

PÊNDULO DE FURUTA - MODELAGEM E CONTROLE

Diogo Carvalho, Marcos Ferreira, Mateus Bernardes, Matheus Duarte

Abstract—O pêndulo de Furuta é um sistema complexo, estudado na área de controle de sistemas dinâmicos. Este relatório aborda sua modelagem matemática, o projeto de controle usando a estratégia LQR e a simulação, em MATLAB e no Simulink. Além disso, são discutidos os processos de otimização e implementação prática. A metodologia inclui desde a formulação das equações do modelo até a análise dos resultados experimentais e conclusões sobre a eficácia do controle implementado. Os resultados destacam a importância do pêndulo de Furuta como um modelo educacional e experimental para aplicações de controle em robótica e sistemas dinâmicos complexos.

Palavras-chave: Pêndulo de Furuta, Dinâmica Não Linear, Modelagem, Controle de Sistemas Dinâmicos, Regulador Linear Quadrático (LQR), Otimização, MATLAB/Simulink.

I. INTRODUÇÃO

O pêndulo de Furuta, também conhecido como pêndulo rotacional, é um dispositivo amplamente utilizado em estudos de controle e sistemas dinâmicos devido à sua estrutura não linear e à complexidade de seu comportamento dinâmico. Esse sistema é caracterizado por dois graus de liberdade (DOF) e duas juntas rotativas, integrando três elementos principais: um motor e duas barras denominadas braço e pêndulo. O motor é responsável por mover o braço no plano horizontal, enquanto o pêndulo está conectado à extremidade livre do braço e pode se mover livremente no plano vertical [1].

Desenvolvido inicialmente no Instituto de Tecnologia de Tóquio por Furuta e seus colegas, o pêndulo de Furuta tornou-se um modelo amplamente estudado na literatura, sendo utilizado para demonstrar leis de controle lineares e não lineares. A complexidade do sistema advém das forças gravitacionais e do acoplamento resultante das forças de Coriolis e centrífugas, tornando-o não linear [2].

Nesse contexto, o controle do pêndulo é exercido através da rotação do braço, o que gera um desafio significativo para os sistemas de controle, uma vez que o objetivo é estabilizar o pêndulo em sua posição invertida instável [1].

Por fim, estudar o pêndulo de Furuta é de extrema importância para a formação de engenheiros especializados em controle de sistemas dinâmicos, pois ele apresenta desafios que são comuns em diversos sistemas reais, como robôs bípedes, veículos autônomos e satélites. A resolução deste problema exige a aplicação de técnicas avançadas de controle, como controle linear quadrático (LQR).

A. OBJETIVOS

- 1) Modelagem matemática do pêndulo de Furuta
- 2) Projeto do sistema de controle

- 3) Simulação em Matlab/Simulink
- 4) Gerar base de código para implementação em microcontrolador

II. METODOLOGIA

A. Mapeamento

Para um melhor entendimento das equações usadas e dos parâmetros, é feito o mapeamento do pêndulo [1].

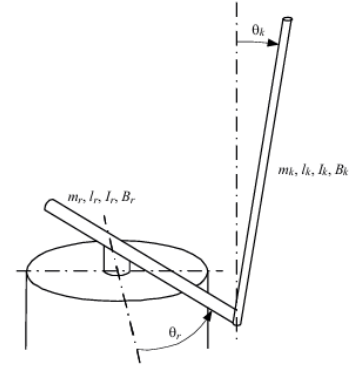


Fig. 1: Esquema de um pêndulo rotativo invertido com alguns parâmetros

Parâmetros	Símbolo	Unidade
Gravidade	g	m/s^2
Braço		
Massa	m_r	kg
Comprimento	l_r	m
Momento de Inércia	I_r	$kg \cdot m^2$
Coefficiente de Atrito	B_r	$kg \cdot \frac{m^2}{s}$
Posição	θ_r	rad ou $graus^\circ$
Pêndulo		
Massa	m_k	kg
Comprimento	l_k	m
Momento de Inércia	I_k	$kg \cdot m^2$
Coefficiente de Atrito	B_k	$kg \cdot \frac{m^2}{s}$
Posição	θ_k	rad ou $graus^\circ$
Engrenagem		
Rendimento	η_g	-
Constante	K_g	-
Motor		
Rendimento	η_m	-
Constante de acoplamento	K_t	$N \cdot \frac{m}{A}$
Constante de torque eletromotivo	K_m	$N \cdot \frac{m}{A}$
Resistência	R	Ω

TABLE I: Parâmetros do modelo

B. Formulação de Lagrange

A função de Lagrange, também conhecida como lagrangeana, é definida como sendo uma configuração dependente das coordenadas generalizadas, das velocidades generalizadas e do tempo, que resulta no mesmo valor que a diferença entre as energias cinética e potencial.

