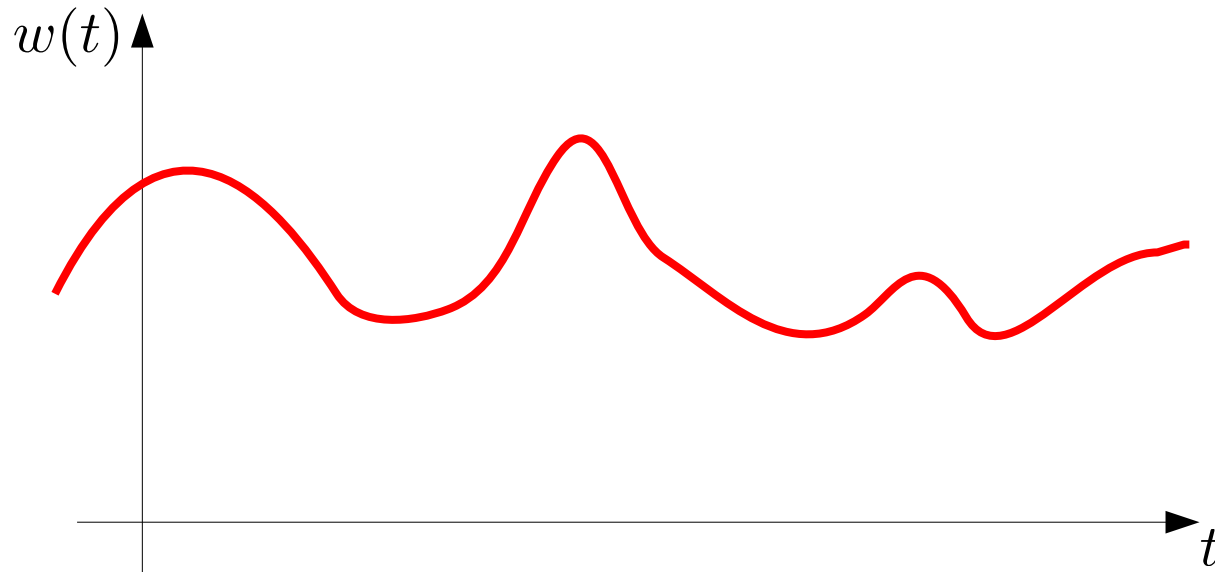
Exemplo de Sistema de Controle

Video do Drone

<https://www.youtube.com/watch?v=w2itwFJCgFQ&t=678s>

Sinal

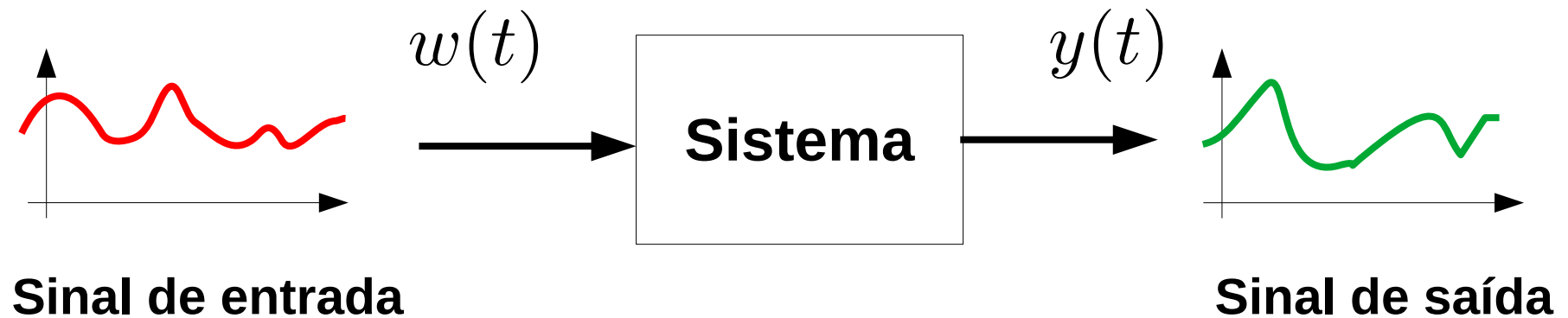
Indica a variação de alguma grandeza de interesse.



**E.x.: Sinal de Força, Temperatura,
Pressão, Tensão Elétrica, Corrente
elétrica etc...**

Sistema

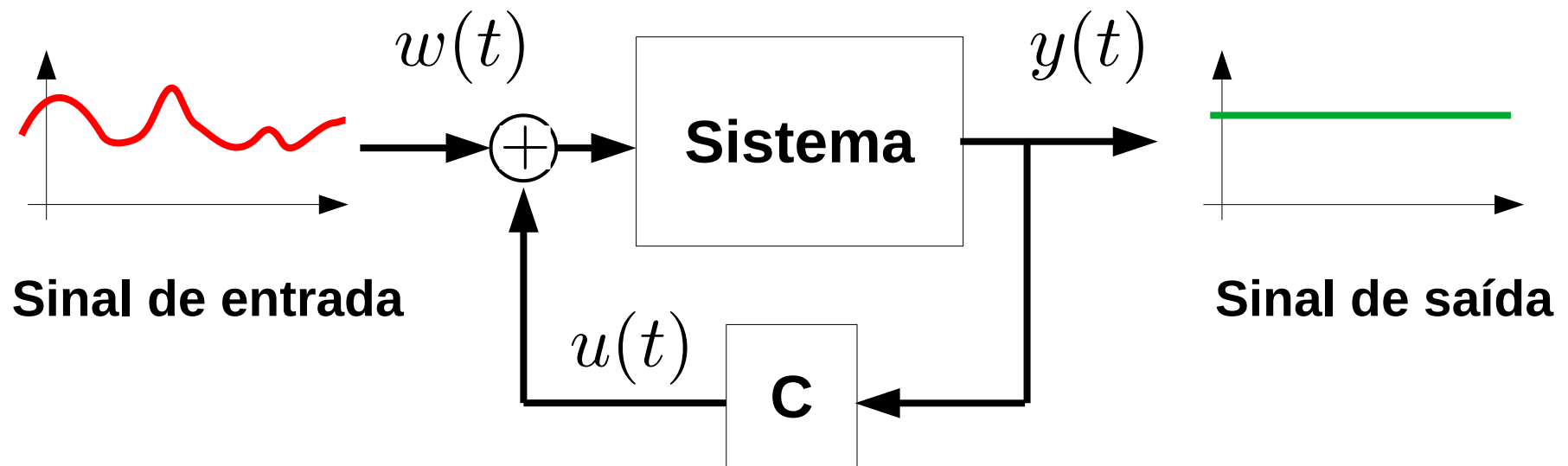
Coleção de elementos interconectados de forma a modificar um sinal.



Malha Aberta

Sistema de Controle

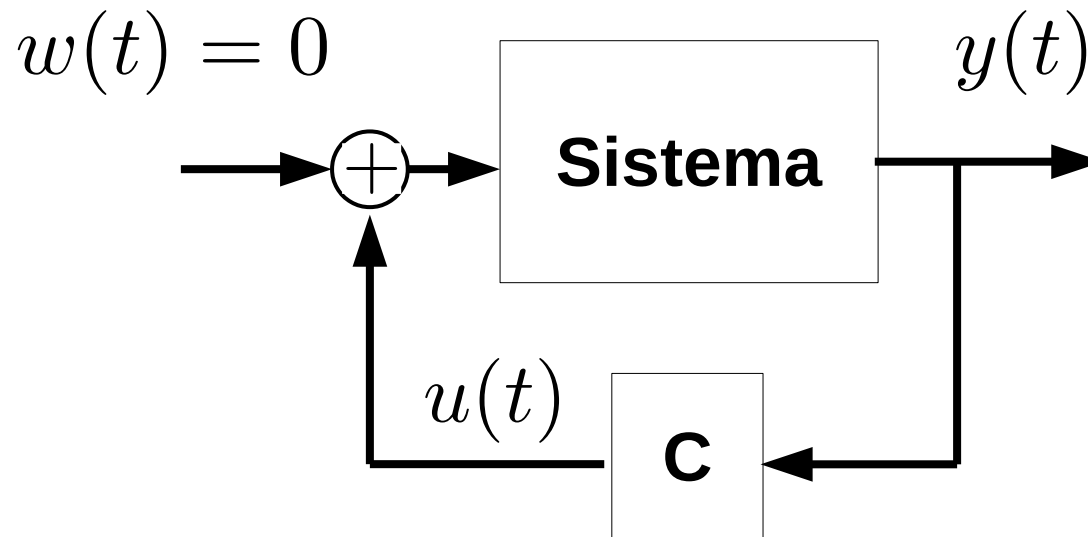
Tem a finalidade de Regular ou Compensar um sistema de forma a gerar um sinal de saída desejado.



Malha Fechada

Modelo

Representação Matemática da relação Entrada-Saída do sistema.



Modelo

Um Sistema Dinâmico pode ser modelado através de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO).



$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

Parâmetros do modelo

Modelo Espaço de Estados

É uma forma de reescrever a EDO em um formato mais conveniente para análise.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$



$$\left[\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_2u \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_nu \end{array} \right]$$

Modelo Espaço de Estados

É uma forma de reescrever a EDO em um formato mais conveniente para análise.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

