

Лабораторная работа №5

Модель хищник-жертва. Вариант №55

Коняева Марина Александровна

НФИбд-01-21

Студ. билет: 1032217044

2024

RUDN

- Коняева Марина Александровна
- Студентка группы НФИбд-01-21
- Студ. билет 1032217044
- Российский университет дружбы народов



- Изучить жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [4]

Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dx(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, $-b$ - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии

$x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$.

Колебания совершаются в противофазе.

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.14x(t) + 0.041y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.23y(t) - 0.034y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8$, $y_0 = 21$ Найдите стационарное состояние системы.

Задачи:

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы

Математическая модель

По представленному выше теоретическому материалу были составлены модели на обоих языках программирования.

Результаты работы кода на Julia и Open Modelica для первого случая (График численности хищников от численности жертв)

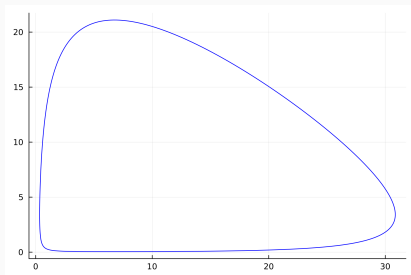


Рис. 1: “График, построенный на языке Julia”

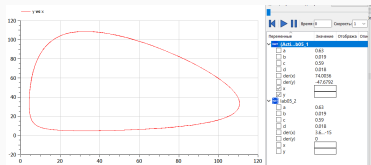


Рис. 2: “График, построенный на языке Open Modelica”

Результаты работы кода на Julia и Open Modelica для второго случая (График численности жертв и хищников от времени)

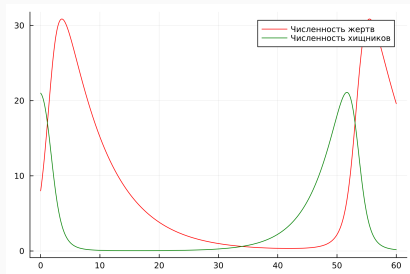


Рис. 3: “График, построенный на языке Julia”

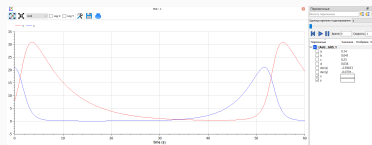


Рис. 4: “График, построенный на языке Open Modelica”

Результаты работы кода на Julia и Open Modelica для третьего случая (стационарное состояние)

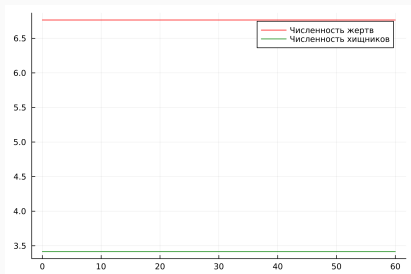


Рис. 5: "График, построенный на языке Julia"

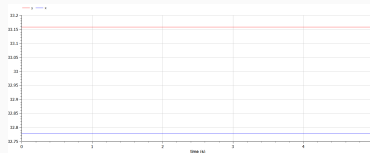


Рис. 6: "График, построенный на языке Open Modelica"

В итоге проделанной работы мы построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв на языках Julia и OpenModelica. Построение модели хищник-жертва на языке openModelica занимает меньше строк, чем аналогичное построение на Julia.

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений:
<https://www.wolframalpha.com/>
- [4] Модель Лотки—Вольтерры: https://math-it.petrus.ru/users/semenova/MathECO/Lectons/Lotka_Volterra.pdf