$$L(q, \dot{q}, t) = Ec - Ep$$

Para a energia cinética o cálculo é feito de maneira a somar a energia resultante do movimento linear com a energia resultante do movimento angular, pois para o sistema em estudo há velocidade linear (v) e velocidade angular (ω). Assim, a energia cinética do braço e do pêndulo são calculadas, respectivamente por:

$$Ec_r = \frac{m_r * (v_{cr})^2}{2} + \frac{I_r * (\omega_r)^2}{2}$$

$$Ec_k = \frac{m_k * (v_{ck})^2}{2} + \frac{I_k * (\omega_k)^2}{2}$$

Para a energia potencial, é usado a massa (m), aceleração da gravidade (g) e a variação de altura Δh . O braço não se altera verticalmente, logo sua variação de altura é 0 e para o pêndulo, a variação de altura é o comprimento do pêndulo vezes o cosseno de seu próprio ângulo de movimento. Assim, as equações do braço e do pêndulo são escritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$Ep_r = m_r * g * 0$$

$$Ep_k = m_k * g * l_k * \cos(\theta_k)$$

C. Equações de Movimento do Pêndulo

Com a equação de lagrange descoberta é possível calcular as derivadas primárias e secundárias, para que chegue nas equações de movimento do pêndulo.

$$\ddot{\theta}_r = \{ B_k m_k \cos \theta_k l_k l_r \dot{\theta}_k - B_r m_k l_k^2 \dot{\theta}_r + (m_k^2 l_k^4 \dot{\theta}_r + m_k l_k^2 I_k \dot{\theta}_r) \sin(2\theta_k) \dot{\theta}_k + [(m_k^2 l_k^3 l_r + m_k l_k l_r I_k) \dot{\theta}_k^2 - m_k^2 l_k^3 l_r \cos^2 \theta_k \dot{\theta}_k^2 - m_k^2 g l_k^2 l_r \cos \theta_k] \sin \theta_k - B_r I_k \dot{\theta}_r + (m_k l_k^2 + I_k) \tau \} / \{ (l_r^2 I_k + l_k^2 I_r) m_k + (m_k^2 l_k^4 + m_k l_k^2 I_k) \sin^2 \theta_k - m_k^2 l_k^2 l_r^2 \cos^2 \theta_k + m_k^2 l_k^2 l_r^2 + I_r I_k \},$$

Fig. 2: Equação não linear da aceleração do braço

$$\ddot{\theta}_k = - \{ -m_k^2 \sin(2\theta_k) \cos \theta_k l_r l_k^3 \dot{\theta}_r \dot{\theta}_k - (m_k^2 \cos \theta_k l_k^4 \dot{\theta}_r^2 + m_k^2 g l_k^3) \sin^3 \theta_k - B_r m_k \cos \theta_k l_k l_r \dot{\theta}_r + (B_k m_k l_r^2 + B_k I_r) \dot{\theta}_k + B_k m_k \sin^2 \theta_k l_k^2 \dot{\theta}_k + m_k \cos \theta_k l_k l_r \tau + [(m_k^2 l_r^2 l_k^2 \dot{\theta}_k^2 - m_k^2 l_r^2 l_k^2 \dot{\theta}_r^2 - m_k l_k^2 I_r \dot{\theta}_r^2) \cos \theta_k - m_k^2 g l_k l_r^2 - m_k g l_k I_r] \sin \theta_k \} / \{ (m_k^2 l_k^4 + m_k l_k^2 I_k) \sin^2 \theta_k + (l_r^2 I_k + l_k^2 I_r) m_k + I_k I_r - m_k^2 \cos^2 \theta_k l_k^2 l_r^2 + m_k^2 l_k^2 l_r^2 \}.$$

Fig. 3: Equação não linear da aceleração do pêndulo

Este modelo não linearizado foi bastante satisfatório para os testes. Porém o artigo em que este modelo estava não provia o modelo linearizado, logo o grupo tentou a linearização. No entanto, os testes no modelo linearizado não foram adequados, e por isto foi comparado o modelo linearizado do grupo com outro modelo linearizado em um artigo diferente. Com isto, foi obtido a conclusão que ambos estavam bem parecidos, mas no feito pelo grupo faltava alguns fatores. Como o tempo da entrega do trabalho estava quase no final, foi considerado o novo modelo já linearizado pelo novo artigo, e com este foi obtido resultados melhores.

