



ELEMENTOS DE MÁQUINAS

CINEMÁTICA DE ENGRENAGENS

Prof. : Dr. José Carlos de Camargo

jccamargo@uesc.br



3.0 – Cinemática de Engrenagens

Objetivos :

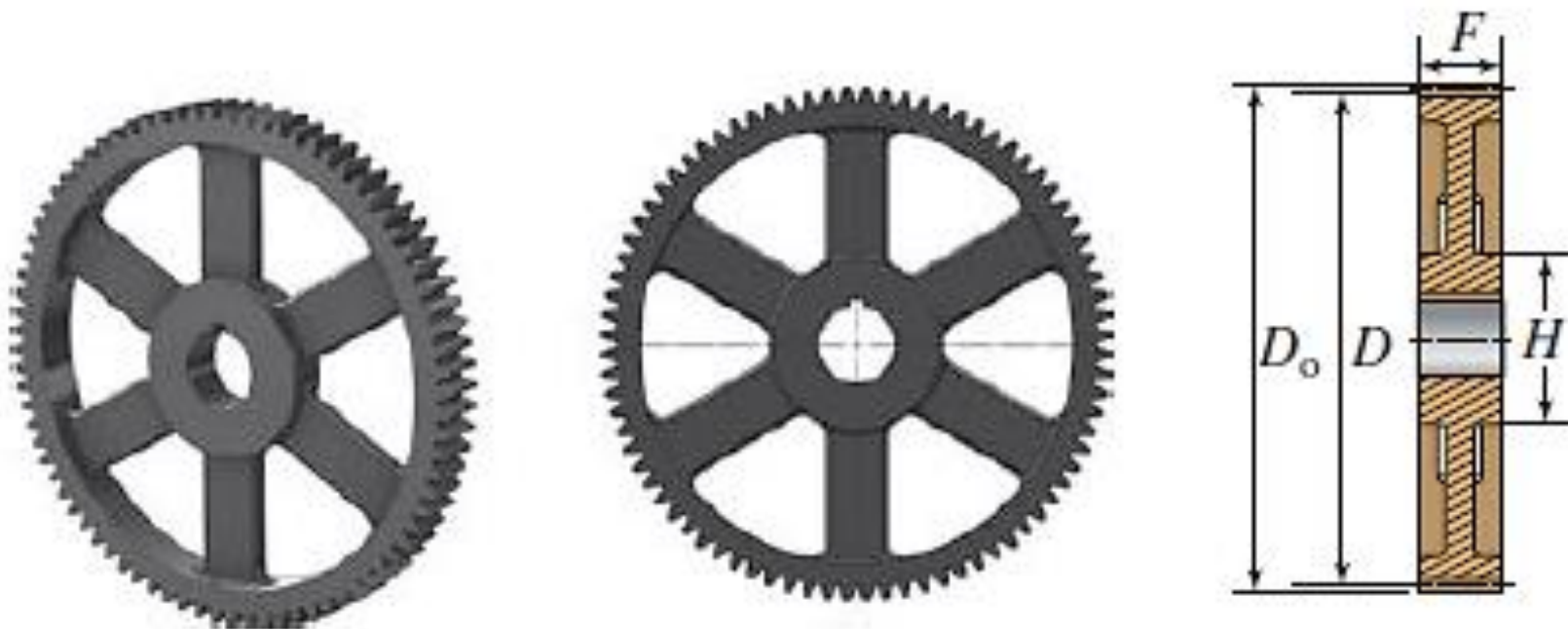
- Reconhecer e descrever as principais características das engrenagens de dentes retos, das helicoidais e dos conjuntos de sem-fim/engrenagens sem-fim.
- Descrever as principais características operacionais desses diferentes tipos de engrenagem, as semelhanças e diferenças entre eles e suas vantagens e desvantagens gerais.
- Descrever a forma involuta do dente e discutir sua relação com a lei fundamental do engrenamento.
- Descrever as funções básicas da American Gear Manufacturers Association (AGMA) e identificar normas pertinentes que tenham sido desenvolvidas e publicadas por essa organização.
- Definir a razão de velocidade angular de duas engrenagens que operam em conjunto.
- Especificar números adequados de dentes para um par conjugado de engrenagens a fim de produzir determinada razão de velocidade angular.
- Definir a razão de engrenamento, referente à razão de velocidade total entre os eixos de entrada e saída de um redutor de velocidade (ou multiplicador de velocidade) que use mais do que duas engrenagens.



3.0 – Cinemática de Engrenagens

- [Engrenagens de dentes retos](#)
- [Engrenagens de dentes helicoidais](#)
- [Engrenagens sem-fim](#)
- [Engrenagens cônicas](#)

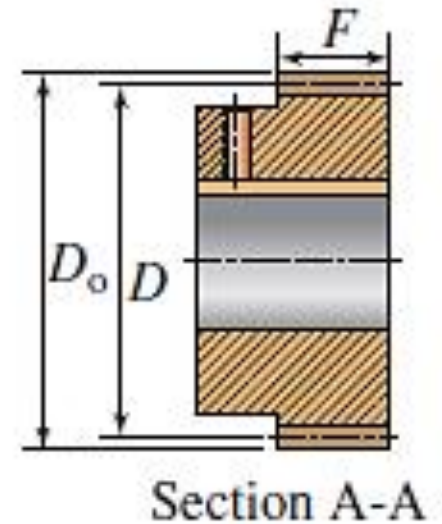
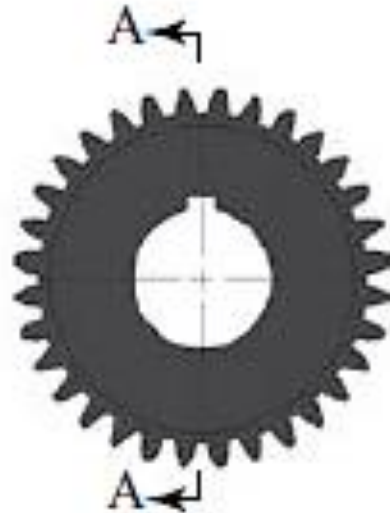
3.0 – Tipos de engrenagem de dentes retos



Engrenagem de dentes retos com projeto raiado



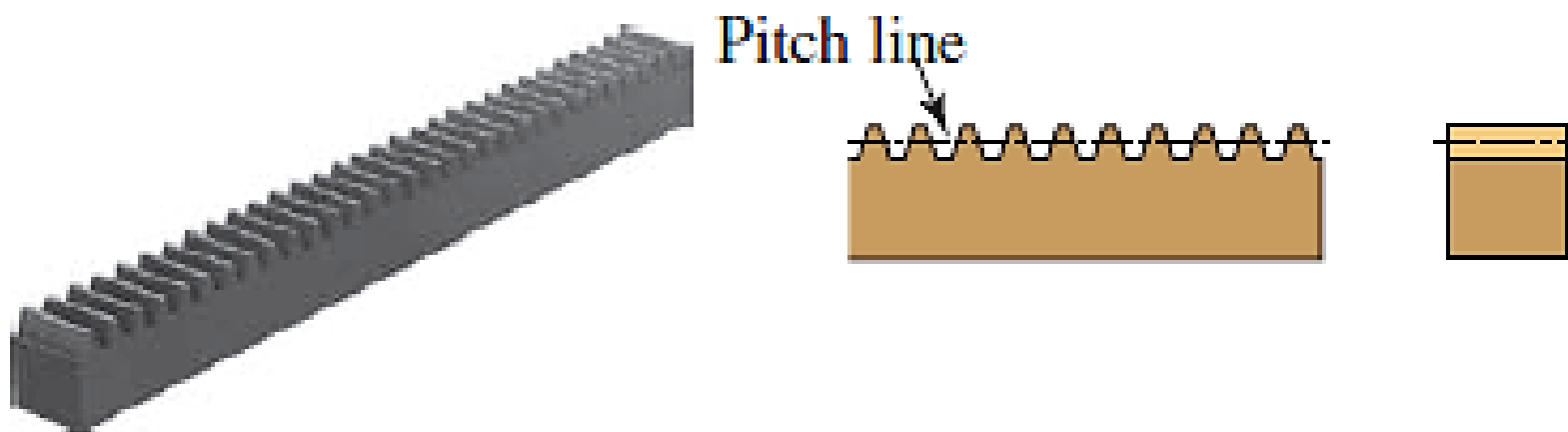
3.0 – Tipos de engrenagem de dentes retos



Engrenagem de dentes retos com cubo sólido



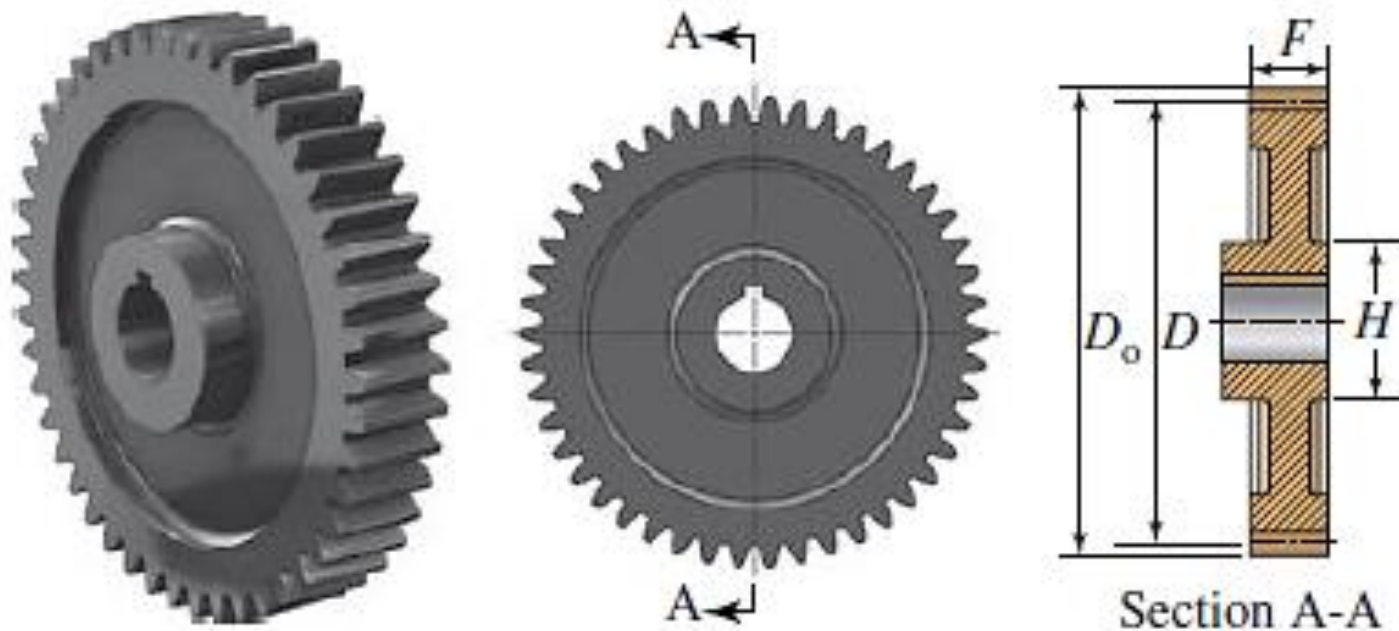
3.0 – Tipos de engrenagem de dentes retos



Cremalheira-engrenagem de dentes retos



3.0 – Tipos de engrenagem de dentes retos



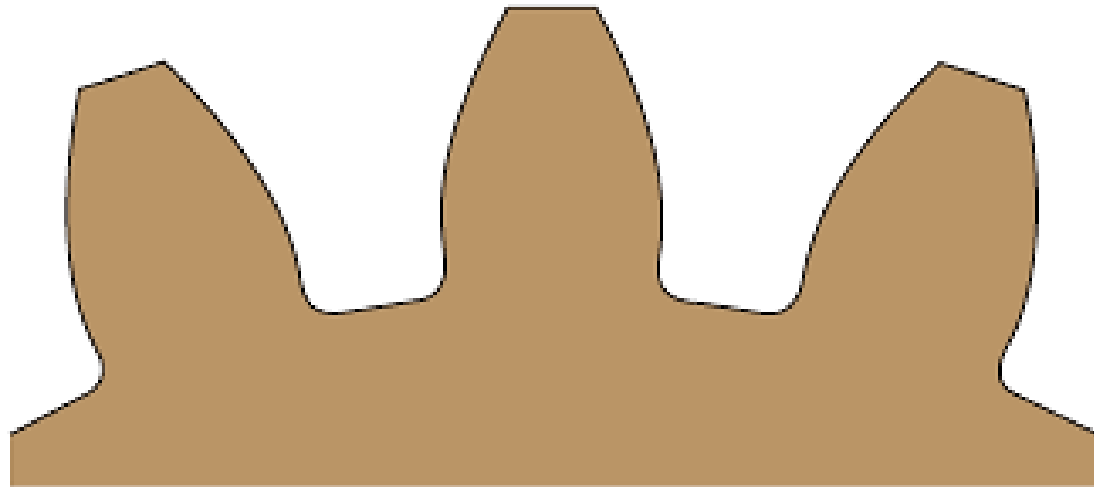
Engrenagem de dentes retos com alma fina





3.0 – Geometria da engrenagem de dentes retos: forma involuta do dente

- A forma de dente mais utilizada em engrenagens de dentes retos é a involuta de profundidade total



Forma involuta do dente

3.0 – Geometria da engrenagem de dentes retos: forma involuta do dente

- Segundo, (NORTON, 2004), a involuta de um círculo é a curva que pode ser gerada desenrolando-se uma linha esticada de um cilindro, como mostrado na Figura 01. Observações acerca da curva involuta:

1. A linha está sempre tangente ao círculo de base;
2. O centro da curvatura da involuta está sempre em um ponto de tangência da linha com o círculo base;
3. Uma tangente à involuta é sempre normal à linha, que é o raio instantâneo de curvatura

