

Отчёт по лабораторной работе №6

Математическое моделирование

Задача об эпидемии. Вариант №55

Выполнила: Коняева Марина Александровна,
НФИбд-01-21, 1032217044

Содержание

| | |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| Цель работы | 4 |
| Теоретическое введение. Построение математической модели. | 5 |
| Задание | 7 |
| Задачи | 8 |
| Выполнение лабораторной работы | 9 |
| Решение с помощью программ | 9 |
| Julia | 9 |
| Результаты работы кода на Julia | 13 |
| OpenModelica | 14 |
| Результаты работы кода на OpenModelica | 15 |
| Анализ полученных результатов. Сравнение языков. | 16 |
| Вывод | 17 |
| Список литературы. Библиография. | 18 |

Список иллюстраций

| | | |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные изолированы | 13 |
| 2 | Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные могут заражать особей группы S | 13 |
| 3 | Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные изолированы | 15 |
| 4 | Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные могут заражать особей группы S | 15 |

Цель работы

Изучить и построить модель эпидемии.

Теоретическое введение. Построение математической модели.

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначаемая через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^* , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S & , \text{если } I(t) > I^* \\ 0 & , \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, то есть:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & , \text{если } I(t) > I^* \\ -\beta I & , \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

Задание

Вариант 55

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 9512$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 52$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 32$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. $I(0) \leq I^*$
2. $I(0) > I^*$

Задачи

Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп S , I , R . Рассмотреть, как будет протекать эпидемия в случаях:

1. $I(0) \leq I^*$

2. $I(0) > I^*$

Выполнение лабораторной работы

Решение с помощью программ

Julia

Код программы для случая $I(0) \leq I^*$:

```
using Plots
using DifferentialEquations

N = 9512
I0 = 52 # заболевшие особи
R0 = 32 # особи с иммунитетом
S0 = N - I0 - R0 # здоровые, но восприимчивые особи
alpha = 0.6 # коэффициент заболеваемости
beta = 0.2 # коэффициент выздоровления

#I0 <= I*
function ode_fn(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = 0
    du[2] = -beta*u[2]
    du[3] = beta*I
end
```

```

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]
plt = plot(
    dpi = 600,
    legend = :topright)
plot!(
    plt,
    T,
    S,
    label = "Восприимчивые особи",
    color = :blue)
plot!(
    plt,
    T,
    I,
    label = "Инфицированные особи",
    color = :green)
plot!(
    plt,
    T,
    R,
    label = "Особи с иммунитетом",

```

```

color = :red)

savefig(plt, "lab06_1.png")

Код программы для случая  $I(0) > I^*$ :

using Plots
using DifferentialEquations

N = 9512
I0 = 52 # заболевшие особи
R0 = 32 # особи с иммунитетом
S0 = N - I0 - R0 # здоровые, но восприимчивые особи
alpha = 0.3 # коэффициент заболеваемости
beta = 0.1 # коэффициент выздоровления

#I0 > I*
function ode_fn(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = -alpha*u[1]
    du[2] = alpha*u[1] - beta*u[2]
    du[3] = beta*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 120.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
S = [u[1] for u in sol.u]

```

```

I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(
    dpi=600,
    legend=:right)

plot!(
    plt,
    T,
    S,
    label="Восприимчивые особи",
    color=:blue)
plot!(
    plt,
    T,
    I,
    label="Инфицированные особи",
    color=:green)
plot!(
    plt,
    T,
    R,
    label="Особи с иммунитетом",
    color=:red)

savefig(plt, "lab06_2.png")

