Лабораторная работа №6 Решение моделей в непрерывном и дискретном времени

Статический анализ данных

Коняева Марина Александровна
НФИбд-01-21
Студ. билет: 1032217044

2024

RUDN

Цели лабораторной работы

Освоить специализированных пакетов для решения задач в непрерывном и дискретном времени.

Теоретическое введение

Напомним, что обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) описывает изменение некоторой переменной u:

$$u'(t) = f(u(t), p, t),$$

где $f(u(t), p, t)$ — нелинейная модель (функция) изменения $u(t)$ с заданным начальным значением $u(t_0) = u_0$, p — параметры модели, t — время.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в Julia можно использовать пакет `diffrentialEquations.jl`.

Задачи лабораторной работы

1. Используя Jupyter Lab, повторите примеры из раздела 6.2.
2. Выполните задания для самостоятельной работы (раздел 6.4).

Выполнение лабораторной работы

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Напомним, что обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) описывает изменение некоторой переменной u:

$$u'(t) = f(u(t), p, t),$$

где $f(u(t), p, t)$ — нелинейная модель (функция) изменения $u(t)$ с заданным начальным значением $u(t_0) = u_0$, p — параметры модели, t — время.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в Julia можно использовать пакет `diffrentialEquations.jl`.

Модель экспоненциального роста

1. Перед использованием пакетов следует их установить и подключить в Julia.

подключаем необходимые пакеты: import Pkg Pkg.add(“DifferentialEquations”) Pkg.add(“Plots”)

2. Рассмотрим пример использования этого пакета для решение уравнения модели экспоненциального роста, описываемую уравнением □′(□) = □□(□), □(0) = □0, где □ — коэффициент роста. Предположим, что заданы следующие начальные данные □ = 0, 98, □(0) = 1, 0, □ □ [0; 1, 0]. Аналитическое решение модели (6.1) имеет вид: □(□) = □0 exp(□□)□(□).

```julia
using DifferentialEquations
# задаём описание модели с начальными условиями:
a = 0.98
f(u,p,t) = a*u
u0 = 1.0
# задаём интервал времени:
tspan = (0.0,1.0)
# решение:
prob = ODEProblem(f,u0,tspan)
sol = solve(prob)
# подключаем необходимые пакеты:
using Plots
# строим графики:
plot(sol, linewidth=5,title="Модель экспоненциального роста", xaxis="Время",yaxis="
plot!(sol.t, t->1.0*exp(a*t),lw=3,ls=:dash,label="Аналитическое решение")
```

Рис. 1: Листинг

Модель экспоненциального роста

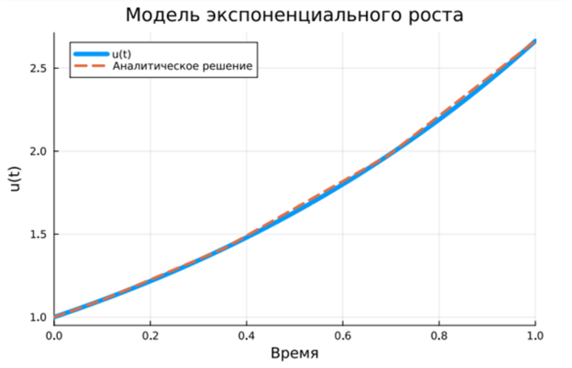


Рис. 2: Модель экспоненциального роста

Модель экспоненциального роста

3. Повторим аналогичный пример. При построении одного из графиков использовался вызов sol.t, чтобы захватить массив моментов времени. Массив решений можно получить, воспользовавшись sol.u. Если требуется задать точность решения, то можно воспользоваться параметрами abstol (задаёт близость к нулю) и reltol (задаёт относительную точность). По умолчанию эти параметры имеют значение abstol = 1e-6 и reltol = 1e-3.

```
# задаём точность решения:
sol = solve(prob,abstol=1e-8,reltol=1e-8)
println(sol)
# строим график:
plot(sol, lw=2, color="black", title="Модель экспоненциального роста", xaxis="Время",yaxis="u(t)",label="Численное решение")
plot!(sol.t, t->1.0*exp(a*t),lw=3,ls=:dash,color="red",label="Аналитическое решение")
```

