DAN LASCU **ANDA OLTEANU**
ADRIANA-LIGIA SPORIŞ **PAUL VASILIU**

MATEMATICĂ.
CULEGERE DE PROBLEME TIP GRILĂ PENTRU ADMITEREA ÎN ACADEMIA NAVALĂ „MIRCEA CEL BĂTRÂN”

Colecţia „Matematică”

DAN LASCU ANDA OLTEANU
ADRIANA-LIGIA SPORIŞ PAUL VASILIU

MATEMATICĂ.
CULEGERE DE PROBLEME TIP GRILĂ PENTRU ADMITEREA ÎN ACADEMIA NAVALĂ „MIRCEA CEL BĂTRÂN”

Editura Academiei Navale „Mircea cel Bătrân”
Constanţa, 2019

Editura Academiei Navale „Mircea cel Bătrân”
Str. Fulgerului nr. 1, 900218, Constanţa
Tel. 0241/626200/171, fax 0241/643096
Email: editura@anmb.ro

ISBN 978-606-642-180-5

CUPRINS

PREFAŢĂ

Prezenta culegere se adresează elevilor de liceu care doresc să se pregătească pentru examenul de Bacalaureat şi pentru examenul de Admitere în diverse universităţi, în special în Academia Navală "Mircea cel Bătrân".

Culegerea a fost elaborată de un colectiv de cadre didactice din ANMB şi se doreşte a fi un material util pregătirii viitorilor studenţi ai ANMB ţinând cont şi de faptul că această culegere va fi folosită şi la întocmirea subiectelor pentru concursul de Admitere la ANMB. Culegerea conţine exerciţii de Algebră şi Elemente de Analiză Matematică tip grilă şi acoperă programa analitică de Bacalaureat şi Admitere în ANMB

Exerciţiile din prezenta culegere acoperă toate gradele de dificultate, de la exerciţii foarte simple care necesită un nivel minim de cunoştinţe, până la exerciţii a căror rezolvare presupune cunoştinţe temeinice.

Fiecare exerciţiu este urmat de 5 variante de răspuns dintre care doar unul este corect. La sfârşitul culegerii se dau răspunsurile corecte şi idei de rezolvare sau chiar rezolvări complete.

Deoarece culegerea este postată pe pagina web a ANMB, nu au mai fost incluse în carte şi testele grilă date în anii anteriori la examenul de Admitere, teste foarte utile în pregătirea candidaţilor şi care se găsesc, de asemenea, la secţiunea Admitere de pe site-ul www.anmb.ro.

Pentru eventualele probleme legate de corectitudinea enunţurilor, a răspunsurilor, a rezolvărilor, sau alte erori de tehnoredactare, cei care studiază prezenta culegere sunt rugaţi să ne trimită observaţiile lor la adresa de email dan.lascu@anmb.ro.

Constanţa, Martie 2019 Autorii

CAPITOLUL 1

MULŢIMI

1. Fie mulţimile $A = \{1,\ 2,\ 5,\ 6\}$ şi $B = \{2,\ 3,\ 7\}$. Să se precizeze mulţimile $A \cup B$ şi $A \setminus B$.
   a) $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $A \setminus B = \{1,\ 5,\ 6\}$;
   b) $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, 5,\ 6,\ 7\}$, $A \setminus B = \{3, 7\}$;
   c) $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $A \setminus B = \{3, 7\}$;
   d) $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, 5,\ 6,\ 7\}$, $A \setminus B = \{1,\ 5,\ 6\}$;
   e) $A \cup B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$;
   f) $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $A \setminus B = \emptyset$.

2. Dacă $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ este cifră impară}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 2x - 1 \leq 5\}$ şi $C = \{x \in \mathbb{N}^* |\, 3x + 1 < 5\}$, atunci:
   a) $A = \{0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ şi $C = \{0,\ 1,\ 2\}$;
   b) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B = \{0,\ 1,\ 2\}$, $C = \{1,\ 2,\ 3\}$;
   c) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $C = \{1\}$;
   d) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3\}$, $C = \{1,\ 2\}$;
   e) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $C = \{0,\ 1,\ 2\}$;
   f) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3\}$, $C = \{1,\ 2,\ 3\}$.

3. Câte elemente are mulţimea $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 < x \leq 6\}$?

a) niciunul;
b) două;
c) trei;
d) patru;
e) cinci;
f) o infinitate.

4. Dacă $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| + |x-2| = 3\}$, atunci:
a) $A = \{1, 3\}$;
b) $A = \{0, 3\}$;
c) $A = \{2, 3\}$;
d) $A = \{0, 1\}$;
e) $A = \{0, 2\}$;
f) $A = \{1, 2\}$.

5. Dacă $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{x+4}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$, atunci:
a) $A = \{-4, -1, 0, 2\}$;
b) $A = \{-4, -2, 0, 3\}$;
c) $A = \{-2, 0, 2\}$;
d) $A = \{-2, 0, 1, 2\}$;
e) $A = \{-4, -2, 0\}$;
f) $A = \{-4, -2, 0, 2\}$.

6. Dacă $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{x+1}{3-x} \geq 0\right\}$, atunci:
a) $A = [-1, 3)$;
b) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$;
c) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$;
d) $A = [-1, 3]$;
e) $A = \{0, 1, 2\}$;
f) $A = \emptyset$.

7. Dacă $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \dfrac{3-x}{5+x} \geq 1\right\}$, atunci:
a) $A = \{0\}$;
b) $A = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$;

c) $A = \{-4, -3, -2, -1\}$;
d) $A = [-5, 1]$;
e) $A = [-5, -1]$;
f) $A = \emptyset$.

8. Dacă $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 5\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 3\}$, atunci mulţimile $A \cup B$ şi $A \cap B$ sunt:
a) $A \cup B = \{2, 3, 4\}$, $A \cap B = \emptyset$;
b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$;
c) $A \cup B = \{2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{3\}$;
d) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{2, 3, 4\}$;
e) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \emptyset$;
f) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \emptyset$.

9. Dacă $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este divizor al lui } 6\}$, atunci mulţimea $A \cap B$ este:
a) $A \cap B = \{1, 3, 6, 9\}$;
b) $A \cap B = \{2, 3\}$;
c) $A \cap B = \{1, 2, 3, 6, 9\}$;
d) $A \cap B = \{2, 3, 6\}$;
e) $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$;
f) $A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 6\}$.

10. Dacă $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |3x - 2| \leq 2\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \dfrac{15}{x+2} \in \mathbb{Z}\right\}$, atunci mulţimea $A \cap B$ este:
a) $A \cap B = \{1\}$;
b) $A \cap B = \emptyset$;
c) $A \cap B = \{0, 1, 15\}$;
d) $A \cap B = \{0, 1\}$;
e) $A \cap B = \{3\}$;
f) $A \cap B = \{1, 3\}$.

11. Dacă $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq 2\}$, atunci $A \cap \mathbb{N}$ este:
a) $\emptyset$;
b) $\{0, 1, 2, 3\}$;

c) $\{0, 3\}$;
d) $\mathbb{R}$;
e) $(-4, 4)$;
f) $(0, 4)$.

12. Dacă $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| \leq 2\}$, atunci $A \cap \mathbb{Z}$ este:
a) $(-9, 9)$;
b) $\{-5, -4, -3, -2, -1\}$;
c) $\{0, 1, 2, 3\}$;
d) $\emptyset$;
e) $\mathbb{R}$;
f) $\{0, 3\}$.

13. Dacă $A = \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{2n+3}{n} \in \mathbb{N}\right\}$, atunci:
a) $A = \emptyset$;
b) $A = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$;
c) $A = \{1, 3\}$;
d) $A = \{1, 2, 3\}$;
e) $A = \{2, 3\}$;
f) $A = \{3\}$.

14. Dacă $A = \left\{n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{2n+3}{n} \in \mathbb{N}\right\}$, atunci:
a) $A = \{4, 6\}$;
b) $A = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$;
c) $A = \{1, 3\}$;
d) A $= \{-3, 1, 3\}$;
e) $A = \emptyset$;
f) $A = \mathbb{Z}$.

15. Dacă $A = \left\{n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{2n+3}{n} \in \mathbb{Z}\right\}$, atunci:
a) $A = \emptyset$;
b) $A = \mathbb{R}$;
c) $A = \{1, 3\}$;
d) $A = \{-3, 1, 3\}$;

e) $A = \{-3, -1, 1, 3\}$;
f) $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

16. Dacă $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{2n+3}{n} \in \mathbb{Z} \right\}$, atunci:
a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$;
b) $A = \mathbb{R}$;
c) $A = \emptyset$;
d) $A = \{-3, 1, 3\}$;
e) $A = \{-3, -1, 1, 3\}$;
f) $A = \{1, 3\}$.

17. Dacă $A = \{m \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - mx + m > 0, \, \forall x \in \mathbb{R}\}$, atunci:
a) $A = (0, 4)$;
b) $A = \emptyset$;
c) $A = \{1, 3\}$;
d) $A = \{-3, 1, 3\}$;
e) $A = \mathbb{R}$;
f) $A = [-3, 3]$.

18. Dacă $A = \{m \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - mx + m \geq 0, \, \forall x \in \mathbb{R}\}$, atunci:
a) $A = (0, 4)$;
b) $A = [0, 4]$;
c) $A = \{1, 3\}$;
d) $A = \{-3, 1, 3\}$;
e) $A = \{-3, -1, 1, 3\}$;
f) $A = \{1, 4\}$.

19. Dacă $A = \{m \in \mathbb{N} \,|\, x^2 - mx + m \geq 0, \, \forall x \in \mathbb{R}\}$, atunci:
a) $A = (0, 4)$;
b) $A = [0, 4]$;
c) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;
d) $A = \{-3, 1, 3\}$;
e) $A = \mathbb{N}$;
f) $A = \emptyset$.

20. Dacă $A = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 - mx + m \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$, atunci:
 a) $(-3,\, 4)$;
 b) $[-3,\, 4]$;
 c) $\emptyset$;
 d) $\{0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4\}$;
 e) $\mathbb{Z}$;
 f) $\mathbb{N}$.

21. Dacă $A = \{x\in\mathbb{R} \,|\, x^2 - 6x + 8 > 0\}$, $B = \{x\in\mathbb{R} \,|\, x^2 - 2x - 3 > 0\}$ şi $C = \{x\in\mathbb{R} \,|\, x^2 - x - 12 > 0\}$, atunci:
 a) $A\subset B\cap C$;
 b) $B\subset A\cap C$;
 c) $C\subset A\cap B$;
 d) $A\cup B\cup C = \mathbb{R}$;
 e) $A\cap B\cap C = \emptyset$;
 f) $B\subset A$.

22. Dacă $A = \{x\in\mathbb{R} \,|\, x^2 - x - 2 < 0\}$, $B = \{x\in\mathbb{R} \,|\, x^2 > 9\}$ şi $C = \{x\in\mathbb{R} \,|\, 2x + 4 > 0\}$, atunci:
 a)$A\subset C\setminus B$;
 b) $B\subset A\setminus C$;
 c) $C\subset A\setminus B$;
 d) $A\cup B\cup C = \mathbb{R}$;
 e) $A\cap B\cap C = \{1\}$;
 f) $C\subset B\setminus A$.

23. Dacă $A = \left\{x\in\mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{2x-3}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$, $B = \{x\in\mathbb{Z} \,|\, x^2 < 16\}$ şi $C = \left\{-\sqrt{2},\, 0,\, \dfrac{1}{2}, 1,\, \dfrac{7}{2}\right\}\cap (-2,\, 2)$, atunci mulţimea $C\cup (A\cap B)$ este:
 a) $\emptyset$;
 b) $\mathbb{Z}$;
 c) $\left\{-2,\, -\sqrt{2},\, 0,\, \dfrac{1}{2},\, 1\right\}$;
 d) C;
 e) $(-2,\, 2)$;

f) $\left\{-2, -\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

24. Dacă $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{3x+2}{x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < 2x+6 < 4\}$ şi $C = \left\{-3,\ -2,\ -\frac{3}{7},\ \frac{1}{2},\ 4,\ 5,\ 7\right\} \cap \mathbb{Z}$, atunci:
a) $A \cap B \cap C = \emptyset$;
b) $C = \mathbb{Z}$;
c) $C \subset A \cap B$;
d) $C \subset A \cup B$;
e) $A \setminus B = C$;
f) $A \cup B \cup C = \mathbb{Z}$.

25. Dacă $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| \leq 5\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x-3}{x+5} \leq 0\right\}$, atunci mulţimea $A \cap B \cap \mathbb{Z}$ este:
a) $\{-1,\ 1,\ 2,\ 3\}$;
b) $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$;
c) $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$;
d) A;
e) B;
f) $\emptyset$.

26. Dacă $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x+2| \leq 6\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{x-3}{x-6} \leq 0\right\}$, atunci cardinalul mulţimii $A \cup B$ este:
a) 6;
b) 14;
c) 13;
d) 10;
e) 3;
f) 2.

27. Dacă $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| \leq 6\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x+3}{x-6} \leq 0\right\}$, atunci mulţimea $A \cap B \cap \mathbb{N}$ este:
a) $\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$;

b) $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$;
c) $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$;
d) $\emptyset$;
e) $\{-1, 0, 1\}$;
f) $\mathbb{N}$.

28. Dacă $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \dfrac{n+5}{n-1} \in \mathbb{N} \right\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ divide } 14\}$, atunci cardinalul mulţimii $A \cap B$ este:
a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) 4;
e) 5;
f) 6.

29. Dacă $A = \left\{ n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \dfrac{n+5}{n-1} \in \mathbb{Z} \right\}$ şi $B = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \text{ divide } 14\}$, atunci $A \cap B$ este:
a) $\{-2,\ -1,\ 2,\ 7\}$;
b) $\emptyset$;
c) $\{-5,\ 0,\ 1,\ 2,\ 7\}$;
d) $\{-1,\ 2,\ 3,\ 7\}$;
e) $\{-1,\ 0,\ 1,\ 7\}$;
f) A.

30. Dacă A şi B sunt două mulţimi astfel încât $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$, $A \cap B = \{2,\ 3,\ 4\}$, $A \setminus B = \{1,\ 5,\ 8\}$ şi $B \setminus A = \{6,\ 7\}$, atunci suma cardinalelor mulţimilor A şi B este:
a) 8;
b) 10;
c) 4;
d) 11;
e) 9;
f) 12.

31. Se consideră mulţimile $A, B \subseteq E$ astfel încât $C_E A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $C_E B = \{1,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $A \cap B = \{8,\ 9,\ 10\}$. Atunci mulţimea $B \setminus A$ este:
a) $\{2,\ 3\}$;
b) $\{2,\ 3,\ 4\}$;
c) $\emptyset$;
d) $\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$;
e) $\{3,\ 4,\ 7\}$;
f) $\{2,\ 3,\ 4,\ 7\}$.

32. Dacă $C = \{(x, y) \in \mathbb{N} \mid 5x + 3y = 150\}$, atunci numărul elementelor mulţimii C este:
a) 8;
b) 9;
c) 10;
d) 11;
e) 12;
f) nicio variantă.

33. Dacă $M = \{x \in [-3, 2) \cap \mathbb{Z} \mid |x - 2| - |x + 3| \geq 1\}$, atunci produsul elementelor din această mulţime este egal cu:
a) -2;
b) -3;
c) 3;
d) 2;
e) 6;
f) -6.

34. Dacă $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{4n+9}{n+1} \in \mathbb{N} \right\}$, atunci numărul elementelor distincte ale mulţimii este:
a) 2;
b) 3;
c) 4;
d) 5;

e) 6;
f) nicio variantă.

35. Dacă $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in (-1, 4)\}$, $C = \left\{x \in \mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{2x+5}{x+1} \in \mathbb{N}\right\}$, iar $M = (A \cup B) \setminus (B \cap C)$, atunci suma elementelor mulţimii M este:
a) 3;
b) 6;
c) 8;
d) 4;
e) 5;
f) 10.

36. Care sunt elementele care se află în mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - |x| - 6 = 0\}$, dar care nu se află şi în mulţimea $B = \left\{x \in [1, 3] \;\middle|\; 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} \leq 7\right\}$?
a) $\{\pm 3\}$;
b) $\{-3\}$;
c) $\emptyset$;
d) $[-1, 3]$;
e) $\{-1\}$;
f) $\{-1, 3\}$.

37. Dacă mulţimea $M = \left\{n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; (n^2+2) \,\vdots\, (n+1)\right\}$, atunci $S = \sum\limits_{k \in M} k^2$ are valoarea:
a) 24;
b) 6;
c) 14;
d) 4;
e) 9;
f) 8.

38. Dacă M este mulţimea valorilor reale ale lui m cu proprietatea că ecuaţia $x^2 - |x| = mx(x+1)$ are exact 3 rădăcini reale distincte, atunci M este:
a) $[-1, 1)$;
b) $[-1, 1]$;

c) $(-1,1)$;
d) $(-1,1]$;
e) $\emptyset$;
f) nicio variantă.

39. Care este numărul elementelor mulţimii $A=\left\{x\in\mathbb{Q}\,\middle|\,x=\dfrac{3n}{n+2}, n\in\mathbb{N},\right.$ $\left. n=\overline{1,100}\right\}$?
a) 95;
b) 97;
c) 98;
d) 99;
e) 100;
f) 96.

40. Mulţimea $M=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x=a+\dfrac{1}{a}, a\in\mathbb{R}^*\right\}$ este:
a) $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$;
b) $(-2,2)$;
c) $(-\infty,-2]$;
d) $[2,\infty)$;
e) $\emptyset$;
f) nicio variantă.

41. Suma S a elementelor mulţimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\dfrac{x^3-3x+2}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$ este:
a) 0;
b) -4;
c) 2;
d) 10;
e) -3;
f) 4.

42. Mulţimea $M=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}+\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}=2\right\}$ este:
a) $\{1\}$;
b) $[0,1]$;
c) $\{0,1\}$;

d) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$;

e) $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$;

f) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

43. Dacă $M = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \,\middle|\, x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}\right\}$, atunci:

a) $M \subseteq \mathbb{N}$;

b) $M \subset \mathbb{Z}$;

c) $M \subset \mathbb{Q}$;

d) $M \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

e) $M \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$;

f) $M = \emptyset$.

44. Dacă $M = \{m \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4x + m > 0, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}\}$, atunci:

a) $M = (-\infty, 2]$;

b) $M = (4, \infty)$;

c) $M = [4, \infty)$;

d) $M = (-\infty, 4]$;

e) $M = \{4\}$;

f) $(2, \infty)$.

CAPITOLUL 2

PROGRESII ARITMETICE ŞI GEOMETRICE

1. Dacă (a_n) este o progresie aritmetică cu $a_3 = 7$ şi $a_5 = 13$, atunci a_9 este:
   a) 27;
   b) 25;
   c) 23;
   d) 21;
   e) 19;
   f) 15.

2. Dacă (a_n) este o progresie aritmetică cu $a_8 = 40$ şi $a_{20} = -20$, atunci a_7 este:
   a) 45;
   b) 25;
   c) -35;
   d) 15;
   e) -10;

f) 0.

3. Dacă (a_n) este o progresie aritmetică cu $a_{52} = -125$ şi $r = -5$, atunci a_1 este:
a) 145;
b) 250;
c) -380;
d) 130;
e) 120;
f) 380.

4. Dacă $4x - 1,\ 2x + 3$ şi $x - 6$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci valoarea lui x este:
a) 0;
b) 6;
c) -13;
d) $\frac{13}{4}$;
e) 10;
f) 13.

5. Dacă (a_n) este o progresie aritmetică cu $a_2 = 3$ şi $a_5 = 5$, atunci S_{28} este:
a) $\frac{952}{3}$;
b) $\frac{2642}{3}$;
c) 2842;
d) 2642;
e) $\frac{406}{9}$;
f) $\frac{406}{6}$.

6. Valoarea sumei $1 + 3 + 5 + \ldots + 53$ este:
a) 721;
b) 725;
c) 733;
d) 731;

e) 729;

f) 727.

7. Valoarea sumei $5 + 9 + 13 + \ldots + 117$ este:

a) 1759;

b) 1761;

c) 1763;

d) 1769;

e) 1767;

f) 1765.

8. Dacă (a_n) este o progresie aritmetică cu $a_2 + a_{15} = 23$, atunci S_{16} este:

a) 184;

b) 186;

c) 188;

d) 182;

e) 190;

f) 180.

9. Dacă (b_n) este o progresie geometrică cu $b_3 = 6$ şi $b_5 = 24$, atunci b_9 este:

a) -384;

b) 364;

c) 384;

d) 284;

e) -284;

f) 394.

10. Dacă (b_n) este o progresie geometrică cu termeni pozitivi cu $b_1 - b_2 = 8$ şi $b_2 + b_3 = 12$, atunci b_1 şi q sunt:

a) $b_1 = 4,\ q = \dfrac{1}{2}$;

b) $b_1 = 8,\ q = 2$;

c) $b_1 = 16,\ q = 2$;

d) $b_1 = 8,\ q = \dfrac{1}{2}$;

e) $b_1 = 16,\ q = \dfrac{1}{2}$;

f) $b_1 = 16,\ q = 1$.

11. Dacă $x-1$, $x+1$ şi $2x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, atunci valorile lui x sunt:
   a) $x \in \{-3, 2\}$;
   b) $x = 2$;
   c) $x \in \{-2, 3\}$;
   d) $x = 3$;
   e) $x \in \phi$;
   f) $x \in \{2, 3\}$.

12. Valoarea sumei $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{19}$ este:
   a) $\dfrac{2^{19}-1}{2}$;
   b) $\dfrac{2^{20}-1}{2}$;
   c) $2^{19}+1$;
   d) $2^{20}+1$;
   e) $2^{19}-1$;
   f) $2^{20}-1$.

13. Valoarea sumei $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^{15}}$ este:
   a) $2\left(1-\dfrac{1}{2^{15}}\right)$;
   b) $1-\dfrac{1}{2^{15}}$;
   c) $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^{15}}\right)$;
   d) $2\left(\dfrac{1}{2^{15}}-1\right)$;
   e) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^{15}}-1\right)$;
   f) $\dfrac{1}{2^{15}}-1$.

14. Dacă (b_n) este o progresie geometrică cu $b_1 = 2$ şi $b_2 = 4$, atunci S_{19} este:
   a) $\dfrac{1}{2^{19}-1}$;

b) $2\left(2^{19}+1\right)$;
c) 2^{20};
d) 2^{19};
e) $2^{19}-1$;
f) $2\left(2^{19}-1\right)$.

15. Dacă (b_n) este o progresie geometrică cu $b_2+b_3=10$ şi $q=4$, atunci S_{49} este:
a) $\dfrac{4^{49}-1}{6}$;
b) $\dfrac{4^{49}+1}{6}$;
c) $\dfrac{4^{49}-1}{3}$;
d) $\dfrac{4^{49}+1}{3}$;
e) $\dfrac{2^{98}-1}{3}$;
f) $\dfrac{2^{98}+1}{3}$.

16. Dacă (b_n) este o progresie geometrică cu $b_6=20$ şi $q=-\dfrac{1}{2}$, atunci S_8 este:
a) $\dfrac{5\cdot 2^{7}}{3}$;
b) $\dfrac{5\left(1-2^{8}\right)}{3}$;
c) $\dfrac{1-2^{8}}{3}$;
d) $\dfrac{2^{8}-1}{3}$;
e) -128;
f) -105.

17. Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ este o progresie aritmetică şi $S_n=n^2+2n$ este suma primilor n termeni ai progresiei, atunci termenul a_{2019} este:
a) 4039;
b) 4044;

c) 2044;
d) 2020;
e) 3080;
f) 3060.

18. Suma primilor 2019 termeni ai unei progresii aritmetice în care primul termen este egal cu 1 şi raţia progresiei este egală cu 2 este:
a) 5056360;
b) 3886365;
c) 6076560;
d) 2276360;
e) 4076361;
f) 5676364.

19. Soluţia ecuaţiei $1 + 5 + 9 + \ldots + x = 2016$ este:
a) $x = 128$;
b) $x = 124$;
c) $x = 125$;
d) $x = 223$;
e) $x = 213$;
f) $x = 273$.

20. Soluţia ecuaţiei $1 + 6 + 11 + \ldots + x = 55$ este:
a) $x = 32$;
b) $x = 213$;
c) $x = 254$;
d) $x = 21$;
e) $x = 28$;
f) $x = 121$.

21. Dacă într-o progresie geometrică se cunosc termenii $b_3 = 4$ şi $b_7 = 64$, atunci valoarea termenului b_{2019} este:
a) $b_{2019} = 3^{2018}$;
b) $b_{2019} = 7^{2018}$;
c) $b_{2019} = 6^{2018}$;

d) $b_{2019} = 5^{2018}$;

e) $b_{2019} = 2^{2018}$;

f) $b_{2019} = 4^{2018}$.

22. Dacă într-o progresie geometrică cu termeni pozitivi se cunosc termenii b_3= 4, b_7= 64, atunci suma primilor 2019 termeni este:

a) S_{2019}=6^{2019}−1;

b) S_{2019}=5^{2019}−1;

c) S_{2019}=8^{2019}−1;

d) $S_{2019} = 4^{2019} - 1$;

e) $S_{2019} = 3^{2019} - 1$;

f) $S_{2019} = 2^{2019} - 1$.

23. Valoarea reală şi nenulă a lui x, cu proprietatea că numerele $2x, x^2, 4$ sunt în progresie aritmetică, este:
a) -1;
b) -5;
c) 2;
d) 3;
e) -2;
f) -3.

24. Valoarea reală şi nenulă a lui x, cu proprietatea că numerele $2x, x^2, 4$ sunt în progresie geometrică, este:
a) $\{-1\}$;
b) $\{2\}$;
c) $\{2,\ 4\}$;
d) $\{-1,\ 2\}$;
e) $\{2,\ 3\}$;
f) $\{4,\ 5\}$.

25. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi S_n=n^2−$2n$+2019. Numărul progresiilor aritmetice care au suma primilor n termeni egală cu S_n este egal cu:
a) 1;

b) 2;
c) 0;
d) 3;
e) 4;
f) 6.

26. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ o progresie aritmetică şi $S_n = n^2 + 2n$ suma primilor n termeni ai progresiei. Valoarea sumei $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot S_k$ este:

a) $\frac{n(n+1)}{2}$;
b) $\frac{n(n+1)}{6}$;
c) 0;
d) $\frac{n(n+1)(3n^2+13n+11)}{6}$;
e) $\frac{n(n+1)(3n^2+13n+11)}{2} + 2$;
f) $\frac{n(n+1)(3n^2+13n+11)}{3} - 1$.

27. Într-o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 20$ şi raţia $r = 5$, termenul 50 are valoarea:

a) $a_{50} = 265$;
b) $a_{50} = 270$;
c) $a_{50} = 260$;
d) $a_{50} = 365$;
e) $a_{50} = 165$;
f) $a_{50} = 160$.

28. Într-o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 10$ şi raţia $r = 7$, termenul 51 are valoarea:

a) $a_{51} = 367$;
b) $a_{51} = 270$;
c) $a_{51} = 260$;
d) $a_{51} = 360$;
e) $a_{51} = 267$;

f) $a_{51} = 376$.

29. Dacă într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, avem $\begin{cases} a_1 + a_3 + a_6 = 27 \\ a_2 + a_4 + a_7 = 36 \end{cases}$, atunci primul termen şi raţia sunt:
a) $a_1 = 2$, $r = 3$;
b) $a_1 = 2$, $r = 2$;
c) $a_1 = 1$, $r = 3$;
d) $a_1 = 1$, $r = 1$;
e) $a_1 = 0$, $r = 3$;
f) $a_1 = 2$, $r = 1$.

30. Dacă într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ avem $\begin{cases} a_1 + a_3 + a_4 = 16 \\ a_2 + a_3 + a_5 = 20 \end{cases}$, atunci primul termen şi raţia sunt:
a) $a_1 = 2$, $r = 1$;
b) $a_1 = 2$, $r = 2$;
c) $a_1 = -1$, $r = 3$;
d) $a_1 = 0$, $r = 1$;
e) $a_1 = 2$, $r = 3$;
f) $a_1 = 2$, $r = 4$.

31. Dacă într-o progresie geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$ avem $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 26 \\ a_4 + a_5 + a_6 = 702 \end{cases}$, atunci primul termen şi raţia sunt:
a) $a_1 = 2$, $q = 3$;
b) $a_1 = 2$, $q = 1$;
c) $a_1 = 1$, $q = 2$;
d) $a_1 = 1$, $q = 3$;
e) $a_1 = 2$, $q = 2$;
f) $a_1 = 1$, $q = 4$.

32. Dacă într-o progresie geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$ avem $\begin{cases} a_1 + a_3 - a_2 = 7 \\ a_2 + a_4 - a_3 = 21 \end{cases}$, atunci primul termen şi raţia sunt:
a) $a_1 = 2,\ q = 2$;
b) $a_1 = 1,\ q = 2$;
c) $a_1 = 3,\ q = 2$;
d) $a_1 = 1,\ q = 3$;
e) $a_1 = 2, q = 1$;
f) $a_1 = 1,\ q = 4$.

33. Valorile lui x pentru care $x - 1,\ 2,\ x + 2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice sunt:
a) $x_1 = 1,\ x_2 = 2$;
b) $x_1 = -3,\ x_2 = 2$;
c) $x_1 = x_2 = \dfrac{3}{2}$;
d) $x_1 = 1,\ x_2 = -2$;
e) $\emptyset$;
f) $x_1 = -3,\ x_2 = -2$.

34. Valorile lui x pentru care $x + 5,\ x^2,\ 3x + 1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sunt:
a) $x_1 = 1,\ x_2 = -2$;
b) $x_1 = -2,\ x_2 = 3$;
c) $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$;
d) $x_1 = -1,\ x_2 = 3$;
e) $\emptyset$;
f) $x_1 = -3,\ x_2 = 2$.

35. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi suma primilor trei termeni este 9. Dacă adunăm 1 primilor doi termeni şi 3 celui de-al treilea, obţinem trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. Atunci suma primilor 50 de termeni ai progresiei $(a_n)_{n\geq 1}$ este:
a) 2000;

b) 2500;
c) 10000;
d) 1500;
e) 250;
f) 1000.

36. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi suma primilor trei termeni este 12. Dacă adunăm 2 primului termen şi micşorăm cu 1 pe cel de-al doilea termen şi cu 4 pe al treilea, obţinem trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice. Atunci suma primilor 20 de termeni ai progresiei $(a_n)_{n\geq 1}$ este:
a) 200 ;
b) 250 ;
c) 590 ;
d) 600;
e)690 ;
f) 589.

37. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ este o progresie aritmetică astfel încât suma primilor patru termeni este 40, suma ultimilor patru termeni este 104 şi suma tuturor termenilor este 216, atunci termenul a_{10} este:
a) 25;
b) -25;
c) 23;
d) 24;
e) -20;
f) 67.

38. Se consideră numerele reale x, y, z astfel încât $x, (y+4), z$ sunt în progresie aritmetică, x, y, z sunt în progresie geometrică şi $x, (y+4), (z+32)$ sunt în progresie geometrică. Atunci valorile acestor numere sunt:
a) $x = 6, y = 2, z = 18$;
b) $x = 18, y = 6, z = 2$;
c) $x = 2, y = 6, z = 18$;

d) $x = \frac{2}{9}, y = -\frac{10}{9}, z = \frac{50}{9}$;

e) $x = 2, y = 6, z = 18$ sau $x = \frac{2}{9}, y = -\frac{10}{9}, z = \frac{50}{9}$;

f) $x = 6, y = 18, z = 2$.

39. Câţi termeni ai progresiei aritmetice 5, 9, 13, $17, \ldots$ sunt necesari pentru ca suma acestora să fie 629?
a) 20;
b) 19;
c) 18;
d) 15;
e) 16;
f) 17.

40. Se ştie că într-o progresie aritmetică $a_1, a_2, \ldots, a_n, ...$, avem $a_2 = 5$ şi a_1, a_3, a_{11} sunt în progresie geometrică. Atunci $S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ este:
a) 160;
b) -155;
c) 158;
d) 200;
e) 154;
f) 155.

41. Fie $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ o progresie aritmetică astfel încât: $a_{10} = 35$ şi $a_{35} = 10$. Atunci $S_{45} = a_1 + \cdots + a_{45}$ este:
a) 990;
b) 900;
c) 890;
d) -890;
e) -990;
f) 1000.

42. Soluţia reală a ecuaţiei: $\frac{x-2}{x} + \frac{x-4}{x} + \frac{x-6}{x} + \cdots + \frac{2}{x} = 12$ este:
a) 48;

b) 52;
c) 44;
d) 50;
e) 54;
f) nu există.

43. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, o progresie aritmetică cu raţia $r \in \mathbb{R}^*$. Dacă suma primilor cinci termeni este jumătate din suma următorilor cinci termeni, atunci $k = \dfrac{S_{15}}{S_5}$, unde S_m este suma primilor m termeni, este:
a) 0;
b) 2;
c) 4;
d) 8;
e) 6;
f) $\dfrac{1}{3}$.

44. Dacă într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n \in \mathbb{N}$, suma primilor patru termeni este egală cu 10, iar suma inverselor acestora este $\dfrac{25}{12}$, atunci termenul a_{10} este:
a) 8;
b) 6;
c) 10;
d) 4;
e) 20;
f) nicio variantă.

45. Termenul general al unui şir de numere reale strict pozitive este $a_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^n, n \geq 1$. Care dintre următoarele numere aparţine şirului $(a_n)_n$?
a) $2\sqrt[3]{9}$;
b) $18\sqrt[3]{3}$;
c) $\sqrt[3]{6}$;
d) 12;
e) 18;

f) $24\sqrt{3}$.

46. Se ştie că $a, b, c \in \mathbb{N}$ sunt în progresie aritmetică cu raţia r, iar $(a-1), (b-1), (c+3)$ sunt în progresie geometrică cu raţia $q = r - 2$. Atunci suma $S = a+b+c$ este:
a) 30;
b) 24;
c) 28;
d) 25;
e) 26;
f) 27.

47. Fie a, b, c, d în progresie geometrică, care satisfac relaţiile $a + d = 18$, $b + c = 12$. Atunci $S_2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ are valoarea:
a) 340;
b) 320;
c) 310;
d) 350;
e) 360;
f) nicio valoare.

48. Să se determine produsul a patru numere în progresie aritmetică a, b, c, d dacă suma lor este 48, iar produsul termenilor extremi reprezintă $\frac{27}{35}$ din produsul celorlalţi doi termeni:
a) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$;
b) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$;
c) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$;
d) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$;
e) $2^4 \cdot 3^3$;
f) $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$.

49. Dacă numerele reale x, y, z strict pozitive sunt în progresie geometrică, atunci numerele $\ln x$, $\ln y$, $\ln z$ sunt:
a) în progresie geometrică;
b) în progresie aritmetică;

c) nu există nicio relaţie între ele;
d) numere raţionale;
e) numere iraţionale;
f) nicio variantă.

50. Dacă numerele $x-2$, $\sqrt{5x+10}$, $x+4$ sunt în progresie geometrică, atunci x este:
a) 6;
b) 9;
c) 3;
d) -3;
e) -3 sau 6;
f) nicio variantă.

51. Dacă numerele strict pozitive a, b, c reprezintă termenul de rang p, respectiv rang q şi respectiv de rang r al unei progresii geometrice, atunci expresia $E = a^{q-r}b^{-p}c^{p-q}$ este egală cu:
a) abc;
b) 1;
c) $\sqrt{abc}$;
d) $\sqrt[3]{abc}$;
e) 0;
f) nicio variantă.

CAPITOLUL 3

FUNCŢII. PROPRIETĂŢI

1. Fie funcţiile $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 2$ şi $g(x) = -x^2 + 2x$. Atunci valoarea lui $(f \circ g)(-1)$ este:
   a) 0;
   b) 1;
   c) 2;
   d) 3;
   e) 4;
   f) 5.

2. Considerăm funcţiile $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \begin{cases} 2x - 3,\ x \leq 0 \\ 7x,\ \ x > 0 \end{cases}$
   şi $g(x) = \begin{cases} x^2,\ x \leq -2 \\ 2x - 1,\ \ x > -2 \end{cases}$. Atunci valoarea lui $(g \circ f)(1)$ este:
   a) -13;
   b) 1;
   c) -7;
   d) -3;

e) 7;
f) 13.

3. Fie funcţiile $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$ şi $g(x) = x+2$. Soluţia ecuaţiei $(f \circ f)(x) = (g \circ g)(x)$ este:
a) $x = 0$;
b) $x = 1$;
c) $x = \frac{1}{2}$;
d) $x = -\frac{1}{2}$;
e) $x = \frac{1}{3}$;
f) $x = \frac{1}{4}$.

4. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} - 4$, atunci $(f \circ f)(2)$ este:
a) $-\frac{7}{2}$;
b) $-\frac{11}{2}$;
c) $-\frac{9}{2}$;
d) $-\frac{5}{2}$;
e) $-\frac{1}{2}$;
f) $-\frac{3}{2}$.

5. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x-1$, atunci $f(1) + f(2) + \cdots + f(2019)$ este:
a) $2018 \cdot 2019$;
b) $1010 \cdot 2020$;
c) $1010 \cdot 2019$;
d) $2019 \cdot 2020 - 1$;
e) $2019 \cdot 2020$;
f) 2019^2.

6. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 7x + 12$, atunci $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2019)$ este:
   a) $2019!$;
   b) 0;
   c) $1010 \cdot 2019$;
   d) $2018 \cdot 2020$;
   e) $2019 \cdot 2020$;
   f) 2019^2.

7. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$, atunci soluţiile ecuaţiei $(f \circ f)(x) = f^2(x)$ sunt:
   a) $x = -2$;
   b) $x \in \{-1, 1\}$;
   c) $x = 0$;
   d) $x \in \{-2, 0\}$;
   e) $x \in \{-3, 0\}$;
   f) $x \in \{-1, 0, 1\}$.

8. Dacă p este numărul de funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea: $f(x) + f(1 - x) = 3x + 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci valoarea lui p este:
   a) $p = 8$;
   b) $p = 1$;
   c) $p = 5$;
   d) $p = 0$;
   e) $p = 4$;
   f) $p = 3$.

9. Dacă p este numărul de funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(2019^x) + f(2019^{-x}) = x + 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci:
   a) $p = 3$;
   b) $p = 0$;
   c) $p = 2$;
   d) $p = 4$;
   e) $p = 1$;
   f) $p = 6$.

10. Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definit prin $f(x)=2019^x+2019^{-x}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, atunci graficul funcţiei este simetric faţă de dreapta de ecuaţie:
a) $x=1$;
b) $y=x+1$;
c) $y=1$;
d) $x=2$;
e) $y=-x-1$;
f) $x=0$.

11. Dacă funcţia $f:(-2019,2019)\to\mathbb{R}$ este definită prin $f(x)=\log_2\left(\dfrac{2019-x}{2019+x}\right)$ pentru orice $x\in(-2019,\ \ 2019)$, atunci graficul funcţiei este simetric faţă de punctul de coordonate:
a) $(1,1)$;
b) $(0,1)$;
c) $(1,0)$;
d) $(0,0)$;
e) $(-1,0)$;
f) $(0,-1)$.

12. Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $f(x)=x^{2019}+x^{2018}+1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, atunci:
a) funcţia este injectivă;
b) funcţia este pară;
c) funcţia este impară;
d) funcţia este periodică;
e) funcţia nu este injectivă;
f) funcţia este bijectivă.

13. Dacă funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $f(x)=x^3-4x+1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, atunci:
a) funcţia este injectivă;
b) funcţia este pară;
c) funcţia este impară;

d) funcţia este periodică;

e) funcţia este bijectivă;

f) funcţia nu este injectivă.

14. Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \ x \in (-\infty, 3) \\ 5x - 10, \ x \in [3, \infty) \end{cases}$,

atunci inversa funcţiei f este funcţia:

a) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2}, \ x < 6 \\ \dfrac{x+1}{4}, \ x \geq 6 \end{cases}$;

b) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}, \ x < 3 \\ \dfrac{x-10}{5}, \ x \geq 3 \end{cases}$;

c) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+10}{2}, \ x < 4 \\ \dfrac{x+1}{5}, \ x \geq 4 \end{cases}$;

d) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2}, \ x < 5 \\ \dfrac{x+10}{5}, \ x \geq 5 \end{cases}$;

e) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+12}{4}, \ x < 0 \\ \dfrac{x+16}{2}, \ x \geq 0 \end{cases}$;

f) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{3}, \ x < 1 \\ \dfrac{x}{3}, \ x \geq 1. \end{cases}$

15. Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, \ x \in (-\infty, 1) \\ x + 4, \ x \in [1, \infty) \end{cases}$,

atunci inversa funcţiei f este funcţia:

a) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2},\ x < 1 \\ \dfrac{x+1}{3},\ x \geq 1 \end{cases}$;

b) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{3},\ x < 5 \\ x-4,\ x \geq 5 \end{cases}$;

c) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{3},\ x < 2 \\ x,\ x \geq 2 \end{cases}$;

d) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{3},\ x < 2 \\ 2x,\ x \geq 2 \end{cases}$;

e) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3},\ x < 3 \\ 2x,\ x \geq 3 \end{cases}$;

f) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2},\ x < 3 \\ x+1,\ x \geq 3. \end{cases}$

16. Dacă funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt definite prin $f(x) = \begin{cases} -x+2,\ x \in (-\infty, 2) \\ x+3,\ x \in [2, \infty) \end{cases}$ şi $g(x) = \begin{cases} 3x-2,\ x \in (-\infty, 5) \\ -x+1,\ x \in [5, \infty) \end{cases}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $h(x) = (f \circ g)(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are expresia:

a) $h(x) = \begin{cases} x+1,\ x \in \left(-\infty, \dfrac{4}{5}\right) \\ -x+1,\ x \in \left[\dfrac{4}{5}, 1\right) \\ x+1,\ x \in [1, \infty) \end{cases}$;

b) $h(x)=\begin{cases}-x+2,\ x\in(-\infty,2)\\ -2x+1,\ x\in[2,3)\\ x,\ x\in[3,\infty)\end{cases}$;

c) $h(x)=\begin{cases}-x,\ x\in(-\infty,0)\\ x+1,\ x\in[0,3)\\ x+3,\ x\in[3,\infty)\end{cases}$;

d) $h(x)=\begin{cases}-4x+3,\ x\in(-\infty,4)\\ x+2,\ x\in[4,5)\\ x-2,\ x\in[5,\infty)\end{cases}$;

e) $h(x)=\begin{cases}-3x+4,\ x\in\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right)\\ 3x+1,\ x\in\left[\dfrac{4}{3},5\right)\\ x+1,\ x\in[5,\infty)\end{cases}$;

f) $h(x)=\begin{cases}x+4,\ x\in\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)\\ x,\ x\in\left[\dfrac{2}{3},6\right)\\ x+2,\ x\in[6,\infty)\end{cases}$;

17. Dacă funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt definite prin $f(x)=\begin{cases}-x+2,\ x\in(-\infty,2)\\ x+3,\ x\in[2,\infty)\end{cases}$ şi $g(x)=\begin{cases}3x-2,\ x\in(-\infty,5)\\ -x+1,\ x\in[5,\infty)\end{cases}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, atunci funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $h(x)=(g\circ f)(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ are expresia:

a) $h(x)=\begin{cases}x,\ x\in(-\infty,-1]\\ x+4,\ x\in(-1,2)\\ x+1,\ x\in[2,\infty)\end{cases}$;

b) $h(x) = \begin{cases} x-1,\ x \in \left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \\ x,\ x \in \left[\dfrac{2}{3}, 6\right) \\ -x,\ x \in [6, \infty) \end{cases}$;

c) $h(x) = \begin{cases} x,\ x \in \left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right) \\ -2x+1,\ x \in \left[\dfrac{4}{3},\ 5\right) \\ -x,\ x \in [5, \infty) \end{cases}$;

d) $h(x) = \begin{cases} x,\ x \in (-\infty, -1] \\ x+1,\ x \in (-1, 1) \\ -x-2,\ x \in [1, \infty) \end{cases}$;

e) $h(x) = \begin{cases} x+1,\ x \in (-\infty, 0] \\ x+2,\ x \in (0, 3) \\ x-3,\ x \in [3, \infty) \end{cases}$;

f) $h(x) = \begin{cases} x-1,\ x \in (-\infty, -3] \\ -3x+4,\ x \in (-3, 2) \\ -x-2,\ x \in [2, \infty) \end{cases}$.

18. Valoarea parametrului real m pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} (2-m)x+3,\ x \leq 1 \\ -x+2,\ x > 1 \end{cases}$ este strict monotonă este:
a) $\mathbb{R}$;
b) $(2, 5]$;
c) $(1, 4]$;
d) $(3, 5]$;
e) $(2, 4]$;
f) $\emptyset$.

19. Valoarea parametrului real m pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}(2+m)x+4, \ x\leq 1\\ x+5, \ x>1\end{cases}$ este strict monotonă este:

a) $(-2,0]$;
b) $(-3,1]$;
c) $(1,3]$;
d) $(-3,5]$;
e) $\mathbb{R}$;
f) $\emptyset$.

20. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+3, \ x<-2\\ 1-3x, \ x\geq -2\end{cases}$ şi $g(x)=\begin{cases}3x+1, \ x\leq 2\\ 2-x, \ x>2\end{cases}$.

Atunci funcţia $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este:

a) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}6x+5, \ x\in(-\infty,-1)\\ -2-9x, \ x\in[-1,4]\\ 7-2x, \ x\in(4,\infty);\end{cases}$

b) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}6x+5, \ x\in(-\infty,-1)\\ 3x-5, \ x\in[-1,4]\\ 7-2x, \ x\in(4,\infty);\end{cases}$

c) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}6x+5, \ x\in(-\infty,-1)\\ -2-9x, \ x\in[-1,2]\\ -5+3x, \ x\in(2,4]\\ 7-2x, \ x\in(4,\infty);\end{cases}$

d) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}6x+5, \ x\in(-\infty,-4)\\ 7-2x, \ x\in(4,\infty);\end{cases}$

e) $(f\circ g)(x)=\begin{cases}6x+5, \ x\in(-\infty,-1)\\ -2-9x, \ x\in[-1,2],\\ 3x+5, \ x\in(2,4]\\ 7-2x, \ x\in(4,\infty);\end{cases}$

f) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 6x+5, \;\; x \in (-\infty, -1) \\ -2-9x, \;\; x \in [-1, 2] \\ 5, \;\; x \in (2, 4] \\ 7-2x, \;\; x \in (4, \infty). \end{cases}$

21. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+4, \;\; x < -3 \\ 2-3x, \;\; x \geq -3 \end{cases}$ şi $g(x) = \begin{cases} 2x+3, \;\; x \leq 0 \\ 1-x, \;\; x > 0 \end{cases}$.
Atunci funcţia $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este:

a) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 6x+7, \;\; x \in (-\infty, 0) \\ -2-7x, \;\; x \in [-0, 3] \\ -5-3x, \;\; x \in (3, 4] \\ 3x-1, \; x \in (4, \infty); \end{cases}$

b) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x+7, \;\; x \in (-\infty, -3) \\ -7-6x, \;\; x \in [-3, 0] \\ 3x-1, \;\; x \in (0, 4] \\ 5-x, \;\; x \in (4, \infty); \end{cases}$

c) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x+7, \;\; x \in (-\infty, -3) \\ -7-6x, \;\; x \in [-3, 0] \\ 5-x, \;\; x \in (0, 3] \\ 3x-1, \;\; x \in (3, \infty); \end{cases}$

d) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x+7, \;\; x \in (-\infty, -3) \\ 5-x, \;\; x \in [-3, 0] \\ 3x-1, \;\; x \in (0, 4) \\ -7+6x, \;\; x \in [4, \infty); \end{cases}$

e) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x-7, \;\; x \in (-\infty, -3) \\ -7+6x, \;\; x \in [-3, 0] \\ 1-3x, \;\; x \in (0, \infty); \end{cases}$

f) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x+5, & x \in (-\infty, 0) \\ 7-2x, & x \in [0, \infty). \end{cases}$

22. Mulţimea $D \subseteq \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to D$, $f(x) = \dfrac{x^2-3x+4}{x^2-x+1}$ este surjectivă este

a) $\mathbb{R}$;

b $\left(-\infty, -\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\sqrt{5}}{3}, \infty\right)$;

c) $\left[\dfrac{7-2\sqrt{7}}{3}, \dfrac{7+2\sqrt{7}}{3}\right]$;

d) $\left[\dfrac{-2\sqrt{5}}{3}, \dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right]$;

e) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$;

f) $\left(-\infty, \dfrac{7-2\sqrt{7}}{3}\right] \cup \left[\dfrac{7+2\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$.

23. Mulţimea $D \subseteq \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to D$, $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x+1}$ este surjectivă este:

a) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$;

b $\mathbb{R}$;

c) $\left(-\infty, \dfrac{10-2\sqrt{19}}{3}\right] \cup \left[\dfrac{10+2\sqrt{19}}{3}, \infty\right)$;

d) $\left[\dfrac{10-2\sqrt{19}}{3}, \dfrac{10+2\sqrt{19}}{3}\right]$;

e) $\left[\dfrac{7-2\sqrt{19}}{3}, \dfrac{7+2\sqrt{19}}{3}\right]$;

f) $\left(-\infty, \dfrac{10-3\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{10+3\sqrt{7}}{2}, \infty\right)$.

24. Imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$ este:

a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

b $\mathbb{R}$;
c) $[-2, 1]$;
d) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;
e) $[-1, 1]$;
f) $[-1, 3]$.

25. Imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+4}$ este
a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
b $\left(-\infty, -\dfrac{3}{4}\right) \cup \left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$
c) $(-\infty, 3) \cup (4, \infty)$
d) $\mathbb{R}$
e) $[0, \infty)$
f) $\left[-\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$

26. Domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ este:
a) $[1, 2]$;
b) $(\infty, -2] \cup [1, \infty)$;
c) $(-\infty, -1] \cup [-2, \infty)$;
d) $[-1, 2]$;
e) $[-2, 1]$;
f) $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$.

27. Domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ este:
a) $[-2, 2]$;
b) $\mathbb{R}$;
c) $[0, 2]$;
d) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$;
e) $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$;
f) $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

28. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$. Punctul $M_0(m+1, m) \in G_f$ dacă parametrul real nenul m satisface relaţia:
a) $m(m+1)^2 = 2$;

b) $(m+1)^2 = \frac{4}{m}$;

c) $m(m+1)^2 + 4 = 0$;

d) $(m+1) = \frac{4}{m^2}$;

e) $m+1 = -\frac{4}{m^2}$;

f) $m^2(m+1) = 2$.

29. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-m| + \sqrt{x^2-4x+4} - 2$. Punctul $A(1,0) \in G_f$ dacă parametrul real m aparţine mulţimii:
a) $\{0\}$;
b) $\{0, 1, 2\}$;
c) $\{0, 2\}$;
d) $\{1, 2\}$;
e) $\{0, 1\}$;
f) $\emptyset$.

30. Considerăm că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface relaţia $f(x) + 3f(-x) = 4(x^2+1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Expresia analitică a funcţiei f este:
a) $f(x) = x^2 + 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
b) $f(x) = x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
c) $f(x) = x^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
d) $f(x) = -x^2 + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
e) $f(x) = -x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
f) $f(x) = -x^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

31. Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface următoarele afirmaţii: $f(0) = 0$ şi $f(x) - f(x+1) = 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci valoarea lui $f(17)$ este:
a) -289;
b) -256;
c) -136;
d) 136;
e) 272;
f) -272.

32. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bijectivă, ce verifică relaţia $(f \circ f)(x) = 5x - 4$. Atunci, numărul real $a = f(1) + f^{-1}(1)$, unde f^{-1} este inversa lui f, este:
a) -1;
b) 1;
c) $\frac{1}{2}$;
d) 2;
e) -2;
f) $-\frac{1}{2}$.

33. Imaginea funcţiei $f : [2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+2, x \in [-2,1] \\ 3x+1, x \in (1,3] \end{cases}$ este mulţimea:
a) $[-4,2] \cup [4,10]$;
b) $[-2,4]$;
c) $[2,10]$;
d) $[-2,10]$;
e) $[-4,10]$
f) $[4,10]$.

34. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (m-2)x+2, x < 0 \\ (-m+4)x+3, x \geq 0 \end{cases}$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă parametrul real m se află în mulţimea:
a) $\{2,4\}$;
b) $\emptyset$;
c) $(2,4)$;
d) $[2,4]$;
e) $[2,4)$;
f) $(2,4]$.

35. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a}{2-\sqrt{3}}x + \frac{b}{2+\sqrt{3}}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Dacă se ştie că $P\left(2+\sqrt{3}, 15\right) \in G_f$, atunci punctele de pe graficul funcţiei f ce au coordonatele numere raţionale aparţin mulţimii:
a) $\{(4;16)\}$;

b) $\{(16;4);(-4;-16)\}$;
c) $\emptyset$;
d) $\{(2;4);(4;2)\}$;
e) $\{(0;16)\}$;
f) $\{(16;4)\}$.

36. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ce verifică relaţia $f(2-5x)=10x-f(7)-12$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Tangenta unghiului pe care G_f îl face cu axa Ox este egal cu:
a) $-\sqrt{2}$;
b) $\sqrt{2}$;
c) $-\frac{1}{2}$;
d) -2;
e) 2;
f) $\frac{1}{2}$.

37. Punctele de pe graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x-3$, ce aparţin mulţimii $A=\{(x,y)\,|x,y\in\mathbb{Z}\ ,\ xy-x-2y=-2\}$ sunt:
a) $\emptyset$;
b) $(-2;1)$;
c) $(-2;1)$ şi $(2;-7)$;
d) $(2;-7)$;
e) $(2;1)$ şi $(-2;-7)$;
f) $(1;-7)$ şi $(2;-2)$.]

CAPITOLUL 4

FUNCŢIA DE GRADUL I. ECUAŢIA DE GRADUL I

1. Soluţia ecuaţiei $(x-1)^2 - x(x+5) = 3x+9$ este:
   a) $x = -1$;
   b) $x = -\dfrac{2}{5}$;
   c) $x = -\dfrac{4}{3}$;
   d) $x = -\dfrac{4}{5}$;
   e) $x = \dfrac{4}{3}$;
   f) $x = \dfrac{2}{5}$.
2. Soluţia ecuaţiei $\dfrac{2x-3}{3} + \dfrac{3x-2}{2} = \dfrac{4x+3}{4} - \dfrac{5}{12}$ este:
   a) $x = 0$;
   b) $x = 1$;
   c) $x = 2$;

d) $x = 3$;
e) $x = 4$;
f) $x = 5$.

3. Soluţia ecuaţiei $\dfrac{x-5}{x-1} + \dfrac{x-1}{x-4} = 2$ este:
a) $x = -11$;
b) $x = 11$;
c) $x = -12$;
d) $x = 12$;
e) $x = 13$;
f) $x = -13$.

4. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6 - 3x$ atunci $f\left(\sqrt{1}\right) \cdot f\left(\sqrt{2}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\sqrt{2019}\right)$ este:
a) $\sqrt{2019!}$;
b) 0;
c) $1009 \cdot 2019$;
d) $-\sqrt{2019!}$;
e) $-1009 \cdot 2019$;
f) -2019^2.

5. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2mx - 3 + n$, $m, n \in \mathbb{R}$. Valorile parametrilor reali m şi n ştiind că $A(1,0) \in G_f$ şi $B(-1,3) \in G_f$ sunt:
a) $m = -\dfrac{3}{4}$, $n = \dfrac{9}{2}$;
b) $m = \dfrac{3}{4}$, $n = \dfrac{9}{2}$;
c) $m = -\dfrac{3}{4}$, $n = -\dfrac{9}{2}$;
d) $m = -\dfrac{3}{2}$, $n = \dfrac{9}{2}$;
e) $m = -\dfrac{3}{4}$, $n = \dfrac{9}{4}$;
f) $m = -\dfrac{3}{2}$, $n = -\dfrac{9}{4}$.

6. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 3$. Punctul de pe graficul funcţiei f în care ordonata este egală cu dublul abscisei este:

a) $(1, 2)$;
b) $(-2, -1)$;
c) $(-1, -2)$;
d) $(2, 1)$;
e) $(-2, -4)$;
f) $(2, 4)$.

7. Fie funcţiile $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x - 6$ şi $g(x) = -2x - 2$. Coordonatele punctului în care graficele celor două funcţii se intersectează sunt:
a) $(-4, -18)$;
b) $(-4, 9)$;
c) $(4, -6)$;
d) $(-4, -6)$;
e) $(4, 6)$;
f) $(-4, 6)$.

8. Soluţiile ecuaţiei $\left|\dfrac{2x+5}{3}\right| = 1$ sunt:
a) $x \in \{-4,\ -1\}$;
b) $x \in \{1,\ 4\}$;
c) $x \in \{-4,\ 1\}$;
d) $x \in (-4,\ 1)$;
e) $x \in [-4,\ 1]$;
f) $x \in \{-1,\ 1\}$.

9. Soluţiile ecuaţiei $||x-1| - 5| = 4$ sunt:
a) $x \in \{-8,\ -2\ ,\ 2,\ 8\}$;
b) $x \in \{-10,\ -8,\ 8,\ 10\}$;
c) $x \in \{-8,\ 0,\ 2,\ 10\}$;
d) $x \in \{-2,\ 0,\ 2\}$;
e) $x \in \{0,\ 2,\ 8,\ 10\}$;
f) $x \in \emptyset$.

10. Suma soluţiilor ecuaţiei $|x+2| + |x-1| = 7$ este:
a) 4;

b) 3;
c) 2;
d) 1;
e) 0;
f) -1.

11. Soluţia ecuaţiei $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{x} = 1 - \dfrac{1}{1-x}$ este:
a) $x = 1$;
b) $x = -2$;
c) $x = 2$;
d) ecuaţia nu are soluţii reale;
e) $x = -1$;
f) $x = -\dfrac{1}{2}$.

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de gradul întâi cu proprietatea $f(x) + f(x-1) = 3x + 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $k = 4f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Valoarea lui k este:
a) $k = 1$;
b) $k = 0$;
c) $k = -1$;
d) $k = 12$;
e) $k = 11$;
f) $k = 10$.

13. Soluţia sistemului de inecuaţii: $\begin{cases} 2x - 1 \leq 3 \\ x + 1 > 5 \end{cases}$ este:
a) $(-\infty, 1)$;
b) $\emptyset$;
c) $\mathbb{R}$;
d) $(-\infty, 0)$;
e) $(0,\ \infty)$;
f) $(-1,\ 1)$.

14. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $|x-1| - |x| = 2$ este:
a) $(-\infty,\ 1)$

b) $\mathbb{R}$;
c) $\emptyset$;
d) $(-\infty, 0)$;
e) $(0, \infty)$;
f) $(-\infty,\ 2)$.

15. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $|x-1|+|x|=2$ este:
a) $\{-1, 1\}$;
b) $\mathbb{R}$;
c) $\emptyset$;
d) $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$;
e) $\{2, 3\}$;
f) $\{1, 2\}$.

16. Soluţia inecuaţiei $|x-2|>3$ este:
a) $(-\infty, 2)$;
b) $\mathbb{R}$;
c) $\emptyset$;
d) $(-\infty, 0)$;
e) $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$;
f) $(-\infty, 2) \cup (3,\infty)$.

17. Soluţia inecuaţiei $|x+2|>5$ este:
a) $(-\infty, -1) \cup (3,\infty)$;
b) $(-\infty, 1) \cup (2,\infty)$;
c) $\emptyset$;
d) $(-\infty, -7) \cup (3, \infty)$;
e) $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$;
f) $\mathbb{R}$.

18. Soluţia inecuaţiei $|x+3| \leq 11$ este:
a) $[-14,\ 8]$;
b) $\emptyset$;
c) $\mathbb{R}$;
d) $(-\infty, -7) \cup (3, \infty)$;

e) $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$;
f) $(-\infty, -1) \cup (2,\infty)$.

19. Soluţia inecuaţiei $|2x+3| \leq 7$ este:
a) $(-14,\ 8)$;
b) $[-5,\ 2]$;
c) $\emptyset$;
d) $\mathbb{R}$;
e) $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$;
f) $(-\infty, -7) \cup (3,\infty)$.

20. Soluţia sistemului de inecuaţii $\begin{cases} |2x-3| \leq 5 \\ |x+1| > 7 \end{cases}$ este:
a) $(-14,\ 8)$;
b) $[-5,\ 2]$;
c) $\emptyset$;
d) $\mathbb{R}$;
e) $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$;
f) $(-\infty, -1) \cup (1,\infty)$.

21. Soluţia sistemului de inecuaţii $\begin{cases} |x-3| \geq 1 \\ |x+1| > 2 \end{cases}$ este:
a) $(1, 2] \cup [4, \infty)$;
b) $[-5, 2]$;
c) $\emptyset$;
d) $(-1,\ 2] \cup [4,\ \infty)$;
e) $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$;
f) $\mathbb{R}$.

22. Fie punctele $A(2, 3)$ şi $B(4, 1)$. Funcţia al cărei grafic este segmentul $[AB]$ este:
a) $f : [2, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = 5 - x$;
b) $f : [1, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = 5 - x$;
c) $f : [2, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 1$;
d) nu există;

e) $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$;
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x$.

23. Dacă funcţile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt definite prin $f(x) = 2x - 1$ şi $g(x) = x + 3$ şi (x_0, y_0) sunt coordonatele punctului de intersecţie al graficelor celor două funcţii, atunci $x_0 + y_0$ este:
a) 10;
b) 11;
c) -2;
d) 9;
e) 13;
f) 15.

24. Dacă funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt definite prin $f(x) = 3x - 1$ şi $g(x) = 2x + 3$ şi (x_0, y_0) sunt coordonatele punctului de intersecţie al graficelor celor două funcţii, atunci $x_0 \cdot y_0$ este:
a) 0;
b) -44;
c) 30;
d) 40;
e) 44;
f) 45.

25. Valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $-3 \leq |x - 4| \leq 5$ sunt:
a) $[-1, 4]$;
b) $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$;
c) $(-\infty, -1] \cup [9, \infty)$;
d) $[-1, 9]$;
e) $\mathbb{R}$;
f) $\emptyset$.

26. Valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $-5 \leq |2x - 3| \leq 3$ sunt:
a) $[0, 3]$;
b) $(-\infty, 0] \cup [3, \infty)$;
c) $(-\infty, -3] \cup [4, \infty)$;

d) $[-1, 6]$;
e) $\mathbb{R}$;
f) $\emptyset$.

27. Funcţia de gradul întâi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $(f \circ g)(x) = 4x + 5$, iar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ este:
a) $g(x) = x - 1$;
b) $g(x) = 2x + 5$;
c) $g(x) = x + 3$;
d) $g(x) = 2x - 4$;
e) $g(x) = 2x + 4$;
f) $g(x) = 4 - 2x$.

28. Funcţia de gradul întâi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $(f \circ g)(x) = 2x - 5$, iar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ este:
a) $g(x) = x - 2$;
b) $g(x) = 4 - x$;
c) $g(x) = x - 3$;
d) $g(x) = x - 4$;
e) $g(x) = 3x + 4$;
f) $g(x) = 5 - 2x$.

29. Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \ x < 1 \\ a - 1, \ x = 1 \\ 5 - 4x, \ x > 1 \end{cases}$ are punct de maxim în $x = 1$ este:
a) nu există;
b) $[1, \infty)$;
c) $[0, \infty)$;
d) $(-\infty, -1)$;
e) $[-2, \infty)$;
f) $[2, \infty)$.

30. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $f(x)=\begin{cases}3x-2,\ x\le 2\\ 5x-4,\ x>2\end{cases}$, atunci imaginea funcţie f este:
a) $\mathbb{R}$;
b) $(-\infty,1]\cup(2,\infty)$;
c) $(-\infty,4]\cup(6,\infty)$;
d) $[4,6)$;
e) $(-\infty,6]\cup(8,\infty)$;
f) $(-\infty,-1]\cup(3,\infty)$.

31. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $f(x)=\begin{cases}2x-4,\ x\le -1\\ 3x+4,\ x>-1\end{cases}$, atunci imaginea funcţie f este:
a) $\mathbb{R}$;
b) $(-\infty,-6]\cup(1,\infty)$;
c) $(-\infty,-2]\cup(1,\infty)$;
d) $[-2,1)$;
e) $(-\infty,-6]\cup(-1,\infty)$;
f) $(-\infty,-6]\cup(7,\infty)$.

32. Fie ecuaţia $2f(x+4)+3f(5-x)=8$, unde funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $f(x)=\begin{cases}2x-1, x\le 1\\ 3-x, x>1\end{cases}$ Soluţiile reale ale acestei ecuaţii aparţin mulţimii:
a) $\left\{\frac{17}{8}\right\}$;
b) $\left\{\frac{8}{7}\right\}$;
c) $\left\{\frac{8}{7},\frac{17}{8}\right\}$;
d) $\emptyset$;
e) $\left\{-\frac{17}{8}\right\}$;

f) $\left\{-\frac{8}{7}\right\}$.

33. Ecuaţia $(g \circ f)(x) = -3$, unde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 8$, $g(x) = 4x - 8$, admite ca soluţie:

a) $x = -\frac{1}{4}$;

b) $x = -\frac{1}{2}$;

c) $x = -\frac{3}{4}$;

d) $x = \frac{9}{4}$;

e) $x = -\frac{9}{4}$;

f) $x = \frac{3}{4}$.

34. Dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifică relaţia $(f \circ f)(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci valoarea reală $f\left(\frac{1}{2}\right)$ este:

a) $\frac{1}{16}$;

b) $\frac{3}{4}$;

c) $\frac{1}{8}$;

d) $\frac{1}{4}$;

e) $\frac{3}{2}$;

f) $\frac{1}{2}$.

35. Determinaţi parametrul $a \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea $f(a-2) + f(f(a^2+1)) - f(a^2) + f(a^3+3) = 4 - a^2$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, este definită prin $f(x) = \begin{cases} x+1, x < a, a \geq 1 \\ x-1, x \geq a \end{cases}$.

a) $a = 1$;

b) nu există;

c) $a = 4$;
d) $a = 0$;
e) $a = 2$;
f) $a = 3$.

36. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2ax - 3a$, $a \in \mathbb{R}^*$, $m \neq 1$. Se ştie că $f(a) = -1$. Soluţiile ecuaţiei $f\left(\frac{m+1}{m-1}\right) - f\left(\frac{m}{m+1}\right) = f\left(\frac{1}{m^2-1}\right) + \frac{3}{m-1}$, sunt:
a) $\left\{-2, -\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\right\}$;
b) $\left\{2, -\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}\right\}$;
c) $\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$;
d) $\{-2, 1\}$;
e) $\left\{-2, 1, \sqrt{3}\right\}$;
f) nicio variantă.

CAPITOLUL 5

FUNCŢIA DE GRADUL AL II-LEA. ECUAŢIA DE GRADUL AL II-LEA

1. Valorile parametrului real m pentru care $(m-2)\,x^2+2\,(2m-3)\,x+5m-6\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, sunt:
   a) $m\in(-\infty,1]\cup[3,\,+\infty)$;
   b) $m\in[1,\,3]$;
   c) $m\in(-\infty,\,1]$;
   d) $m\in[3,\,+\infty)$;
   e)$m\in(-\infty,\,3]$;
   f) $m\in\{1,\,3\}$.

2. Pentru ce valori ale parametrului real m, suma pătratelor rădăcinilor ecuaţiei $x^2+(2-m)\,x-(m+3)=0$ este minimă?
   a) $m=-9$;
   b) $m=1$;
   c) $m=-1$;
   d) $m=-9$;

e) $m \in [1, +\infty)$;
f) $m \in [9, +\infty)$.

3. Valoarea parametrului real m, pentru care mulţimea $\{x \in \mathbb{R} | \, x^2 - mx + $ $+m - 1 = 0\}$ are un singur element, este:
a) $m = 2$;
b) $m = -2$;
c) $m = 1$;
d) $m = -1$;
e) $m = 0$;
f) $m = 4$.

4. Valorile parametrului real m, pentru care ecuaţia $(m-2)\,x^2 - x + m - 2 = 0$ are două rădăcini reale şi distincte, sunt:
a) $m \in (6, \ 10)$;
b) $m \in (-\infty, 6) \cup (10, +\infty)$;
c) $m \in \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$;
d) $m \in \left\{\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right\}$;
e) $m \in \{6, 10\}$;
f) $m \in \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

5. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 3$. Valorile parametrului real m, pentru care graficul funcţiei se află deasupra axei Ox, sunt:
a) $m \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right)$;
b) $m \in \left(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$;
c) $m \in \left\{-2\sqrt{3}, \ 2\sqrt{3}\right\}$;
d) $m \in \emptyset$;
e) $m \in \left[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$;
f)$m \in \left(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$.

6. Câte elemente are mulţimea $\{x \in \mathbb{Z} | \ (x^2 - 1)(6 - x^2) \geq 0\}$?
a) Patru;
b) trei;

c) două;
d) unul;
e) niciunul;
f) o infinitate.

7. Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - mx + m + 2 = 0$. Valoarea parametrului real m, pentru care are loc relaţia $2x_1x_2 = 3(x_1 + x_2)$, este:
a) $m = -1$;
b) $m = 0$;
c) $m = 1$;
d) $m = 2$;
e) $m = 3$;
f) $m = 4$.

8. Dacă x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 + x + 12 = 0$, atunci valoarea lui $x_1^3 + x_2^3$ este:
a) 35;
b) 30;
c) 40;
d) 45;
e) 27;
f) 64.

9. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$. Valoarea sumei $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20)$ este:
a) 21!;
b) 4100;
c) 20!;
d) 3100;
e) 6200;
f) 3000.

10. Ecuaţia axei de simetrie a parabolei asociate graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5x^2 + 10x - 3$ este:
a) $x = 1$;

b) $x = 2$;
c) $y = 1$;
d) $y = 2$;
e) $x = -1$;
f) $y = -1$.

11. Valoarea maximă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x^2 + x\sqrt{2} + 1$ este:
a) $\frac{9}{2}$;
b) $-\frac{9}{8}$;
c) $\frac{9}{8}$;
d) $-\frac{9}{2}$;
e) $\frac{9}{4}$;
f) $-\frac{9}{4}$.

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$. Valorile parametrului real m, pentru care punctul $A(m, -1)$ aparţine graficului funcţiei, sunt:
a) $m \in \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$;
b) $m \in \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$;
c) $m \in \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$;
d) $m \in \left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}$;
e) $m \in \left\{1, \frac{2}{3}\right\}$;
f) $m \in \emptyset$.

13. Valoarea parametrului real m, pentru care dreapta de ecuaţie $x = -\frac{1}{4}$ este axă de simetrie a parabolei $y = mx^2 + (m-1)x - 3$ este:
a) $m = -1$;
b) $m = 1$;

c) $m = -4$;
d) $m = 4$;
e) $m = -2$;
f) $m = 2$.

14. Ştiind că distanţa de la vârful parabolei de ecuaţie $y = x^2 + 2x + m,\ m \in \mathbb{R}$, la axa Ox este egală cu 1, atunci valoarea lui m este:
a) $m = -1$;
b) $m = 1$;
c) $m = -4$;
d) $m = 4$;
e) $m = -2$;
f) $m = 2$.

15. Valorile întregi ale parametrului m, pentru care graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + mx + 1$ nu intersectează axa Ox, sunt:
a) $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
b) $m \in \{-1, 0, 1\}$;
c) $m \in (-1,\ 1)$;
d) $m \in (-2,\ 2)$;
e) $m \in \{0, 1, 2\}$;
f)$m \in \{-2, -1, 0\}$.

16. Valorile parametrului real şi nenul m, pentru care graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx^2 + 2(m-1)x - m - 1$ este situat sub axa Ox, sunt:
a)$m \in (0,\ +\infty)$;
b) $m \in (1,\ +\infty)$;
c) $m \in (-\infty, -2)$;
d) $m \in (-\infty, -1)$;
e) $m \in (-\infty, 0)$;
f) $m \in \emptyset$.

17. Punctele de intersecţie ale graficelor funcţiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ şi $g(x) = 2x^2 - 3$ sunt:
a) $A(-2, 5),\ b(2, 5)$

b) $A(-2,-3),\ B(2,5)$
c) $A(-2,5),\ B(2,-5)$
d) $A(-2,3),\ B(2,5)$
e) $A(-2,5),\ B(-2,-5)$
f) $A(-2,5),\ B(2,3)$.

18. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^2 - x + 2 + |x-1| = -1$ este:
a) $\mathbb{R}$;
b) $(1{,}2] \cup [4,\infty)$;
c) $(-\infty,-1)$;
d) $(-\infty,2)$;
e) $\emptyset$;
f) $(-1,3] \cup [5,\infty)$.

19. Dacă $m \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia $x^2 - mx + 2 = 0$ are rădăcinile x_1 şi x_2, atunci ecuaţia de gradul al doilea în necunoscuta y care are rădăcinile: $y_1 = \dfrac{x_1}{x_2}$ şi $y_2 = \dfrac{x_2}{x_1}$ este:
a) $y^2 - \dfrac{m^2-1}{3}y + 1 = 0$;
b) $y^2 - y + 2 = 0$;
c) $y^2 + y - 1 = 0$;
d) $y^2 + \dfrac{m^3-1}{3}y + m = 0$;
e) $y^2 + \dfrac{m^2+1}{4}y - m - 1 = 0$;
f) $y^2 - \dfrac{m^2-4}{2}y + 1 = 0$.