Para a linearização deste novo modelo foi usado as seguintes condições iniciais: $\theta_r = 0$; $\theta_k = 0$; $\dot{\theta}_r = 0$; $\dot{\theta}_k = 0$. E com isto foi obtido tal resultado:

$$\ddot{\theta}_r = \frac{1}{J_r} \left(- \left(J_k + \frac{1}{4} m_k l_k^2 \right) B_r \dot{\theta}_r - \frac{1}{2} m_k l_k l_r B_r \dot{\theta}_k + \frac{1}{4} m_k^2 l_k^2 l_r g \theta_k + \left(J_k + \frac{1}{4} m_k l_k^2 \right) \tau \right)$$

Fig. 4: Equação linear da aceleração do braço

$$\ddot{\theta}_k = \frac{1}{J_r} \left(\frac{1}{2} m_k l_k l_r B_r \dot{\theta}_r - (J_r + m_k l_k^2) B_k \dot{\theta}_k + \frac{1}{2} m_k l_k g (J_r + m_k l_k^2) \theta_k + m_k l_k l_r \tau \right)$$

Fig. 5: Equação linear da aceleração do pêndulo

Sendo J_t o momento de inércia total do sistema:

$$J_t = (J_k * m_k * L_r^2 + J_r * J_k + 0.25 * J_r * m_k * L_k^2)$$

D. Modelagem caixa cinza

A modelagem caixa cinza é uma abordagem de modelagem de sistemas que combina o conhecimento teórico da dinâmica do sistema (modelo branco) com dados empíricos (modelo negro) para identificar e ajustar parâmetros que melhor descrevam o comportamento do sistema real. Diferentemente da modelagem caixa branca, que se baseia inteiramente em princípios físicos e leis matemáticas, e da modelagem caixa negra, que depende exclusivamente de dados experimentais, a modelagem caixa cinza utiliza uma combinação de ambos para criar modelos mais precisos e robustos.

A identificação de parâmetros de um sistema é o processo de ajustar os parâmetros do modelo para que ele corresponda ao comportamento observado no sistema real. Este processo é crucial porque permite que o modelo matemático capture com precisão as características dinâmicas do sistema, facilitando a previsão e o controle do mesmo. A importância da identificação de parâmetros reside na sua capacidade de melhorar a precisão dos modelos, permitindo o desenvolvimento de controladores mais eficazes e otimizados para aplicações práticas.

- 1) **Passo 1 - Aquisição de Valores da Resposta Física sem Motor:** Inicialmente, adquirimos os valores da resposta física do sistema sem controle e sem a presença do

motor. Para isso, soltamos o sistema de uma posição de 90°, registrando os dados da resposta dinâmica. Este procedimento nos fornece um conjunto de dados experimentais que representam o comportamento natural do sistema sob a influência apenas das forças gravitacionais e das inércias inerentes.

2) **Passo 2 - Otimização e Identificação dos Parâmetros:**

Com o auxílio de um script de otimização e identificação de parâmetros disponibilizado pelo professor, realizamos a otimização dos valores dos parâmetros do modelo. Este script ajusta os parâmetros teóricos para que as curvas experimentais e teóricas apresentem um comportamento similar. A otimização busca minimizar a diferença entre a resposta teórica (modelo matemático) e a resposta experimental (dados adquiridos), resultando em um modelo ajustado que reflete com maior precisão a dinâmica do sistema real.

3) **Passo 3 - Aquisição de Valores da Resposta Física com Motor:**

Posteriormente, adquirimos os valores da resposta física e da entrada utilizada no sistema agora com a presença do motor, a entrada é um PWM que varia de -24V a 24V. Este experimento nos fornece um novo conjunto de dados que inclui a influência do motor no comportamento do sistema. A análise dessa resposta é essencial para compreender como o sistema reage a inputs controlados e como o motor altera a dinâmica geral do sistema.

4) **Passo 4 - Otimização e Identificação dos Parâmetros do Motor:**

Finalmente, voltamos a realizar a otimização dos parâmetros, como descrito no segundo passo, agora considerando os dados obtidos com a presença do motor. Nesta etapa, a otimização se refere especificamente aos parâmetros do motor, uma vez que os outros parâmetros do sistema já haviam sido otimizados anteriormente. Esta nova otimização ajusta os parâmetros do modelo para que ele seja capaz de replicar com precisão a resposta do sistema com o motor em operação, possibilitando a implementação de soluções de controle mais eficazes.

Desse modo, por meio da aquisição de dados experimentais e da otimização iterativa dos parâmetros, é possível ajustar os modelos teóricos para que reflitam com maior precisão a dinâmica real do sistema, possibilitando a implementação de soluções de controle mais eficazes.

E. Controlador LQR

O Controle Linear Quadrático Regulador (LQR) é uma estratégia de controle baseada na teoria de controle ótimo, cujo objetivo é minimizar uma função custo quadrática que pondera os estados e os esforços de controle do sistema. A função custo é definida como:

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (1)$$

onde x é o vetor de estados, u é o vetor de controle, Q é uma matriz de ponderação que penaliza os estados, e R é uma matriz de ponderação que penaliza os esforços de

controle. A importância de ponderar corretamente Q e R reside na necessidade de balancear a performance do sistema e a energia gasta pelo atuador. Um valor alto de Q leva a um controle mais rigoroso dos estados, enquanto um valor alto de R reduz os esforços de controle, preservando a vida útil dos atuadores.