Рис. 3: Листинг

Модель экспоненциального роста

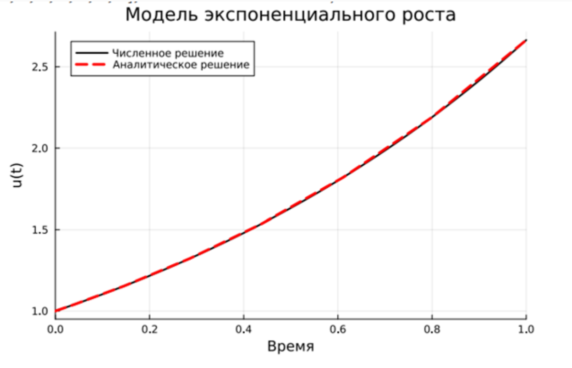


Рис. 4: Модель экспоненциального роста

Система Лоренца

Динамической системой Лоренца является нелинейная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = \rho x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases} \tag{6.2}$$

где σ, ρ и β — параметры системы (некоторые положительные числа, обычно указывают $\sigma = 10$, $\rho = 28$ и $\beta = 8/3$).

4. Повторим пример. Система (6.2) получена из системы уравнений Навье–Стокса и описывает движение воздушных потоков в плоском слое жидкости постоянной толщины при разложении скорости течения и температуры в двойные ряды Фурье с последующем усечением до первых-вторых гармоник. Решение системы неустойчиво на аттракторе, что не позволяет применять классические численные методы на больших отрезках времени, требуется использовать высокоточные вычисления.

```
# задаём описание модели:
function lorenz!(du,u,p,t)
σ,ρ,β = p
    du[1] = σ*(u[2]-u[1])
    du[2] = u[1]*(ρ-u[3]) - u[2]
du[3] = u[1]*u[2] - β*u[3]
end
# задаём начальное условие:
u0 = [1.0,0.0,0.0]
# задаём знанчения параметров:
p = (10,28,8/3)
# задаём интервал времени:
tspan = (0.0,100.0)
# решение:
```

Система Лоренца

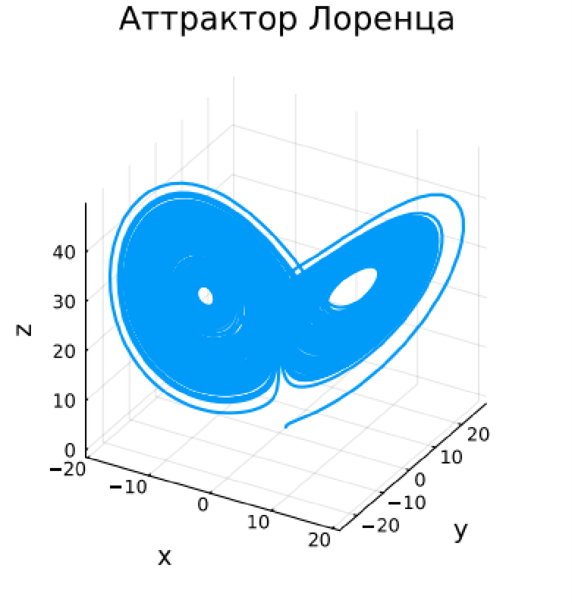


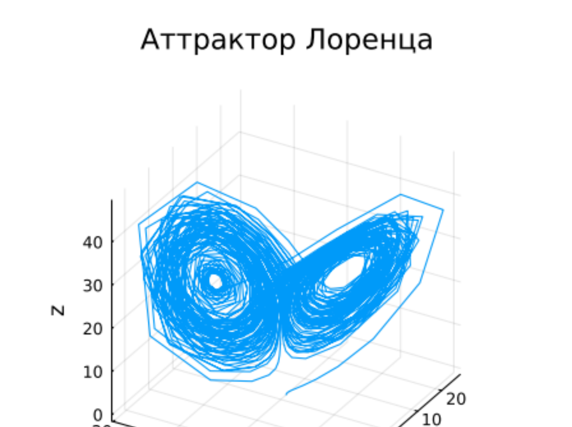
Рис. 6: Аттрактор Лоренца

Система Лоренца

5. Повторим пример системы Лоренца, но при этом отключим интерполяцию.

```
# отключаем интерполяцию:
plot(sol,vars=(1,2,3),denseplot=false, lw=1, title="Аттрактор Лоренца", xaxis="x",yaxis="y", zaxis="z",legend=false)
```

