Sorting && Time complexity

Basato su Competitive Programmer's Handbook, Dispense del prof. Bugatti e Halim's Competitive Programming 3

Index

- Teoria su complessità computazionale (20 min)
- Algortimi di sorting (55 min)
  - Random && bucket sort (5 min)
  - Bubble sort (20 min)
  - Selection o insertion sort (30 min)
- Teoria recursion (15 min)
- Merge sort (30 min)

Complessità computazionale

Quando parliamo di efficienza come facciamo a capire quando un algoritmo è migliore rispetto a un altro?

Complessità computazionale

Quando parliamo di efficienza come facciamo a capire quando un algoritmo è migliore rispetto a un altro?
Si calcola una stima di costo dell'algoritmo.

- costo = tempo di esecuzione

Esempio

- Supponiamo che la dichiarazione, assegnazione e qualsiasi operazione su una variabile costa 1

```
int a = 5;                  //costo 1
for(int i=1; i<N; i++){     // costo ?
  a = a * a;                //costo 1
}
return a;
```

Complessità computazionale

Esempio, Supponiamo che

- inserire valore da tastiera
- istruzione di confronto
- operazioni matematiche

hanno tutte costo 1

Calcolate la complessità

```
int a, b = 0;                    // dichiarazione
cin >> a;                       // inserimento
for(int i=0; i<N; i++){    // ?
  if(a > 5) {                  // confronto
    b = b + i;               // operzione
    a--;                     // continuate voi
  }else{
    for(int j=0; j<N; j++){
      b = b + j
    }
  }
}
return a + b;
```

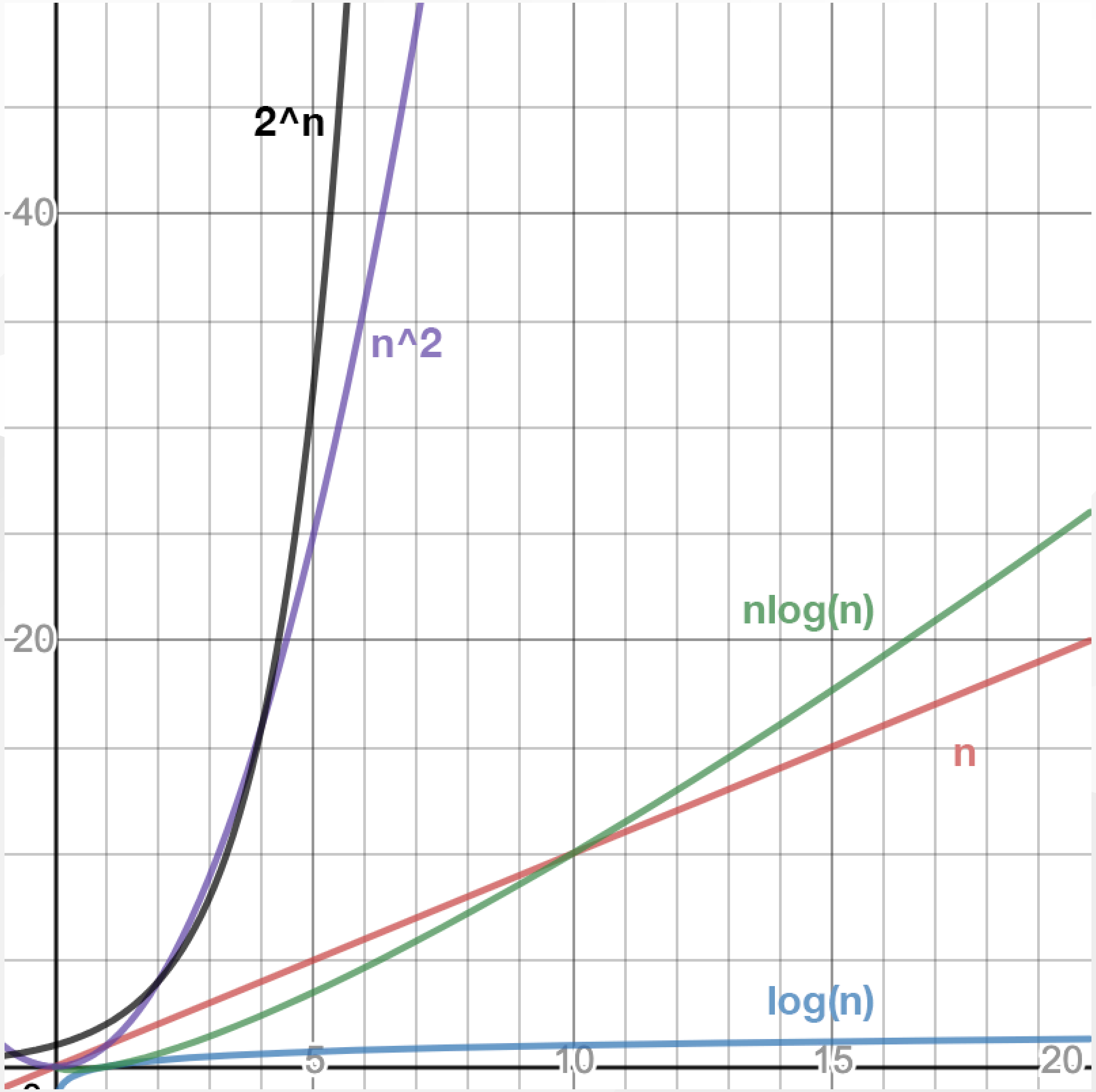
Notazione O(n)