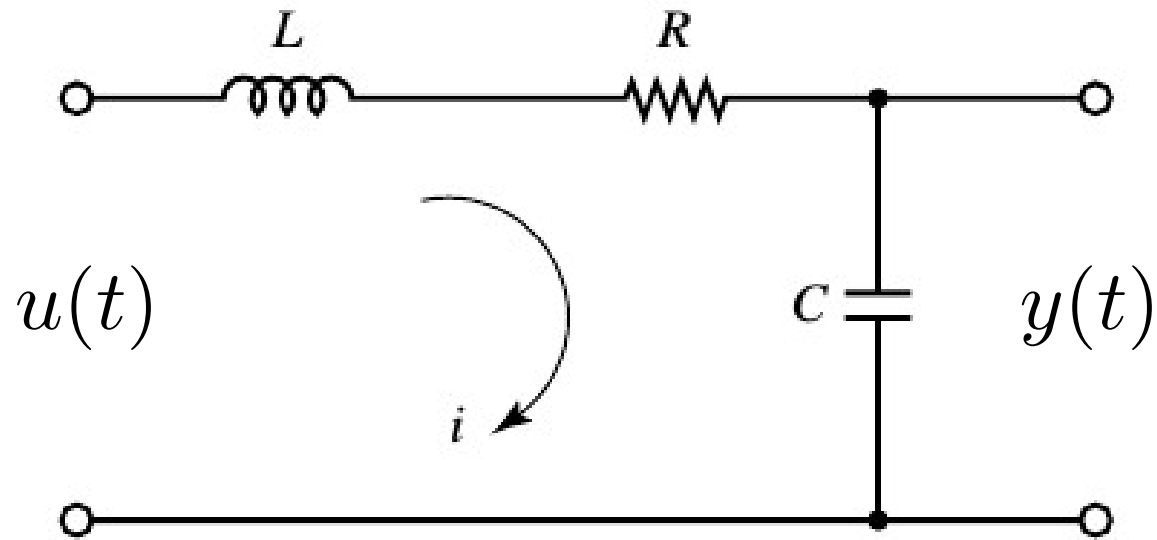


$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$



Parâmetros do modelo

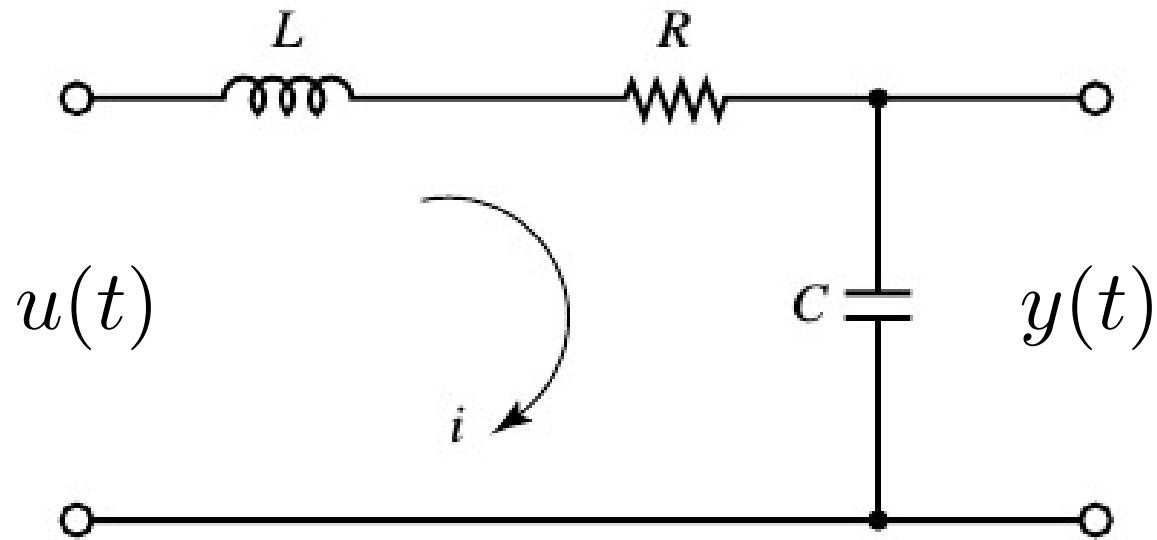
Circuito RLC



$$LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

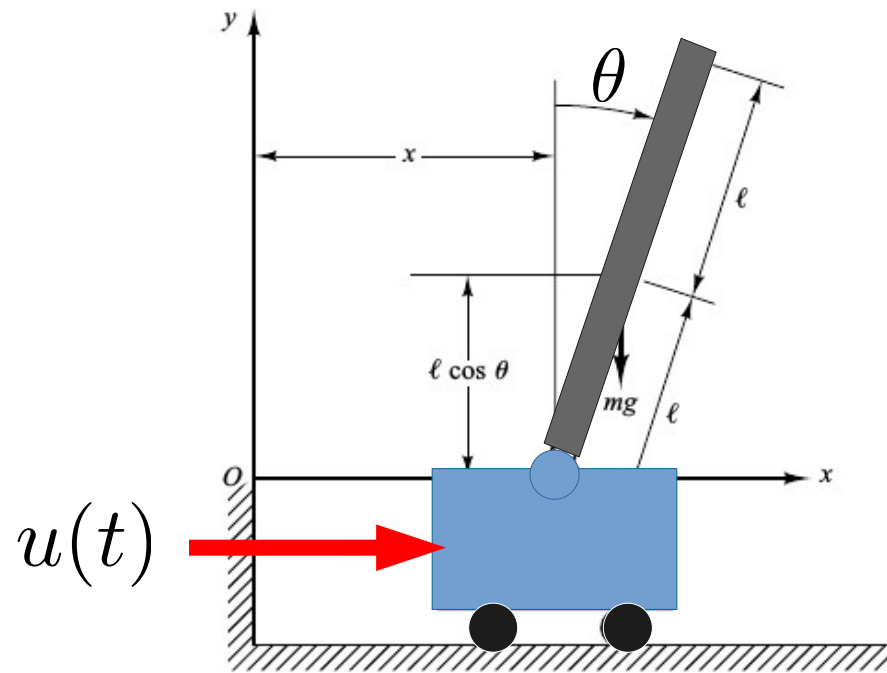
Parâmetros do modelo

Circuito RLC

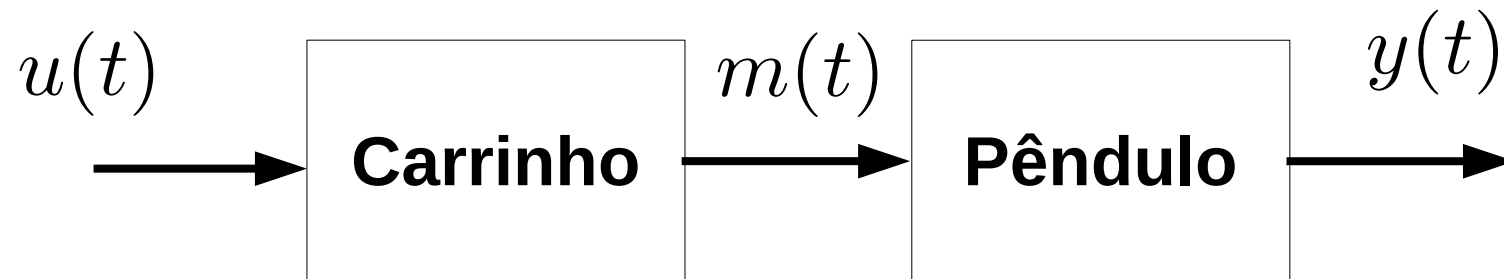


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

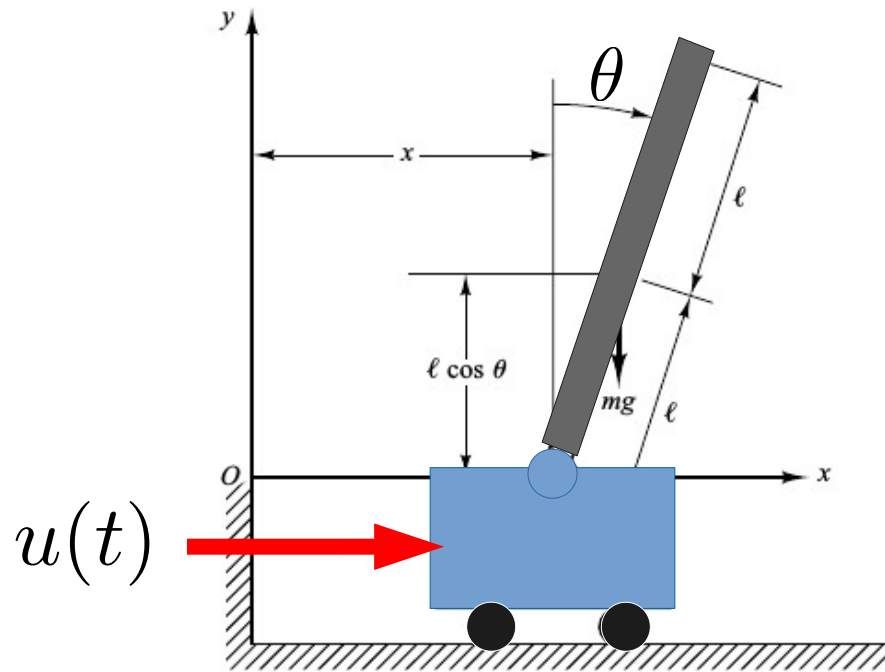
Pêndulo Invertido



$$y(t) = \theta$$



Pêndulo Invertido



$$y(t) = \theta$$

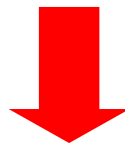
$$(I - ml^2) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + b_1 \frac{d\theta}{dt} - mgl\theta + ml \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$(M + m) \frac{d^2 x}{dt^2} + b_2 \frac{dx}{dt} + ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = u$$

Pêndulo Invertido

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{I+ml^2}{k} & -\frac{m^2 l^2 g}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{mlb}{k} & \frac{mgl(M+m)}{k} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{k} \\ 0 \\ \frac{ml}{k} \end{bmatrix} u$$

$$k = I(M + m) + Mml^2$$



$$\dot{x} = Ax + Bu$$

É possível conhecer perfeitamente os parâmetros do modelo?

Objetivo do Controle Robusto:

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u$$

Garantir estabilidade e desempenho para um sistema de controle diante de incertezas de modelagem.

Abordagens baseadas em modelo:

- Equações de Riccati;
- Desigualdades Lineares Matriciais (LMI's)

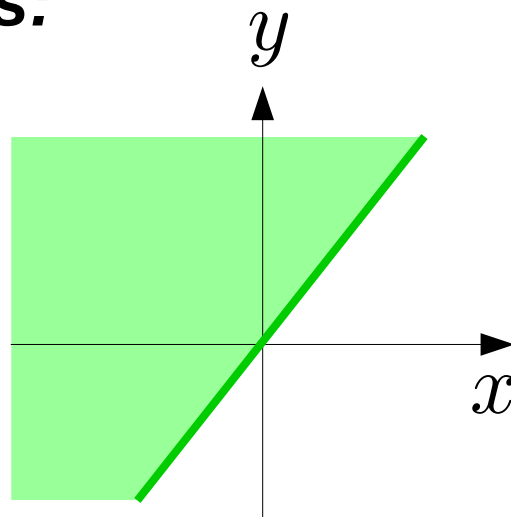
O que é uma LMI?

- Desigualdades Matriciais Lineares, do Inglês:

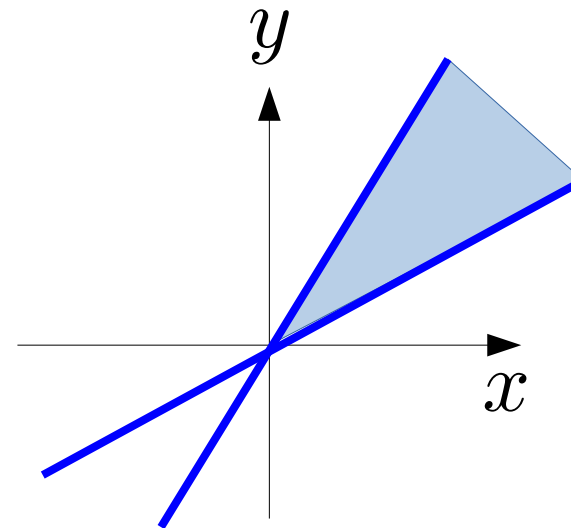
Linear Matrix Inequalities

- *Surge naturalmente no contexto de controle.*

- *Exemplos:*



$$y > ax$$



$$\begin{cases} y < ax \\ y > bx \end{cases}$$

O que é uma LMI?

- Desigualdades Matriciais Lineares, do Inglês:

Linear Matrix Inequalities

- *Surge naturalmente no contexto de controle.*
- *Exemplos:*

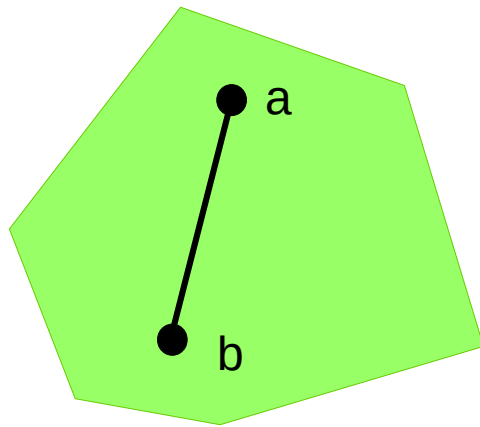
$$AX > 0$$

$$AX + XB > 0$$

$$AXB + CX > 0$$

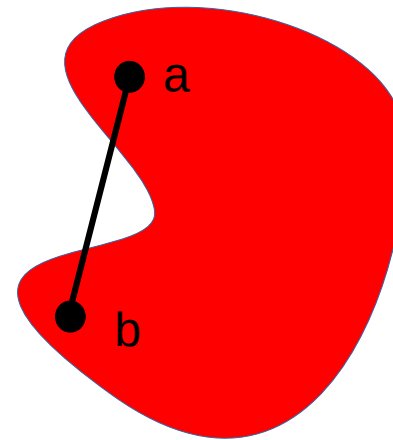
Convexo vs Não-Convexo

- LMI gera um conjunto convexo!



