

Лабораторная работа №2

Математическое моделирование

Коняева М. А.

Докладчик

- Коняева Марина
Александровна
- Студентка группы НФИбд-01-
21
- Студ. билет 1032217044
- Российский университет
дружбы народов

Цель лабораторной работы

- Изучить основы языков программирования Julia и OpenModelica. Освоить библиотеки этих языков, которые используются для построения графиков и решения дифференциальных уравнений. Решить задачу о погоне.

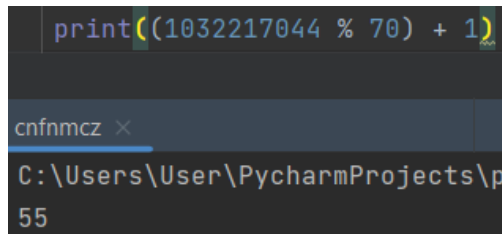
Задание лабораторной работы

Задания лабораторной работы разделены по вариантам.

Мой вариант 55

(исходя из формулы $N_{student} \bmod K_{of\ variants} + 1$).

Этот же вариант будет использоваться для всех последующих лабораторных работ.



```
print((1032217044 % 70) + 1)
```

cnfnmcz ×

C:\Users\User\PycharmProjects\p

55

(рис. 1. Формула вычисления варианта и её вывод)

Задание лабораторной работы

Задача о погоне. Вариант 55:

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 17,8 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении.

Известно, что скорость катера в 4,8 раза больше скорости браконьерской лодки.

Задачи:

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

Теоретическая справка (1)

Справка о языках программирования

- Julia — высокоуровневый высокопроизводительный свободный язык программирования с динамической типизацией, созданный для математических вычислений. Эффективен также и для написания программ общего назначения. Синтаксис языка схож с синтаксисом других математических языков (например, MATLAB и Octave), однако имеет некоторые существенные отличия. Julia написан на Си, С++ и Scheme. Имеет встроенную поддержку многопоточности и распределённых вычислений, реализованные в том числе в стандартных конструкциях.

Теоретическая справка (1)

Справка о языках программирования

- OpenModelica — свободное открытое программное обеспечение для моделирования, симуляции, оптимизации и анализа сложных динамических систем. Основано на языке Modelica. Активно развивается Open Source Modelica Consortium, некоммерческой неправительственной организацией. Open Source Modelica Consortium является совместным проектом RISE SICS East AB и Линчёпингского университета. По своим возможностям приближается к таким вычислительным средам как Matlab Simulink, Scilab xCos, имея при этом значительно более удобное представление системы уравнений исследуемого блока.

Теоретическая справка (2)

Математическая справка

- Дифференциальное уравнение — уравнение, которое помимо функции содержит её производные. Порядок входящих в уравнение производных может быть различен (формально он ничем не ограничен). Производные, функции, независимые переменные и параметры могут входить в уравнение в различных комбинациях или отсутствовать вовсе, кроме хотя бы одной производной. Не любое уравнение, содержащее производные неизвестной функции, является дифференциальным.

Теоретическая справка (3)

Физические термины

- Тангенциальная скорость - составляющая вектора скорости, перпендикулярная линии, соединяющей источник и наблюдателя. Измеряется собственному движению - угловому перемещению источника.
- Радиальная скорость — проекция скорости точки на прямую, соединяющую её с выбранным началом координат.
- Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.

ХОД ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Построение математической модели (1)

1. Примем за момент отсчета времени момент первого рассеивания тумана. Введем полярные координаты с центром в точке нахождения браконьеров и осью, проходящей через катер береговой охраны. Тогда начальные координаты катера $(12, 2; 0)$. Обозначим скорость лодки v .
2. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса. Только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Построение математической модели (2)

3. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить следующее уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $17,8 + x$ (или $17,8 - x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{17,8 - x}{4,8v}$ ($\frac{17,8 + x}{4,8v}$). Так как время должно быть одинаковым, эти величины тоже будут друг другу равны. Из этого получаем объединение из двух уравнений (двух из-за двух разных изначальных позиций катера относительно полюса):

$$\begin{array}{l} \frac{x}{v} = \frac{17,8 - x}{4,8v} \\ \frac{x}{v} = \frac{17,8 + x}{4,8v} \end{array}$$