Per calcolare la complessità dobbiamo:

- analizzare il caso peggiore
- valutare il costo per un N molto grande

Quando N è molto grande possiamo "dimenticarci" degli altri termini. A questo punto la complessità possiamo approssimarla a delle "famiglie" di funzioni. Indichiamo queste con la notazione di O(_) ("o" grande):

O(1) - O(logN) - O(N) - O(NlogN) - O(N^2) - O(2^N)


2^n
n^2
nlog(n)
n
log(n)
40
20
5
10
15
20

Algoritmi di sorting

Affronteremo ora il problema di riordinamento di un array. Ci eserciteremo a scrivere questi algoritmi e a cercare l'algoritmo più efficiente

Random sort

Approccio "demente" (ergo MEGA non efficiente):

- **Genero tutte le possibili permutazioni fino a quando non ne trovo una già ordinata.**

Un'analogia è quella di ordinare un mazzo di carte lanciandolo in aria, raccogliendo le carte a caso e ripetendo il processo fino a quando il mazzo non è ordinato.
Ergo Sembra quasi-impossibile di trovare l'oridne giusto e non prendere sempre la versione sbagliata.

Random sort && Psuedo-codice

Ma ... e se per sbaglio scegliessi sempre lo stesso ordine sbagliato e ripetessi sempre quello? Buona notte perché in tale caso sarebbe infinito tempo.

Pseudo-codice:

```
while not sorted(deck):
    shuffle(deck)
```

Source: https://en.wikipedia.org/wiki/Bogosort

Random sort && Codice

```
bool is_in_order() {
    for (int i = 0; i < input.size() - 1; ++i) {
        if (input[i] > input[i + 1])
            return false;
    }
    return true;
}

void bogo_sort() {
    random_device rd;           // Generatore di numeri casuali basato su hardware
    mt19937 g(rd());            // Generatore casuale a 32 bit
    while (!is_in_order()) {    // Continua a mescolare finché non è ordinato
        shuffle(input.begin(), input.end(), g);
    }
}
```

Random sort && Complessità?

Caso peggiore: Non c'è limite superiore pratico perché l'algoritmo potrebbe generare sempre le stesse permutazioni sbagliate.

Formalmente, nel caso peggiore, la **complessità è $O(n \cdot n!)$**.

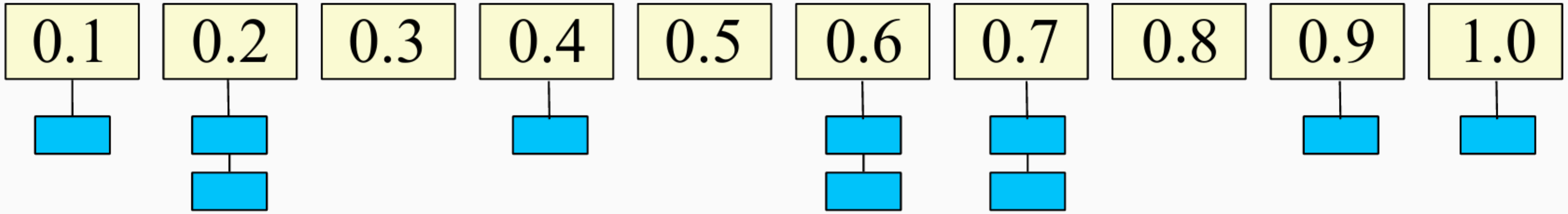
Perché se mi va male devo **controllare tutte le possibilità** con *shuffle()* (che sono $n!$) e per ognuna di essere **vedere se è ordinata** con *is_in_order()* (con costo n)

Bucket Sort

Ipotesi sull'input
Valori reali **uniformemente distribuiti** nell'intervalli [0,1).
Qualunque insieme di valori distribuiti uniformemente può essere normalizzato nell'intervallo [0,1) in tempo lineare.

