Заметки на полях Математики

Куликов Филипп

12.09.2022 - наше время

Оглавление

Введение

Я надеюсь, что в будущем в этом собрании я смогу скопить достаточно интересных материалов по математике, чтобы можно было назвать это стоящим куском информационной бумаги. На этом всё.

Ссылки на прекрасные книжные математические пособия:

- Э.Б. Винберг - "Алгебра"
  Пособие по изучению общей алгебры. Составлено по программе мехмата и опыту лекций в НМУ
- В.А. Зорич - "Математический анализ"
  Часто рекомендуемый том в двух частях по соответствующему предмету.
- В.В. Прасловский - "Математический анализ. Теоремы и задачи"
  Книга с особым вниманием на задачах. Примерно соответствует программе НМУ

Глава 1

Гауссов интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

История

Впервые этот вид интегралов был вычислен Эйлером в 1729г. Позднее Пуассоном был найден простой способ его нахождения. Из-за этих фактов интеграл также часто называют интегралом Эйлера-Пуассона. Подинтегральная функция является функцией Гаусса, используемой в описании нормального распределения и поэтому, особенно в англоязычной литературе, он чаще именуется Гауссовым. Также можно заметить, что т.к. промежуток интегрирования бесконечен, то интеграл является несобственным.

Применение

Судя по всему Гауссов интеграл часто встречается в физике.
Естественно используется в описании нормального распределения
И вроде входит в некую весьма полезную функцию ошибок
[section needs improvement]

1.1 Трюк Пуассона

Идея решения в том, чтобы свести всё к полярным координатам.
Для этого сперва интеграл возводится в квадрат. Так мы сводим его к интегрированию по всей координатной плоскости, которую как раз можно представить в полярных координатах:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx * \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \tag{1.1}$$

Так как определённы интеграл представляет собой вполне определённое число, то замена во втором множителе x на y ничего не меняет.

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \tag{1.2}$$

Далее проводим очевидную часть замены декартовых координат на полярные:

$$\begin{gathered} x = r * cos(\phi) \\ y = r * sin(\phi) \\ \Rightarrow \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dxdy \end{gathered} \tag{1.3}$$

Теперь также стоит поменять ...
[section needs improvement]

Глава 2

НМУ | мат. анализ | лекция 1

Ссылка на лекцию, по которой был составлен конспект
Лектор: Шапошников Станислав Валерьевич
Почта лектора: questmatan@mail.ru
Литература, рекомендуемая в лекции:

- В.А. Зорич - "Математический анализ"
  Классический том по изучению предмета
- К. Куратовский, А.Мостовский - "Теория множеств"
  История и подробное объяснение создании теории множеств.
- Беклемишев - онлайн курс "Введедени в математическую логику"

2.1 Начало теории множеств

Основой языка математического анализа является понятие Множества. Что это такое никто объяснить не может. Можно попробовать дать такое определение:

Множество - совокупность, набор, собрание каких-то объектов

Однако это определение хорошо только для понимания и является тавтологией. Зачем же нам это всё нужно? Мы хотим научиться отвечать на вопрос: Если есть некое множество **a** и множество **A**:

$a \in A$?
Т.е. лежит ли a в A. Истина ли это или ложь?

И несмотря на то, что мы не можем понять сущность понятия множества и, тем более, его элемента, мы хотим для любых двух объектов смочь ответить на вопрос об истинности принадлежности и не принадлежности $\notin$ соответственно.
Какое множество не возьми, это всегда будет верно. Но как тогда задать множество? Множество задаётся двумя способами:

- Перечисление элементов:

  $$A = \{\textit{Филипп, Саша, Лёша, Ваня, Лина}\}$$

  Если объект перечислен в списке, то он лежит в этом множестве Однако только таким способом чаще всего пользоваться не удобно. Поэтому чаще всего используют второй.

- Указание свойства:

  $$A = \{\textit{ученики, ходящие в НМУ}\}$$

  Если для объекта указанное в множестве свойство истинно, то он входит в это множество. Также для в подобном способе задания часто используются математические символы **:** и **|** . На язык они переводятся, как "такой, что"

Подобная теория выстроенная Кантором добротно существовало до открытия в начале 20 века парадокса Рассела:
Зададим множество М, как

$$M = \{A \mid A \notin A\}$$

Если ещё не было понятно, то множество вполне может содержать другое множества. Природа элементов нигде не задаётся.