20. Dacă $m \in \mathbb{R}$ şi funcţiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt definite prin $f_m(x) = x^2 - (m+1)x + 1$, atunci vârfurile parabolelor asociate funcţiilor f_m se găsesc pe curba de ecuaţie:
a) $y = x^2$;
b) $y^2 - y + 1 = 0$;
c) $y = -x^2 + 1$;
d) $y + x^2 + 1 = 0$;

e) $y = -x - 1$;
f) $y = x + 1$.

21. Dacă $m \in \mathbb{R}$ şi funcţiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt definite prin $f_m(x)\, x^2 + mx + m + 1$, atunci curba pe care se găsesc vârfurile parabolelor asociate funcţiilor f_m are ecuaţia:
a) $y + x^2 = 0$;
b) $y^2 - y + 1 = 0$;
c) $y = x^2 + 1$;
d) $y = -x^2 - 2x + 1$;
e) $y + x + 1 = 0$;
f) $y + x^2 + 1 = 0$.

22. Dacă funcţia de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = x^2 - x + 2$, atunci mulţimea $\operatorname{Im}(f)$ este:
a) $\operatorname{Im}(f) = \emptyset$;
b) $\operatorname{Im}(f) = \left[\frac{7}{4}, \infty\right)$;
c) $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$;
d) $\operatorname{Im}(f) = [1, \infty)$;
e) $\operatorname{Im}(f) = [2, \infty)$;
f) $\operatorname{Im}(f) = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$.

23. Dacă funcţia de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = -x^2 - x + 2$, atunci mulţimea $\operatorname{Im}(f)$ este:
a) $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$;
b) $\operatorname{Im}(f) = \emptyset$;
c) $\operatorname{Im}(f) = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$;
d) $\operatorname{Im}(f) = [1, \infty)$;
e) $\operatorname{Im}(f) = \left[\frac{7}{2}, \infty\right)$;
f) $\operatorname{Im}(f) = \left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$.

24. Dacă funcţia de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = -x^2 - x + 2$, atunci mulţimea $f((-6,-1))$ este:
a) $(-2,\ 2)$;
b) $(-2,\ 4)$;
c) $(8,\ 12)$;
d) $(-24,\ 24)$;
e) $(-28,\ 2)$;
f) $(-28,\ 28)$.

25. Dacă funcţia de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = -x^2 - x + 2$, atunci mulţimea $f((1,\ 6))$ este:
a) $(-2,2)$;
b) $(-40,0)$;
c) $(-24,24)$;
d) $(-20,20)$;
e) $(-1,1)$;
f) $(-3,1)$.

26. Dacă funcţia de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $f(x)=-x^2-x+2$, atunci mulţimea $f((-2,2))$ este:
a) $(-28,2)$;
b) $(-40,0)$;
c) $\left(-4,\dfrac{9}{4}\right]$;
d) $(-2,\ 2)$;
e) $\left[\dfrac{7}{4},3\right)$;
f) $\left(-2,\dfrac{9}{4}\right]$;

27. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $|x^2 - x + 2| \leq 1$ este:
a) $(-28,2)$;
b) $(-40,0)$;
c) $\left(-4,\dfrac{9}{4}\right)$;
d) $\mathbb{R}$;

e) $\emptyset$;

f) $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$.

28. Ecuaţia de gradul al doilea care are rădăcinile $x_1 = -2$ şi $x_2 = 3$ este:
a) $2x^2 - 3x + 5 = 0$;
b) $x^2 - 6x + 1 = 0$;
c) $x^2 - x - 6 = 0$;
d) $6x^2 + x + 1 = 0$;
e) $x^2 + 6x - 1 = 0$;
f) $x^2 - 3x + 3 = 0$.

29. Ecuaţia de gradul al doilea care are rădăcinile $x_1 = -4$ şi $x_2 = 1$ este:
a) $-3x^2 - 4x + 1 = 0$;
b) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
c) $2x^2 - x + 1 = 0$;
d) $6x^2 + x + 1 = 0$;
e) $x^2 + x - 4 = 0$;
f) $x^2 - 3x + 4 = 0$.

30. Mulţimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $x^2 - (m + 2)\,x + 27 = 0$ are o rădăcină triplă celeilalte este:
a) $\{-14,\ 10\}$;
b) $\{-10,\ 14\}$;
c) $\{10,\ 14\}$;
d) $\{-14,\ -10\}$;
e) $\{-1,\ 1\}$;
f) $\{-4,\ 0\}$.

31. Mulţimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $x^2 - (2m + 3)\,x + 32 = 0$ are o rădăcină dublă celeilalte este:

a) $\left\{-\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right\}$;

b) $\left\{-5, \frac{9}{2}\right\}$;

c) $\left\{-\frac{15}{2}, \frac{7}{2}\right\}$;

d) $\left\{\frac{9}{2}, \frac{15}{2}\right\}$;

e) $\left\{-\frac{9}{2}, \frac{15}{2}\right\}$;

f) $\left\{-\frac{15}{2}, -\frac{9}{2}\right\}$.

32. Mulţimea valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care $ax^2+(a+2)x+1>0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este:
a) $(-2, 0)$;
b) $(-2, 2)$;
c) $\emptyset$;
d) $(0, 2)$;
e) $\mathbb{R}$;
f) $(-1, 1)$.

33. Mulţimea valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2+(a+1)x+2a+1>0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este:
a) $(3-2\sqrt{3}, 0)$;
b) $(0, 3+2\sqrt{3})$;
c) $\mathbb{R}$;
d) $(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$;
e) $\emptyset$;
f) $(-2, 1)$.

34. Dacă $m \in \mathbb{R}$ şi funcţiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt definite prin $f_m(x) = x^2 - (2m-1)x + m^2 - m$, atunci valoarea lui m pentru care vârful parabolei se află pe dreapta de ecuaţie $y = x + \frac{1}{2}$ este:
a) -2;
b) $-\frac{1}{2}$;
c) $\emptyset$;
d) 0;
e) 1;

f) $\mathbb{R}$.

35. Dacă $m \in \mathbb{R}$ şi funcţiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt definite prin $f_m(x) = x^2 - (m-1)x + m^2 + 2m$, atunci valoarea lui m pentru care vârful parabolei se află pe parabola de ecuaţie $y = 3x^2 - 1$ este:
a) 0;
b) -1;
c) 1;
d) 2;
e) -2;
f) $\emptyset$.

36. Suma absciselor punctelor de intersecţie dintre graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ şi axa Ox este:
a) 0;
b) 1;
c) 2;
d) 3;
e) -1;
f) -2.

37. Suma absciselor punctelor de intersecţie dintre graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 6$ şi axa Ox este:
a) 5;
b) -1;
c) -2;
d) 2;
e) 1;
f) -5.

38. Funcţia de gradul al doilea al cărei grafic intersectează axa Ox în punctele de abscisă 6, respectiv 2, iar Oy în punctul de ordonată 4, are ca expresie analitică:

a) $f\left(x\right) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$;

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 4;$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 4;$

d) $f(x) = x^2 - 8x + 12;$

e) $f(x) = x^2 + 8x + 12;$

f) nicio variantă.

39. Funcţia de gradul al doilea al cărui grafic este tangent axei Ox în punctul de abscisă 3 şi trece prin punctul $M_0(2,9)$ are ca expresie analitică:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9;$

b) $f(x) = 9x^2 - 54x + 81;$

c) $f(x) = -9x^2 + 54x + 81;$

d) $f(x) = -x^2 + 6x + 9;$

e) $f(x) = 9x^2 + 54x + 81;$

f) nici o variantă.

40. Funcţia de gradul al doilea al cărui grafic conţine punctele $M_1(0,1)$ şi $M_2(2,1)$ şi este tangent dreptei $d:\ y = -1$, are expresia analitică:

a) $f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{2};$

b) $f(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{2};$

c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1;$

d) $f(x) = 2x^2 + 4x + 1;$

e) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1;$

f) nici o variantă.

41. Se consideră $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 - (2m+1)x + (m+1)$, $m \in \mathbb{R}^*$. Valoarea parametrului real m pentru care vârful parabolei asociate funcţiei f_m, $m \in \mathbb{R}^*$, se află pe dreapta $d:\ 2x + 3y + 5 = 0$ este:

a) $\frac{1}{14};$

b) $\frac{1}{28};$

c) $-\dfrac{1}{14}$;

d) $-\dfrac{1}{28}$;

e) $\dfrac{2}{7}$;

f) $-\dfrac{1}{7}$.

42. Fie familia de funcţii $(f_m)_m$, $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + (m-1)$, $m \in \mathbb{R}^*$. Vârful V_m al parabolei asociate funcţiei f_m, $m \in \mathbb{R}^*$, se află situat deasupra dreptei $d:\ y = -1$ dacă parametrul real nenul m se află în mulţimea:

a) $(-\infty, 0)$;

b) $(0, \infty)$;

c) $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$;

d) $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$;

e) $\emptyset$;

f) $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.

43. Fie familia de funcţii $(f_m)_m$, $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 - (8m-1)x + (7m-1)$, $m \in R^*$. Mulţimea punctelor fixe asociate familiei $(f_m)_m$ este:

a) $\{(1,0), (7,6)\}$;

b) $\{(1,0), (6,7)\}$;

c) $\{(7,0), (1,6)\}$;

d) $\{(1,0)\}$;

e) $\{(6,7)\}$;

f) nicio variantă.

44. Fie funcţia de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $b, c, \in \mathbb{R}$. Ştiind că $f(x) = f\left(\dfrac{1}{3} - x\right)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, a, b, c sunt în progresie geometrică şi $a + b + c = -0,(7)$, valoarea lui $S = a^3 + b^3 + c^3$ este:

a) $\dfrac{703}{729}$;
b) $-\dfrac{703}{729}$;
c) $-\dfrac{728}{729}$;
d) $\dfrac{26}{729}$;
e) $-\dfrac{730}{729}$;
f) nicio variantă.

45. Se consideră funcţia de gradul al doilea, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2-2(a-b)x+a$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$. Dacă $b=-2$, vârful parabolei asociate funcţiei f are coordonate întregi dacă a este în mulţimea:
a) $\{\pm1\}$;
b) $\{1,\ 2\}$;
c) $\{\pm1;\ \pm2\}$;
d) $\{-2,\ -1,\ 1\}$;
e) $\{-1,\ 1,\ 2\}$;
f) $\{\pm2\}$.

46. Se consideră funcţia de gradul al doilea, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2-2(a-b)x+a$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$. Dacă $a=1$, punctul de intersecţie al graficului functiei f cu axa Ox are coordonate întregi dacă valoarea întreagă a lui b este egală cu:
a) 0;
b) 2;
c) -2;
d) -2 sau 0;
e) 0 sau 2;
f) -2 sau 2.

47. Fie familia de funcţii $(f_m)_m$, $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=mx^2+2(m-1)x+(m-1)$, $m\in\mathbb{R}^*$. Funcţia f_m admite un maxim pozitiv dacă m se află în mulţimea:
a) $(-\infty,0)$;

b) $(-\infty, 1)$;
c) $(-\infty, 1]$;
d) $(-1, \infty)$;
e) $[-1, 1)$;
f) $(-1, 0)$.

48. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + (5 - 3m)x + c$, $m \in \mathbb{R}^*$. Dacă în punctul $x = 4$, f admite o valoare maximă egală cu 16, atunci suma $S = f(0) + f(1) + \cdots + f(100)$ este egală cu:
a) $-50^2 \cdot 101$;
b) $-59^2 \cdot 101$;
c) $-50 \cdot 59 \cdot 101$;
d) $50 \cdot 59 \cdot 101$;
e) $-50 \cdot 101^2$;
f) $-59 \cdot 100^2$.

49. Imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x(x - 1) + (1 - x)$ este mulţimea:
a) $\left(\frac{4}{5}, \infty\right)$;
b) $\left[-\frac{4}{5}, \infty\right)$;
c) $\left(-\frac{4}{5}, \infty\right)$;
d) $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right)$;
e) $\left(-\infty, -\frac{4}{5}\right]$;
f) $\left[-\frac{4}{5}, 0\right]$.

50. Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + (m+1)x + (m+2)}{x^2 + x + m}$, $m \in \mathbb{R}$, atunci valorile reale ale parametrului m pentru care $D \equiv \mathbb{R}$ şi $Im\, f \subseteq (0, \infty)$ aparţin mulţimii:
a) $\left(1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}\right)$;

b) $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$;

c) $\left(1-2\sqrt{2},\frac{1}{4}\right)$;

d) $\left(\frac{1}{4},1+2\sqrt{2}\right)$;

e) $\left[\frac{1}{4},\infty\right)$;

f) $\left[\frac{1}{4},1+2\sqrt{2}\right]$.

51. $Im\, f \subseteq [-3,2]$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+mx+1}{x^2-x+1}$, dacă parametrul real m ia valori aparţinând mulţimii:
a) $[-5,11]$;
b) $[-5,-4]$;
c) $[0,11]$;
d) $[-4,11]$;
e) $[-4,0]$;
f) $[0,11]$.

52. Valoarea parametrului real m pentru care functia $f:\mathbb{R}\to[m,\infty]$, $f(x)=x^2-3x+2$ este surjectivă, este egală cu:
a) $-\frac{1}{4}$;
b) $\frac{1}{4}$;
c) $-\frac{1}{2}$;
d) $\frac{1}{2}$;
e) $\frac{3}{2}$;
f) $-\frac{3}{2}$.

53. Valoarea maximă a parametrului real m pentru care funcţia $f:(-\infty,m]\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-4x+1$ este injectivă, este:

a) $\frac{1}{3}$;

b) $\frac{2}{3}$;

c) $-\frac{2}{3}$;

d) $-\frac{1}{3}$;

e) $\frac{4}{3}$;

f) $-\frac{4}{3}$.

54. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+3m,\ x<2\\ x^2+mx-2,\ x\geq 2\end{cases}$. Valorile parametrului real m pentru care funcţia f este inversabilă, se află în mulţimea:
a) $[-4,-2]$;
b) $[-2,\infty)$;
c) $(-4,\infty)$;
d) $\{-2\}$;
e) $\{-4,\ -2\}$;
f) $\emptyset$.

55. Câte elemente are mulţimea $Im\ f\cap\mathbb{Z}$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+2x+2}$, $m\in\mathbb{R}$?
a) 2;
b) 4;
c) 1;
d) 0;
e) 3;
f) 8.

56. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+2mx-1, x\leq 0\\ mx-1, x>0\end{cases}$. Parametrul real nenul m pentru care funcţia dată este injectivă, se găseşte în mulţimea:
a) $(-\infty,0)$;

b) $(-\infty, 1)$;
c) $(0, 1)$;
d) $(1, \infty)$;
e) $\{0, 1\}$;
f) nicio variantă.

57. Valoarea minimă a funcţiei $f : \left[\frac{1}{2}, \infty\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1 - 2\sqrt{2x-1}$ este:
a) $-\frac{1}{2}$;
b) $-\frac{1}{6}$;
c) $\frac{1}{6}$;
d) $\frac{1}{2}$;
e) $-\frac{1}{3}$;
f) $\frac{1}{3}$

58. Funcţia de gradul al doilea ce verifică relaţia $xf(x) + (1-x) f(-x) = x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are expresia analitică:
a) $f(x) = -2x^2 + x + 1$;
b) $f(x) = -2x^2 + x - 1$;
c) $f(x) = 2x^2 - x + 1$;
d) $f(x) = 2x^2 - x - 1$;
e) $f(x) = -2x^2 - x - 1$;
f) nicio variantă.

59. Fie ecuaţia $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$, $m \neq 2$, ce admite rădăcinile x_1 şi x_2. Între rădăcinile ecuaţiei date, există legătura independentă:
a) $S + P = 1$;
b) $S + 2P = 4$;
c) $S - 2P = 4$;
d) $2S + P = 4$;

e) $2S - P = 4$;

f) nicio variantă.

60. Valorile reale ale parametrului m pentru care x_1, x_2, rădăcinile ecuaţiei $x^2 - (m+1)\,x + (m-1) = 0$ satisfac inegalitatea $\dfrac{1}{x_1+3} + \dfrac{1}{x_2+3} \leq -1$, se află în mulţimea:

a) $\left(-\infty, \dfrac{11}{4}\right)$;

b) $\left(-\dfrac{18}{5}, \infty\right)$;

c) $\left(-\dfrac{11}{4}, -\dfrac{18}{5}\right]$;

d) $\left[-\dfrac{11}{4}, -\dfrac{18}{5}\right]$;

e) $\left(-\dfrac{11}{4}, -\dfrac{18}{5}\right)$;

f) nicio variantă.

61. Fie ecuaţia $x^2 + (3-m)\,x - (m+5) = 0$, $m \in \mathbb{R}$, x_1, x_2 rădăcini. Valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care $x_1^2 + x_2^2$ este minim, se află în:

a) $\{4\}$;

b) $\{\pm 2\}$;

c) $\{0, 2\}$;

d) $\mathbb{R}^*$;

e) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$;

f) nicio variantă.

62. Numărul elementelor mulţimii $M = \{x \in \mathbb{R}\,|x^2 - 2\,(m-1)\,x - m = 0\} \cap$ $\cap \{x \in \mathbb{R}\,|x^2 - 2mx + m - 1 = 0\}$ este:

a) 0;

b) 1;

c) 2;

d) 3;

e) 4;

f) nicio variantă.

63. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcini ale ecuaţiei $x^2 + 3x - 10 = 0$, atunci $E = \dfrac{x_1^2 - 5x_1 + 6}{x_1^2 + 4x_1 + 7} + + \dfrac{x_2^2 - 5x_2 + 6}{x_2^2 + 4x_2 + 7}$ are valoarea:

a) $\dfrac{57}{266}$;

b) $\dfrac{19}{42}$;

c) $\dfrac{266}{57}$;

d) $\dfrac{114}{133}$;

e) $\dfrac{133}{114}$;

f) nicio variantă.

64. Valoarea parametrului real m pentru care între rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 3x + m = 0$, x_1, x_2 există relaţia: $x_1 - x_2 = 11$, este:

a) 28;

b) -28;

c) $\mathbb{R} \setminus \{-28\}$;

d) $\mathbb{R} \setminus \{28\}$;

e) $m \in \{\pm 28\}$;

f) nicio variantă.

65. Se consideră ecuaţiile $x^2 + p_1x + q_1 = 0$, $x^2 + p_2x + q_2 = 0$. Atunci, cel puţin una dintre ecuaţii admite rădăcini reale dacă între parametrii reali p_1. p_2, q_1, q_2 există relaţia:

a) $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$;

b) $p_1p_2 = q_1 + q_2$;

c) $p_1p_2 = 4(q_1 + q_2)$;

d) $p_1p_2 = -2(q_1 + q_2)$;

e) $p_1p_2 = -4(q_1 + q_2)$;

f) $p_1p_2 = -(q_1 + q_2)$.

66. Valorile reale a, b, c pentru care $\{x \in \mathbb{R} \,|x^2 - ax + b = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,|x^2 - -bx + c = 0\} = \{1, a, b, c\}$ sunt:

a) $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$;

b) $a \neq 1$, $b = 0$, $c = -1$;
c) $a \neq 1$, $b = 0$, $c = 1$;
d) $a = 0$, $b = -1$, $c = 0$;
e) $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$;
f) nicio variantă.

67. Ecuatiile $x^2 - ax + b = 0$ şi $x^2 + 2bx + a = 0$ au rădăcini reale şi distincte dacă între parametrii reali a şi b există următoarea legătură:
a) $4a + 4b = 2$;
b) $4a + 4b + 1 = 0$;
c) $4a + 4b + 2 = 0$;
d) $4a + 4b = 1$;
e) $4a + b = 0$;
f) $a + 4b = 0$.

68. Parametrul real m pentru care ecuaţiile $2x^2 - (3m + 2)\,x + 12 = 0$ şi $4x^2 - (9m - 2)\,x + 36 = 0$ să aibă exact o singură rădăcină comună, se află în mulţimea:
a) $\{3\}$;
b) $\{\pm 3\}$;
c) $\{0, 3\}$;
d) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$;
e) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$;
f) nicio variantă.

69. Ecuaţia $x^2 - ax + b = 0$ admite x_1, x_2 ca rădăcini. Cele două rădăcini sunt reale şi una este dublul celeilalte dacă parametrii reali a şi b verifică:
a) $a^2 = 9b$;
b) $a^2 = \dfrac{9b}{2}$;
c) $a^2 = \dfrac{1}{2}$;
d) $a = 9, b = 2$;
e) $a = \dfrac{1}{9}$, $b = \dfrac{1}{2}$;
f) nicio variantă.

70. Fie x_1, x_2 rădăcini ale ecuaţiei $x^2 + (a+2)\,x + 2a + 1 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Valorile absolute ale celor două rădăcini sunt egale dacă:
a) $a = -2$;
b) $a = 0$;
c) $a = 4$;
d) $a \in \{-2,\, 0,\, 4\}$;
e) $a \in \{-2,\, 4\}$;
f) nicio variantă.

CAPITOLUL 6

NUMERE COMPLEXE

1. Valorile reale ale lui x şi y pentru care are loc egalitatea $(1+2i)\,x+(3-5i)\,y=1-3i$ sunt:
   a) $x=-\frac{11}{4},\ y=-\frac{5}{11}$;
   b) $x=\frac{11}{4},\ y=\frac{5}{11}$;
   c) $x=\frac{11}{4},\ y=-\frac{5}{11}$;
   d) $x=-\frac{4}{11},\ y=\frac{5}{11}$;
   e) $x=-\frac{11}{4},\ y=\frac{11}{5}$;
   f) $x=-\frac{11}{4},\ y=-\frac{11}{5}$.
2. Valoarea lui $(i-1)^{12}$ este:
   a) 128;
   b) 64;
   c) -64;
   d) -128;

e) $-64i$;

f) $64i$.

3. Modulul numărului complex $z=\dfrac{8+6i}{3+4i}$ este:

a) 2;

b) $\dfrac{8}{3}$;

c) $\dfrac{3}{2}$;

d) -2;

e) 4;

f) -4.

4. Valoarea reală a lui m, pentru care numărul complex $(1-m)\,i^3-2\,(1+m)\,i^2+3mi+1$ să fie real, este:

a) $m=-\dfrac{1}{2}$;

b) $m=\dfrac{1}{2}$;

c) $m=-\dfrac{1}{3}$;

d) $m=\dfrac{1}{3}$;

e) $m=-\dfrac{1}{4}$;

f) $m=\dfrac{1}{4}$.

5. Valorile parametrului real m, pentru care ecuaţia $z^2+2mz+5m-6=0$ are rădăcini complexe, sunt:

a) $m\in(-2,\,3)$;

b) $m\in(-\infty,2)\bigcup(3,\,+\infty)$;

c) $m\in(3,\,+\infty)$;

d) $m\in(-\infty,\,2)$;

e) $m\in(2,\,3)$;

f) $m\in(-\infty,\,3)$.

6. Soluţiile ecuaţiei $z^2=5+12i$ sunt:

a) $z=\pm\,(2+3i)$

b) $z = \pm(3+2i)$;

c) $z = \pm(3-2i)$;

d) $z = \pm(2-3i)$;

e) $z = \pm(3+4i)$;

f) $z = \pm(4+2i)$.

7. Dacă $z \in \mathbb{C}$, să se precizeze câte soluţii are ecuaţia $\overline{z} + z^2 = 0$:

a) patru;

b) trei;

c) două;

d) una;

e) niciuna;

f) o infinitate.

8. Dacă $x + y = \pi$, atunci $\dfrac{\cos x + i \sin x}{\cos y - i \sin y}$ este:

a) -2;

b) -1;

c) 0;

d) 1;

e) 2;

f) i.

9. Dacă $z_1 = 2 - 5i$ şi $z_2 = 1 - 6i$, atunci $z_1 \cdot z_2$ este:

a) $28 + 17i$;

b) $28 - 17i$;

c) $-28 + 17i$;

d) $-28 - 17i$;

e) $-17 - 28i$;

f) $-17 + 28i$.

10. Modulul numărului complex $z = \dfrac{4-2i}{1+i} + \dfrac{2+5i}{1-i}$ este:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\dfrac{1}{2}$;

c) $\sqrt{2}$;

d) 2;

e) $\sqrt{10}+\sqrt{\frac{29}{2}}$;

f) $\frac{7}{\sqrt{2}}$.

11. Valoarea produsului $P = i \cdot i^2 \cdot \dots \cdot i^{2019}$ este:

a) -1;

b) 0;

c) 1;

d) – 2;

e) 2;

f) i.

12. Valoarea sumei $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2019}$ este:

a) -1;

b) 0;

c) 1;

d) $2 - i$;

e) $2 + i$;

f) i.

13. Valoarea expresiei: $E = \frac{1 + i + i^2 + \dots + i^{2019}}{i \cdot i^2 \cdot \dots \cdot i^{2019}}$ este:

a) -1;

b) 2;

c) 0;

d) i;

e) $1 - i$;

f) $1 + i$.

14. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $z^2 + 2z + 2 = 0$ este:

a) $\{-1 - i, -1 + i\}$;

b) $\{2 - i, 2 + i\}$;

c) $\emptyset$;

d) $\{-3 - i, -3 + i\}$;

e) $\mathbb{C}$;

f) $\{-1-i, 1+i\}$;

15. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $z^2 + z \cdot \overline{z} + i = 0$ este:

a) -1;

b) $\mathbb{C}$;

c) $\mathbb{R}$;

d) $\{-2-i, -2+i\}$;

e) $\emptyset$;

f)) $\{-1-i, -2+i\}$.

16. Suma soluţiilor ecuaţiei $z^2 + z \cdot \overline{z} + i - 2 = 0$ este:

a) -1;

b) i;

c) $2i$;

d) $--i$;

e) $3i$;

f) 0.

17. Mulţimea valorilor numărului complex $\sqrt{1+i}$ este:

a) $\left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\}$;

b) $\left\{-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\}$;

c) $\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},\ -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\}$;

d) $\left\{-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right\}$;

e) $\left\{-\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{3}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}},\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{3}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}}\right\}$;

f) $\left\{-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\}$.

18. Mulţimea valorilor numărului complex $\sqrt{1-i}$ este:

a) $\left\{-\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}},\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}}\right\}$;

b) $\left\{-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\}$;

c) $\left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}},\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}}\right\}$;

d) $\left\{\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\}$;

e) $\left\{-\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}},\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{3}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}}\right\}$;

f) $\left\{-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},\ \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right\}$.

19. Fie numerele complexe $z_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ şi $z_2=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Numărul $\frac{z_1^2+z_2^2}{2}$ este egal cu:
a) $-1-i$;
b)$-1-2i$;
c) $1+i$;
d) $-2-i$;
e) $3i$;
f) $-1-3i$.

20. Fie numerele complexe $z_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ şi $z_2=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Numărul $\frac{z_1^2+z_2^2}{2}$ este egal cu:
a) -1;
b) $-1-3i$;
c) $1-3i$;
d) 1;
e) $1+3i$;
f) $-1-2i$.

21. Dacă $z_1 = \dfrac{1-i}{1+i}$ şi $z_2 = (2+i)(1-3i)$ atunci $\bar{z}_1 \cdot z_2$ este:
a) $5+5i$;
b) $5-5i$;
c) $-5-5i$;
d) $5+i$;
e) $5-i$;
f) $1-5i$.

22. Fie $z = \dfrac{2-3i}{3+2i} \in \mathbb{C}$. Atunci $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$ este:
a) 0;
b) -1;
c) $-i$;
d) $-\dfrac{1}{13}$;
e) $\dfrac{12}{13} - i$;
f) 1.

23. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{x-3}{1+i} + \dfrac{y+3}{2-i} = 1-4i$. Atunci
a) $x = 1,\ y = -1$;
b) $x = 9,\ y = -8$;
c) $x = -1,\ y = 0$;
d) $x = 6,\ y = -6$;
e) $x = -9,\ y = 5$;
f) $x = y = 0$.

24. Calculaţi $i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot i^7 + i + i^3 + i^5 + i^7 + 1 + \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{i^3} + \dfrac{1}{i^5} + \dfrac{1}{i^7}$
a) 1;
b) -1;
c) $-3i$;
d) 2;
e) $3i$;
f) 3.

25. Fie $z = \dfrac{(1-2i)(2+3i)(1-i)}{(2+i)(1+3i)(2-3i)}$. Atunci $|z|$ este:

a) 1;
b) 0;
c) -1;
d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$;
e) $\frac{\sqrt{2}}{107}$;
f) $\frac{1}{5}$.

26. Valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ care are proprietatea că $\frac{1 - i\sqrt{2}}{a + (a+2)i} \in \mathbb{R}$ este:
a) 0;
b) $\sqrt{2}$;
c) $1 + \sqrt{2}$;
d) $2 - \sqrt{2}$;
e) $2(1 - \sqrt{2})$;
f) $1 - \sqrt{2}$.

27. Valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ care are proprietatea că $\frac{1 + 3i}{2a + 5i} \in \mathbb{R}$ este:
a) $\frac{1}{2}$;
b) 0;
c) 1;
d) $\frac{5}{6}$;
e) $\frac{1}{3}$;
f) $\frac{3}{5}$.

28. Dacă $z = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ şi $\frac{z + 2 + i}{iz + 3} \in \mathbb{R}$. Atunci $(x+1)^2 + (y-1)^2$ este:
a) 0;
b) 1;
c) 2;
d) 3;

e) 4;
f) 5.

29. Rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 3x + 3 = 0$ sunt:
a) $\frac{2 \pm i}{2}$;
b) $\frac{2 \pm i\sqrt{3}}{2}$;
c) $\frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$;
d) $\frac{\sqrt{3} \pm 3i}{2}$;
e) $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
f) $1 \pm i$.

30. Rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 2x + 4 = 0$ sunt:
a) $\frac{1 \pm i}{2}$;
b) $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$;
c) $\frac{1 \pm i\sqrt{2}}{2}$;
d) $\frac{\sqrt{2} \pm 3i}{2}$;
e) $2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
f) $1 \pm i\sqrt{3}$.

31. Dacă $z = \frac{(1+i)^{2018}}{(1-i)^{2019}}$, atunci $|z|$ este:
a) $\sqrt{2}$;
b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
c) $\frac{1}{2}$;
d) 2;
e) 1;

f) nicio variantă.

32. Relaţia $\dfrac{-6+5i}{x+iy} = 2-4i$ are loc dacă:

a) $x + \dfrac{1}{5} = 2y$;

b) $x - \dfrac{1}{5} = 2y$;

c) $x + \dfrac{1}{5} = y$;

d) $+x - \dfrac{1}{5} = y$;

e) $x = 2y$;

f) $y = \dfrac{x}{2} - 1$.

33. Soluţiile ecuaţiei $z + |z| + 2\bar{z} = 14 - 4i$, unde $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se află în mulţimea:

a) $\{15 \pm 4i; 3 + 4i\}$;

b) $\left\{\pm\dfrac{15}{2} + 4i; 3 + 4i\right\}$;

c) $\left\{\pm\dfrac{15+4i}{2}; 3 + 4i\right\}$;

d) $\left\{\dfrac{15 \pm 4i}{2}; 3 + 4i\right\}$;

e) $\{-15 \pm 4i\}$;

f) nicio variantă.

34. Dacă z este o soluţie a ecuaţiei $(2+i)\,z + (3-5i)\,\bar{z} = 8 + 8i$, atunci $|z|$ este egal cu:

a) $\dfrac{8\sqrt{53}}{29}$;

b) $\dfrac{8\sqrt{2}}{29}$;

c) $\dfrac{8\sqrt{106}}{29}$;

d) $\dfrac{\sqrt{106}}{29}$;

e) $\dfrac{8}{29}$;

f) nicio variantă.

35. Valorile reale ale lui m pentru care $z = \dfrac{m+i}{1+2i}$ este pur imaginar, se află în mulţimea:

a) $\{-2; 0\}$;

b) $\left\{-2; \dfrac{1}{2}\right\}$;

c) $\emptyset$;

d) $\{-2\}$;

e) $\left\{-2, -\dfrac{1}{2}\right\}$;

f) nicio variantă.

36. Valorile reale ale lui m pentru care $z = \dfrac{m+1}{m-1+mi}$ este real sunt în:

a) $\{-1, 0\}$;

b) $\{-1\}$;

c) $\{0\}$;

d) $\{-1, 1\}$;

e) $\emptyset$;

f) nicio variantă.

37. Se consideră o ecuaţie de gradul al doilea cu coeficienţi reali ce admite $z_1 = \dfrac{3-i}{1-3i}$ ca rădăcină. Atunci produsul rădăcinilor acestei ecuaţii este egal cu:

a) 4;

b) 1;

c) 2;

d) 10;

e) -2;

f) -4.

38. Dacă $z = \dfrac{1}{1-i} + \dfrac{1}{a-i} + \dfrac{1}{1-ai}$, $a \in \mathbb{R}$, atunci este adevărată următoarea afirmaţie:

a) $z \in \mathbb{R}$;

b) $Im\, z$;

c) $Im\, z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a+1}{a^2+1}$;

d) $Im\, z = -2 - \dfrac{1}{z}$;

e) $z = -\bar{z}$;

f) $Im\, z = \dfrac{a-1}{a^2+1}$.

39. Valoarea $S = \sum\limits_{z \in M} Im\, z$, unde $M = \{z \in \mathbb{C}\,|z^2 = \bar{z}\}$ este egală cu:

a) $S = 0$;

b) $S = 1$;

c) $S = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $S = \dfrac{1}{2}$;

e) $S = -\dfrac{1}{2}$;

f) $S = -1$.

40. Se consideră mulţimea $M = \{z \in \mathbb{C}\,|(1-z)\,(1-iz) \in \mathbb{R}\}$. Imaginile elementelor lui M se află pe:

a) o dreaptă;

b) două drepte concurente;

c) două drepte paralele;

d) un cerc;

e) două puncte;

f) o dreaptă şi un cerc.

41. Dacă z este o rădăcină a ecuaţiei $z^2 + z + 1 = 0$, atunci $\alpha = z^{17} + \dfrac{1}{z^{17}}$ are valoarea:

a) 1;

b) z;

c) $\bar{z}$;

d) -1;

e) z^2;

f) nicio variantă.

42. Se consideră numărul $z = \dfrac{5}{2+i} + \dfrac{a}{2-i}$. Valoarea reală a lui a pentru care $z \in \mathbb{Z}$ este:
a) 10;
b) 5;
c) -5;
d) -10;
e) 0;
f) nicio variantă.

43. Dacă $z = a + ib$ şi $|z| = 3$, atunci valorile întregi ale lui a şi b sunt:
a) $a = 0$, $b = 3$;
b) $a = 0$, $b = \pm 3$;
c) $a = \pm 3$, $b = 0$;
d) $a = -3$, $b = 0$;
e) $a = 0$ şi $b = \pm 3$ sau $a = \pm 3$ şi $b = 0$;
f) nicio variantă.

44. Dacă $\left(\dfrac{2}{1-i}\right)^{10} = a + ib$, atunci:
a) $a = 0$, $b = 32$;
b) $a = 32$, $b = 0$;
c) $a = -32$, $b = 0$;
d) $a = 0$, $b = -32$;
e) nu există a şi b;
f) nicio variantă.

45. Se consideră $a = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$. Atunci valoarea lui $a \in \mathbb{Z}$ este:
a) 2;
b) i;
c) 4;
d) 8;
e) 6;
f) nicio variantă.

46. Se consideră mulţimea $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \left| z^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right. \right\}$ şi $z \in M$ astfel încât să satisfacă condiţiile: $Re\,(z) > 0$ şi $Re\,(z) \notin \mathbb{Q}$. Atunci, avem:
a) $z^n \in \mathbb{R}$ pentru orice $n \geq 1$;
b) $z^{600} \in \mathbb{Z}$;
c) $z^{300} \in M$;
d) $z^{1000} \in \mathbb{Q}$;
e) $z^{600} \in M$;
f) nicio variantă.

47. Fie mulţimea $M = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, iz^2 - 2\,(i+1)\,z + 3\,(2+i) = 0 \}$ şi $S_n = \left(\sum_{z \in M} z \right)^n$.
Atunci, este adevărată afirmaţia:
a) $|S_1| = 1$;
b) $|S_2| \in R \setminus \mathbb{Q}$;
c) $|S_1| \in \mathbb{Z}$;
d) $|S_6| \in \mathbb{Q}$;
e) $|S_{4k}| = |S_{8k}|$;
f) $|S_2| = 0$.

48. Fie $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \left| \left| \frac{1}{z} \right| = |z| = |1 - z| \right. \right\}$. Suma elementelor lui M este:
a) 1;
b) 2;
c) $\sqrt{3}$;
d) $2i$;
e) $\sqrt{3}i$;
f) 0.

49. Fie $M = \{ z \in \mathbb{C} \,||z+2| = |z-2| = |z+1+4i| \}$. Următoarea afirmaţie este adevărată:
a) există $z_{1,2} \in M$ astfel încât $|z_1| = \overline{z_2}$;
b) există $z_{1,2} \in M$ astfel încât $|z_1| = |z_2|$;
c) există $z \in M$ astfel încât $|z_1| \in \mathbb{Q}$;
d) $card\, M = 3$;

e) $M = \emptyset$;

f) nicio variantă.

50. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ şi $z = (1 + ai)\,(1 + ai^2)\,(1 + ai^3) \cdots (1 + ai^n)$. Atunci $z \in \mathbb{R}$ dacă n este:

a) $n \in \{4k, 4k + 3\}$, $k \in \mathbb{N}$;

b) $n \in \{3k, 3k + 1\}$, $k \in \mathbb{N}$;

c) $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$;

d) $n \in \mathbb{N}$;

e) $n \in \{4k + 1, 4k + 2\}$, $k \in \mathbb{N}$;

f) $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

CAPITOLUL 7

FUNCŢII ŞI ECUAŢII (RADICALI, EXPONENŢIALE, LOGARITMI)

1. Câte soluţii reale are ecuaţia $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}+1=0$?
   a) cinci;
   b) patru;
   c) trei;
   d) două;
   e) una;
   f) niciuna.

2. Soluţia reală a ecuaţiei $\sqrt{1-2x}=\sqrt{3}$ este:
   a) -2;
   b) -1;
   c) 0;
   d) 1;
   e) 2;
   f) 3.

3. Soluţiile ecuaţiei $\sqrt{2x+7} = x - 2$ sunt:
   a) $3 + 2\sqrt{3}$;
   b) $\{3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}\}$;
   c) 6;
   d) 2;
   e) $4\sqrt{3}$;
   f) $-4\sqrt{3}$.

4. Suma soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x} = 2$ este:
   a) 2;
   b) 0;
   c) 4;
   d) -4;
   e) -2;
   f) $2\sqrt{2}$.

5. Soluţia ecuaţiei $\sqrt[3]{x^3 + x + 1} = x$ este:
   a) $x = 2$;
   b) $x = 1$;
   c) $x = 0$;
   d) $x = -1$;
   e) $x = -2$;
   f) $x = \sqrt[3]{2}$.

6. Suma soluţiilor ecuaţiei $x + 2\sqrt{x} - 8 = 0$ este:
   a) 10;
   b) 6;
   c) 8;
   d) 16;
   e) 4;
   f) 20.

7. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 3$ este:
   a) 1;
   b) 2;

c) 9;
d) 27;
e) 3;
f) nu are soluţii reale.

8. Soluţiile reale ale ecuaţiei $\sqrt{x+8} - \sqrt{x} = 2$ sunt:
a) $x = 8$;
b) $x = 4$;
c) $x = 0$;
d) $x = -1$;
e) $x = 1$;
f) $x = \pm 1$.

9. Soluţia reală a ecuaţiei $\sqrt{x^2 - 3} + x = 3$ este:
a) $x = 1$;
b) $x = 0$;
c) $x = \sqrt{7}$;
d) $x = \sqrt{3}$;
e) $x = 4$;
f) $x = 2$.

10. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x-3} + \sqrt{x^2 - 9} = 0$ este:
a) 0;
b) 3;
c) -3;
d) 6;
e) -6;
f) nu are soluţii reale.

11. Soluţia reală a ecuaţiei $2^{-x} = \sqrt[4]{4}$ este:
a) $x = -\frac{1}{2}$;
b) $x = -2$;
c) $x = \frac{1}{2}$;
d) $x = \frac{1}{4}$;

e) $x = -\frac{1}{4}$;

f) $x = 0$.

12. Soluţia reală a ecuaţiei $9^x = \frac{1}{\sqrt[3]{81}}$ este:

a) $x = -\frac{1}{3}$;

b) $x = -\frac{4}{3}$;

c) $x = \frac{4}{3}$;

d) $x = \frac{-2}{3}$;

e) $x = \frac{2}{3}$;

f) $x = 0$.

13. Soluţia reală a ecuaţiei $4^x = 32$ este:

a) $x = \frac{1}{3}$;

b) $x = -8$;

c) $x = 8$;

d) $x = \frac{3}{4}$;

e) $x = \frac{5}{2}$;

f) $x = 3$.

14. Soluţia reală a ecuaţiei $5^{2-x} = 25^{-1}$ este:

a) $x = -4$;

b) $x = 4$;

c) $x = -2$;

d) $x = 2$;

e) $x = -5$;

f) $x = 5$.

15. Soluţia reală a ecuaţiei $3^{x+1} = 8 - 3^x$ este:

a) $x = \log_3 2$;

b) $x = \log_2 3$;

c) $x = 0$;

d) $x = 1$;

e) $x = 2$;

f) $x = \frac{4}{3}$.

16. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ este:

a) 0;

b) 3;

c) 9;

d) -3;

e) -9;

f) nu are soluţii reale.

17. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $5^x + 5^{1-x} - 6 = 0$ este:

a) 0;

b) -6;

c) -1;

d) 6;

e) 1;

f) nu are soluţii reale.

18. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $4^{x+1} - 6^x = 18 \cdot 9^x$ este:

a) -2;

b) 2;

c) $\frac{5}{4}$;

d) $\frac{9}{4}$;

e) $\frac{13}{4}$;

f) nu are soluţii reale.

19. Soluţiile reale ale inecuaţiei $2^{x^2+x+1} > 8$ sunt:

a) $x \in \emptyset$;

b) $x = -2$;

c) $x \in (-\infty, -2) \bigcup (1, +\infty)$;

d) $x \in (-2,\ 1)$;
e) $x \in \{-2,\ 1\}$;
f) $x = 1$.

20. Soluţiile reale ale inecuaţiei $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x-1} > 9^x \cdot 25^{-x}$ sunt:

a) $x \in \left\{0,\ \dfrac{1}{2}\right\}$;
b) $x \in (0,\ +\infty)$;
c) $x \in (-\infty,\ -2)$;
d) $x \in \left(\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$;
e) $x \in \mathbb{R}$;
f) $x \in \emptyset$.

21. Valoarea expresiei $\log_2 \dfrac{1}{32}$ este:

a) $\dfrac{1}{5}$;
b) -5;
c) $\dfrac{1}{4}$;
d) -4;
e) $\dfrac{1}{8}$;
f) -8.

22. Valoarea expresiei $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16}$ este:
a) 2;
b) -2;
c) $\dfrac{1}{4}$;
d) 4;
e) $\dfrac{1}{8}$;
f) -8.

23. Valoarea expresiei $\log_3 6 + \log_3 2 - \log_3 36$ este:
a) -1;

b) 1;
c) 26;
d) $\log_3 26$;
e) $-\log_3 26$;
f) $-10 + \log_3 2$.

24. Soluţia reală a ecuaţiei $1 + \log_2 (x+1) = \log_2 (x+2)$ este:
a) $x = 2$;
b) $x = 1$;
c) $x = 0$;
d) $x = 4$;
e) $x = 6$;
f) $x \in \emptyset$.

25. Produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei $\lg (x+1) - 2 \lg (x-1) = 1$ este:
a) $-\frac{9}{10}$;
b) $\frac{6}{7}$;
c) $\frac{9}{10}$;
d) $\frac{3}{2}$;
e) $\frac{13}{4}$;
f) nu are soluţii reale.

26. Soluţia reală a ecuaţiei $\lg (3 + \lg (x+1)) = 0$ este:
a) $x = -\frac{99}{100}$;
b) $x = \frac{99}{100}$;
c) $x = 0$;
d) $x = 101$;
e) $x = -99$;
f) $x \in \emptyset$.

27. Soluţia reală a ecuaţiei $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$ este:

a) $x = 792$;
b) $x = 279$;
c) $x = 18$;
d) $x = 1$;
e) $x = 729$;
f) $x \in \emptyset$.

28. Soluţiile ecuaţiei $3\log_3^2 x - 10\log_3 x + 3 = 0$ sunt:
a) $x \in \left\{\sqrt[3]{3},\ 9\right\}$;
b) $x \in \left\{\sqrt[3]{3},\ 27\right\}$;
c) $x \in \{1,\ 27\}$;
d) $x \in \left\{\sqrt[3]{9},\ 27\right\}$;
e) $x \in \left\{\sqrt[3]{9},\ 3\right\}$;
f) $x \in \left\{\sqrt[3]{9},\ 9\right\}$.

29. Soluţiile reale ale inecuaţiei $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2-3x+1\right)} > 1$ sunt:
a) $x \in \emptyset$;
b) $x \in (-3, 0)$;
c) $x \in \{0,\ 3\}$;
d) $x = 3$;
e) $x \in (-\infty, 0) \bigcup (3,\ +\infty)$;
f) $x \in (0, 3)$.

30. Soluţiile reale ale ecuaţiei $\dfrac{\log_2(2x-5)}{\log_2(x^2-8)} = \dfrac{1}{2}$ sunt:
a) $x \in \left\{\dfrac{11}{3}\right\}$;
b) $x \in \{9,\ 11\}$;
c) $x \in \left\{3,\ \dfrac{11}{3}\right\}$;
d) $x \in \left\{-\dfrac{11}{3},\ 3\right\}$;
e) $x \in \{-9,\ 11\}$;
f) $x \in \emptyset$.

31. Soluţiile inecuaţiei $\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_7 \frac{x^2-5x}{x+4}\right) < 0$ sunt:
    a) $x \in (2, +\infty)$;
    b) $x \in (0, +\infty)$;
    c) $x \in (-2, 14)$;
    d) $x \in (-4, -2) \bigcup (14, +\infty)$;
    e) $x \in (-4, -2)$;
    f) $x \in (14, +\infty)$.

32. Fie $a = \log_3 48$ şi $b = \log_5 90$. Numărul $x = \log_{20} 60$ în funcţie de a şi b este:
    a) $x = \frac{ab+3b}{2ab+a+2b+5}$;
    b) $x = \frac{ab-3b}{2ab-a-2b+5}$;
    c) $x = \frac{ab+2b}{3ab+a-3b+5}$;
    d) $x = \frac{ab}{2ab-5}$;
    e) $x = \frac{ab+b}{ab+a-2b+5}$;
    f) $x = \frac{2ab-a+2b+5}{2ab-a-2b+9}$.

33. Fie $a = \log_3 48$. Exprimaţi numărul $x = \log_2 12$ în funcţie de a.
    a) $x = \frac{5a+2}{a+1}$;
    b) $x = \frac{2a+3}{a-1}$;
    c) $x = \frac{3a+2}{a-1}$;
    d) $x = \frac{2a+3}{a+1}$;
    e) $x = \frac{2a+2}{a+1}$;
    f) $x = \frac{2a+2}{a-1}$.

34. Valoarea numărului $[\log_3 35]$ este:
    a) 2;

b) 0;
c) 3;
d) -2;
e) 1;
f) 4.

35. Valoarea numărului $[\log_{11} 234]$ este:
a) 0;
b) 1;
c) 3;
d) 2;
e) -2;
f) -4.

36. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $3^x{+}4^x{=}5^x$ este:
a) $\{1\}$;
b) $\{-2\}$;
c) $\emptyset$;
d) $\mathbb{R}$;
e) $\{2\}$;
f) $\{1, 2\}$.

37. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $3^{x^2-x+2}{+}4^{x^2-x+2}{=}5^{x^2-x+2}$ este:
a) $\{-1, 1\}$;
b) $\{1, 2\}$;
c) $\{0, 1\}$;
d) $\emptyset$;
e) $\{2\}$;
f) $\{0, 1\}$.

38. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\log_3 (x-2) = 2$ este:
a) $\{11\}$;
b) $\{0, 1\}$;
c) $\{2\}$;
d) $\{2\}$;

e) $\{3, 4\}$;
f) $\{-1, 1\}$.

39. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $\log_3(x-2)+\log_5(x^2-4)=\log_4(-x^2+3x-2)$ este:
a) 1;
b) 0;
c) 3;
d) 2;
e) 4;
f) 6.

40. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x-2}=x+3$ este:
a) 1;
b) 2;
c) 0;
d) 3;
e) 4;
f) 5.

41. Domeniul maxim de definiţie al funcţiei $f(x)=\log_3\left(\log_{\frac{2}{7}}(x-2)\right)$ este intervalul:
a) $(-2,\ 2)$;
b) $(-1,\ 2)$;
c) $(2,\ 5)$;
d) $(2,\ 3)$;
e) $(-3,\ 4)$;
f) $(2,\ \infty)$.

42. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+5}=-2$ este:
a) $[1, 2]$;
b) $\emptyset$;
c) $\mathbb{R}$;
d) $[-2, -1]$;

e) $[-2, 2]$;
f) $[-1, 1]$.

43. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 25} = 0$ este:
a) $\{-5,\ -2,\ 2,\ 5\}$;
b) $[-5, 5]$;
c) $\emptyset$;
d) $[-2, 5]$;
e) $[-5, 2]$;
f) $[-2, 2]$.

44. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ este:
a) $\{0,\ 3\}$;
b) $\{1,\ 8\}$;
c) $\emptyset$;
d) $\mathbb{R}$;
e) $\{1,\ 4\}$;
f) $\{0,\ 2\}$.

45. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ este:
a) $\{1,\ 3\}$;
b) $\{1,\ 9\}$;
c) $\{0,\ 3\}$;
d) $\mathbb{R}$;
e) $\emptyset$;
f) $\{0,\ 2\}$.

46. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $S = \sum\limits_{k=2}^{n} \lg\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$. Atunci S este:
a) $\lg \dfrac{1}{n}$;
b) 0;
c) $\lg n$;
d) -2;
e) $2 \lg n$;
f) nu se poate calcula.

47. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $S = \sum_{k=2}^{n} \lg\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Atunci S este:

a) $\lg \frac{n}{2}$;

b) $\lg \frac{2}{n}$;

c) $\lg \frac{n+1}{2}$;

d) $\lg 2(n+1)$;

e) 0;

f) $\lg 3$.

48. Produsul soluţiilor ecuaţiei $\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x+3}} = 3$ este:

a) 0;

b) 1;

c) -5;

d) $-\frac{1}{3}$;

e) -3;

f) $-\frac{5}{3}$.

49. Suma soluţiilor ecuaţiei $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$ este:

a) 1;

b) -4;

c) -3;

d) 0;

e) -2;

f) 3.

50. Suma soluţiilor ecuaţiei $\log_3(8-2x) - 2\log_3(4-x) = 0$ este:

a) 2;

b) 6;

c) 0;

d) 1;

e) -3;

f) -2.

51. Dacă $4^x + 4^{-x} = 14$, atunci $2^x + 2^{-x}$ este:
   a) $\sqrt{14}$;
   b) 1;
   c) 4;
   d) $\sqrt{12}$;
   e) 0;
   f) 8.

52. Fie $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$. Precizaţi care este afirmaţia corectă:
   a) $S_n \in \mathbb{Q}$ pentru orice $n \geq 1$;
   b) $S_{99} \in \mathbb{Q}$;
   c) $S_{1001} \in \mathbb{Q}$;
   d) $(S_n - S_{n+1}) \in \mathbb{Z}$, pentru orice n;
   e) Există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(S_n - S_{n+1}) \in \mathbb{Z}$;
   f) $S_{1000} \in \mathbb{Q}$.

53. Fie expresia $E(x) = \dfrac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}$ şi mulţimea $M = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, E(x) > \sqrt{5}\right\}$. Atunci avem:
   a) $M = (-3, 0)$;
   b) $M = (-3, 3) \setminus \{0\}$;
   c) $M \cap \mathbb{Z} = \{1, 2, 3\}$;
   d) $M \cap \mathbb{N} = \{1, 2\}$;
   e) $M = \{-3, 0, 3\}$;
   f) nicio variantă.

54. Ecuaţia $x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$ are produsul rădăcinilor egal cu:
   a) 1;
   b) -15;
   c) $4\sqrt{3}$;
   d) 15;
   e) -1;
   f) 0.

55. Câte soluţii reale are ecuaţia $\sqrt{4-\sqrt{x^4-x^2}}=-1+x$?
a) 0;
b) 1;
c) exact trei soluţii;
d) exact patru soluţii;
e) o infinitate;
f) două soluţii reale.

56. Inecuaţia $\dfrac{\sqrt{3-2x}}{x}\leq 1$ admite următoarea mulţime de soluţii:
a) $(-\infty;0)$;
b) $\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$;
c) $[1;\infty)$;
d) $\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$;
e) $\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$;
f) $(-\infty,0)\cup\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$.

57. Valoarea numărului real $a=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ este:
a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) $\dfrac{1}{2}$;
e) $\dfrac{1}{3}$;
f) -1.

58. Suma pătratelor soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{4x+1}+\sqrt{9-4x}=4$ este:
a) 4;
b) 1;
c) 0;
d) 2;
e) 8;

f) 6.

59. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=0$ este:
a) 1;
b) 2;
c) 0;
d) ∞;
e) 3;
f) nicio variantă.

60. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}=x-6$ este:
a) $\{4,12\}$;
b) $\{4\}$;
c) $\{4,8\}$;
d) $\{1\}$;
e) $\{12\}$;
f) nicio variantă.

61. În $\mathbb{Z}$, ecuaţia $\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{1-x}=2$ admite un număr de soluţii egal cu:
a) 0;
b) 2;
c) 3;
d) 1;
e) o infinitate;
f) nicio variantă.

62. Se consideră numerele $a=\log_3 6$, $b=\sqrt[3]{27}$, $c=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$. Atunci:
a) $c<a<b$;
b) $a<c<b$;
c) $a<b<c$;
d) $c=a<b$;
e) $c<b<a$;
f) $b<c<a$.

63. Dacă notăm cu $a = \log_3 2$, atunci exprimarea în funcţie de a, a numărului $\log_3 54$ este:
a) $3 - a$;
b) $3a$;
c) $a - 3$;
d) $3 + a$;
e) $\frac{3}{a}$;
f) $2 + a$.

64. Valoarea expresiei $E = \log \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{4} + \cdots + \lg \frac{99}{100}$ este:
a) -2;
b) 2;
c) 2^{-1};
d) $\frac{1}{2}$;
e) 1;
f) 10.

65. Numărul real x pentru care se realizează egalitatea $\log_2 x = \log_2 3 + \log_4 5 + + \log_{\frac{1}{2}} 7 + 2\log_8 3 + 3 - \log_{\frac{1}{4}} 5$ este:
a) 1;
b) $\frac{2}{7} \cdot 3^{\frac{5}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{2}}$;
c) $\frac{2}{7} \cdot 3^{\frac{5}{2}} \cdot 5^{\frac{5}{3}}$;
d) $\frac{2}{7} \cdot 3^{5} \cdot 5^{5}$;
e) $\frac{2}{7} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$;
f) nicio variantă.

66. Fie expresia $E = \dfrac{\log_3 x^2 + \log_9 x}{\log_{125} x^3 - \log_{0,2} x}$. Atunci E este:
a) $3\log_3 5$;
b) $\frac{1}{4}\log_3 5$;
c) $\frac{5}{4}\log_3 5$;

d) $\log_3 5$;

e) $\log_5 3$;

f) $\frac{3}{4}\log_5 3$.

67. Soluţiile reale ale ecuaţiei $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$ sunt:

a) $x = 1$;

b) $x \in \{0, 1\}$;

c) $x = 2$;

d) $x \in \{1, 2\}$;

e) $x \in \emptyset$;

f) nicio variantă.

68. Soluţiile reale ale ecuaţiei exponenţiale $4^{x+2} = 2^{x^2+5}$ sunt:

a) $x = -1$;

b) $x = 1$;

c) $x \in \{-1, 1\}$;

d) $x = 2$;

e) $x \in \emptyset$;

f) nicio variantă.

69. Numerele reale ce verifică ecuaţia exponenţială $3^{x+1}+5\cdot3^{x-1}-7\cdot3^{x}+21 = 0$ sunt elemente ale mulţimii:

a) $x = 1$;

b) $x = -1$;

c) $x = 2$;

d) $x \in \{0, 2\}$;

e) $x \in \{1, 2\}$;

f) $x \in \{-1, 1\}$.

70. Soluţiile ecuaţiei exponenţiale $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^x = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2$ verifică relaţia:

a) $x \in \emptyset$;

b) $x = -1$;

c) $x = 2$;

d) $x = 1$;

e) $x \in \{1, 2\}$;

f) $x \in \{0, 2\}$.

71. Soluţiile ecuaţiei exponenţiale $2^x - 14 \cdot 2^{-x} = -5$ se află în mulţimea:
   a) $x = \frac{1}{2}$;
   b) $x = -1$;
   c) $x = 0$;
   d) $x = \frac{3}{2}$;
   e) $x = 1$;
   f) $x \in \emptyset$.

72. Expresia $E = \log_4 (\log_2 (2x - 1))$ are sens dacă:
   a) $x \in (1, \infty)$;
   b) $x \in [1, \infty)$;
   c) $x \in (-\infty, 1)$;
   d) $x \in (0, 1)$;
   e) $x \in [0, 1)$;
   f) $x \in [0, 1]$.

73. Expresia $E = \log_{\frac{1}{2}} \left[\log_2 \left(\frac{3x+1}{x-2}\right)\right]$ are sens dacă:
   a) $x \in (2, \infty)$;
   b) $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (2,\infty)$;
   c) $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$;
   d) $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$;
   e) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$;
   f) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup (2, \infty)$.

74. Dacă $a = \lg 7$ şi $b = \lg 5$, atunci valoarea numărului $\lg \sqrt[5]{175}$ este:
   a) $a + 2b$;
   b) $\frac{a+b}{5}$;

c) $\frac{a+2b}{5}$;

d) $5\left(a+2b\right)$;

e) $\frac{\left(2a+b\right)}{5}$;

f) $5\left(2a+b\right)$.

75. Dacă $a=\log_3 2$, atunci $E=\frac{\log_3 12}{\log_{36} 3}-\frac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$ este:

a) 2;

b) 3;

c) 4;

d) $\frac{1}{2}$;

e) 0;

f) $\frac{1}{3}$.

76. Fie $E=\frac{1}{\log_x 2\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\log_x 8}-\frac{2}{3\left(\log_x 2\right)^2}$. Valoarea lui E este:

a) 1;

b) 0;

c) 2;

d) x;

e) $\left(\log_2 x\right)^2$;

f) $\frac{1}{\left(\log_x 2\right)^2}$.

77. Soluţiile reale ale ecuaţiei logaritmice $\log_5\left(3x+1\right)=1+\log_5\left(x-1\right)$ se află în mulţimea:

a) $\{2\}$;

b) $(0,3]$;

c) $(1,3]$;

d) $\{3\}$;

e) $\{0,3\}$;

f) nicio variantă.

78. Soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2\left(x^2-x-2\right)=\log_2\left(2x-4\right)+1$ verifică relaţia:

a) $a + \frac{3}{a} = 4$;

b) $a + \frac{1}{a} = 4$;

c) $3a + \frac{1}{a} = 4$;

d) $a + \frac{1}{a} = 12$;

e) $a + \frac{3}{a} = \frac{1}{4}$;

f) $\frac{a}{3} + \frac{1}{a} = 4$.

79. Soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_3 x + \log_x 3 = 2$ verifică relaţia:

a) $a + \frac{1}{a} = 2$;

b) $a + \frac{3}{a} = 2$;

c) $\frac{a}{3} + \frac{1}{a} = 2$;

d) $a + \frac{3}{a} = \frac{1}{4}$;

e) $\frac{a}{3} + \frac{1}{a} = \frac{1}{4}$;

f) $a + \frac{3}{a} = 4$.

80. Valorile reale ale lui x pentru care $\lg \sqrt{x}$, $\frac{3}{2}$, $\lg x$ sunt în progresie aritmetică sunt:

a) 10;

b) $\frac{1}{10}$;

c) 10^2;

d) $\frac{1}{10^2}$;

e) $3 \cdot 10^2$;

f) $\frac{3}{10^2}$.

81. Soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2\left(9^x+7\right)=\log_2\left(3^x+1\right)+2$, sunt:

a) $x=1$;

b) $x=2$;

c) $x\in\{0,1\}$;

d) $\dfrac{1}{2}$;

e) -2;

f) $\dfrac{3}{2}$.

CAPITOLUL 8

METODE DE NUMĂRARE

1. Soluţia ecuaţiei $A_n^5 = 12 \cdot A_n^3$ este:
   a) $n = 4$;
   b) $n = 5$;
   c) $n = 6$;
   d) $n = 7$;
   e) $n = 8$;
   f) $n = 9$.

2. Soluţia ecuaţiei $C_n^3 + C_n^2 = 15\,(n-1)$ este:
   a) $n = 4$;
   b) $n = 5$;
   c) $n = 6$;
   d) $n = 7$;
   e) $n = 8$;
   f) $n = 9$.

3. Câte soluţii are inecuaţia $C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^{x}$?
   a) una;

b) două;
c) trei;
d) patru;
e) cinci;
f) niciuna.

4. Pentru câte valori ale lui x există numărul $C_{7x}^{x^2+10}$?
a) una;
b) două;
c) trei;
d) patru;
e) cinci;
f) niciuna.

5. Termenul care nu îl conţine pe x din dezvoltarea $\left(x+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{72}$ este:
a) T_{55};
b) T_{56};
c) T_{57};
d) T_{58};
e) T_{59};
f) T_{60}.

6. Câţi termeni raţionali are dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{25}$?
a) niciunul;
b) doi;
c) trei;
d) patru;
e) cinci;
f) şase.

7. Soluţiile ecuaţiei $C_{4x}^{x^2-2x}=C_{12}^{9}$ sunt:
a) $x=2$;
b) $x=3$;
c) $x=4$;

d) $x = 5$;
e) $x = 6$;
f) $x \in [2, 6]$.

8. Cea mai mică soluţie naturală a inecuaţiei $A_{x+2}^{x-1} \geq 12$ este:
a) $x = 2$;
b) $x = 5$;
c) $x = 4$;
d) $x = 3$;
e) $x = 6$;
f)$x = 7$.

9. Soluţia ecuaţiei $C_{n-2}^{2} = 21$ este:
a) $n = 9$;
b) $n = 8$;
c) $n = 7$;
d) $n = 6$;
e) $n = 5$;
f) $n = 4$.

10. Soluţia ecuaţiei $4C_n^1 + 2C_n^2 = 10$ este:
a) $n = 2$;
b) $n = 3$;
c) $n = 4$;
d) $n = 5$;
e) $n = 6$;
f) $n = 7$.

11. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Valoarea sumei S_n= $1! \cdot 1 + 2! \cdot 2+ \cdots +n! \cdot n$ este:
a) $(n-1)\,!+1$;
b) $(n+1)\,!-n!$;
c) $(n-1)\,!-(n-2)\,!$;
d) $(n-2)!+2$;
e) $(n+1)!-1$;
f) $(n+1)!+n!$.

12. Numărul $C_{2019}^{2}-C_{2019}^{2017}$ este egal cu:
    a) 1;
    b) 0;
    c) 2;
    d) -2;
    e) 3;
    f) -3.

13. Suma soluţiilor ecuaţiei $C_{x+5}^{x^2-x+4}= 7$ este:
    a) 3;
    b) 0;
    c) 2;
    d) 5;
    e) -4;
    f) 4.

14. Produsul soluţiilor ecuaţiei $A_{x+5}^{x^2-x+4}= 360$ este:
    a) 4;
    b) 0;
    c) 2;
    d) 1;
    e) -2;
    f) -4.

15. Cel mai mare termen al dezvoltării $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)^{1234}$ este:
    a) $T_{541}=T_{542}$;
    b) $T_{471}=T_{472}$;
    c) $T_{245}=T_{246}$;
    d) $T_{347} = T_{348}$;
    e) $T_{741} = T_{742}$;
    f) $T_{123} = T_{124}$.

16. Cel mai mare termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^{11}$ este:
    a) T_{11};

b) T_8;
c) T_7;
d) T_6;
e) $T_6 = T_7$;
f) $T_9 = T_{10}$.

17. Se consideră binomul $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{2018}$. Numărul termenilor iraţionali din dezvoltarea binomului este egal cu:
a) 1682;
b) 0;
c) 2;
d) 1;
e) 18;
f) 1480.

18. Se consideră binomul $\left(\sqrt[5]{5}+\sqrt[3]{3}\right)^{2020}$. Numărul termenilor raţionali din dezvoltarea binomului este egal cu:
a) 200;
b) 135;
c) 0;
d) 40;
e) 24;
f) 50.

19. Se consideră binomul $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y}\right)^{200}$. Termenul care nu depinde de x este:
a) $2y$;
b) $20y^{20}$;
c) y^{40};
d) 1;
e) $2y^{20}$;
f) $40y^{20}$.

20. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Valoarea sumei $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 C_n^k$ este:
a) $n\left(n+1\right) \cdot 2^{n-2}$;
b) $n^2\left(n-1\right) \cdot 2^n$;

c) $n^2(n-1)\cdot 2^{n+2}$;
d) $n(n^2-1)\cdot 2^{2n}$;
e) $n(n^2+2)\cdot 2^{n+4}$;
f) $n^2(n^2+1)\cdot 2^n$.

21. Dacă $x = P_4 + P_3 + 2019$, $y = P_4 \cdot P_3$ şi $z = \dfrac{P_4}{P_3} - 2019$, atunci $x+y+z$ este:
a) 178;
b) 200;
c) 0;
d) 187;
e) 138;
f) 234.

22. Forma cea mai simplă a expresiei $\dfrac{(n+3)!\cdot n!}{(n-1)!\cdot(n+4)!}$ este:
a) $\dfrac{n+3}{n+4}$;
b) $\dfrac{n}{n+4}$;
c) $\dfrac{n+1}{n-1}$;
d) $\dfrac{1}{n+4}$;
e) $\dfrac{n+1}{n+4}$;
f) $\dfrac{n+3}{n-1}$.

23. Mulţimea soluţiilor naturale ale inecuaţiei $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} < 42$ este:
a) $\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$;
b) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$;
c) $\{0,\ 1,\ 2\}$;
d) $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$;
e) $\emptyset$;
f) $\mathbb{N}$.

24. Valoarea lui $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{A_{46}^{n+2}}{A_{44}^{n+1}} = 2070$ este:
    a) 1;
    b) 10;
    c) 44;
    d) 43;
    e) 40;
    f) 207.

25. Rezultatul calculului $2C_5^3 - C_6^2 - A_4^1 + P_5$ este:
    a) 111;
    b) 120;
    c) 131;
    d) 121;
    e) 0;
    f) 1.

26. Valoarea lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care $C_{n+1}^5 = 7C_n^4$ este:
    a) $\emptyset$;
    b) 35;
    c) 31;
    d) 27;
    e) 34;
    f) 30.

27. Termenul al cincilea al dezvoltării $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{15}$ este:
    a) $-1365x^7$;
    b) $91x^5$;
    c) $-1365x^8$;
    d) $1365x^7$;
    e) $195x^6$;
    f) $1365x^8$.

28. Termenul al zecelea al dezvoltării $(x^2 + \sqrt[3]{x})^{15}$ este:
    a) $455x^{12}$;

b) $5005x^{12}$;
c) $1001x^{15}$;
d) $505x^{15}$;
e) $5005x^{18}$;
f) $5005x^{15}$.

29. Termenul care-l conţine pe x^4 în dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ este:
a) T_0;
b) T_3;
c) T_1;
d) nu există;
e) T_2;
f) T_{10}.

30. Valoarea lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care, în dezvoltarea $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^n$, raportul dintre coeficientul binomial al termenului al cincilea şi coeficientul binomial al termenului al treilea este $\frac{5}{2}$ este:
a) 12;
b) 10;
c) 15;
d) 16;
e) 11;
f) 8.

31. Ecuaţia $C_{n+1}^5 = \frac{(n-3)\,n\,(n+1)}{6}$ admite ca soluţii:
a) $n = 6$;
b) $n \in \{0,\ 3,\ 6\}$;
c) $n \in \{0, 3\}$;
d) $n \in \{0,\ 6\}$;
e) $n \in \{3,\ 6\}$;
f) nicio variantă.

32. Se consideră ecuaţia $A_x^7 + 3A_{x+1}^6 = 21A_x^5$. Soluţia ecuaţiei este:
a) $x = 7$;

b) $x = 5$;
c) $x = 2$;
d) $x = 6$;
e) $x = 8$;
f) nicio variantă.

33. $C_n^3 \vdots C_n^2$ dacă n este un număr natural nenul astfel încât:
a) $n = 8$;
b) $n = 5$;
c) $n = 2$;
d) $n \geq 3$;
e) $n = 3k + 2$;
f) nicio variantă.

34. Se consideră expresia $E = \dfrac{C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n}{2^{n-1}}$. După simplificare, se obţine:
a) $2n$;
b) 2;
c) n;
d) 2^n;
e) $n - 1$;
f) $\dfrac{n}{2}$.

35. Să se precizeze numărul elementelor mulţimii $M = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (\exists)\, C_{7x}^{x^2+10} \right\}$:
a) 5;
b) 0;
c) 2;
d) 4;
e) 3;
f) 6.

36. Numerele C_{x+1}^{x}, A_4^2, C_{x+5}^{x+3} sunt în progresie aritmetică (în această ordine) dacă x se află în mulţimea:
a) $\{-13, 2\}$;

b) $[1, 2]$;

c) $[2, \infty)$;

d) $\{2\}$;

e) $(-\infty, 2]$;

f) nicio variantă.

37. Suma pătratelor soluţiilor ecuaţiei $C_{3x+4}^{x^2+2x-4} = C_{10}^{6}$ este:

a) 6;

b) 4;

c) 8;

d) 10;

e) 12;

f) nicio variantă.

38. Dacă o mulţime cu n elemente are şase submulţimi cu două elemente, atunci n este egal cu:

a) 4;

b) 3;

c) 5;

d) 6;

e) 7;

f) nicio variantă.

39. Soluţia sistemului $\begin{cases} A_{3x}^{2y-7} = 27A_{3x}^{2y-8} \\ 7C_{3x}^{2y-7} = 27C_{3x}^{2y-8} \end{cases}$ este:

a) $x = 12$, $y = 6$;

b) $x = 10$, $y = 8$;

c) $x = 11$, $y = 7$;

d) $x = 13$, $y = 5$;

e) $x = 14$, $y = 4$;

f) nicio variantă.

40. Dacă C_{x-1}^{y-1}, C_{x-1}^{y}, C_{x}^{y} sunt în progresie aritmetică şi A_{x}^{y}, A_{x}^{y+1}, A_{x+1}^{y+1} sunt în progresie geometrică atunci:

a) $x = 3$, $y = 1$;

b) $x = 1$, $y = 3$;
c) $x = y = 1$;
d) $x = y = 3$;
e) $x = 0$, $y = 3$;
f) nicio variantă.

41. În dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3^{-1}}\right)^n$, raportul dintre al şaptelea termen şi al şaptelea termen de la sfârşitul dezvoltării este $0,1\,(6)$. Atunci, valoarea naturală a lui n este:
a) 9;
b) 8;
c) 10;
d) 7;
e) 11;
f) nicio variantă.

42. Care este cel de-al treilea termen din dezvoltarea $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^{-1}}\right)^n$, dacă $2^{2n} - 2^n = 240$?
a) $6\sqrt{x}$;
b) $\sqrt[3]{x}$;
c) $12\sqrt[3]{x}$;
d) $6\sqrt[3]{x}$;
e) $6\sqrt[3]{x^{-1}}$;
f) $12\sqrt[3]{x^{-1}}$.

43. În dezvoltarea binomială $\left(\sqrt{\dfrac{x}{\sqrt[3]{y}}} + \sqrt{\dfrac{y}{\sqrt{x}}}\right)^{17}$, rangul termenului în care exponenţii lui x şi y sunt egali, este:
a) 6;
b) 7;
c) 8;
d) 9;
e) 11;
f) 12.

44. Se ştie că în dezvoltarea $\left(\dfrac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\dfrac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n$, $n \geq 1$,$T_6 - T_4 = 56$ şi C_n^0, $\dfrac{1}{2}C_n^1$, $\dfrac{1}{4}C_n^2$ sunt în progresie aritmetică. În acest caz, valoarea reală a parametrului x este:
a) 1;
b) 2;
c) $\dfrac{1}{2}$;
d) -1;
e) 0;
f) nicio variantă.

45. Numărul termenilor iraţionali existenţi în dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{20}$ este:
a) 15;
b) 17;
c) 16;
d) 21;
e) 0;
f) nicio variantă.

46. Dacă pentru dezvoltarea $\left(\sqrt[9]{x^{-1}}+\sqrt[4]{x}\right)^n$ suma coeficienţilor binomiali este 128, termenul ce conţine $x^{\frac{2}{3}}$ are coeficientul:
a) 38;
b) 35;
c) C_9^2;
d) C_7^1;
e) 37;
f) 1.

47. Suma coeficienţilor binomiali de rang impar ai dezvoltării $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ este 256. Rangul termenului ce conţine x^{-1} este:
a) 1;
b) 8;
c) 2;

d) 4;
e) 5;
f) 3.

48. Dacă suma coeficienţilor binomiali ai ultimilor trei termeni din dezvoltarea $\left(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}}\right)^n$ este 22 şi $T_3+T_5=135$, atunci valoarea reală x se află în mulţimea:
a) $\{1, 2\}$;
b) $\{2\}$;
c) $\{-1, 2\}$;
d) $\{-2, -1\}$;
e) $\{1\}$;
f) $\{-1, 1\}$.