Idea
Dividere l'intervallo in *n* sottointervalli di dimensione 1/n, detti bucket, e poi **distribuire gli n numeri nei bucket**.
Per l'ipotesi di uniformità, il numero atteso di valori nei bucket è 1.
Possono essere ordinati con Insertion Sort o altri (stabili).

Bucket Sort && Idea Generale



- Imposta un array di "bucket" inizialmente vuoti.
- Esamina l'array originale, inserendo ogni oggetto nel suo bucket (tipo *array[i] = bucket[n*array[i]]*).
- Ordina ogni bucket non vuoto (con, ad esemprio, Selection Sort).
- Visita i bucket in ordine e rimetti tutti gli elementi nell'array originale tramite concatenazione.

Bucket Sort && Idea Dettagliata

1. Crea un *array-bucket* con *10* celle (k), per avere la uniformità;
2. Inserisci ogni elemento del array iniziale nella cella più ***simile*** in *array-bucket* (es: `0.23\*10 -> 2`);
3. Applico un algoritmo efficiente di sorting in ogni *sub_bucket*;
4. Concateno ogni *sub_bucket* nell'array originale

Bucket Sort && Pseudo-Codice

```
function bucketSort(array, k) is
    buckets = new array of k empty lists
    M = 1 + the maximum key value in the array
    for i = 0 to length(array) do
        insert array[i] into buckets[floor(k × array[i] / M)]
    for i = 0 to k do
        sort(buckets[i])
    return the concatenation of buckets[0], ...., buckets[k]
```

Source: https://www.geeksforgeeks.org/bucket-sort-2/
https://en.wikipedia.org/wiki/Bucket_sort

Bucket Sort && Codice

```
void bucketSort() {
    int num_in_bucket = 10; //il "k", per forza per garantire uniformità
    vector<vector<float>> bucket(num_in_bucket);//matrice "lunga k", O(k)
    float M = 1 + *max_element(input.begin(), input.end());//O(n)

    for (float elem : input){//O(1 + 1)*n -> O(n)
      int index=floor(num_in_bucket*elem / M);//hashing func, O(1)
      bucket[index].push_back(elem);//putting elem in the similar bucket, O(1)
    }
    for (int i = 0; i < num_in_bucket; i++)//sorting each sub-vector, O(k)
      selection_sort(bucket[i]);//meglio insertion_sort per pochi elementi, se no sicuramente O(W^2)
      //con "W"=n/k grazie alla distribuzione uniforme
      //ergo O(W^2) -> O((n/k)^2)
    //quindi il tutto è O(k)*O((n/k)^2) -> O(n^2 / k), se k è const allora ho O(n^2)

    input.clear(); //delete all element
    for (int i = 0; i < num_in_bucket; ++i) {//concatenate, O(k)
        for (float num : bucket[i])//O(n/k)
            input.push_back(num);//O(1)
    }
    //ergo il tutto è: O(k)*O(n/k) -> O(n)
} //in conclusione: O(n) + O(n^2) + O(n) -> = O(n)
```

