UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

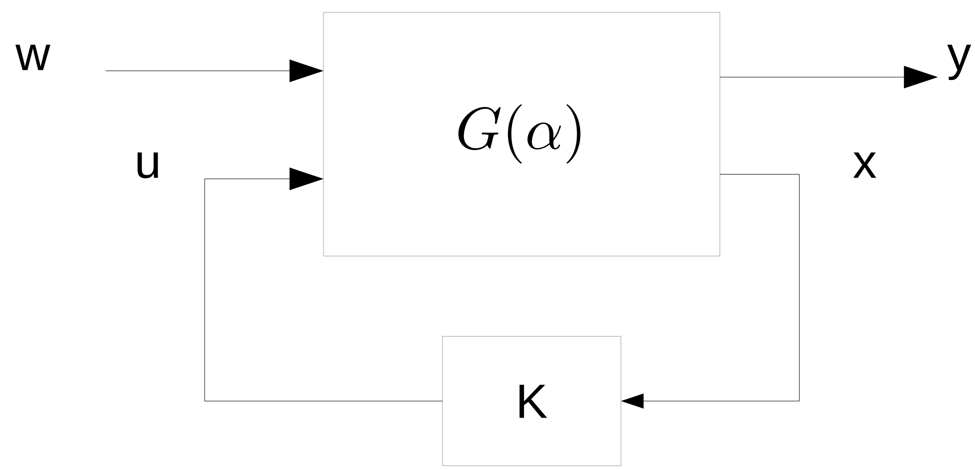
VI SECAEL
Semana Acadêmica de Engenharia de Controle e Automação e Elétrica

Mini Curso

Controle Robusto

via LMIs

Marcos Rogério Fernandes



Parte 0: Introdução aos sistemas incertos

Parte I: Como **analisar**?

Parte II: Como **estabilizar**?

Parte III: Como **otimizar**?

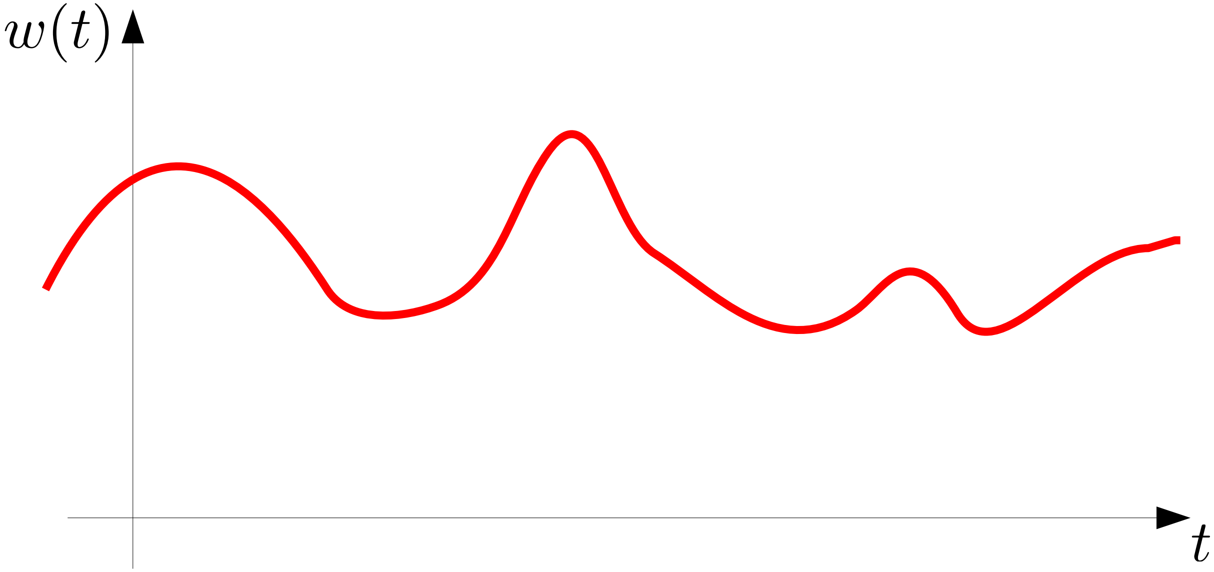
Exemplo de
Sistema de Controle

Video do Drone

https://www.youtube.com/watch?v=w2itwFJCgFQ&t=678s

Sinal

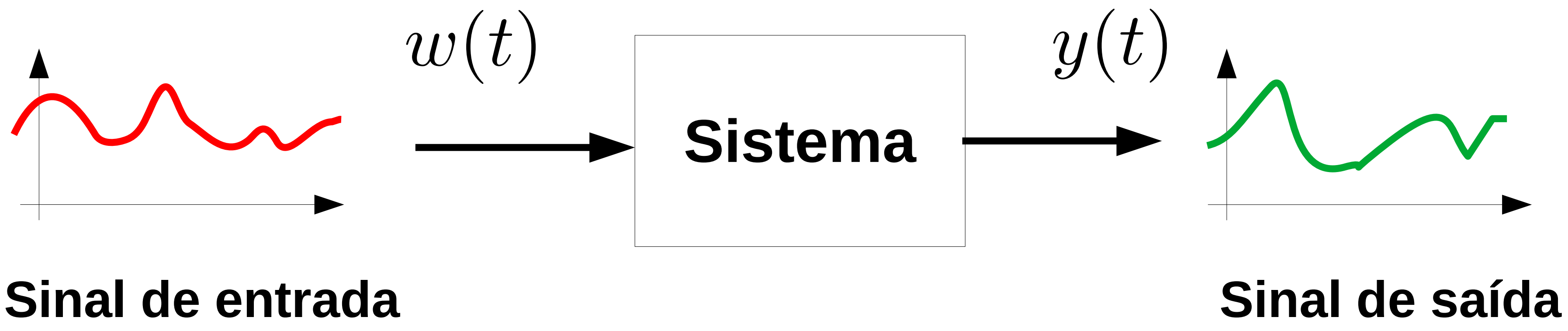
Indica a variação de alguma grandeza de interesse.



E.x.: Sinal de Força, Temperatura, Pressão, Tensão Elétrica, Corrente elétrica etc...

Sistema

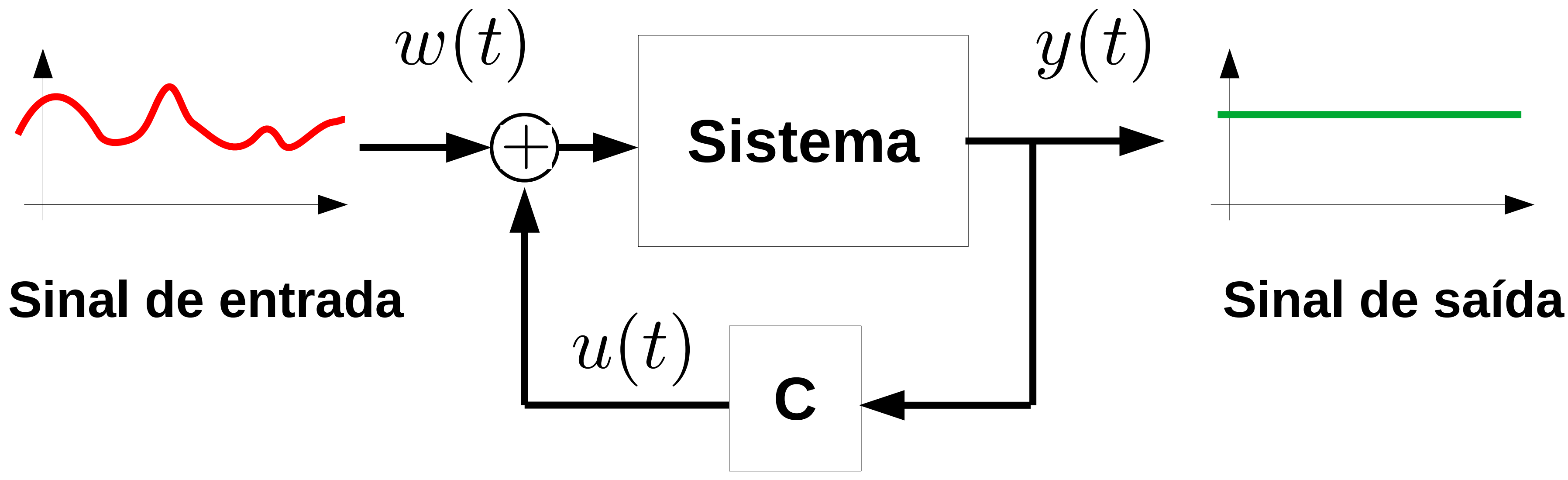
Coleção de elementos interconectados de foma a modificar um sinal.



Malha Aberta

Sistema de Controle

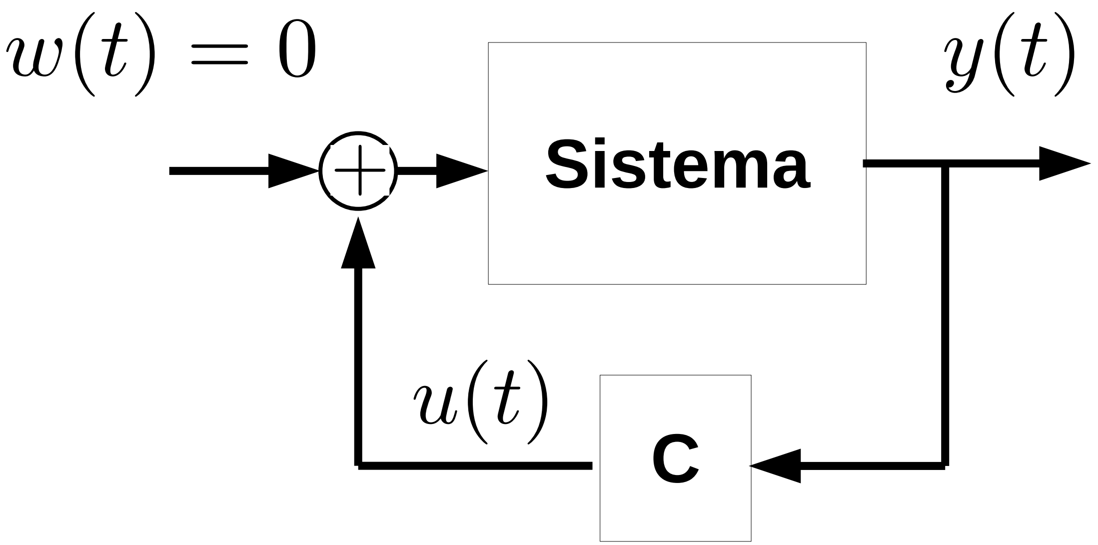
Tem a finalidade de <u>Regular</u> ou <u>Compensar</u> um sistema de forma a gerar um sinal de saída desejado.



Malha Fechada

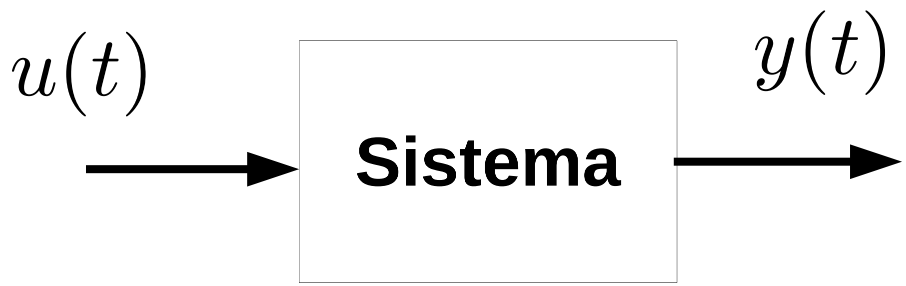
Modelo

Representação Matemática da relação Entrada-Saída do sistema.



Modelo

Um Sistema Dinâmico pode ser modelado através de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO).