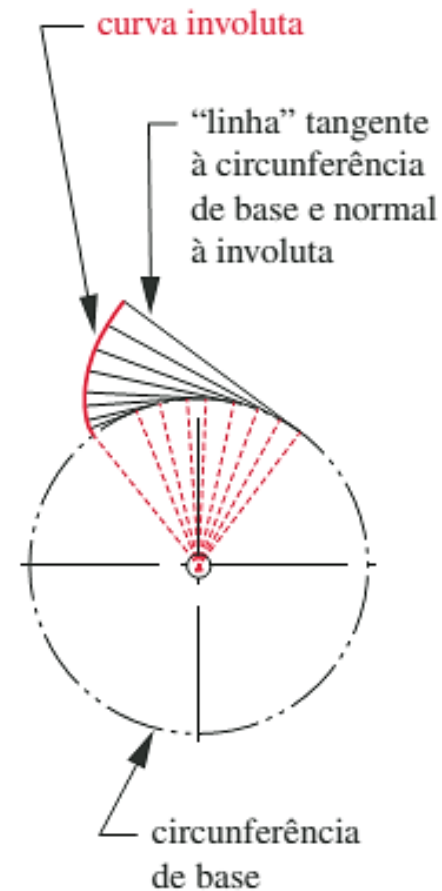
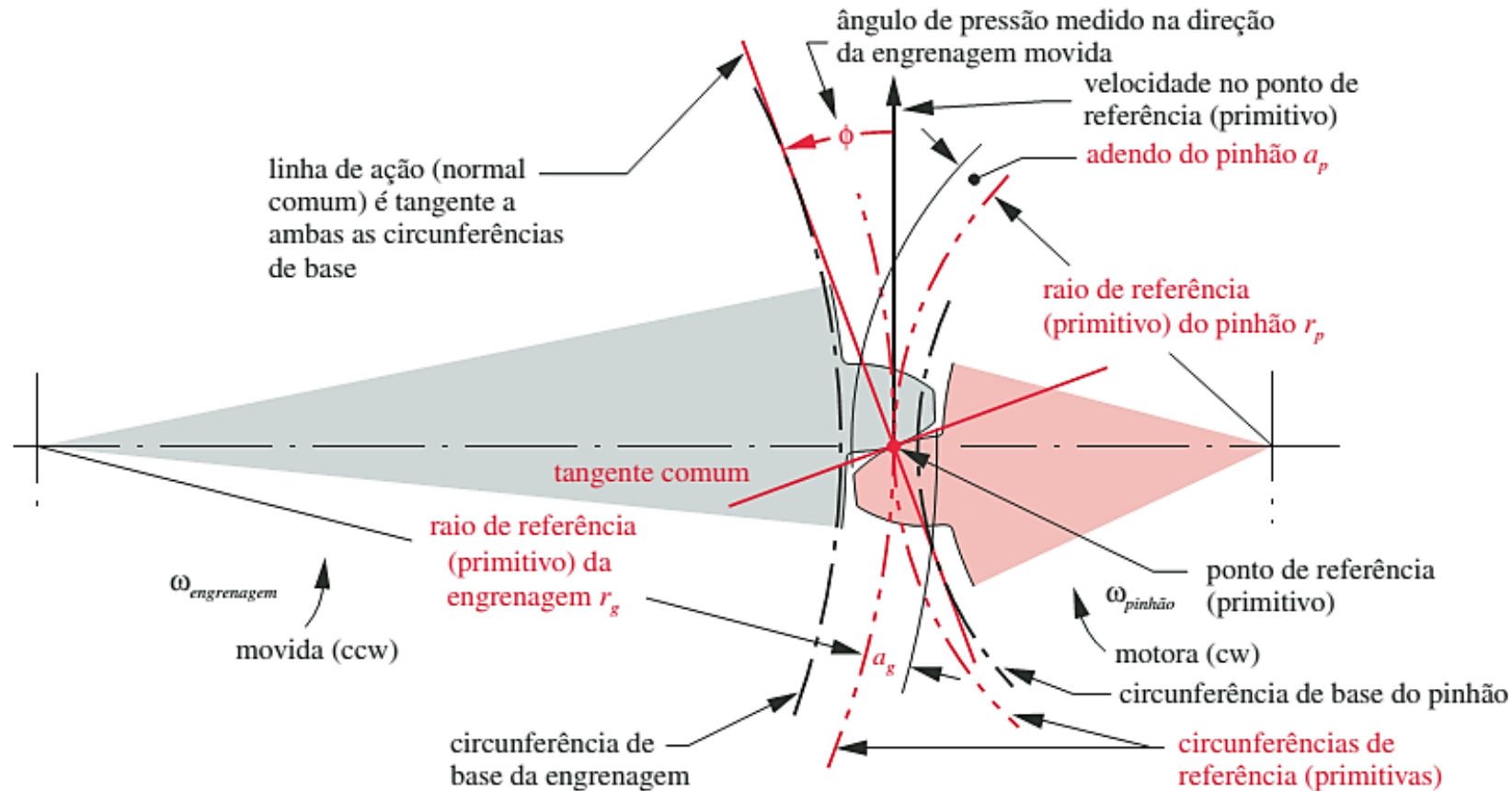


Figura 01: Geração da involuta de uma circunferência



3.0 – Geometria da engrenagem de dentes retos: forma involuta do dente

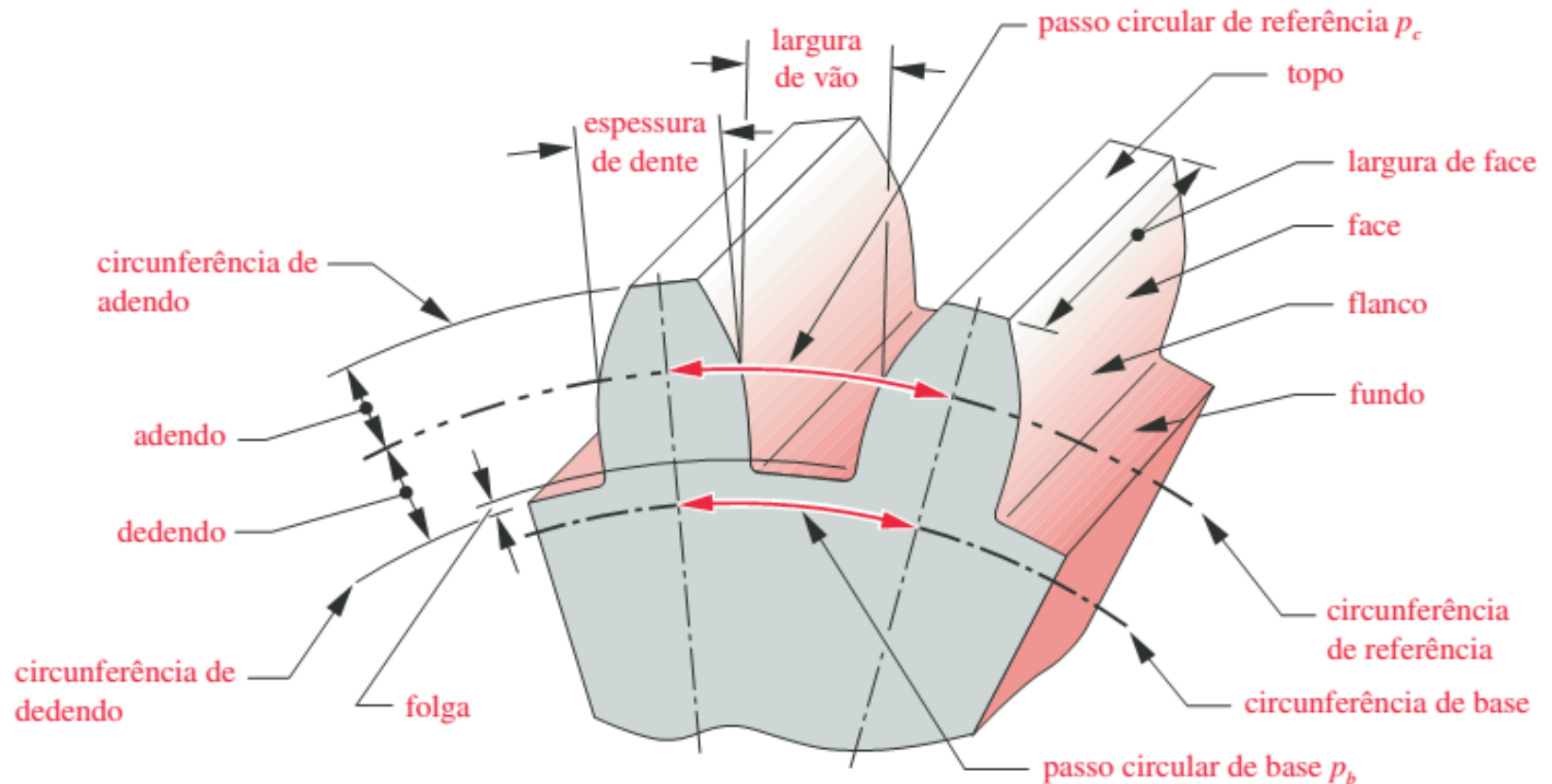
- Involutas conjugadas



Geometria de contato e ângulo de pressão dos dentes de engrenagem da involuta

3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

- Características dos dentes de engrenagens de dentes retos

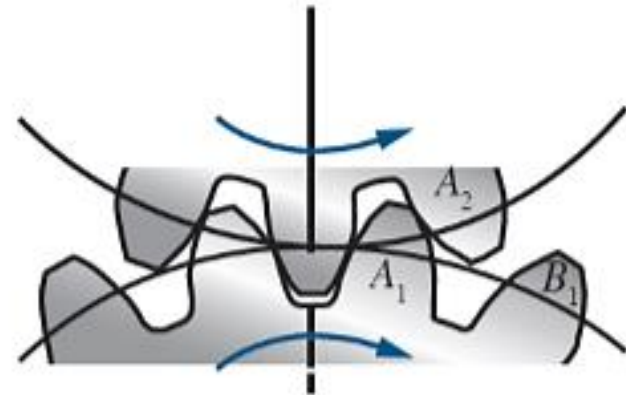
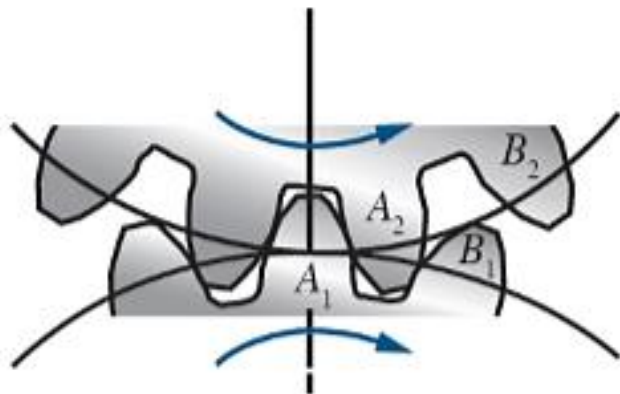
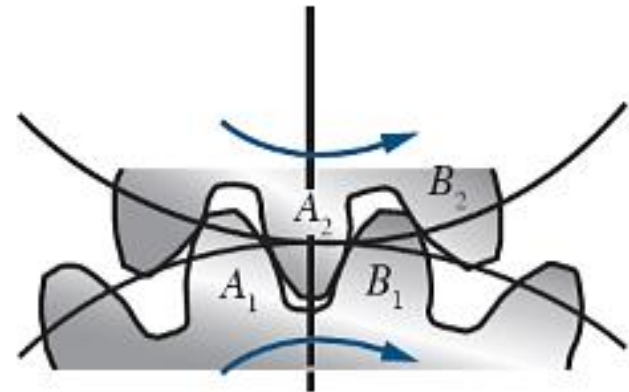
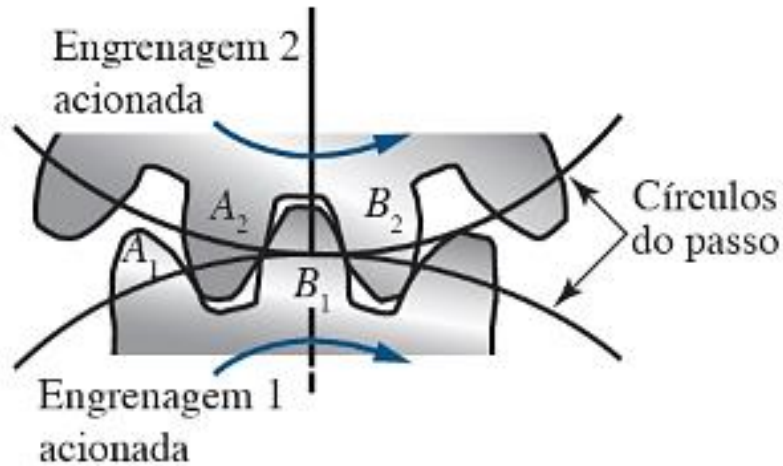


Nomenclatura do dente de engrenagem



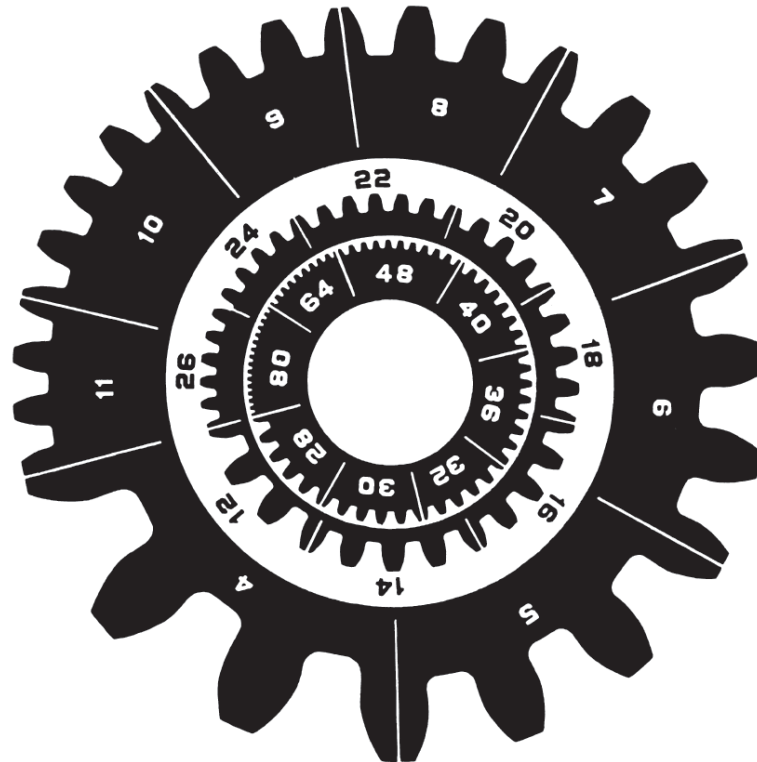
3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

