Национальный исследовательский ядерный университет
МИФИ

1-ый курс
Весенний семестр

Линейная алгебра

Студент:
Куликов Ф. Е.

Преподаватель:
Иванова Т. М.

февраль 2023 г. - 1 апреля 2023 г.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга составлена автором по прочитанным весной 2023 года лекциям Ивановы Татьяны Михайловны с целью предоставления более удобного доступа к информации для обучающихся студентов. Большинство информации достаточно строго следует лекционному изложению, однако присутствуют и добавленные автором пояснения и дополнительные примеры, некоторые из которых могут быть помечены отдельно.

Несмотря на аккуратность и многие проверки, присутствие опечаток и ошибок всё равно вероятно и при замечании таких просьба написать на почту: **marrs73@ya.ru** или лучше в вк: **id615227395**.

Приятного ознакомления!

ЛЕКЦИЯ 1.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ. РАНГ МАТРИЦЫ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ.

§1. ЛЗ и ЛНЗ строк (столбцов) матрицы

Любую матрицу можно представить набором её строк или столбцов. Условимся обозначать строки, как $\vec{a_i}$, а столбцы $\underset{\downarrow}{a_i}$. Тогда:

$$A = (a_{ij})_m^n = (\underset{\downarrow}{a_1}\underset{\downarrow}{a_2}\dots\underset{\downarrow}{a_n}) = \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \\ \dots \\ \vec{a_n} \end{pmatrix}$$

Выберем $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}$ - столбцы A, где $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$ - получим систему стобцов (**ССтб**). Аналогично со строками (**ССтр**).

Почти все свойства строк и столбцов идентичны, так что чаще будет рассматриваться лишь что-то одно из них. Стоит заметить, что оба данных объекта представляют собой наборы чисел с классически определёнными на них операциями, так что рассматривать их можно и отдельно от матриц.

Определение: Линейная зависимость столбцов

ССтб называется **ЛЗ (линейно зависимой)**, если $\exists$ нетривиальный набор $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k :\ \lambda_1 \underset{\downarrow}{a_{j_1}} + \lambda_1 \underset{\downarrow}{a_{j_2}} + \dots + \lambda_1 \underset{\downarrow}{a_{j_k}} = \underset{\downarrow}{0}$

$\underset{\downarrow}{0}$−нулевой столбец $:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$

Нетривиальный набор - набор, содержащий хотя бы один ненулевой элемент

Определение: Линейная независимость столбцов

ССтб называетсся **ЛНЗ (линейно независимой)**, если равенство $\lambda_1 \underset{\downarrow}{a_{j_1}} + \lambda_1 \underset{\downarrow}{a_{j_2}} + \dots + \lambda_1 \underset{\downarrow}{a_{j_k}} = \underset{\downarrow}{0}$ достигается только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 0$ (при тривиальном наборе)

Лемма №1 Если ССтб содержит нулевой столбец, то она ЛЗ.
Лемма №2 Если ССтб включает ЛЗ подсистемой, то она ЛЗ.
Следствие $\forall$ подсистема ЛНЗ ССтб является ЛНЗ. # Упр. Доказать от противного.

Теорема: Критерий ЛЗ

ССтб ЛЗ $\Leftrightarrow$ один из них является **ЛК** (линейной комбинацией) других.

Доказательство:
$\Rightarrow$ ССтб ЛЗ $\Rightarrow \exists$ нетривиальный набор $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$: выполняется (1). БОО (без ограничения общности) $\lambda_1 \neq 0$, тогда $\underset{\downarrow}{a_{j_1}} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\underset{\downarrow}{a_{j_2}} - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\underset{\downarrow}{a_{j_k}}$

$$\Leftarrow \text{ БОО } a_{j_1} = \beta_2 a_{j_2} + ... + \beta_k a_{j_k}$$

$$1 * a_{j_1} - \beta_2 a_{j_2} - ... - \beta_k a_{j_k} = 0$$

Тогда$(1; -\beta_2; ...; \beta_k)$ – нетривиальный набор и ССтб ЛЗ. **Q.E.D.**

§2. Ранг матрицы

Определение: Минор матрицы

Рассмотрим $A = (a_{ij})^n_m$; Возьмём $k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq min(m, n)$
Выберем $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq m, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq n$
Число $M^{j_1 j_2 ... j_k}_{i_1 i_2 ... i_k} = \det \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$ называется минором k-го порядка матрицы A.