Рис. 7: Листинг



Модель Лотки–Вольтерры описывает взаимодействие двух видов типа «хищник – жертва»:

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - \beta y)x, \\ \dot{y} = (-\gamma + \delta x)y, \end{cases}$$

где x — количество жертв, y — количество хищников, t — время, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами (в данном случае α — коэффициент рождаемости жертв, γ — коэффициент убыли хищников, β — коэффициент убыли жертв в результате взаимодействия с хищниками, δ — коэффициент роста численности хищников).

6. Повторим пример реализации модели Лотки-Вольтерры.

```
using ParameterizedFunctions, DifferentialEquations, Plots;
# задаём описание модели:
lv! = @ode_def LotkaVolterra begin
dx = a*x - b*x*y
dy = -c*y + d*x*y
end a b c d
# задаём начальное условие:
u0 = [1.0,1.0]
# задаём значения параметров:
p = (1.5,1.0,3.0,1.0)
# задаём интервал времени:
tspan = (0.0,10.0)
# решение:
prob = ODEProblem(lv!,u0,tspan,p)
sol = solve(prob)
plot(sol, label = ["Жертвы" "Хищники"], color="black", ls=[:solid :dash], title="Модель Лотки - Вольтерры", xaxis="Время",yaxis="P
```

Рис. 9: Листинг

Модель Лотки–Вольтерры

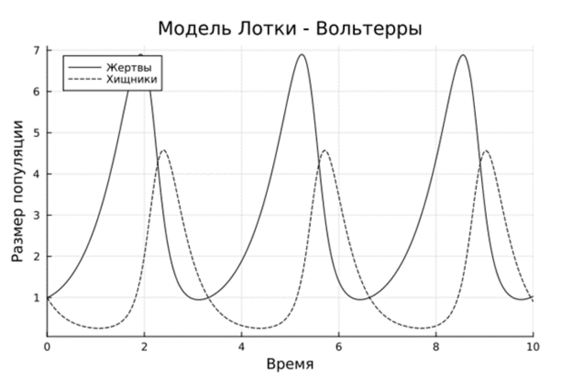


Рис. 10: Модель Лотки–Вольтерры

7. Повторим пример: построим фазовый портрет для модели из пункта 6.

```
# фазовый портрет:
plot(sol,vars=(1,2), color="black", xaxis="Жертвы",yaxis="Хищники", legend=false)
```

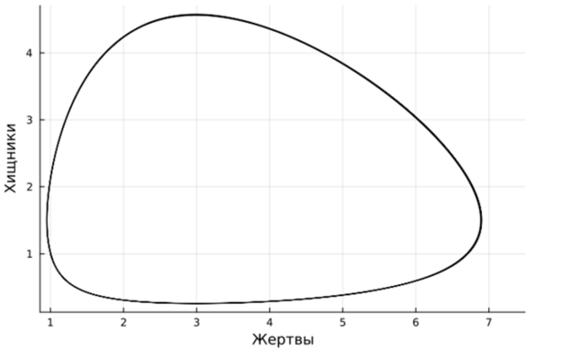


Рис. 11: Листинг и фазовый портрет

1. Модель Мальтуса — модель роста численности изолированной популяции, где изменение роста популяции контролируется численностью уже существующей популяции, домноженной на коэффициент a, который является разницей между рождаемостью и смертностью ($b - c$). Коэффициенты b и c было предложено выбрать самостоятельно, и я выставлю для системы значения $b = 1.09$ и $c = 1.134$ (что является соответственно коэффициентами рождаемости и смертности за январь-август в 2022 году в Центральном федеральном округе РФ). Изначальная численность населения (39433556 человек) также взята из статистики Росстата за 2022 год (с учётом переписи населения).