$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

Parâmetros do modelo

Modelo Espaço de Estados

É uma forma de reescrever a EDO em um formato mais conveniente para análise.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 u \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 u \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n u \end{array}\right]$$

Modelo Espaço de Estados

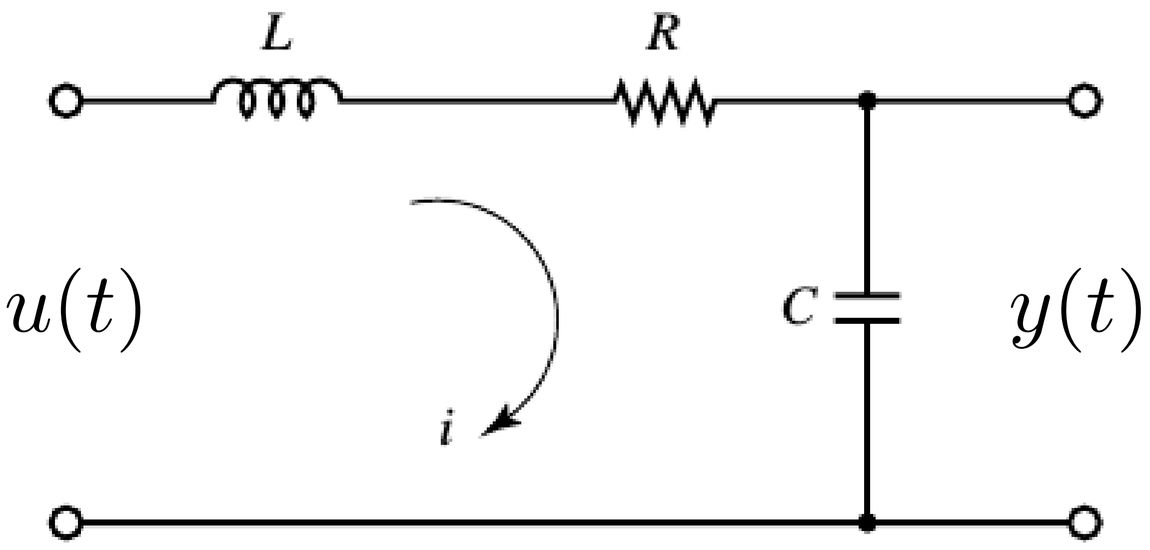
É uma forma de reescrever a EDO em um formato mais conveniente para análise.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Parâmetros do modelo

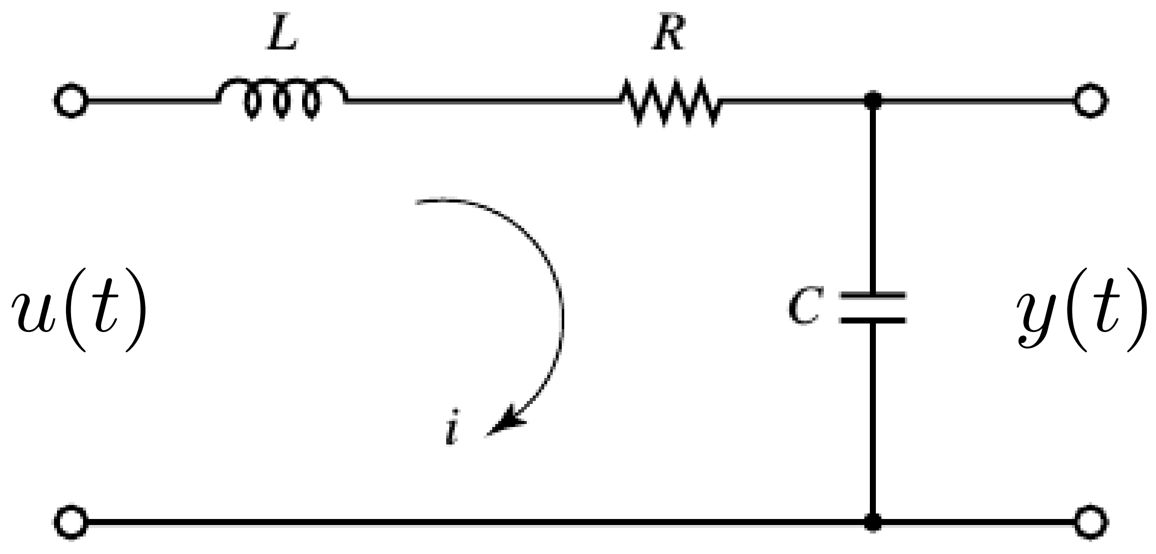
Circuito RLC



$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

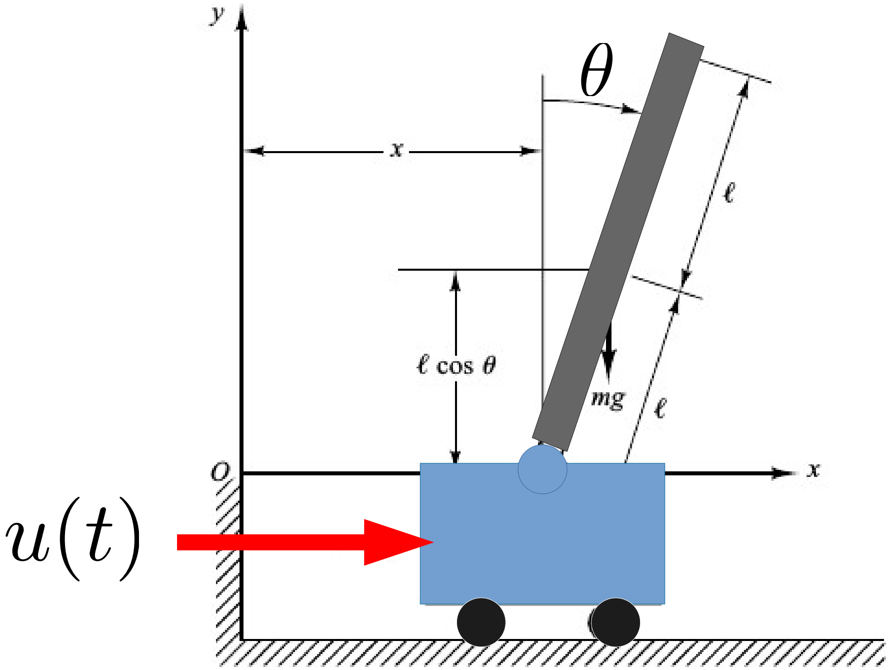
Parâmetros do modelo

Circuito RLC

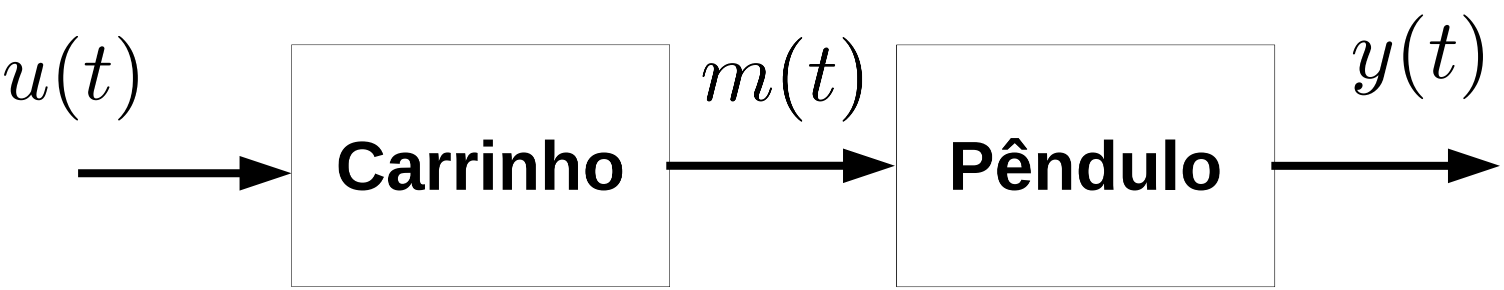


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

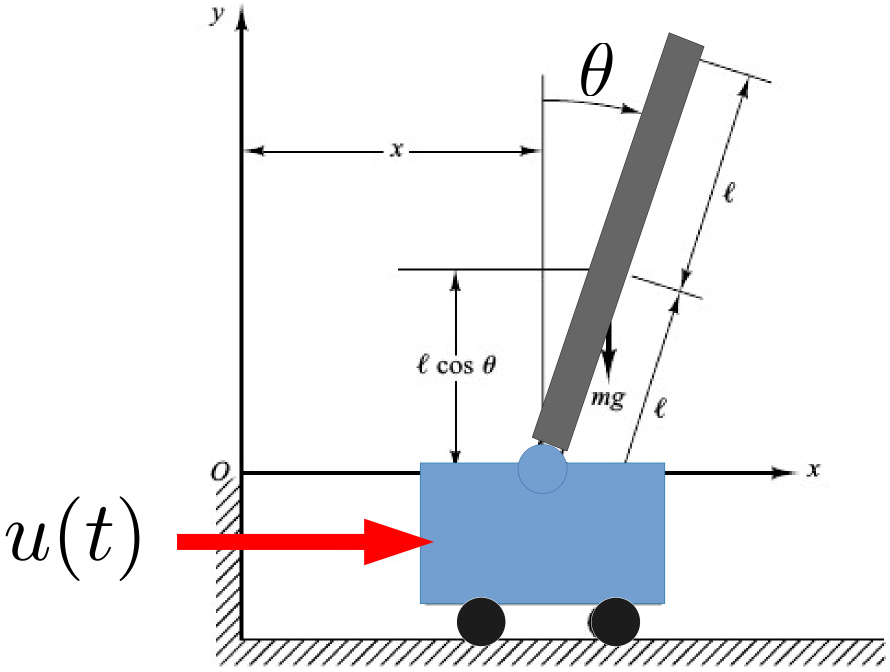
Pêndulo Invertido



$$y(t) = \theta$$



Pêndulo Invertido



$$y(t) = \theta$$

$$(I - ml^2)\frac{d^2\theta}{dt^2} + b_1\frac{d\theta}{dt} - mgl\theta + ml\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$(M + m)\frac{d^2x}{dt^2} + b_2\frac{dx}{dt} + ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = u$$

Pêndulo Invertido

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{I+ml^2}{k} & -\frac{m^2l^2g}{k} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{mlb}{k} & \frac{mgl(M+m)}{k} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{I+ml^2}{k}\\ 0\\ \frac{ml}{k}\end{bmatrix} u$$

$$k = I(M+m) + Mml^2$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

É possível conhecer <u>perfeitamente</u> os parâmetros do modelo?

Objetivo do Controle Robusto:

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u$$

Garantir <u>estabilidade</u> e <u>desempenho</u> para um sistema de controle diante de incertezas de modelagem.

Abordagens <u>baseadas em modelo</u>:

- **Equações de Riccati;**
- **Desigualdades Lineares Matriciais (LMI's)**

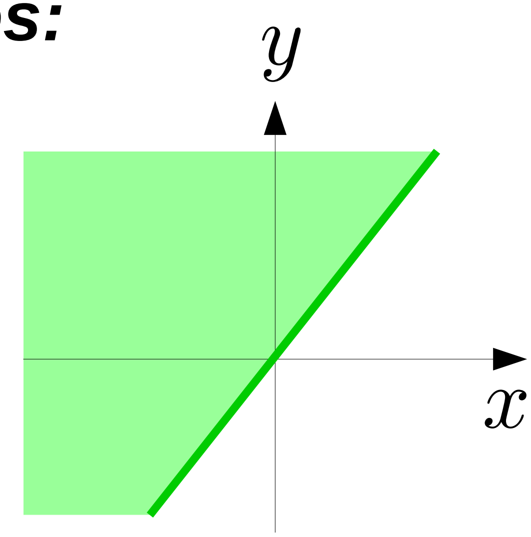
O que é uma LMI?

