Отчёт по лабораторной работе №5 Математическое моделирование

Модель хищник-жертва. Вариант №55

Выполнила: Коняева Марина Александровна,
НФИбд-01-21, 1032217044

Содержание

Цель работы 4

Теоретическое введение 5

Задачи 7

Задание 8

Выполнение лабораторной работы 9
Построение математической модели. Решение с помощью программ 9
Julia 9
Результаты работы кода на Julia 13
OpenModelica 14
Результаты работы кода на OpenModelica 15

Анализ полученных результатов. Сравнение языков. 17

Вывод 18

Список литературы. Библиография 19

Список иллюстраций

1 График численности хищников от численности жертв 13
2 График численности жертв и хищников от времени 13
3 Стационарное состояние 14
4 График численности хищников от численности жертв 15
5 График численности жертв и хищников от времени 16
6 Стационарное состояние 16

Цель работы

Изучить жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

Теоретическое введение

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [4]

Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях [4]:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dy(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Задачи

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы

Задание

Вариант 55:

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.14x(t) + 0.041y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.23y(t) - 0.034y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8, y_0 = 21$ Найдите стационарное состояние системы.

Выполнение лабораторной работы

Построение математической модели. Решение с помощью программ

Julia

Код программы для нестационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations


x0 = 8
y0 = 21


a = 0.14
b = 0.041
c = 0.23
d = 0.034



function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
```

```
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
  dpi=300,
  legend=false)

plot!(
  plt,
  X,
  Y,
  color=:blue)

savefig(plt, "out/lab05_1.png")

plt2 = plot(
  dpi=300,
  legend=true)

plot!(
  plt2,
  T,
```

```
  X,
  label="Численность жертв",
  color=:red)

plot!(
  plt2,
  T,
  Y,
  label="Численность хищников",
  color=:green)

savefig(plt2, "out/lab05_2.png")
```

Код программы для стационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.14
b = 0.041
c = 0.23
d = 0.034

x0 = c / d
y0 = a / b

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
```

```
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt2 = plot(
  dpi=300,
  legend=true)

plot!(
  plt2,
  T,
  X,
  label="Численность жертв",
  color=:red)

plot!(
  plt2,
  T,
  Y,
  label="Численность хищников",
  color=:green)

savefig(plt2, "lab05_3.png")
```

В стационарном состоянии решение вида $y(x) = somefunction$ будет представлять собой точку.

