Заметки на полях Математики

Куликов Филипп

12.09.2022 - наше время

Оглавление

Введение

Я надеюсь, что в будущем в этом собрании я смогу скопить достаточно интересных материалов по математике, чтобы можно было назвать это стоящим куском информационной бумаги. На этом всё. Иди, Филипп, время ботать ещё не прошло.

Ссылки на прекрасные книжные математические пособия:

- Э.Б. Винберг - "Алгебра"
  Пособие по изучению общей алгебры. Составлено по программе мехмата и опыту лекций в НМУ

Глава 1

Гауссов интеграл

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

История

Впервые этот вид интегралов был вычислен Эйлером в 1729г. Позднее Пуассоном был найден простой способ его нахождения. Из-за этих фактов интеграл также часто называют интегралом Эйлера-Пуассона. Подинтегральная функция является функцией Гаусса, используемой в описании нормального распределения и поэтому, особенно в англоязычной литературе, он чаще именуется Гауссовым. Также можно заметить, что т.к. промежуток интегрирования бесконечен, то интеграл является несобственным.

Применение

Судя по всему Гауссов интеграл часто встречается в физике.
Естественно используется в описании нормального распределения
И вроде входит в некую весьма полезную функцию ошибок
[section needs improvement]

1.1 Трюк Пуассона

Идея решения в том, чтобы свести всё к полярным координатам.
Для этого сперва интеграл возводится в квадрат. Так мы сводим его к интегрированию по всей координатной плоскости, которую как раз можно представить в полярных координатах:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx * \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \tag{1.1}$$

Так как определённы интеграл представляет собой вполне определённое число, то замена во втором множителе x на y ничего не меняет.

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \tag{1.2}$$

Далее проводим очевидную часть замены декартовых координат на полярные:

$$x = r * cos(\phi)$$

$$y = r * sin(\phi)$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dxdy \tag{1.3}$$

Теперь также стоит поменять ...
[section needs improvement]

Глава 2

НМУ | мат. анализ | лекция 1

Ссылка на лекцию, по которой был составлен конспект
Лектор: Шапошников Станислав Валерьевич
Почта лектора: questmatan@mail.ru
Литература, рекомендуемая в лекции:

- В.А. Зорич - "Математический анализ"
  Классический том по изучению предмета
- К. Куратовский, А.Мостовский - "Теория множеств"
  История и подробное объяснение создании теории множеств.
- Беклемишев - онлайн курс "Введедени в математическую логику"

2.1 Начало теории множеств

Основой языка математического анализа является понятие Множества. Что это такое никто объяснить не может. Можно попробовать дать такое определение:

Множество - совокупность, набор, собрание каких-то объектов

Однако это определение хорошо только для понимания и является тавтологией. Зачем же нам это всё нужно? Мы хотим научиться отвечать на вопрос: Если есть некое множество **a** и множество **A**:

$a \in A$?
Т.е. лежит ли a в A. Истина ли это или ложь?

И несмотря на то, что мы не можем понять сущность понятия множества и, тем более, его элемента, мы хотим для любых двух объектов смочь ответить на вопрос об истинности принадлежности и не принадлежности $\notin$ соответственно.
Какое множество не возьми, это всегда будет верно. Но как тогда задать множество? Множество задаётся двумя способами:

- Перечисление элементов:

  $$A = \{\textit{Филипп, Саша, Лёша, Ваня, Лина}\}$$

  Если объект перечислен в списке, то он лежит в этом множестве Однако только таким способом чаще всего пользоваться не удобно. Поэтому чаще всего используют второй.

- Указание свойства:

  $$A = \{\textit{ученики, ходящие в НМУ}\}$$

  Если для объекта указанное в множестве свойство истинно, то он входит в это множество. Также для в подобном способе задания часто используются математические символы **:** и | . На язык они переводятся, как "такой, что"

Подобная теория выстроенная Кантором добротно существовало до открытия в начале 20 века парадокса Рассела:
Зададим множество М, как

$$M = \{A\,|A \notin A\}$$

Если ещё не было понятно, то множество вполне может содержать другое множества. Природа элементов нигде не задаётся.

Тогда проверим на принадлежность множеству М некое множество М.
Пускай $M \in M$, тогда по определению множества М: $M \notin M$
Тогда проверим обратный вариант, если $M \notin M$, тогда по определению М: М должно $\in M$
Противоречие в обоих случаях. "Всё, закрываемся"
Про такое высказывание не оказывается ни ложным, не истинным, а

значит опровергает идею выбранного понятия множества и принадлежности.
У этого парадокса есть и житейский вариант: *"Брадобрею сказали брить всех тех, кто не бреется сам. Нужно ли брадобрею брить себя?"*

После этого математическое общество решило, что стоит как-то ограничить способы задания свойств множества. Была создана новая система? Непротиворечива ли она? Это проявляется пожалуй только на практике. Пока новых противоречий не найдено. Для начала, стоит окончательно отрешиться от какого-либо смысла в понятии множества. Это лишь математический объект, можно сказать, что это просто некая обозначенная буква, например, а или А. Не важно. При этом между любыми двумя множествами задано бинарное отношение $\in$. Далее следует определить правила игры. Сделать это можно многими разными способами. В основном стандартным набором аксиом (правил игры) считается система Цермело-Френкеля (сокращение **ZF**). Создана она была Цермело в 1908г. и уточнена Френкелем в 1921г.

2.2 Система аксиом Цермело-Френкеля

(o) Для начала стоит сказать, что хотя бы одно множество существует. Также введём соотношение включения:

$$A \subset B, \text{ если } \forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

1. **Аксиома объёмности**

   $$A = B \Longleftrightarrow \forall x \ (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

   Т.е. множества равны, если имеют одинаковые элементы, принадлежащие им.