Тогда проверим на принадлежность множеству М некое множество М.
Пускай $M \in M$, тогда по определению множества М: $M \notin M$
Тогда проверим обратный вариант, если $M \notin M$, тогда по определению М: М должно $\in M$
Противоречие в обоих случаях. "Всё, закрываемся"
Про такое высказывание не оказывается ни ложным, не истинным, а

значит опровергает идею выбранного понятия множества и принадлежности.
У этого парадокса есть и житейский вариант: *"Брадобрею сказали брить всех тех, кто не бреется сам. Нужно ли брадобрею брить себя?"*

После этого математическое общество решило, что стоит как-то ограничить способы задания свойств множества. Была создана новая система? Непротиворечива ли она? Это проявляется пожалуй только на практике. Пока новых противоречий не найдено. Для начала, стоит окончательно отрешиться от какого-либо смысла в понятии множества. Это лишь математический объект, можно сказать, что это просто некая обозначенная буква, например, а или А. Не важно. При этом между любыми двумя множествами задано бинарное отношение $\in$. Далее следует определить правила игры. Сделать это можно многими разными способами. В основном стандартным набором аксиом (правил игры) считается система Цермело-Френкеля (сокращение **ZF**). Создана она была Цермело в 1908г. и уточнена Френкелем в 1921г.

2.2 Система аксиом Цермело-Френкеля

(o) Для начала стоит сказать, что хотя бы одно множество существует. Также введём соотношение включения:

$$A \subset B, \text{ если } \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

1. **Аксиома объёмности**

$$A = B \Longleftrightarrow \forall x\ (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

   Т.е. множества равны, если имеют одинаковые элементы, принадлежащие им.

   Теперь множества нужно научится создавать

2. **Аксиома выделения**
   Пусть есть множество A и свойство P(x).
   Тогда мы можем завести множество:

$$\{x : x \in A \wedge P(x)\}$$

Таким образом мы ограничиваем возможности создания множества через свойства путём выборки элементов по свойству из уже существующего множества.

С помощью этой аксиомы можно ввести пустое множество:

$$\varnothing = \{x \mid x \in A \wedge x \neq x\}$$

Т.е. пустое множество - множество, не содержащее ни одного элемента.
Тогда легко проверить, что

$$\varnothing_A = \varnothing_B, \text{ т.к. аксиома объёмности для них выполняется}$$

Т.е. все пустые множества равны между собой

3. **Аксиома степени**
Для множества A множество всех его подмножеств, обозначаемое 2^A также является множеством.

Применим эту аксиому к пустому множеству, тогда:

$$2^{\varnothing} = \{x : x \subset \varnothing\} = \{\varnothing\}$$

Теперь можно применить эту аксиому к существующему множеству $\varnothing$:

$$2^{\{\varnothing\}} = \{x : x \subset \{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

Таким образом можно продолжать строить новые и новые расширенные множества
Т.е. в отличие от аксиомы выделения, аксиома степени позволяет получать множества с большим количеством элементов, чем предыдущие.

4. **Аксиома пары**

$$\forall A, B \; \exists \; \{A, B\}$$

Также был введён договор о том, что {A, A} можно записывать, как {A}
Система данных правил также может напоминать самовоспроизводящихся роботов.

5. **Аксиома суммы**

$$\cup M \; = \; \{x \mid \exists A \in M : x \in A\}$$

Т.е. мы из множества множеств мы можем получить множество, содержащее каждый элемент их подмножеств первого множества.

- Тогда можно записать известную операцию объединения множеств:
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$
, как последовательное применение аксиомы пары и аксиомы суммы:
$$A \cup B = \cup\{A, B\}$$
- Также можно переписать пересечение множеств:
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
с помощью аксиомы выделения:
$$\cap B = \{x \in A \; : \; x \in A \wedge x \in B\}$$
- А вот и разность множеств:
$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$
Через ту же аксиому выделения:
$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

Заметка!
Указанные определения через аксиомы, в отличие от привычных заданий через свойства, не приводят к парадоксам наподобие парадокса Рассела.

Существуют ещё несколько аксиом, но они уже встречаются реже этих.