Результаты работы кода на Julia

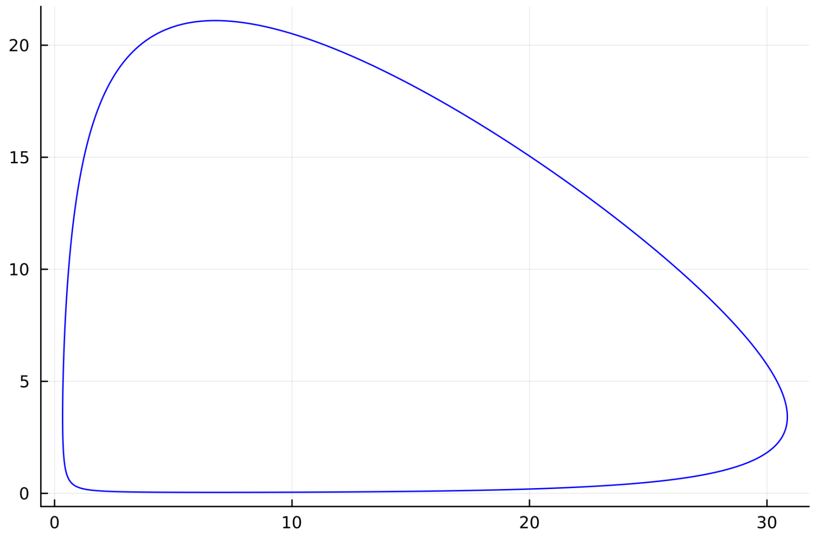

Рис. 1: График численности хищников от численности жертв

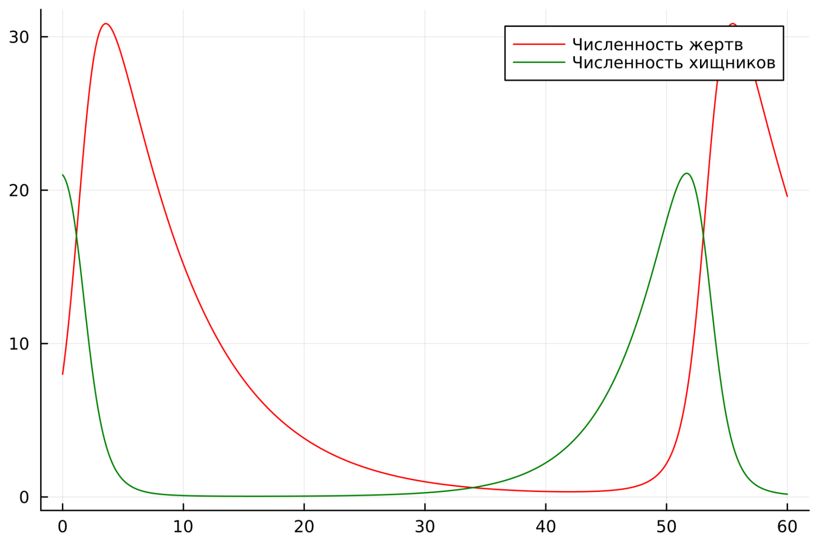

Рис. 2: График численности жертв и хищников от времени

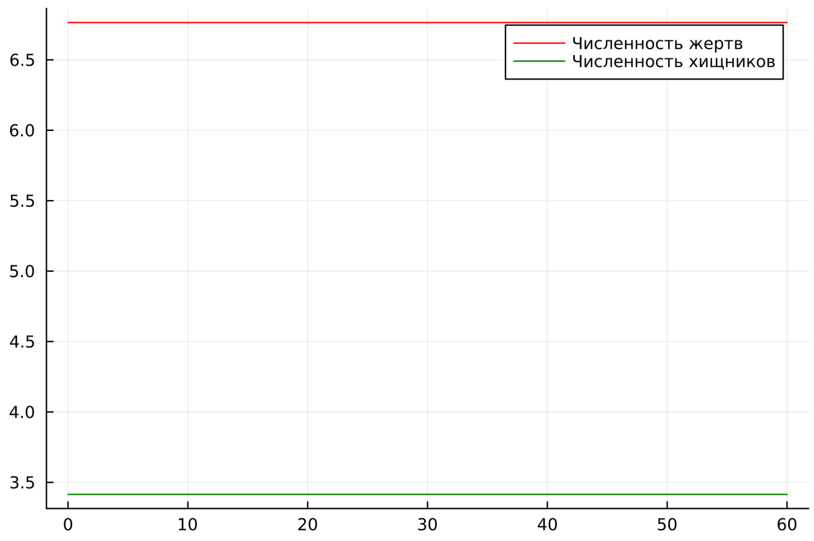

Рис. 3: Стационарное состояние

OpenModelica

Код программы для нестационарного состояния:

```
model lab05_1
Real a = 0.14;
Real b = 0.041;
Real c = 0.23;
Real d = 0.034;
Real x;
Real y;
initial equation
x = 8;
y = 21;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab05_1;
```

Код программы для стационарного состояния:

```
model lab05_2
Real a = 0.14;
Real b = 0.041;
Real c = 0.23;
Real d = 0.034;
Real x;
Real y;
initial equation
x = c / d;
y = a / b;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab05_2;
```

В стационарном состоянии решение вида $y(x) = somefunction$ будет представлять собой точку.

Результаты работы кода на OpenModelica

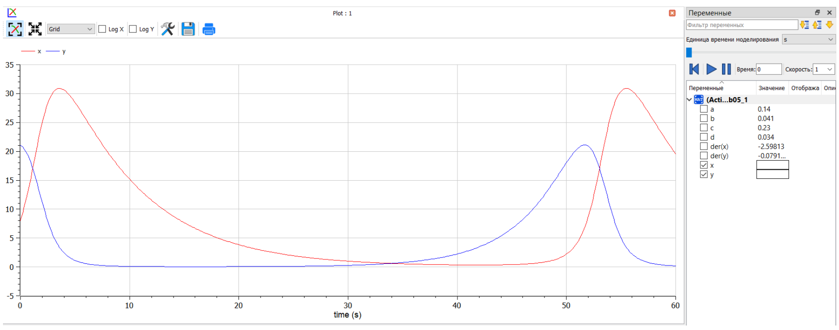

Рис. 4: График численности хищников от численности жертв

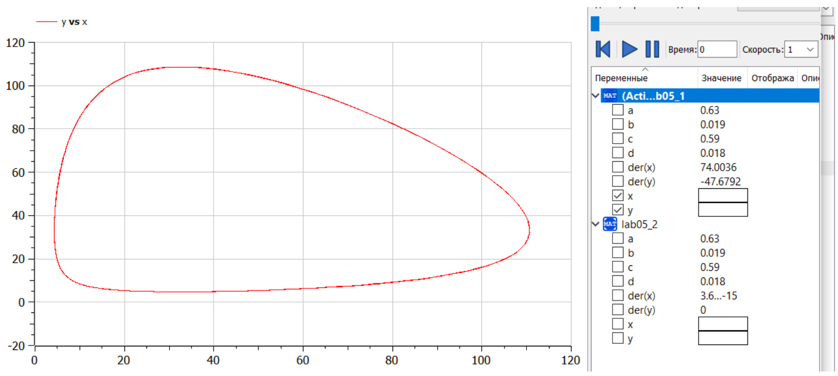

Рис. 5: График численности жертв и хищников от времени

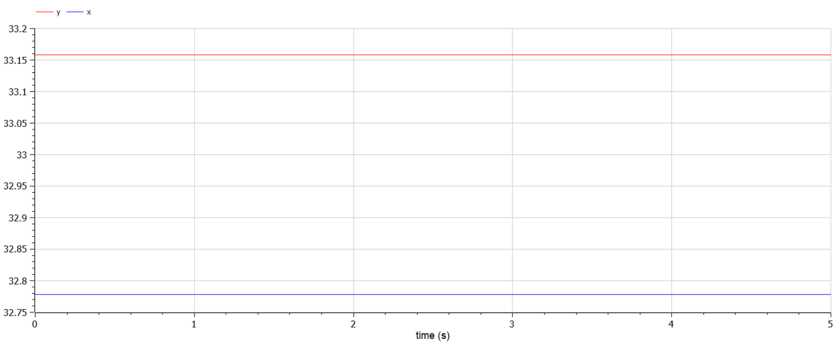

Рис. 6: Стационарное состояние

Анализ полученных результатов. Сравнение языков.

В итоге проделанной работы мы построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв на языках Julia и OpenModelica. Построение модели хищник-жертва на языке openModelica занимает меньше строк, чем аналогичное построение на Julia.

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

Список литературы. Библиография

[1] Документация по Julia: https://docs.julialang.org/en/v1/

[2] Документация по OpenModelica: https://openmodelica.org/

[3] Решение дифференциальных уравнений: https://www.wolframalpha.com/

[4] Модель Лотки—Вольтерры: https://math-it.petrsu.ru/users/semenova/MathECO/Lections/Lotka_Volterr