INF1608 – Análise Numérica

Projeto: Controle de Movimento ao longo de um Caminho

Leonardo Seperuelo Duarte

lduarte@tecgraf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Descrição

Considere um caminho no plano expresso por uma curva paramétrica, com $t \in [0,1]$, do tipo Bezier:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x + b_x t + c_x t^2 + d_x t^3 \\ a_y + b_y t + c_y t^2 + d_y t^3 \end{bmatrix}$$

Um espaçamento na coordenada paramétrica t não implica em um espaçamento igual no comprimento de arco s, isto é, $\mathbf{p}(0.5)$ não representa o ponto no meio do caminho, como ilustra a figura abaixo.

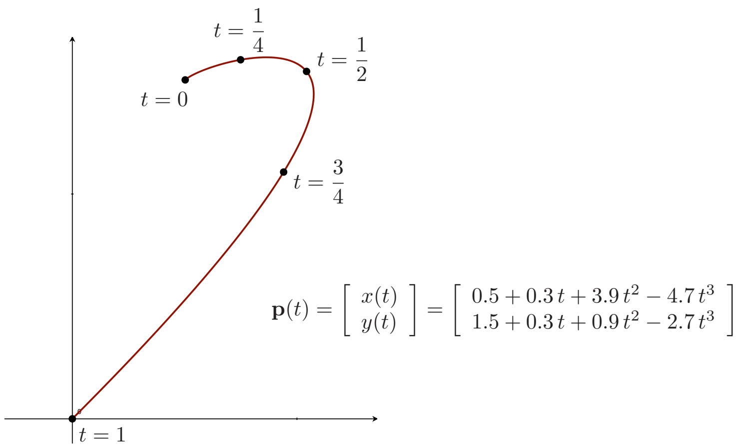

Figura 1

Um dos objetivos deste projeto é implementar uma função que forneça a posição em função do comprimento de arco, isto é, $\mathbf{p}^*(s)$, com $s \in [0, l]$, sendo l o comprimento total do caminho.

O comprimento de arco é dado por uma integral que, em geral, não tem solução analítica, sendo portanto necessário empregar um método de integração numérica.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Resolvendo a integral do comprimento do arco, conseguimos converter t em s. No entanto, o mapeamento inverso impõe um desafio extra: como mapear s em t, isto é, dado s, qual o valor correspondente de t? Esse mapeamento pode ser feito pela determinação da raiz da função a seguir, usando um método numérico de determinação de raízes de função:

$$f(t) = s - \int_0^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Tarefa

Dada uma curva Bezier expressa por seus coeficientes $\mathbf{k}_x$ e $\mathbf{k}_y$:

$$\mathbf{k}_x = \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k}_y = \begin{bmatrix} a_y \\ b_y \\ c_y \\ d_y \end{bmatrix}$$

Implemente as seguintes funções:

1. Uma função para calcular o comprimento de arco s, dados t_1 e t_2, usando o método de Simpson para integração.
2. Uma função para mapear s em t: dado um valor de comprimento de arco s, calcule o parâmetro t correspondente. Para a implementação dessa função, empregue o método da Bisseção para determinação da raiz.
3. Uma função para, dado t, calcular a posição $\mathbf{p} = (x, y)$ do ponto (aplicação direta das equações paramétricas)
4. Uma função para, dado s, calcular a posição $\mathbf{p}^* = (x, y)$ do ponto.

Análise

Ao desenvolver seu trabalho e testá-lo, procure, baseado em experimentos computacionais, responder as perguntas abaixo. Para implementar os testes, considere gerar aleatoriamente um conjunto grande de valores de entrada. Por exemplo, dado um valor $t \in [0, 1]$, calcule s, verifique se $\mathbf{p}(t) \approx \mathbf{p}^*(s)$. Você também pode verificar se o s calculado é mapeado de volta ao valor de t, dentro de uma tolerância de erro.

- Qual passo de integração mostrou-se adequado para a integração de Simpson? Experimente diferentes passos para obter o comprimento total da curva.
- Quantas iterações em média são necessárias no método da Bisseção para a determinação de valores de t a partir de valores de s?