```

Результаты работы кода на Julia

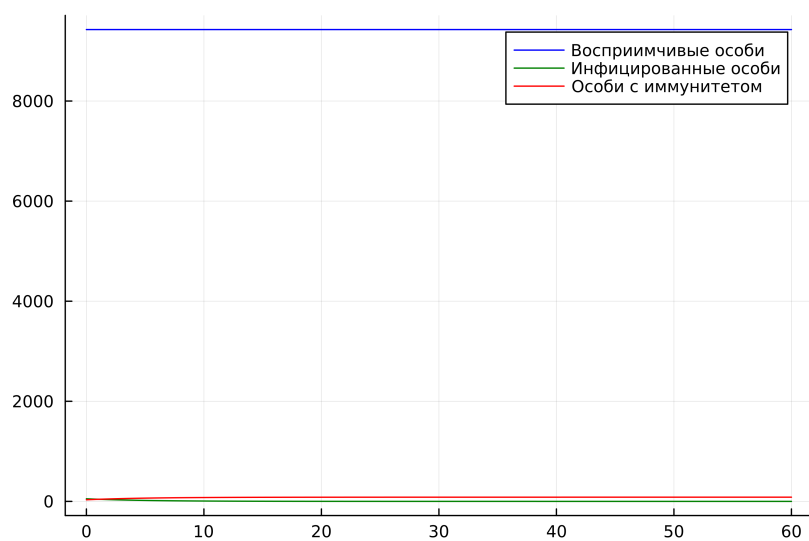


Рис. 1: Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные изолированы

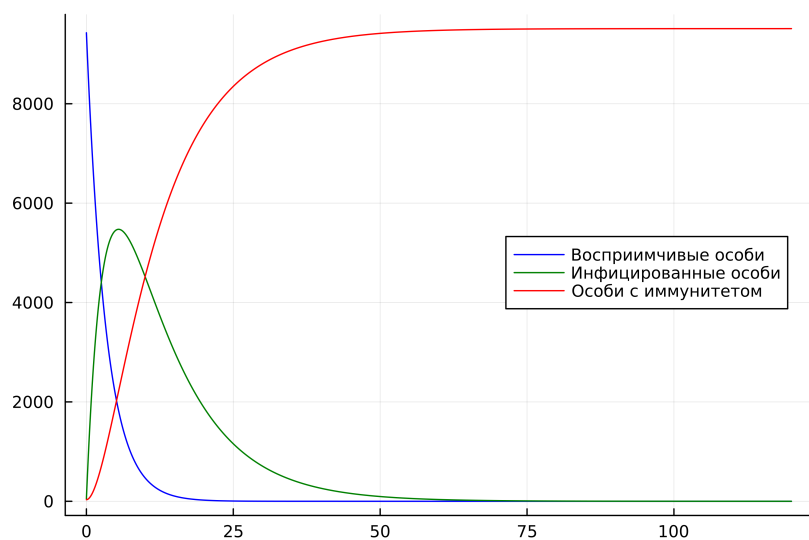


Рис. 2: Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные могут заражать особей группы S

OpenModelica

Код программы для случая $I(0) \leq I^*$:

```
model lab06_1
Real N = 9512;
Real I;
Real R;
Real S;
Real alpha = 0.4;
Real beta = 0.2;
initial equation
I = 52;
R = 32;
S = N - I - R;
equation
der(S) = 0;
der(I) = -beta*I;
der(R) = beta*I;
end lab06_1;
```

Код программы для случая $I(0) > I^*$:

```
model lab06_2
Real N = 9512;
Real I;
Real R;
Real S;
Real alpha = 0.3;
Real beta = 0.1;
initial equation
```

```

I = 52;
R = 32;
S = N - I - R;
equation
der(S) = -alpha*S;
der(I) = alpha*S - beta*I;
der(R) = beta*I;
end lab06_2;

```

Результаты работы кода на OpenModelica

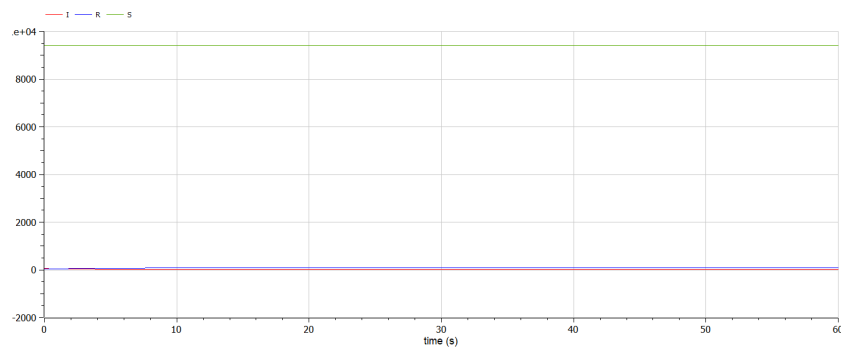


Рис. 3: Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные изолированы

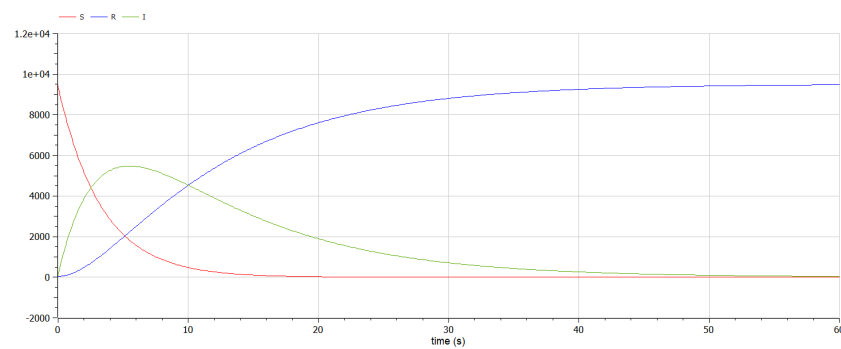


Рис. 4: Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные могут заражать особей группы S

Анализ полученных результатов.

Сравнение языков.

В итоге проделанной работы мы построили графики зависимости численности особей трех групп S , I , R для случаев, когда больные изолированы и когда они могут заражать особей группы S .

Построение модели эпидемии на языке OpenModelica занимает значительно меньше строк, чем аналогичное построение на Julia. Кроме того, построения на языке OpenModelica проводятся относительно значения времени t по умолчанию, что упрощает нашу работу.

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель эпидемии и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

Список литературы. Библиография.

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>
- [4] Конструирование эпидемиологических моделей: <https://habr.com/ru/post/551682/>