Пример: A $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 12 \end{pmatrix}$

$(M_1 = M^1_1 = 1$
$(M_1 = M^2_1 = 2$
$(M_2 = M^{14}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 12$

Обозначение минора матрицы порядка k: $(M_k$

Определение: Ранг матрицы

Пусть A - матрица. Если A $= \Theta$, то её ранг полагается равным 0.
Если $A \neq \Theta$, то $r \in \mathbb{N}$ назовём рангом A, если $\begin{cases} \exists (M_r \neq 0 \\ \forall (M_{r+1} = 0 \text{ (или их нет)} \end{cases}$

Обозначения ранга матрицы A: Rg A, rg A, Rang A, rank A

Лемма Если в матрице A все $(M_k = 0$, то все $(M_{k+1}$ (если они есть) $= 0$
Доказательство:
Если $\exists$ $(M_{k+1}$, его можно разложить по $\forall$ строке столбцу $\Rightarrow$ он будет ЛК миноров $(M_k$, которые все $= 0 \Rightarrow (M_{k+1} = 0$

Определение: Базисный минор

Пусть Rang A $= r > 0$, Тогда $\forall$ $(M_r \neq 0$ называется **базисным минором**.
А строки и столбцы, на которых он расположен, называются **базисными столбцами \ строками** матрицы A.

Теорема: Две теоремы о базисных столбцах

1° Базисные ССтб (ССтр) ЛЗ
2° Любой Стб \ любая Стр матрицы A может быть представлена ЛК базисных Стб \ Стр этой матрицы.

1°**. Доказательство:**
Допустим, что базисная ССтб ЛЗ. Тогда по критерию ЛЗ один из них является ЛК других, тогда и в базисном миноре это будет выполнено. Но тогда этот минор $= 0$ (По свойству det) $\Rightarrow$ противоречие. След. ССтб \ ССтр - ЛНЗ. **Q.E.D.**

2°**. Доказательство:**
Пусть $M^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_r} \neq$ (т.е. это базисный минор)

Рассмотрим B $= \begin{pmatrix} a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} & a_{i_1 j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_r j_r} & a_{rj} \\ a_{ij_1} & \cdots & a_{ij_r} & a_{ij} \end{pmatrix}$, где $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$

Если $\begin{cases} i \notin \{i_1, ..., i_r\} \\ j \notin \{j_1, ..., j_r\} \end{cases} \Rightarrow \; det(B) = (M_{n+1} = 0$

Если $\left[\begin{array}{l} i \in \{i_1, ..., i_r\} \\ j \in \{j_1, ..., j_r\} \end{array}\right. \Rightarrow \; det(B) = 0$, т.к. содержит одинаковые столбцы строки

С другой стороны, det B разложим по последней строке:

$$0 = \det \text{B} = \alpha_1 a_{ij_1} + ... + \alpha_r a_{ij_r}$$

Соответствующие алгебраические дополнения $\alpha = M^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_r} \neq 0$
Кроме того, эти алгебраичекие дополнения одни и те же $\forall i = \overline{1, m}$

$$\Rightarrow \underset{\downarrow}{0} = \alpha_1 \underset{\downarrow}{a_{j_1}} + ... + \alpha_r \underset{\downarrow}{a_{j_r}} + \alpha \underset{\downarrow}{a_j} \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\Rightarrow \; \underset{\downarrow}{a_j} = -\frac{\alpha_1}{\alpha} \underset{\downarrow}{a_{j_1}} - ... - \frac{\alpha_r}{\alpha} \underset{\downarrow}{a_{j_r}} = \lambda \underset{\downarrow}{a_{j_1}} + ... + \lambda_r \underset{\downarrow}{a_{j_r}}$$

Для строк аналогично. **Q.E.D**

Теорема: Следствие ЛЗ из вырожденности матрицы

$A = (a_{ij})^n_n$ - квадратная и вырожденная $\Leftrightarrow$ ССтб \ССтр матрицы A - ЛЗ.