Модель Мальтуса подразумевает, что коэффициенты рождаемости и смертности не изменяются, так что если b превышает c, численность популяции будет расти (и наоборот).

```
function Maltus!(du,u,p,t)
    du[1] = (p[1]-p[2])*u[1]
end
u0 = [39433556.0]
tspan = (0.0,100.0)
p = Float64[1.09, 1.134]
prob = ODEProblem(Maltus!,u0,tspan,p)
sol = solve(prob,abstol=1e-6,reltol=1e-6, saveat=1.
R1 = [tu[1] for tu in sol.u]
plot(sol.t, R1, title="Модель Мальтуса", xaxis="Вре
```

Задания для самостоятельного выполнения

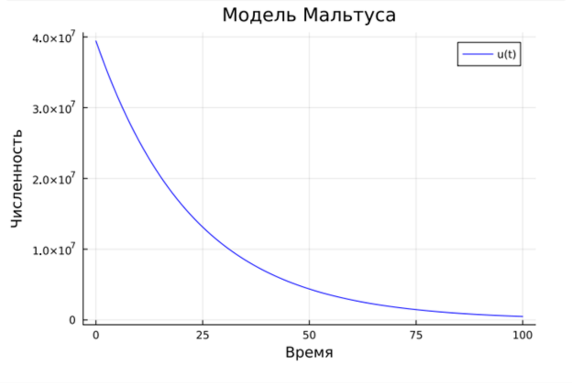


Рис. 12: Модель Мальтуса

```
anim = @animate for i in 1:length(sol.t)
    plot(sol.t[1:i], R1[1:i], title="Логистическая
end
gif(anim, "presentation//image//2.gif")
```

2. Реализовать и проанализировать логистическую модель роста популяции, заданную уравнением: $\dot{□} = □□ (1 - □ □)$, □ > 0, □ > 0, □ — коэффициент роста популяции, □ — потенциальная ёмкость экологической системы (предельное значение численности популяции). Начальные данные и параметры задать самостоятельно и пояснить их выбор. Построить соответствующие графики (в том числе с анимацией).

```
function LogModPop!(du,u,p,t)
    du[1] = p[1]*u[1]*(1-u[1]/p[2])
end
u0 = [39433556.0]
tspan = (0.0,100.0)
p = Float64[1.09, 15e7]
prob = ODEProblem(LogModPop!,u0,tspan,p)
sol = solve(prob,abstol=1e-6,reltol=1e-6, saveat=1.
R1 = [tu[1] for tu in sol.u]
plot(sol.t, R1, title="Логистическая модель роста п
```

Задания для самостоятельного выполнения

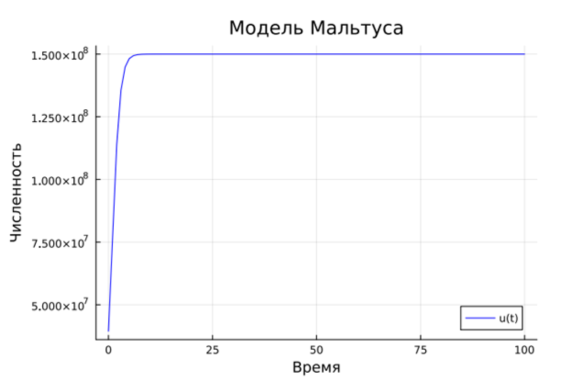


Рис. 13: Логистическая модель роста популяции

```
anim = @animate for i in 1:length(sol.t)
    plot(sol.t[1:i], R1[1:i], title="Логистическая
end
gif(anim, "presentation//image//2.gif")
```

Задания для самостоятельного выполнения

3. Модель эпидемии Кермака–Маккендрика (SIR-модель):

Реализовать и проанализировать SIR-модель:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_s &= -\beta i s \\
\dot{x}_i &= \beta i s - \nu i \\
\dot{x}_r &= \nu i
\end{aligned}
$$

где:

- $s(t)$ — численность восприимчивых индивидов
- $i(t)$ — численность инфицированных индивидов
- $r(t)$ — численность переболевших индивидов
- β — коэффициент интенсивности контактов с инфицированием
- ν — коэффициент интенсивности выздоровления

$\dot{x}_s + \dot{x}_i + \dot{x}_r = 0$ (численность популяции постоянна).