- **Desigualdades Matriciais Lineares, do Inglês:**

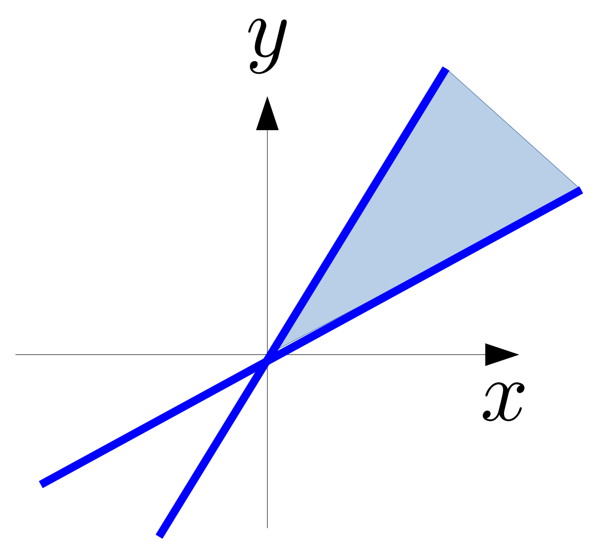
Linear **M**atrix **I**nequalities

- ***Surge naturalmente no contexto de controle.***

- ***Exemplos:***



$$y > ax$$



$$\begin{cases} y < ax \\ y > bx \end{cases}$$

O que é uma LMI?

- **Desigualdades Matriciais Lineares, do Inglês:**

Linear **M**atrix **I**nequalities

- ***Surge naturalmente no contexto de controle.***

- ***Exemplos:***

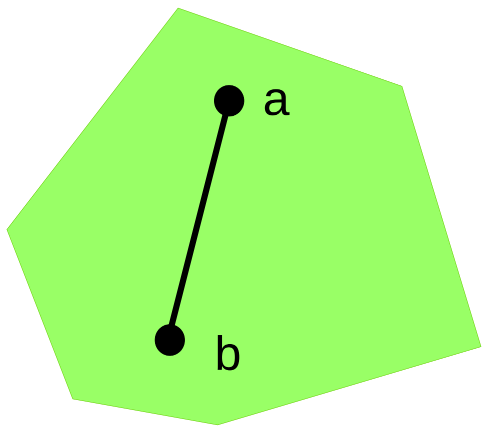
$$AX > 0$$

$$AX + XB > 0$$

$$AXB + CX > 0$$

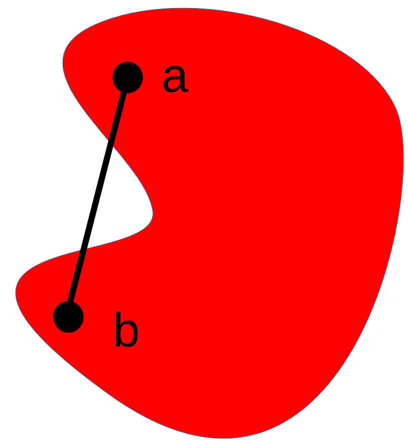
Convexo vs Não-Convexo

- LMI gera um <u>conjunto convexo</u>!



$\mathcal{D}$

Convexo



$\mathcal{P}$

Não-Convexo

- Vantagens da convexidade:

Algoritmos numéricos eficientes!

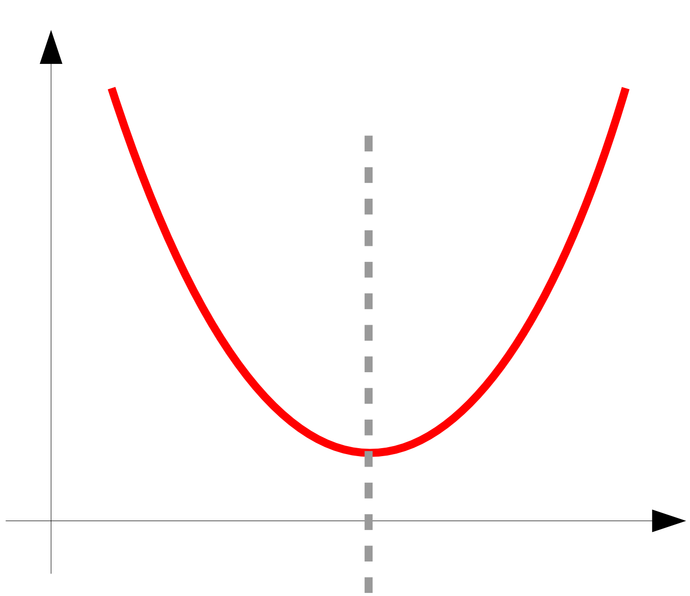
Convexo vs Não-Convexo

$$\min_{X} f(X)$$

$$\text{s.j. } \; AX + XB > 0$$

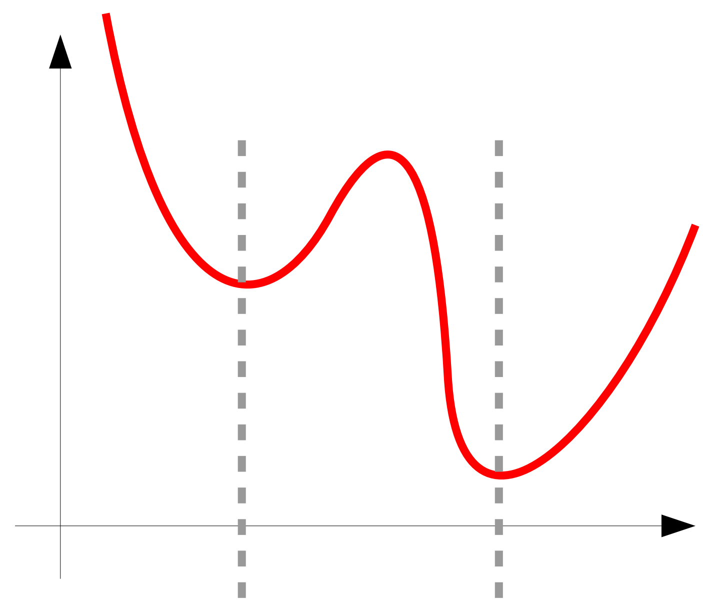
$$\min_{X,Y} f(X,Y)$$

$$\text{s.j. } \; AXY + BYX > 0$$



Convexo

Mínimo Global

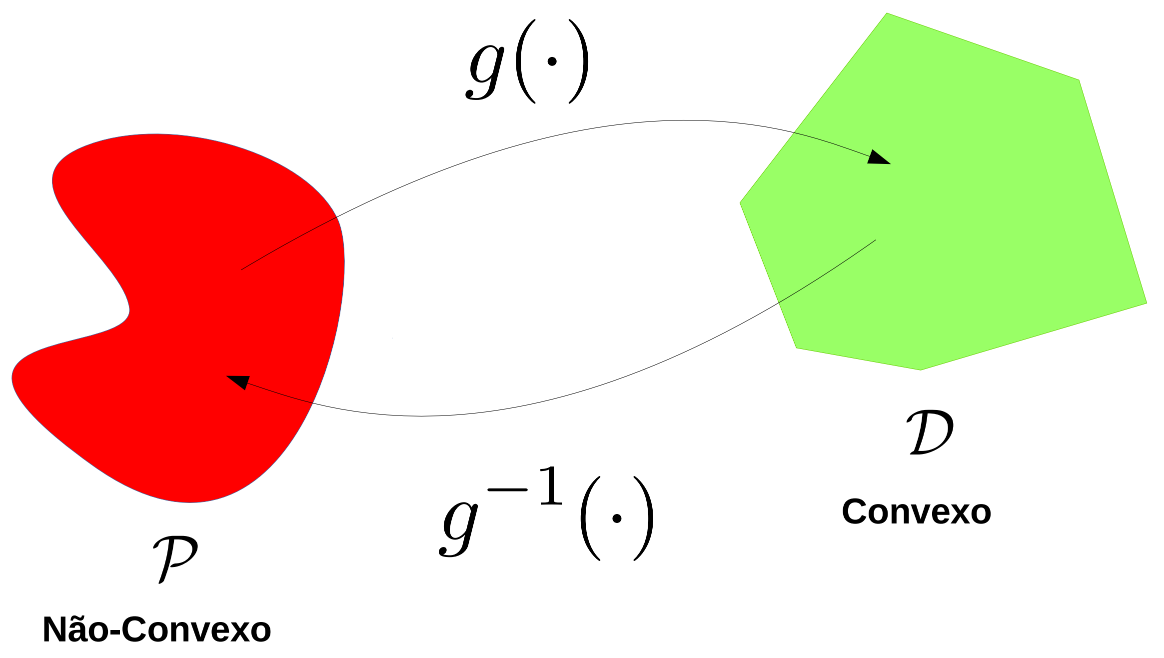


Não-Convexo

Mínimos Locais

O que é Controle Robusto via LMI?

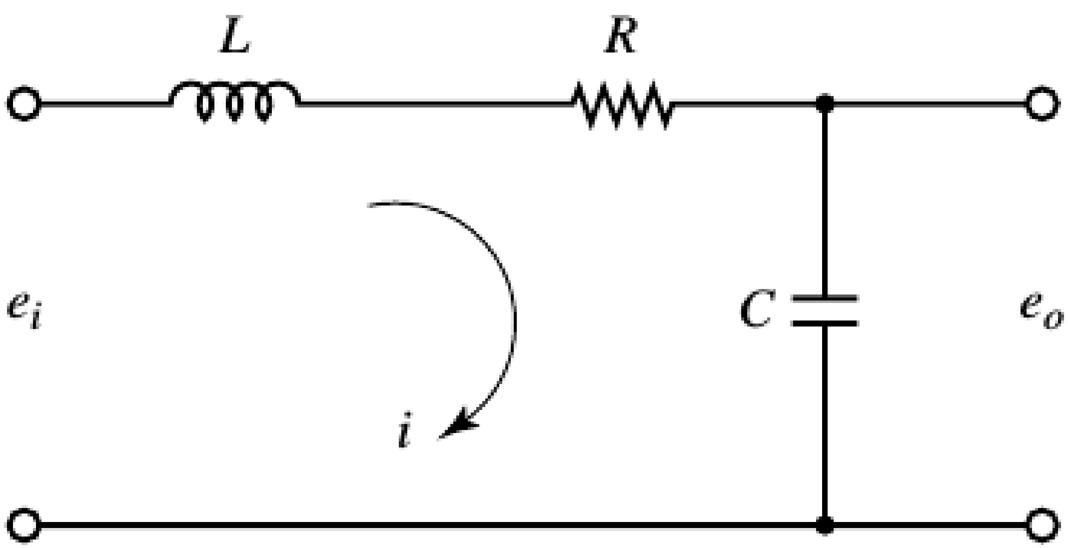
É a busca por uma <u>transformação de congruência</u> de forma tornar um problema não-convexo em convexo!



Modelagem da Incerteza

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + \cancel{(B + \Delta B)u}$$

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x$$



RLC

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leq R \leq R_2$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}$$

Modelagem da Incerteza

$$A_1 \leq A \leq A_2$$

$$A(\alpha) = \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2, \quad \alpha \in [0,1]$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow A(0) = A_2$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow A(1) = A_1$$

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow A_1 < A(\alpha) < A_2$$

Modelo Politopico de 2 vértices!

RLC

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leq R \leq R_2$$

$$C_1 \leq C \leq C_2$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC_1} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC_1} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC_2} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC_2} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix}$$

Modelagem da Incerteza

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4$$

$$\alpha \in \mathbb{R}^4, \alpha_i \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$$

$$\text{E.x.}\ \ 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0.4 = 1$$

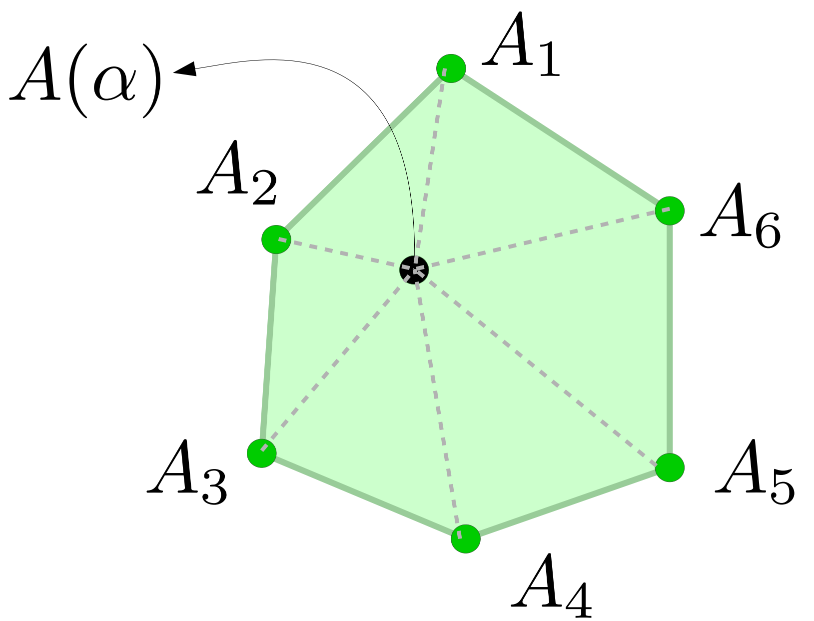
Modelo Politopico de 4 vértices!