Доказательство:
$\Rightarrow$
A - вырожденная, т.е. det A $= 0$. (Рассмотрим случай ненулевой матрицы, т.к. с ней всё очевидно). Поскольку A - квадратная, то её единственный минор (M_n = det A$= 0 \Rightarrow$ Rang A$= r < n \Rightarrow$ ($M_r \neq 0$ - базисный минор. Туда входят не все Стб \ Стр, при этом любой Стб \ Стр выражается через базисные $\Rightarrow$ ССтб \ССтр - ЛЗ
$\Leftarrow$
Пусть ССтб \ССтр - ЛЗ, тогда одна \один из них является ЛК других $\Rightarrow$ det A $=$ 0 по свойству det

Сл Квадратная матрица A невырождена $\Leftrightarrow$ её Стр \Стб - ЛНЗ

Теорема: ЛЗ столбцов матрицы количеством большим ранга матрицы.

Если Rang A = r, то любые r+1 Стб (Стр) - ЛЗ (Если найдутся)

Доказательство: (Для столбцов)
Если m = r. Допустим, что $\exists(r+1)$ ЛНЗ столбец, тогда $\forall r$ столбцов из этих r+1 будет также ЛНЗ. Тогда возьмём эти ЛНЗ r столбцов и r=m строк матрицы A. Поскольку это будет квадратная матрица r-го порядка и её ССтб - ЛНЗ, то это будет $(M_r \neq 0$, т.е. базисный минор $\Rightarrow$ все стобцы матрицы A выражаются через выбранные r столбцов, в том чиле и (r+1)-ый столбец, который мы не брали $\Rightarrow$ **противоречие**, r+1 ССтб - Лз
Пусть $m \geq r+1$ и $\exists(r+1)$ ЛНЗ Стб.
Тогда берём эти (r+1) столбцов и любые (r+1) строк. Получаем квадратную матрицу (r+1), которая не вырождена $\Rightarrow \exists(M_{r+1} \neq 0 \Rightarrow RangA > r$ - **противоречие. Q.E.D**

Теорема: Вычисление ранга через количество ЛНЗ столбцов

$$\text{Rang A} = \begin{cases} \text{max кол-ву ЛНЗ столбцов в A} \\ \text{max кол-ву ЛНЗ строк в A} \end{cases}$$

Доказать в качестве упражнения

§3. Элементарные преобразования строк \ Столбцов матрицы

1. Перестановка местами двух строк \ столбцов матрицы
2. Умножение строки \ столбца на $\forall$ число $\neq 0$
3. Прибавление к одной строке другой строки, умноженной на $\forall$ число (аналогично для столбцов)

Определение: Эквивалентные матрицы

Матрица B полученная элементарными преобразованиями из матрицы A называется **эквивалентной** ей.

Обозначение: A $\sim$ B

Лемма $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, т.е. отношение эквивалентности матриц симметрично.
Доказать в качестве упражнения

Также стоит заметить, что отношение эквивалентности матриц является отношением эквивалентности в общем смысле, т.к. кроме симметричности для него также выполняется рефлексивность и транзитивность. Об отношениях эквивалентности

Теорема: Инвариантность ранга относительно элементарных преобразований

Если $A \sim B$, то Rang(A) = Rang(B)

Доказательства:
1°и **2**° - не изменяют количества ЛНЗ строк \ столбцов и следовательно по теореме о связи ранга и количества ЛНЗ столбцов матрицы эти преобразования не повышают

ранга.
3° для строк:

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \\ ... \\ \vec{a_n} \end{pmatrix} \text{ БОО B } = \begin{pmatrix} \vec{a_1} + \lambda\vec{a_2} \\ \vec{a_2} \\ ... \\ \vec{a_n} \end{pmatrix} \text{ Пусть Rang A = r, тогда } \forall (M^A_{r+1} = 0$$

Рассмотрим соответствующий $(M^B_{r+1}$:

1) Не включает 1-ую Стр $\Rightarrow (M^B_{r+1} = (M^A_{r+1} = 0$
2) Включает первую, но не включает вторую $\Rightarrow (M^B_{r+1} = \lambda(M^A_{r+1} = 0$
3) Включает и первую, и вторую строки:

$(M^B_{r+1} = (M^A_{r+1} + \lambda det(C) = 0 + \lambda * 0 = 0$, (т.к. С имеет две одинаковых строки)

$$\text{Тогда } \begin{cases} A \sim B \Rightarrow RgB \leq RgA, \text{ т.к. } \forall (M^B_{r+1} = 0 \\ \text{С другой стороны, } B \sim A \Rightarrow RgA \leq RgB \end{cases} \Rightarrow RgA = RgB,$$

т.е. ни одно из элементарных преобразований матриц не изменяет их ранга. **Q.E.D.**

ЛЕКЦИЯ N.

ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ. СОПРЯЖЁННОЕ ПРАВИЛО. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ.

Определение: Функционал

Пусть $\mathbb{V}$ - ЛП над $\mathbb{K}$ и задан закон f, ставящий любому x $\in \mathbb{V}$ в соответствие единственный скаляр из поля $\mathbb{K}$. Иными словами, f - функция из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{K}$ (f: $\mathbb{V} \to \mathbb{K}$). Такие функции в линейной алгебре называют **функционалами**

Комментарий: *В более общем смысле функционалами называют функции, с числовым множеством значений О функционалах.*

Пример:

J: $\mathbb{V} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{V}$ - множество геометрических векторов. J(x) = |x|, т.е. J сопоставляет каждому вектору его модуль. Тогда J является функционалом (формой), однако не является линейной формой, т.к. J$(x+y)$ в общем случае не равно J(x)+J(y).

Определение: Линейный функционал. Линейная форма

Функционал f: $\mathbb{V} \to \mathbb{K}$, для которого выполняются два свойства:
1° $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{V} \quad f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
2° $\forall x \in \mathbb{V} \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$
называется **линейным функционалом** или же **линейной формой (ЛФ)**

Примеры:

1) Линейный функционал: *определённый интеграл*
$\mathbb{V} = C[a,b]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, тогда $\forall x \in \mathbb{V}$ функция $f(x) = \int_a^b x(t)$dt будет линейной формой, т.к:

1. Значения определённого интеграла являются элементами поля вещественных чисел (т.е. f - уже функционал)
2. $\forall x_1, x_2 \in C[a,b] \quad \int_a^b (x_1+x_2) = \int_a^b x_1 + \int_a^b x_2$ по известному правилу суммы интегралов.
3. $\forall x \in C[a,b] \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \int_a^b \lambda x = \lambda \int_a^b x$ по правилу вынесения константы за знак интеграла.

Используется ранее доказанный факт того, что C[a, b] (множество функций, непрерывных на отрезке от a до b) с операциями сложения функций и умножения функции на число является ЛП над $\mathbb{R}$

2) Линейный функционал: *Взятие первой координаты вектора.*
$\mathbb{V}$ - ЛП, $\varepsilon = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$– базис в нём.

Тогда $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow x = [\varepsilon]\underset{\downarrow}{\xi} = (e_1, e_2, ..., e_n)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad f(x) = \xi_1 \in \mathbb{K}$ - Линейная форма.

Можно проверить это самостоятельно аналогично первому пункту

Определение: Совокупность ЛФ

Множество всевозможных ЛФ, действующих в V, обозначим $\mathbb{V}^*$

Тогда запись $x \in \mathbb{V}^*$ обозначает, что x - линейная форма.

Определение. Пусть $f_1, f_2 \in \mathbb{V}^*$.
Будем говорить, что $f_1 = f_2$, если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$. Такие ЛФ называются **равными**.

Определение. Рассмотрим ЛФ $\Phi : \forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow \Phi(x) = 0$. Назовём её **нуль-формой**.
Упражнение: Доказать, что $\Phi \in \mathbb{V}^*$

Определение. Пусть $f_1, f_2 \in \mathbb{V}^*$, тогда $f = f_1 + f_2$ (**сумма функционалов**), если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. $\quad$ *т.е.* $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) = f_2(x)$

Определение. Пусть $f_1 \in \mathbb{V}^*, \lambda \in \mathbb{K}$, тогда $f_{=}\lambda f_1$ (**умножение на скаляр**), если $\forall x \in \mathbb{V} \Rightarrow f(x) = \lambda f_1(x) \quad$ (т.е. $(\lambda f_1)(x) = \lambda f_1(x)$)

Теорема: О сопряжённом пространстве к $\mathbb{V}$

С введёнными линейными операциями $\mathbb{V}^*$ образует ЛП над тем же полем $\mathbb{K}$, что и $\mathbb{V}$. Это ЛП называется пространством сопряжённым к $\mathbb{V}$

Доказательство:
Для доказательства того, что $\mathbb{V}^*$ - ЛП требуется проверить все 8 аксиом ЛП. Для этого подтвердим сначала, что введённые на сопряжённом к $\mathbb{V}$ пространстве операции сложения и умножения на скаляр линейны:
1) Операция сложения функционалов.

- fdf
- dsk