- Ciclo de engrenamento dos dentes da engrenagem



3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

- Tamanho do dente em função do passo diametral



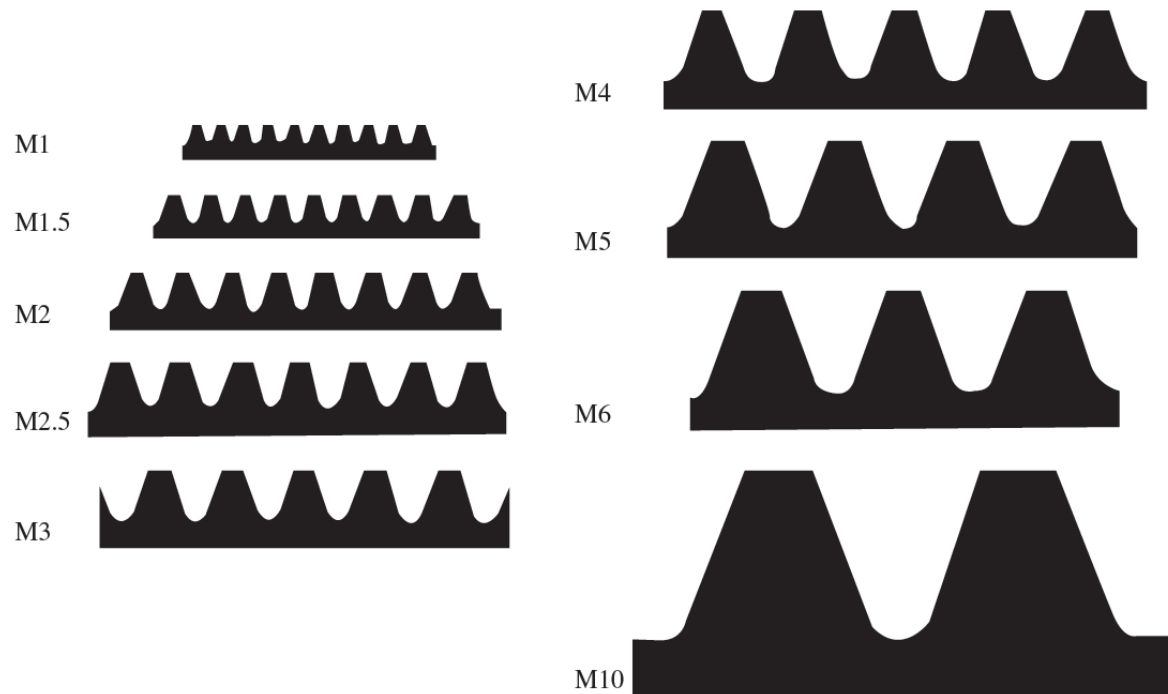
Tamanho do dente em função do passo diametral





3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

- Seleção de módulos métricos padronizados em forma de cremalheira – tamanho real



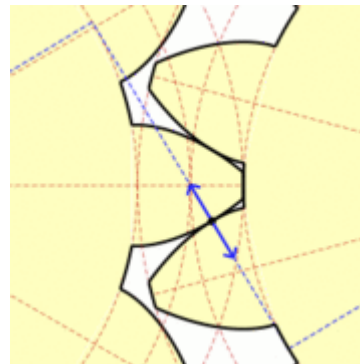
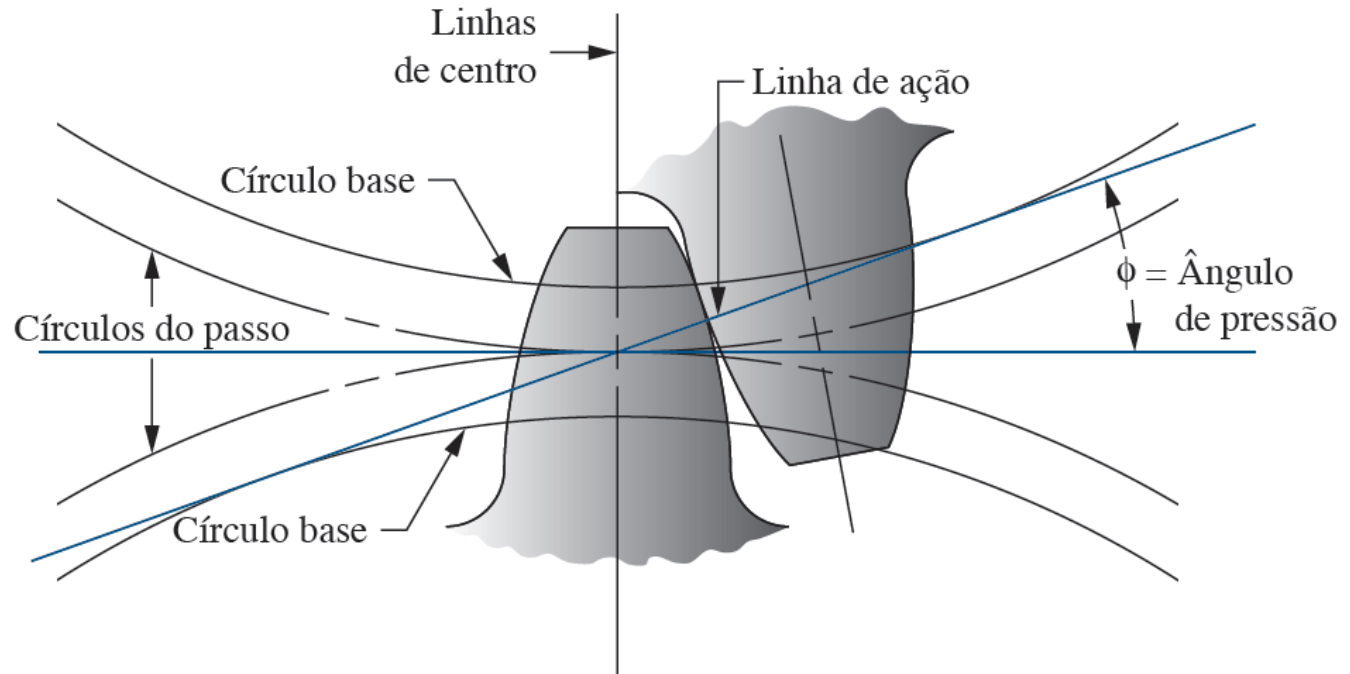
3.0 – Características da engrenagem e dos dentes, diâmetros e distância entre centros para um par engrenado

▼ TABELA 8.1

Passos	Símbolo	Definição	Unidade típica	Fórmula geral	Fórmulas		
					Sistema norte-americano de involuta de profundidade total		Sistema de módulo métrico (mm)
					Passo largo $P_d < 20$ (pol)	Passo fino $P_d \geq 20$ (pol)	
Número de dentes	N	Contagem em números inteiros dos dentes de uma engrenagem					
Passo circular	p	Distância de arco entre pontos correspondentes nos dentes adjacentes	pol ou mm	$p = \pi D/N$	$p = \pi/P_d$		$p = \pi m$
Passo diametral	P_d	Número de dentes por polegada de diâmetro de passo	pol ⁻¹	$P_d = N/D$	$P_d = 25,4/m$		
Módulo	m	Diâmetro de passo dividido pelo número de dentes	mm	$m = D/N$			$m = 25,4/P_d$
Diâmetros							
Diâmetro de passo	D	Diâmetro cinemático característico para uma engrenagem; Diâmetro do círculo de passo	pol ou mm		$D = N/P_d$		$D = mN$
Diâmetro externo	D_o	Diâmetro para a superfície externa dos dentes da engrenagem	pol ou mm		$D_o = (N + 2)/P_d$		$D_o = m(N+2)$
Diâmetro da raiz	D_R	Diâmetro para o círculo de raiz da engrenagem na base dos dentes	pol ou mm	$D_R = D - 2b$			
Características do dente da engrenagem							
Adendo	a	Distância radial do círculo do passo até o lado externo do dente	pol ou mm		$a = 1,00/P_d$		$a = 1,00m$
Dedendo	b	Distância radial do círculo do passo até a parte inferior do dente	pol ou mm		$b = 1,25/P_d$	$b = 1,20/P_d + 0,002$	$b = 1,25m^1$
Folga	c	Distância radial do topo dos dentes em malha da engrenagem conjugada até a parte inferior do espaço do dente	pol ou mm		$c = 0,25/P_d$	$c = 0,20/P_d + 0,002$	$c = 0,25m^1$
Profundidade total	h_t	Distância radial do topo de um dente até a parte inferior do espaço do dente	pol ou mm	$h_t = a + b$	$h_t = 2,25/P_d$	$h_t = 2,20m + 0,002$	$h_t = 2,25m^1$
Profundidade útil	h_k	Distância radial que um dente projeta no espaço do dente da engrenagem conjugada	pol ou mm	$h_k = a + a = 2a$	$h_k = 2,00/P_d$	$h_k = 2,00/P_d$	$h_k = 2,00m^1$
Espessura do dente	t	Distância de arco teórica igual a 1/2 do passo circular	pol ou mm	$t = p/2$	$t = \pi/2P_d$		$t = \pi m/2$
Largura de face	F	Largura do dente paralelo ao eixo da engrenagem	pol ou mm	Decisão de projeto	Aproximadamente $12/P_d$		
Ângulo de pressão	ϕ	Ângulo entre a tangente ao círculo do passo e a perpendicular à superfície do dente	graus	Decisão de projeto	Valor mais comum = 20° Outros: 14 1/2°, 25°		
Distância de centro	C	Distância entre as linhas de centro de engrenagens conjugadas	pol ou mm	$C = (D_p + D_g)/2$	$C = (N_p + N_g)/2P_d$		$C = m(N_p + N_g)/2$

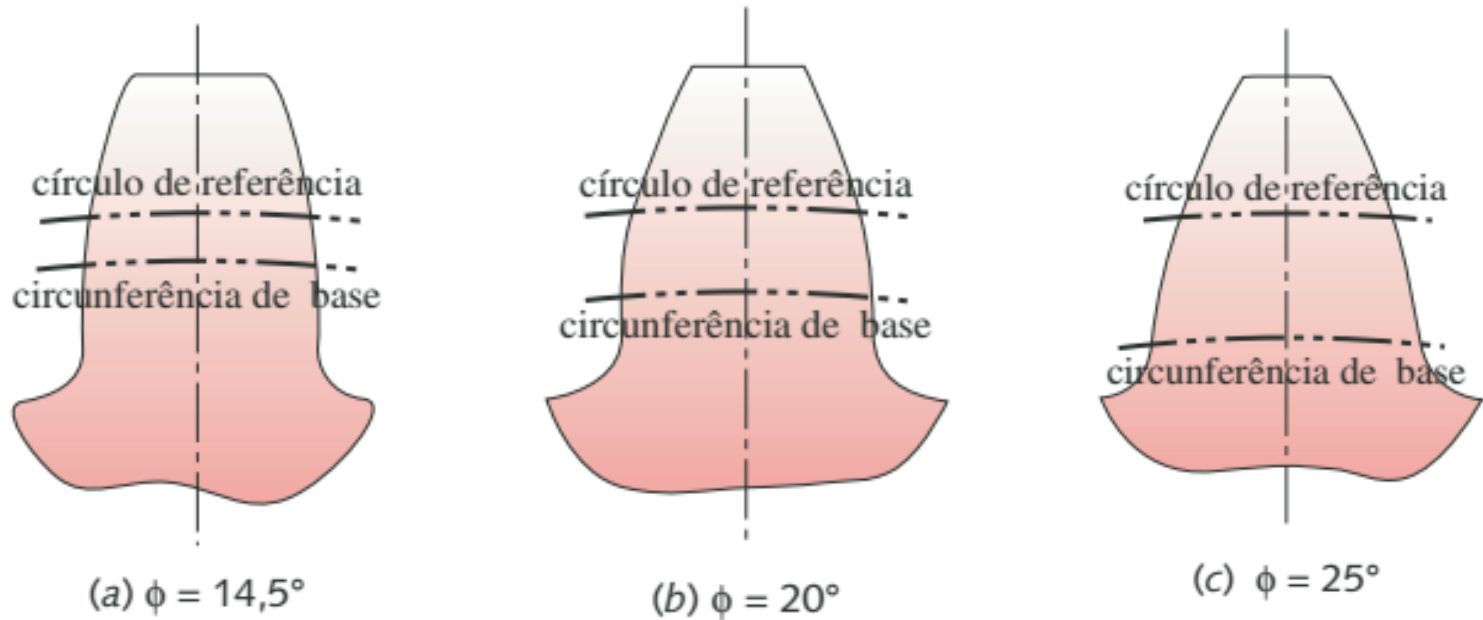
3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

- Ângulo de pressão é o ângulo entre a tangente ao círculo do passo e a linha normal (perpendicular) à superfície do dente da engrenagem



3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

- Forma do dente involuta e de profundidade total para diferentes ângulos de pressão



3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

- A razão de contato é definida como a razão entre o comprimento da linha de ação e o passo base para a engrenagem

$$m_f = \frac{\sqrt{R_{oP}^2 - R_{bP}^2} + \sqrt{R_{oG}^2 - R_{bG}^2} - C \sin \phi}{p \cos \phi}$$

	Fatores	Sistema de passo diametral	Sistema de módulo métrico
ϕ	Ângulo de pressão		
R_{oP}	Raio externo — pinhão	$(N_p + 2)/(2P_d)$	$m(N_p + 2)/2$
R_{bP}	Raio do círculo base — pinhão	$(N_p/2P_d) \cos \phi$	$(mN_p/2) \cos \phi$
R_{oG}	Raio externo — engrenagem	$(N_G + 2)/(2P_d)$	$m(N_G + 2)/2$
R_{bG}	Raio do círculo base — engrenagem	$(N_G/2P_d) \cos \phi$	$(mN_G/2) \cos \phi$
C	Distância de centro	$(N_p + N_G)/(2P_d)$	$m(N_p + N_G)/(2P_d)$
p	Passo circular	π/P_d	π/P_d