\mathcal{D}

Convexo



\mathcal{P}

Não-Convexo

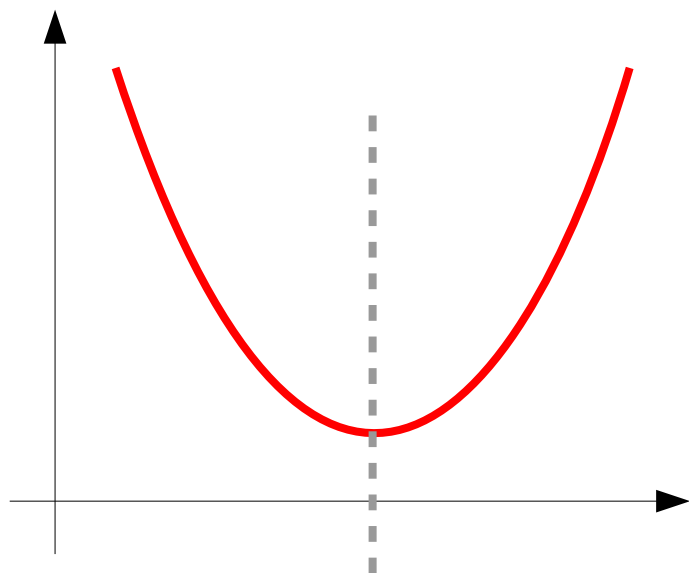
- Vantagens da convexidade:

Algoritmos numéricos eficientes!

Convexo vs Não-Convexo

$$\min_X f(X)$$

$$\text{s.j. } AX + XB > 0$$

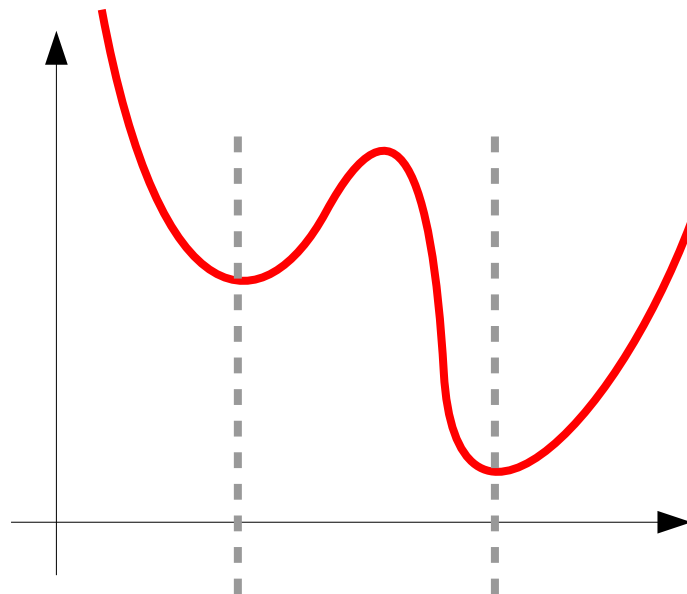


Convexo

Mínimo Global

$$\min_{X,Y} f(X, Y)$$

$$\text{s.j. } AXY + BYX > 0$$

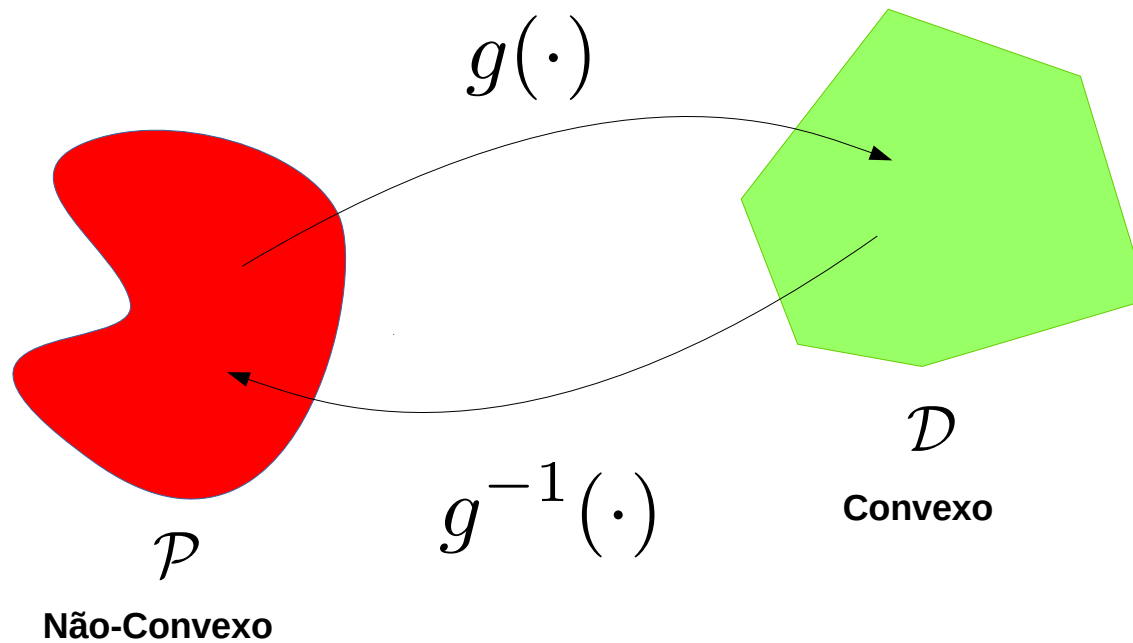


Não-Convexo

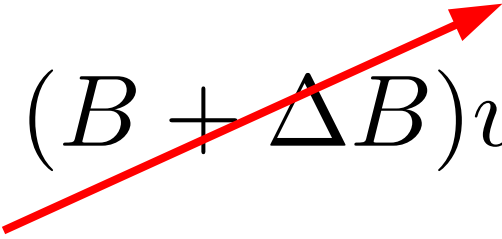
Mínimos Locais

O que é Controle Robusto via LMI?

É a busca por uma transformação de congruência de forma tornar um problema não-convexo em convexo!

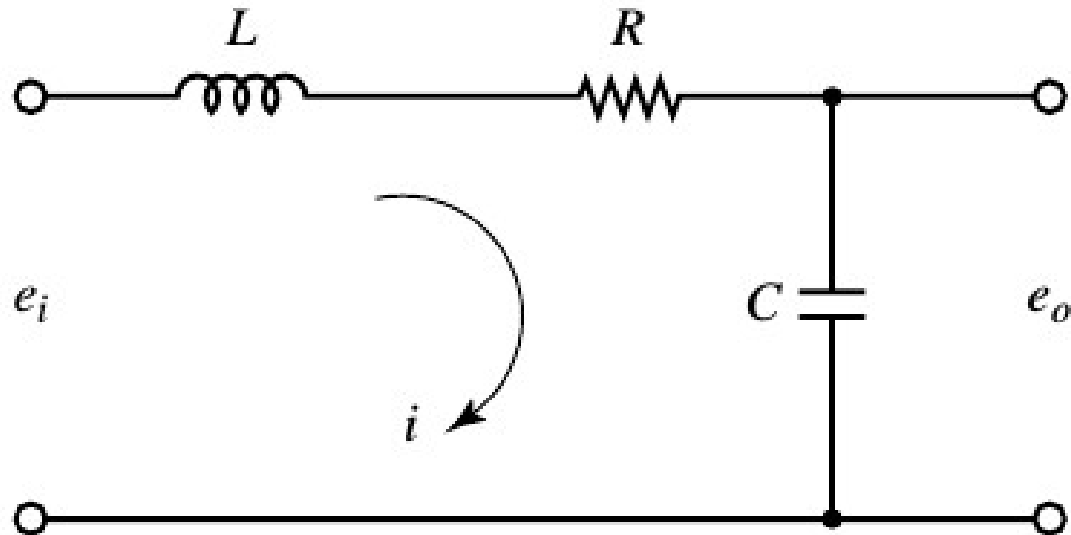


Modelagem da Incerteza

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u$$




$$\dot{x} = (A + \Delta A)x$$



RLC

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leq R \leq R_2$$


$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}$$

Modelagem da Incerteza

$$A_1 \leq A \leq A_2$$

$$A(\alpha) = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2, \quad \alpha \in [0, 1]$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow A(0) = A_2$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow A(1) = A_1$$

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow A_1 < A(\alpha) < A_2$$

Modelo Politópico de 2 vértices!

RLC

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leq R \leq R_2$$

$$C_1 \leq C \leq C_2$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC_1} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC_1} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC_2} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC_2} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}$$

Modelagem da Incerteza

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4$$

$$\alpha \in \mathbb{R}^4, \alpha_i \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$$

$$\text{E.x. } 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0.4 = 1$$

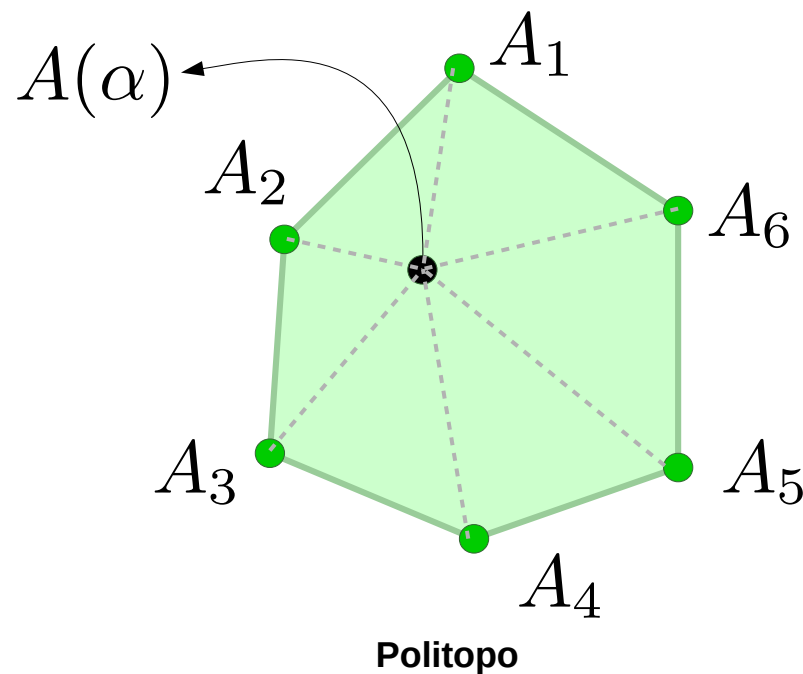
Modelo Politópico de 4 vértices!