Modelo com
M parâmetros incertos $\Rightarrow$ 2^M **vértices!**

Modelo Politopico

$$\dot{x} = A(\alpha)x$$

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i, \quad \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

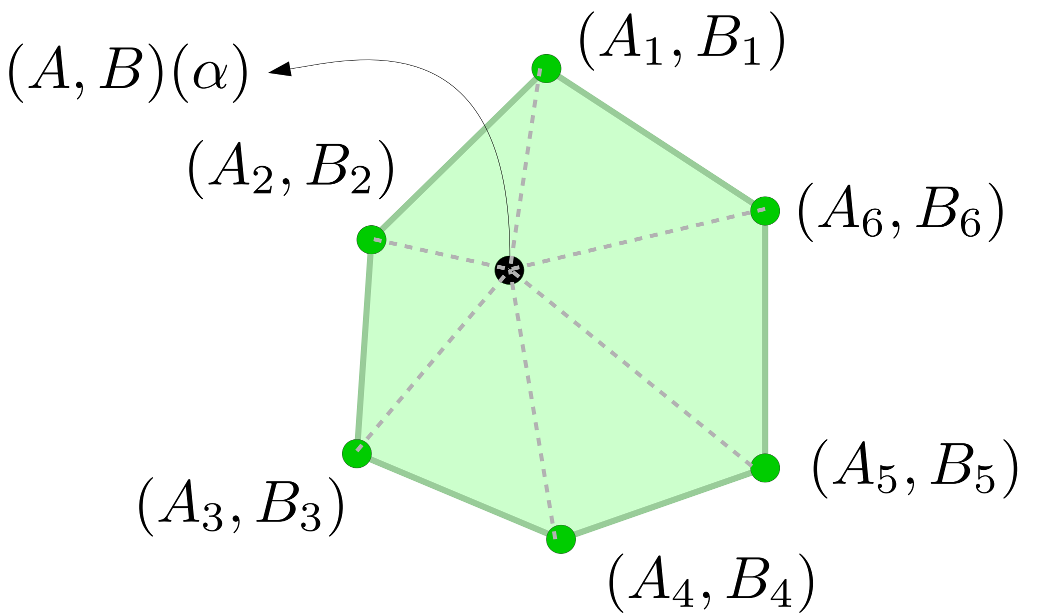


Politopo

Modelo Politopico

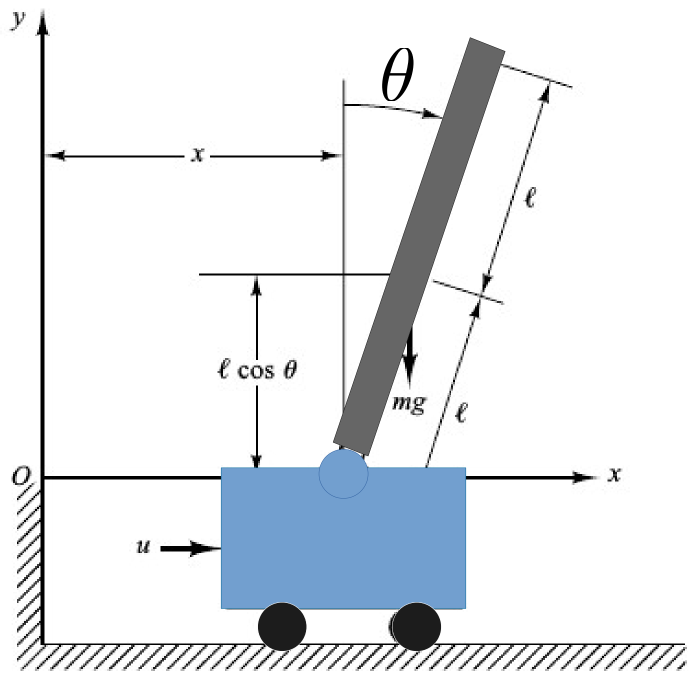
$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u \quad (A,B)(\alpha) \in \mathcal{D}$$

$$\mathcal{D} = \{(A,B)(\alpha) : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (A_i, B_i), \alpha \in \Lambda_N\}$$



Politopo

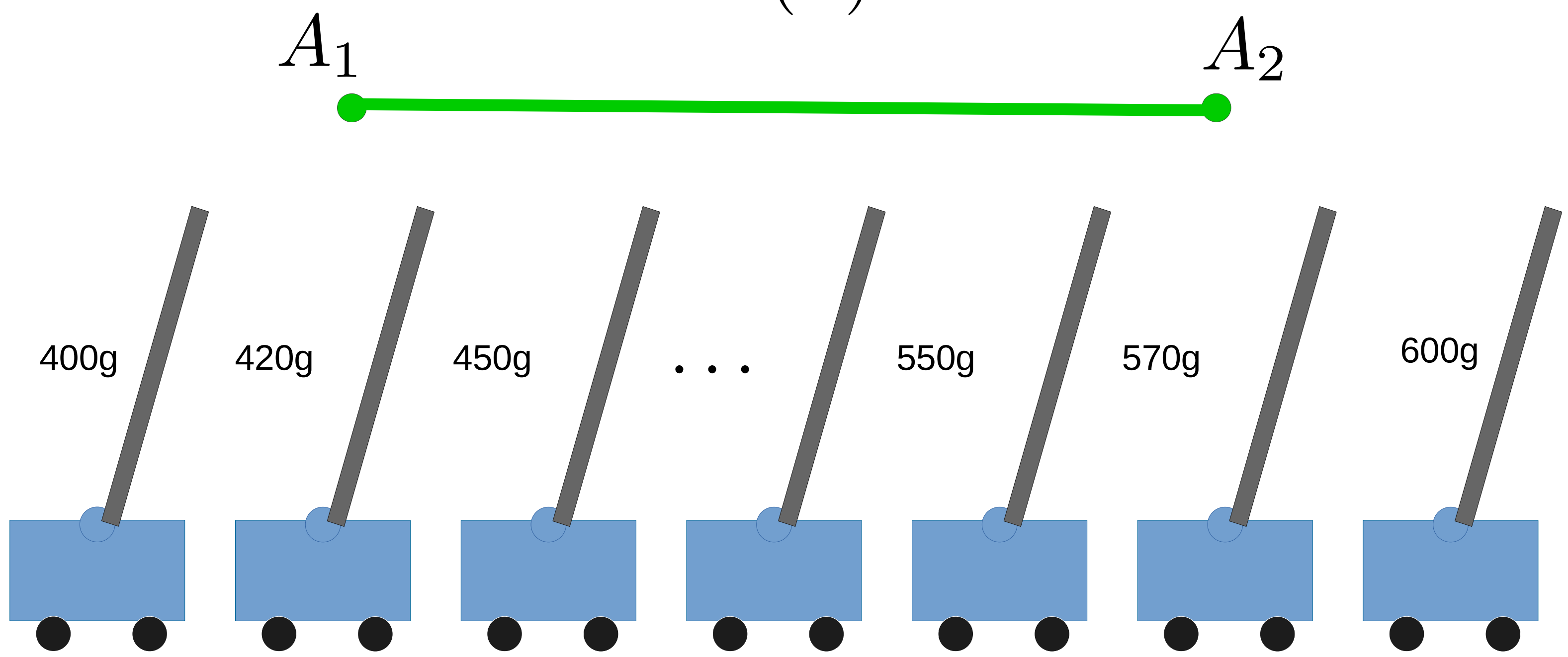
Exemplo: Pêndulo Invertido



$$400g \leq m \leq 600g$$

Exemplo: Pêndulo Invertido

$$\dot{x} = A(\alpha)x$$



Esse modelo Politopico descreve uma família de infinitos pêndulos!
Com a massa da haste variando entre 400g e 600g

Um <u>controlador robusto</u> deve estabilizar e garantir desempenho para todos os pêndulos dessa família!

Experimento 1

Como avaliar a estabilidade?

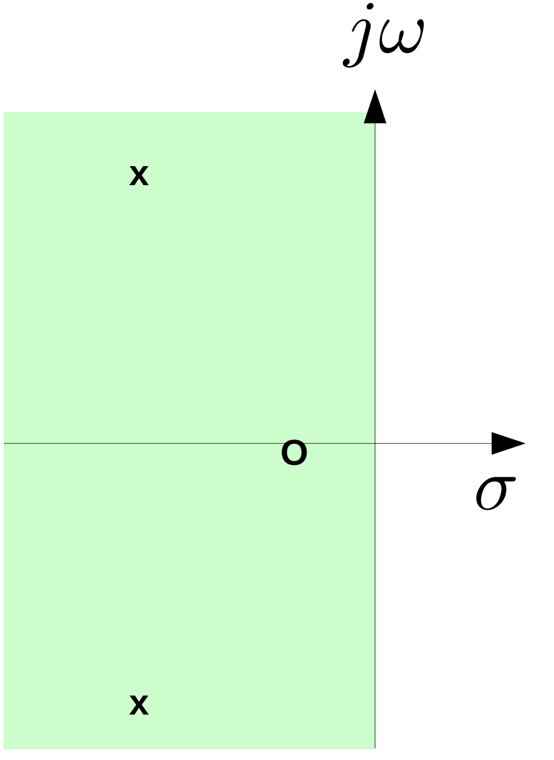
$$\dot{x} = Ax$$

- **Sistema assintoticamente estável:**

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

- **Modelo em Espaço de Estados**

$$real(\lambda_i(A)) < 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$



No Matlab: max(real(eig(A)))<0

Como avaliar a estabilidade?

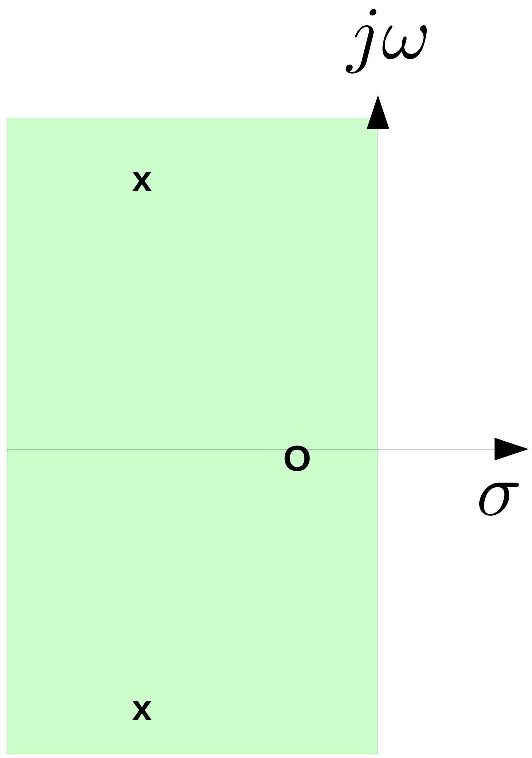
$$\dot{x} = A(\alpha)x$$

- **Sistema assintoticamente estável:**

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

- **Modelo em Espaço de Estados**

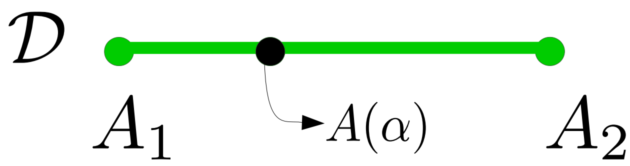
$$real(\lambda_i(A(\alpha))) < 0, \quad \forall i, \forall \alpha \in \Lambda_N$$



Como testar estabilidade de todo o politopo?