49. Suma coeficienţilor din dezvoltarea $(10x^8-x^3-8x)^{2018}$ este:
a) 0;
b) 2;
c) -1;
d) 2018;
e) 1;
f) nicio variantă.

50. Valoarea lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^n$ are exact 8 termeni raţionali se află în mulţimea:
a) $\{28, 29, 30, 31\}$;
b) $\{32\}$;
c) $\{32, 34\}$;
d) $\{36\}$;
e) $\emptyset$;
f) $\{26, 27\}$.

CAPITOLUL 9

MATRICE

1. Valoarea parametrului real m pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 1+5m & 10m \\ -2m & 1-4m \end{pmatrix}$ să nu fie inversabilă este:
   a) $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
   b) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
   c) $m = 1$;
   d) $m = -1$;
   e) $m = -2$;
   f) $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. Dacă $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $A^2 - 3A^t$ este:
   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & 6 \\ 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & 6 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & 6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$;

f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci valorile parametrilor reali a şi b pentru care $A^3 = a \cdot A^2 + b \cdot A$ sunt:
a) $a = 3$, $b = -2$;
b) $a = 3$, $b = 2$;
c) $a = -3$, $b = -2$;
d) $a = -3$, $b = 2$;
e) $a = 3$, $b = -1$;
f) $a = 2$, $b = -2$.

4. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, atunci valoarea parametrului real a pentru care $A^2 = a \cdot A$ este:
a) $a = -3$;
b) $a = -2$;
c) $a = 2$;

d) $a = 3$;
e) $a = 4$;
f) $a = 5$.

5. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, atunci suma $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2019}$ este:
a) $\dfrac{5^{2018}}{4} \cdot A$;
b) $\dfrac{5^{2018} - 1}{4} \cdot A$;
c) $\dfrac{5^{2019} - 1}{4} \cdot A$;
d) $\dfrac{5^{2017}}{4} \cdot A$;
e) $\dfrac{5^{2018} - 1}{2} \cdot A$;
f) $\dfrac{5^{2017}}{2} \cdot A$;

6. Valorile parametrului real m, pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, sunt:
a) $m \in (2, +\infty)$;
b) $m \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$;
c) $m \in \left\{\dfrac{1}{2}, 2\right\}$;
d) $m \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \bigcup (2, +\infty)$;
e) $m \in \left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$;
f) $m \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \bigcup (2, +\infty)$.

7. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, atunci $A^2 - 4A$ este:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, atunci valorile reale ale lui a, pentru care matricea $X(a) = I_2 + aA$ este inversabilă, sunt:
a) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
b) $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$;
c) $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$;
d) $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$;
e) $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}\right\}$;
f) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

9. Dacă $A(x) = \begin{pmatrix} 1+4x & -3x \\ 8x & 1-6x \end{pmatrix}$, atunci $A(1) \cdot A(-1)$ este:

a) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 16 & -11 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -16 & -11 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -16 & -11 \end{pmatrix}$.

10. Dacă $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci soluţia ecuaţiei $A(3^x) \cdot A(3^{x+1}) = A(324)$ este:

a) $x = 1$;
b) $x = 2$;
c) $x = 3$;
d) $x = 4$;
e) $x = 5$;
f) $x = 6$.

11. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Matricea A^{2019} este:

a) $\begin{pmatrix} 7^{2018} & 2 \cdot 7^{2018} \\ 2 \cdot 7^{2018} & 7^{2018} \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 \cdot 7^{2018} & 3 \cdot 7^{2018} \\ 3 \cdot 7^{2018} & 2 \cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 5 \cdot 7^{2018} & 2 \cdot 7^{2018} \\ 2 \cdot 7^{2018} & 5 \cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 3 \cdot 7^{2018} & 6 \cdot 7^{2018} \\ 2 \cdot 7^{2018} & 4 \cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 4 \cdot 7^{2018} & 6 \cdot 7^{2018} \\ 7^{2018} & 4 \cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 4\cdot 7^{2018} & 7^{2018} \\ 7^{2018} & 4\cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$.

12. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$. Matricea A^{2019} este:

a) $\begin{pmatrix} 3\cdot 7^{2018} & 6\cdot 7^{2018} \\ 2\cdot 7^{2018} & 4\cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3\cdot 9^{2018} & 2\cdot 9^{2018} \\ 9\cdot 9^{2018} & 6\cdot 9^{2018} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 9^{2018} & 2\cdot 9^{2018} \\ 2\cdot 9^{2018} & 9^{2018} \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 4\cdot 7^{2018} & 7^{2018} \\ 7^{2018} & 4\cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 3\cdot 9^{2018} & 2\cdot 9^{2018} \\ 2\cdot 9^{2018} & 3\cdot 9^{2018} \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 4\cdot 7^{2018} & 7^{2018} \\ 7^{2018} & 4\cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$.

13. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Matricea A^{2019} este:

a) $\begin{pmatrix} 3\cdot 7^{2019} & 6\cdot 7^{2019} \\ 2\cdot 7^{2019} & 4\cdot 7^{2019} \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3\cdot 9^{2018} & 2\cdot 9^{2018} \\ 9\cdot 9^{2018} & 6\cdot 9^{2018} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3\cdot 13^{1009} & 2\cdot 13^{1009} \\ 2\cdot 13^{1009} & -3\cdot 13^{1009} \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 4\cdot 7^{2018} & 7^{2018} \\ 7^{2018} & 4\cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 3\cdot 7^{2018} & 7^{2018} \\ 7^{2018} & 3\cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 4\cdot 7^{2019} & 7^{2019} \\ 7^{2019} & 4\cdot 7^{2019} \end{pmatrix}$.

14. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. Matricea A^{2018} este:

a) $\begin{pmatrix} 3\cdot 7^{2018} & 6\cdot 7^{2018} \\ 2\cdot 7^{2018} & 4\cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3\cdot 9^{2018} & 2\cdot 9^{2018} \\ 9\cdot 9^{2018} & 6\cdot 9^{2018} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3\cdot 13^{1009} & 2\cdot 13^{1009} \\ 2\cdot 13^{1009} & -3\cdot 13^{1009} \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 36^{1009} & 0 \\ 0 & 36^{1009} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 4\cdot 7^{2018} & 7^{2018} \\ 7^{2018} & 4\cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 4\cdot 7^{2019} & 7^{2019} \\ 7^{2019} & 4\cdot 7^{2019} \end{pmatrix}$.

15. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Suma valorilor coeficienţilor $p, q, r \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $A^3 + pA^2 + qA + rI_3 = O_3$ este:

a) 20;
b) -20;
c) 12;
d) 32;
e) -36;
f) 24.

16. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Produsul valorilor coeficienţilor $p, q, r \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $A^3 + pA^2 + qA + rI_3 = O_3$ este:

a) 24;
b) 0;
c) 28;
d) 4124;
e) -36;
f) 3402.

17. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Matricea $C = (A+B)^n$ este:

a) $\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^n \\ 2^n & 2^{n-1} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 4^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 4^{n-1} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2^n & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

18. Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$ şi matricele $A_k = \begin{pmatrix} k & 2^{k-1} & k^2 \\ \frac{1}{k(k+1)} & 1 & k(k+1) \end{pmatrix}$. Matricea $B = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ este:

a) $\begin{pmatrix} \dfrac{n(n-1)}{2} & 2^n + 1 & \dfrac{n(n-1)(2n+1)}{6} \\ \dfrac{n}{n+1} & n+1 & \dfrac{n(n-1)(n+2)}{3} \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} \dfrac{n(n+1)}{2} & 2^n + 1 & \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \dfrac{n}{n+1} & n-1 & \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} \dfrac{n(n+1)}{2} & 2^n - 1 & \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \dfrac{n}{n+1} & n & \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} \dfrac{n(n-1)}{3} & 2^n + 1 & \dfrac{n(n+1)(2n-1)}{12} \\ \dfrac{n}{n+2} & n & \dfrac{n(n+1)(n+2)}{5} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} \dfrac{n(n-1)}{2} & 2^{n+1} + 1 & \dfrac{n(n-1)(2n+1)}{6} \\ \dfrac{n}{n+1} & n & \dfrac{n(n-1)(n+2)}{3} \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} \dfrac{n(n+1)}{2} & 2^n + 1 & \dfrac{n(n-1)(2n+1)}{6} \\ \dfrac{n}{n+1} & n & \dfrac{n(n-1)(n+2)}{3} \end{pmatrix}$.

19. Fie matricele $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ şi C $= \begin{pmatrix} 6 & 11 \end{pmatrix}$. Matricea A cu proprietatea că $A \cdot B = C$ este:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

20. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Matricea A^{2019} este:

a) $\begin{pmatrix} -2^{2019} & 0 \\ 0 & -2^{2019} \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2^{2019} & 0 \\ 0 & -2^{2019} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -2^{2019} & 0 \\ 0 & 2^{2019} \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -2^{2019} & 2^{2019} \\ 0 & -2^{2019} \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -2^{2019} & 0 \\ 2^{2019} & -2^{2019} \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} -2^{2019} & 2^{2019} \\ 2^{2019} & -2^{2019} \end{pmatrix}$.

21. Dacă $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $A^2 - 3A - I_2$ este:

a) $\begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

22. Dacă $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $-2A^2 + 4A - 3I_2$ este:

a) $\begin{pmatrix} -9 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -9 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

23. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C = 3A - 2B$, atunci matricea $2AC - 3B$ este:

a) $\begin{pmatrix} 26 & 1 & 11 \\ -3 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & 27 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 23 & 1 & -17 \\ -9 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 31 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 26 & 1 & -17 \\ -9 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & 27 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 26 & 1 & 17 \\ -9 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 27 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ -9 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

24. Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $C = 2A - 3B$, atunci matricea $3BC + CA$ este:

a) $\begin{pmatrix} -11 & 0 & -7 \\ 3 & 6 & 11 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -17 \\ -9 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -11 & 14 & -7 \\ 3 & 6 & -11 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -11 & 0 & -7 \\ 3 & 6 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ -9 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 3 & 6 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

25. Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $Tr\,(A^2)$ este:

a) 12;
b) 8;
c) 1;
d) -6;
e) 2;
f) 0.

26. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $Tr\left(A^{2019}\right)$ este:

a) 3^{2017};
b) 3^{2018};
c) 3^{2019};
d) 3^{2020};
e) 0;
f) 3^{2021}.

27. Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este:

a) $\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

28. Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ este:

a) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

29. Valorile parametrilor a şi b astfel încât matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a & 3 \\ 3 & -1 & 3 & b \end{pmatrix}$ să aibă rangul 2 sunt:

a) $a = -1$, $b = 7$;
b) $a = 12$, $b = 9$;
c) $a = 0$, $b = 9$;
d) $a = 0$, $b = 7$;
e) $a = -1$, $b = 9$;
f) $a = 12$, $b = 7$.

30. Valorile parametrilor a şi b astfel încât matricea $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & b \\ -1 & a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ să aibă rangul 2 sunt:
a) $a = 4$, $b = 7$;
b) $a = 2$, $b = -7$;
c) $a = -4$, $b = -7$;
d) $a = 5$, $b = 0$;
e) $a = 8$, $b = \dfrac{14}{3}$;
f) $a = 4$, $b = 1$.

31. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & -2x & 1 \\ 5 & 6 & y^2+6 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 4x & -6 & 2 \\ 0 & -x^2 & -10 \\ 4 & 0 & 2y \end{pmatrix}$.
Dacă $a_{33} + b_{33} = a_{21} - b_{12}$, atunci y este egal cu:
a) $y = 1$;
b) $y = -3$;
c) $y \in \{-3, 1\}$;
d) $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
e) $y \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$;
f) nicio variantă nu este adevărată.

32. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ astfel încât $(A - I_2)^2 = I_2$. Atunci $S = a^3 + b^3$ este:
a) 8;
b) 1;
c) 0;

d) -1;

e) -8;

f) nicio variantă nu este adevărată.

33. Dacă $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 2a^2+2a & 4a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 12 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix}$, atunci $S =$ $x + y + z$ este egal cu:

a) 54;

b) 57;

c) 56;

d) 55;

e) 58;

f) nicio variantă.

34. Numărul matricelor $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ ce verifică relaţia $X^2 + X = \frac{1}{4} I_2$, este egal cu:

a) 2;

b) 0;

c) 4;

d) 6;

e) o infinitate;

f) nicio variantă.

35. Fie ecuaţia matriceală $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci, urma matricei X, $Tr(X)$, este egală cu:

a) 0;

b) -3;

c) 4;

d) 2;

e) 3;

f) nicio variantă.

36. Soluţia ecuatiei matriceale $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 12 & 17 \end{pmatrix}$ are suma pătratelor elementelor sale egal cu:

a) 15;

b) 12;

c) 16;

d) 14;

e) 10;

f) nicio variantă.

37. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \log_{\sqrt{3}} 27\sqrt{3} & \log_4 \dfrac{1}{16} & \log_{\frac{1}{125}} 5^2\sqrt[3]{5} \\ C_9^0 & C_3^2 & C_5^3 \end{pmatrix}$.

Pătratul elementului minim al matricei A este:

a) 1;

b) 4;

c) 2;

d) 6;

e) 3;

f) nicio variantă.

38. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \sum\limits_{k=1}^{2018} \left[k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdots \right.$

$\left. \cdots \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \right]$. Atunci urma matricei A este:

a) $2(2019! - 1)$;

b) $2^{2020} - 2$;

c) $2\left(\sum\limits_{k=1}^{2018} k!\right)$;

d) 2;

e) $2018!$;

f) nicio variantă.

39. Se consideră matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ ce comută cu matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Atunci x_{12} se divide cu:

a) 4;
b) 6;
c) 2;
d) 3;
e) 12;
f) nicio variantă.

40. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{N})$, considerăm ecuaţia matriceală $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Numărul soluţiilor acestei ecuaţii este:
a) 1;
b) 6;
c) 2;
d) 3;
e) 4;
f) nicio variantă.

41. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2a & -a \\ 2a & -a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, ce verifică relaţia $A^3 - 3A^2 = -2A$. Numărul valorilor nenule ale parametrului a pentru care se realizează această relaţie este:
a) 1;
b) 0;
c) 2;
d) 3;
e) o infinitate;
f) nicio variantă.

42. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $ad = bc$ şi $a = 1 - d$. Atunci numărul puterilor distincte ale matricei A^n, $n \in \mathbb{N}$, este:
a) 4;
b) 6;
c) 3;
d) 1;
e) 2;

f) nicio variantă.

43. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci valoarea naturală nenulă a lui n pentru care $A^n + A^{n-1} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 24 \end{pmatrix}$ este:

a) 5;

b) 2;

c) 6;

d) 8;

e) 3;

f) nicio variantă.

44. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, atunci suma elementelor matricei A^{2000} este:

a) $2^{2000} - 1$;

b) $2^{2001} + 1$;

c) $2^{2001} - 1$;

d) $2^{2000} + 1$;

e) $2^{2001} + 3$;

f) nicio variantă.

45. Dacă $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, atunci valoarea naturală nenulă n pentru care se realizează egalitatea $A^n = 2^n I_2$ este:

a) 10;

b) 12;

c) 24;

d) 2;

e) $12k$, $k \in \mathbb{N}^*$;

f) nicio variantă.

46. Fie ε rădăcină a ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Atunci suma elementelor situate pe diagonala principală în matricea A^{1000}, $\mathrm{Tr}\,(A^{1000})$, este:

a) 3^{500};

b) 3^{501};

c) 3^{502};

d) $3^{499} + 1$;

e) $3^{501} + 1$;

f) nicio variantă.

47. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, atunci elementul aflat pe linia 1 şi coloana 3 în matricea A^{2000} este:

a) 2^{1999};

b) 2^{1000};

c) 2^{2000};

d) 1;

e) $2^{1999} + 1$;

f) nicio variantă.

48. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi relaţia $A^n = a_n A + b_n I_3$, $n \geq 1$. Atunci a_{2000} este:

a) $\dfrac{2^{2000} + 1}{3}$;

b) $\dfrac{2^{2000} - 1}{3}$;

c) $\dfrac{2^{1000} + 1}{3}$;

d) $\dfrac{2^{1000}-1}{3}$;

e) $\dfrac{2^{2000}}{3}$;

f) nicio variantă.

49. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$. Elementul situat pe linia 2 şi coloana 2 în A^{2018} este:

a) 1;

b) a^{2018};

c) $2018a^{2018}$;

d) $2019a^{2018}$;

e) a^{2019};

f) nicio variantă.

50. Fie ecuaţiile matriceale $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)$ şi $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1)$ şi $X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ o soluţie comună a acestora. Atunci valoarea parametrului real a este:

a) $\dfrac{3}{10}$;

b) $\dfrac{2}{10}$;

c) $\dfrac{1}{10}$;

d) 10;

e) $\dfrac{10}{3}$;

f) nicio variantă.

CAPITOLUL 10

DETERMINANŢI

1. Soluţiile reale ale ecuaţiei $\begin{vmatrix} 1 & 2-x & 2 \\ 4-x & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0$ sunt:

   a) $x \in \{\sqrt{3}, 3,\ 7\}$;
   b) $x \in \{-7,\ \sqrt{3},\ 7\}$;
   c) $x \in \{-\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 7\}$;
   d) $x \in \{-3,\ 3,\ 7\}$;
   e) $x \in \{-1,\ 3,\ 7\}$;
   f) $x \in \{1,\ 3,\ 7\}$.

2. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & m^2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$, atunci valoarea parametrului m pentru care $\det A$ este minim este:

   a) $m = 0$;
   b) $m = 1$;
   c) $m = 2$;
   d) $m \in \{-2,\ 2\}$;

e) $m = -2$;
f) $m = 4$.

3. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, atunci soluţiile ecuaţiei $\det(A - xI_2) = 0$ sunt:
a) $x \in \{-2, 2\}$;
b) $x \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$;
c) $x \in \{-1, 1\}$;
d) $x = \sqrt{2}$;
e) $x = -\sqrt{2}$;
f) $x \in \emptyset$.

4. Valorile reale ale lui x, pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & 1 & x \end{pmatrix}$ nu este inversabilă, sunt:
a) $x \in \{0, 3\}$;
b) $x \in \{-3, 0\}$;
c) $x \in \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$;
d) $x \in \left\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\right\}$;
e) $x \in \{0\}$;
f) $x \in \emptyset$.

5. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $\det(A - 2I_3)$ este:
a) -12;
b) 14;
c) -16;
d) 16;
e) -18;
f) 18.

6. Soluţiile reale ale ecuaţiei $\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 3 & 5 & 2-x \end{vmatrix} = 0$ sunt:

a) $x \in \left\{\sqrt{3},\, 8\right\}$;
b) $x \in \left\{-8,\, -\sqrt{3},\, \sqrt{3}\right\}$;
c) $x \in \left\{-\sqrt{3},\, \sqrt{3},\, 8\right\}$;
d) $x \in \left\{-\sqrt{2},\, 2,\, 8\right\}$;
e) $x \in \{-3,\, 3,\, 8\}$;
f) $x \in \{-2,\, 2,\, 8\}$.

7. Valorile reale ale lui a pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & 1-a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ este inversabilă, sunt:
a) $a = 1$;
b) $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
c) $a = 0$;
d) $a \in \{1, 2\}$;
e) $a \in \mathbb{R}$;
f) $a \in \emptyset$.

8. Valorile parametrului întreg m pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -x & 1 \\ m & 1 & 2 \\ x & -1 & x \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, sunt:
a) $m = 3$;
b) $m = 2$;
c) $m \in \{2, 3\}$;
d) $m \in \{3, 4, 5\}$;
e) $m = 4$;
f) nu există m întreg.

9. Soluţiile reale ale ecuaţiei $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ sunt:
a) $x = 0$;
b) $x = 1$;
c) $x \in \{0,\, 1\}$;

d) $x = 2$;
e) $x = -1$;
f) $x \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$.

10. Soluţiile reale ale ecuaţiei $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & x^2 & 1 \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ sunt:

a) $x = 0$;
b) $x = 1$;
c) $x \in \{0, 1\}$;
d) $x = 2$;
e) $x = -1$;
f) $x \in \{-1, 1\}$.

11. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Valoarea $\det(A^n)$ este:

a) 27^n;
b) 0;
c) 1;
d) 2^n;
e) 7^n;
f) 3^n.

12. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Valoarea $\det(A^n)$ este:

a) 27^n;
b) 36^n;
c) 0;
d) 1;
e) 6^n;
f) 8^n.

13. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Valoarea $\det(A^n)$ este:

a) 27^n;

b) 36^n;

c) 0;
d) 1;
e) n;

f) 12^n.

14. Suma elementelor inversei matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ este:

a) 12;
b) 24;
c) 0;

d) $\frac{1}{2}$;

e) $\frac{5}{2}$;

f) $\frac{7}{2}$.

15. Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ este:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{7}{18} & \frac{-5}{18} \\ \frac{-5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} \end{pmatrix}$;

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{2}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{2}{18} \end{pmatrix}$;

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{7}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} \end{pmatrix}$;

d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{11}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & \frac{11}{8} \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}$;

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$;

f) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{11}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{11}{8} \\ \frac{11}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.

16. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$=0 este:

a) $\left\{1,\ \frac{1}{2},\ 2\right\}$;
b) $\{-1,\ 0,\ 1\}$;
c) $\{2,\ 3,\ 6\}$;
d) $\{-2,\ 3,\ 5\}$;
e) $\left\{-1,\ \frac{1-i\sqrt{2}}{2},\ \frac{1+i\sqrt{2}}{2}\right\}$;
f) $\left\{2,\ \frac{1-i\sqrt{7}}{2},\ \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right\}$.

17. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$=0 este:

a) $\{-1, 2, 2\}$;
b) $\{1, 2, 4\}$;
c) $\{-1, 0, 3\}$;
d) $\emptyset$;
e) $\{0, 1, 4\}$;
f) $\{1, 2, 3\}$.

18. Fie $m \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia $x^3 + mx^2 + mx + 4 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 şi x_3. Fie determinantul $D(m) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ cu proprietatea: $D(m) = 0$ este:

a) $\{-1,\ 2,\ 4\}$;
b) $\{0,\ 3\}$;
c) $\{-1,\ 3\}$;
d) $\{-1,\ 2\}$;
e) $\mathbb{R}$;
f) $\emptyset$.

19. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Valoarea $\operatorname{rang}(A)$ este:
   a) 2;
   b) 3;
   c) 1;
   d) $\dfrac{1}{2}$;
   e) 4;
   f) 0.

20. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Valoarea $\operatorname{rang}(A)$ este:
   a) 4;
   b) 3;
   c) 1;
   d) 2;
   e) 0;
   f) 5.

21. Dacă a şi b sunt numere reale astfel încât $ab = 1$, atunci valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a-b & a & b \\ a & b & a-b \\ b & a-b & a \end{vmatrix}$ este:
   a) 0;
   b) $4a - 6b - 2a^3 - 2b^3$;
   c) $5a - 5b - a^3 - b^3$;
   d) $6a - 6b - 2a^3$;
   e) $a^3 - b^3$;
   f) $3a^3 - 2b^3$.

22. Dacă a şi b sunt numere reale astfel încât $ab = -1$, atunci valoarea determinantului $\begin{vmatrix} a & a+b & b \\ a+b & b & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix}$ este:
   a) $-a^2 - b^2$;

b) $-2a^3-2b^3$;

c) $5a-5b-a^3-b^3$;

d) $2a^3-b^3$;

e) a^3-b^3;

f) $3a^3-2b^3$.

23. Valorile lui $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ 4 & x+1 \end{vmatrix} = 14$ sunt:

a) $x\in\{-2,\ 5\}$;

b) $x\in\{-5,\ -2\}$;

c) $x\in\{-2,\ 2\}$;

d) $x\in\emptyset$;

e) $x\in\{-2,0\}$;

f) $x\in\{1,5\}$.

24. Valorile lui $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} = -2$ sunt:

a) $x\in\{1,\ 2\}$;

b) $x\in\{-1,\ 2\}$;

c) $x\in\left\{\dfrac{3-\sqrt{17}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$;

d) $x\in\emptyset$;

e) $x\in\{-2,\ 1\}$;

f) $x\in\{1,\ 3\}$.

25. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x & 1 \\ \sin x & \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ este:

a) 1;

b) $\cos 2x$;

c) $\sin 2x$;

d) 0;

e) -1;

f) $\sin x+\cos x$.

26. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ este:

    a) 1;
    b) $\cos 2x$;
    c) $\sin 2x$;
    d) 0;
    e) -1;
    f) $\sin x + \cos x$.

27. Valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $A(1,1)$, $B(-1,x)$ şi $C(-x,1)$ sunt coliniare sunt:
    a) $x \in \{-1,1\}$;
    b) $x \in \{0,1\}$;
    c) $x \in \emptyset$;
    d) $x \in \{-1,0\}$;
    e) $x \in \{-2,2\}$;
    f) $x \in \mathbb{R}$.

28. Valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $A(-1,1)$, $B(0,x)$ şi $C(x,1)$ sunt coliniare sunt:
    a) $x \in \{-1,1\}$;
    b) $x \in \{0,1\}$;
    c) $x \in \emptyset$;
    d) $x \in \{-1,0\}$;
    e) $x \in \{-2,2\}$;
    f) $x \in \mathbb{R}$.

29. Dacă x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$, atunci valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este:
    a) -5;
    b) -9;
    c) 0;

d) 8;
e) -1;
f) -3.

30. Dacă x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3-4x^2+4x=0$, atunci valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este:
a) -16;
b) -9;
c) 10;
d) -8;
e) -2;
f) 0.

31. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2x & -3 & 1 \\ 2x+1 & 1 & -2 \\ 2x-4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 16 & x+2 \end{pmatrix}$.
Valoarea reală a lui x pentru care are loc relaţia $\det A + 8 = \det(B^t)$ este în mulţimea:
a) $\{-4, 0\}$;
b) $\{0\}$;
c) $\{-4\}$;
d) $\{0, 4\}$;
e) $\{-4, 4\}$;
f) nicio variantă.

32. Fie a şi b rădăcinile reale ale ecuaţiei $x^2-4x+1=0$ şi $D = \begin{vmatrix} a & b \\ 2a+1 & 6b-1 \end{vmatrix}$.
Atunci D este:
a) 1;
b) a;
c) b;
d) 0;
e) $a+b$;

f) nicio variantă.

33. Se consideră ecuaţia $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ x+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 44 = \begin{vmatrix} 4 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Atunci soluţia reală a ecuaţiei este:

a) -6;

b) 7;

c) -7;

d) 6;

e) 0;

f) nicio variantă.

34. Ecuaţia $\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = 0$ admite:

a) trei rădăcini raţionale distincte;

b) două rădıacini iraţionale;

c) o rădăcină dublă;

d) o singură rădăcină reală;

e) două rădăcini raţionale distincte;

f) nicio variantă.

35. Se consideră ecuaţia $\begin{vmatrix} x^3 & 1 & x \\ 1 & -1 & x \\ x & 1 & m \end{vmatrix} = 0$. Suma pătratelor rădăcinilor independente de parametrul real m este:

a) 2;

b) 3;

c) 1;

d) 4;

e) 9;

f) nicio variantă.

36. Ecuaţia $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & x & mx^2 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$ admite rădăcini reale strict mai mici decât -2 dacă m se află în mulţimea:

a) $\left(-\infty, -\dfrac{5}{9}\right)$;

b) $\left(-\dfrac{5}{9}, \infty\right)$;

c) $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$;

d) $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{-1}{2}\right)$;

e) $\left\{-\dfrac{5}{9}\infty\right\}$;

f) nicio variantă.

37. Dacă x_i, $i = 1, 2, 3$, sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 0$, iar $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$, atunci Δ^2 este:

a) 0;

b) -55;

c) 55;

d) 1127;

e) -2254;

f) nicio variantă.

38. Suma valorilor absolute ale parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ a & a^2 & x \end{vmatrix} = 0$ admite două rădăcini reale opuse este egală cu:

a) 0;

b) 1;

c) 2;

d) 3;

e) -1;

f) nicio variantă.

39. Dacă ε este rădăcină complexă a ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$ şi considerăm determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & -1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon+1 \end{vmatrix}$, atunci Δ^{999} este:

a) ε;
b) ε^2;
c) 1;
d) 0;
e) $-\varepsilon - 1$;
f) nicio variantă.

40. Coeficientul lui x^2 din dezvoltarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} 3x & -x & 1 & -1 \\ 1 & -2x & 2 & 1 \\ 3 & 2 & x & 4 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ este:

a) -18;
b) -10;
c) -20;
d) 1;
e) 0;
f) nicio variantă.

41. Matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 3 & x+2 & a+3 \end{pmatrix}$ este inversabilă, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, dacă parametrul real a se află în mulţimea:

a) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$;

b) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$;
c) $\emptyset$;
d) $[2, \infty)$;

e) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$;

f) nicio variantă.

42. Matricea $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$,unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 - x^2 - x + a = 0$, este inversabilă dacă parametrul real a se află în mulţimea:

a) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$;

b) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;

c) $\mathbb{R}^*$;

d) $\emptyset$;

e) $\mathbb{R}$;

f) nicio variantă.

43. Elementul situat în A^{-1} pe linia 3 şi coloana 2, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, are valoarea absolută egală cu:

a) 2;

b) $\frac{1}{4}$;

c) 1;

d) $\frac{1}{2}$;

e) 0;

f) nicio variantă.

44. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, atunci $(I_3 + aA)$ este nesingulară dacă a este:

a) diferit de $\left(-\frac{1}{3}\right)$;

b) $-\frac{1}{3}$;

c) 0;

d) 1;
e) 0 sau 1;
f) nicio variantă.

45. Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A = A^{-1}$, atunci valoarea determinantului este:
a) -1;
b) 1;
c) ± 1;
d) diferit de 0;
e) 0;
f) nicio variantă.

46. Dacă $A = \begin{pmatrix} x^3 & 1 & z^2 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & 1 & y^3 \end{pmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{C}$, atunci numărul tripletelor (x, y, z) pentru care $rangA = 1$ este egal cu:
a) 1;
b) 0;
c) 3;
d) 6;
e) 9;
f) 2.

47. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dacă $rangA = 2$, atunci $\alpha + \beta$ este:
a) 3;
b) 2;
c) -2;
d) 1;
e) 0;
f) nicio variantă.

48. Rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & a & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2a & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 1 \end{pmatrix}$ este maxim dacă a se află în mulţimea:
a) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$;
b) $\mathbb{R}^*$;
c) $\{3\}$;
d) $\mathbb{R} \setminus \{4\}$;
e) $\{4\}$;
f) nicio variantă.

49. Fie mulţimea $M = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, A \text{ inversabilă şi } A^{-1} = A^T \right\}$. Atunci M are:
a) 2;
b) 4;
c) 6;
d) 8;
e) o infinitate;
f) nicio variantă.

50. Dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ inversabilă astfel încât $A + A^{-1} = 2I_3$, atunci:
a) $A = 3I_3$;
b) $A^3 + A^{-3} = 2I_3$;
c) $A = -A$;
d) $A^2 + A^{-2} = 4I_3$;
e) $A = A^2 + 3I_3$;
f) nicio variantă.

CAPITOLUL 11

SISTEME LINIARE

1. Soluţiile reale ale sistemului $\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 4x+y-3z=11 \\ 3x-2y+5z=21 \end{cases}$. sunt :

   a) $(-4,\ -2,\ -1)$;
   b) $(-4,\ 2, -1)$;
   c) $(4,\ 2,\ 1)$;
   d) $(-4,\ -2,\ 1)$;
   e) $(4,\ -2,\ 1)$;
   f) $(4,\ -2,\ -1)$.

2. Valorile lui parametrului $a \in \mathbb{R}$, pentru care sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=a \end{cases}$

   are soluţie unică, sunt:
   a) $a=-2$;
   b) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$;
   c) $a=1$;

d) $a \in \{-2, 1\}$;
e) $a \in (-2,\ 1)$;
f) $a \in \emptyset$.

3. Suma S a valorilor reale ale lui a, pentru care sistemul $\begin{cases} 3x + y - z = ax \\ -x + y + z = ay \\ 2x + 4y + z = az \end{cases}$.
admite soluţii diferite de cea banală, este:
a) 0;
b) 3;
c) 5;
d) 7;
e) 9;
f) 10.

4. Dacă (x, y, z) este soluţia sistemului $\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ z + x = 1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$, atunci (x, y, z) este:

a) $\left(\dfrac{1}{1+a^2}, \dfrac{a^2}{1+a^2}, \dfrac{a}{1+a^2}\right)$;

b) $\left(\dfrac{a^2}{1+a^2}, \dfrac{a}{1+a^2}, \dfrac{1}{1+a^2}\right)$;

c) $\left(\dfrac{a}{1+a^2}, \dfrac{1}{1+a^2}, \dfrac{a^2}{1+a^2}\right)$;

d) $\left(\dfrac{a}{1+a^2}, \dfrac{a}{1+a^2}, \dfrac{a}{1+a^2}\right)$;

e) $\left(\dfrac{1}{1+a^2}, \dfrac{a}{1+a^2}, \dfrac{a^2}{1+a^2}\right)$;

f) $\left(\dfrac{1}{1+a^2}, \dfrac{1}{1+a^2}, \dfrac{1}{1+a^2}\right)$.

5. Valorile parametrului real m, pentru care sistemul $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x-y+mz=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$ admite soluţii nenule, sunt:
a) $m=0$;
b) $m=1$;
c) $m=2$;
d) $m=3$;
e) $m=4$;
f) $m=5$.

6. Valorile parametrilor reali m şi n, pentru care sistemul $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x-y+z=m \\ nx+y-2z=4 \end{cases}$ admite soluţia $(2,\ 2,\ 1)$, sunt:
a) $m=3$, $n=3$;
b) $m=-3$, $n=2$;
c) $m=3$, $n=-2$;
d) $m=-3$, $n=-2$;
e) $m=3$, $n=2$;
f) $m=2$, $n=3$.

7. Valorile lui parametrului $m\in\mathbb{R}$, pentru care sistemul $\begin{cases} x+y+mz=-m \\ x+my+z=m+1 \\ mx+y+z=m+1 \end{cases}$ are soluţie unică, sunt:
a) $m=-2$;
b) $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$;
c) $m=1$;
d) $m\in\{-2,1\}$;
e) $m\in(-2,\ 1)$;
f) $m\in\emptyset$.

8. Dacă (x, y, z) este soluţia sistemului $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ y - 3z = -1 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$, atunci (x, y, z) este:

a) $\left(\frac{-34}{7}, \frac{-40}{7}, \frac{-11}{7}\right)$;

b) $\left(\frac{10}{7}, \frac{-40}{7}, \frac{11}{7}\right)$;

c) $\left(\frac{10}{7}, \frac{40}{7}, \frac{-11}{7}\right)$;

d) $\left(\frac{-10}{7}, \frac{40}{7}, \frac{-11}{7}\right)$;

e) $\left(\frac{34}{7}, \frac{-40}{7}, \frac{-11}{7}\right)$;

f) $\left(\frac{10}{7}, \frac{-40}{7}, \frac{-11}{7}\right)$.

9. Dacă (x, y, z) este soluţia sistemului $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$, atunci $x + y + z$ este:

a) 1;

b) 2;

c) 3;

d) -1;

e) -2;

f) -3.

10. Dacă (x, y, z) este soluţia sistemului $\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = -7 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$, atunci $x + y + z$ este:

a) 0;

b) 1;

c) 2;
d) 3;
e) 4;
f) 5.

11. Valoarea parametrului real m, pentru care sistemul $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 1 \\ 5x + 4y = m \end{cases}$ este compatibil, este:

a) $\frac{-2}{3}$;
b) $\frac{1}{3}$;
c) 0;
d) 1;
e) -1;
f) $m \in \emptyset$.

12. Suma soluţiilor sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9 \\ 4x + 2y + 3z = 9 \\ 3x + 4y + 2z = 9 \end{cases}$ este:

a) 3;
b) 4;
c) -5;
d) 2;
e) 0;
f) -7.

13. Produsul soluţiilor sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 12 \\ 4x + 5y + 3z = 12 \\ 3x + 4y + 5z = 12 \end{cases}$ este:

a) 3;
b) 1;
c) 2;
d) 4;

e) 0;

f) -3.

14. Mulţimea soluţiilor sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \\ -x - y + 2z = 3 \end{cases}$ este:

a) $\{-1,\ 2,\ 3\}$;

b) $\{-2,\ 3,\ 11\}$;

c) $\emptyset$;

d) $\{2,\ 12,\ 31\}$;

e) $\{-4, -2,\ 1\}$;

f) $\{2,\ 2,\ 3\}$.

15. Mulţimea soluţiilor sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ -x + 2y + z = 2 \\ x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$ este:

a) $\{1,\ 1,\ 1\}$;

b) $\{1,\ 2,\ 3\}$;

c) $\{0,\ 1,\ 2\}$;

d) $\emptyset$;

e) $\{-1,\ 1,\ 2\}$;

f) $\{1,\ 2,\ 4\}$.