6. **Декартово произведение**
Теперь попробуем задать декартово произведение множеств.
Для этого сначала определим упорядоченную пару:

$$(A, B) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Для задания упорядоченной можно три раза использовать аксиому пары

Упр 1. Проверить, что $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c, b = d$
Решение:

$$\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$$

Воспользуемся аксиомой объёмности:

$$a \in A \Rightarrow a \in B \Rightarrow a = c \vee a = \{c, d\}$$

По аналогии с $b : b = c \vee b = \{c, d\}$ Теперь в обратную сторону:

$$c = a \vee c = \{a, c\}$$
$$d = a \vee d = \{a, c\}$$

Отсюда прекрасно видно, что $a = c$, т.к. опции $a = \{c, d\}$ нет с позиции $b \in B \Rightarrow b \in A$
. Также и $\{a, b\} = \{c, d\}$ однозначно по той же причине.

■

В это свойстве и проявяется смысл упорядоченных пар и их отличие от неупорядоченных пар {A, B}

Теперь попытаемся переопределить декартово произведение:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}$$

Его можно составить из аксиомы степени и аксиомы выделения подобным образом:

$$A \times B = \{x \ : \ x \in 2^{2^{A \cup B}} \land \exists a, b : \ x = (a, b)\}$$

, где $a \in A, \ b \in B$

Здесь $2^{2^{A \cup B}}$ представляет множество из подмножеств объединения A и B.
Пример: $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}$

$$=> 2^{A \cup B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 5\}, \dots\}$$

$$=> 2^{2^{A \cup B}} = \{\{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{\{1, 3, 5\}, \{4\}\}, \dots\}$$

Т.е. это как раз то множество подмножеств из которого уже можно выделять подходящие для нас из определения подмножества.

О декартовом произведении также возможно думать, как о таблице:
[maybe add later]

Декартово произведение прямой на прямую - **плоскость**
Декартово произведение окружности на окружность - **тор**

2.3 Функции

Функция из множества X в множество Y
$f : X \to Y$

В начале 19 века господствовало подобное определение функции:

функция каждому x из X сопоставлеяет один y = f(x)

1. **График функции**
   В современной математике понятие функции формулируется через график функции на языке множеств
   График функции, это:
   $$\Gamma_f = \{(x, y) : \; y = f(x)\}$$
   Т.е. это выделение из декартового произведения по свойству y = f(x)

   Любое ли подножество декартового произведения можно назвать графиком функции?
   Тогда должно быть выполнено два условия:
   - 1) $\forall x \in X \; \exists y \in Y : \; (x, y)$
   - 2) $(x, y) \in \Gamma_f \wedge (x, z) \in \Gamma_f \Rightarrow y = z$

   При таком однозначном соответствии x к y можно считать, что из графика видна определяющая его функция и наоборот. Иначе говоря, они определяют друг друга.
   Тогда вместо $(x, y) \in \Gamma_f$ можно писать $y = f(x)$
   Зато теперь функция определяется через теорию множеств

2. **Композиция функций**
   $$g \circ f \; (x) = g(f(x))$$
   Давайте и её переопределим на языке множеств:
   $$\Gamma_{g \circ f} = \{(x, z) \mid \exists y \in Y : \; (x, y) \in \Gamma_f \; \wedge \; (y, z) \in \Gamma_g\}$$
   Таким образом задаётся множество точек графика композиции, но стоит также задаться вопросом: Выполняются ли для него два дополнительных условия графика функции?
   Они оба очевидно доказываются, если рассматривать отдельно переходы $x \longmapsto y$ и $y \longmapsto z$ и применять к ним свойства графиков, которым они принадлежат.