Obtenção dos valores de ganho do controlador

Para o pêndulo de Furuta, utilizaremos o modelo linear [figuras 4 e 5] do sistema juntamente com os parâmetros otimizados previamente identificados para obter os valores de ganho do controlador LQR. Este processo será realizado utilizando o software MATLAB. Antes de proceder à obtenção dos ganhos, verificaremos a controlabilidade do sistema com o auxílio das funções do MATLAB. A controlabilidade é uma propriedade crucial que indica se é possível controlar o sistema a partir de qualquer estado inicial utilizando um conjunto adequado de entradas de controle.

Simulação do modelo com os ganhos encontrados

Após obter os valores de ganho K do controlador LQR, realizaremos a simulação do modelo do pêndulo de Furuta utilizando o Simulink. Esta etapa é importante para verificar se o sistema está sendo controlado da maneira desejada, verificando a resposta dinâmica do sistema e ajustando os parâmetros do controlador se necessário.

Controlador LQR - Tempo Discreto

Para a implementação prática do projeto em um microcontrolador, é necessário converter o controlador LQR contínuo para um controlador em tempo discreto. Esta conversão é essencial porque os microcontroladores operam em tempo discreto, processando dados em intervalos de tempo discretos. A obtenção dos ganhos no tempo discreto permite que o controlador seja implementado de forma eficiente e precisa no hardware real.

Utilizaremos o MATLAB para encontrar os ganhos do controlador no tempo discreto. O MATLAB fornece ferramentas para a discretização de sistemas contínuos e a obtenção dos ganhos do controlador LQR em tempo discreto. Este processo envolve a discretização das matrizes de estado A e B e a definição de um intervalo de amostragem adequado para o sistema. Por fim, realizaremos a simulação do modelo no tempo discreto utilizando o Simulink.

III. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A. Modelagem caixa cinza

A identificação de parâmetros via modelagem caixa cinza desempenhou um papel crucial na obtenção de um modelo matemático que representa o comportamento do sistema real. Com a aquisição de valores da resposta física, tanto sem motor quanto com motor, e a subsequente otimização e identificação de parâmetros, foi possível ajustar o modelo para refletir as características dinâmicas observadas.

1) Aquisição de Valores da Resposta Física sem Motor:

Foi solicitado a equipe responsável pelo sistemas eletrônicos do projeto para que fosse realizado a aquisição dos dados do sistema referentes a posição angular do pêndulo em graus. As condições iniciais exibidas na tabela [IV] foram consideradas e resposta do sistema é exibida na figura [6]:

Parâmetros	Valor
θ_r	0
θ_k	90°
$\dot{\theta}_r$	0
$\dot{\theta}_k$	0

TABLE II: Condições iniciais para otimização dos parâmetros do sistema

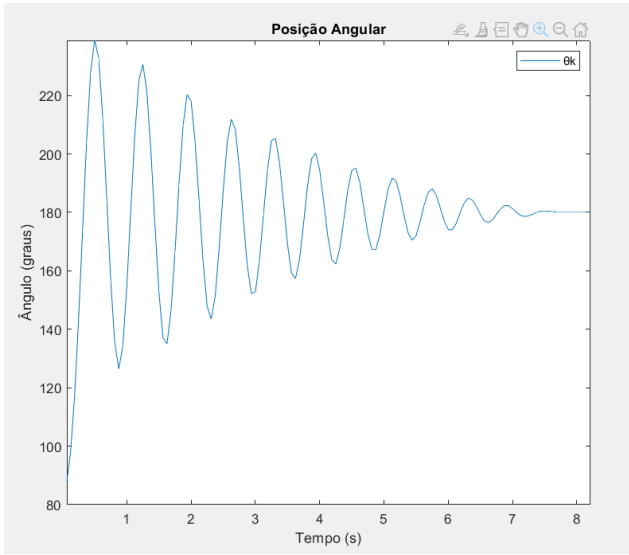


Fig. 6: Resposta do sistema físico

2) *Otimização do parâmetros do sistema:* Primeiramente, foi definido as equações diferenciais considerando os parâmetros físicos usando a função `ode()` para a simulação em malha aberta do sistema. A partir das condições iniciais (pêndulo começa posicionado a 90°) e parâmetros do sistema, a resposta angular do pêndulo (θ_k) são simuladas e comparadas com dados experimentais reais.