3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

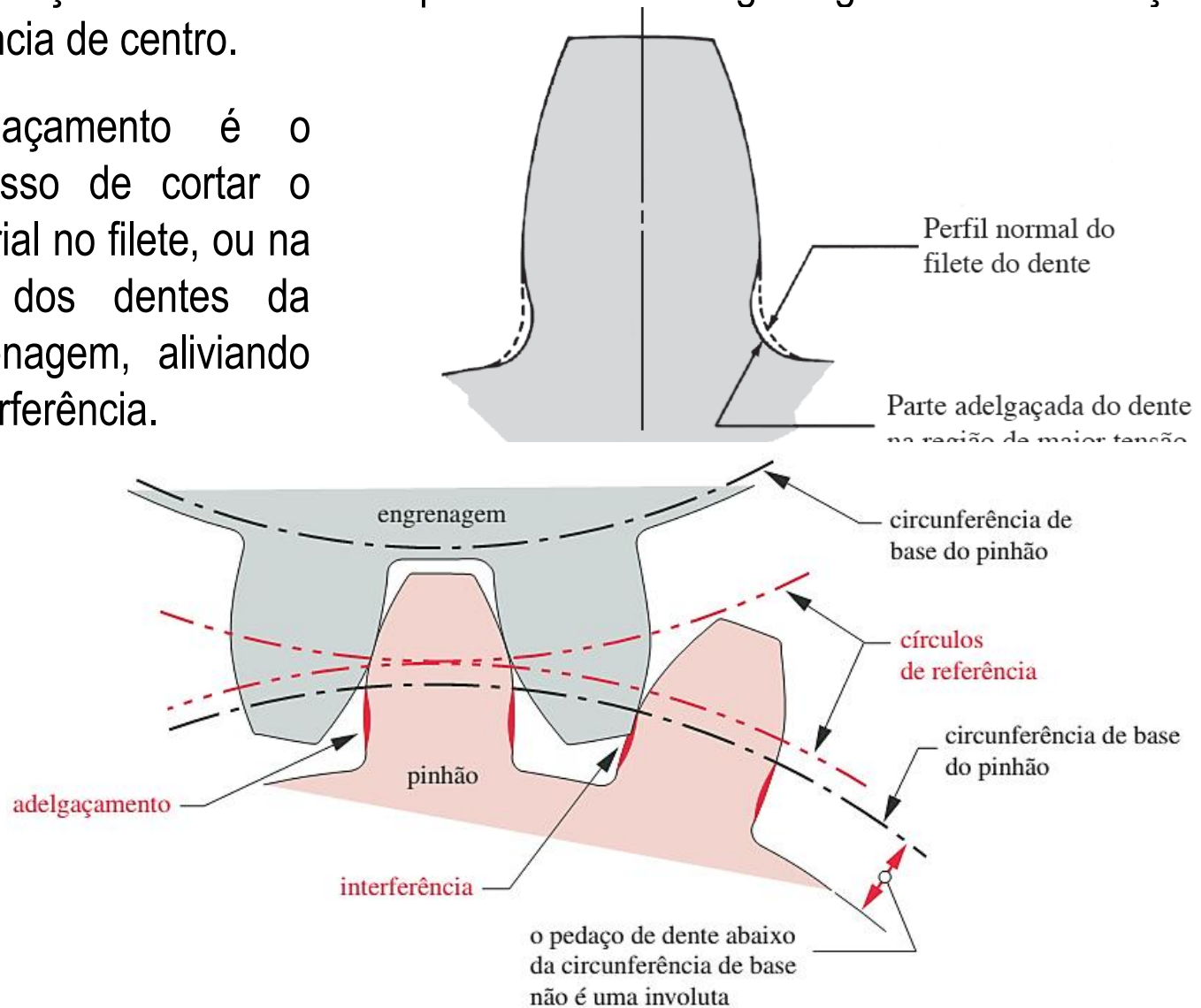
- Para certas combinações de números de dentes em um par de engrenagens, há interferência entre a ponta dos dentes do pinhão e o filete, ou a raiz, dos dentes da engrenagem.

Para um pinhão em malha com uma cremalheira		Para um pinhão de 20° e profundidade total em malha com uma engrenagem		
Forma do dente	Número mínimo de dentes	Número de dentes no pinhão	Número máximo de dentes na engrenagem	Razão máxima
invóluto, de 14 ½° e profundidade total	32	17	1309	77,00
invóluto, de 20° e profundidade total	18	16	101	6,31
invóluto, de 25° e profundidade total	12	15	45	3,00
		14	26	1,85
		13	16	1,23

Número de dentes no pinhão para garantir a ausência de interferência

3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

- Para superar a interferência, o projetista pode proporcionar adelgaçamento, modificação do adendo no pinhão ou na engrenagem ou modificação da distância de centro.
- Adelgaçamento é o processo de cortar o material no filete, ou na raiz, dos dentes da engrenagem, aliviando a interferência.



3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

- Dimensionamento de engrenagens de dentes retos.

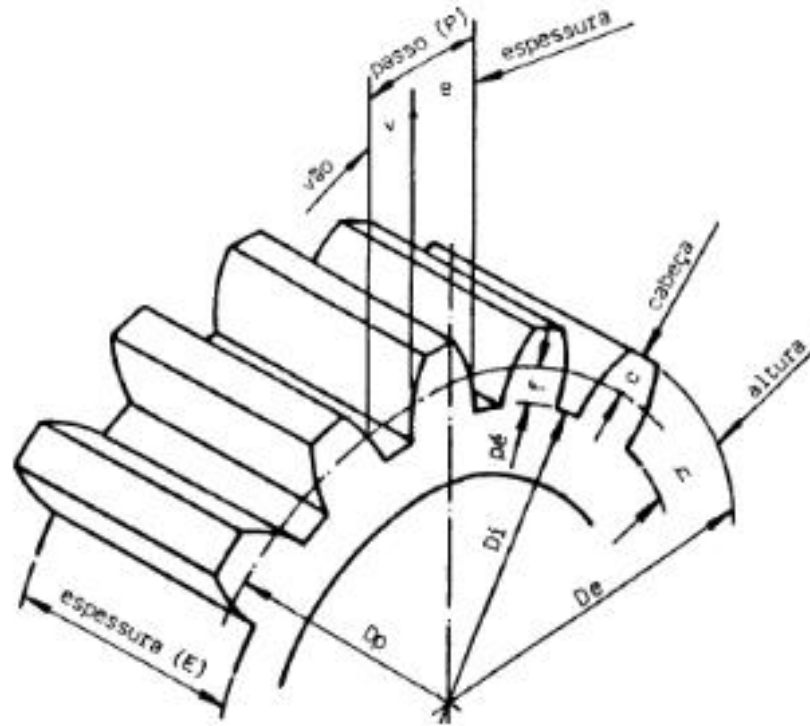
Para calcular/dimensionar uma engrenagem de dentes reto são necessários três dados:

1. O **módulo (m)**: é a relação entre o diâmetro primitivo e o número de dentes de uma engrenagem. O módulo é a base do dimensionamento de engrenagens no sistema internacional, duas engrenagens acopladas possuem o mesmo módulo e ele deve ser expresso em milímetros;
2. Número de dentes (**Z**): é basicamente a relação de redução/transmissão do engrenamento;
3. Ângulo de pressão (ϕ): é o ângulo que define a direção da força que a engrenagem motora exerce sobre a engrenagem movida. As engrenagens são fabricadas atualmente com ângulos de pressão padronizados para diminuir o custo no processo de fabricação, os ângulos de pressão são 14.5° , 20° e 25° , sendo o mais usado 20° .



3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

- Dimensionamento de engrenagens de dentes retos.



Principais dimensões de uma engrenagem cilíndrica dentes retos
(extraído de <http://gruporedraw.blogspot.com/2015/09/engrenagem-cilindrica-de-dentes-retos.html>)



3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

- Dimensionamento de engrenagens de dentes retos.

Diâmetro primitivo (D_p): é a base do dimensionamento das engrenagens e seu diâmetro caracteriza a engrenagem. As rodas conjugadas usualmente têm seus círculos primitivos tangentes.

$$D_p = m * Z$$

Diâmetro externo (D_e): limita as extremidades externas dos dentes.

$$D_e = m * (Z + 2)$$

Diâmetro interno (D_i): é o círculo que passa pelo fundo dos vãos entre os dentes.

$$D_i = m * (Z - 2,334)$$

Diâmetro base (D_b): circunferência, da qual se desenrola um fio cuja extremidade descreve a curva evolvente. Seu valor é necessário para o controle gráfico da curva.

$$D_b = D_p * \cos \Theta$$



3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

Passo (P): é a distância de um ponto de um dente até o ponto correspondente no próximo dente medido ao longo da circunferência primitiva.

$$P = m * \pi$$

Espessura circular do dente e vão (S/V): é a espessura do dente e a espessura do vão medida ao longo do diâmetro primitivo, ou seja, é o passo dividido por dois.:

$$S = V = P / 2$$

Altura da cabeça do dente (adendo - a): é a distância radial entre as circunferências externa e primitiva

$$a = m$$

Altura do pé do dente (dedendo – b): é a distância entre o diâmetro primitivo e o interno.

$$b = 1,167 * m$$

Altura do dente (h): é a altura total do dente, a distância entre o diâmetro externo e o interno.

$$h = a + b$$



3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

Folga no pé do dente (e): a distância radial entre a circunferência de truncamento e o diâmetro interno, ou seja, é a folga que existe entre o diâmetro externo e o diâmetro interno de duas engrenagens acopladas.

$$e = 0,167 * m$$

Raio do pé do dente (R_p): o raio do pé do dente é algo que poucas apostilas trazem uma fórmula, ele apenas tem um mínimo e um máximo, permitindo escolher qualquer um entre eles, porém é recomendável usar um valor médio entre os dois.

$$\text{Máximo: } R_p = 0,3 * m$$

$$\text{Mínimo: } R_p = S / 6$$

Raio maior do dente (r): é o raio maior do perfil do dente, o gráfico da curva do dente.

$$r = m * f$$

Raio menor do dente (r^1): é o raio menor do perfil do dente, o gráfico da curva do dente.

$$r^1 = m * f^1$$





3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

O raio maior do dente e o raio menor do dente juntos formão o perfil do dente da engrenagem, chamado de envolvente. f e f' são constantes tiradas do ODONTÓGRAFO DE GRANT com base no número de dentes.

Nº DE DENTES	COEFICIENTES	
Z	f	f'
8	2,10	0,45
10	2,28	0,69
11	2,40	0,83
12	2,51	0,96
13	2,62	1,09
14	2,72	1,22
15	2,82	1,34
16	2,92	1,46
17	3,02	1,58
18	3,12	1,69
19	3,22	1,79
20	3,32	1,89
21	3,41	1,98
22	3,49	2,06
23	3,57	2,15
24	3,64	2,24
25	3,71	2,33
26	3,78	2,42
27	3,85	2,50
28	3,92	2,59
29	3,99	2,67
30	4,06	2,76
32	4,20	2,93
33	4,27	3,01
34	4,33	3,09
35	4,39	3,16
36	4,45	3,23
37-40	4,20	
41-45	4,63	
46-51	5,06	
52-60	5,74	
61-70	6,52	
71-90	7,72	
91-120	7,78	
121-180	13,38	
181-360	21,62	

3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

Comprimento do dente (L): é a distância entre as faces laterais dos dentes, medida paralelamente ao eixo da engrenagem. Segundo a ABNT, a medida do comprimento dos dentes oscila de 6 a $10 * m$. É usual trabalhar com a média: 8 m.

$$L = 8 * m$$

Distância entre eixos (C) : é a distância entre eixos, determina exatamente o contato dos diâmetros primitivos entre duas engrenagens acopladas.

$$C = (Dp^1 + Dp^2) / 2$$



3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

Resumo das fórmulas para cálculo de engrenagens

DENTES RETOS			
ENCONTRAR	SÍMBOLO	CONHECENDO	FÓRMULA
MÓDULO	M	O Passo	$M = P / \pi$
		O Diâmetro Primitivo (Dp) e o Nr. de Dentes (Z)	$M = Dp / Z$
		O Diâmetro Externo (DE) e o Nr. de Dentes (Z)	$M = DE / (Z+2)$
DIÂMETRO PRIMITIVO	Dp	O Módulo (M) e o Nr. de Dentes (Z)	$Dp = M * Z$
		O Módulo (M) e o Diâmetro Externo (DE)	$Dp = DE - (2*M)$
PASSO	Pr	O Módulo (M)	$Pr = M * \pi$
		A Espessura (S)	$Pr = 2 * S$
DIÂMETRO EXTERNO	DE	O Módulo (M) e o Diâmetro Primitivo (Dp)	$DE = Dp + (2*M)$
		O Módulo (M) e o Nr. de Dentes (Z)	$DE = M * (Z+2)$
DIÂMETRO INTERNO	DI	O Diâmetro Primitivo (Dp) e o Módulo (M)	$DI = Dp - (2,166*M)$
NR. DENTES	Z	O Diâmetro Primitivo (Dp) e o Módulo (M)	$Z = Dp / M$
ALTURA*	h	O Módulo (M)	$h = 2,166 * M$
ESPESSURA DO DENTE	S	O Passo (Pr)	$S = Pr / 2$
		O Módulo (M)	$S = 1,57 * M$
DISTÂNCIA ENTRE OS FLANCOS	C	O Módulo (M) e o Nr. de Dentes (Z)	$C = [M*(Z1+Z2)] / 2$
		O Diâmetro Primitivo (Dp)	$C = (Dp1 + Dp2) / 2$
ESPESSURA DA ENGRENAGEM	b	O Módulo (M)	$b = \text{de } 6 \text{ a } 10*M$
CABEÇA	c	O Módulo (M)	$c = M$
FUNDO	f	O Módulo (M)	$f = 1,166 * M$

* A altura (h) total dos vãos dos dentes das frezas módulo com $\beta = 20^\circ$ de ângulo de pressão é determinada da seguinte maneira:

1. Através da ABNT e DIN: $h = 2,166 * M$
2. Através da ASA (USA): $h = 2,157 * M$
3. Através da ISO (UNE 10.016): $20^\circ : h = 2,25 * M$
 $15^\circ : h = 2,166 * M$





3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

Exercício 1:

Fazer o dimensionamento completo para as seguintes engrenagens:

Módulo (m) = 8;

Ângulo de pressão (ϕ) = 20° ;

Número de dentes: $Z_1 = 11$ e $Z_2 = 17$;

Exercício 2:

Com os dados do exercício 1, calcular:

Distância entre eixos e folga entre os engrenamentos.