Упр 2. Доказать: $g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$
Решение:

Примем $h : X \to Y,\ f : Y \to Z,\ g : Z \to W$
Из определения композиций функций через их графики:

$$\Gamma_{g\circ(f\circ h)} = \{(x,w)|\ \exists z \in Z : (x,z) \in \Gamma_{f\circ h}\ \wedge\ (z,w) \in \Gamma_g\}$$
$$\Gamma_{(g\circ f)\circ h} = \{(x,w)|\ \exists y \in Y : (x,y) \in \Gamma_h\ \wedge\ (y,w) \in \Gamma_{g\circ f}\}$$

Теперь выразим отдельно композиции функций внутри скобок:

$$\Gamma_{f\circ h} = \{(x,z)|\ \exists y \in Y : (x,y) \in \Gamma_h\ \wedge\ (y,z) \in \Gamma_f\}$$
$$\Gamma_{f\circ h} = \{(y,w)|\ \exists z \in Z : (y,z) \in \Gamma_f\ \wedge\ (z,w) \in \Gamma_g\}$$

Тогда подставим выраженные части в первые две формулы, т.к. они раскрывают смыслы выражений $(x,z) \in \Gamma_{f\circ h}$ и $(y,w) \in \Gamma_{g\circ f}$ соответственно:

$$\Gamma_{g\circ(f\circ h)} = \{(x,w)|\ \exists y \in Y\ \wedge\ \exists z \in Z : (x,y) \in \Gamma_h\ \wedge\ (y,z) \in \Gamma_f\ \wedge\ (z,w) \in \Gamma_g\}$$
$$\Gamma_{(g\circ f)\circ h} = \{(x,w)|\ \exists y \in Y\ \wedge\ \exists z \in Z : (x,y) \in \Gamma_h\ \wedge\ (y,z) \in \Gamma_f\ \wedge\ (z,w) \in \Gamma_g\}$$

Очевидно, что оба графика заданы одинаковыми свойствами на одном множестве, значит и задаваемые ими функции одинаковы.
■

Можно было доказать так:
$g \circ (f \circ h) = g((f \circ h)) = g(f(h)) = (g \circ f)(h) = (g \circ f) \circ h$**,**
но это читерство

---

3. **Виды функций**

   Среди функций особенно часто выделяются следующие три типа:

   - **Сюръекция**
     $f : X \to Y$ - <u>сюръекция</u>, если $\forall y \exists x : f(x) = y$
     Т.е. у каждого элемента второго множества есть прообраз.

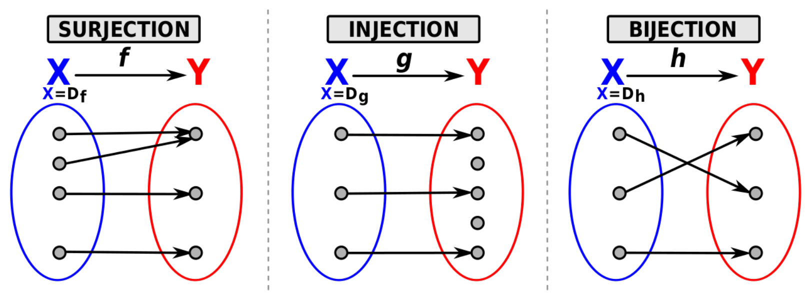

Рис. 2.1: Графическое представление различных функций

- **Инъекция**
  $f : X \to Y$ - инъекция, если из $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
  Т.е. разные элементы X всегда переводятся в разные элементы Y
- **Биекция**
  $f : X \to Y$ - биекция, если f это и сюръекция, и инъекция одновременно
  Биекция особенно интересна, т.к. устанавливает между множествами так называемое взаимооднозначное соответствие. Если между множествами построена биекция, то с математической точки зрения их часто можно рассматривать, как одинаковые, если не интересует их внутреннее содержание.

Теорема 1.

f и g - биекции $\Rightarrow f \circ g$ - также биекция.

Упр 3. Доказать это.
Решение:

1) Проверим сюръективность композиции:

$$\forall y \exists x : y = g(x)$$
$$\forall z \exists y : z = f(y)$$
$$\Rightarrow$$
$$\forall z \exists x : z = f \circ g(x)$$

Полученное свойство и является определением сюръективности для $f \circ g$.

2) Проверка инъективности композиции:
Пусть $x_1 \neq x_2$ Тогда из биективности g: $g(x_1) \neq g(x_2)$
При этом из биективности f следует $f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$
А полученное свойство $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f \circ g(x_1) \neq f \circ g(x_2)$ и является определением инъективности для $f \circ g$

Из двух полученных свойств следует, что композиция биекций также биекция. ■

Теорема 2.

f - биекция $\Rightarrow$

$$\{(y, x) : y = f(x)\} - \text{определяет функцию } Y \to X$$

Эта функция называется **обратной к f** (Обозначение f^{-1}) и также является биекцией.