Força Bruta (Grid)

N=2

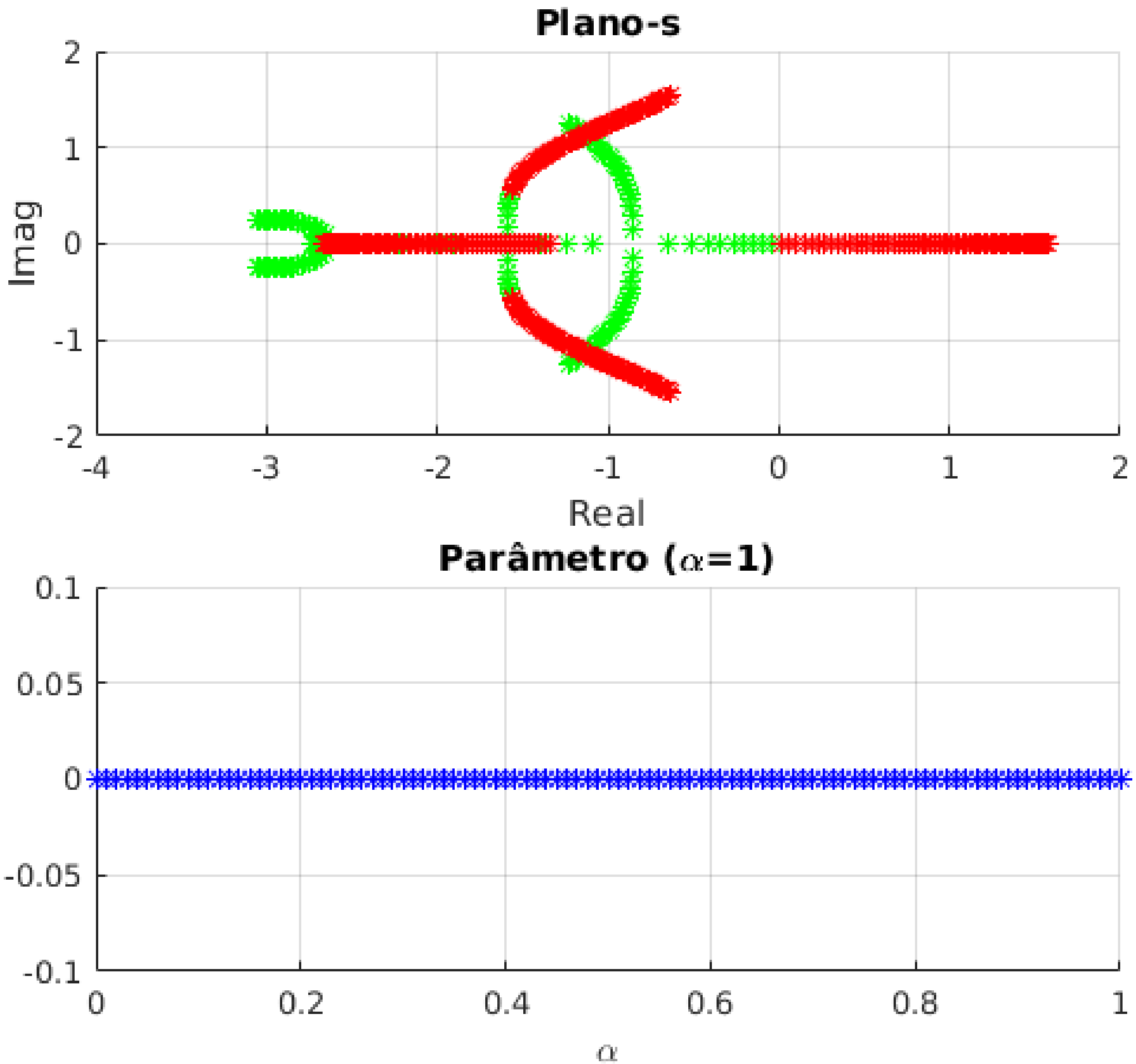


$$A(\alpha) = \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2$$

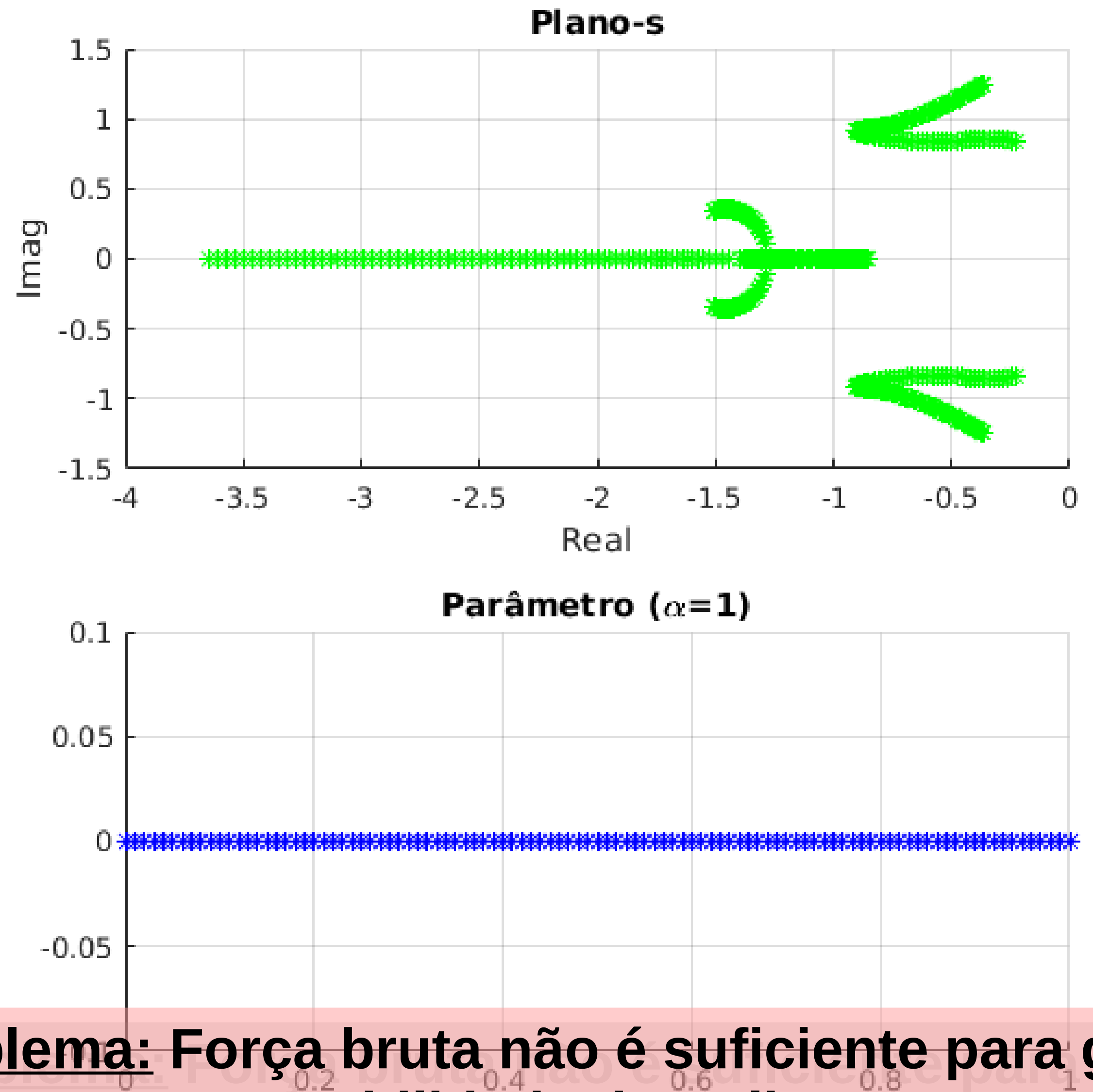
$$0 \leq \alpha \leq 1$$

```
for a=0:0.01:1
   A=a*A1+(1-a)*A2;
   p=eig(A);
   if (max(real(p))<0)
       plot(real(p),imag(p),'*g')
   else
       plot(real(p),imag(p),'*r')
   end
       hold on
end
```

Experimento 2



Experimento 2



<u>Problema:</u> Força bruta não é suficiente para garantir estabilidade do politopo!

Parte I
Como analisar?

Estabilidade de Lyapunov

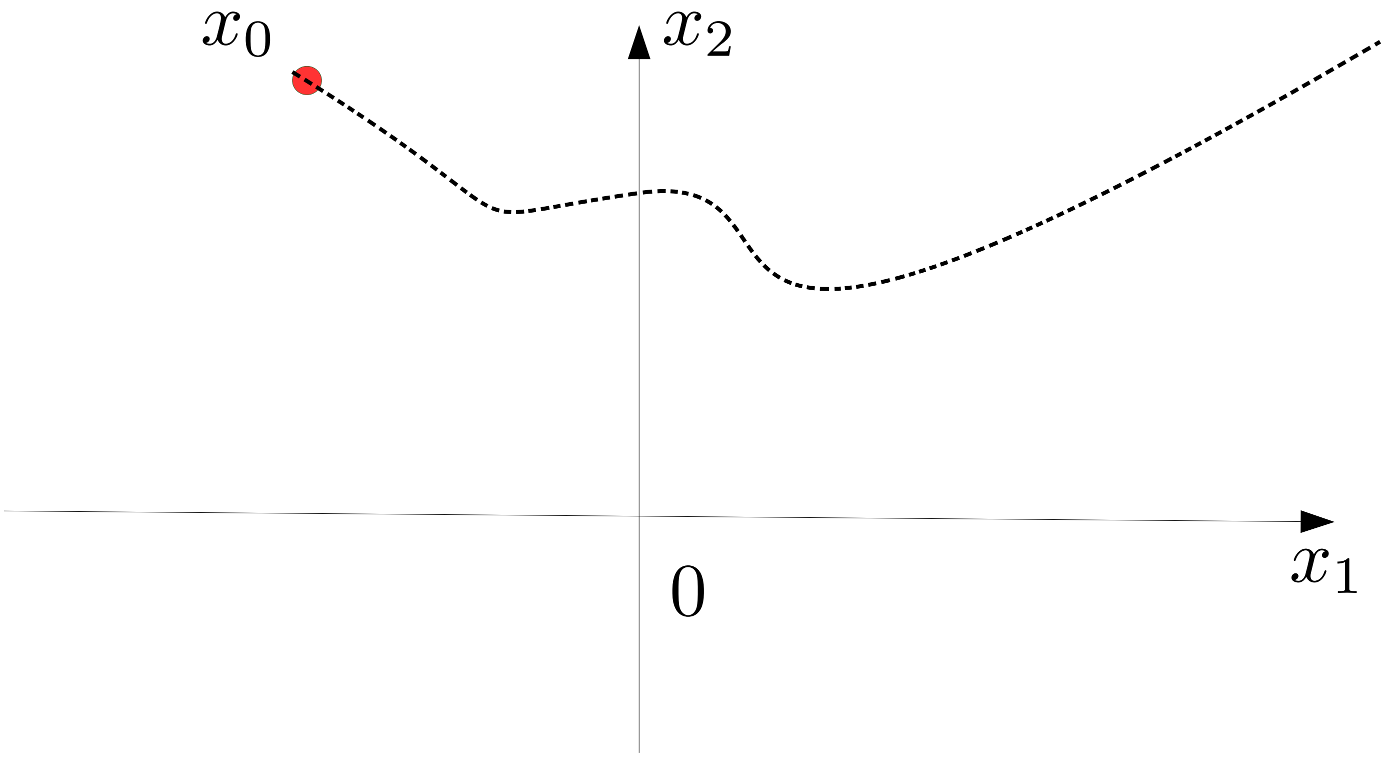
Lyapunov apresentou a sua tese de doutorado intitulada **“The general problem of the stability of motion”** em 1892 à Universidade de Moscou.