Построение математической модели (3)

Из данных уравнений можно найти расстояние, после которого катер начнёт раскручиваться по спирали. Для данных уравнений решения будут следующими: $x_1 = \frac{89}{29}$, $x_2 = \frac{89}{19}$. Задачу будем решать для двух случаев. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: $v_r = \frac{dr}{dt} = v$ - радиальная скорость и $v_\tau = r \frac{d\theta}{dt}$ - тангенциальная скорость.

$$v_\tau = \frac{\sqrt{551}v}{5}$$

Построение математической модели (4)

4. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{551}v}{5} \end{array}$$

Построение математической модели (5)

С начальными условиями:

```
$$ \left\{ \begin{array}{cl} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 = \frac{89}{29} \end{array} \right. \right.
```

или

```
$$ \left\{ \begin{array}{cl} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 = \frac{89}{19} \end{array} \right. \right.
```


Построение математической модели (5)

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению (с неизменными начальными условиями):

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{5r}{\sqrt{551}}$$

Решением этого уравнения с заданными начальными условиями и будет являться траектория движения катера в полярных координатах.

РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММ

OpenModelica

К сожалению, OpenModelica не адаптирована к использованию полярных координат, поэтому адекватное отображение результатов данной задачи там невозможно.

Julia

Решить дифференциальное уравнение, расписанное в постановке задачи лабораторной работы, поможет библиотека `DifferentialEquations`. Итоговые изображения в полярных координатах будут строиться через библиотеку `Plots`. [1]

- Установим Julia
- Установим нужные библиотеки, проверим их установку

Julia

Julia 1.10.0-DEV

```
julia> using Plots  
julia> using DifferentialEquations  
julia>
```

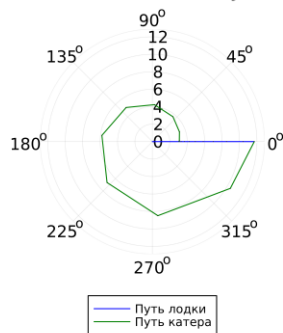
The screenshot displays a Julia REPL session. It starts with the prompt 'julia>' followed by 'using Plots' and 'using DifferentialEquations'. The output shows the packages are loaded successfully. Then, the user enters 'julia>' again. Below this, there is a large ASCII art drawing of a cat, which appears to be a logo or a decorative element. The cat is drawn with various symbols like underscores, pipes, and parentheses, colored in blue, green, red, and pink.

“Вид рабочего окна”

Результаты работы кода на Julia (1)

На рис. @fig:004 и @fig:005 изображены итоговые графики траектории движения катера и лодки для случая обоих случаев.

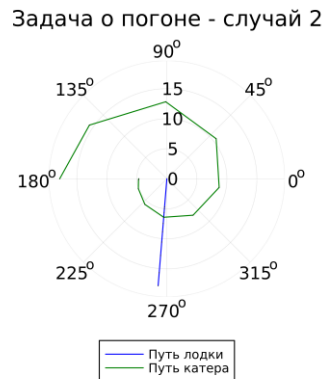
Задача о погоне - случай 1



“Полученный график. Первый случай”

Результаты работы кода на Julia (1)

На рис. @fig:004 и @fig:005 изображены итоговые графики траектории движения катера и лодки для случая обоих случаев.



“Полученный график. Второй случай”

Анализ полученных результатов

Мною были построены графики для обоих случаев. На них получилось отрисовать траекторию катера, траекторию лодки и получилось наглядно найти их точки пересечения. Мы успешно решили задачу о погоне.

ВЫВОД

Вывод

Были изучены основы языков программирования Julia и OpenModelica. Освоены библиотеки этих языков, которые используются для построения графиков и решения дифференциальных уравнений. Поскольку OpenModelica не работает с полярными координатами, она пока что не была использована в данной лабораторной работе.

Список литературы. Библиография

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений:
<https://www.wolframalpha.com/>