3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

Resposta dos exercícios 1 e 2.

```
Módulo .....= 8.0
Num. de dentes .....: z1 = 11.0 z2 = 17.0
Angulo pressão (alfa).....= 20
Diâmetro primitivo .....: Dp1 = 88.0000 Dp2 = 136.0000
Diâmetro externo (De).....: De1 = 104.0000 De2 = 152.0000
Diâmetro interno (Di).....: Di1 = 69.3280 Di2 = 117.3280
Diâmetro de base (Db).....= Db1 = 82.6930 Db2 = 127.7982
Passo (P).....= 25.1327
Espessura circular(S).....= 12.5664
Altura da cabeça/dente (a).= 8.0000
Altura do pe do dente (b)..= 9.3360
Altura do dente (h).....= 17.3360
Folga no pe do dente (e)...= 1.3360
Raio do pe do dente (Rp)...= 2.2472
Raio maior do dente (r)....= rmaior1 = 19.2000 rmaior2 = 24.1600
Raio menor do dente (r1)...= rmenor1 = 6.6400 rmenor2 = 12.6400
-----
Distancia entre centros .....= 112.0000
Folga Diam ext. z1 e Diam int. z2 = 1.3360
```



3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

Resposta dos exercícios 1 e 2 (calculado pelo software khkgears)

Spur • helical gear Calculation of profile shifted gear (Normal plane method)

2019/04/09

Normal module	8	
Normal pressure angle	20° 0' 0"	
Helix angle	0° 0' 0"	
【 Transverse module 】	8	
【 Transverse pressure angle 】	20° 0' 0"	
	Small gear	Large gear
Number of teeth	11	17
Normal tooth profile shift coefficient	0	0
Sum of Normal tooth profile shift coefficient	0	
Transverse contacting pressure angle	20° 0' 0"	
Center distance modification coefficient	0	
Center distance	112	
Pitch circle diameter	88	136
Contacting pitch circle diameter	88	136
Addendum	8	8
Dedendum	9.336	9.336
Tooth height	17.336	17.336
Clearance	1.336	1.336
Base circle diameter	82.69295	127.7982
Tip diameter	104	152
Root diameter	69.328	117.328
Start of contact diameter	82.88296	128.51369
Lead	0	0
Transverse contact ratio	< 1.21652 >	
Tooth thickness perpendicular to tooth	12.56637	12.56637
Transverse tooth thickness	12.56637	12.56637
Transverse tip circle tooth thickness	4.84448	5.39263
Chordal tooth thickness	12.52371	12.5485
Chordal height	8.44786	8.29008
Span number of teeth	2	2
Base tangent	36.65806	37.33033
Ideal pin (ball) diameter	14.20802	13.87914
Pin (ball) diameter used	14.20802	13.87914
Over pin measurement	107.06745	154.62609

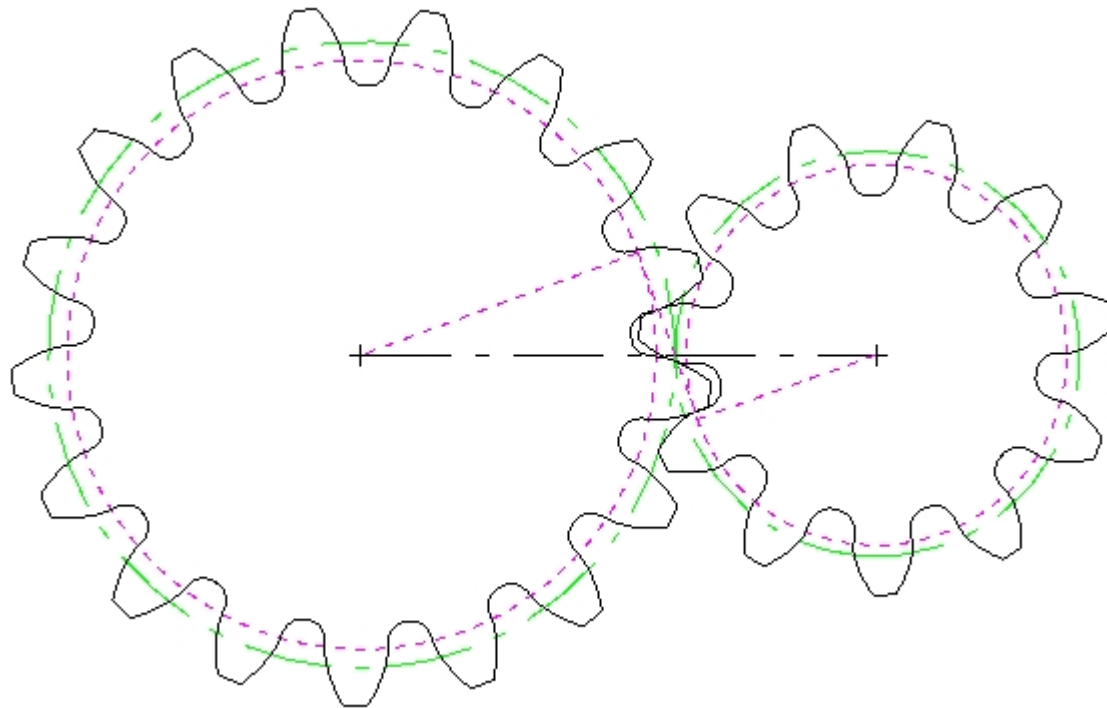
KHK GCSW





3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

Resposta dos exercícios 1 e 2 (simulação do engrenamento pelo software khkgears)





3.0 – Nomenclatura da engrenagem de dentes retos

Animação do movimento de engrenamento





3.0 – Geometria da engrenagem helicoidal

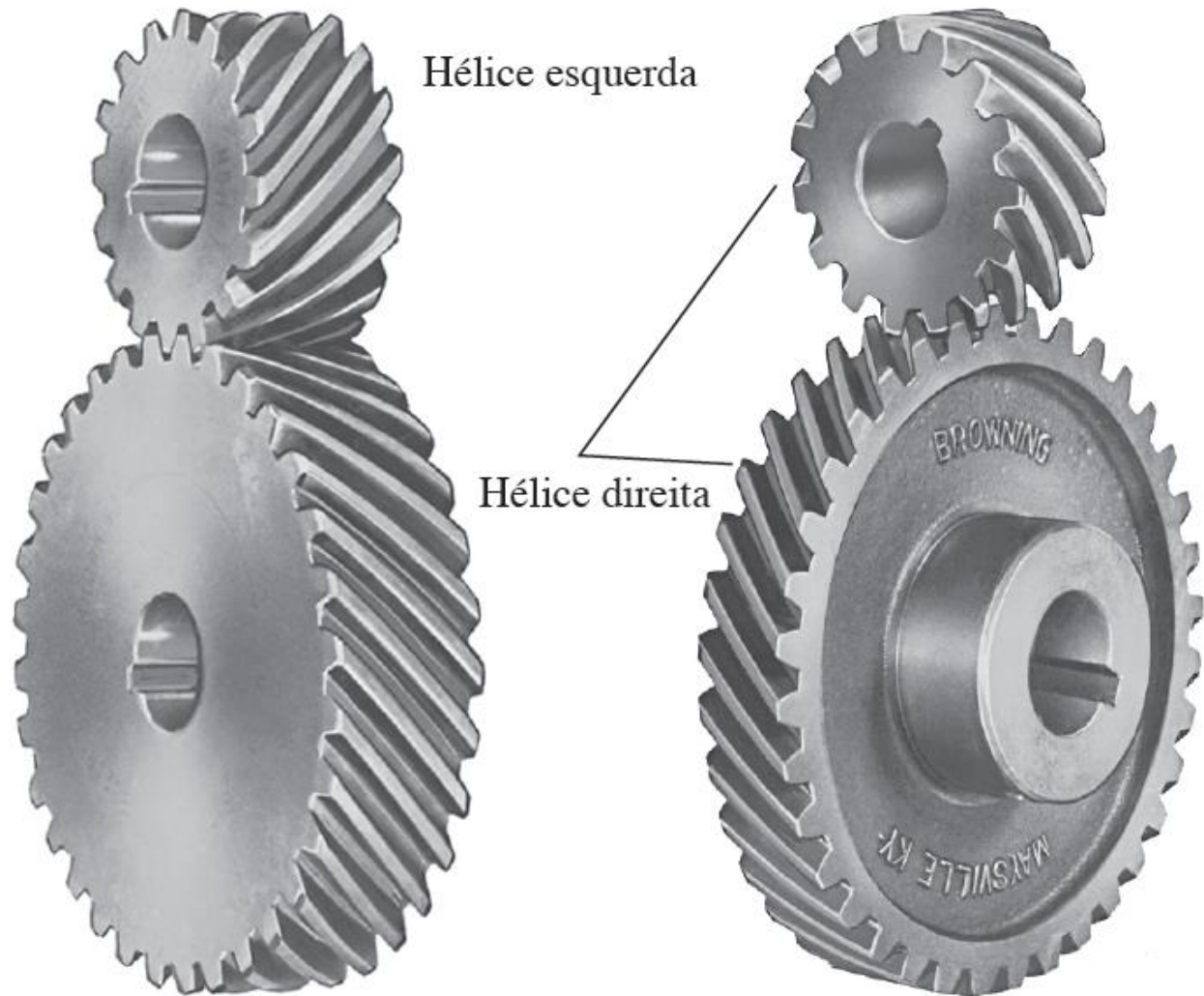
Engrenagens helicoidais e de dentes retos são distinguidas pela orientação dos dentes.

Em **engrenagens de dentes retos**, os dentes são retos e alinhados com o eixo da engrenagem.

Em **engrenagens helicoidais**, os dentes são inclinados a um ângulo em relação ao eixo, sendo esse ângulo chamado de ângulo de hélice.

3.0 – Geometria da engrenagem helicoidal

Engrenagens helicoidais. Estas engrenagens têm um ângulo de hélice de 45° :



(a) Engrenagens helicoidais
com eixos paralelos

(b) Engrenagens helicoidais
cruzadas, eixos perpendiculares





3.0 – Geometria da engrenagem cônica

Engrenagens cônicas são utilizadas para transferir movimento entre eixos não paralelos, geralmente a 90° um do outro.

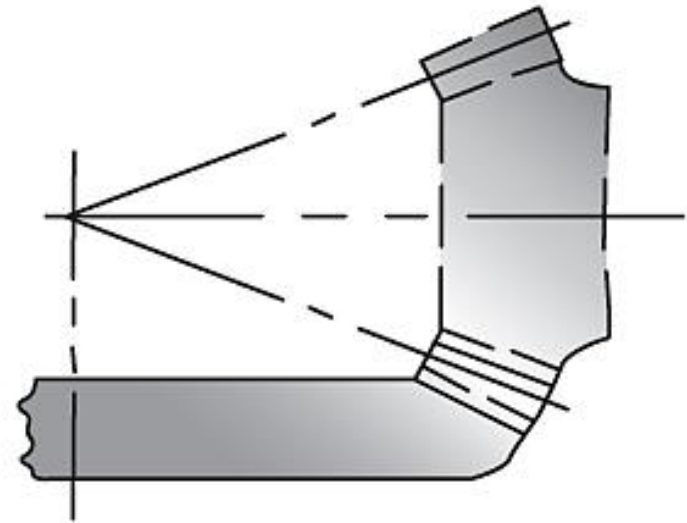
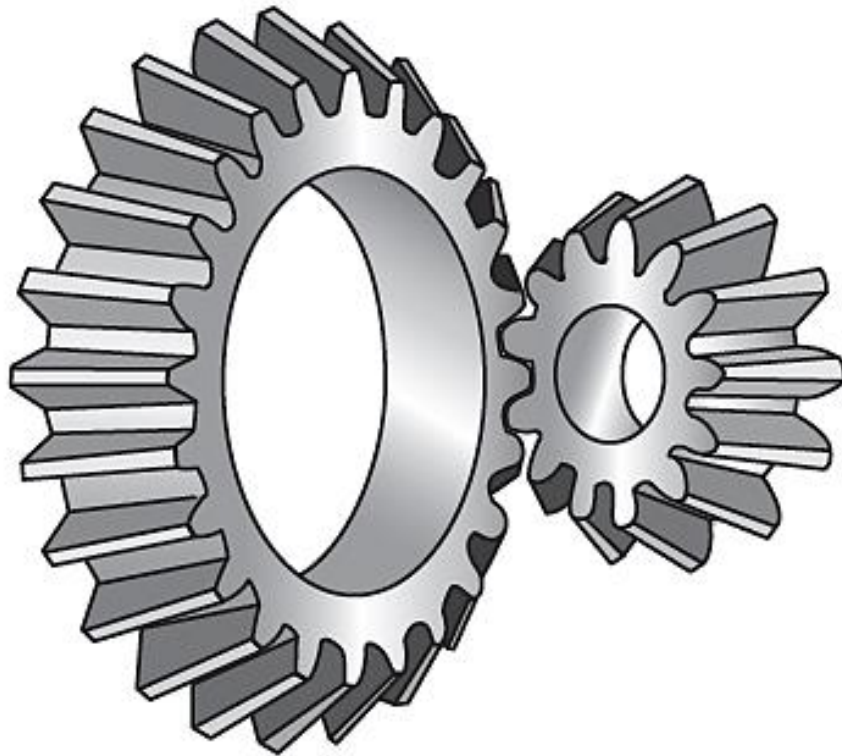
Os quatro tipos principais de engrenagens cônicas são:

1. cônicas retas;
2. cônicas espirais;
3. cônicas com ângulo de espiral zero;
4. hipoides



3.0 – Geometria da engrenagem cônica

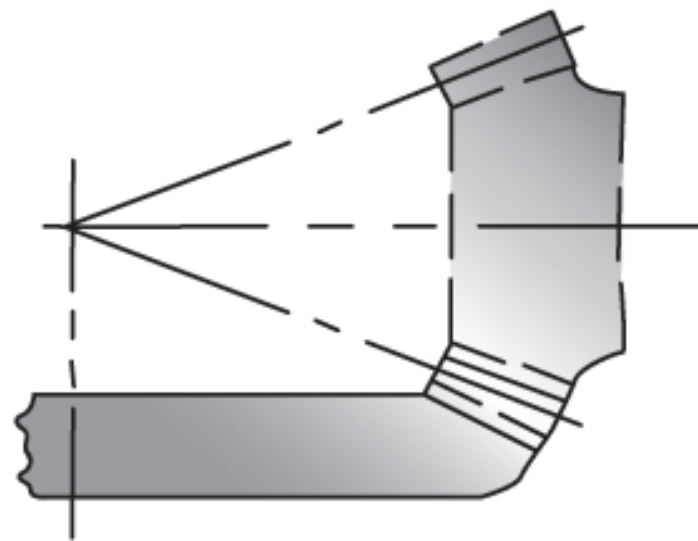
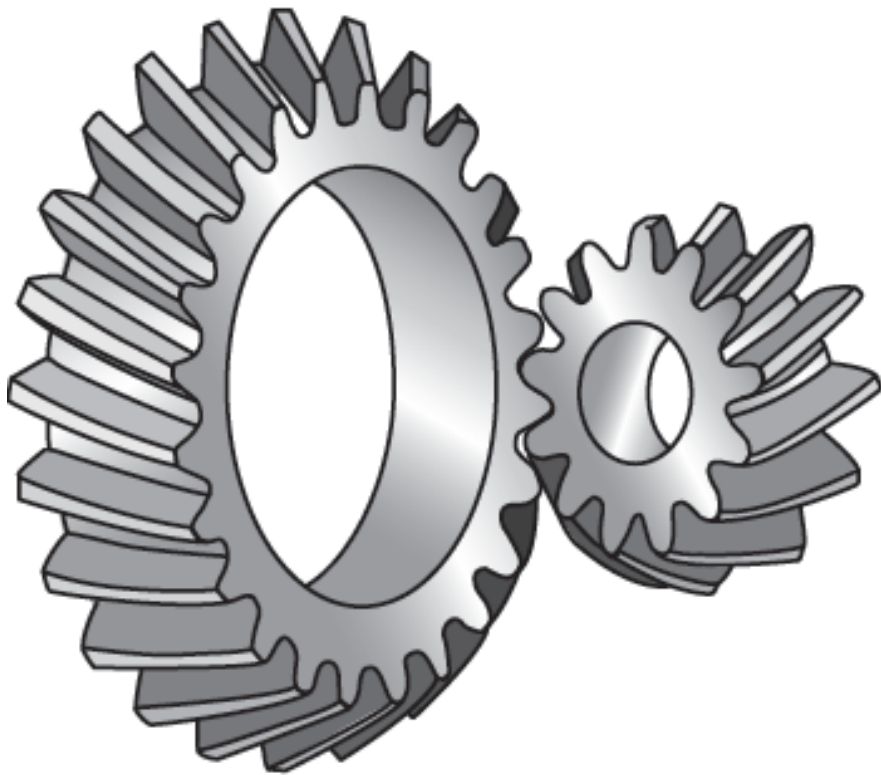
Tipos de engrenagens cônicas:



(a) Cônica reta

3.0 – Geometria da engrenagem cônica

Tipos de engrenagens cônicas:

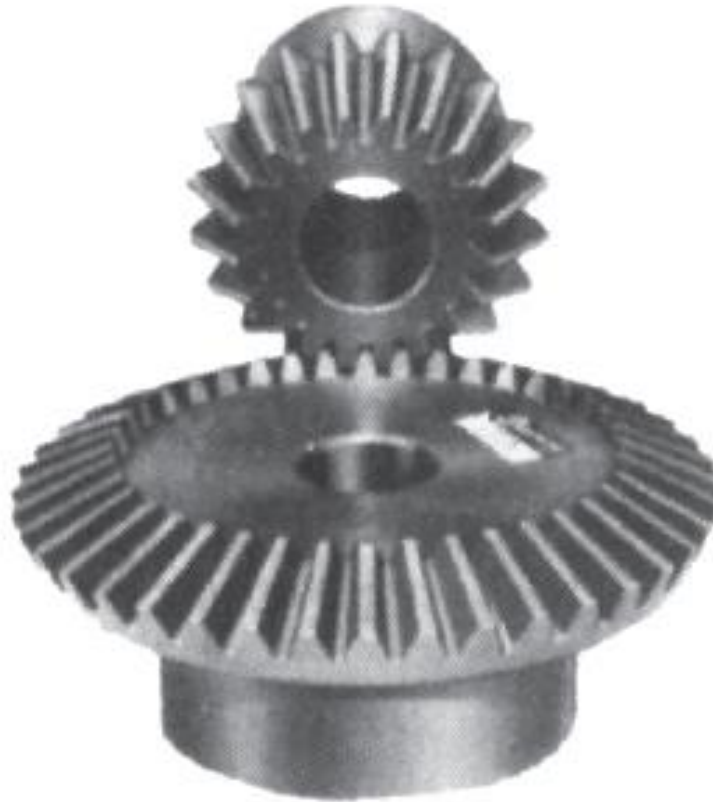


(b) Cônica espiral



3.0 – Geometria da engrenagem cônica

Tipos de engrenagens cônicas:

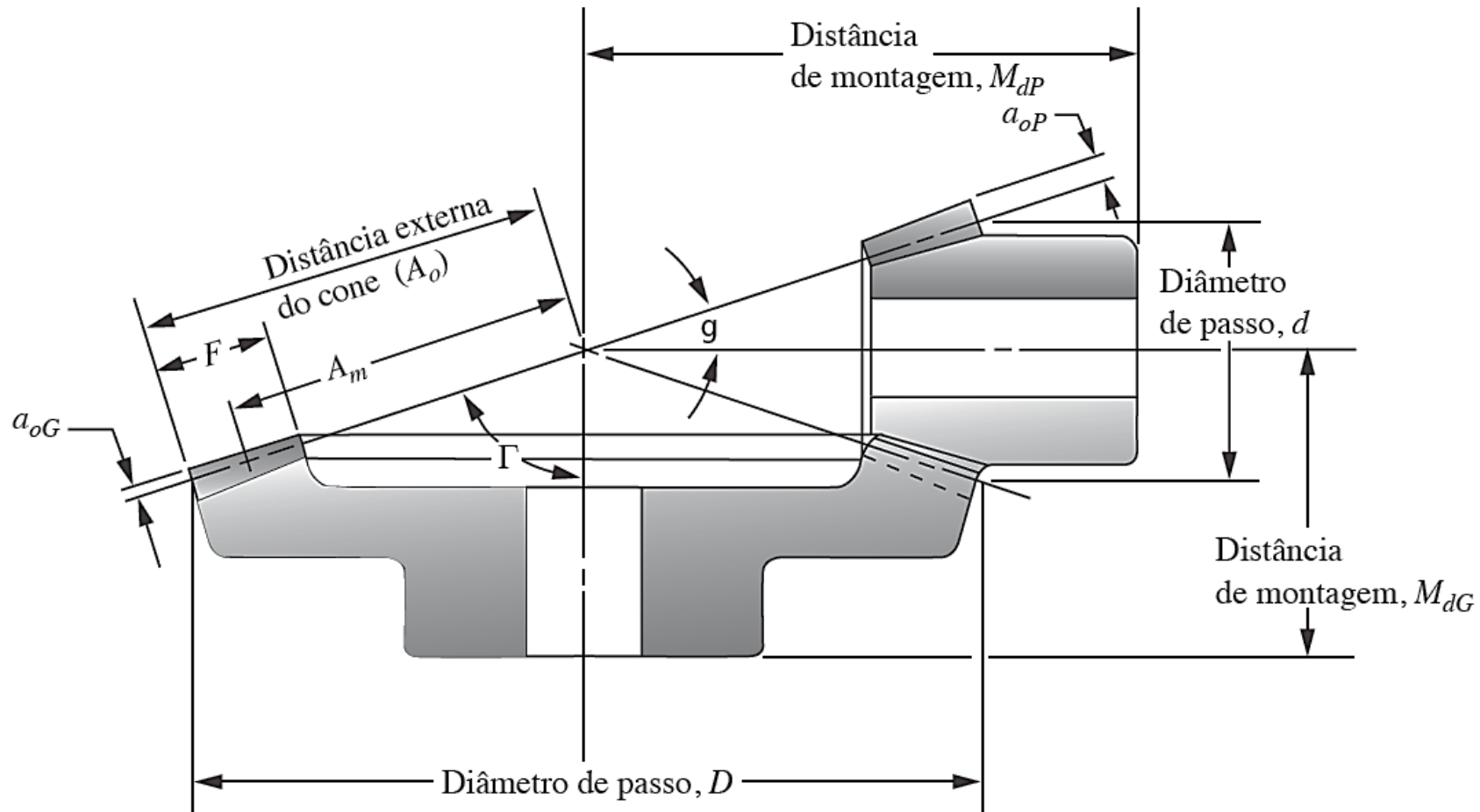


(e) Foto de um par de engrenagens cônicas retas



3.0 – Geometria da engrenagem cônica

Tipos de engrenagens cônicas:



(f) Dimensões básicas de um par de engrenagens cônicas retas



3.0 – Tipos de engrenamento sem-fim

O **engrenamento sem-fim** é utilizado para transmitir movimento e potência entre eixos que não se cruzam, geralmente a 90° .

A transmissão consiste de um sem-fim sobre um eixo em alta velocidade com o aspecto geral de uma rosca de parafuso de potência — uma rosca cilíndrica, helicoidal.

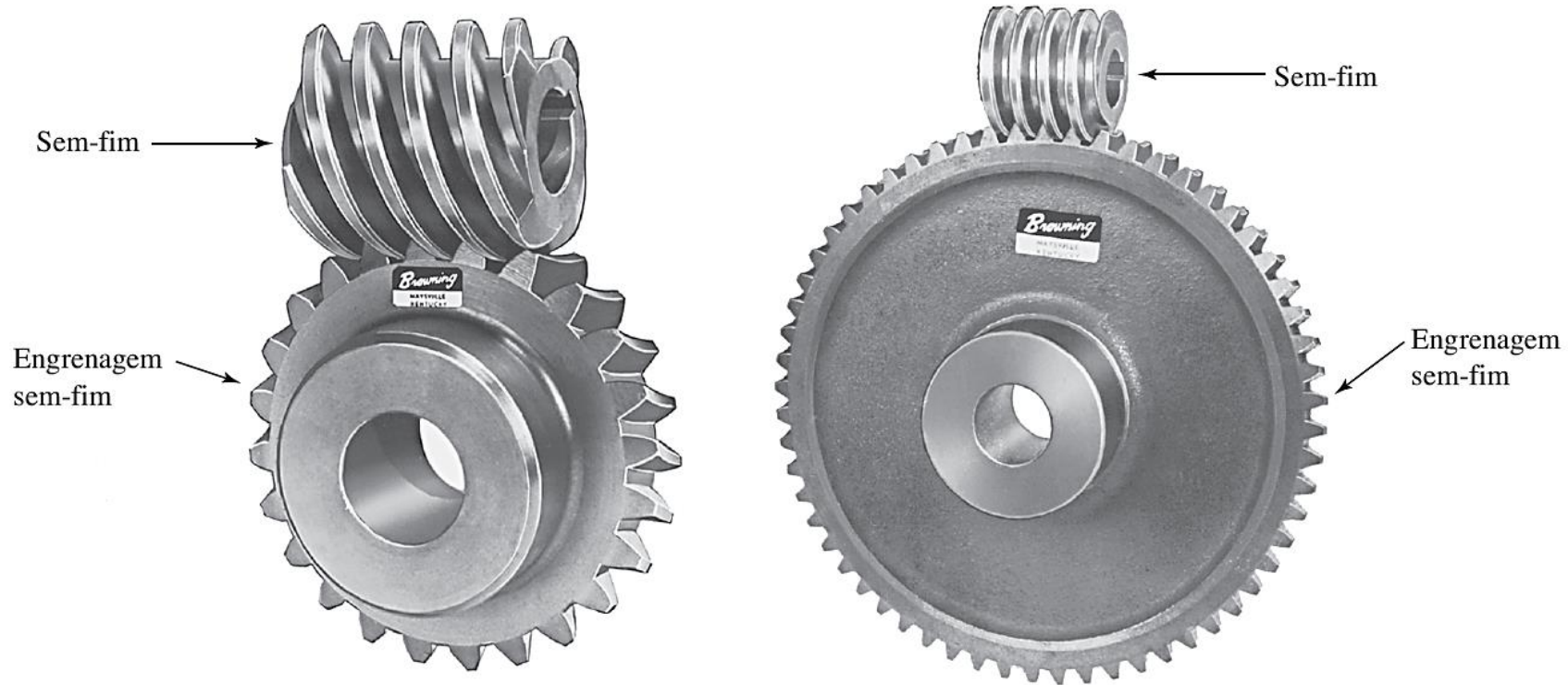
O sem-fim aciona uma engrenagem sem-fim, que tem aparência semelhante à de uma engrenagem helicoidal.





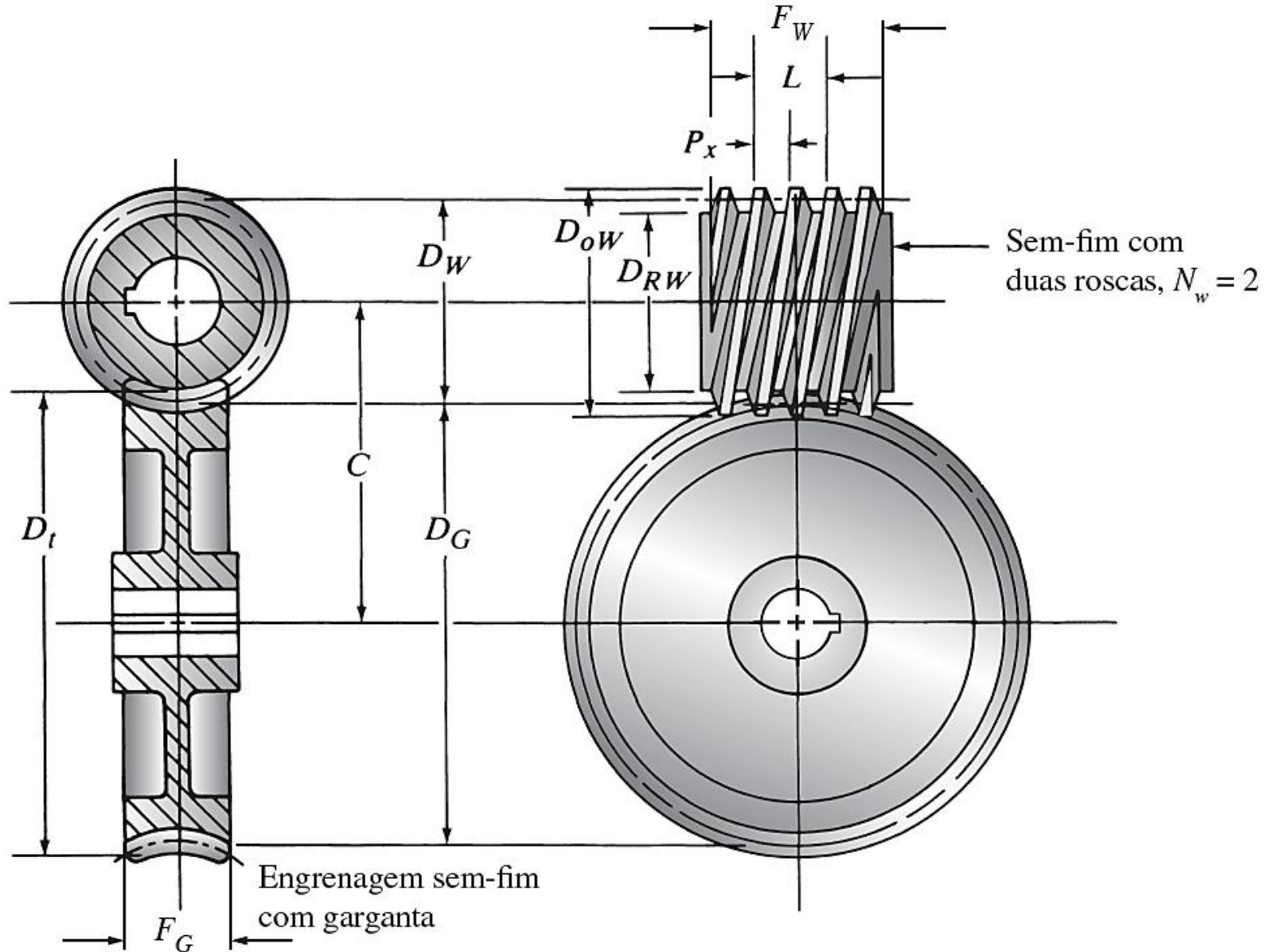
3.0 – Tipos de engrenamento sem-fim

Sem-fim e engrenagens sem-fim:



3.0 – Tipos de engrenamento sem-fim

Conjunto de engrenagem sem-fim de envelopes simples:



3.0 – Tipos de engrenamento sem-fim

Vista em corte de um redutor de engrenagem sem-fim:



Suporte para motor
elétrico modelo C

Eixo de entrada com
acoplamento para o eixo
do motor elétrico

Rolamento

Engrenagem
sem-fim

Sem-fim

Eixo de saída

Carcaça

Rolamentos



3.0 – Razão de velocidade angular e trens de engrenagem

Um **trem de engrenagens** é um ou mais pares de engrenagens que operam em conjunto para transmitir potência.