16. Mulţimea soluţiilor sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \\ x + y - 2z = 3 \end{cases}$ este:

a) $\left\{\frac{\alpha}{2},\ \frac{5}{2},\ \alpha\right\}$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$;

b) $\left\{\frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \alpha\right\}$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) $\left\{\frac{1}{5},\ \frac{5}{7},\ 2\alpha\right\}$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$;

d) $\emptyset$;

e) $\left\{\dfrac{4+3\alpha}{3},\ \dfrac{5+3\alpha}{3}, \alpha\right\}$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$;

f) $\left\{\dfrac{4}{3},\ \dfrac{\alpha}{3},\ \alpha\right\}$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

17. Mulţimea soluţiilor sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 2x+y+2z=5 \\ -x+2y+z=2 \\ x+3y+3z=7 \end{cases}$ este:

a) $\left\{\dfrac{\alpha+1}{2},\ \dfrac{5}{2}, \alpha\right\}$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$;

b) $\left\{\dfrac{\alpha}{5},\ \dfrac{5}{7}, \alpha\right\}$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) $\{1,\ 1,\ 1\}$;

d) $\emptyset$;

e) $\left\{\dfrac{4-3\alpha}{3},\ -2, \alpha\right\}$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$;

f) $\left\{\dfrac{8-3\alpha}{5},\ \dfrac{9-4\alpha}{5}, \alpha\right\}$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$.

18. Fie $m \in \mathbb{R}$ şi sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 2x+y+2z=5 \\ mx+2y+z=2 \\ x+3y+mz=7 \end{cases}$. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică este:

a) $\mathbb{R} \setminus \{1, 9\}$;

b) $\mathbb{R}$;

c) $\{0, 1\}$;

d) $\emptyset$;

e) $\{2, 5, 6\}$;

f) $\{-1, 2, 3\}$.

19. Fie $m \in \mathbb{R}$ şi sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 2x+y+2z=2 \\ mx+2y+z=-3 \\ x+3y+mz=4 \end{cases}$. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil este:

a) $\mathbb{R} \setminus \{1, 9\}$;
b) $\{1,\ 9\}$;
c) $\mathbb{R}$;
d) $\emptyset$;
e) $\{2,\ 3,\ 10\}$;
f) $\{-2,\ 2,\ 3\}$.

20. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ mx + 2y + z = -3 \\ x + 3y + mz = 4 \end{cases}$
este compatibil nedeterminat este:
a) $\mathbb{R} \setminus \{1,\ 9\}$;
b) $\{1,\ 9\}$;
c) $\emptyset$;
d) $\{-1,\ 7\}$;
e) $\mathbb{R}$;
f) $\{2,\ 4,\ 5\}$.

21. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ mx + 2y + z = 1 \\ x + 3y + z = \dfrac{4}{3} \end{cases}$
este compatibil simplu nedeterminat este:
a) $\mathbb{R} \setminus \{9\}$;
b) $\{9\}$;
c) $\emptyset$;
d) $\{1\}$;
e) $\mathbb{R}$;
f) $\{-1,\ 1\}$.

22. Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} x + 2y + az = -1 \\ x + ay - z = -a - 1 \\ ax + y + z = a + 1 \end{cases}$
admite soluţie unică este:

a) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$;
b) $\{1\}$;
c) $\{-1, 1\}$;
d) $\{-1\}$;
e) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$;
f) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

23. Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} x + ay + z = -1 \\ 2x - y + 2az = 3 \\ 2ax - y - 2z = 0 \end{cases}$ admite soluţie unică este:
a) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$;
b) $\mathbb{R}^*$;
c) $\left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$;
d) $\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$;
e) $\{\sqrt{2}\}$;
f) $\{0\}$.

24. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi sistemul liniar $\begin{cases} 2x + y - 2z = 2 \\ ax + y - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 2b \end{cases}$. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat pentru:
a) $a \neq 1$ şi $b \neq 0$;
b) $a \neq 1$ şi $b \neq 3$;
c) $a = 1$ şi $b = 3$;
d) $a, b \in \mathbb{R}$;
e) $a = -1$ şi $b = 3$;
f) $a \neq 1$ şi $b = 3$.

25. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi sistemul liniar $\begin{cases} ax - 3y - z = 1 \\ x + y + z = b \\ 2ax + y + 3z = -3 \end{cases}$. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat pentru:

a) $a \neq 4$ şi $b \neq -1$;
b) $a \neq -1$ şi $b \neq -4$;
c) $a = -1$ şi $b = 4$;
d) $a = 4$ şi $b = -1$;
e) $a, b \in \mathbb{R}$;
f) $a \neq 4$ şi $b = -1$.

26. Dacă (x, y, z) este o soluţie a sistemului $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 2 \\ x - 2y + z = 0 \\ y - z = 3 \end{cases}$, atunci $x^2 + y^2 + +z^2$ este:
a) $\mathbb{R}$;
b) 90;
c) 92;
d) 93;
e) $3a^2$, $a \in \mathbb{R}$;
f) 100.

27. Dacă (x, y, z) este o soluţie a sistemului $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ x - y - 2z = 2 \end{cases}$, atunci $x^2 + y^2 + z^2$ este:
a) a^2, $a \in \mathbb{R}$;
b) $\mathbb{R}$;
c) 2;
d) 0;
e) 1;
f) $4a^2$, $a \in \mathbb{R}$.

28. Dacă (x, y, z) este o soluţie a sistemului $\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ -2x - 4y + 2z = 2 \end{cases}$, atunci $x + y + z$ este:
a) $2c - b$, $b, c \in \mathbb{R}$;
b) $\mathbb{R}$;

c) 0;
d) $3a-2,\ a\in\mathbb{R}$;
e) $1-b-c,\ b,c\in\mathbb{R}$;
f) $2c-b-1,\ b,c\in\mathbb{R}$.

29. Dacă (x,y,z) este o soluţie a sistemului $\begin{cases} x+3y-2z=-1 \\ 2x+6y-4z=-2 \end{cases}$, atunci $x-y+z$ este:
a) $-1-3b+2c,\ b,c\in\mathbb{R}$
b) $\emptyset$;
c) $\mathbb{R}$;
d) $3b-2c,\ b,c\in\mathbb{R}$;
e) $1+3a,\ a\in\mathbb{R}$;
f) $3c-2b-1,\ b,c\in\mathbb{R}$.

30. Fie sistemul liniar $\begin{cases} x+2y-2z+t=-1 \\ 2x+4y-4z+2t=-2 \end{cases}$. Următoarea afirmaţie este adevărată:
a) Sistemul este incompatibil;
b) Sistemul este de tip Cramer;
c) Sistemul este compatibil determinat;
d) Sistemul este compatibil simplu nedeterminat;
e) Sistemul este compatibil dublu nedeterminat;
f) Sistemul este compatibil triplu nedeterminat.

31. Fie sistemul liniar $\begin{cases} x+2y-2z+t=-1 \\ 2x-4y-4z+2t=-2 \end{cases}$. Următoarea afirmaţie este adevărată:
a) Sistemul este incompatibil;
b) Sistemul este de tip Cramer;
c) Sistemul este compatibil determinat;
d) Sistemul este compatibil simplu nedeterminat;
e) Sistemul este compatibil dublu nedeterminat;
f) Sistemul este compatibil triplu nedeterminat.

32. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} ax + y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ (2a-1)\,x + 2y + z = b \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sistemul este incompatibil dacă:

a) $a + b \neq 3$;

b) $a + b \neq 1$;

c) $a + b = -1$;

d) $a + b \neq 0$;

e) $a + b \neq 6$;

f) nicio variantă.

33. Sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 2x - y + az = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x + 4y + (a+2)\,z = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$, admite şi soluţii diferite de soluţia banală dacă parametrul a se află în mulţimea:

a) $\{-7\}$;

b) $\{7\}$;

c) $\mathbb{R} \setminus \{-7, 4\}$;

d) $\{-7, 7\}$;

e) $\mathbb{R} \setminus \{-7\}$;

f) nicio variantă.

34. Sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} ax - 2y + 3z = 1 \\ x - 2ay + 3z = a \\ x - 2y + 3az = a^2 \end{cases}$ nu admite soluţii reale dacă:

a) $a = -2$;

b) $a = 1$;

c) $a \neq -2$;

d) $a \neq 1$;

e) $a = -2$ sau $a = 1$;

f) nicio variantă.

35. Sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=2-a \\ x+y+az=3a+1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$ admite o infinitate de soluţii reale dacă:

a) $a=-2$;
b) $a=1$;
c) $a=-2$ sau $a=1$;
d) $a \neq 2$;
e) $a \neq 1$;
f) nicio variantă.

36. Sistemul de ecuaţii liniare: $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 3x+2ay=4 \\ ax-y=3 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$, admite mai multe soluţii reale dacă:

a) $a=1$;
b) $a=-1$;
c) $a=-1$ sau $a=1$;
d) $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
e) $a \neq -1$;
f) nicio variantă.

37. Suma valorilor reale ale parametrului a pentru care sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} (2a-1)\,x-ay+(a+1)\,z=a-1 \\ (a-2)\,x+(a-1)\,y+(a-2)\,z=a \\ (2a-1)\,x+(a-1)\,y+(2a-1)\,z=a \end{cases}$ nu admite nicio soluţie reală este egală cu:

a) 0;
b) -1;
c) 2;
d) 1;
e) 3;
f) nicio variantă.

38. Dacă se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y+z=e^a \\ x+y-2z=e^{2a} \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$ şi $M = \{a \in R \,|\, \bar{z} > 0\}$, unde $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ este soluţia sistemului, atunci M este:
a) $(0, \infty)$;
b) $(0, 1)$;
c) $(-\infty, 0)$;
d) $\emptyset$;
e) $(-1, 0)$;
f) nicio variantă.

39. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+2y=3y \\ 3x-y=a \\ 2x+y=b \end{cases}$. $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă sistemul este compatibil determinat, atunci $a^2 - b^2$ este egal cu:
a) -5;
b) -1;
c) 5;
d) 1;
e) 0;
f) nicio variantă.

40. Dacă sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 3x+2y+z-t=2 \\ x+ay-2z+3t=9 \\ x+4y+5z-7t=b \end{cases}$ este compatibil dublu nedeterminat, atunci între parametrii reali a şi b există relaţia:
a) $4a^2 + b + 12 = 0$;
b) $4a^2 + b + 12 = 0$;
c) $4a^2 - b + 12 = 0$;
d) $4a^2 - b - 12 = 0$;

e) $-4a^2 - b + 12 = 0$;
f) nicio variantă.

41. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x + my = 1 \\ y + mz = m \\ z + x = 1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$. Valorile parametrului real m pentru care necunoscutele sistemului formează o progresie geometrică sunt:
a) $(0, \infty)$;
b) $(1, \infty)$;
c) $\mathbb{R}$;
d) $\mathbb{R}^*$;
e) $(-\infty, 0)$;
f) nicio variantă.

42. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 1 \\ 2x - z = m \end{cases}$. Cea mai mică valoare naturală m pentru care soluţia sistemului este formată din trei numere naturale este:
a) 0;
b) 1;
c) 10;
d) 15;
e) 5;
f) nicio variantă.

43. Se consideră sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \neq b \neq c$. Soluţia sistemului este:
a) $(abc, (ab + bc + ac), (a + b + c))$;
b) $(abc, -(ab + bc + ac), (a + b + c))$;

c) $(-abc, (ab+bc+ac), (a+b+c))$;
d) $(abc, (ab+bc+a), -(a+b+c))$;
e) $(abc, -(ab+bc+ac), -(a+b+c))$;
f) nicio variantă.

44. Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+(a^2-a-1)\,y+(a+1)\,z=2 \\ 2x+(a^2-a-2)\,y+2\,(a+1)\,z=3 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$ ce admite soluţia $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. Atunci următoarele numere sunt în progresie aritmetică:
a) $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$;
b) $\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$, $\bar{x}-\bar{y}$, $1-\frac{1}{\bar{y}}$;
c) $\bar{x}$, $\frac{\bar{y}}{\bar{z}}$, $\bar{z}+1$;
d) $\frac{1}{\bar{x}}$, $\frac{1}{\bar{y}}$, $\frac{1}{\bar{z}}$;
e) $\frac{1}{\bar{x}}$, $\bar{y}$, $\frac{1}{\bar{z}}$;
f) nicio variantă.

45. Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+4z=m \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$. Sistemul admite soluţia $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ astfel încât $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ să fie în progresie aritmetică dacă m are valoarea:
a) $-\frac{4}{3}$;
b) $\frac{4}{3}$;
c) $\frac{3}{4}$;
d) $-\frac{3}{4}$;
e) 1;
f) nicio variantă.

46. Considerăm sistemul de ecuaţii liniare $x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = \frac{x_4}{4} = \cdots = \frac{x_n}{n}$. Dacă $\sum_{k=1}^{n} kx_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ şi $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x_k^2 = -210$, atunci n este egal cu:

a) $n = 10$;

b) $n = 14$;

c) $n = 20$;

d) $n = 24$;

e) $n = 12$;

f) nicio variantă.

CAPITOLUL 12

LIMITE DE FUNCŢII

1. Valoarea limitei $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}$ este:
   a) 1;
   b) $\dfrac{4}{5}$;
   c) $\dfrac{4}{3}$;
   d) $\dfrac{5}{4}$;
   e) $\dfrac{3}{4}$;
   f) $\dfrac{2}{3}$.

2. Valoarea limitei $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x - x^2}}{x}$ este:
   a) $\dfrac{1}{2}$;
   b) $\dfrac{4}{5}$;
   c) $\dfrac{4}{3}$;

d) 0;

e) $\dfrac{3}{4}$;

f) $\dfrac{2}{3}$.

3. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x + \cos x}{x^2}$ este:
a) 1;
b) -1;
c) 2;
d) 0;
e) $\dfrac{1}{2}$;
f) limita nu există.

4. Dacă $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$, atunci asimptotele la graficul funcţiei sunt:
a) $x = 1$;
b) $y = x + 3$;
c) $x = 1$ şi $y = x - 3$;
d) $x = 1$ şi $y = 3$;
e) $x = 1$ şi $y = x + 3$;
f) $x = 1$ şi $y = x$.

5. Valorile parametrilor reali a şi b pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x+2} - ax\right) = 3 + b$, sunt:
a) $a = 1$, $b = -2$;
b) $a = 1$, $b = 4$;
c) $a = 1$, $b = -4$;
d) $a = -2$, $b = -4$;
e) $a = -2$, $b = 4$;
f) $a = 0$, $b = -2$.

6. Valoarea parametrului real m, pentru care $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}+mx}{x} = 3$, este:
a) $m = 1$;

b) $m = 2$;

c) $m = 3$;

d) $m = \frac{1}{2}$;

e) $m = \frac{1}{3}$;

f) $m = \frac{2}{3}$.

7. Valoarea parametrului real m pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} mx^2 - (m-1)x + 5, \ x > -8 \\ -\sqrt[3]{x} + 1, \ x \leq -8 \end{cases}$ are limită în punctul $x_0 = -8$, este:

a) $m = \frac{5}{37}$;

b) $m = \frac{5}{73}$;

c) $m = \frac{16}{3}$;

d) $m = \frac{6}{7}$;

e) $m = \frac{16}{73}$;

f) $m = \frac{1}{12}$.

8. Valorile parametrilor reali a şi b pentru care $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b\right) = 0$, sunt:

a) $a = 1, \ b = -2$;

b) $a = 1, \ b = -\frac{1}{2}$;

c) $a = -1, \ b = -\frac{1}{2}$;

d) $a = -1, \ b = \frac{1}{2}$;

e) $a = -1, \ b = -2$;

f) $a = 0, \ b = -2$.

9. Valoarea parametrului real a, pentru care $\lim\limits_{x \to 3} \left(\log_3 \sqrt[3]{x + a}\right) = 2$, este:

a) $m = 176$;

b) $a = 721$;

c) $a = 21$;
d) $a = 726$;
e) $a = 762$;
f) $a = 26$.

10. Valorile parametrilor reali şi nenuli a şi b pentru care graficul funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^2 + 2a + bx}{x - 1}$, admite ca asimptotă dreapta de ecuaţie $y = a^2x + 2$, sunt:
a) $a = 1$, $b = 1$;
b) $a = 1$, $b = -1$;
c) $a = -1$, $b = 1$;
d) $a = 2$, $b = 1$;
e) $a = 1$, $b = 2$;
f) $a = -1$, $b = -1$.

11. Fie $m \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - mx + m}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia nu are asimptote verticale este:
a) $(0,\ 4)$;
b) $(-2,\ 2)$;
c) $(-4,\ 4)$;
d) $(0,\ 2)$;
e) $\{0,\ 1\}$;
f) $\{2,\ 3\}$.

12. Fie $m \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - mx + m}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia are o singur asimptotă verticală este:
a) $(0,\ 4)$;
b) $\{0,\ 4\}$;
c) $\{0,\ 1,\ 3\}$;
d) $\{0,\ 1\}$;
e) $\{1,\ 2,\ 3\}$;
f) $\{1,\ 2\}$.

13. Fie $m \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - mx + m}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia are două asimptote verticale este:
a) $(0,\ 4)$;
b) $\{0,\ 4\}$;
c) $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$;
d) $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$;
e) $\{0,\ 1\}$;
f) $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$.

14. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x < 0 \\ \dfrac{x}{1 + x^2}, x \geq 0 \end{cases}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei sunt:
a) $x = 0,\ x = 1$;
b) $x = 1$;
c) $x = 2$;
d) $y = 1,\ y = 0$;
e) $y = 2$;
f) $y = 0,\ x = 1$.

15. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ \dfrac{x}{1 + x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei sunt:
a) $x = 1$;
b) $x = 0, \quad x = 1$;
c) $x = 2,\ y = 2,\ x = 4$;
d) $y = 1$;
e) $y = 1, \quad y = 0,\ x = 0$;
f) $x = -1, \quad y = 2, \quad y = 3$.

16. Valoarea limitei: $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2}$ este:
a) 3;
b) -5;
c) 1;

d) 0;

e) 2;

f) 7.

17. Fie $n \in \mathbb{N}$. Valoarea limitei $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot \dots \cdot \cos nx}{x^2}$ este:

a) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$;

b) 0;

c) n;

d) $-\infty$;

e) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$;

f) $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

18. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{m}{x^2}} = e^{-2}$ este:

a) $\{1,\ 2\}$;

b) $\{12\}$;

c) $\mathbb{R}$;

d) $\emptyset$;

e) $\{-1,\ 2\}$;

f) $\{1\}$.

19. Valorilor coeficienţilor $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - x = 2$ sunt:

a) $a = -1,\ b = 0,\ c = 1$;

b) $a = -1,\ b = 0,\ c = -1$;

c) $a = 1,\ b = 4,\ c \in \mathbb{R}$;

d) $a = 0,\ b = 0,\ c = 0$;

e) $a \in \mathbb{R},\ b = 4,\ c = 1$;

f) $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$.

20. Valorilor coeficienţilor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d} - x - 2 = 3$ sunt:

a) $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$;

b) $a = 1$, $b = 4$, $c \in \mathbb{R}$;

c) $a = 1$, $b = -4$, $c \in \mathbb{R}$;

d) $a = 1$, $b = 15$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$;

e) $a \in \mathbb{R}$, $b = 4$, $c = 1$;

f) $a = 3$, $b \in \mathbb{R}$, $c = 1$.

21. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 1$. Atunci:

a) $a = 0,\ b = 1$;

b) $a = 1,\ b = -2$;

c) $a = b = 1$;

d) $a = 1,\ b = 0$;

e) $a = -1,\ b = -2$;

f) $a = b = -2$.

22. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \mathrm{tg} x)^{\frac{1}{2x}}$ este:

a) e;

b) 1;

c) e^2;

d) $\sqrt{e}$;

e) 0;

f) $e^{\sqrt{2}}$.

23. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-2x+1})$ este:

a) $-\dfrac{1}{2}$;

b) $\dfrac{1}{2}$;

c) nu există;

d) ∞;

e) $-\infty$;

f) 0.

24. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ este:

a) 0 ;

b) ∞ ;

c) $-\infty$;
d) 1;
e) -1 ;
f) nu există.

25. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\ln(1+\sin 3x)}$ este:
a) nu există;
b) 0 ;
c) 1 ;
d) -1 ;
e) $\dfrac{2}{3}$;
f) $\dfrac{3}{2}$.

26. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{2x^3+3x+2}{x^2+1}$ are ca asimptotă oblică dreapta:
a) nu are asimptote oblice;
b) $y=x$;
c) $y=2x$;
d) $y=2x+3$;
e) $y=-x+1$;
f) $y=3x$.

27. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{3x^4-2x^3+3x-5}{5x^4+5x^2-3x+1}$ are asimptotele orizontale date de dreptele:
a) $y=\dfrac{3}{5}$;
b) $y=\dfrac{3}{5}$ şi $y=-\dfrac{3}{5}$;
c) nu are asimptote orizontale;
d) $y=-\dfrac{3}{5}$;
e) $y=1$;
f) $y=0$.

28. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}(2+\sin 2x)e^{-x}$ este:

a) 1 ;

b) nu există;

c) $\frac{1}{e}$;

d) 0;

e) ∞;

f) e.

29. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}(3-\sin 2x)5^x$ este:

a) nu există;

b) ∞ ;

c) $-\infty$;

d) 0 ;

e) 3 ;

f) 5.

30. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^5-3}\sin^2(3x)$ este:

a) 0;

b) nu există;

c) ∞ ;

d) 2 ;

e) $\frac{2}{3}$;

f) $\frac{3}{2}$.

31. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x+a}-b}{x^2+x-2}=\frac{5}{18}$ dacă valorile parametrilor reali a şi b sunt egale cu:

a) $-3;-5$;

b) $3;-5$;

c) $5;3$;

d) $-5;-3$;

e) $2;1$;

f) $-2;-1$.

32. Valoarea limitei: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-ax^2}-bx+2\right)=1$ dacă parametrii reali a şi b sunt:
a) $12; 2$;
b) $10; 2$;
c) $12; 4$;
d) $-10; 2$;
e) $8; 6$;
f) $6; 10$.

33. $l=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2^x+3^x+4^x}{3}\right]^{\frac{1}{x}}$ este:
a) $\sqrt{24}$;
b) 24;
c) $\sqrt[3]{24}$;
d) 1;
e) $\sqrt{2}$;
f) $\sqrt{e}$.

34. $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$ are valoarea:
a) -1;
b) $\dfrac{1}{2}$;
c) 1;
d) 2;
e) $\dfrac{3}{2}$;
f) 3.

35. $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$ este egală cu:
a) ∞;
b) $-\infty$;
c) 0;
d) 1;
e) $\dfrac{1}{2}$;

f) 2.

36. $l = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ are valoarea:

a) $-\infty$;

b) ∞;

c) 0;

d) 1;

e) -1;

f) nu există limita.

37. $l = \lim_{x\to 0} (1 - x\sin x)^{\dfrac{1}{x^2}}$ este:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$;

b) $\sqrt{e}$;

c) $\dfrac{1}{e}$;

d) e;

e) 0;

f) $\dfrac{2}{e}$.

38. $l = \lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{1 - \dfrac{x^3}{\pi^3}}$ este egal cu:

a) $\dfrac{1}{3}$;

b) $\dfrac{\pi}{3}$;

c) $\dfrac{3}{\pi}$;

d) 0;

e) $\dfrac{1}{\pi}$;

f) π.

39. $l = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}}$ are valoarea reală egală cu:

a) $-\infty$;

b) ∞;

c) 0;

d) -1;

e) 1;

f) 2.

40. $l = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - \sin^3 x}{x^5}$ este:

a) $\dfrac{3}{2}$;

b) 3;

c) 2;

d) $\dfrac{1}{2}$;

e) $\dfrac{1}{3}$;

f) 1.

41. $l = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ este:

a) 1;

b) 0;

c) e;

d) $\dfrac{1}{e}$;

e) e^2;

f) $\dfrac{1}{e^2}$.

42. $l = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{c^x + d^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ are valoarea egală cu $(a, b, c, d > 0)$:

a) $\sqrt{\dfrac{ab}{cd}}$;

b) $\sqrt[3]{\dfrac{ab}{cd}}$;

c) $\sqrt{abcd}$;

d) $\sqrt{\dfrac{a}{bcd}}$;

e) $\sqrt{\dfrac{abc}{d}}$;

f) 1.

43. $l = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4} - \dfrac{x^2}{3x+4}\right)$ este:

a) $\dfrac{9}{4}$;

b) $\dfrac{4}{9}$;

c) $\dfrac{2}{3}$;

d) $\dfrac{3}{2}$;

e) 1;

f) ∞.

44. $l = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2} - 2 + \sqrt{x^2+1}}{x^2}$ este:

a) $\dfrac{1}{2}$;

b) 1;

c) $\dfrac{3}{2}$;

d) 0;

e) $\dfrac{2}{3}$;

f) 2.

45. $l = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3^x - 27 + \ln(x-2)}{x-3}$ este egal cu:

a) $27\ln 3$;

b) 0;

c) $\dfrac{\ln 3}{3}$;

d) $\ln 3$;

e) $27\ln 3 + 1$;

f) $3\ln 3 + 1$.

46. $l = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+2}\right)^{mx} = e^{-6}$ dacă parametrul real m este egal cu:

a) -2;

b) 5;

c) 1;

d) 3;

e) 2;

f) -1.

CAPITOLUL 13

CONTINUITATEA FUNCŢIILOR

1. Valoarea parametrului real a pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x^2+1},\ x\leq 1\\ \dfrac{2x+a}{x^2+2},\ x>1\end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, este:
   a) $a=4$;
   b) $a=3$;
   c) $a=2$;
   d) $a=1$;
   e) $a=0$;
   f) $a=-1$.

2. Valorile parametrilor reali a şi b, pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2},\ x<0\\ ax+b,\ x\in[0,\ 1]\\ \dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1},\ x>1\end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, sunt:
   a) $a=-\dfrac{5}{2},\ b=4$;

b) $a = -\frac{7}{2},\ b = 2;$

c) $a = -\frac{9}{2},\ b = 4;$

d) $a = -\frac{7}{2},\ b = 4;$

e) $a = -\frac{7}{2},\ b = 8;$

f) $a = -\frac{3}{2},\ b = \frac{1}{2}.$

3. Valoarea parametrului real a pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2e^x},\ x \leq 0 \\ 3x + a,\ x > 0 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, este:

a) $a = \sqrt{6};$

b) $a = \sqrt{5};$

c) $a = 2;$

d) $a = 1;$

e) $a = \sqrt{2};$

f) $a = \sqrt{3}.$

4. Valoarea parametrului real m pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 2x + m,\ x \leq 1 \\ m^2 x + 2,\ x > 1 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, este:

a) $m = \sqrt{2};$

b) $m \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\};$

c) $m \in \{-1, 1\};$

d) $m = 1;$

e) $m = 0;$

f) $m \in \{0, 1\}.$

5. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 - 1)}{x + 1},\ x < -1 \\ a,\ x = -1 \\ b \cdot \sqrt{x^2 + 8} - 3x^2 + 5x + 4,\ x > -1 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă:

a) $a = -2,\ b = \frac{2}{3};$

b) $a = -2,\ b = 1$;
c) $a = -2,\ b = \frac{2}{5}$;
d) $a = 2,\ b = -\frac{2}{3}$;
e) $a = -12,\ b = -3$;
f) $a = 2,\ b = 1$.

6. Intervalul de numere reale în care ecuaţia $x^3 + 4x^2 - 5 = 0$ are cel puţin o soluţie reală este:
a) $[-1, 0]$;
b) $[2, 3]$;
c) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$;
d) $[0, 2]$;
e) $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$;
f) ecuaţia nu are soluţii reale.

7. Intervalul de numere reale în care ecuaţia $x + 2^x - 2 = 0$ are cel puţin o soluţie reală este:
a) $[0, 1]$;
b) $[-1, 0]$;
c) $[-2, -1]$;
d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$;
e) $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$;
f) ecuaţia nu are soluţii reale.

8. Soluţia inecuaţiei $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} \leq 4$ este:
a) $x \in (-\infty,\ 2)$;
b) $x \in (2,\ +\infty)$;
c) $x \in \left(-\infty,\ \frac{3}{2}\right)$;
d) $x \in \left[\frac{3}{2},\ 26\right] \setminus \{2\}$;

e) $x = \dfrac{3}{2}$;

f) $x \in \emptyset$.

9. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{a^2x^2 + ax + 1}, x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} + |a|\sqrt{x}, x > 1 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă:

a) $a = -2$;

b) $a = 2$;

c) $a = 1$;

d) $a = -1$;

e) $a = -3$;

f) $a = 3$.

10. Mulţimea $M = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{(x-2)(4-2^x)}{2x-6} > 0 \right\}$ este:

a) $M = (2,\ 3)$;

b) $M = (-\infty,\ 2) \cup (2,\ 3)$;

c) $M = (-\infty,\ 2)$;

d) $M = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$;

e) $M = (3,\ +\infty)$;

f) $M = (2,\ 3) \cup (3,\ +\infty)$.

11. Fie $m \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - mx + m}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia nu are puncte de discontinuitate este:

a) $(0,\ 4)$;

b) $(-4,\ 4)$;

c) $(-1,\ 2)$;

d) $\mathbb{R}$;

e) $\emptyset$;

f) $(-\infty, 1)$.

12. Fie $m \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - mx + m}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia are un singur punct de discontinuitate este:

a) $(0,\ 4)$;
b) $\{0,\ 4\}$;
c) $\{1,\ 2,\ 3\}$;
d) $\{0,\ 1,\ 2\}$;
e) $\{0,\ 2\}$;
f) $\{2,\ 3\}$.

13. Fie $m \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - mx + m}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia are două puncte de discontinuitate este:
a) $(0,\ 4)$;
b) $\{0,\ 4\}$;
c) $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$;
d) $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$;
e) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$;
f) $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

14. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x < 0 \\ \dfrac{x}{1 + x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Numărul punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este egal cu:
a) 3;
b) 2;
c) 1;
d) 0;
e) 4;
f) 5.

15. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x < 0 \\ \dfrac{x}{1 + x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Numărul punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este egal cu:
a) 5;
b) 4;

c) 3;
d) 2;
e) 1;
f) 0.

16. Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x < -1 \\ \dfrac{ax}{1+x^2}, \ x \geq -1 \end{cases}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x = -1$ este:
a) $\{2e^{-1}\}$;
b) $\{-2, e^{-1}\}$;
c) $\{2, e^{-2}\}$;
d) $\{2, \ e^{-1}\}$;
e) $\{2e^{2}\}$;
f) $\{-2e^{-1}\}$.

17. Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0 \\ a, \ x = 0 \end{cases}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 0$ este:
a) $\{0\}$;
b) $\{0, \ 4\}$;
c) $\{4\}$;
d) $\{1, \ 4\}$;
e) $\{1\}$;
f) $\{0, \ 1\}$.

18. Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \ x \neq 0 \\ a, \ x = 0 \end{cases}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 0$ este:
a) $\{0, \ 1\}$;
b) $\emptyset$;
c) $\{0\}$;

d) $\{1\}$;
e) $\{e\}$;
f) $\mathbb{R}$.

19. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Numărul punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este egal cu:
a) 1;
b) 2;
c) 0;
d) 3;
e) 4;
f) 5.

20. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x\sqrt{2} - 1}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Numărul punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este egal cu:
a) 0;
b) 1;
c) 5;
d) 2;
e) 4;
f) 3.

21. Valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia Fie şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x + 2a, & x < 0 \\ 3b, & x = 0 \\ \dfrac{\sin(3x)}{x}, & x > 0 \end{cases}$ este continuă în $x = 0$ sunt:
a) $a = 0,\ b = 1$;
b) $a = \dfrac{3}{2},\ b = 1$;
c) $a = b = 1$;
d) $a = -1,\ b = \dfrac{1}{3}$;

e) nu există a şi b;

f) $a = b = 0$.

22. Valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3ax, & x < -1 \\ 3x + a, & x \geq -1 \end{cases}$

este continuă pe $\mathbb{R}$ este:

a) $-\dfrac{5}{2}$;

b) 0;

c) 1;

d) $\dfrac{1}{2}$;

e) $\dfrac{5}{4}$;

f) -1.

23. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} m\cos x + \sqrt{3}\sin x, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right) \\ 2\mathrm{tg}x + m\mathrm{ctg}x, & x \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ este continuă în $x = \dfrac{\pi}{6}$

este:

a) 0;

b) 1;

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $-\dfrac{1}{3}$;

e) $-\dfrac{1}{3}$;

f) $\dfrac{1}{4}$.

24. Valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5\mathrm{tg}2a(x-2)}{x-2}, & x \in [0, 2) \\ 3x^2 - 2x + 2, & x \in [2, 3] \end{cases}$ este continuă în $x = 2$ este:

a) 0;

b) -1;

c) 1;

d) 5;
e) $\dfrac{9}{10}$;
f) 2.

25. Valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} m^2x^3 - 2mx + 1, \ x < -1 \\ x^2 + mx + 3, \ x \geq -1 \end{cases}$ este continuă în $x = -1$ sunt:
a) $m \in \{1, 2\}$;
b) nu există;
c) $m = 0$;
d) $m = 1$;
e) $m \in \{-2, -1\}$;
f) $m = -1$.

26. Valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\sin x + 3a, \ x < 0 \\ 3, \ x = 0 \\ \dfrac{b\ln(1+x)}{3x}, \ x > 0 \end{cases}$ este continuă în $x = 0$ sunt:
a) $a, \ b \in \emptyset$;
b) $a = 1, \ b = 9$;
c) $a = 1, \ b = 3$;
d) $a = b = 0$;
e) $a = \dfrac{9}{2}, \ b = 1$;
f) $a = 0, \ b = 1$.

27. Valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{tg}3x}{x} + a\dfrac{\ln(1+2x)}{x}, \ x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \\ e^{2x}, \ x \in [0, \infty) \end{cases}$ este continuă în $x = 0$ este:
a) 0;
b) -1;

c) $-\frac{1}{2}$;

d) $\frac{3}{2}$;

e) $\frac{1}{2}$;

f) $-\frac{3}{2}$.

28. Valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} a3^x - e^{2x}, & x \leq 0 \\ 3\sin 3x - b\cos 2x, & x > 0 \end{cases}$ este continuă în $x = 0$ sunt:

a) $a \in \mathbb{R}$, $b = 1 - a$;

b) $a \in \mathbb{R}$, $b = a - 1$;

c) $a = b = 0$;

d) $a \in \mathbb{R}$, $b = e - a$;

e) $a \in \mathbb{R}$, $b = a - e$;

f) $a \in \mathbb{R}$, $b = 3a$.

29. Valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f(x) = \begin{cases} 5ax + 6, & x < b \\ 2a, & x = b \\ 3x + 2a, & x > b \end{cases}$ este continuă pe domeniul de definiţie sunt:

a) $a = 0,\ b = 3$;

b) $a = 3,\ b = 0$;

c) $a = b = 0$;

d) $a = -3,\ b = \frac{2}{5}$;

e) $a = 1,\ b = 2$;

f) $a = b = -1$.

30. Valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 2a\mathrm{tg}x - 3e^{2x}, & x < 0 \\ b\sin 3x - 3\cos 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ este continuă în $x = 0$ sunt:

a) $a,\ b \in \emptyset$;

b) $a = b = 0$;

c) $a,\ b \in \mathbb{R}$;
d) $a \in \mathbb{R}$, $b = 0$;
e) $a = 1$, $b = -3$;
f) $a + b = 1$.

31. Se consideră funcţia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, x \in [0,1] \\ \dfrac{a \sin(x-1)}{x^2 - 3x + 2}, x \in (1, \pi] \end{cases}$.
Funcţia f este continuă pe $[0, \pi]$ dacă parametrul a este egal cu:
a) e;
b) $-e$;
c) $-\dfrac{e}{2}$;
d) $\dfrac{e}{2}$;
e) $2e$;
f) $-2e$.

32. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt{a^2x^2 + ax + 1}, x < 1 \\ \sqrt{x-1} + |a| \sqrt{x}, x \geq 1 \end{cases}$. Atunci suma valorilor reale a pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$ este:
a) -1;
b) $\dfrac{3}{5}$;
c) $-\dfrac{2}{5}$;
d) 2;
e) $\dfrac{2}{5}$;
f) $-\dfrac{3}{5}$.

33. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + a, x \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+1} - b^2}{x}, x > 0 \end{cases}$ şi mulţimea $A = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, f \text{ este continuă pe } \mathbb{R}\}$. Atunci $\alpha = \sum\limits_{(a,b) \in A} (a^2 + b^2)$ este:

a) $\dfrac{5}{4}$;

b) $\dfrac{5}{2}$;

c) $\dfrac{5}{3}$;

d) $\dfrac{2}{5}$;

e) $\dfrac{3}{5}$;

f) $\dfrac{4}{5}$.