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918)

Biografia:
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lyapunov.html

Estabilidade de Lyapunov

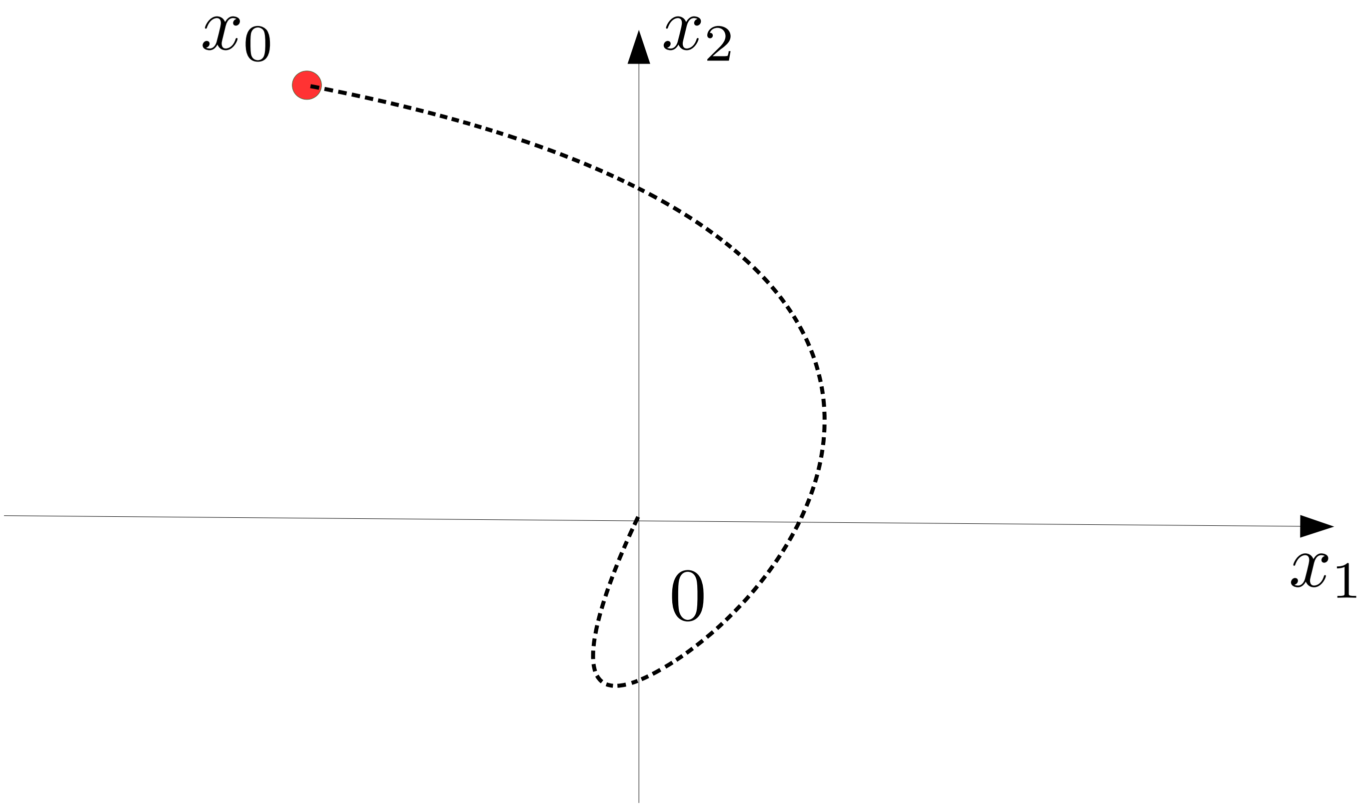
Sistema instável



Sistemas instáveis divergem da origem

Estabilidade de Lyapunov

Sistema estável



Se um sistema é assintoticamente estável, então existe uma função V(x)>0 tal que sua derivada é negativa para toda trajetória.

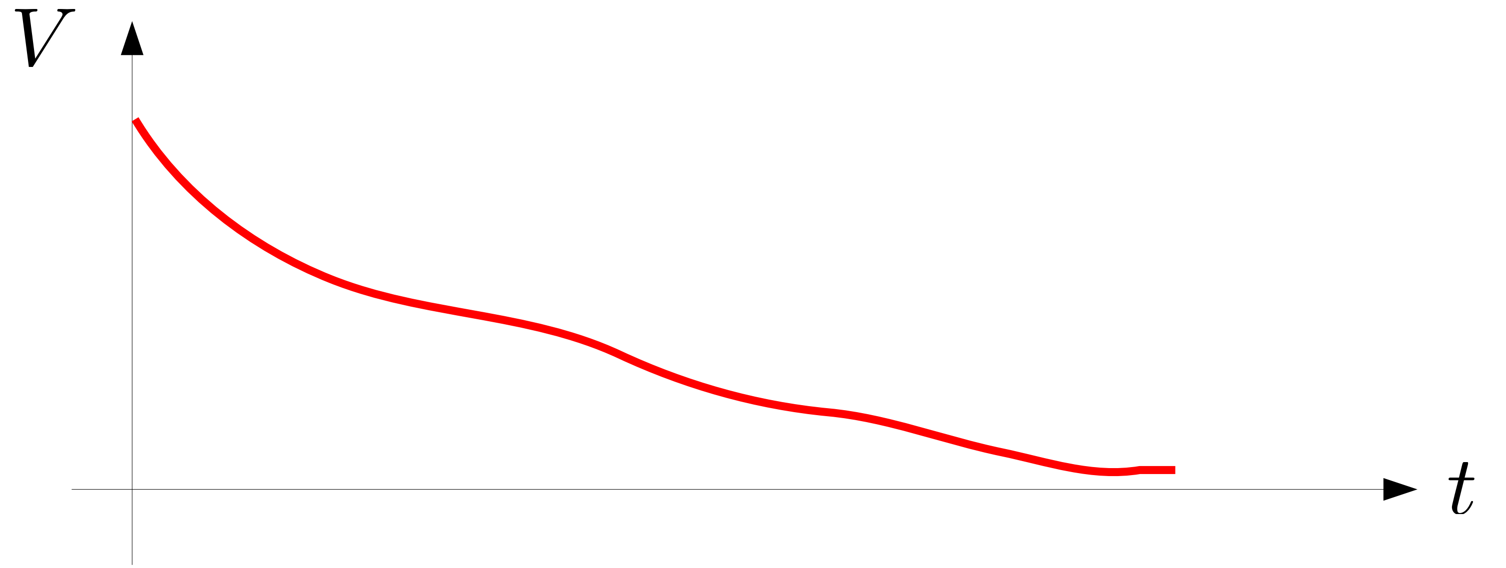
Ideia de Lyapunov

Um sistema dinâmico é estável <u>se existe:</u>

$$V(x) > 0 \quad V(0) = 0$$ **(I)**

Tal que:

$$\dot{V}(x) < 0$$ **(II)**



Sistemas Lineares

$$\dot{x} = Ax$$

Função de energia (Função de Lyapunov Quadrática)

$$V(x) = x'Px \qquad P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Primeira condição:

$$V(x) = x'Px > 0 \Leftrightarrow P > 0$$

Segunda condição:

$$\dot{V}(x) < 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(x'Px) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} < 0$$

Sistemas Lineares

$$\dot{x} = Ax$$

Segunda condição:

$$\dot{x}'Px + x'P\dot{x} < 0$$

$$\Rightarrow (Ax)'Px + x'P(Ax) < 0$$

$$(AB)' = B'A'$$

$$\Rightarrow x'A'Px + x'PAx < 0$$

$$\Rightarrow x'(A'P + PA)x < 0$$

Sistemas Lineares

$$\dot{x} = Ax$$

Sistema é estável <u>se, e somente se</u> existe uma matriz P tal que

$$\Rightarrow P > 0$$

$$\Rightarrow A'P + PA < 0$$

A condição de estabilidade é uma LMI!

A desigualdade de Lyapunov é a primeira LMI formulada na história!

Primeira LMI!

$$P > 0$$

$$A'P + PA < 0$$

Instalar pacotes no Matlab:

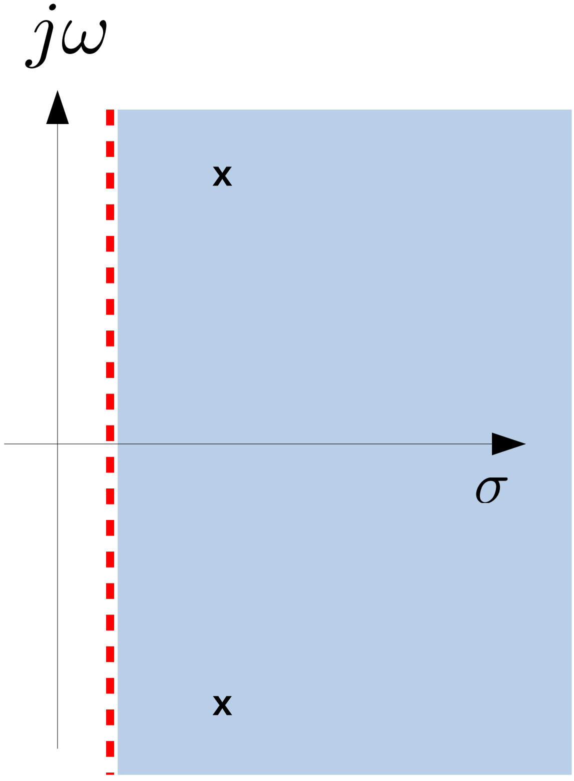
- SeDuMi (Self Dual Minimization)
  http://sedumi.ie.lehigh.edu/

- Yalmip (Yet Another LMI Parser)
  https://yalmip.github.io/

<u>Instalação:</u> No Matlab, na guia **“Home”**, clique em **“Set Path”**, depois em **“Add with subfolder”**, adicione as pastas do **<u>SeDuMi</u>** e do **<u>Yalmip</u>**, clique em **<u>“Save”</u>** depois **<u>“Close”</u>**. Pronto!

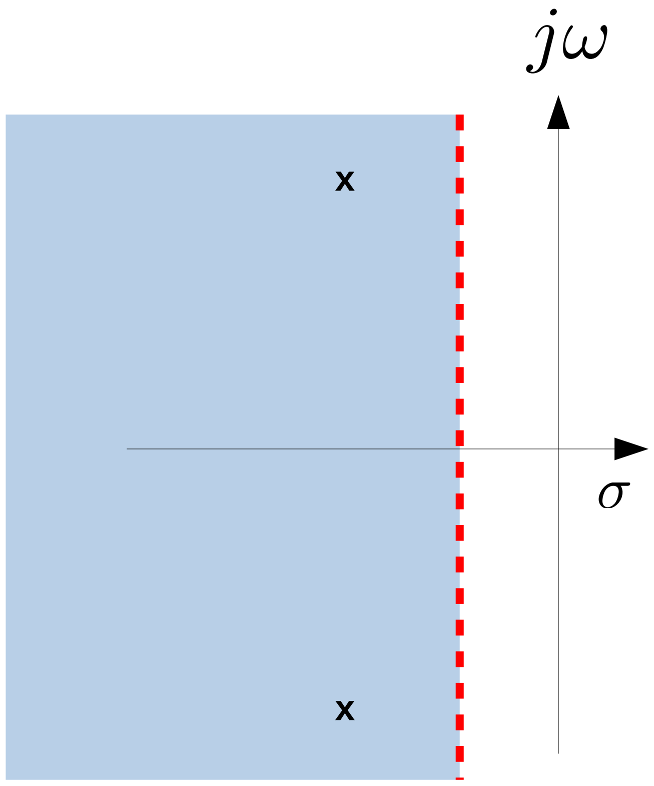
Algumas Propriedades de Matrizes

$$P > 0 \Leftrightarrow min(\lambda(P)) > 0$$



Algumas Propriedades de Matrizes

$$A < 0 \Leftrightarrow max(\lambda(A)) < 0$$



Hello World LMI

$$
\boxed{\begin{array}{c} P > 0 \\ A'P + PA < 0 \end{array}}
$$

Programando a Desigualdade de Lyapunov:

```
close all
clear all
clc

A=randn(3);
P=sdpvar(3,3,'symmetric');
lmis=[P>=0 (A'*P+P*A<=0)];
sol=solvesdp(lmis,[])
r=min(checkset(lmis));
if r>0
   disp('Sistema estável')
else
   disp('Sistema instável')
end
```