A **razão de velocidade angular (VR)** é definida como a razão entre a velocidade angular da engrenagem de entrada e a velocidade angular da engrenagem de saída em um único par de engrenagens.

Velocidade na linha primitiva de uma engrenagem:

$$v_t = R\omega$$



3.0 – Razão de velocidade angular e trens de engrenagem

Razão de velocidade angular para o par de engrenagens:

$$VR = \frac{\omega_P}{\omega_G} = \frac{n_P}{n_G} = \frac{R_G}{R_P} = \frac{D_G}{D_P} = \frac{N_G}{N_P} = \frac{\text{velocidade}_P}{\text{velocidade}_G} = \frac{\text{tamanho}_G}{\text{tamanho}_P}$$

Onde P é o pinhão e G a engrenagem acionada

Quando mais de duas engrenagens estão em malha, o termo **razão de engrenamento** (TV) refere-se à razão entre a velocidade de entrada e a velocidade de saída.

Por definição, a razão de engrenamento é o produto dos valores de VR para cada par de engrenagens no trem.



3.0 – Razão de velocidade angular e trens de engrenagem

Um par de engrenagens é qualquer conjunto de duas engrenagens - uma acionadora e outra seguidora (acionada).

$$\begin{aligned} \text{Razão de engrenamento: } TV &= \frac{N_B N_D}{N_A N_C} \\ &= \frac{\text{produto do número de dentes nas engrenagens acionadas}}{\text{produto do número de dentes nas engrenagens acionadoras}} \end{aligned}$$



3.0 – Projeto de trens de engrenagem

Princípios gerais para o projeto de trens de engrenagens:

- ✓ A razão de velocidade angular para qualquer par de engrenagens pode ser calculada de várias formas.
- ✓ O número de dentes em qualquer engrenagem deve ser inteiro.
- ✓ Engrenagens conjugadas devem ter a mesma forma de dente, o mesmo ângulo de pressão e o mesmo passo.
- ✓ Quando engrenagens externas se conjugam, há uma inversão no sentido dos eixos.
- ✓ Quando um pinhão externo se conjuga com uma engrenagem interna, seus eixos giram no mesmo sentido.
- ✓ Uma intermediária é uma engrenagem que opera como elemento acionador e acionado no mesmo trem.
- ✓ Engrenagens de dentes retos e helicoidais operam em eixos paralelos.
- ✓ Engrenagens cônicas e conjuntos de sem-fim/engrenagem sem-fim operam em eixos perpendiculares.



3.0 – Projeto de trens de engrenagem

Princípios gerais para o projeto de trens de engrenagens:

- ✓ O número de dentes no pinhão de um par de engrenagens não deve causar interferência nos dentes da engrenagem conjugada.
- ✓ Em geral, o número de dentes na engrenagem não deve ser maior do que aproximadamente 150.
- ✓ Geralmente, é desejável projetar o trem de engrenagens com o menor número possível de engrenagens.
- ✓ De modo geral, espera-se que o trem de engrenagens seja pequeno, compacto e organizado de modo a facilitar a montagem.
- ✓ É preciso determinar as direções exigidas do acionador para o trem de engrenagens e para o eixo de saída.
- ✓ É desejável que se aplique o conceito de “dente de entrosamento alternado”, descrito anteriormente, em qualquer par de engrenagens.
- ✓ É desejável alocar uma porcentagem mais elevada da razão de engrenamento total aos pares de engrenagens com velocidade mais alta a fim de se obter um projeto geral para o trem mais próximo do ideal.



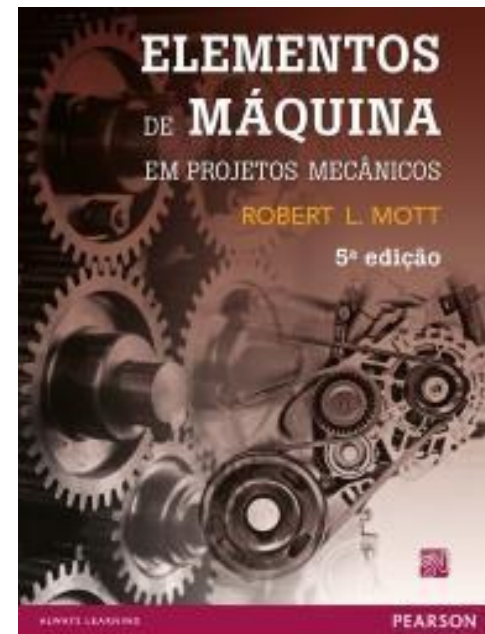
EXERCÍCIOS

**ELEMENTOS
DE MÁQUINA**
EM PROJETOS MECÂNICOS
ROBERT L. MOTT
5ª edição

Site do livro digital

http://uesc.bv3.digitalpages.com.br/users/sign_in

Capítulo 08



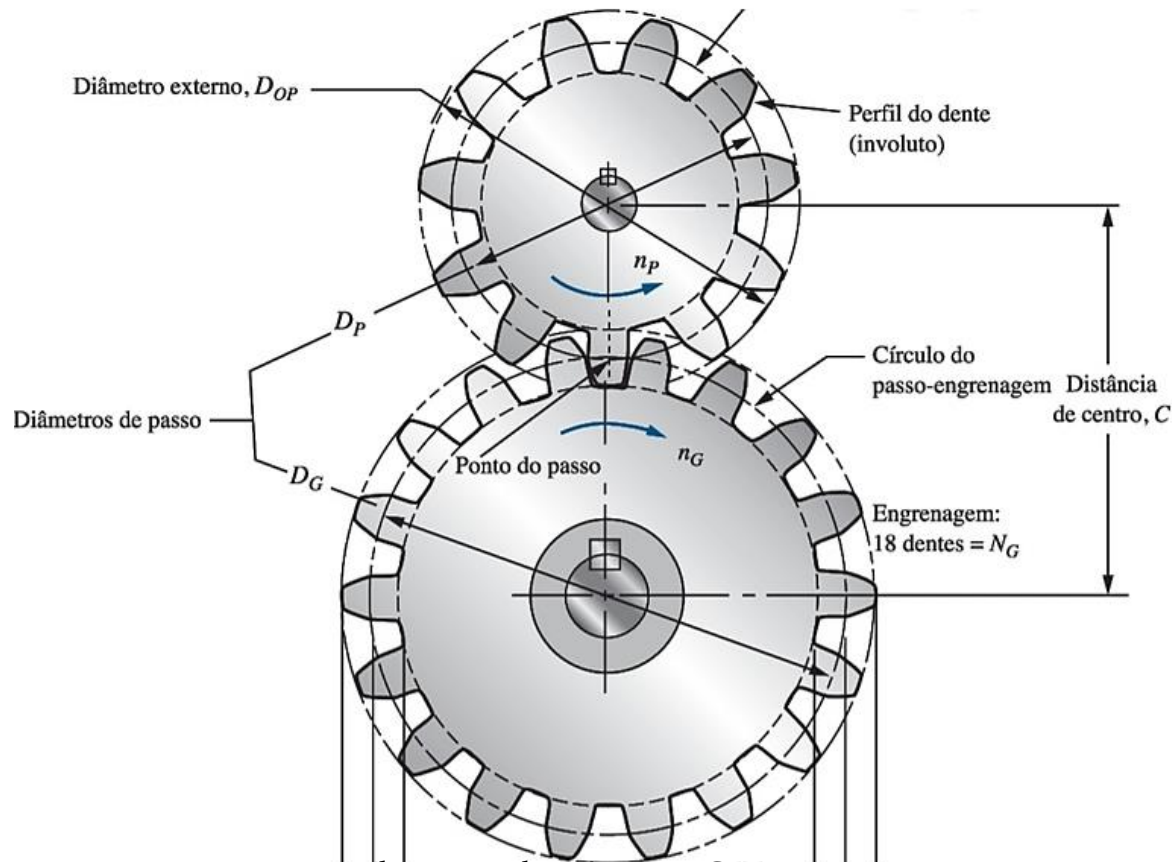
3.0 – Exercícios

EXEMPLO 8.1

Para o par de engrenagens mostrado na Figura 8.1, calcule todas as características dos dentes descritos nesta seção. As engrenagens estão em conformidade com a norma AGMA e têm passo diametral de 12 e ângulo de pressão de 20° .

SOLUÇÃO

$$P_d = 12; N_p = 11; N_G = 18; \phi = 20^\circ$$





Análise	<p>Salvo por indicação, as equações da Tabela 8.1 serão usadas para os cálculos. Consulte o texto desta seção para obter uma explicação sobre os termos.</p> <p><i>Note que os resultados são apresentados com quatro casas decimais, pois esse é o costume para dispositivos mecânicos precisos como engrenagens. Um nível semelhante de precisão é esperado para os problemas deste livro.</i></p>
Resultados	<p><i>Diâmetros de passo</i></p> <p>Para o pinhão,</p> $D_p = N_p/P_d = 11/12 = 0,9167 \text{ pol}$ <p>Para a engrenagem,</p> $D_G = N_G/P_d = 18/12 = 1,5000 \text{ pol}$ <p><i>Passo circular</i></p> <p>Três abordagens diferentes poderiam ser usadas.</p> $p = \pi/P_d = \pi/12 = 0,2618 \text{ pol}$ <p>Observe que os dados do pinhão ou da engrenagem também podem ser usados. Para o pinhão,</p> $p = \pi D_p/N_p = \pi(0,9167 \text{ pol})/11 = 0,2618 \text{ pol}$ <p>Para a engrenagem,</p> $p = \pi D_G/N_G = \pi(1,500 \text{ pol})/18 = 0,2618 \text{ pol}$ <p><i>Adendo</i></p> $a = 1/P_d = 1/12 = 0,8333 \text{ pol}$ <p><i>Dedendo</i></p> <p>Note que a engrenagem de passo 12 é considerada larga. Logo,</p> $b = 1,25/P_d = 1,25/12 = 0,1042 \text{ pol}$



Folga

$$c = 0,25/P_d = 0,25/12 = 0,0208 \text{ pol}$$

Diâmetros externos

Para o pinhão,

$$D_{ep} = (N_p + 2)/P_d = (11 + 2)/12 = 1,0833 \text{ pol}$$

Para a engrenagem,

$$D_{eg} = (N_g + 2)/P_d = (18 + 2)/12 = 1,6667 \text{ pol}$$

Diâmetros da raiz

Primeiro, para o pinhão,

$$D_{rp} = D_p - 2b = 0,9167 \text{ pol} - 2(0,1042 \text{ pol}) = 0,7083 \text{ pol}$$

Para a engrenagem,

$$D_{rg} = D_g - 2b = 1,500 \text{ pol} - 2(0,1042 \text{ pol}) = 1,2917 \text{ pol}$$

Profundidade total

$$h_t = a + b = 0,0833 \text{ pol} + 0,1042 \text{ pol} = 0,1875 \text{ pol}$$

Profundidade útil

$$h_k = 2a = 2(0,0833 \text{ pol}) = 0,1667 \text{ pol}$$

Espessura do dente

$$t = \pi/2P_d = \pi/2(12) = 0,1309 \text{ pol}$$

Distância de centro

$$C = (N_g + N_p)/(2P_d) = (18 + 11)/[2(12)] = 1,2083 \text{ pol}$$

Diâmetro do círculo base

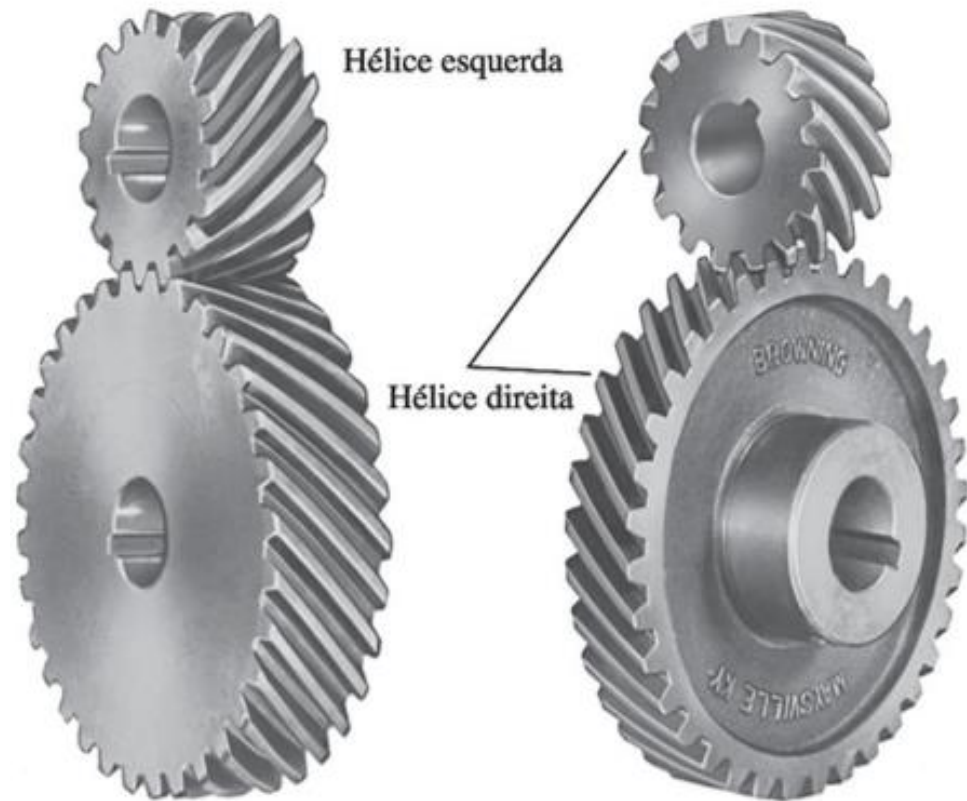
$$D_{bp} = D_p \cos \phi = (0,9167 \text{ pol}) \cos (20^\circ) = 0,8614 \text{ pol}$$

$$D_{bg} = D_g \cos \phi = (1,5000 \text{ pol}) \cos (20^\circ) = 1,4095 \text{ pol}$$

3.0 – Exercícios

EXEMPLO 8.2

Uma engrenagem helicoidal tem passo diametral transversal de 12, ângulo de pressão transversal de $14\frac{1}{2}^\circ$, 28 dentes, largura de face de 1,25 pol e ângulo de hélice de 30° . Calcule o passo circular, o passo circular normal, o passo diametral normal, o passo axial, o diâmetro de passo e o ângulo de pressão normal. Calcule o número de passos axiais na largura de face.