Para a comparação e otimização parâmetro foi utilizada uma função objetivo. Esta função objetivo é definida como a soma dos quadrados das diferenças entre as posições angulares simuladas e os dados reais adquiridos, buscando minimizar essa diferença.

O processo de otimização dos parâmetros é realizado usando o algoritmo `fmincon`, que ajusta os parâmetros do modelo (l_r , I_r , B_r , m_k , l_k , I_k , B_k) para minimizar a função objetivo. Os resultados otimizados são então utilizados para uma nova simulação, cujas respostas são comparadas com os dados reais, evidenciando uma maior precisão na representação do comportamento dinâmico do sistema. A figura [7] representa a comparação entre os dados de referência e a simulação do modelo com os parâmetros otimizados e a tabela [III] exibe os valores dos parâmetros do sistema otimizados.

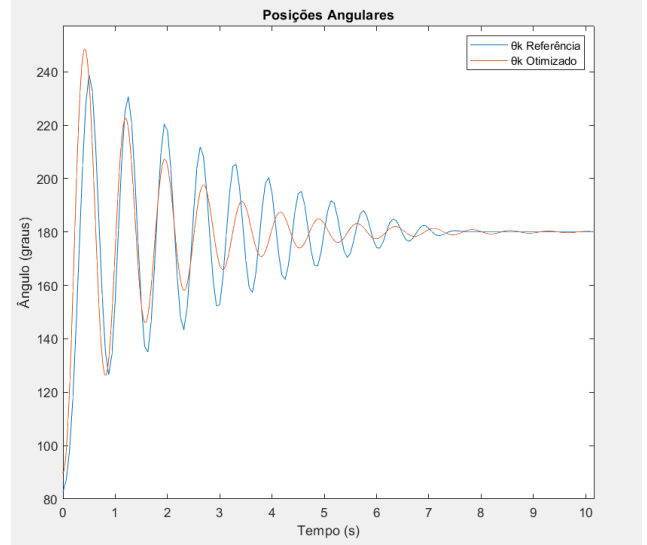


Fig. 7: Comparação da simulação do modelo otimizado e os dados de referência

Parâmetros	Valor	Unidade
m_r	0,060000	kg
l_r	0,153331	m
I_r	0,004284	kg · m ²
B_r	0,323912	kg · m ² /s
m_k	0,003205	kg
l_k	0,085275	m
I_k	0,000013	kg · m ²
B_k	0,000042	kg · m ² /s

TABLE III: Parâmetros otimizados do sistema dinâmico

3) Aquisição de Valores da Resposta Física com Motor:

Foi solicitado a equipe responsável pelo sistemas eletrônicos do projeto para que fosse realizado a aquisição dos dados do sistema referentes a posição angular do pêndulo em graus e da tensão de entrada. As condições iniciais exibidas na tabela [IV] foram consideradas e resposta do sistema juntamente com a entrada são exibidas na figura [8]:

Parâmetros	Valor
θ_r	0
θ_k	180°
$\dot{\theta}_r$	0
$\dot{\theta}_k$	0

TABLE IV: Condições iniciais para otimização dos parâmetros do motor

4) *Otimização do parâmetros do motor:* Primeiramente, foi definido as equações diferenciais considerando os parâmetros físicos otimizados obtidos anteriormente a partir da função `ode()` para a simulação em malha aberta do sistema. A partir da entrada, das condições iniciais (pêndulo começa posicionado a 180°) e parâmetros do motor, a resposta angular do pêndulo (θ_k) são simuladas e comparadas com dados experimentais reais.

Para a comparação e otimização de parâmetros, foi utilizada uma função objetivo. Esta função objetivo é bastante semelhante à utilizada no processo de otimização anterior; porém, há

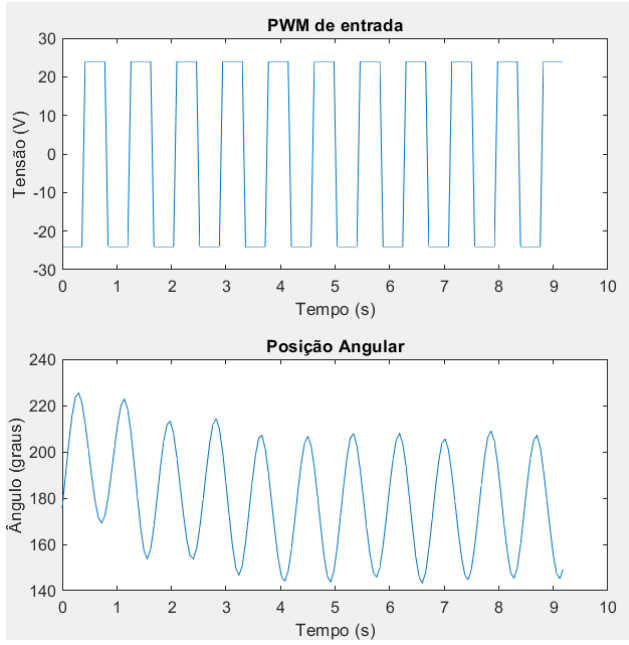


Fig. 8: Resposta do sistema físico a partir do PWM de entrada

a necessidade de utilizar o conceito de interpolação. A função `interp1` é empregada para interpolar os valores de tensão ao longo do tempo.