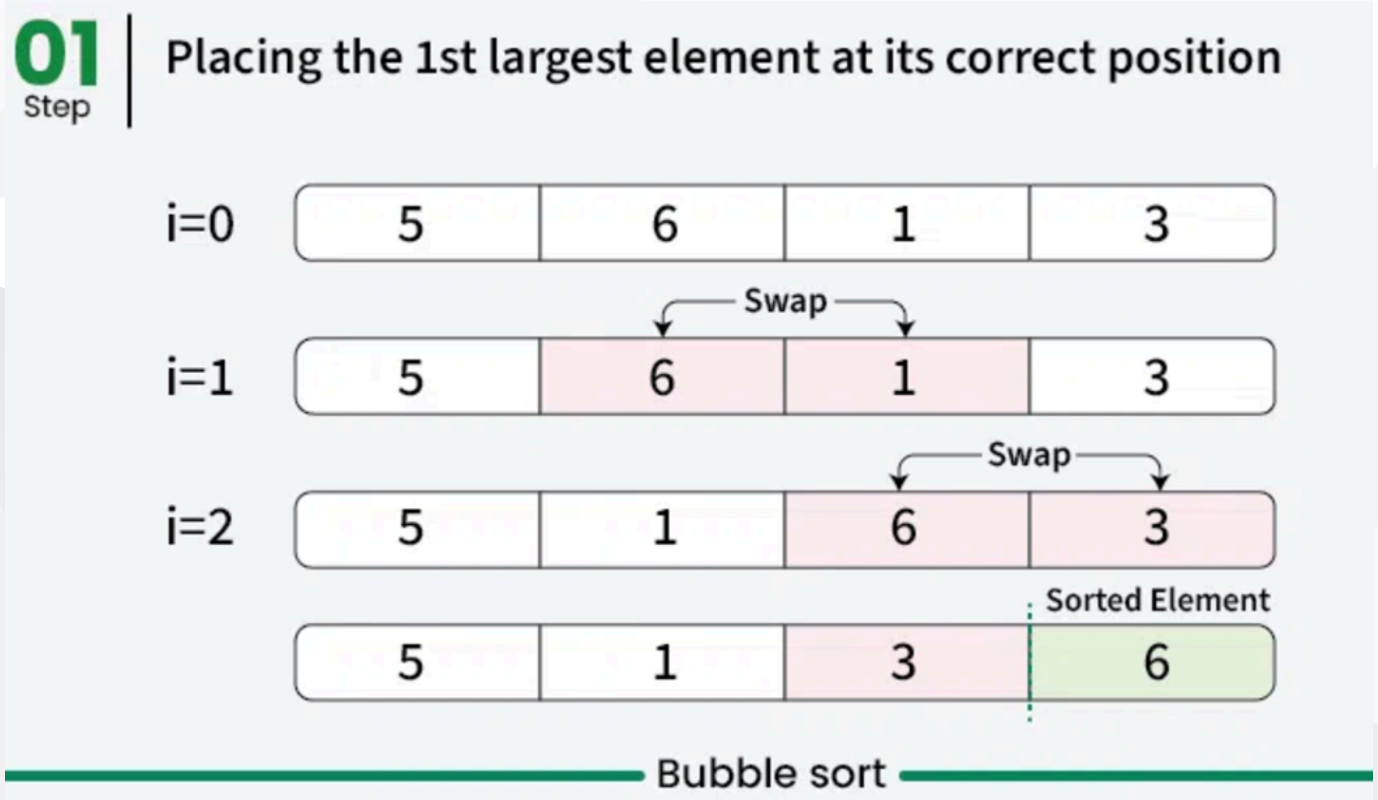
Bucket Sort && Complessità

Vedendo(come sempre di deve fare) il **caso pessimo** *O(n^2)*.
Si verifica quando un bucket ottiene tutti gli elementi.
In questo caso, eseguiremo l'ordinamento per inserimento su tutti gli elementi, il che renderà la complessità temporale pari a ***O(n^2)*** **SE usiamo *selection_sort()***.

Possiamo ridurre la complessità temporale del caso peggiore a *O(n*log n)* utilizzando un algoritmo *O(n*log n)* come Merge Sort

DI SOLITO il caso medio è *O(n + k)* se uso *insertion_sort()* e ogni bucket ha lo stesso numero di elemnti.

Bubble Sort && Idea



Source: https://www.geeksforgeeks.org/bubble-sort-algorithm/
https://en.wikipedia.org/wiki/Bubble_sort

Bubble Sort && Psuedo-Codice

Idea:

- Se elemento[x] è MAGGIORE di elemento[x+1], allora "swappa".

```
bubbleSort(ITEM[] A)
    n = length(A)
    repeat until not swapped
      swapped = false
      for i = 1 to n-1 do
          if A[i-1] > A[i] then//to be swapped
            //swap them and remember something changed
            swap(A[i-1], A[i])
            swapped = true
```

Bubble Sort && Codice && Complessità

```
void bubbleSort() {//O(n)*O(n-1) -> O(n^2)
//NON OTTIMIZZATO !!! in caso usare un booleano di controllo
  for (int i = 0; i < input.size(); i++){//O(n)
    for (int j = i+1; j < input.size(); j++){//O(n-1)
      if(input[i]>input[j])
        iter_swap(input.begin()+i, input.begin()+j);//O(1)
    }
  }
}
```

Codesto ci costa **SEMPRE *O(n^2)***.