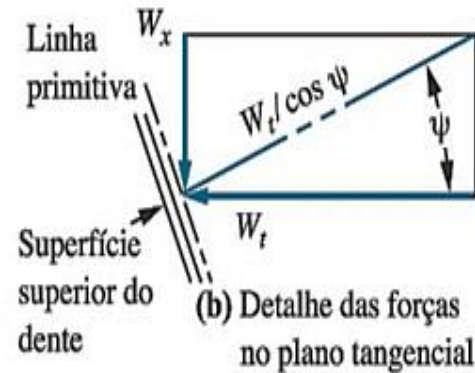
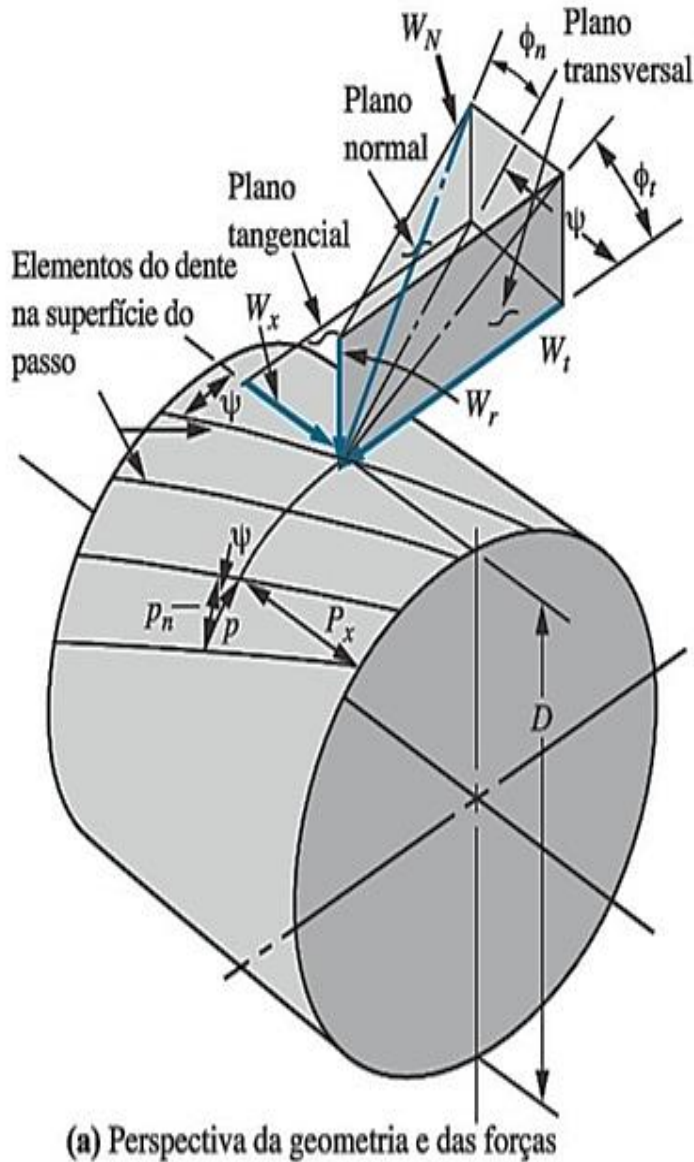


(a) Engrenagens helicoidais
com eixos paralelos

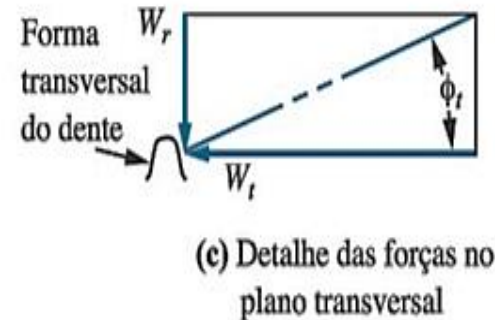
(b) Engrenagens helicoidais
cruzadas, eixos perpendiculares



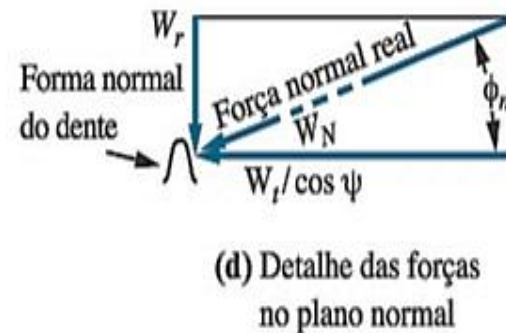
3.0 – Ângulo de hélice



$$\begin{aligned}\psi &= \text{Ângulo de hélice} \\ \operatorname{tg} \psi &= W_x / W_t \\ W_x &= W_t \operatorname{tg} \psi\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\phi_t &= \text{Ângulo de pressão transversal} \\ \operatorname{tg} \phi_t &= W_r / W_t \\ W_r &= W_t \operatorname{tg} \phi_t\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\phi_n &= \text{Ângulo de pressão normal} \\ \operatorname{tg} \phi_n &= \frac{W_r}{W_t / \cos \psi} \\ W_r &= \frac{W_t \operatorname{tg} \phi_n}{\cos \psi}\end{aligned}$$

3.0 – Formulário

$$\operatorname{tg} \phi_n = \operatorname{tg} \phi_t \cos \psi \quad (8.11)$$

$$p_n = p \cos \psi \quad (8.13)$$

$$P_d = N/D \quad (8.14)$$

Passo diametral normal

$$P_{nd} = P_d / \cos \psi \quad (8.15)$$

É útil lembrar essas relações:

$$P_d p = \pi \quad (8.16)$$

$$P_{nd} p_n = \pi \quad (8.17)$$

$$P_x = p / \operatorname{tg} \psi = \pi / (P_d \operatorname{tg} \psi) = \pi m / \operatorname{tg} \psi \quad (8.19)$$





Passo circular.

Use a Equação 8.16:

$$p = \pi/P_d = \pi/12 = 0,262 \text{ pol}$$

Passo circular normal

Use a Equação 8.13:

$$p_n = p \cos \psi = (0,262)\cos(30) = 0,227 \text{ pol}$$

Passo diametral normal

Use a Equação 8.15:

$$P_{nd} = P_d/\cos \psi = 12/\cos(30) = 13,856$$

Passo axial

Use a Equação 8.19:

$$P_x = p/\text{tg } \psi = 0,262/\text{tg}(30) = 0,453 \text{ pol}$$

Diâmetro de passo

Use a Equação 8.14:

$$D = N/P_d = 28/12 = 2,333 \text{ pol}$$

Ângulo de pressão normal

Use a Equação 8.11:

$$\phi_n = \text{tg}^{-1}(\text{tg } \phi_t \cos \psi)$$

$$\phi_n = \text{tg}^{-1}[\text{tg}(14\frac{1}{2}) \cos(30)] = 12,62^\circ$$

Número de passos axiais na largura de face

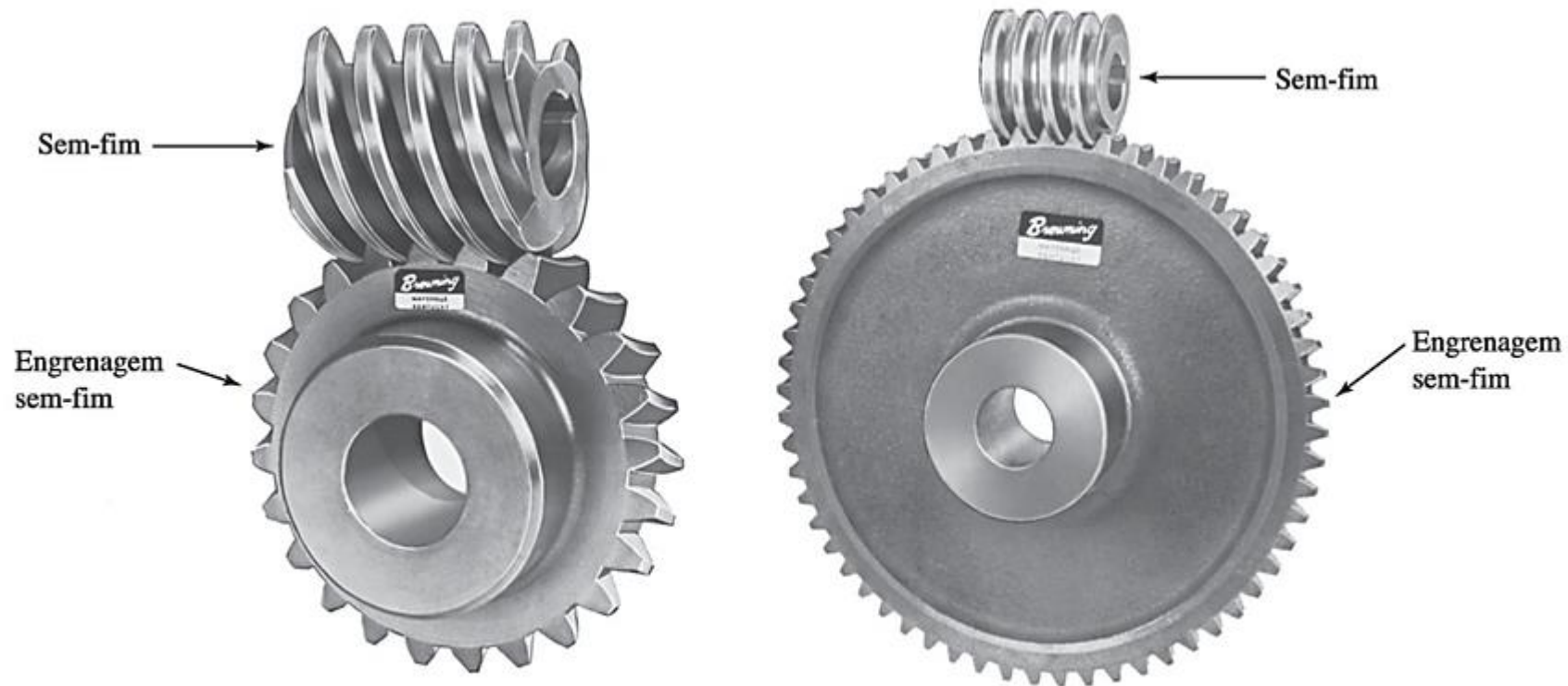
$$F/P_x = 1,25/0,453 = 2,76 \text{ passos}$$

Uma vez que ele é maior do que 2,0, haverá plena ação helicoidal.

3.0 – Exercícios

EXEMPLO 8.4

Uma engrenagem sem-fim tem 52 dentes e passo diametral de 6. Ela conjuga com um sem-fim de três roscas que gira a 1750 rpm. O diâmetro de passo do sem-fim é 2,000 pol. Calcule o passo circular, o passo axial, o avanço, o ângulo de avanço, o diâmetro de passo da engrenagem sem-fim, a distância de centro, a razão de velocidade angular e a velocidade angular da engrenagem sem-fim.



▲ FIGURA 8.18 Sem-fim e engrenagens sem-fim. (Emerson Power Transmission Corporation, Browning Division, Maysville, KY)



3.0 – Exercícios

Passo circular

$$p = \pi/P_d = \pi/6 = 0,5236 \text{ pol}$$

Passo axial

$$P_x = p = 0,5236 \text{ pol}$$

Avanço

$$L = N_w P_x = (3)(0,5236) = 1,5708 \text{ pol}$$

Ângulo de avanço

$$\lambda = \text{tg}^{-1}(L/\pi D_w) = \text{tg}^{-1}(1,5708/\pi 2,000)$$

$$\lambda = 14,04^\circ$$



3.0 – Exercícios

Diâmetro de passo da engrenagem

$$D_G = N_G / P_d = 52 / 6 = 8,667 \text{ pol}$$

Distância de centro

$$C = (D_w + D_G) / 2 = (2,000 + 8,667) / 2 = 5,333 \text{ pol}$$

Razão de velocidade angular

$$VR = N_G / N_w = 52 / 3 = 17,333$$

Rpm da engrenagem

$$n_G = n_w / VR = 1750 / 17,333 = 101 \text{ rpm}$$



Referência bibliográfica

1. Chiaverini, V. (1986). *Tecnologia Mecânica - 2ª edição*. São Paulo: MacGraw-Hill.
2. Dubbel. (1979). *Manual da Construção Mecânica* (Vol. I e II). Hemus livraria editora Ltda.
3. Juvinall, R. C., & Marshek, K. M. (2008). *Fundamentos do Projeto de Componentes de Máquinas*. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
4. Norton, R. L. (s.d.). *Projetos de Máquinas - Uma abordagem integrada - 2ª Edição*. Porto Alegre, RS, Brasil: Bookman Companhia Editora.
5. Silva, A., Ribeiro, C. T., Dias, J., & Sousa, L. (2006). *Desenho Técnico Moderno*. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.
6. Mott, R.L., Vavrek, E. M., Wang J., (2018), 6ª edition, Machine Elements in Mechanical Design, New York: Pearson
7. SENAI, Desenho Técnico Mecânico, (2000)
8. Software para cálculo de engrenagens – KHK-stock gear. Acessado em https://khkgears.net/new/gear_calculator.html