Estabilidade de Sistemas Politópicos

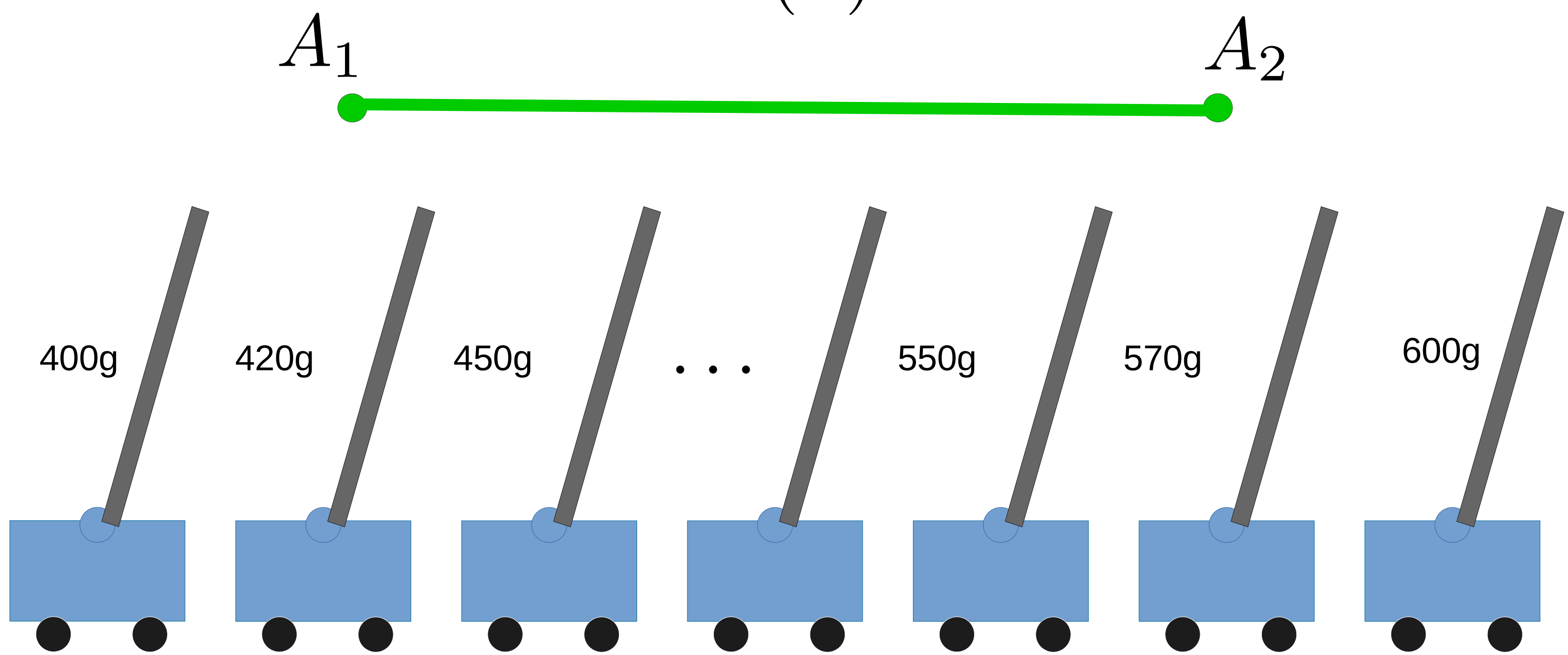
$$\dot{x} = A(\alpha)x$$

$$P(\alpha) > 0$$
$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$$
$$\forall \alpha \in \Lambda_N$$

LMI dependente de parâmetros

Exemplo: Pêndulo Invertido

$$\dot{x} = A(\alpha)x$$



Estabilidade de Sistemas Politópicos

$$P(\alpha) > 0$$

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$$

$$\forall \alpha \in \Lambda_N$$

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i$$

$$P(\alpha) = ?$$

Problema de dimensão infinita!

Estabilidade de Sistemas Politópicos

“Solução” : Imposição de uma estrutura para a matriz de Lyapunov

$$\boxed{P(\alpha) = P}$$

$$\begin{gathered} P > 0 \\ A(\alpha)'P + PA(\alpha) < 0 \\ \forall \alpha \in \Lambda_N \end{gathered}$$

Continua sendo LMI dependente de parâmetros!

Estabilidade de Sistemas Politópicos

N=2

$$\boxed{A(\alpha)=\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2} \qquad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0$$

$$A(\alpha)'P+PA(\alpha)<0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2)'P+P(\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2)<0$$

$$\Leftrightarrow \underset{+}{\alpha_1}(\underbrace{A_1'P+PA_1}_{-})+\underset{+}{\alpha_2}(\underbrace{A_2'P+PA_2}_{-})<0$$

$$- \qquad + \qquad - \qquad <0 \qquad \forall \alpha \in \Lambda_2$$

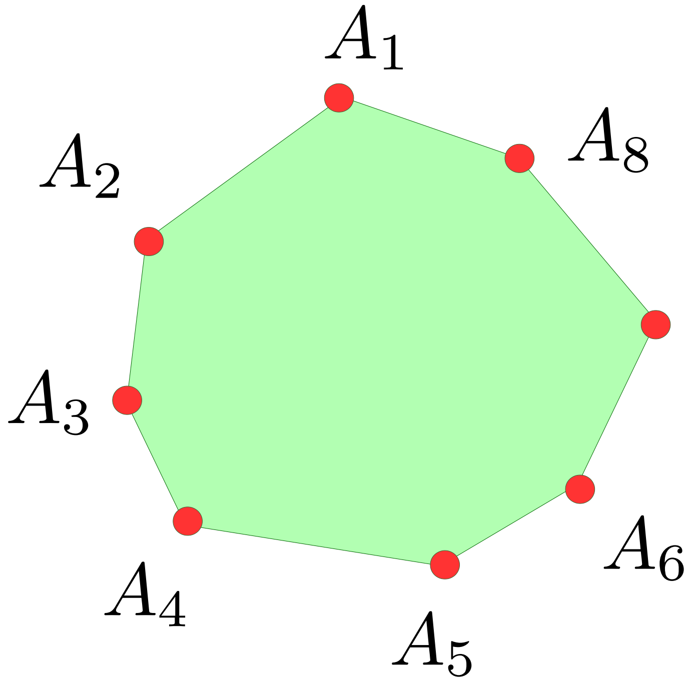
Condição suficiente:

$$\boxed{\begin{array}{c} P>0 \\ A_1'P+PA_1<0 \\ A_2'P+PA_2<0 \end{array}} \Rightarrow \textbf{LMI!}$$

Estabilidade Robusta

$$\dot{x} = A(\alpha)x, \quad A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i, \alpha \in \Lambda_N$$

É assintóticamente estável se existir P=P' tal que:



$$\begin{aligned} &P > 0 \\ &A_1'P + PA_1 < 0 \\ &A_2'P + PA_2 < 0 \\ &A_3'P + PA_3 < 0 \\ &\vdots \\ &A_N'P + PA_N < 0 \end{aligned}$$

Estabilidade Quadrática

Pode não existir solução!

Programando Estabilidade Quadrática

$$P > 0$$
$$A_i' P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

```
N=3;n=2;
A={randn(n),randn(n),randn(n)};
P=sdpvar(n,n,'symmetric');
lmis=[P>=0];
for i=1:N
   lmis=[lmis (A{i}'*P+P*A{i}<=0)];
end
sol=solvesdp(lmis,[])
r=min(checkset(lmis));
if r>0
   disp('Politopo estável')
else
   disp('LMI infactivel')
end
```

Parte II
Como estabilizar?

Como Estabilizar um Politopo?

Realimentação de Estados

- **Sistema precisamente conhecido:**

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$u = Kx$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{x} = (A + BK)x}$$

- **Teoria de Lyapunov:**

$$P > 0$$
$$(A + BK)'P + P(A + BK) < 0$$
$$\boxed{A'P + PA + K'B'P + PBK < 0}$$

Não é uma LMI!

Realimentação de Estados

- **Aplica-se uma <u>transformação de congruência</u>:**

$$P^{-1}(A'P + PA + K'B'P + PBK)P^{-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}A' + AP^{-1} + P^{-1}K'B' + BKP^{-1} < 0$$

- **Mudança de variáveis:**

$$\boxed{W = P^{-1}} \quad \boxed{Z = KW} \Rightarrow K = ZW^{-1}$$

$$\Leftrightarrow WA' + AW + (WK')B' + B(KW) < 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{WA' + AW + Z'B' + BZ < 0}$$

É uma LMI!

Realimentação Robusta de Estados

Se existir W=W' e Z tal que:

$$\boxed{\begin{aligned} W &> 0 \\ WA_1' + A_1W + Z'B_1' + B_1Z &< 0 \\ WA_2' + A_2W + Z'B_2' + B_2Z &< 0 \\ &\vdots \\ WA_N' + A_NW + Z'B_N' + B_NZ &< 0 \end{aligned}}$$

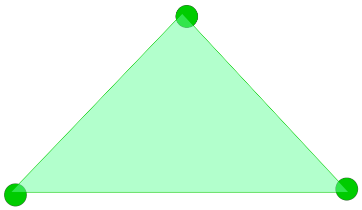
Então o ganho robusto dado por:

$$\boxed{K = ZW^{-1}}$$

Garante que todo o politopo é assintóticamente estável!

Exemplo de Realimentação Robusta

N=3



$$\dot{x} = A(\alpha)x + B(\alpha)u, \quad u = Kx$$

$$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$$

$$B(\alpha) = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3$$

É <u>estabilizável</u> se existir W=W' e Z tal que:

$$W > 0$$

$$WA_1' + A_1 W + Z'B_1' + B_1 Z < 0$$

$$WA_2' + A_2 W + Z'B_2' + B_2 Z < 0$$

$$WA_3' + A_3 W + Z'B_3' + B_3 Z < 0$$

$$\boxed{K = ZW^{-1}}$$

Realimentação Robusta de Estados

$$W > 0$$
$$WA_i' + A_iW + Z'B_i' + B_iZ < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

```
N=3;n=2;m=1;
A={randn(n),randn(n),randn(n)};
B={randn(n,m),randn(n,m),randn(n,m)};
W=sdpvar(n,n,'symmetric');
Z=sdpvar(m,n,'full');
lmis=[W>=0];
for i=1:N
   lmis=[lmis (W*A{i}'+A{i}*W+Z'*B{i}'+B{i}*Z<=0)];
end
sol=solvesdp(lmis,[])
r=min(checkset(lmis));
if r>0
   disp('Politopo estabilizável')
   K=double(Z)*inv(double(W))
else
   disp('LMI infactivel')
end
```

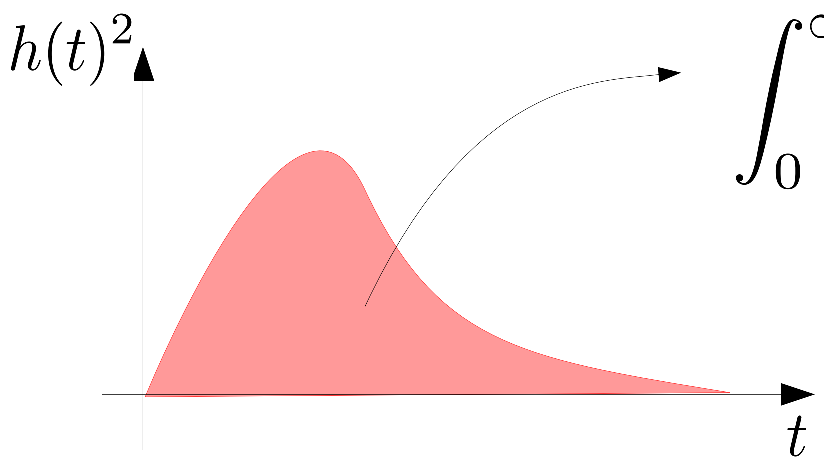
Parte III
Como otimizar?