O processo de otimização dos parâmetros é realizado usando o algoritmo `fmincon`, que ajusta os parâmetros do modelo (η_g , η_m , k_g , k_t , k_m , R) para minimizar a função objetivo. Os resultados otimizados são então utilizados para uma nova simulação, cujas respostas são comparadas com os dados reais, evidenciando uma maior precisão na representação do comportamento dinâmico do sistema. A figura [9] representa a comparação entre os dados de referência e a simulação do modelo com os parâmetros do motor otimizados e a tabela [V] exibe os valores dos parâmetros do motor otimizados.

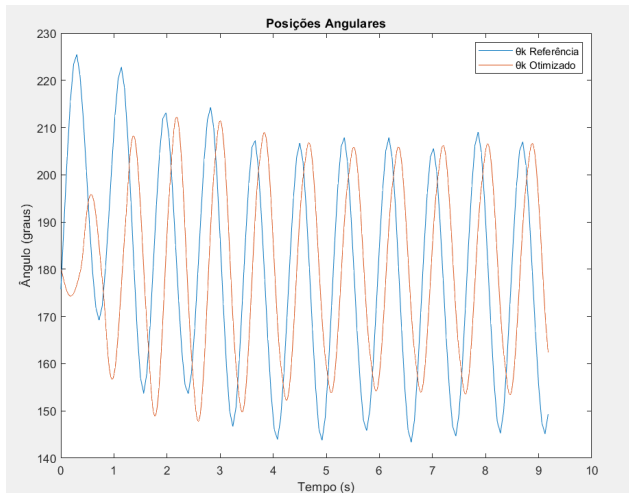


Fig. 9: Comparação da simulação do modelo com motor otimizado e os dados de referência

Parâmetros	Valor	Unidade
η_g	0.856519	-
η_m	0.824368	-
k_g	50.024570	-
k_t	0.021524	$N \cdot \frac{m}{A}$
k_m	0.157398	$N \cdot \frac{m}{A}$
R	49.999750	Ω

TABLE V: Parâmetros otimizados do sistema dinâmico

B. Simulações no Simulink

Os scripts implementados em Matlab têm como objetivo simular a resposta do sistema, tanto em malha aberta quanto em malha fechada, e ainda, avaliar o efeito do controlador linear quadrático (LQR). Os ganhos obtidos foram utilizados no Simulink, tanto no modelo de espaço de estados contínuo quanto no discretizado. A adaptação dos ganhos para o modelo discreto fez-se necessária devido à posterior implementação real em um microcontrolador, onde o sistema operaria em tempo discreto.

1) *Simulações Contínuas:* Primeiramente, definiram-se as matrizes do sistema de espaço de estados (`ss()`) no Matlab, conforme a modelagem realizada.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0.3441 & -77.4620 & -0.0108 \\ 0 & 71.5892 & -3.0713 & -2.2429 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.5067 \\ 3.9029 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considerou-se a controlabilidade (`ctrb()`) e observabilidade (`obsv()`), para verificar se todas as variáveis de estado são controláveis pelo vetor de entrada. O resultado obtido é 4, mostrando que o sistema é de fato controlável.

Como o sistema é controlável, os pesos da função de custo do LQR foram definidos, sendo que, eles foram reajustados várias vezes durante as simulações para efeitos de análise de desempenho do controlador.

Os pesos Q e R foram escolhidos para dar maior importância à posição do pêndulo, que corresponde ao estado 2 do sistema. Essa escolha faz com que o controlador priorize a minimização do erro na posição do pêndulo.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 10$$

Os ganhos foram obtidos (`lqr()`) e aplicados diretamente no Simulink.

$$\begin{bmatrix} -0.3162 & 38.2480 & -0.1454 & 3.9605 \end{bmatrix}$$

No Simulink, uma entrada de referência é introduzida no sistema e comparada com o sinal de feedback usando um somador. Os ganhos do controlador, calculados previamente, são aplicados para ajustar a entrada de controle com base no estado atual do sistema.

A condição inicial do sistema é definida como $[0, \frac{5\pi}{180}, 0, 0]$ especificando as posições e as velocidades iniciais da haste e do pêndulo.