**Modelo com
M parâmetros incertos**  **2^M vértices!**

Modelo Politópico

$$\dot{x} = A(\alpha)x$$

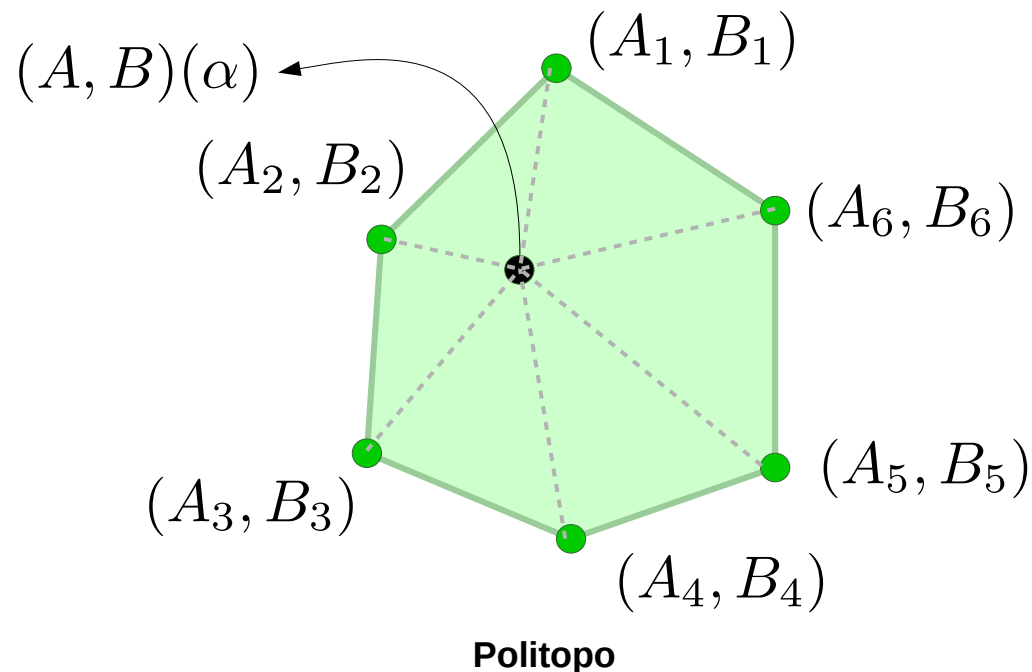
$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$$



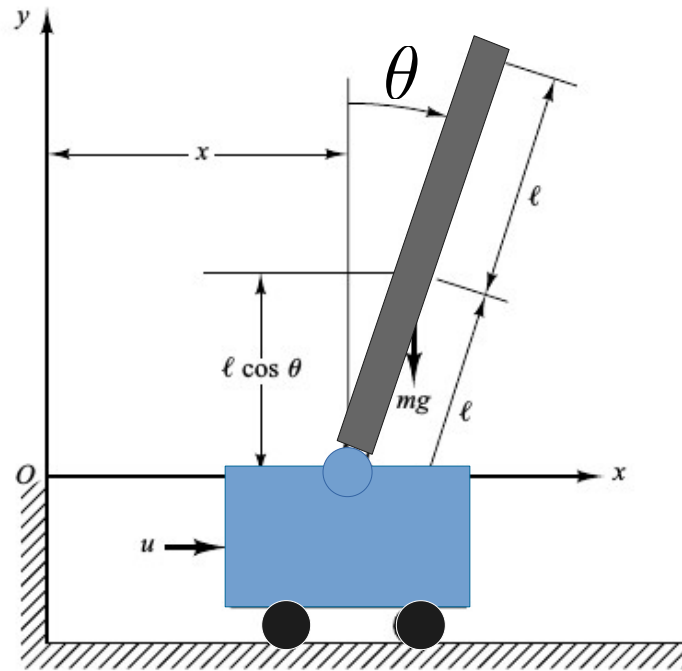
Modelo Politópico

$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u \quad (A, B)(\alpha) \in \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D} = \{(A, B)(\alpha) : \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i, B_i), \alpha \in \Lambda_N\}$$

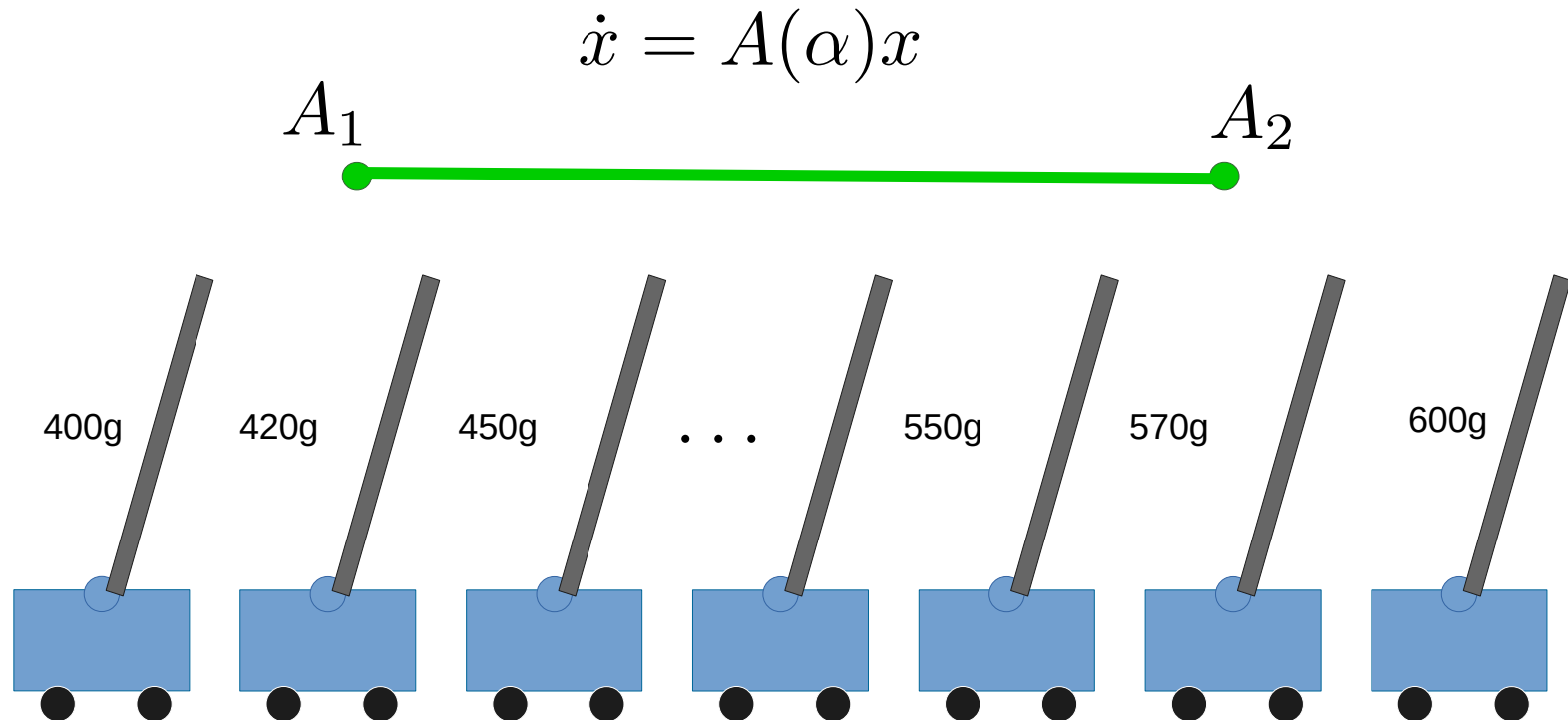


Exemplo: Pêndulo Invertido



$$400g \leq m \leq 600g$$

Exemplo: Pêndulo Invertido



**Esse modelo Politópico descreve uma família de infinitos pêndulos!
Com a massa da haste variando entre 400g e 600g**

**Um controlador robusto deve estabilizar e garantir desempenho
para todos os pêndulos dessa família!**

Veja o Experimento 1

(exp1_pendulo.m)

Link do GitHub p/ arquivos .m do mini-curso

<http://www.github.com/marofe/secael>

Como avaliar a estabilidade?

$$\dot{x} = Ax$$

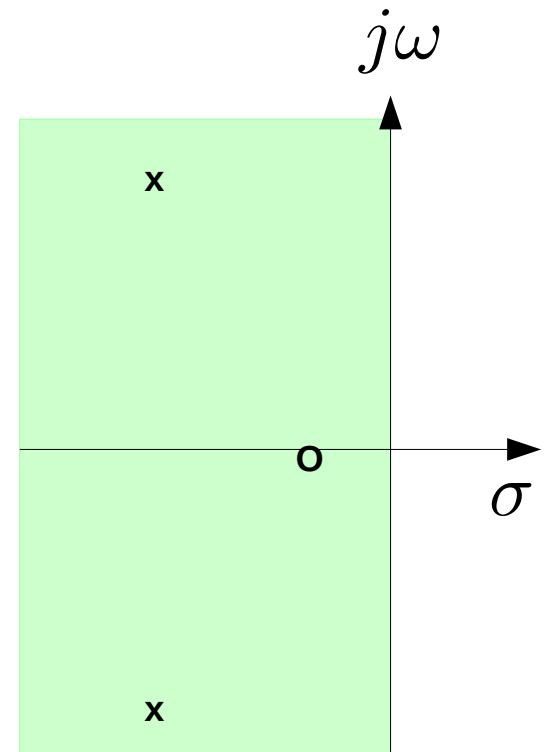
- Sistema assintoticamente estável:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

- Modelo em Espaço de Estados

$$\text{real}(\lambda_i(A)) < 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

No Matlab: `max(real(eig(A))) < 0`



Como avaliar a estabilidade?

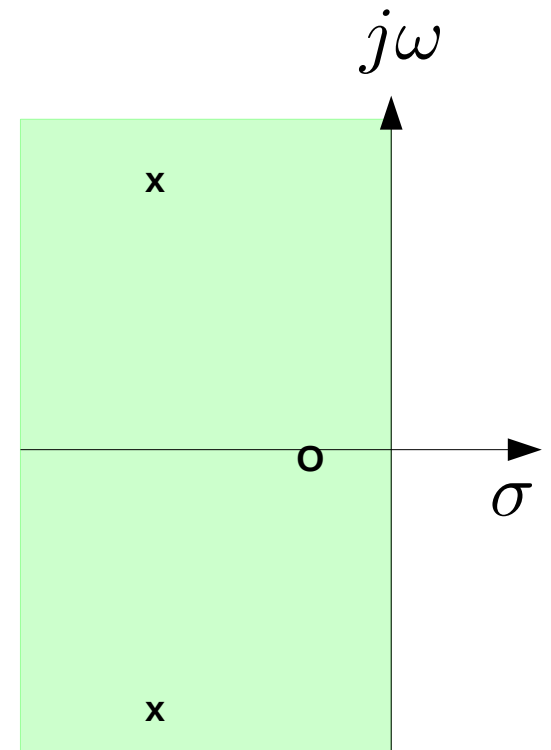
$$\dot{x} = A(\alpha)x$$

- Sistema assintoticamente estável:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

- Modelo em Espaço de Estados

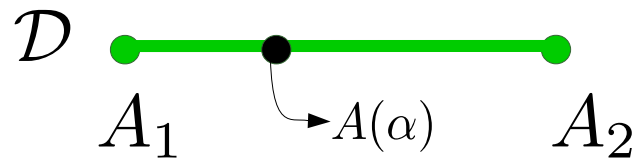
$$\text{real}(\lambda_i(A(\alpha))) < 0, \quad \forall i, \forall \alpha \in \Lambda_N$$



Como testar estabilidade de todo o politopo?