Самостоятельно задать начальные данные и параметры, объяснив свой выбор. Построить графики численности каждой группы со временем (включая анимацию).

```
function SIR!(du,u,p,t)
    du[1] = -p[1]*u[1]*u[2] # S
    du[2] = p[1]*u[2]*u[1]-p[2]*u[2] # I
    du[3] = p[2]*u[2] # R
end
u0 = [39433553.0, 3.0, 0.0]
tspan = (0.0,20.0)
p = Float64[0.3,0.7]
prob = ODEProblem(SIR!,u0,tspan,p)
sol = solve(prob,abstol=1e-6,reltol=1e-6, saveat=0.
R1 = [tu[1] for tu in sol.u]
R2 = [tu[2] for tu in sol.u]
R3 = [tu[3] for tu in sol.u]
plot(sol.t, R1, title="SIR", xaxis="Время",yaxis="Ч
plot!(sol.t, R2, title="SIR", label="Infected", c=:
plot!(sol.t, R3, label="Recovered", c=:blue, leg=:t
```

Задания для самостоятельного выполнения

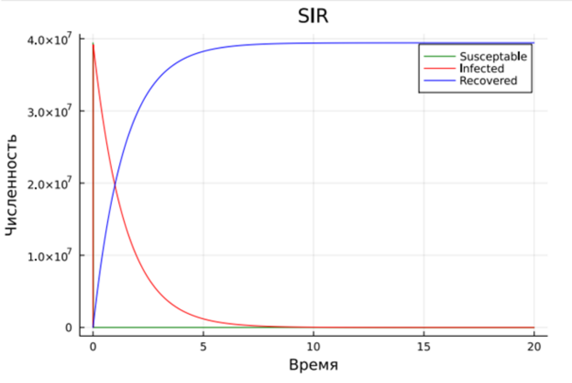


Рис. 14: SIR

```
anim = @animate for i in 1:length(sol.t)
    plot(sol.t[1:i], R1[1:i], title="SIR", xaxis="B
    plot!(sol.t[1:i], R2[1:i], title="SIR", label="
    plot!(sol.t[1:i], R3[1:i], label="Recovered", c
end
```

Задания для самостоятельного выполнения

4. Реализовать и проанализировать модель SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Removed):

$$\dot{x}_s(t) = -\beta/N * s(t)i(t)$$
$$\dot{x}_e(t) = \beta/N * s(t)i(t) - \delta e(t)$$
$$\dot{x}_i(t) = \delta e(t) - \gamma i(t)$$
$$\dot{x}_r(t) = \gamma i(t)$$
$$s(t) + e(t) + i(t) + r(t) = N$$

Сравнить результаты с SIR-моделью.

```
function SEIR!(du,u,p,t)
    betta, delta, gamma, N = p
    s, e, i, r = u
    du[1] = -betta / N * s * i
    du[2] = betta / N * s * i - delta * e
    du[3] = delta * e - gamma * i
    du[4] = gamma * i
end
u0 = [0.98, 0.02, 0.0, 0.0]
tspan = (0.0,200.0)
p = Float64[0.8,0.4,0.3,1.0]
prob = ODEProblem(SEIR!,u0,tspan,p)
sol = solve(prob,abstol=1e-6,reltol=1e-6, saveat=0.
R1 = [tu[1] for tu in sol.u]
R2 = [tu[2] for tu in sol.u]
R3 = [tu[3] for tu in sol.u]
R4 = [tu[4] for tu in sol.u]
plot(sol.t, R1, title="SEIR", xaxis="Время",yaxis="
plot!(sol.t, R2, label="Exposed", c=:orange, leg=:t
```