Bubble Sort && Codice Ottimizzato && Complessità

```
void bubbleSort() {//O(n)*O(n-1) -> O(n^2)
  for (int i = 0; i < input.size(); i++){//O(n)
    bool swapped=false;
    for (int j = 1; j < input.size()-i-1; j++){//O(n-1)
      if(input[j-1]>input[j])
        iter_swap(input.begin()+j, input.begin()+(j-1));//O(1)
        swapped=true;
    }
    if (!swapped)
      break;
  }
}
```

Codesto ci costa **LO STESSO *O(n^2)*** in teoria, **ma nella pratica è più "veloce"**.

Selection Sort && Idea

Idea:

- Trovo il minimo e lo metto "apposto" dove "dovrebbe" essere.
- Ovvero cerco il minimo e lo metto in posizione corretta, riducendo il problema agli n-1 restanti valori.

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$
$i = 1$	7	4	2	1	8	3	5
$i = 2$	1	4	2	7	8	3	5
$i = 3$	1	2	4	7	8	3	5
$i = 4$	1	2	3	7	8	4	5
$i = 5$	1	2	3	4	8	7	5
$i = 6$	1	2	3	4	5	7	8
$i = 7$	1	2	3	4	5	7	8

Selection Sort && Pseudo-Codice

```
void selectionSort(ITEM[] A, int n)//O(n)*O(n) -> O(n^2)
  for i=1 to n-1 do//O(n-1) -> O(n)
    int min = min(A, i, n)//finding minimum between [i, n], O(n)
    A[i] <-> A[min]//swap them
```

```
int min(ITEM[] A, int i, int n){//O(n)
  //posizione del minimo parziale
  int min = i
  for j=i+1 to n do//O(n)
    if A[j] < A[min] then
      min = j//nuovo minimo parziale
  return min
}
```

Selection Sort && Codice

```
void selection_sort(vector<float> array) {//O(n)*O(n) -> O(n^2)
    for (int i = 0; i < array.size(); i++)//O(n)
      //find Min between [i, end], O(n)
      auto min_iter = min_element(input.begin() + i, input.end());

      //swap between (i <-> Min), O(1)
      iter_swap(input.begin()+i, min_iter);
}
```

Selection Sort && Complessità

Spiace dirlo ma **SEMPRE *O(n^2)***, ovvero in caso ottimo, pessimo e medio *O(n^2)*.
Perché, in codesto algoritmo, **faremo sempre il *for loop* e sempre chiameremo *min_element()***, ergo entrambe costano sempre *O(n)* ciascuna.

Mentre in *insertion_sort()* un *for loop* lo facciamo per forza, ma un *while loop* potremmo anche non farlo se già ordinato.

Accenni Insertion Sort

- Algoritmo efficiente per ordinare "piccoli" insiemi di elementi
- Si basa sul principio di ordinamento di una "mano" di carte da gioco (e.g. scala quaranta)

```
void insertionSort(ITEM[] A, int n){//pessimo: O(n^2), se già ordinato O(n)
  for i = 2 to n do//O(n)
    ITEM tmp = A[i]
    int j=i
    while j>1 and A[j-1]>tmp do//AL PIU' O(n)
      A[j] = A[j-1]
      --j
    A[j]=tmp
}
```

Insertion Sort && suo esempio

	1	2	3	4	5	6	7
	7	4	2	1	8	3	5
$i = 2, j = 2$	7	7	2	1	8	3	5
$i = 2, j = 1$	4	7	2	1	8	3	5
$i = 3, j = 3$	4	7	7	1	8	3	5
$i = 3, j = 2$	4	4	7	1	8	3	5
$i = 3, j = 1$	2	4	7	1	8	3	5

Ricorsione

Per migliorare l'efficienza dei nostri algoritmi ci viene in aiuto un'importante strumento: la ricorsione!
Ma attenzione a usarla bene

Pattern della ricorsione:

```
function(a){
  if caso base
    ...
  else
    ...
    function(b)
}
```