Força Bruta (Grid)

N=2



$$A(\alpha) = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

```
for a=0:0.01:1
    A=a*A1+(1-a)*A2;
    p=eig(A);
    if (max(real(p)) < 0)
        plot(real(p), imag(p), '*g')
    else
        plot(real(p), imag(p), '*r')
    end
    hold on
end
```

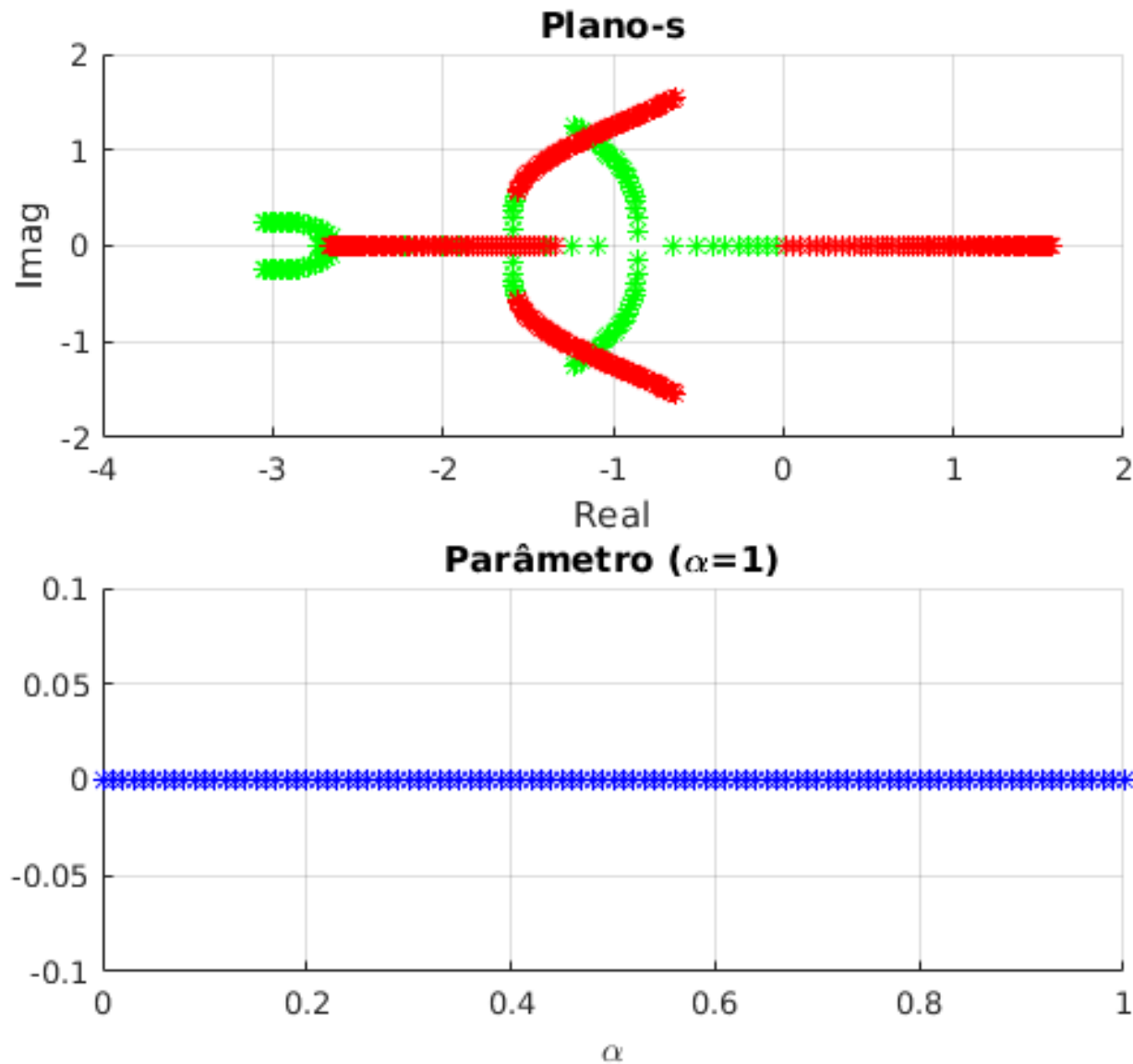
Veja o Experimento 2

(exp2_forcabruta.m)

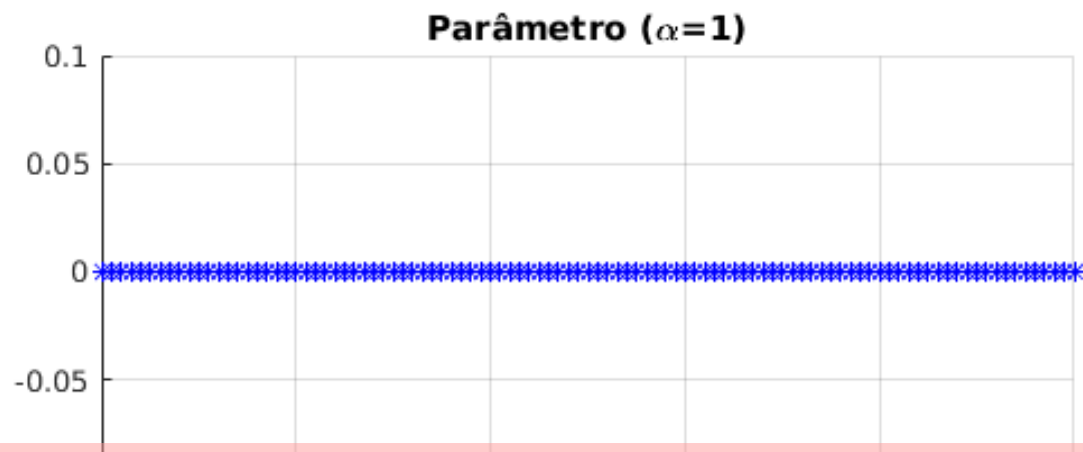
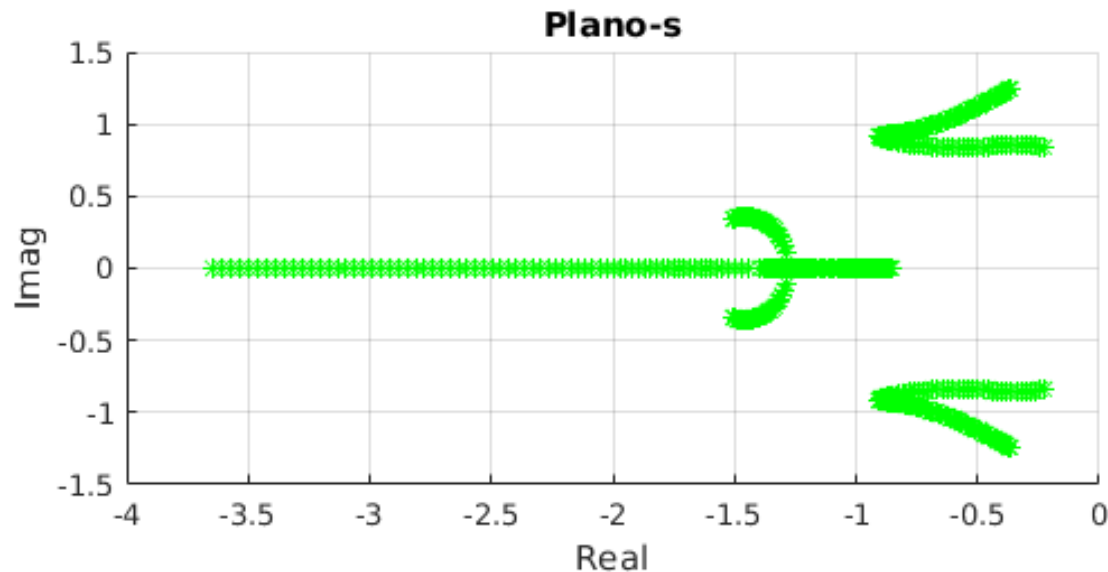
Link do GitHub p/ arquivos .m do mini-curso

<http://www.github.com/marofe/secael>

Experimento 2



Experimento 2



Problema: Força bruta não é suficiente para garantir estabilidade do politopo!

Parte I

Como analisar?

Estabilidade de Lyapunov

Lyapunov apresentou a sua tese de doutorado intitulada **“The general problem of the stability of motion”** em 1892 à Universidade de Moscou.

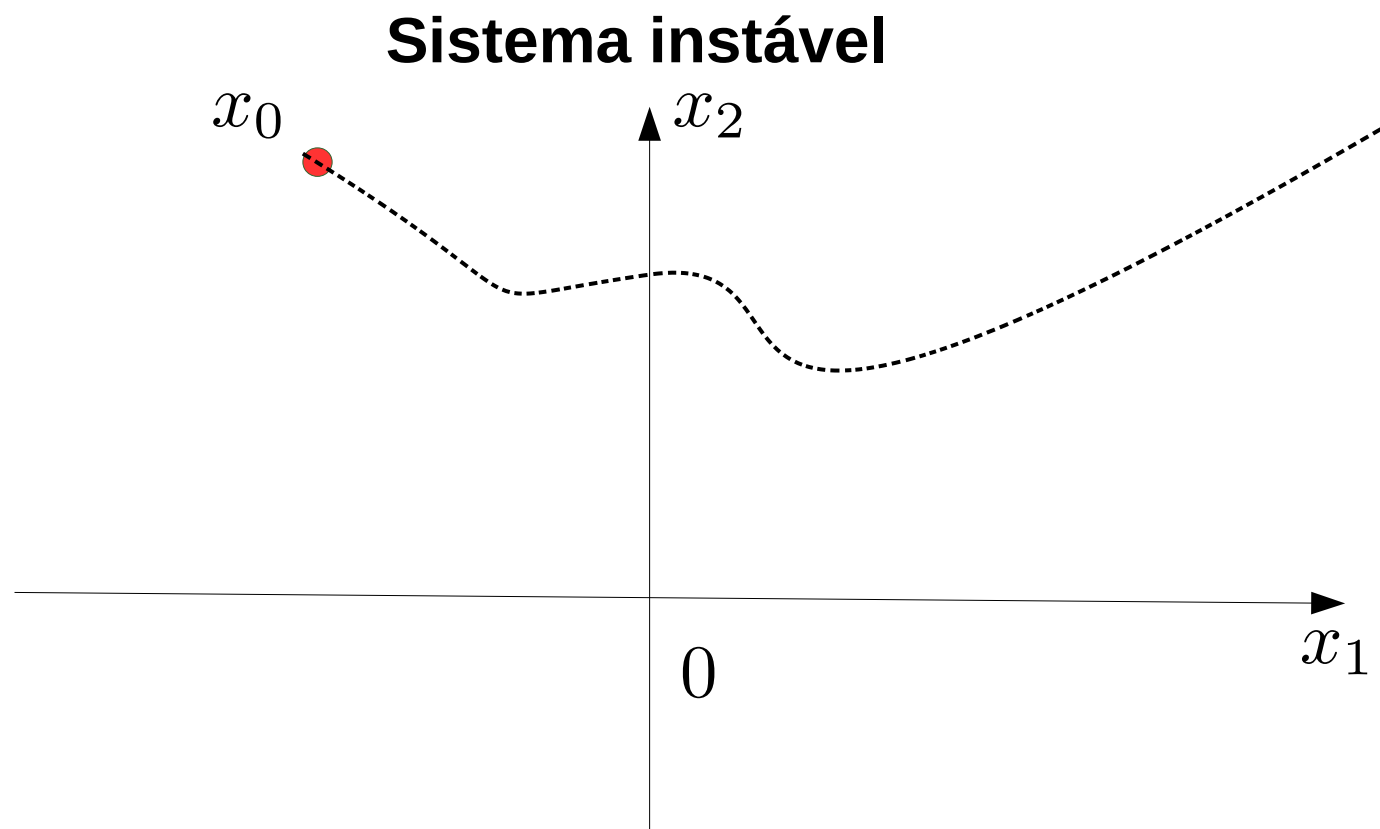


**Aleksandr Mikhailovich
Lyapunov (1857–1918)**

Biografia:

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lyapunov.html>

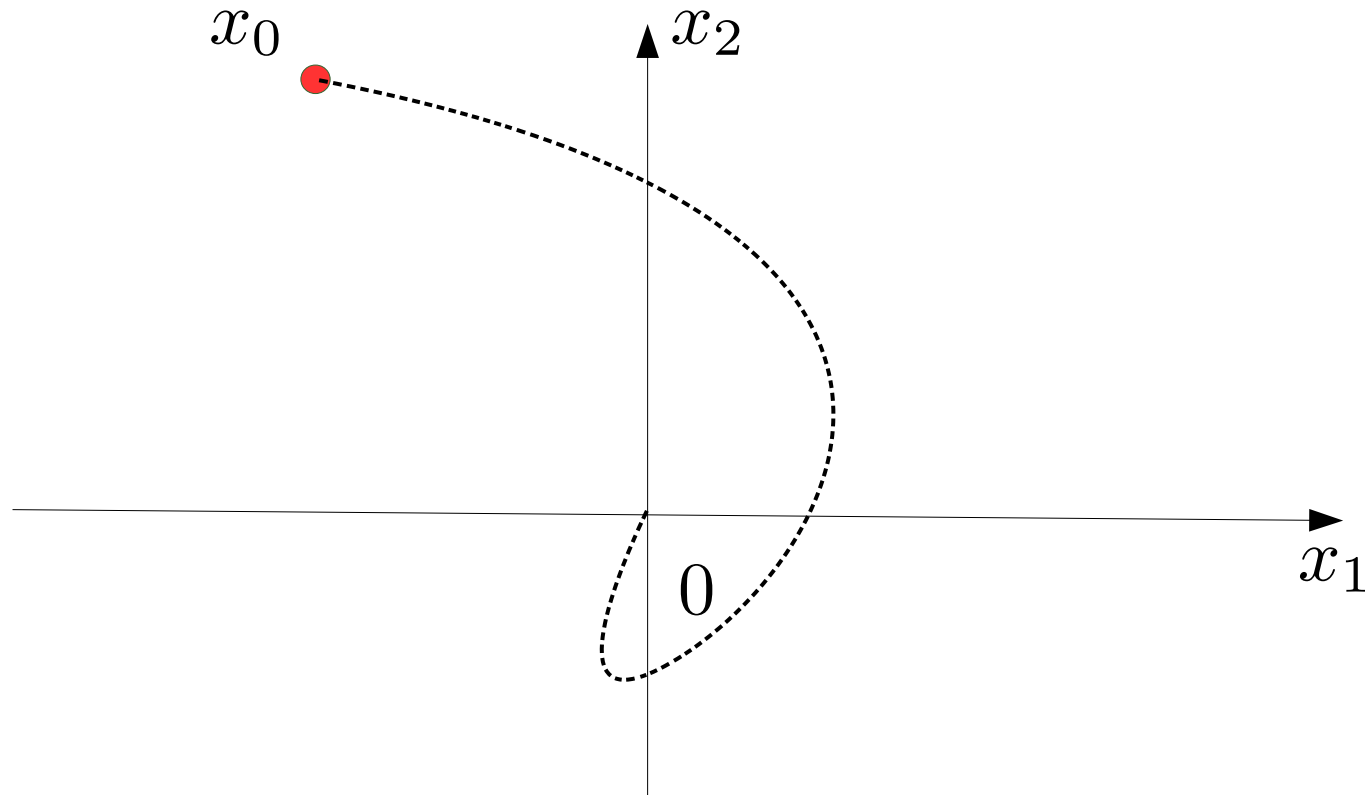
Estabilidade de Lyapunov



Sistemas instáveis divergem da origem

Estabilidade de Lyapunov

Sistema estável



Se um sistema é assintoticamente estável, então existe uma função $V(x) > 0$ tal que sua derivada é negativa para toda trajetória.

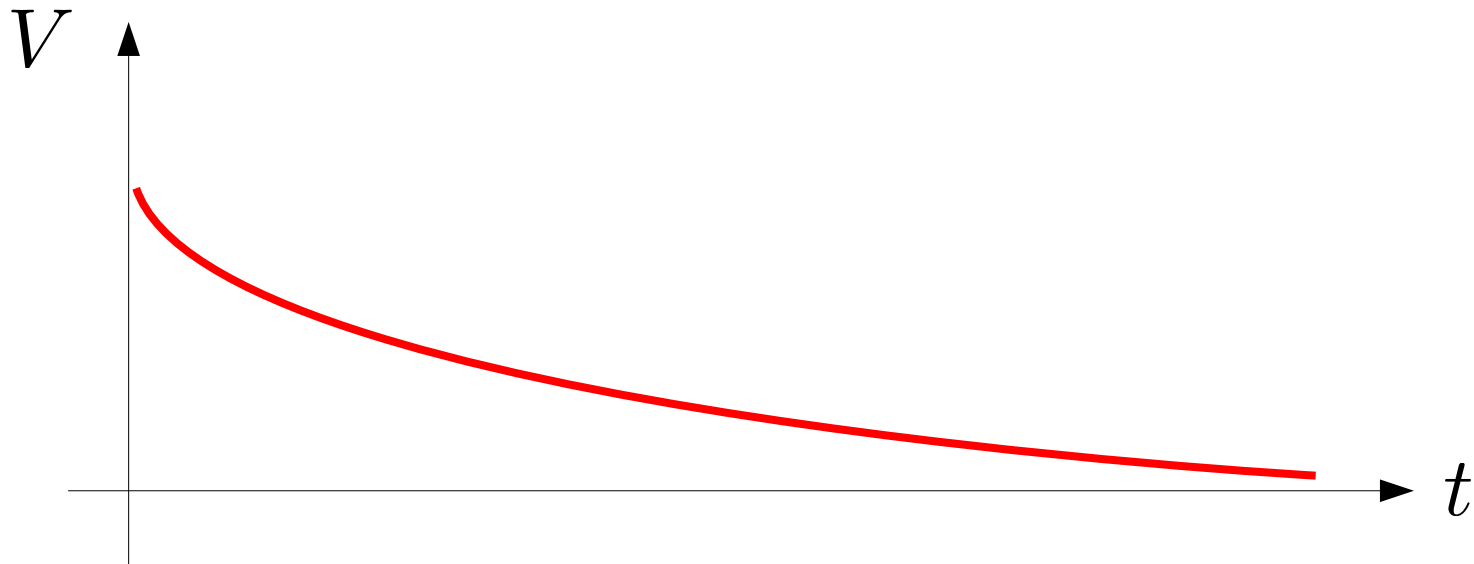
Ideia de Lyapunov

Um sistema dinâmico é estável se existe:

$$V(x) > 0 \quad V(0) = 0 \quad \text{(I)}$$

Tal que:

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{(II)}$$



Sistemas Lineares

$$\dot{x} = Ax$$

Função de energia (Função de Lyapunov Quadrática)

$$V(x) = x'Px \quad P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Primeira condição:

$$V(x) = x'Px > 0 \Leftrightarrow P > 0$$

Segunda condição:

$$\dot{V}(x) < 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(x'Px) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} < 0$$

Sistemas Lineares

$$\dot{x} = Ax$$

Segunda condição:

$$\dot{x}'Px + x'P\dot{x} < 0$$

$$\Rightarrow (Ax)'Px + x'P(Ax) < 0$$

$$(AB)' = B'A'$$

$$\Rightarrow x'A'Px + x'PAx < 0$$

$$\Rightarrow x'(A'P + PA)x < 0$$

Sistemas Lineares

$$\dot{x} = Ax$$

Sistema é estável se, e somente se existe uma matriz P tal que

$$\Rightarrow P > 0$$

$$\Rightarrow A'P + PA < 0$$

**A condição de estabilidade
é uma LMI!**

**A desigualdade de Lyapunov é a primeira LMI
formulada na história!**

Primeira LMI!

$$P > 0$$

$$A'P + PA < 0$$

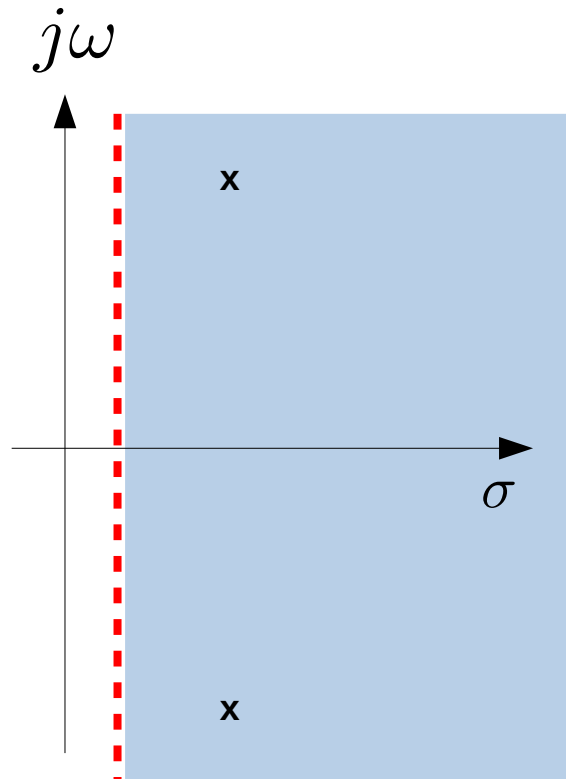
Instalar pacotes no Matlab:

- SeDuMi (Self Dual Minimization)
<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>
- Yalmip (Yet Another LMI Parser)
<https://yalmip.github.io/>

Instalação: No Matlab, na guia “**Home**”, clique em “**Set Path**”, depois em “**Add with subfolder**”, adicione as pastas do **SeDuMi** e do **Yalmip**, clique em “**Save**” depois “**Close**”. Pronto!

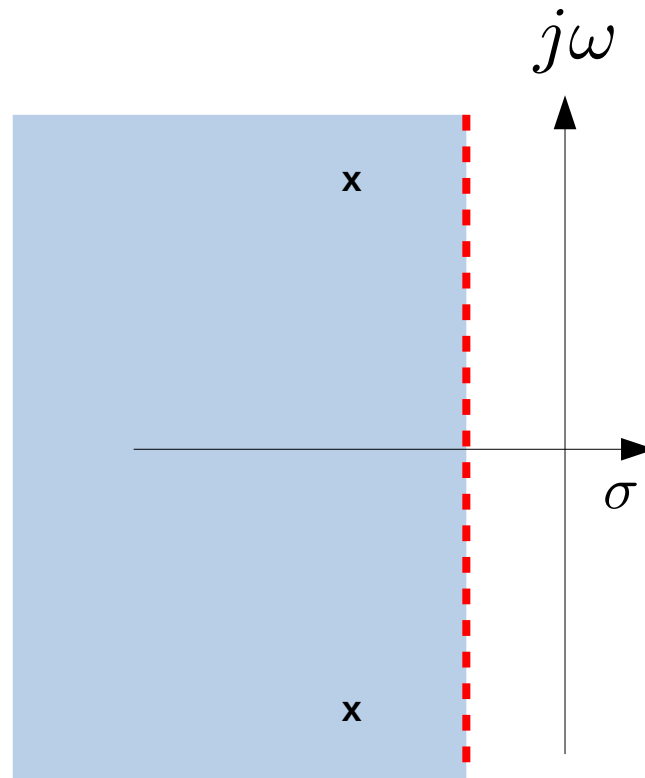
Algumas Propriedades de Matrizes

$$P > 0 \Leftrightarrow \min(\lambda(P)) > 0$$



Algumas Propriedades de Matrizes

$$A < 0 \Leftrightarrow \max(\lambda(A)) < 0$$



Hello World LMI

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A'P + PA &< 0 \end{aligned}$$

Programando a Desigualdade de Lyapunov:

```
close all
clear all
clc

A=randn(3);
P=sdpvar(3,3,'symmetric');
lmis=[P>=0 (A'*P+P*A<=0)];
sol=solvesdp(lmis,[])
r=min(checkset(lmis));
if r>0
    disp('Sistema estável')
else
    disp('Sistema instável')
end
```

Estabilidade de Sistemas Politópicos

$$\dot{x} = A(\alpha)x$$

$$P(\alpha) > 0$$

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$$

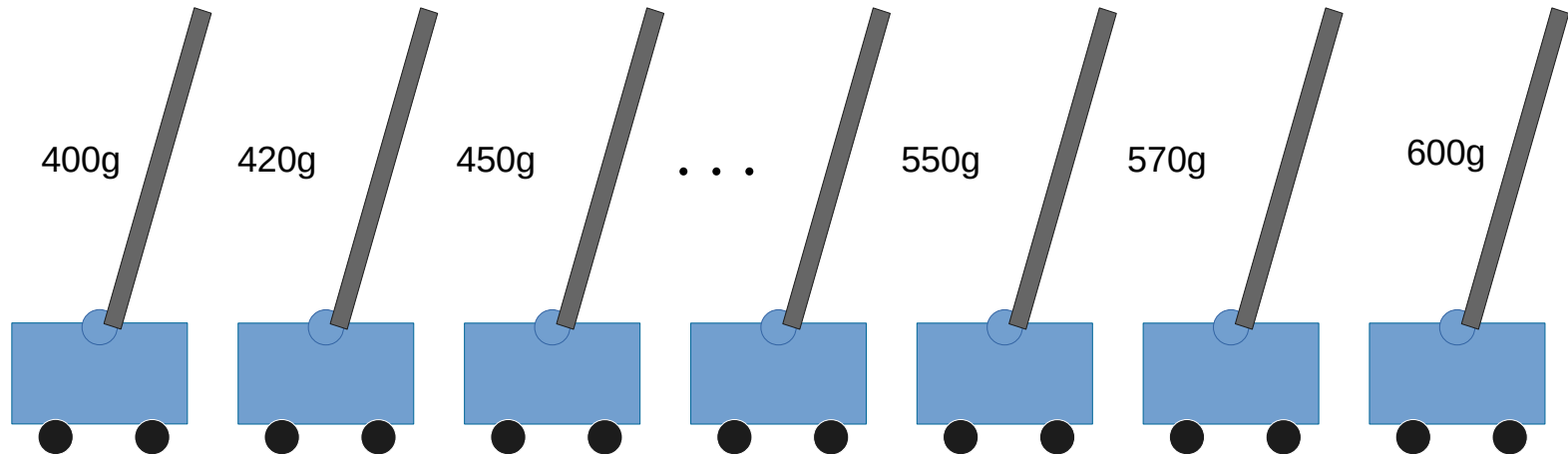
$$\forall \alpha \in \Lambda_N$$

LMI dependente de parâmetros

Exemplo: Pêndulo Invertido

$$\dot{x} = A(\alpha)x$$

$$A_1 \text{-----} A_2$$



Estabilidade de Sistemas Politópicos

$$\begin{aligned} P(\alpha) &> 0 \\ A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) &< 0 \\ \forall \alpha &\in \Lambda_N \end{aligned}$$

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i$$

$$P(\alpha) = ?$$

Problema de dimensão infinita!