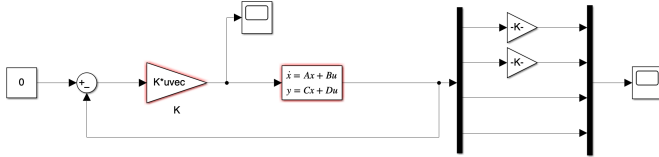


Fig. 10: Diagrama de Blocos do Modelo Contínuo.

O sinal de saída do sistema é então realimentado para o somador, fechando a malha de controle. O sinal de saída é demultiplexado para extrair as variáveis de estado individuais. Essas variáveis de estado são multiplexadas novamente e enviadas a um bloco Scope para visualização.

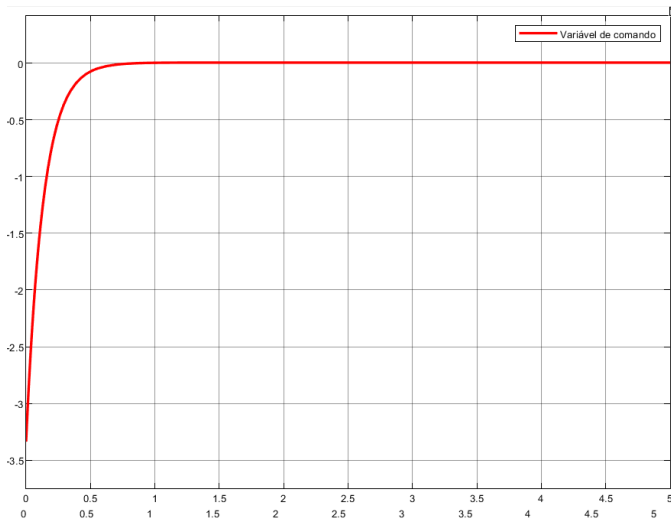


Fig. 11: Variável de comando da planta.

O controlador está atuando de forma eficaz para estabilizar o sistema, como é possível perceber pela estabilização rápida da variável de comando. Há um pico inicial significativo. Isso indica uma forte ação inicial do controlador para corrigir o erro de posição do pêndulo.

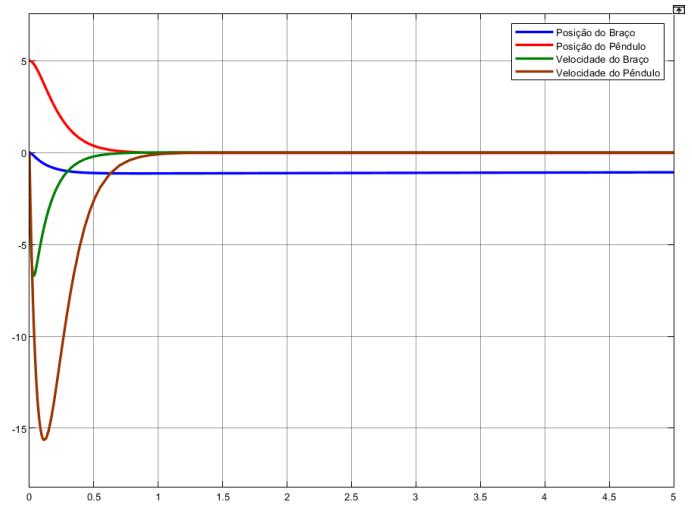


Fig. 12: Resposta Contínua do controlador no sistema.

O gráfico mostra que o sistema de controle está funcionando conforme o esperado. Todos os estados tendem a se estabilizar ao redor de 0, indicando que o pêndulo está sendo controlado para voltar à posição de equilíbrio. Entretanto, pode-se observar um erro em regime permanente. As possíveis causas para isso ocorrer são os parâmetros do controlador não refinados ou uma modelagem imprecisa.

2) *Simulações Discretas*: Similarmente, para o sistema discreto, o modelo de espaço de estados foi discretizado com um período de amostragem referente à mesma taxa do microcontrolador real $T_s = 0.06s$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.0002046 & 0.01279 & -1.237e-06 \\ 0 & 1.126 & -0.001826 & 0.05858 \\ 0 & 0.004311 & 0.009583 & 6.95e-05 \\ 0 & 4.193 & -0.03848 & 0.9945 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.002137 \\ 0.006703 \\ 0.04483 \\ 0.2222 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No diagrama de blocos, foi introduzido um bloco Zero Order Hold (ZOH) para lidar com a discretização do sinal de entrada, mantendo a integridade da malha de controle ao longo do tempo discreto.

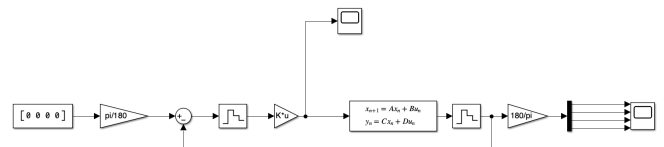


Fig. 13: Diagrama de Blocos do Modelo Discreto.