Vídeo Ilustrativo

- **https://www.youtube.com/watch?v=JpNAhKT7yY4&t=128s**

Norma H2

Norma H2=energia da resposta ao impulso do sistema



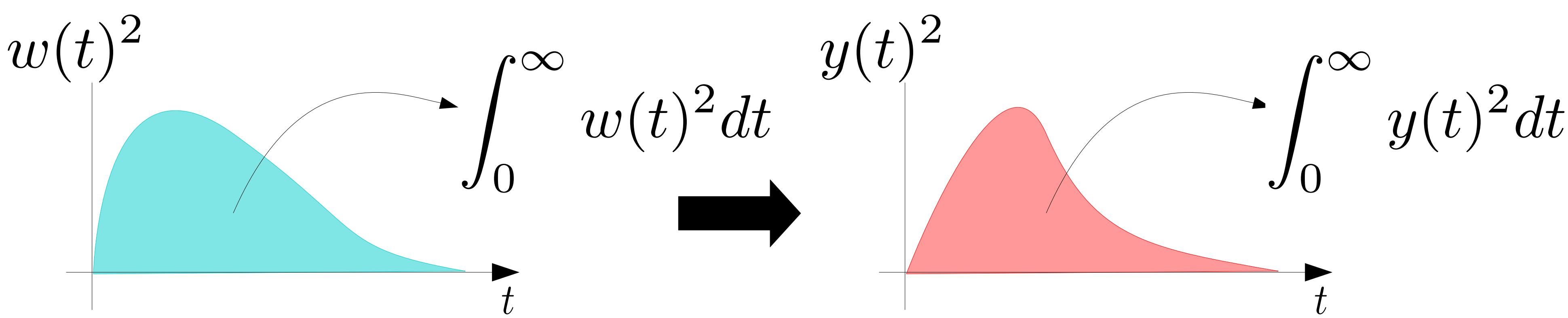
$$\int_0^\infty h(t)^2 dt = \|H\|_2^2$$

*No matlab pode-se usar o comando: **norm(sys,2)**

Fisicamente, corresponde a "energia" consumida pelo sistema após um distúrbio muito rápido até voltar ao equilíbrio!
<u>Ex: um tapa num pêndulo invertido</u>

Como garantir desempenho?

Norma H-infinito=relação entre energia da entrada com a da saída.

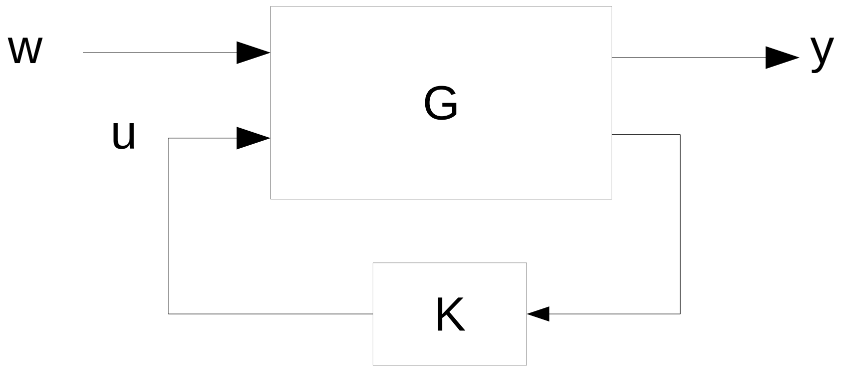


$$\|H\|_\infty^2 = \frac{\int_0^\infty y(t)^2 dt}{\int_0^\infty w(t)^2 dt}$$

Fisicamente, corresponde ao máximo que o sistema amplifica um distúrbio na entrada.

*No matlab pode-se usar o comando: **norm(sys,inf)**

Controle H2



$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_w w$$
$$y = Cx + D_u u$$

Busca-se uma lei de controle do tipo u=Kx tal que <u>estabilize o sistema e minimize a norma H2</u> em malha fechada

Malha fechada:

$$\dot{x} = (A + B_u K)x + B_w w$$
$$y = (C + D_u K)x$$

Controle H2

- O controle H2, **<u>para um sistema precisamente conhecido</u>**, fica formulado como:

$$\min_{W=W'>0,\ X=X',\ Z} \quad tr(X)$$

$$\text{s.j.} \quad \begin{bmatrix} X & CW + D_u Z \\ WC' + Z'D_u' & W \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} WA' + AW + Z'B_u' + B_u Z & B_w \\ B_w' & -I \end{bmatrix} \leq 0$$

$$K = ZW^{-1}$$

Controle Ótimo H2

Garante estabilidade e a norma H2 é:

$$\|H\|_2 \leq \sqrt{tr(X)}$$

Controle Robusto H2

$$\min_{W=W'>0,\ X=X'} tr(X)$$

$$\text{s.j.} \quad \begin{bmatrix} X & C(\alpha)W + D_u(\alpha)Z \\ WC(\alpha)' + Z'D_u(\alpha) & W \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} WA(\alpha)' + A(\alpha)W + Z'B_u(\alpha)' + B_u(\alpha)Z & B_w(\alpha) \\ B_w(\alpha)' & -I \end{bmatrix} \leq 0$$

LMI dependente de parâmetros!

Controle Robusto H2

Se existir W=W’, X=X’ e Z tal que:

$$\min_{W=W'>0,\ X=X',\ Z} tr(X)$$

$$\text{s.j.} \quad \begin{bmatrix} X & C_i W + D_{iu} Z \\ W C_i' + Z' D_{iu} & W \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} W A_i' + A_i W + Z' B_{iu}' + B_{iu} Z & B_{iw} \\ B_{iw}' & -I \end{bmatrix} \leq 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

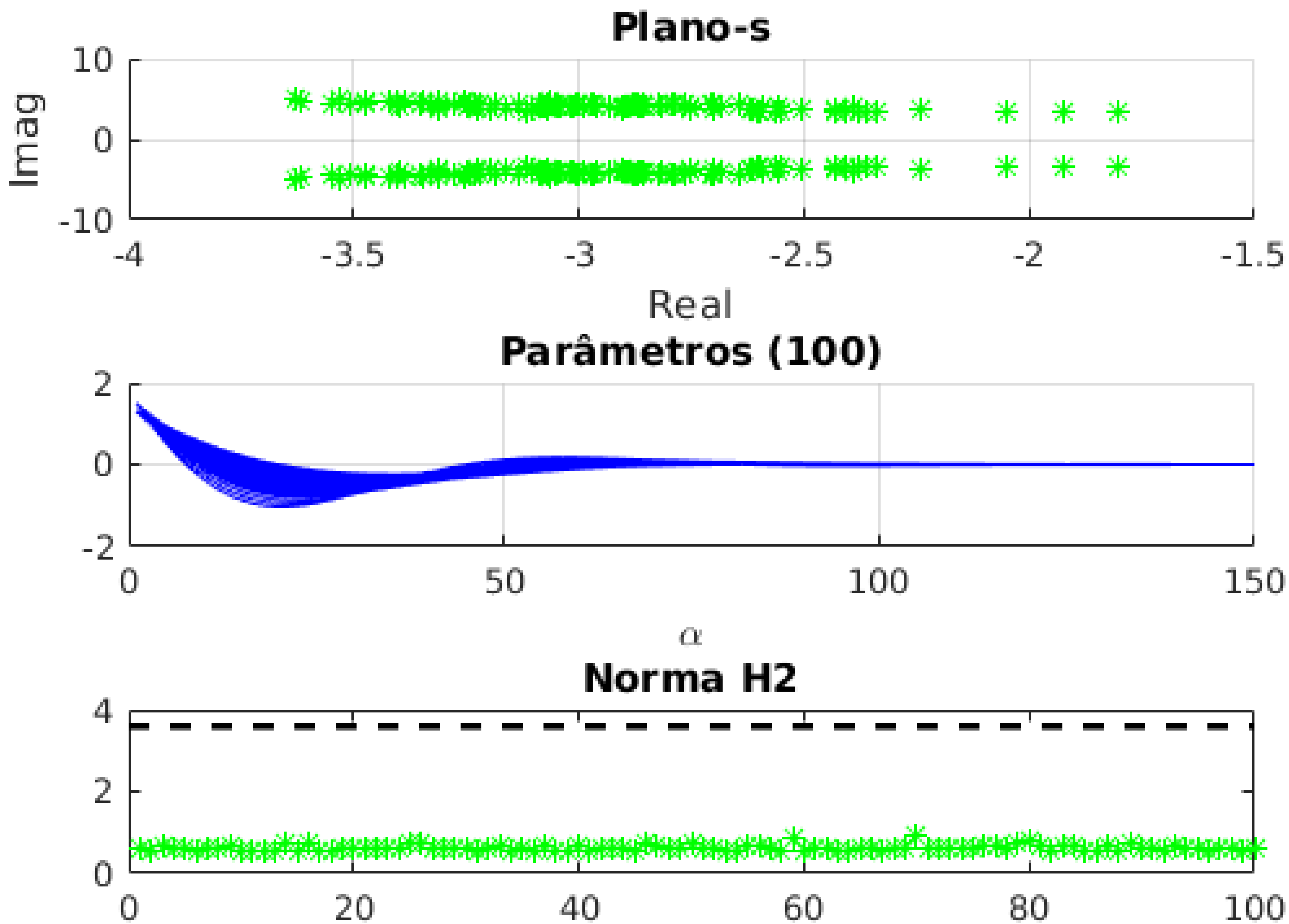
Então o ganho robusto dado por: $\boxed{K = Z W^{-1}}$

Garante estabilidade para todo o politopo e a norma H2 é:

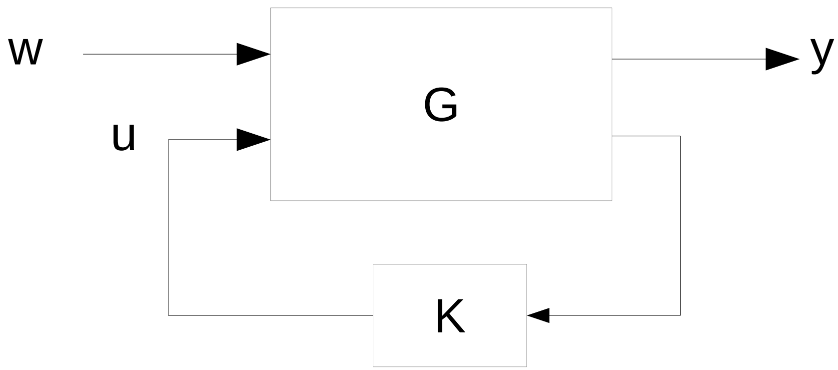
$$\|H\|_2 \leq \sqrt{tr(X)}$$

(Custo garantido)

Exemplo Matlab



Controle H-infinito



$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_w w$$
$$y = Cx + D_u u$$

Busca-se uma lei de controle do tipo u=Kx tal que <u>estabilize o sistema e minimize a norma Hinf</u> em malha fechada

Malha fechada:

$$\dot{x} = (A + B_u K)x + B_w w$$
$$y = (C + D_u K)x$$

Controle H-infinito

- O controle Ótimo Hinf para **sistemas precisamente conhecidos** fica formulado como:

$$\min_{Z, W=W'>0, X=X'} \mu$$

$$\text{s.j.} \quad \begin{bmatrix} WA' + AW + Z'B_u' + B_u Z & WC' + Z'D_u' & B_w \\ CW + D_u Z & -I & 0 \\ B_w' & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0$$

$$K = ZW^{-1} \qquad \|H\|_\infty = \sqrt{\mu}$$

O ganho K garante que a norma Hinf em malha fechada é mínima.

Controle Robusto H-infinito

$$\min_{Z, W=W'>0, X=X'} \mu$$

$$\text{s.j.} \quad \begin{bmatrix} WA_i' + A_iW + Z'B_{iu}' + B_{iu}Z & WC_i' + Z'D_{iu}' & B_{iw} \\ C_iW + D_{iu}Z & -I & 0 \\ B_{iw}' & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, N$$

$$K = ZW^{-1}$$

$$\|H\|_\infty \leq \sqrt{\mu}$$ **(Custo Garantido)**

Referências

- Notas de aula disciplina “Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdade Matriciais Lineares”, Prof. Ricardo/Pedro Peres – UNICAMP http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/IA892/ia892.htm

- Zhou, Kemin, and John Comstock Doyle. Essentials of robust control. Vol. 104. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall, 1998.

- Boyd, Stephen, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory. Society for industrial and applied mathematics, 1994. http://web.stanford.edu/~boyd/lmibook/