34. Funcţia $f:[-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2\mathrm{tg}x-\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x},\ x\in[-1,0)\\ a,\ x=0\\ 2^{\frac{1-\sqrt{1+x}}{x}},\ x>0\end{cases}$ este continuă în $x=0$ dacă:

a) $a=0$;

b) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

c) $a=1$;

d) $a=\sqrt{2}$;

e) $a\in\emptyset$;

f) $a=-1$.

35. Suma punctelor de discontinuitate ale funcţiei $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-[x]}{2x-[x]+1}$ este:

a) $\dfrac{1}{2}$;

b) 1;

c) 2;

d) 3;

e) $\dfrac{3}{2}$;

f) $\dfrac{1}{3}$.

36. Domeniul de discontinuitate al funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x + x + m, x \leq 1 \\ x^{\frac{1}{x-1}}, x > 1 \end{cases}$ este mulţimea vidă dacă parametrul real m este egal cu:
a) 0;
b) 1;
c) e;
d) $-e$;
e) -1;
f) $\dfrac{1}{e}$.

37. Continuitatea funcţiei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \left[e^x + \ln(1+x)\right]^{\frac{1}{x}}, x > 0 \\ m, x = 0 \end{cases}$ este asigurată dacă:
a) $m = -2$;
b) $m = e^2$;
c) $m = \ln \dfrac{2}{e}$;
d) $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;
e) $m = e$;
f) $m = 2 \ln e$.

38. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{|x-1| e^{nx} + \cos x}{1 + e^{nx}}$, atunci mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei f este:
a) $\mathbb{R}^*$;
b) $\mathbb{R}$;
c) $(-\infty, 0)$;
d) $(0, \infty)$;
e) $\{0\}$;
f) $[0, 1]$.

39. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^{2n} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4}$ este continuă pe:
a) $\mathbb{R}$;
b) $\mathbb{R}^*$;

c) $\mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\}$;
d) $\mathbb{R} \setminus \{-1,\ 0,\ 1\}$;
e) $\{-1,\ 0,\ 1\}$;
f) $\{0,\ 1\}$.

40. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x, x \in \mathbb{Q} \\ x^2 - 2, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, atunci mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei f coincide cu:
a) $\left\{-\sqrt{2},\ 0\right\}$;
b) $\left\{-\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2}\right\}$;
c) $\left\{0,\ 1,\ \sqrt{2}\right\}$;
d) $\left\{-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}\right\}$;
e) $\left\{\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}+1\right\}$;
f) $\{0,\ 1\}$.

41. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} ax + b, x \le 2 \\ x^2 + bx + a, x > 2 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă:
a) $a = 1,\ b = -1$;
b) $a = 3,\ b = 5$;
c) $a = b = 0$;
d) $a = b + 4$;
e) $a = b = 1$;
f) $a = -1,\ b = 1$.

42. Ecuaţia $2^x (x^2 + 1) - 3 = 0$ are o unică soluţie în intervalul
a) $(-1, 0)$;
b) $(-1, 1)$;
c) $(0, 1)$;
d) $\emptyset$;
e) $(1, \infty)$;
f) $(-\infty, -1)$.

43. Ecuaţia $x^2 - 2 \cdot 3^{-x} + 1 = 0$ are o unică soluţie reală dacă ea aparţine intervalului:

a) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$;

b) $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$;

c) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$;

d) $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$;

e) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$;

f) $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

44. Inecuaţia $\dfrac{x^3 - 3x + 2}{|x^2 - 3x + 2|} \geq 0$ are ca soluţie mulţimea:

a) $(-2, \infty)$;

b) $(-2, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$;

c) $(1, 2)$;

d) $(-2, 1) \cup (2, \infty)$;

e) $(2, \infty)$;

f) $(1, \infty) \setminus \{2\}$.

45. Soluţia inecuaţiei $(\ln x - 2)\,(4x^2 - 1) \leq 0$ este:

a) $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$;

b) (e^2, ∞);

c) $\left[\frac{1}{2}, e^2\right]$;

d) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$;

e) $(1, e^2)$;

f) nicio variantă.

CAPITOLUL 14

DERIVABILITATEA FUNCŢIILOR

1. Valorile parametrilor reali a şi b, pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases} ax^4+b, & x\le -1 \\ 2\ln(x+2), & x>-1 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ sunt:
   a) $a=-1$, $b=1$;
   b) $a=1$, $b=-1$;
   c) $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$;
   d) $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$;
   e) $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$;
   f) $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{4}$.
2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$, $a,\ b\in\mathbb{R}$. Dacă graficul functiei trece prin punctul $(1,3)$ şi tangenta la graficul funcţiei în acest punct este paralelă cu prima bisectoare, atunci valorile parametrilor reali a şi b sunt:
   a) $a=1$, $b=1$;

b) $a = -1$, $b = 3$;
c) $a = -3$, $b = 1$;
d) $a = 0$, $b = 2$;
e) $a = 2$, $b = 0$;
f) $a = -2$, $b = 4$.

3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dacă f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci $S = a^2 + b^2$ este:
a) $S = 1$;
b) $S = 2$;
c) $S = 5$;
d) $S = 8$;
e) $S = 13$;
f) $S = 18$.

4. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2 - x + 1}$. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa Oy este:
a) $y = 2x - 1$;
b) $y = 2x + 1$;
c) $y = -4x - 1$;
d) $y = -4x + 1$;
e) $y = 4x - 1$;
f) $y = 4x + 1$.

5. Fie funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x + ax^2$, $a \in \mathbb{R}$. Valoarea parametrului real a pentru care graficul funcţiei este tangent axei Ox este:
a) $a = -e$;
b) $a = -\dfrac{1}{e}$;
c) $a = -e^2$;
d) $a = -1$;
e) $a = 1$;
f) $a = e$.

6. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}(x+1)^2$, atunci $f'(0)$ este:
   a) 0;
   b) 1;
   c) 2;
   d) 3;
   e) 4;
   f) 5.

7. Valorile parametrilor reali a şi b, pentru care ecuaţia $x^3+ax^2+bx-12=0$ are rădăcina dublă $x=-2$, sunt:
   a) $a=1$, $b=-8$;
   b) $a=-1$, $b=8$;
   c) $a=2$, $b=-6$;
   d) $a=-2$, $b=6$;
   e) $a=1$, $b=8$;
   f) $a=-8$, $b=1$.

8. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+3}}$, atunci valoarea limitei $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ este:
   a) 0;
   b) 1;
   c) $\dfrac{1}{4}$;
   d) $-\dfrac{1}{4}$;
   e) -1;
   f) limita nu există.

9. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to0,\,x>0}\left(e^{\frac{-1}{x}}\ln x\right)$ este:
   a) 0;
   b) $+\infty$;
   c) $-\infty$;
   d) 1;
   e) -1;
   f) limita nu există.

10. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ este:
    a) 0;
    b) $+\infty$;
    c) $-\infty$;
    d) 1;
    e) -1;
    f) limita nu există.

11. Valorile parametrului real m pentru care funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2+mx+1}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$, sunt:
    a) $m\in(-\infty,\,2)\cup(2,\,+\infty)$;
    b) $m\in(-\infty,\,2)$;
    c) $m\in[-2,\,2]$;
    d) $m\in(-2,\,2)$;
    e) $m\in(2,\,+\infty)$;
    f) $m\in\{-2,\,2\}$.

12. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x^3+2x+5$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Valoarea $(f^{-1})'(8)$ este:
    a) $\frac{1}{5}$;
    b) 1;
    c) -1;
    d) $\frac{2}{3}$;
    e) $\frac{2}{7}$;
    f) $\frac{7}{2}$.

13. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x+\ln x$ pentru orice $x\in(0,\infty)$. Valoarea $(f^{-1})'(e+1)$ este:
    a) $\frac{1}{5}$;
    b) $\frac{e}{e+1}$;
    c) $\frac{e}{e-1}$;

d) $\dfrac{e}{3}$;

e) $\dfrac{e}{e+2}$;

f) $\dfrac{2e}{e+1}$.

14. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{1+x^2}$. Mulţimea valorilor parametrului $m\in\mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x\in\mathbb{R}$ să aibă loc egalitatea: $(1+x^2)\,f''(x)+xf'(x)=mf(x)$ este:

a) $\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$;

b) $\{1,2\}$;

c) $\{1\}$;

d) $\{2,3\}$;

e) $\{0,1\}$;

f) $\emptyset$.

15. Fie $x\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Suma $T_n(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$ este:

a) $T_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)}{3}, & x=1\\ \dfrac{nx^{n+2}+(n+1)x^{n+1}+x}{(1+x)^2}, & x\neq 1\end{cases}$;

b) $\{1\}$;

c) $T_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n(n+1)}{4}, & x=1\\ \dfrac{nx^{n+3}+(n+1)x^{n+1}-x}{(1+x)^2}, & x\neq 1\end{cases}$;

d) $T_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n(n+1)}{2}, & x=1\\ \dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}, & x\neq 1\end{cases}$;

e) $T_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n^3(n+1)}{3}, & x=1\\ \dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1+x)^3}, & x\neq 1\end{cases}$;

f) $T_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)}{2}, & x = 1 \\ \dfrac{nx^{n+3} + (n+1)x^{n+1} + x}{(1+x)^2}, & x \neq 1. \end{cases}$

16. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Valoarea sumei $S_n = \dfrac{1}{3} + 2 \cdot \dfrac{1}{3^2} + 3 \cdot \dfrac{1}{3^3} + \cdots + n \cdot \dfrac{1}{3^n}$ este:

a) $\dfrac{3^{n+1} + n}{4}$;

b) $\dfrac{3^{n+3} + n}{2}$;

c) $\dfrac{3^{n+1} + n}{3}$;

d) $\dfrac{3^{n+1} - n}{4}$;

e) $\dfrac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^n}$;

f) $\dfrac{3^{n+1} - n}{5}$.

17. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ae^x, & x < 1 \\ x^2 + bx, & x \geq 1 \end{cases}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Valorile $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia este derivabilă în punctul $x_0 = 1$ este:

a) $a \in \mathbb{R}, b = 1$;

b) $a = 1,\ b = 1$;

c) $a \in \mathbb{R}, b = 2$;

d) $a = -1,\ b = 3$;

e) $a = 0,\ b = 0$;

f) $a \in \emptyset$, $b \in \emptyset$.

18. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3, & x < 1 \\ x^2 + bx, & x \geq 1 \end{cases}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Suma valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia este derivabilă în punctul $x_0 = 1$ este:

a) 12;

b) 1;

c) 2;
d) 16;
e) 21;
f) 4.

19. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definit prin $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - mx + 1}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ este:
a) $(-3,\ 2)$;
b) $(-2,\ 2)$;
c) $\{2,\ 3\}$;
d) $\mathbb{R}$;
e) $\emptyset$;
f) $(-2,\ 2)$.

20. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - (m+1)\,x + m}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ este:
a) $(-3,\ 2)$;
b) $(-2,\ 2)$;
c) $\emptyset$;
d) $\mathbb{R}$;
e) $(-2,\ 2)$;
f) $\{1,\ 2\}$.

21. Derivata de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$ a funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$ este:
a) $2 \cdot \dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n\, n!}{(x+1)^{n+1}}$;
b) $2 \cdot \dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$;
c) $2 \cdot \dfrac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$;
d) $2 \cdot \dfrac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$;
e) $2 \cdot \dfrac{n!}{(x+2)^{n+1}} + \dfrac{n!}{(x-1)^{n+1}}$;

f) $2 \cdot \dfrac{1}{(x-2)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}$.

22. Fie $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci $f'(1)$ este:
    a) $\dfrac{5}{6}$;
    b) $\dfrac{1}{6}$;
    c) $\dfrac{1}{3}$;
    d) $\dfrac{5}{3}$;
    e) $-\dfrac{1}{6}$;
    f) $-\dfrac{5}{6}$.

23. Fie $f(x) = xe^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci $f''(1)$ este:
    a) $e + 2$;
    b) $8e^2$;
    c) $12e^2$;
    d) $3e^2$;
    e) 0;
    f) $5e^2$.

24. Fie $f(x) = x^2 + 3x + \cos^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci $f(0) + f'(0) + f''(0)$ este:
    a) 1;
    b) 2;
    c) 3;
    d) 4;
    e) 5;
    f) -1.

25. Fie $f(x) = x^2 + 3x + \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci $f(0) + f'(0) + f''(0)$ este:
    a) 1;
    b) 2;
    c) 3;
    d) 4;

e) 5;

f) -1.

26. Fie $f(x) = 2x^3 + \sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{x} + \dfrac{3}{x+2}$, $x > 0$. Atunci $f'(1)$ este:

a) $\dfrac{15}{2}$;

b $\dfrac{43}{6}$;

c) $\dfrac{47}{6}$;

d) $\dfrac{13}{6}$;

e) $\dfrac{45}{8}$;

f) 1.

27. Fie $f(x) = x^4 - \sqrt[5]{x^2} + \sqrt[3]{x} - \sqrt{x} + \dfrac{1}{2x+1}$, $x > 0$. Atunci $f'(1)$ este:

a) $\dfrac{159}{20}$;

b $\dfrac{247}{60}$;

c) $\dfrac{247}{90}$;

d) $\dfrac{232}{15}$;

e) $\dfrac{289}{90}$;

f) $\dfrac{153}{40}$.

28. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1, & x \leq 0, \\ 2ax - 3, & x > 0 \end{cases}$ şi $E(x) = 4x^2 - 3x + 1$.

Fie a_0 valoarea lui a pentru care funcţia este derivabilă în $x = 0$. Atunci $E(a_0)$ este:

a) $\dfrac{10}{9}$;

b $\dfrac{11}{2}$;

c) $\frac{29}{2}$;

d) $-\frac{23}{2}$;

e) $-\frac{29}{9}$;

f) 1.

29. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ care are proprietatea că $f''(x) = 8$, $f'(1) = 2$ şi $f(2) = -1$ este:
a) $f(x) = 4x^2 - 6x - 5$;
b) $f(x) = 4x^2 - 10x + 21$;
c) $f(x) = 8x^2 + 2x - 1$;
d) $f(x) = 16x^2 - 14x - 23$;
e) nu există o astfel de funcţie;
f) $f(x) = 4x^2 - x + 3$.

30. Parametrii reali a şi b pentru care ecuaţia $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 12 = 0$ are rădăcina dublă $x = 2$ sunt:
a) $a = -1,\ b = 3$;
b) $a = 10,\ b = 8$;
c) $a = 7,\ b = -16$;
d) $a = -7,\ b = 10$;
e) $a = b = 1$;
f) $a = -7,\ b = 16$.

31. Parametrii reali a şi b pentru care ecuaţia $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$ are rădăcina dublă $x = 1$ sunt:
a) $a = 3,\ b = -3$;
b) $a = -6,\ b = 9$;
c) $a = 6,\ b = -9$;
d) $a = -4,\ b = 8$;
e) $a = -2,\ b = 10$;
f) $a = -7,\ b = -9$.

32. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) : \begin{cases} x^4 + ax + 2, x > 0 \\ b + \ln(1 + x^2), x = 0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ dacă:
a) $a = 1,\ b = -1$;
b) $a = 2,\ b = 0$;
c) $a = 0,\ b = 2$;
d)$a = -1,\ b = 1$;
e) $a = b = 1$;
f) $a = b = -1$.

33. Punctele în care funcţia $f : (-\infty, 1] \cup [2, \infty),\ f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ nu este derivabilă aparţin mulţimii:
a) $\{0, 1\}$;
b) $\{1,\ 2\}$;
c) $\{1,\ 3\}$;
d) $\{2,\ 4\}$;
e) $\{-3,\ 5\}$;
f) $\{0,\ 1,\ 2\}$.

34. Domeniul de derivabilitate al funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+x}}, x \in (-1, 0) \\ a, x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 0) \end{cases}$ este multimea $\mathbb{R}$ dacă:
a) $a = 0$;
b) $a = 1$;
c) $a = 2$;
d) $a = 3$;
e) $a = 4$;
f) $a = -1$.

35. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, x < 0 \\ x^2 + ax + b, x \geq 0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ dacă:

a) $a = \dfrac{1}{3},\ b = 0$;

b) $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$;
c) $a = b = 1$;
d) $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$;
e) $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$;
f) $a = 0$, $b = \frac{1}{3}$.

36. Fie funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:
a) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$;
b) $f'(0) = \ln 4$;
c) $f'(0) = -2$;
d) $f'(0) = \ln 2$;
e) $f'(0) = -\ln 2$;
f) $f'(0) = -\ln 4$.

37. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $a \in \mathbb{R}^*$, şi $\alpha(a) = f'(0) + f'(1)\sqrt{a^2+1}$, atunci:
a) $\alpha(a) = \frac{a^2}{a^2+1} + \frac{1}{|a|}$;
b) $\alpha(1) = \frac{3}{4}$;
c) $\alpha(-1) = \frac{1}{2}$;
d) $\alpha(2) = \frac{4}{5}$;
e) $\alpha(-3) < 0$;
f) $\alpha(-2) = \frac{2}{5}$.

38. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x$, iar $g = f^{-1}$. Atunci, $g'(2)$ are valoarea:
a) 1;
b) $\frac{1}{6}$;
c) 0;

d) 6;

e) $\frac{1}{2}$;

f) 3.

39. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + bx + c, x < 1 \\ \operatorname{arctg}(x-1), x \geq 1 \end{cases}$.
Funcţia f este derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$ dacă:
a) $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$;
b) $a = -3$, $b = -4$, $c = 2$;
c) $a = -3$, $b = 4$, $c = 2$;
d) $a = -3$, $b = 4$, $c = -2$;
e) $a = 3$, $b = -4$, $c = -2$;
f) nicio variantă.

40. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax}{x^2 + b^2}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$. Valorile parametrilor reali a şi b pentru care G_f admite în originea O ca tangentă prima bisectoare sunt:
a) $a = b = 1$;
b) nu există;
c) $a = b^2$, $b \in \mathbb{R}^*$;
d) $a = -1$, $b \in \mathbb{R}^*$;
e) $a = b$, $b \in \mathbb{R}^*$;
f) $b = 1$, $a \in \mathbb{R}$.

41. Fie funcţiile $f(x) = ax^2 + bx + 1$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g(x) = \frac{x-1}{x}$, $g \in \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$. Graficele funcţiilor f şi g admit o tangentă comună în punctul de abscisă $x_0 = 1$, dacă:
a) $a + b + 1 = 0$;
b) $a = -1$, $b = 2$;
c) $a = 2$, $b = -3$;
d) $a = 0$, $b = 1$;
e) G_f şi G_g nu pot avea o tangentă comună;
f) $a = 1$, $b = 0$.

42. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$. Abscisele punctelor unghiulare corespunzătoare funcţiei f se află în mulţimea:
a) $\{2, 3\}$;
b) $(0,1)$;
c) $\{-2\}$;
d) $\{5\}$;
e) $\{\pm1\}$;
f) $(1,0)$.

43. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, atunci $f'(1)$ este:
a) $\dfrac{1}{2}$;
b) 1;
c) $\dfrac{1}{4}$;
d) $-\dfrac{1}{4}$;
e) 0;
f) $-\dfrac{1}{2}$.

44. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-2x+1}\sin(3\pi x)+\ln(x^2+x+1)$. Valoarea reală $f'(0)$ este:
a) $3\pi e$;
b) 1;
c) $3\pi e-1$;
d) $4\pi e$;
e) 0;
f) $3\pi e+1$.

45. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln\left(\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{x}\right)$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ este egală cu:
a) -1;
b) 1;
c) 2;
d) e;

e) $\dfrac{1}{e}$;

f) nu există.

46. Fie $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3\sqrt{1-x}$ şi $f^{(n)}(0) = a_n$ (unde $f^{(k)}(x)$ este derivata de ordin k a funcţiei f calculată în punctul x). Atunci:

a) $a_{100} = 3 \cdot \dfrac{200!}{2^{100}}$;

b) $a_{200} = -3 \cdot \dfrac{397!!}{3^{200}}$;

c) $a_{100} = -3 \cdot \dfrac{199!!}{2^{100}}$;

d) $a_{n+1} = (n+1)\, a_n$;

e) $a_{100} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{200!}{2^{100}}$;

f) $a_{200} = \dfrac{200!}{3^{200}}$.

CAPITOLUL 15

STUDIUL FUNCŢIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR

1. Numărul punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^4} + e^{x^2-1}$ este:
   a) 0;
   b) 1;
   c) 2;
   d) 3;
   e) 4;
   f) 5.

2. Valoarea parametrului real m, pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + 4x + m)$ are puncte de extrem, este:
   a) $\{5\}$;
   b) $(-5, 5)$;
   c) $(5, +\infty)$;
   d) $(-\infty, 5)$;

e) $(-\infty, 4)$;
f) ϕ.

3. Valoarea maximă relativă a funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}$ este:
a) $\dfrac{3}{2}$;
b) $\dfrac{3}{4}$;
c) $\dfrac{2}{3}$;
d) $\dfrac{4}{3}$;
e) $\dfrac{1}{2}$;
f) 2.

4. Valorile parametrilor reali a şi b, pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$ admite un punct de extrem în punctul $P(0,1)$, sunt:
a) $a = 1$, $b = -1$;
b) $a = -1$, $b = -1$;
c) $a = 2$, $b = -1$;
d) $a = -2$, $b = -1$;
e) $a = -1$, $b = 1$;
f) $a = 2$, $b = 1$.

5. Mulţimea valorilor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}$ este:
a) $\left[-\dfrac{1}{3}, 4\right]$;
b) $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{15}{2}\right]$;
c) $[1, +\infty)$;
d) $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{2}\right]$;
e) $[1, 5]$;

f) $\left[-\frac{1}{3}, 5\right]$.

6. Valorile parametrului real m, pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{mx^2 - 1}{(x-1)(x-2)}$ admite puncte de extrem, sunt:

a) $m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$;

b) $m \in (-\infty, 1)$;

c) $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \bigcup (1, +\infty)$;

d) $m \in (1, +\infty)$;

e) $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \bigcup (1, +\infty)$;

f) $m \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

7. Suma absciselor punctelor de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$ este:

a) 2;

b) 3;

c) 4;

d) 0;

e) 1;

f) -1.

8. Valoarea parametrului real m pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{x^2 - mx + 4}{\sqrt{x^2+1}}$ admite un extrem în punctul $x = 1$ este:

a) 3;

b) -2;

c) 2;

d) 1;

e) 0;

f) -1.

9. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^3 - 6x^2 + 9x + 3}$, atunci care din afirmaţiile următoare este corectă?

a) $x = 1$ este abscisa punctului de minim local al lui f;
b) f nu are puncte de extrem;
c) f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;
d) f este descrescătoare pe $[3, +\infty)$;
e) suma absciselor punctelor de extrem este egală cu 4;
f) $x = -3$ este abscisa punctului de maxim local al lui f;

10. Valoarea parametrului real m, pentru care funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{me^x - (1+m)\,e^{-x}}{e^x - 1}$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0)\bigcup(0, +\infty)$, este:
a) $m \in (0, 4)$;
b) $m \in (4, +\infty)$;
c) $m \in (-\infty, 0)$;
d) $m \in (0, +\infty)$;
e) $m \in \left(\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$;
f) $m \in \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right)$.

11. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^3 - 3x + 5$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $f(x) = 0$ este:
a) 1;
b) 3;
c) 2;
d) 4;
e) 6;
f) 0.

12. Se consider funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x + \ln x$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. Numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $f(x) = 0$ este:
a) 3;
b) 1;
c) 2;
d) 0;
e) 4;

f) 5.

13. Fie $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Numărul punctelor de extrem local ale funcţiei f este egal cu:
a) 3;
b) 1;
c) 2;
d) 0;
e) 4;
f) 5.

14. Se consider funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^2 e^x$. Mulţimea $\operatorname{Im}(f)$ este:
a) $(1, \infty)$;
b) $(-\infty, 1)$;
c) $(2, \infty)$;
d) $(-\infty, 2)$;
e) $(-3, \infty)$;
f) $(0, \infty)$.

15. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^2 e^x$. Mulţimea $f((-3, 3))$ este:
a) $(-3, \infty)$;
b) $(-\infty, 3)$;
c) $(-\infty, 1)$;
d) (e, ∞);
e) $(0,\ 9e^3)$;
f) $(-\infty, e)$

16. Fie $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \dfrac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 1}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Numărul punctelor de pe graficul funcţiei f cu produsul absciselor egal cu -1 în care tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu axa Ox pentru orice valori $a \in \mathbb{R}^*$ şi $b \in \mathbb{R}$ este egal cu:
a) 3;

b) 1;
c) 0;
d) 4;
e) 5;
f) 2.

17. Fie funcţia $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=\ln(1-x^2)$ pentru orice $x\in(-1,1)$. Afirmaţia adevărată este:
a) funcţia f este convexă pe $(-1,1)$;
b) funcţia f are două puncte de inflexiune;
c) funcţia f are un singur punct de inflexiune;
d) funcţia f nu are puncte de extrem local;
e) funcţia f are două puncte de extrem local;
f) funcţia f este concavă pe $(-1,1)$.

18. Fie $a\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $x\in[1,\infty)$ are loc egalitatea: $2\text{arctg}x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=a$. Atunci:
a) $a=0$;
b) $a=1$;
c) $a=-1$;
d) $a=e$;
e) $a=\pi$;
f) $a=e^{-1}$.

19. Se consider funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\text{arctg}x+\text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$. Dacă există $a\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că prin $f(x)=a$ pentru orice $x\in\mathbb{R}_+^*$ atunci valoarea lui a este:
a) e;
b) π;
c) $\dfrac{\pi}{4}$;
d) 1;
e) -2;
f) 2.

20. Se consider funcţia $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\arcsin x+\arccos x$ pentru orice $x\in[-1,1]$. Dacă funcţia este constantă pe $[-1,1]$ atunci valoarea constantei este:
a) 0;
b) 1;
c) $\dfrac{\pi}{4}$;
d) $\dfrac{\pi}{2}$;
e) $\dfrac{\pi}{3}$;
f) -1.

21. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+2$ şi x_1,x_2 abscisele punctelor de extrem. Atunci $x_1f''(x_1)+x_2f''(x_2)$ are valoarea:
a) 48;
b) 36;
c) 50;
d) -50;
e) 0;
f) -48.

22. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-6x^2+8x$ şi x_1,x_2,x_3 abscisele punctelor de extrem. Atunci $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+x_3f(x_3)$ are valoarea:
a) -6;
b) 6;
c) 16;
d) 12;
e) 21;
f) 15.

23. Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}$. Valorile parametrilor reali a şi b pentru care graficul funcţiei trece prin punctul $A(1,-8)$ şi tangenta la grafic în $x=1$ este paralelă cu dreapta $y=-13x+1$ sunt:
a) $a=-3,\ b=2$;
b) $a=3,\ b=2$;

c) $a = 3,\ b = 4$;
d) $a = b = 1$;
e) $a = 4,\ b = -3$;
f) $a = -4,\ b = 3$.

24. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x + 3}$. Valorile parametrilor reali a şi b pentru care graficul funcţiei trece prin punctul $A(-2, 4)$ şi tangenta la grafic în $x = -2$ este paralelă cu dreapta $y = 2x + 1$ sunt:
a) $a = 20,\ b = 10$;
b) $a = 10,\ b = 20$;
c) $a = -10,\ b = 20$;
d) $a = b = 20$;
e) $a = 21,\ b = 0$;
f) $a = -2,\ b = 2$.

25. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3ax^3 - x^2 + bx + 5}{(x + 1)^2}$. Ştiind că funcţia nu admite asimptote verticale, $a + b$ are valoarea:
a) 0;
b 8;
c) 6;
d) -8;
e) 3;
f) 5.

26. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2ax^3 + 3x^2 + 2bx + 3}{(x - 1)^2}$. Ştiind că funcţia nu admite asimptote verticale, $a + b$ are valoarea:
a) 1;
b 3;
c) 0;
d) -3;
e) -1;
f) 6.

27. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$. Funcţia f are:

a) un punct de inflexiune şi două puncte de extrem;
b) două puncte de inflexiune şi un punct de extrem;
c) două puncte de maxim;
d) două puncte de inflexiune;
e) un punct de maxim şi un punct de minim;
f) niciuna dintre afirmaţiile anterioare nu este adevărată.

28. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+9}$. Funcţia f are:
a) un punct de inflexiune şi două puncte de extrem;
b) două puncte de inflexiune şi un punct de extrem;
c) două puncte de maxim;
d) două puncte de inflexiune;
e) un punct de maxim şi un punct de minim;
f) niciuna dintre afirmaţiile anterioare nu este adevărată.

29. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4}{x^2-9}$. Funcţia f:
a) are o asimptotă oblică şi una verticală;
b) nu are asimptote verticale;
c) nu are asimptote orizontale;
d) are o asimptotă oblică;
e) are o asimptotă orizontală şi o asimptotă oblică;
f) are două asimptote verticale şi o asimptotă orizontală.

30. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4x^3-16x+3}{x^2-4}$. Funcţia f:
a) are o asimptotă oblică şi una verticală;
b) nu are asimptote verticale;
c) nu are asimptote orizontale;
d) are o asimptotă oblică;
e) are o asimptotă orizontală şi o asimptotă oblică;
f) are două asimptote verticale şi o asimptotă oblică.

31. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-\ln(1+x^2)$. Funcţia f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă parametrul real m este în:
a) $(0,1)$;
b) $(-\infty,-1)$;

c) $(-1,1)$;
d) $(-1,\infty)$;
e) $(0,1)$;
f) $\emptyset$.

32. Numărul de puncte de extrem corespunzătoare funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\frac{4x}{x^2+4}$ este egal cu:
a) 0;
b) 1;
c) 2;
d) 3;
e) ∞;
f) nicio variantă.

33. Funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-m}{x+1}\cdot e^x$ admite trei puncte de extrem dacă parametrul real m aparţine mulţimii:
a) $(1,\infty)$;
b) $[1,\infty)$;
c) $(0,1)$;
d) $(-\infty,1)\setminus\{-1\}$;
e) $(0,\infty)$;
f) $(0,1]$.

34. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{me^x+(-m-1)\,e^{-x}}{1+e^x}$, $m\in\mathbb{R}$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă:
a) $m>1$;
b) $m>0$;
c) $m<1$;
d) $m<-1$;
e) $m\in(0,1)$;
f) $m\in(-1,0)$.

35. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-ax}{\sqrt{x^2+1}}$ admite un punct de extrem situat la o distantă faţă de Oy egală cu 2 dacă a este:

a) 2;
b) 2 sau 12;
c) 12;
d) -12;
e) -12 sau 12;
f) -12 sau 2.

36. Abscisa punctului de minim corespunzător funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x+m}$ este jumătate din abscisa punctului de maxim dacă m ia valoarea:
a) 3;
b) -3;
c) 1;
d) ± 3;
e) 1 sau 3;
f) -1 sau 3.

37. Abscisele punctelor de extrem corespunzătoare funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 2bx + 5}{x - a}$ aparţin mulţimii $\{-1, 5\}$ atunci când:
a) $a = 2$, $b = -4$;
b) $a = 2$, $b = 0$;
c) $a = 0$, $b = 4$;
d) $a = -2$, $b = 0$;
e) $a = 4$, $b = 0$;
f) $a = -4$, $b = 0$.

38. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$. Suma valorilor extreme $m + M$ corespunzătoare este egală cu:
a) 0;
b) b;
c) $2b$;
d) $\dfrac{3b}{2}$;
e) $-b$;
f) $\dfrac{b}{2}$.

39. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{1}{2}x+3+\frac{2\ln x-1}{x}$. Abscisa punctului în care tangenta la G_f este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la G_f este:
a) $\sqrt{e}$;
b) e^2;
c) $e^{-\frac{3}{2}}$;
d) $e\sqrt{e}$;
e) $e^{-\frac{1}{2}}$;
f) e^{-2}.

40. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{ax}{x^2+2b}$, $a,b>0$. Funcţia f admite două puncte de extrem situate la distanta 1 faţă de O_y dacă parametrul real b este egal cu:
a) $\frac{1}{2}$;
b) $\frac{1}{4}$;
c) $\sqrt{2}$;
d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
e) 2;
f) 4.

41. Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+ax+b}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Funcţia f admite o valoare maximă în $x=2$, iar dreapta $x=-2$ este asimptotă verticală la G_f dacă (a,b) este:
a) $(4,-12)$;
b) $(-4;12)$;
c) $(0,0)$;
d) $(4,12)$;
e) $(12,4)$;
f) $(4;4)$.

42. Funcţia polinomială reală $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ce admite: $x=-1$ punct de maxim local, $x=\frac{5}{9}$ punct de minim local, iar valoarea maximă a funcţiei este $1,(3)$ are expresia analitică $f(x)$ de forma:

a) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{5}{9}x+\dfrac{8}{9}$;

b) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{9}x^2-\dfrac{5}{9}x+\dfrac{8}{9}$;

c) $\dfrac{3x^3-2x^2-5x+8}{9}$;

d) $\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{5}{9}x+\dfrac{8}{9}$;

e) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^2}{9}-\dfrac{5x}{9}-\dfrac{8}{9}$;

f) $\dfrac{3x^3-2x^2-5x-8}{9}$.

43. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2-x+1}$, $A=\{x\in\mathbb{R}\,|x$ punct de inflexiune pentru $G_f\}$, $d: mx+n$ asimptotă la G_f, $\alpha=\sum\limits_{x\in A}x$, $\beta=m+n$. Atunci $\alpha^2+\beta^2$ are valoarea:

a) 25;

b) $\dfrac{109}{4}$;

c) $\dfrac{51}{2}$;

d) $\dfrac{109}{2}$;

e) 27;

f) $\dfrac{109}{8}$.

44. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ admite puncte unghiulare a căror mulţime se notează cu M, atunci $z=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{x\in M}\left[\left(f_s'(x)\right)^2+\left(f_d'(x)\right)^2\right]$ are valoarea:

a) 1;

b) 4;

c) $\dfrac{\pi^2}{2}$;

d) $\dfrac{\pi^2}{4}$;

e) $\dfrac{\pi^2}{9}$;
f) nicio variantă.

45. Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x+c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dacă G_f admite o asimptotă paralelă cu a doua bisectoare, modulul diferenţei dintre punctele de extrem este 2, iar $x = -2$ este asimptotă verticală la G_f, atunci $S = ab + ac + bc$ este:
a) -1;
b) $-\dfrac{1}{2}$;
c) 1;
d) 2;
e) $-\dfrac{1}{3}$;
f) 3.

46. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+ax-1}{x+1}$, $a \in \mathbb{R}$. Atunci G_f admite asimptota spre ∞ $y = x + 1$ dacă parametrul real a este:
a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) -3;
e) -2;
f) -1.

47. Dacă $f : (0;\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-3bx+2b^2}{x+a}$, $a, b \in \mathbb{R}$, atunci G_f admite ca asimptotă dreapta $y = x + 1$ dacă între parametrii reali a şi b există relaţia:
a) $a + 3b = 0$;
b) $a + 3b = -1$;
c) $a + 3b = 1$;
d) $2a + 3b = 1$;
e) $2a + 3b > 0$;
f) $2a + 3b = -1$.

48. Funcţia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+ax+a}$, $a > 0$ este astfel încât G_f admite o unică asimptotă verticală atunci când parametrul real a este:
a) 4;
b) 0;
c) 2;
d) 1;
e) mai mare strict ca 4;
f) între 0 şi 4.

49. Pentru ca graficul funcţiei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^4}{(b+cx)^3}$ să admită asimptota $y = x - 3$, între parametrii reali a, b, c trebuie să existe relaţiile:
a) $a = c^3$, $b = c$, $c \neq 0$;
b) $a = 1$, $b = 2c$;
c) $a \in \mathbb{R}$, $b + 2c = 0$;
d) $b + c = 0$, $a \in \mathbb{R}$;
e) $2a - c = 0$, $b \in \mathbb{R}$;
f) $a = 2c$, $b = -2$.

50. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + \sqrt{bx^2+cx+1}$, $a, b > 0$, $c \in \mathbb{R}$. Atunci G_f admite o asimptotă spre $+\infty$ paralelă cu $d : y = 4x - 2$, iar spre $-\infty$ asimptota $y = -1$ dacă coeficienţii a, b, c sunt:
a) $a = b = 1$, $c = 2$;
b) $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$;
c) $a = 1$, $b = c = 4$;
d) $a = 2$, $b = c = 4$;
e) $a = 1$, $b = 4$, $c = -4$;
f) $a = b = -1$, $c = -2$.