Задания для самостоятельного выполнения

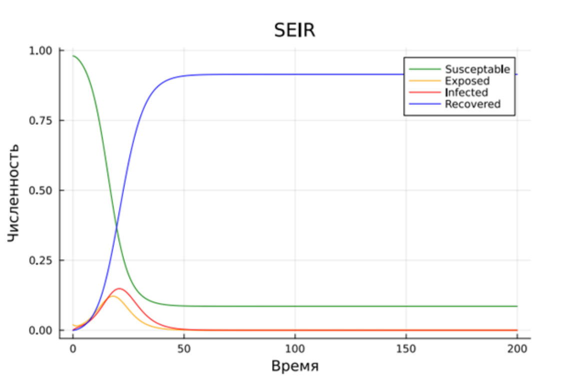


Рис. 15: SEIR

Задания для самостоятельного выполнения

```
anim = @animate for i in 1:length(sol.t)
    plot(sol.t[1:i], R1[1:i], title="SEIR", xaxis="
    plot!(sol.t[1:i], R2[1:i], label="Exposed", c=:
    plot!(sol.t[1:i], R3[1:i], label="Infected", c=
    plot!(sol.t[1:i], R4[1:i], label="Recovered", c
end
gif(anim, "presentation//image//4.gif")
```

5. Дискретная модель Лотки–Вольтерры:

Для дискретной модели:

```
X□(t + 1) = aX□(t)(1 - X□(t)) - X□(t)X□(t)
X□(t + 1) = -cX□(t) + dX□(t)X□(t)
```

с начальными данными a = 2, c = 1, d = 5 найти точку равновесия. Получить и сравнить аналитическое и численное решения. Изобразить численное решение на фазовом портрете.

```
using NLsolve
# Аналитическое решение
function find_equilibrium(a, c, d)
    function system!(du, u)
        du[1] = a*u[1]*(1-u[1]) - u[1]*u[2]
        du[2] = -c*u[2] + d*u[1]*u[2]
    end

    initial_guess = [0.5, 0.5]
    result = nlsolve(system!, initial_guess)

    equilibrium_point = result.zero
    return equilibrium_point
end
# Численное решение
function LotkiVolterry(a, c, d, x1_0, x2_0, dt, num
    x1 = x1_0
    x2 = x2_0
    results = [(x1, x2)]
```

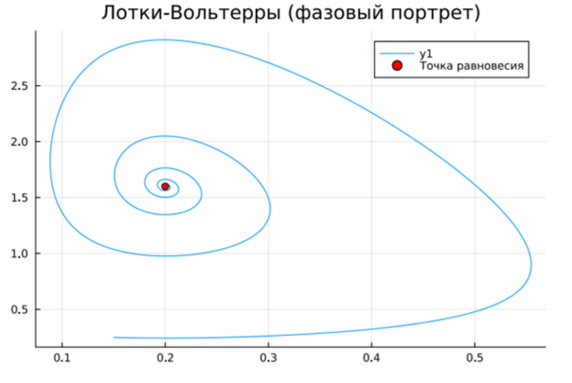


Рис. 16: модель Лотки–Вольтерры фазовый портрет

```
anim = @animate for i in 1:length(R1)
    plot(R1[1:i], R2[1:i], title="Лотки-Вольтерры (
    scatter!([equilibrium[1]], [equilibrium[2]], co
end
gif(anim, "presentation//image//5.gif")
```

6. Модель отбора на основе конкурентных отношений (Julia):

Реализовать модель:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x y$$
$$\dot{y} = \alpha y - \beta x y$$

Самостоятельно задать начальные данные и параметры, объяснив свой выбор. Построить графики и фазовый портрет (включая анимацию).

```
function KonkOtn!(du,u,p,t)
    du[1] = p[1] * u[1] - p[2] * u[1] * u[2]
    du[2] = -p[1] * u[2] + p[2] * u[1] * u[2]
end
u0 = [16.0,7.0]
tspan = (0.0,100.0)
p = Float64[0.02, 0.04]
prob = ODEProblem(KonkOtn!,u0,tspan,p)
sol = solve(prob,abstol=1e-6,reltol=1e-6, saveat=0.
R1 = [tu[1] for tu in sol.u]
R2 = [tu[2] for tu in sol.u]
plot(sol.t, R1, title="Конкурентные отношения", xax
plot!(sol.t, R2, label="y", c=:orange, leg=:topright
```