Докажем оба утверждения:
1) f^{-1} - это функция
Тогда нужно проверить эти два условия:

$$\forall y \exists x : y = f^{-1}(x)$$

Так выглядит запись первого условия функции для обратной функции и она полностью совпадает с определением сурьективности для f, а следовательно это уже выполнено.

$$y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

Это уже вторoе условие функции и оно полностью совпадает с определением инъективности для f и соответственно выполнено.

Таким образом, f^{-1} функция тогда и только тогда, когда f - биекция.
А условия сурьективности и инъективности равносильны соответствующим условиям функциональности обратного соответствия.

2) f^{-1} - это биекция
Теперь нужно проверить выполнимость инъективности и сурьективности для f^{-1} по определениям.
Т.к. в предыдущем пункте уже было показано, что эти определения равносильны условиям функции, то это очевидно в обратную сторону.

Из этих пунктов следует очень забавное утверждение:

Обратная функция для f существует только если f - биекция и всегда также является биекцией

2.4 Группы биекций

Рассмотрим все биекции вместе:

$$X \neq \varnothing \quad G(X) = \{f \mid f : X \to X - \text{биекция}\}$$

При этом добавим, что на элементах этого множества можно брать композицию, так как его элементы - функции. Другими словами, на множестве всех биекций над множеством X задана операция $\circ : M \times M \to M$ такая, что $(f, g) \mapsto f \circ g$
Чем же эта операция так хороша?

1) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ - доказывалось ранее;
2) $\exists e : e \circ f = f \circ e = f$. Этим е является тождественнное преобразование е(х) = х.
3)$\forall f \exists f^{-1} : f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$. Это очевидно из определения обратной функции.

Таким образом множество всех биекций на множестве с операцией композиции является группой.
Чем же хороши группы?
Аксиомы группы необходимы и достаточны для решения в них линейного уравнения:

Решить уравнение относительно g - выразить g

$f \circ g = h$

Равносильно применим операцию к элементу обратному f и каждой части

$f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ h$

Используя свойство, ассоациативности сместим скобки

$(f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ h$

Используя свойство обратных элементов, заменим $f \circ f^{-1}$ на e

$e \circ g = f^{-1} \circ h$

Используя свойство нейтрального элемента, получим ответ

$g = f^{-1} \circ h$

Из этого видно, что не имея этих свойств даже такое уравнение неразрешимо внутри алгебраической системы

Изоморфизм

Говорят, что группа (G, $\circ$) изоморфна группе (M, $\star$), если

$$\exists \text{ биекция } f : G \to M \text{: } f(a \circ b) = f(a) \star f(b)$$

Примером изоморфных групп является например группа вычетов $\mathbb{Z}_2$ и группа изометрий прямой $\{id, r^{\pi}\}$. Между ними существует биекция f: $0 \mapsto id \wedge 1 \mapsto r^{\pi}$ и операции на них равносильны.

Изоморфизм показывает, что по строению группы ничем не отличаются и являются одними объектами с разными обозначениями.

Подгруппа

Подгруппой H группы (G, $\circ$) называют

$$H \subset G : (H, \circ) \text{ - группа}$$

Пример: $(2\mathbb{Z}, +)$ является подгруппой $(\mathbb{Z}, +)$, но $(2\mathbb{Z} + 1, +)$ не является, т.к. не содержит нейтральный элемент для операции $+$

Теорема:

Всякая группа изоморфна подгруппе некоторой группы биекций.

Т.е. биекции позволяют описать любую группу. Все группы могут быть рассмотрены, как группы преобразований, движений.
Доказательство:

$$\text{Зададим } (X, \star) \text{ и } (G(X), \circ)$$

$$z \in X \mapsto f_z(x) = z \star x \text{ - искомый изоморфизм между (X, } \star\text{)}$$
$$\text{и подгруппой группы биекций } (f_z, \circ)$$

Подробнее об этом: Теорема Кэлли

Глава 3

НМУ | мат. анализ | лекция 2

3.1 Теоремы о биекциях

Множества A и B называются равномощными (Обозначение: A $\sim$ B), если:

$$\exists \text{ биекция } f : A \to B$$