   Теперь множества нужно научится создавать

2. **Аксиома выделения**
   Пусть есть множество А и свойство Р(х).
   Тогда мы можем завести множество:

$$\{x : x \in A \wedge P(x)\}$$

Таким образом мы ограничиваем возможности создания множества через свойства путём выборки элементов по свойству из уже существующего множества.

С помощью этой аксиомы можно ввести пустое множество:

$$\varnothing = \{x \,|x \in A \wedge x \neq x\}$$

Т.е. пустое множество - множество, не содержащее ни одного элемента.
Тогда легко проверить, что

$$\varnothing_A = \varnothing_B, \text{ т.к. аксиома объёмности для них выполняется}$$

Т.е. все пустые множества равны между собой

3. **Аксиома степени**
   Для множества А множество всех его подмножеств, обозначаемое 2^A также является множеством.

   Применим эту аксиому к пустому множеству, тогда:

   $$2^{\varnothing} = \{x : x \subset \varnothing\} = \{\varnothing\}$$

   Теперь можно применить эту аксиому к существующему множеству $\varnothing$:

   $$2^{\{\varnothing\}} = \{x : x \subset \{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

   Таким образом можно продолжать строить новые и новые расширенные множества
   Т.е. в отличие от аксиомы выделения, аксиома степени позволяет получать множества с большим количеством элементов, чем предыдущие.

4. **Аксиома пары**

$$\forall A, B \ \exists \ \{A, B\}$$

Также был введён договор о том, что {A, A} можно записывать, как {A}
Система данных правил также может напоминать самовоспроизводящихся роботов.

5. **Аксиома суммы**

$$\cup M \ = \ \{x \mid \exists A \in M : x \in A\}$$

Т.е. мы из множества множеств мы можем получить множество, содержащее каждый элемент их подмножеств первого множества.

- Тогда можно записать известную операцию объединения множеств:
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$
, как последовательное применение аксиомы пары и аксиомы суммы:
$$A \cup B = \cup\{A, B\}$$
- Также можно переписать пересечение множеств:
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
с помощью аксиомы выделения:
$$\cap B = \{x \in A \ : \ x \in A \wedge x \in B\}$$
- А вот и разность множеств:
$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$
Через ту же аксиому выделения:
$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$$

Заметка!
Указанные определения через аксиомы, в отличие от привычных заданий через свойства, не приводят к парадоксам наподобие парадокса Рассела.

Существуют ещё несколько аксиом, но они уже встречаются реже этих.

6. **Декартово произведение**
Теперь попробуем задать декартово произведение множеств.
Для этого сначала определим упорядоченную пару:

$$(A, B) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Для задания упорядоченной можно три раза использовать аксиому пары

Упр 1. Проверить, что $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c, b = d$
Решение:

$$\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$$

Воспользуемся аксиомой объёмности:

$$a \in A \Rightarrow a \in B \Rightarrow a = c \vee a = \{c, d\}$$

По аналогии с $b : b = c \vee b = \{c, d\}$ Теперь в обратную сторону:

$$c = a \vee c = \{a, c\}$$
$$d = a \vee d = \{a, c\}$$

Отсюда прекрасно видно, что $a = c$, т.к. опции $a = \{c, d\}$ нет с позиции $b \in B \Rightarrow b \in A$
. Также и $\{a, b\} = \{c, d\}$ однозначно по той же причине.

■

В это свойстве и проявяется смысл упорядоченных пар и их отличие от неупорядоченных пар {A, B}

Теперь попытаемся переопределить декартово произведение:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Его можно составить из аксиомы степени и аксиомы выделения подобным образом:

$$A \times B = \{x \ : \ x \in 2^{2^{A \cup B}} \wedge \exists a, b : \ x = (a, b)\}$$

, где $a \in A, \ b \in B$

Здесь $2^{2^{A \cup B}}$ представляет множество из подмножеств объединения A и B.
Пример: $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}$

$$=> 2^{A \cup B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 5\}, \dots\}$$

$$=> 2^{2^{A \cup B}} = \{\{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{\{1, 3, 5\}, \{4\}\}, \dots\}$$

Т.е. это как раз то множество подмножеств из которого уже можно выделять подходящие для нас из определения подмножества.

О декартовом произведении также возможно думать, как о таблице:
[maybe add later]

Декартово произведение прямой на прямую - **плоскость**
Декартово произведение окружности на окружность - **тор**

2.3 Функции

Функция из множества X в множество Y
$f : X \to Y$

В начале 19 века господствовало подобное определение функции:

функция каждому x из X сопоставлеяет один y = f(x)

1. **График функции**
   В современной математике понятие функции формулируется через график функции на языке множеств
   График функции, это:

$$\Gamma_f = \{(x, y) : \ y = f(x)\}$$

Т.е. это выделение из декартового произведения по свойству y = f(x)

Любое ли подножество декартового произведения можно назвать графиком функции?
Тогда должно быть выполнено два условия:

- 1) $\forall x \in X \; \exists y \in Y : \; (x, y)$
- 2) $(x, y) \in \Gamma_f \wedge (x, z) \in \Gamma_f \Rightarrow y = z$

При таком однозначном соответствии x к y можно считать, что из графика видна определяющая его функция и наоборот. Иначе говоря, они определяют друг друга.
Тогда вместо $(x, y) \in \Gamma_f$ можно писать $y = f(x)$
Зато теперь функция определяется через теорию множеств

2. **Композиция функций**

$$g \circ f \; (x) = g(f(x))$$