Estabilidade de Sistemas Politópicos

“Solução” : Imposição de uma estrutura para a matriz de Lyapunov

$$P(\alpha) = P$$

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A(\alpha)'P + PA(\alpha) &< 0 \\ \forall \alpha \in \Lambda_N \end{aligned}$$

Continua sendo LMI dependente de parâmetros!

Estabilidade de Sistemas Politópicos

N=2

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0$$

$$A(\alpha)'P + PA(\alpha) < 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)'P + P(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 (A_1'P + PA_1) + \alpha_2 (A_2'P + PA_2) < 0$$

$$\underbrace{\alpha_1}_{+} \underbrace{(A_1'P + PA_1)}_{-} + \underbrace{\alpha_2}_{+} \underbrace{(A_2'P + PA_2)}_{-} < 0 \quad \forall \alpha \in \Lambda_2$$

Condição suficiente:

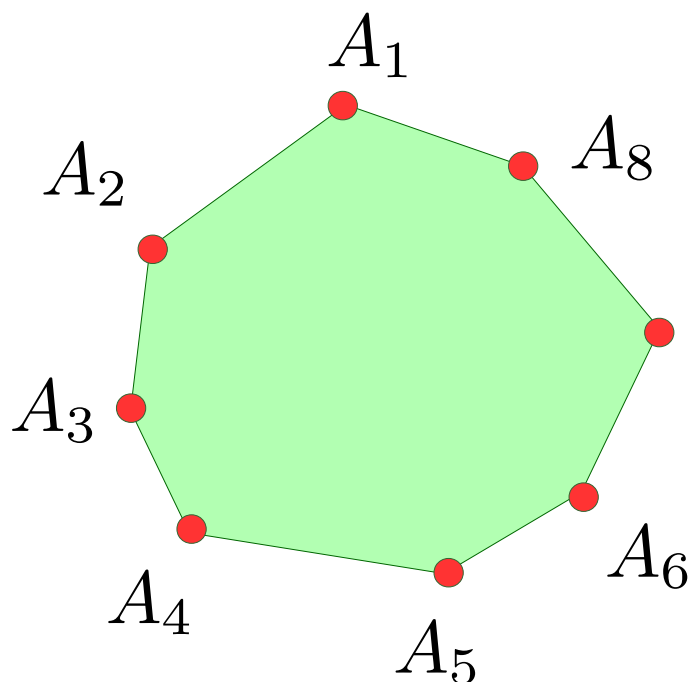
$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A_1'P + PA_1 &< 0 \\ A_2'P + PA_2 &< 0 \end{aligned}$$

➡ LMI!

Estabilidade Robusta

$$\dot{x} = A(\alpha)x, \quad A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \alpha \in \Lambda_N$$

É assintoticamente estável se existir $P=P'$ tal que:



$$\begin{aligned} P &> 0 \\ A'_1 P + P A_1 &< 0 \\ A'_2 P + P A_2 &< 0 \\ A'_3 P + P A_3 &< 0 \\ &\vdots \\ A'_N P + P A_N &< 0 \end{aligned}$$

Estabilidade Quadrática

Pode não existir solução!

Programando Estabilidade Quadrática

$$P > 0$$
$$A_i' P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

```
N=3;n=2;  
A={randn(n),randn(n),randn(n)};  
P=sdpvar(n,n,'symmetric');  
lmis=[P>=0];  
for i=1:N  
    lmis=[lmis (A{i}'*P+P*A{i}<=0)];  
end  
sol=solvesdp(lmis, [])  
r=min(checkset(lmis));  
if r>0  
    disp('Politopo estável')  
else  
    disp('LMI infactível')  
end
```


Veja o Experimento 3

(exp3_estabilidade.m)

Link do GitHub p/ arquivos .m do mini-curso

<http://www.github.com/marofe/secael>

Parte II

Como estabilizar?

Como Estabilizar um Politopo?

Realimentação de Estados

- Sistema precisamente conhecido:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = Kx$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = (A + BK)x$$

- Teoria de Lyapunov:

$$P > 0$$

$$(A + BK)'P + P(A + BK) < 0$$

$$A'P + PA + K'B'P + PBK < 0$$

Não é uma LMI!

Realimentação de Estados

- Aplica-se uma transformação de congruência:

$$P^{-1}(A'P + PA + K'B'P + PBK)P^{-1} < 0$$
$$\Leftrightarrow P^{-1}A' + AP^{-1} + P^{-1}K'B' + BK P^{-1} < 0$$

- Mudança de variáveis:

$$\boxed{W = P^{-1}} \quad \boxed{Z = KW} \Rightarrow K = ZW^{-1}$$
$$\Leftrightarrow WA' + AW + (WK')B' + B(KW) < 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{WA' + AW + Z'B' + BZ < 0}$$

É uma LMI!

Realimentação Robusta de Estados

Se existir $W=W'$ e Z tal que:

$$W > 0$$

$$W A'_1 + A_1 W + Z' B'_1 + B_1 Z < 0$$

$$W A'_2 + A_2 W + Z' B'_2 + B_2 Z < 0$$

$$\vdots$$

$$W A'_N + A_N W + Z' B'_N + B_N Z < 0$$

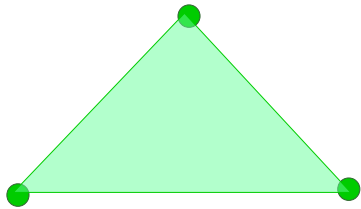
Então o ganho robusto dado por:

$$K = ZW^{-1}$$

Garante que todo o politopo é assintoticamente estável!

Exemplo de Realimentação Robusta

N=3



$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u, \quad u = Kx$$

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$$

$$B(\alpha) = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3$$

É estabilizável se existir $W=W'$ e Z tal que:

$$W > 0$$

$$W A'_1 + A_1 W + Z' B'_1 + B_1 Z < 0$$

$$W A'_2 + A_2 W + Z' B'_2 + B_2 Z < 0$$

$$W A'_3 + A_3 W + Z' B'_3 + B_3 Z < 0$$

$$K = ZW^{-1}$$

Realimentação Robusta de Estados

$$W > 0$$

$$W A_i' + A_i W + Z' B_i' + B_i Z < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

```
N=3;n=2;m=1;
A={randn(n),randn(n),randn(n)};
B={randn(n,m),randn(n,m),randn(n,m)};
W=sdpvar(n,n,'symmetric');
Z=sdpvar(m,n,'full');
lmis=[W>=0];
for i=1:N
    lmis=[lmis (W*A{i}' + A{i}*W + Z'*B{i}' + B{i}*Z <= 0)];
end
sol=solvesdp(lmis,[])
r=min(checkset(lmis));
if r>0
    disp('Politopo estabilizável')
    K=double(Z)*inv(double(W))
else
    disp('LMI infactível')
end
```

Veja o Experimento 4

(exp4_realimentacao.m)

Link do GitHub p/ arquivos .m do mini-curso

<http://www.github.com/marofe/secael>

Parte III

Como otimizar?

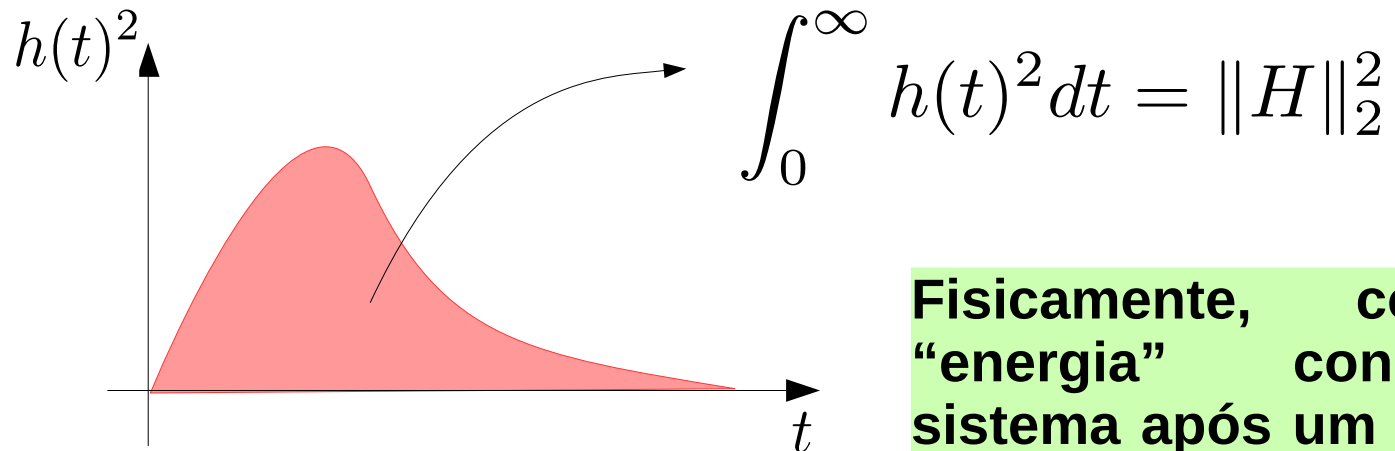
Vídeo Ilustrativo

(Pêndulo Duplo)

<https://www.youtube.com/watch?v=JpNAhKT7yY4&t=128s>

Norma H2

Norma H2=energia da resposta ao impulso do sistema

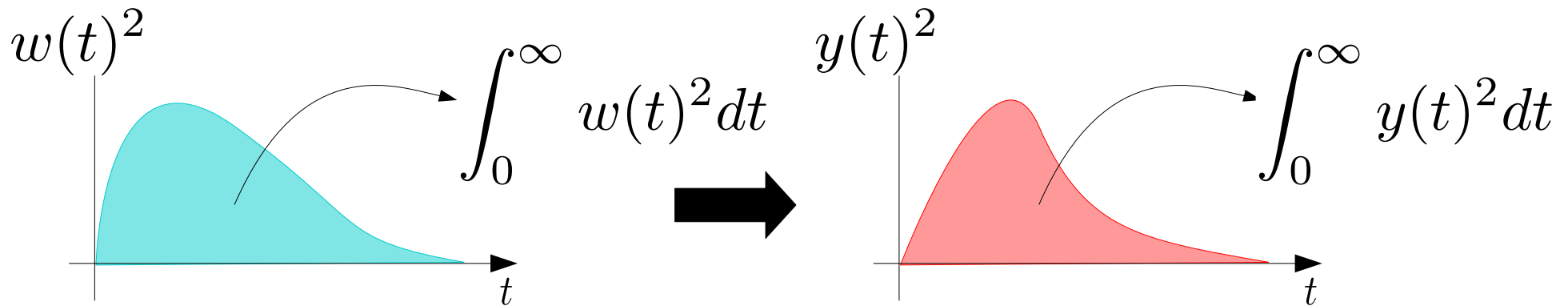
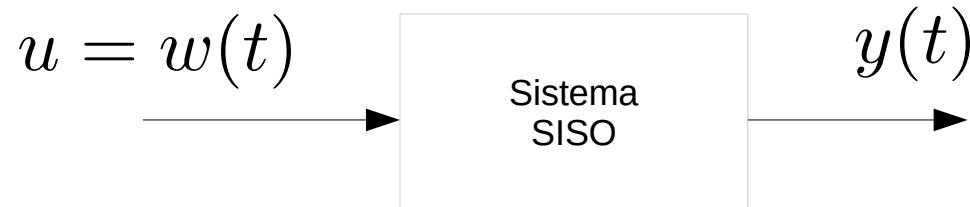


*No matlab pode-se usar o comando: `norm(sys,2)`

Fisicamente, corresponde a “energia” consumida pelo sistema após um distúrbio muito rápido até voltar ao equilíbrio!
Ex: um tapa num pêndulo invertido

Como garantir desempenho?