Os ganhos do controlador LQR para o sistema discreto foram então calculados utilizando a função `dlqr()`, utilizando as matrizes Q e R definidas previamente.

−0.2020 31.2839 −0.1198 3.2396

Abaixo, é possível detonar a semelhança entre as simulações contínua e discreta. O comportamento dos estados ao longo do tempo tendem a se estabilizar ao redor de 0, ou seja, o pêndulo está sendo devidamente controlado como o esperado.

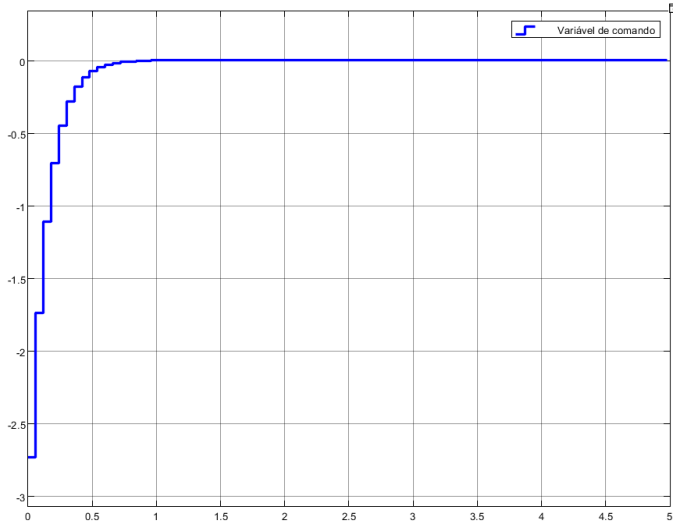


Fig. 14: Variável de comando da planta.

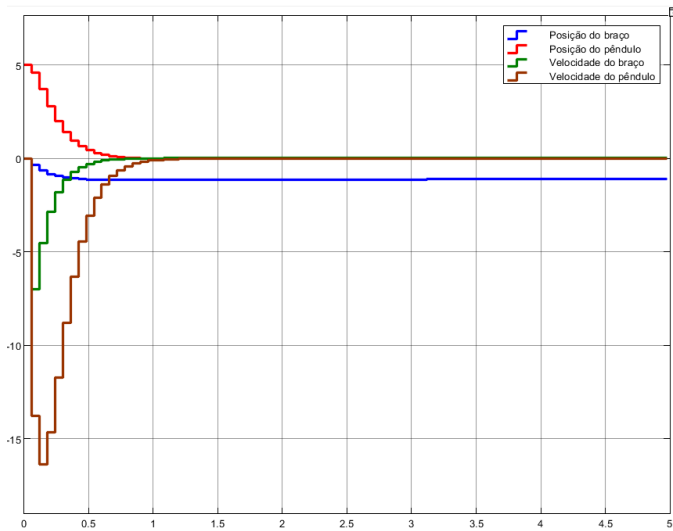


Fig. 15: Resposta Discreta do controlador no sistema.

IV. CONCLUSÕES

Ao término do projeto, infelizmente, não foi possível obter êxito na aplicação da lei de controle LQR no sistema físico. No entanto, concluímos que, através do processo de modelagem caixa cinza, foi possível obter um modelo bastante próximo dos dados adquiridos, conforme demonstrado nas Figuras 7 e 9. Adicionalmente, foi possível aplicar a lei de controle LQR via simulação utilizando Simulink, comprovando que o modelo utilizado é controlável, como evidenciado pelas Figuras 12 e 15.

É importante destacar a utilização e consideração dos parâmetros de rendimento e constante das engrenagens (η_g e

k_g , respectivamente). O sistema físico construído pela equipe não possui uma caixa de redução, à qual esses parâmetros se referem. Contudo, a inclusão desses parâmetros mostrou-se necessária para adquirir um modelo mais ajustado aos dados do sistema físico.

Por fim, o projeto proposto pelo professor contribuiu significativamente para a formação dos Engenheiros de Controle e Automação, abordando o estudo e a aplicação de diversos conceitos aprendidos durante o curso. Além disso, o projeto incentivou o trabalho em equipe e proporcionou uma vivência prática dos desafios cotidianos enfrentados por engenheiros na área.

REFERENCES

- [1] M. Antonio-Cruz, R. Silva-Ortigoza, C. Merlo-Zapata, M. Villarreal-Cervantes, D. Muñoz-Carrillo, and V. Hernández-Guzmán. Modeling and construction of a furuta pendulum prototype. In *2014 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering*, pages 98–103, 2014.
- [2] B. S. Cazzolato and Z. Prime. On the dynamics of the furuta pendulum. *Journal of Control Science and Engineering*, 2011(1):528341, 2011.