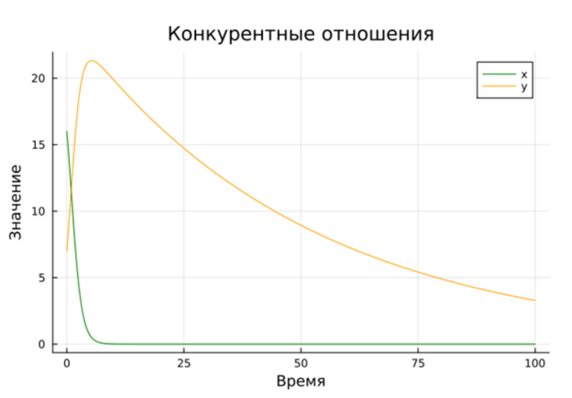


Рис. 17: Конкурентные отношения

```
anim = @animate for i in 1:length(R1)
    plot(sol.t[1:i], R1[1:i], title="Конкурентные о
    plot!(sol.t[1:i], R2[1:i], label="y", c=:orange
end
gif(anim, "presentation//image//6.gif")
```

```
plot(R1, R2, title="Конкурентные отношения (фазовый
```

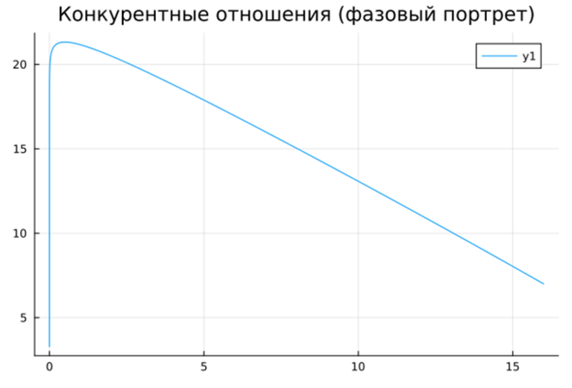


Рис. 18: Фазовый портрет

7. Консервативный гармонический осциллятор (Julia):

Реализовать модель:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,\ x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = y_0$$

Самостоятельно задать начальные параметры, объяснив свой выбор.
Построить графики и фазовый портрет (включая анимацию).

```
function KGO!(du,u,p,t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -p[1]^2 * u[1]
end
u0 = [0.0, 1.0]
tspan = (0.0,10.0)
p = Float64[3.0]
prob = ODEProblem(KGO!,u0,tspan,p)
sol = solve(prob,abstol=1e-6,reltol=1e-6, saveat=0.
R1 = [tu[1] for tu in sol.u]
R2 = [tu[2] for tu in sol.u]
plot(sol.t, R1, title="Консервативный гармонический
```

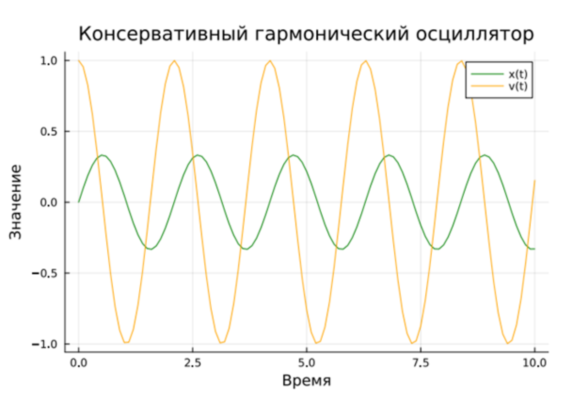


Рис. 19: Консервативный гармонический осциллятор

```
anim = @animate for i in 1:length(R1)
    plot(sol.t[1:i], R1[1:i], title="Консервативный
    plot!(sol.t[1:i], R2[1:i], label="v(t)", c=:ora
end
```