Norma H-infinito=relação entre energia da entrada com a da saída.

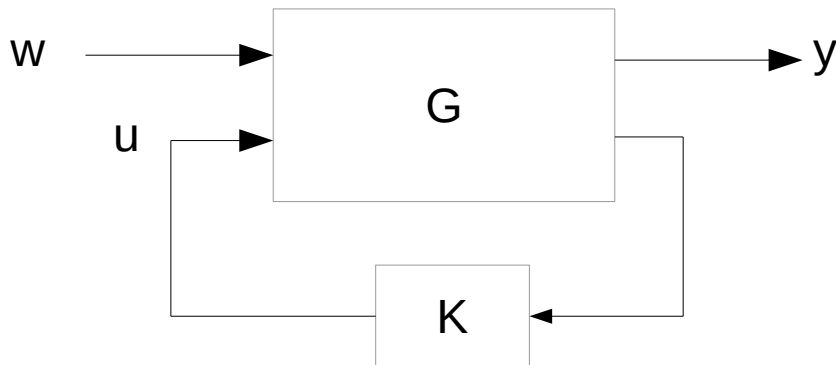


$$\|H\|_\infty^2 = \frac{\int_0^\infty y(t)^2 dt}{\int_0^\infty w(t)^2 dt}$$

Fisicamente, corresponde ao máximo que o sistema amplifica um distúrbio na entrada.

*No matlab pode-se usar o comando: `norm(sys,inf)`

Controle H2



$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u u + B_w w \\ y &= Cx + D_u u\end{aligned}$$

Busca-se uma lei de controle do tipo $u=Kx$ tal que estabilize o sistema e minimize a norma H2 em malha fechada

Malha fechada:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + B_u K)x + B_w w \\ y &= (C + D_u K)x\end{aligned}$$

Controle H2

- O controle H2, para um sistema precisamente conhecido, fica formulado como:

$$\begin{aligned} & \min_{W=W'>0, X=X', Z} \text{tr}(X) \\ \text{s.j.} \quad & \begin{bmatrix} X & CW + D_u Z \\ WC' + Z' D'_u & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} WA' + AW + Z' B'_u + B_u Z & B_w \\ B'_w & -I \end{bmatrix} \leq 0 \\ & K = ZW^{-1} \end{aligned}$$

Controle Ótimo H2

Garante estabilidade e a norma H2 é:

$$\|H\|_2 \leq \sqrt{\text{tr}(X)}$$

Controle Robusto H2

$$\begin{aligned} & \min_{W=W'>0, X=X'} \text{tr}(X) \\ \text{s.j.} \quad & \begin{bmatrix} X & C(\alpha)W + D_u(\alpha)Z \\ WC(\alpha)' + Z'D_u(\alpha) & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} WA(\alpha)' + A(\alpha)W + Z'B_u(\alpha)' + B_u(\alpha)Z & B_w(\alpha) \\ B_w(\alpha)' & -I \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

LMI dependente de parâmetros!

Controle Robusto H2

Se existir $W=W'$, $X=X'$ e Z tal que:

$$\begin{aligned} & \min_{W=W'>0, X=X', Z} \text{tr}(X) \\ \text{s.j.} \quad & \begin{bmatrix} X & C_i W + D_{iu} Z \\ W C'_i + Z' D_{iu} & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} W A'_i + A_i W + Z' B'_{iu} + B_{iu} Z & B_{iw} \\ B'_{iw} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Então o ganho robusto dado por:

$$K = ZW^{-1}$$

Garante estabilidade para todo o politopo e a norma H2 é:

$$\|H\|_2 \leq \sqrt{\text{tr}(X)} \quad (\text{Custo garantido})$$

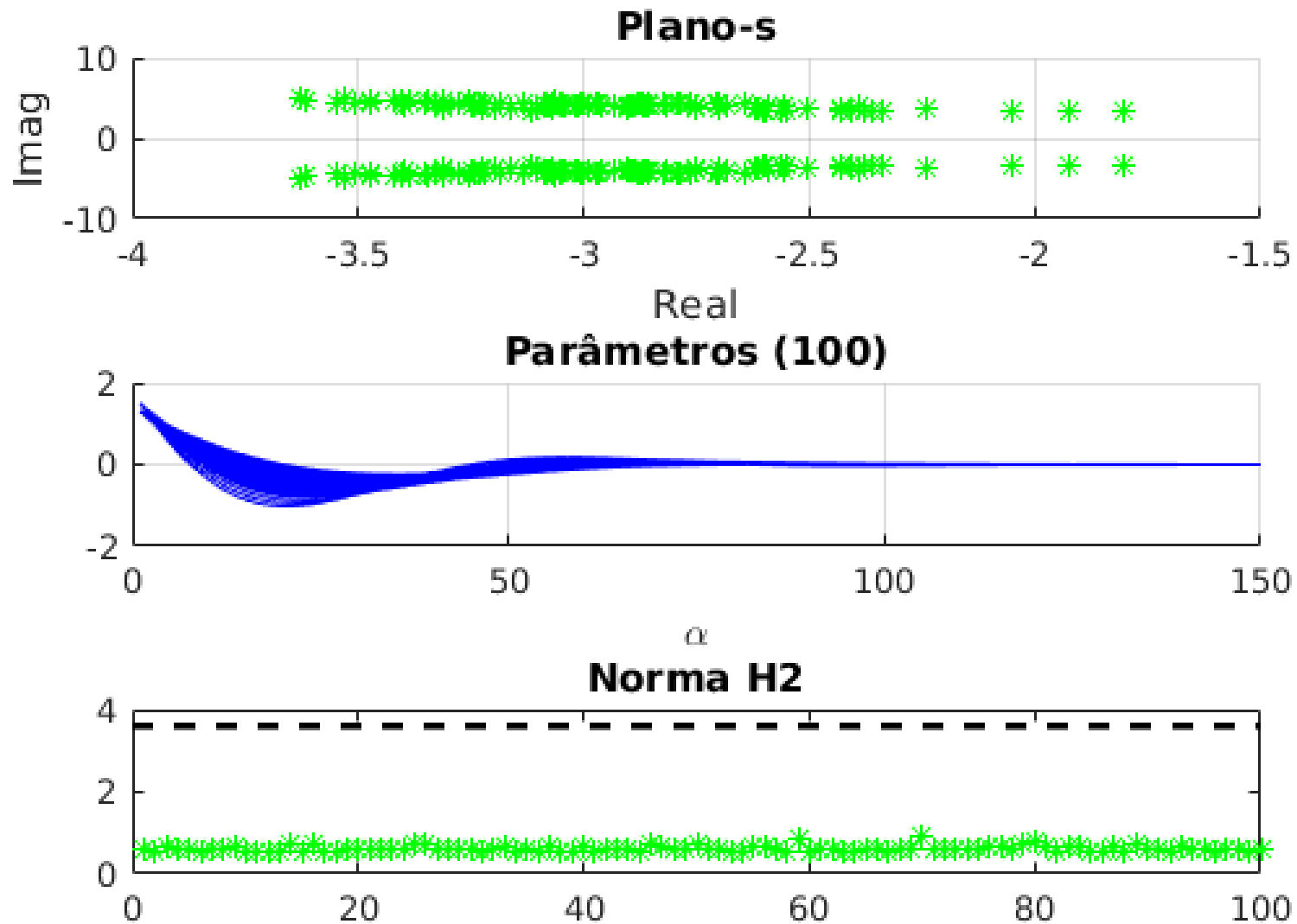
Veja o Experimento 5

(exp5_controleH2.m)

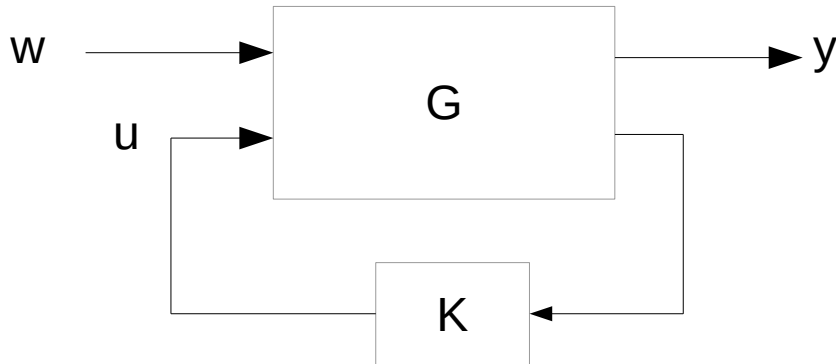
Link do GitHub p/ arquivos .m do mini-curso

<http://www.github.com/marofe/secael>

Exemplo Matlab



Controle H-infinito



$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u u + B_w w \\ y &= Cx + D_u u\end{aligned}$$

Busca-se uma lei de controle do tipo $u=Kx$ tal que estabilize o sistema e minimize a norma H_{∞} em malha fechada

Malha fechada:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + B_u K)x + B_w w \\ y &= (C + D_u K)x\end{aligned}$$

Controle H-infinito

- O controle Ótimo Hinf para sistemas precisamente conhecidos fica formulado como:

$$\begin{aligned} & \min_{Z, W=W'>0, X=X'} \mu \\ \text{s.j. } & \begin{bmatrix} WA' + AW + Z'B'_u + B_uZ & WC' + Z'D'_u & B_w \\ CW + D_uZ & -I & 0 \\ B'_w & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \\ & K = ZW^{-1} \quad \|H\|_{\infty} = \sqrt{\mu} \end{aligned}$$

O ganho K garante que a norma Hinf em malha fechada é mínima.

Controle Robusto H-infinito

$$\begin{aligned}
 & \min_{Z, W=W'>0, X=X'} \mu \\
 \text{s.j. } & \begin{bmatrix} W A'_i + A_i W + Z' B'_{iu} + B_{iu} Z & W C'_i + Z' D'_{iu} & B_{iw} \\ C_i W + D_{iu} Z & -I & 0 \\ B'_{iw} & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, N \\
 & K = ZW^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\|H\|_{\infty} \leq \sqrt{\mu} \quad (\text{Custo Garantido})$$

Referências

- Notas de aula disciplina “Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdade Matriciais Lineares”, Prof. Ricardo/Pedro Peres – UNICAMP
<http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/IA892/ia892.htm>
- Zhou, Kemin, and John Comstock Doyle. Essentials of robust control. Vol. 104. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall, 1998.
- Boyd, Stephen, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory. Society for industrial and applied mathematics, 1994.
<http://web.stanford.edu/~boyd/lmibook/>