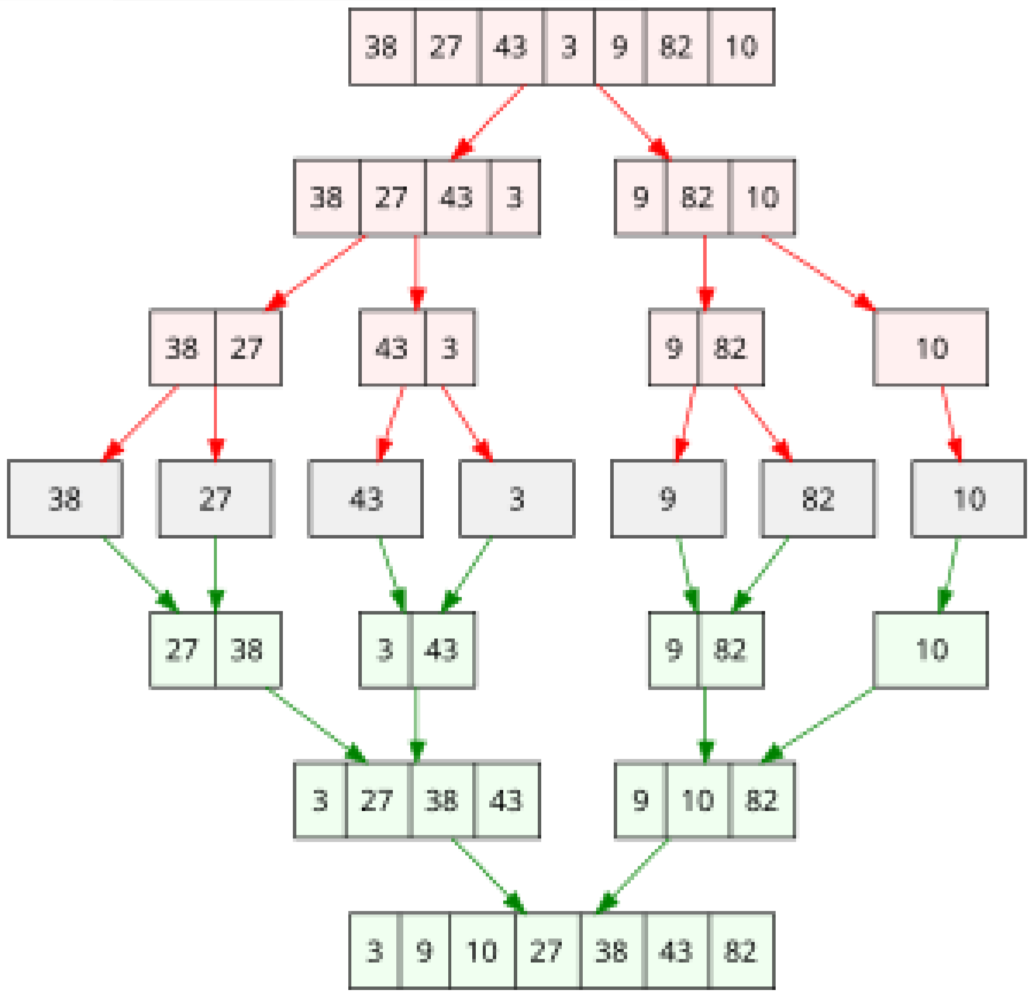
Esempio di ricorsione: fattoriale

```
fattoriale(int n){
  if (n == 0) return 1
  else return n*fattoriale(n-1)
}
```

Merge sort && Idea

Idea: Divido il mio array in due sottoarry e li riordino, poi alla fine li rimetto insieme in modo ordinato

Merge sort && Idea



Merge sort && Pseudo Codice

```
merge(ITEM[] A, ITEM[] B, ITEM[] C, int fine){
  int i, j, z = 0
  while(z <= fine){
    if B[i] < C[j] {
      A[z] = B[i]        //scelgo il più piccolo
      i++, z++
    }else{
      A[z] = C[j]
      j++, z++
    }
  }
}

mergeSort(ITEM[] A, int inizio, int fine){
  if inizio >= fine
    return
  else{
    //divido A in due array B e C
    mergeSort(B, inizio, metà)                 //chiamo mergeSort su B e C
    mergeSort(C, metà+1, fine)
    merge(A, B, C, fine)                 //unisco in modo ordinato B e C
    return
  }
}
```

Merge Sort && Complessità

Qual è il costo della funzione merge? O(N)
Come facciamo a calcolare la complessità di mergeSort?

- In mergeSort facciamo due chiamate ricorsive con dimensione pari a n/2

Si definisce una formula per calcolare la complessità:
T(1) -> se abbiamo un solo elemento nell'array
2T(n/2) + O(N) -> altrimenti

Con un po' di calcoli (Master Theorem [che hai detto?]) otteniamo che la complessità è quindi O(N logN).

Merge Sort

Versione iterativa (versione bottom-up):

Merge Sort iteravito

Ora scriviamo noi il codice!

Idea:
Parto dal fondo di un array con dimensione unitaria (ergo per forza è già ordianta) e poi uso gli indici per dividere l'array e specificare quale parte dell'array riordinare