Задания для самостоятельного выполнения

```
plot(R1, R2, title="Консервативный гармонический ос
```

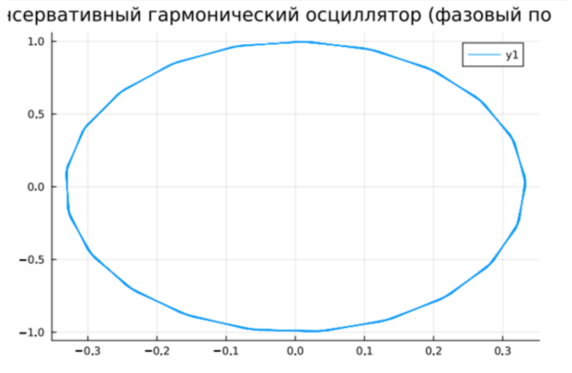


Рис. 20: Фазовый портрет

Задания для самостоятельного выполнения

8. Свободные колебания гармонического осциллятора (Julia):

Реализовать модель затухающих колебаний:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,\quad x(t_0) = x_0,\quad \dot{x}(t_0) = y_0$$

где γ — параметр затухания. Самостоятельно задать начальные параметры, объяснив свой выбор. Построить графики и фазовый портрет (включая анимацию).

```
function GO!(du,u,p,t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -2.0*p[2]*u[2] - p[1]^2*u[1]
end
u0 = [0.0, 1.0]
tspan = (0.0,10.0)
p = Float64[4.0, 0.2]
prob = ODEProblem(GO!,u0,tspan,p)
sol = solve(prob,abstol=1e-6,reltol=1e-6, saveat=0.
R1 = [tu[1] for tu in sol.u]
R2 = [tu[2] for tu in sol.u]
```

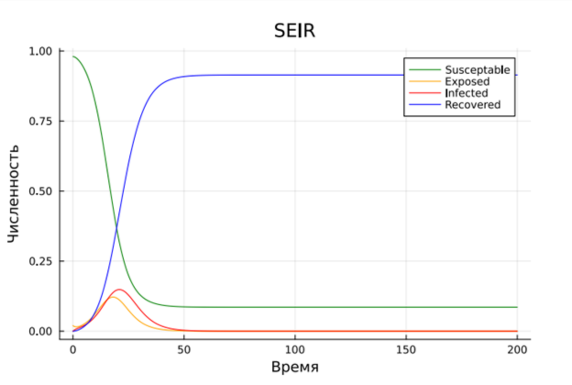


Рис. 21: Гармонический осциллятор

```
anim = @animate for i in 1:length(R1)
    plot(sol.t[1:i], R1[1:i], title="Гармонический
    plot!(sol.t[1:i], R2[1:i], label="v(t)", c=:ora
end
```

```
plot(R1, R2, title="Гармонический осциллятор (фазов
```

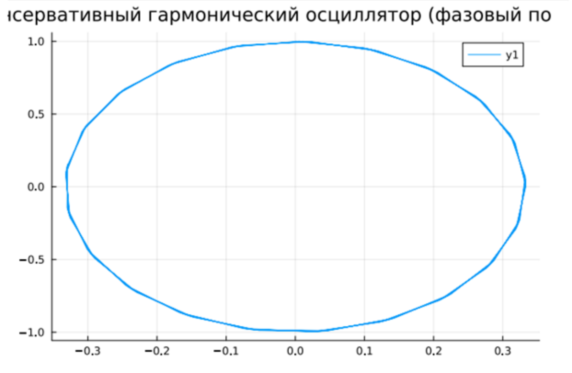


Рис. 22: Фазовый портрет

Вывод

В результате выполнения работы мы освоили специализированные пакеты для решения задач в непрерывном и дискретном времени. Были записаны скринкасты выполнения , создания отчета, презентации и защиты лабораторной работы.

Список литературы

- Julia: https://ru.wikipedia.org/wiki/Julia
- https://julialang.org/packages/
- https://juliahub.com/ui/Home
- https://juliaobserver.com/
- https://github.com/svaksha/Julia.jl