CAPITOLUL 16

LEGI DE COMPOZIŢIE. GRUPURI. INELE ŞI CORPURI

1. Dacă pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \ln(e^x + e^y)$, atunci mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x * x * x = 0$ este:
   a) $-\ln 3$;
   b) $\pm \ln \dfrac{1}{3}$;
   c) $-\ln \dfrac{1}{3}$;
   d) $\ln \sqrt{3}$;
   e) $-\ln \sqrt{3}$;
   f) $\pm \ln \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y + a$, $a \in \mathbb{R}$. Valoarea parametrului real a pentru care $\underbrace{1 * 1 * \ldots * 1}_{\text{de 2019 ori}} = 2019$ este:
   a) 4038;
   b) $-\dfrac{2019}{2}$;

c) $\dfrac{2019}{2}$;

d) 0;

e) 2019;

f) -2019.

3. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy + 3x + 3y + 6$. Valorile lui $n \in \mathbb{N}$, pentru care $C_n^2 * C_n^2 = 13$, sunt:
   a) 2;
   b) 4;
   c) $\{2, 4\}$;
   d) $\{4, 6\}$;
   e) $\{6, 8\}$;
   f) nu există.

4. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy - 3x - 3y + 12$. Valorile parametrilor reali a, b, c pentru care $x * y = (x - a)\left(y - \dfrac{b}{2}\right) + \dfrac{c}{3}$, sunt:
   a) $a = 3$, $b = 6$, $c = 12$;
   b) $a = 3$, $b = -6$, $c = 9$;
   c) $a = 3$, $b = 3$, $c = 6$;
   d) $a = 3$, $b = 3$, $c = 9$;
   e) $a = 3$, $b = 3$, $c = 3$;
   f) $a = 3$, $b = 6$, $c = 9$.

5. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy - 3x - 3y + 12$. Soluţiile sistemului $\begin{cases} x * y = 3 \\ (x-1) * (y+1) = 1 \end{cases}$ sunt:

   a) $(x, y) = (2, 3)$;
   b) $(x, y) \in \{(2, 3), (3, 4)\}$;
   c) $(x, y) = (3, 4)$;
   d) $(x, y) \in \{(-2, 3), (3, 4)\}$;
   e) $(x, y) \in \{(2, 3), (3, -4)\}$;
   f) $(x, y) = (-3, 4)$.

6. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy - 3x - 3y + 12$. Valorile întregi ale lui x şi y, pentru care $x * x * y = 11$, sunt:
   a) $(x, y) \in \{(2, 11), (5, 5)\}$;
   b) $(x, y) \in \{(2, 11), (4, 11), (1, -5), (5, -5)\}$;
   c) $(x, y) \in \{(-2, 11), (-4, 11), (1, 5), (5, 5)\}$;
   d) $(x, y) \in \{(1, 5), (5, 5)\}$;
   e) $(x, y) \in \{(2, 11), (4, 11), (1, 5), (5, 5)\}$;
   f) $(x, y) \in \{(2, 11), (4, 11)\}$.

7. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$. Valoarea expresiei $\sqrt{1} * \sqrt{2} * \cdots * \sqrt{2019}$ este:
   a) 0;
   b) 1;
   c) $\sqrt{2}$;
   d) 3;
   e) $\sqrt{3}$;
   f) $\sqrt{2019}$.

8. Elementul neutru al legii de compoziţie $x * y = 3xy - 3x - 3y + 4$, $x, y \in \mathbb{R}$, este:
   a) 2;
   b) $\frac{4}{3}$;
   c) 1;
   d) 3;
   e) -1;
   f) $\frac{1}{3}$.

9. Pe $(-2, 2)$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \dfrac{4(x + y)}{4 + xy}$. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $x * (x + 2) = \dfrac{4}{13}$ este:
   a) 24;
   b) -24;
   c) 22;
   d) -22;

e) 46;

f) -46.

10. Pe $(-3, 3)$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \dfrac{9(x+y)}{9+xy}$. Valoarea expresiei $\left(-\dfrac{1}{2}\right) * 1 * \left(\dfrac{1}{2}\right)$ este:

a) $\dfrac{9}{61}$;

b) 1;

c) $\dfrac{28}{55}$;

d) 9;

e) $\dfrac{1}{2}$;

f) $\dfrac{-1}{2}$.

11. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy + ax + 3y + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Valorile parametrilor reali a şi b, pentru care legea de compoziţie este asociativă, sunt:

a) $a = 3$, $b = 3$;

b) $a = -3$, $b = 6$;

c) $a = 3$, $b = 0$;

d) $a = 3$, $b = -6$;

e) $a = 3$, $b = 6$;

f) $a = 3$, $b = -3$.

12. Elementul neutru al legii de compoziţie $x * y = 3xy + 21x + 21y + 140$, x, $y \in \mathbb{R}$, este:

a) $-\dfrac{1}{7}$;

b) 7;

c) $-\dfrac{22}{3}$;

d) $\dfrac{22}{3}$;

e) -7;

f) $-\dfrac{20}{3}$.

13. Simetricul numărului 5 în raport cu legea de compoziţie $x * y = 3xy + 21x + 21y + 140$, x, $y \in \mathbb{R}$, este:

a) $\dfrac{755}{108}$;

b) $-\dfrac{755}{108}$;

c) $-\dfrac{757}{108}$;

d) $\dfrac{757}{108}$;

e) $-\dfrac{756}{108}$;

f) $\dfrac{756}{108}$.

14. Dacă pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = 3xy + 21x + 21y + 140$, atunci soluţiile ecuaţiei $x * x * x = x$ sunt:

a) $x \in \left\{-\dfrac{22}{3},\ -7,\ -\dfrac{20}{3}\right\}$;

b) $x \in \left\{-7,\ -\dfrac{20}{3}\right\}$;

c) $x = -7$;

d) $x \in \{-6,\ -7,\ -8\}$;

e) $x \in \{-7,\ -8,\ -9\}$;

f) $x \in \left\{-\dfrac{23}{3},\ -7,\ -\dfrac{19}{3}\right\}$.

15. Dacă pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = 3xy + 21x + 21y + 140$, atunci soluţiie inecuaţiei $x * (3x - 1) \leq 47$ sunt:

a) $\{-8, -1\}$;

b) $(-\infty, -8]$;

c) $[-1, +\infty)$;

d) $(-\infty, -8] \bigcup [-1, +\infty)$;

e) $[-8, -1]$;

f) $(-\infty, -1]$.

16. Dacă pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \log_3(3^x + 3^y + 1)$, atunci soluţia ecuaţiei $x * x * x = 1$ este:
a) $x = 0$;
b) $x = 1$;
c) $x = -1$;
d) $x = -3$;
e) $x = 3$;
f) $x = \frac{1}{3}$.

17. Dacă pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y - 3$ şi $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, atunci soluţiile întregi ale ecuaţiei $x \circ x = x * x$ sunt:
a) $\{2, 4\}$;
b) $\{3, 5\}$;
c) $\{4, 6\}$;
d) $\{1, 3\}$;
e) $\{-3, -5\}$;
f) $\{-3, 5\}$.

18. Dacă pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y - 3$ şi $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, atunci soluţiile întregi ale sistemului $\begin{cases} x * (y+1) = 4 \\ (x - y) \circ 1 = 5 \end{cases}$ sunt:
a) $x = 3,\ y = 3$;
b) $x = 1,\ y = 5$;
c) $x = 5,\ y = 1$;
d) $x = 2,\ y = 4$;
e) $x = 4,\ y = 2$;
f) $x = 6,\ y = 0$.

19. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ şi $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$. Dacă e_1 este elementul neutru în raport cu legea de compoziţie "$*$" şi e_2 este elementul neutru în raport cu legea de compoziţie "$\circ$", atunci $e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2$ este:
a) 3;
b) 4;

c) 5;
d) 6;
e) 7;
f) 8.

20. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y + 2$ şi $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$. Câte soluţii întregi are sistemul $\begin{cases} x^2 * y^2 = 7 \\ x^2 \circ y^2 = 16 \end{cases}$?
a) două;
b) patru;
c) şase;
d) opt;
e) zece;
f) nu are soluţii întregi.

21. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x \circ y = x + y + 3$ şi $x * y = xy - 3(x + y) + 12$. Soluţiile ecuaţiei $(x \circ (x + 1)) + (x * (x + 1)) = 11$ sunt:
a) $x = 1$;
b) $x = 2$;
c) $x \in \{1, 2\}$;
d) $x \in \{-1, -2\}$;
e) $x \in \{-1, 2\}$;
f) $x \in \{-2, 1\}$.

22. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x \circ y = x + y + 3$ şi $x * y = xy - 3(x + y) + 12$. Soluţiile sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x \circ (y - 1) = 0 \\ (x + 1) * y = x * (y + 1) \end{cases}$ sunt:
a) $x = -1,\ y = 1$;
b) $x = -1,\ y = -1$;
c) $x = 1,\ y = -1$;
d) $x = 1,\ y = 1$;
e) $x = -1,\ y = -2$;
f) $x = 2,\ y = -1$.

23. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = -xy + 2x + 2y - 2$. Dacă $d_1, d_2, \ldots, d_6$ sunt divizorii naturali ai lui 18, atunci $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_6$ este:
    a) 0;
    b) 2;
    c) 6;
    d) -2;
    e) 3;
    f) -3.

24. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = -xy + 2x + 2y - 2$. Câte soluţii naturale are ecuaţia $a \circ b \circ b = 14$?
    a) una;
    b) două;
    c) patru;
    d) şase;
    e) opt;
    f) nu are soluţii naturale.

25. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = -xy + 4x + 4y - 12$. Dacă $d_1, d_2, \ldots, d_6$ sunt divizorii naturali ai lui 12, atunci $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_6$ este:
    a) 0;
    b) 2;
    c) 4;
    d) -2;
    e) -4;
    f) 12.

26. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = -xy + 4x + 4y - 12$. Câte soluţii naturale are ecuaţia $a \circ b \circ b = 12$?
    a) una;
    b) două;
    c) patru;
    d) şase;
    e) opt;
    f) nu are soluţii naturale.

27. Simetricul numărului $2\sqrt{5}$ în raport cu legea de compoziţie $x * y = \sqrt{5} + \left(x - \sqrt{5}\right)\left(y - \sqrt{5}\right)$, $x,\ y \in \mathbb{R}$, este:
a) $-6\sqrt{5}$;
b) $\dfrac{-6\sqrt{5}}{5}$;
c) $-2\sqrt{5}$;
d) $\dfrac{6}{5}$;
e) $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$;
f) $6\sqrt{5}$.

28. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy + ax + y$, $a \in \mathbb{R}$. Valorile parametrului real a, pentru care legea de compoziţie este comutativă, este:
a) $a = 0$;
b) $a = 1$;
c) $a = 2$;
d) $a = -1$;
e) $a = -2$;
f) $a = 3$.

29. Dacă pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy - 7x - 7y + 56$, atunci soluţiile reale ale inecuaţiei $x * (x - 1) * (x - 2) < 7$ sunt:
a) $x \in \{7,\ 8,\ 9\}$;
b) $x \in (8,\ +\infty)$;
c) $x \in (7,\ 8) \cup (9,\ +\infty)$;
d) $x \in (8,\ 9)$;
e) $x \in (-\infty,\ 7)$;
f) $x \in (-\infty,\ 7) \cup (8,\ 9)$.

30. Valorile nenule ale lui a şi b, pentru care legea de compoziţie definită prin $x * y = xy + 2ax + by$, $x, y \in \mathbb{R}$ este asociativă şi comutativă, sunt:
a) $a = 1,\ b = \dfrac{1}{2}$;

b) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$;

c) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{1}{2}$;

d) $a = 1$, $b = 2$;

e) $a = 2$, $b = 4$;

f) $a = -1$, $b = -2$.

31. Fie mulţimea $M = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Pentru orice x, $y \in M$ se defineşte operaţia "$*$" prin: $x * y = \dfrac{x + y}{xy + 1}$. Numărul soluţiilor din mulţimea M ale ecuaţiei $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ 2019\ ori} = 2019$ este egal cu:

a) 0;

b) 1;

c) 2;

d) 3;

e) 4;

f) 6.

32. Fie mulţimea $M = (1, 4) \subset \mathbb{R}$. Pentru orice x, $y \in M$ se defineşte operaţia "$*$" prin: $x * y = \dfrac{5xy - 8x - 8y + 20}{2xy - 5x - 5y + 17}$. Numărul soluţiilor din mulţimea M ale ecuaţiei $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{de\ 2019\ ori} = 2019$ este egal cu:

a) 3;

b) 0;

c) 1;

d) 2;

e) 4;

f) 6.

33. Fie mulţimea $M = (3, 4) \subset \mathbb{R}$. Pentru orice x, $y \in M$ se defineşte operaţia "$*$" prin: $x * y = \dfrac{7xy - 24x - 24y + 84}{2xy - 7x - 7y + 25}$. Numărul soluţiilor din mulţimea M ale ecuaţiei $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{de\ 2019\ ori} = 2019$.

a) 3;

b) 2;

c) 0;
d) 1;
e) 8;
f) 6.

34. Fie permutarea $\sigma \in S_4$ definită prin: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{\sigma^n | n \in \mathbb{N}^*\}$. Numărul de elemente distincte din G este egal cu:
a) 3;
b) 2;
c) 0;
d) 4;
e) $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$;
f) $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

35. Fie permutarea $\sigma \in S_4$ definită prin: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{\sigma^n | n \in \mathbb{N}^*\}$. Numărul de elemente distincte din G este egal cu:
a) 6;
b) 2;
c) 5;
d) 4;
e) 3;
f) 8.

36. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie "$*$" prin: $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Produsul elementelor din $\mathbb{R}$ care sunt egale cu inversele lor în raport cu legea de compoziţie "$*$" este egal cu:
a) 6;
b) -2;
c) 2;
d) 4;
e) -3;
f) 3.

37. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie "$*$" prin: $x*y=xy-2x-2y+6$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$. Numărul elementelor din $\mathbb{Z}$ care sunt simetrizabile în raport cu legea de compoziţie "$*$" este egal cu:
a) 2;
b) 1;
c) 3;
d) 4;
e) 5;
f) 6.

38. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie "$*$" prin: $x*y=xy-4x-4y+20$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$. Numărul elementelor din $\mathbb{Z}$ care sunt simetrizabile în raport cu legea de compoziţie "$*$" este egal cu:
a) 6;
b) 2;
c) 3;
d) 4;
e) 5;
f) 1.

39. Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie "$*$" prin: $x*y = x+y-1$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Fie $(\mathbb{R}, +)$ grupul aditiv al numerelor reale. Ştiind că perechea $(\mathbb{R}, *)$ este grup comutativ şi M este mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x+m$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(\mathbb{R}, *)$ atunci:
a) $M=\{-2,\ 3\}$;
b) $M=\{1,\ 4\}$;
c) $M=\{1\}$;
d) $M=\{1,\ 2\}$;
e) $M=\{-1,\ 1\}$;
f) $M=\{4\}$.

40. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$. Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie "$*$" prin: $x*y=xy+ax+by$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinaţi

toate valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}^*$ pentru care perechea $(\mathbb{R}, *)$ este monoid comutativ.

a) $a{=}-1$, $b{=}\ 1$;

b) $a{=}\ 2$, $b{=}\ 1$;

c) $a{=}\ 2$, $b{=}\ 2$;

d) $a = 1,\ b = 1$;

e) $a = 2,\ b = 3$;

f) $a{=}\ 3$, $b{=}\ 2$.

41. Fie ecuaţia $x^2{+}\hat{8}{=}\hat{0}$ cu coeficienţi în inelul $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$. Suma soluţiilor din $\mathbb{Z}_{11}$ ale ecuaţiei este egală cu:

a) $\hat{0}$;

b) $\hat{1}$;

c) $\hat{2}$;

d) $\hat{3}$;

e) $\hat{8}$;

f) $\hat{4}$.

42. Fie ecuaţia $x^2{+}\hat{3}{=}\hat{0}$ cu coeficienţi în inelul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$. Mulţimea soluţiilor din $\mathbb{Z}_5$ ale ecuaţiei este egală cu:

a) $\left\{\hat{3}\right\}$;

b) $\emptyset$;

c) $\mathbb{Z}_5$;

d) $\left\{\hat{1},\ \ \hat{2}\right\}$;

e) $\left\{\hat{4}\right\}$;

f) $\left\{\hat{2}, \hat{3}\right\}$.

43. Fie inelul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \hat{2}x{+}\hat{3}y = \hat{2} \\ x + y = \hat{2} \end{cases}$ cu coeficienţi $\mathbb{Z}_5$. Fie k numărul soluţiilor din $\mathbb{Z}_5$ ale sistemului. Atunci:

a) $k = 3$;

b) $k = 2$;

c) $k = 0$;

d) $k = 1$;

e) $k = 4$;

f) $k = 5$.

44. Fie inelul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{2} \\ x + y = \hat{2} \end{cases}$ cu coeficienţi $\mathbb{Z}_7$.
Fie s suma valorilor necunoscutelor din $\mathbb{Z}_7$ ale sistemului. Atunci:
a) $s = \hat{3}$;
b) $s = \hat{2}$;
c) $s = \hat{0}$;
d) $s = \hat{4}$;
e) $s = \hat{1}$;
f) $s = \hat{6}$.

45. Fie inelul $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$, matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ şi k cel mai mic număr natural cu proprietatea $A^k = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$. Atunci:
a) $k = 6$;
b) $k = 2$;
c) $k = 5$;
d) $k = 4$;
e) $k = 3$;
f) $k = 7$.

46. Fie $m, n \in \mathbb{R}$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = mx + n$. Pe mulţimea numerelor reale se definesc operaţiile "$*$" şi "$\circ$" prin $x * y = x + y - 2$, $x \circ y = 2xy - 4x - 4y + 10$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Ştiind că tripletul $(\mathbb{R}, *, \circ)$ este corp comutativ şi funcţia f este un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, *, \circ)$ şi $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ atunci:
a) $m = 1,\ n = 1$;
b) $m = 2,\ n = -4$;
c) $m = -1,\ n = -1$;
d) $m = -2,\ n = -3$;
e) $m = 1,\ n = 4$;
f) $m = 2,\ n = 5$.

47. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie " $*$ " şi "$\circ$" prin $x * y = x + y - 2$, $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$. Numărul elementelor simetrizabile în inelul $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este egal cu:
a) 2;
b) 1;
c) 3;
d) 4;
e) 5;
f) 6.

48. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie " $*$ " şi "$\circ$" prin $x * y = x + y - 2$, $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$. În inelul $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ se consideră elementul $E = (-2018) \circ (-2017) \circ \cdots (-1) \circ 0 \circ 1 \circ \cdots \circ 2017 \circ 2018$. Atunci:
a) $E = 6$;
b) $E = 2$;
c) $E = 3$;
d) $E = 4$;
e) $E = 2018$;
f) $E = 2019$.

49. Fie ecuaţia $x^3 + \hat{4} = \hat{0}$ cu coeficienţi în inelul $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Numărul soluţiilor din $\mathbb{Z}_8$ ale ecuaţiei este egal cu:
a) 2;
b) 3;
c) 0;
d) 1;
e) 4;
f) 5.

50. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{4} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix}$ cu elemente din inelul $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$. Valoarea determinantului $\det(A)$ este:
a) $\hat{4}$;

b) $\hat{2}$;
c) $\hat{7}$;
d) $\hat{0}$;
e) $\hat{1}$;
f) $\hat{5}$.

51. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$. Considerăm G împreună cu înmulţirea matricelor. Atunci simetrica matricei $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_1a_3 - a_2 \\ 0 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{a_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

f) nu există.

52. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Considerăm G împreună cu înmulţirea matricelor. Atunci:

a) $(G, \cdot)$ este grup abelian;
b) $(G, \cdot)$ este grup neabelian;
c) $(G, \cdot)$ este parte stabilă, fără element neutru;
d) $(G, \cdot)$ este inel;
e) $(G, \cdot)$ nu este parte stabilă;
f) Există elemente în G care nu sunt inversabile.

53. Pe $G = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ definim legea de compoziţie $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$. Atunci:
a) $(G, \circ)$ este grup abelian cu elementul neutru $e = 4$;
b) $(G, \circ)$ este grup neabelian cu elementul neutru $e = 4$;
c) $(G, \circ)$ este grup abelian cu elementul neutru $e = 0$;
d) $(G, \circ)$ este grup neabelian cu elementul neutru $e = 0$;
e) $(G, \circ)$ nu este grup;
f) $(G, \circ)$ nu este parte stabilă.

54. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$. Atunci $x \circ x \circ x$ este:
a) $x^3 + 9x^2 + 27x$;
b) $x^3 - 9x^2 + 27x + 12$;
c) $x^3 - 9x^2 + 27x - 12$;
d) $x^3 + 3x^2 + 3x + 12$;
e) $x^3 - 3x^2 - 3x + 12$;
f) 4.

55. Numărul de soluţii ale ecuaţiei $\hat{2}x = \hat{6}$ în $\mathbb{Z}_8$ este:
a) 0;
b) 1;
c) 2;
d) 3;
e) 4;
f) 5.

56. Numărul de soluţii ale ecuaţiei $\hat{6}x = \hat{6}$ în $\mathbb{Z}_{12}$ este:
a) 1;

b) 2;
c) 3;
d) 4;
e) 5;
f) 6.

57. Pe mulţimea $G = \{1, 2, 3, 4\}$ definim legea de compoziţie "$*$" prin $a*b \Leftrightarrow c$ este restul împărţirii lui a^b la 5. Atunci
a) $(G, *)$ este grup abelian;
b) $(G, *)$ este grup necomutativ;
c) $(G, *, \cdot)$ este inel comutativ;
d) $(G, *, \cdot)$ este inel necomutativ;
e) $(G, *)$ nu este grup;
f) $(G, *, \cdot)$ corp.

58. Pe mulţimea $G = \{1, 3, 7, 9\}$ definim legea de compoziţie "$*$" prin $a * b =$ultima cifră a produsului numerelor x şi y. Atunci simetricul lui 3 este
a) 7;
b) 3;
c) 1;
d) 9;
e) nu există;
f) $*$ nu are element neutru.

59. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$. Fie S suma elementelor din $\mathbb{R}$ care coincid cu inversele lor. Atunci S este:
a) 1;
b) -2;
c) 10;
d) 4;
e) -3;
f) 0.

60. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$. Fie S suma elementelor din $\mathbb{R}$ care coincid cu inversele lor. Atunci S este:
a) 4;
b) 10;
c) -2;
d) 5;
e) 25;
f) 11.

61. Pe mulţimea $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \subseteq \mathbb{R}$ se defineşte legea $\circ$ prin $x \circ y = |y - x|$. Soluţia ecuaţiei $2x \circ 3 = 5$ este:
a) 4;
b) 0;
c) 1;
d) nu există;
e) 3;
f) 2.

62. Pe $G = (3, \infty)$ se consideră legea de compoziţie $\circ$ definită prin $x \circ y = 2xy - 6(x + y) + 21$. Ecuaţia $x \circ x = 35$ are ca soluţii:
a) -1 sau 7;
b) 7;
c) -1;
d) $\{4, 7\}$;
e) $\{-7, 1\}$;
f) nicio variantă.

63. Fie $(\mathbb{R}, \circ)$, unde $\circ$ este legea de compoziţie $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$. Valorile din $\mathbb{Z}$ pentru care $x \circ x \circ y = 30$ sunt:
a) $x = 6$, $y = 6$;
b) $x = 0$, $y = 6$;
c) $x \in \{0, 6\}$, $y \in \{6\}$ sau $x \in \{2, 4\}$, $y = 30$;
d) $x = 6$, $y = 0$ sau $x = 4$, $y = 30$;
e) $x \in \{2, 4\}$, $y \in \{0, 3\}$;
f) $x = 4$, $y = 30$.

64. Dacă pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $\circ$ definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, numărul real $m = (-2018) \circ (-2017) \circ \cdots \circ (-3) \circ (-2) \circ (-1) \circ 0 \circ \cdots \circ (2018)$ este egal cu:
a) -1;
b) 0;
c) 1;
d) -2;
e) -2018;
f) 2018.

65. Mulţimea elementelor simetrizabile din $(-1, \infty)$ în raport cu legea de compoziţie $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1$ este:
a) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$;
b) $(0, \infty)$;
c) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$;
d) $(1, \infty)$;
e) $(-1, \infty)$;
f) $\emptyset$.

66. Pe $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$, considerăm legea $\circ$ definită prin $x \circ y = \dfrac{6 - xy}{5 - x - y}$. Atunci, simetricul lui 5 faţă de $\circ$ este:
a) $\circ$ nu admite element neutru;
b) 5;
c) 10;
d) 15;
e) 25;
f) 30.

67. Pe $\mathbb{R}$ considerăm $\circ$ o lege de compoziţie definită prin $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$. Soluţia sistemului $\begin{cases} x \circ y = 3 \\ (x-1) \circ (y+1) = 1 \end{cases}$ este perechea:
a) $(3, 4)$;
b) $(2, 3)$;

c) $(3,4)$ sau $(2,3)$;
d) $(3,3)$;
e) $(2,4)$;
f) nicio variantă nu este adevărată.

68. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea $\circ$ definită prin $x \circ y = 4xy + 4x + 4y + 3$. Precizaţi ce submulţime a lui $\mathbb{R}$ este parte stabilă în raport cu $\circ$:
a) $(-1, 0)$;
b) $(-1, \infty)$;
c) $(0, \infty)$;
d) $(-2, \infty)$;
e) $(-\infty, -1)$;
f) $(-\infty, 0)$.

69. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea $\circ$ definită prin $x \circ y = xy - 2x - ay + b$. Perechea (a, b) de numere reale pentru care $\circ$ este asociativă şi comutativă este:
a) $(6, 2)$;
b) $(6, 6)$;
c) $(2, 6)$;
d) $(2, 2)$;
e) $(-2, 6)$;
f) $(6, -2)$.

70. Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea de compoziţie $\circ$ definită prin $x \circ y = xy - 5(x + y) + 30$ ce este asociativă. Ecuaţia $x \circ x \circ x = x$ are ca soluţii reale:
a) 1, 5, 6;
b) 1, 4, 5;
c) 4, 5, 6;
d) 4, 6;
e) 1, 5;
f) 4, 5.

71. Fie $\circ$ legea de compoziţie definită prin $x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}$ pe mulţimea numerelor reale. Dacă $x_0 \in \mathbb{Q}$ şi considerăm $x_n = x_0 \circ x_{n-1}$, următorul termen din acest şir de numere reale care este număr raţional are rangul:

a) 5;
b) nu există;
c) 4;
d) 1;
e) 2;
f) 3.

72. Pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se defineşte aplicaţia $x \circ y = axy - b(x+y) + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$. Atunci $\circ$ este asociativă dacă între parametrii reali a, b, c există relaţia:
a) $c = a + b$;
b) $c^2 = a^2 + b^2$;
c) $b^2 + b = ac$;
d) $a^2 + a = bc$;
e) $c^2 + c = ab$;
f) nicio variantă.

73. Se consideră aplicaţia $x \circ y = xy + 2ax + by,\ a, b \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}$. Atunci $\circ$ este asociativă şi comutativă dacă:
a) $a = b = 1$;
b) $a = b = 2$;
c) $a = \dfrac{1}{3},\ b = \dfrac{2}{3}$ sau $a = 2,\ b = 3$;
d) $a = b = 0$ sau $a = \dfrac{1}{2},\ b = 1$;
e) $a = -1,\ b = 1$;
f) nicio variantă.

74. Aplicaţia $x \circ y = xy - 3x - 3y + a$ definită pe $(3, \infty)$ admite element neutru $e = 4$ dacă parametrul real a este egal cu:
a) $a = 14$;
b) $a = 13$;
c) $a = 8$;
d) $a = 9$;
e) $a = 10$;
f) $a = 12$.

75. Perechea $(\mathbb{R}, \circ)$, unde $x \circ y = xy - ax + by$, $a, b \in \mathbb{R}$, este monoid dacă parametrii întregi nenuli a şi b sunt egali cu:
a) $a = 2$, $b = 3$;
b) $a = 7$, $b = 1$;
c) $a = -3$, $b = 2$;
d) $a = -1$, $b = 1$;
e) $a = 7$, $b = 3$;
f) nicio variantă.

76. Se defineşte pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ aplicaţia $x \circ y = xy + x + y$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Atunci mulţimea elementelor simetrizabile, $U(\mathbb{Z})$, este:
a) $\{\pm 1,\ 0\}$;
b) $\{-2\}$;
c) $\{-2,\ 0\}$;
d) $\{-2,\ 0,\ 2\}$;
e) $\{-2,\ -1\}$;
f) $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$.

77. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legile de compoziţie $*, \circ$ definite prin $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ şi $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$. Atunci $\alpha = (x * 2) - (3 \circ x)$ este egal cu:
a) 1 pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
b) -1, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
c) 1, $x \in \mathbb{R}^*$; d) -1, $x \in \{\pm 1; \pm 2\}$;
e) 2, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
f) 3, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

78. Dacă se consideră pe $\mathbb{R}$ ca lege de compoziţie operaţia de înmultire, atunci simetricul numărului $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$ în raport cu $\cdot$ este:
a) $3 + 2\sqrt{2}$;
b) $-3 - 2\sqrt{2}$;
c) $3 - 2\sqrt{2}$;
d) $2 + 3\sqrt{2}$;
e) $2 - 3\sqrt{2}$;
f) nicio variantă.

79. Pe mulţimea $G = \left(-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$ se consideră legea $\circ$ definită prin $x \circ y = axy + bx + by + c$. Dacă $e = -1$ este elementul neutru pe G în raport cu $\circ$, iar $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = -\dfrac{11}{8}$, atunci $S = a^2 + b^2 + c^2$ este:
a) 4;
b) 9;
c) 20;
d) 22;
e) 18;
f) 14.

80. Se consideră grupul $(G, *)$, unde $G = (1, \infty) \setminus \{2\}$ şi $x * y = (x-1)^{\ln(y-1)} + 1$, $x, y \in G$. Ecuaţia $x * x * x = e^{27} + 1$ are ca soluţie:
a) $e^3 - 1$;
b) $2e^3 + 1$;
c) $e^2 + 2$;
d) $e^3 - 2$;
e) $e^3 + 1$;
f) $-2e^3 + 1$.

81. Pe $G = (a, \infty)$, se consideră $x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$, $x, y \in G$. Dacă $x \in G$, atunci x', simetricul lui x este:
a) $x' = \dfrac{x}{a+1}$;
b) $x' = \dfrac{ax - a^2}{x - a}$;
c) $x' = \dfrac{ax + a^2 + 1}{x - a}$;
d) $x' * x = a + 2$;
e) $x' = \dfrac{ax + a^2}{x - a}$;
f) $x' = a + \dfrac{1}{x - a}$.

82. Pe $G = (2, \infty)$ se consideră legea $*$ definită prin $x * y = xy - 2x - 2y + 6$. Atunci $\alpha = \underbrace{x * \cdots * x}_{2019}$ este:
a) $(x-2)^{2019}$;

b) $(x-2)^{2019}+1$;
c) $x^{2019}-2$;
d) $(x-1)^{2019}$;
e) $(x-2)^{2019}+2$;
f) $x^{2019}+2$.

83. Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $G=\{X(a)\,|X(a)=I_2+aA, a\neq 1\}$.
Atunci $X(1)X(2)\cdots X(2019)$ este egal cu:
a) $X(2020!)$;
b) $X(2019!+1)$;
c) $X(2020!+1)$;
d) $X(2^{2020}+1)$;
e) $X(2019!-1)$;
f) $X(2020!-1)$.

84. Fie $G_1=((4,\infty),*)$, $x*y=xy-4x-4y+20$ şi $G_2=((5,\infty),\circ)$, $x\circ y=xy-5x-5y+30$ două grupuri. Atunci $f:G_1\to G_2$ este un izomorfism de grupuri dacă $f(x)$ este egal cu:
a) $x+1$;
b) $-x+1$;
c) $x-1$;
d) $2x+2$;
e) $-2x-2$;
f) $-x-1$.

85. Fie $M_a=\left\{A_a=\begin{pmatrix} a^x & 0 \\ 0 & a^x \end{pmatrix} |x\in\mathbb{R}\right\}$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
a) $(M_a,\cdot)$ nu este grup, pentru orice $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$;
b) $(M_a,\cdot)$ este grup abedian, pentru orice $a\in(0,\infty)$, izomorf cu $(\mathbb{R},+)$;
c) $(M_a,\cdot)\not\simeq(M_b,\cdot)$, pentru orice $a,b>0$, $a,b\neq 1$, $a\neq b$;
d) $(M_a,\cdot)\simeq(M_b,\cdot)$, pentru orice $a,b\in(0,\infty)\setminus\{1\}$, $a\neq b$;
e) $\{(a,b)\,|a,b>0; a\neq b$ şi $(M_a,\cdot)\simeq(M_b,\cdot)\}$ este finită;
f) nicio variantă nu este adevărată.

CAPITOLUL 17

POLINOAME

1. Câtul şi restul împărţirii polinomului $f = X^3 + 4X + 16$ la polinomul $g = X + 2$ sunt:
   a) $q = X^2 - 2X + 4,\ r = 8$;
   b) $q = X^2 - 2X - 8,\ r = -16$;
   c) $q = X^2 - 2X - 8,\ r = 16$;
   d) $q = X^2 - 2X + 8,\ r = 0$;
   e) $q = X^2 - 2X + 4,\ r = 4$;
   f) $q = X^2 + 2X + 8,\ r = 0$.

2. Valorile parametrilor reali a şi b pentru care restul împărţirii polinomului $f = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - aX + b$ la polinomul $g = (X-2)^2$ este $r = 3X - 1$, sunt:
   a) $a = 1,\ b = 3$;
   b) $a = 1,\ b = -3$;
   c) $a = -1,\ b = 3$;
   d) $a = -1,\ b = -3$;
   e) $a = 1,\ b = 3$;
   f) $a = 1,\ b = 3$.

3. Valorile parametrilor reali a şi b pentru care restul împărţirii polinomului $f = X^4 + aX^3 + X^2 - X + b$ la polinomul $g = (X-1)^2$ este $r = 2X - 1$, sunt:
   a) $a = 3,\ b = 5$;
   b) $a = 1,\ b = 3$;
   c) $a = -1,\ b = -5$;
   d) $a = -1,\ b = 5$;
   e) $a = -1,\ b = 1$;
   f) $a = 1,\ b = -5$.

4. Valoarea parametrului real m, pentru care polinomul $f = mX^6 - mX^4 + (m^2 + 3m - 4)\,X^2 - 2$ împărţit la polinomul $g = X - 1$ dă restul 12, este:
   a) $m \in \{-6,\ -3\}$;
   b) $m \in \{-6,\ 3\}$;
   c) $m \in \{\ 3,\ 6\}$;
   d) $m \in \{-3,\ 6\}$;
   e) $m \in \{-3,\ 3\}$;
   f) $m \in \{-6,\ 6\}$.

5. Dacă polinomul $f = 3X^4 - 2X^3 + X^2 + 2X - 1 \in \mathbb{R}[X]$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4, atunci $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4}$ este:
   a) $\dfrac{1}{3}$;
   b) $\dfrac{1}{2}$;
   c) -2;
   d) -2;
   e) 2;
   f) 3.

6. Dacă $a \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = 3X^4 - 2X^3 + X^2 + aX - 1 \in \mathbb{R}[X]$, atunci restul împărţirii polinomului f la $(X-1)^2$:
   a) $r = (a+8)\,X - 7$;
   b) $r = (a+12)\,X + 5$;

c) $r = (a - 12)\,X - 7$;
d) $r = (a + 12)\,X + 7$;
e) $r = (a + 11)\,X - 7$;
f) $r = (a + 11)\,X + 7$.

7. Valoarea lui $m \in \mathbb{Z}$ pentru care ecuaţia $4x^3 + 4x^2 - 7x + m = 0$ admite o rădăcină dublă este:
a) 0;
b) 1;
c) 2;
d) 3;
e) -3
f) -2.

8. Dacă ecuaţia $x^3 - 9x^2 + 23x + a = 0$ are rădăcinile în progresie aritmetică, atunci valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ este:
a) $a = -5$;
b) $a = -10$;
c) $a = 10$;
d) $a = -15$;
e) $a = 15$;
f) $a = 5$.

9. Dacă polinomul $f = X^3 + X^2 + mX + m \in \mathbb{R}[X]$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3 cu proprietatea că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$, atunci valoarea parametrului real m este:
a) $a = -5$;
b) $a = -10$;
c) $a = 10$;
d) $a = 15$;
e) $a = -15$;
f) $a = 5$.

10. Dacă polinomul $f = X^3 + (2m - 1)X^2 - (m + 1)X + 3m + 1 \in \mathbb{R}[X]$ este divizibil cu polinomul $X + 3$, atunci valoarea parametrului real m este:

a) $m = 2$;

b) $m = -\dfrac{4}{3}$;

c) $m = \dfrac{4}{3}$;

d) $m = \dfrac{3}{4}$;

e) $m = 3$;

f) $m = -3$.

11. Dacă polinomul $f = X^4 + (2m + n)X^3 + (m - n)X + 1$ împărţit la $X - 2$ dă restul 1 şi împărţit la $X - 1$ dă restul 2, atunci valorile parametrilor reali m şi n sunt:

a) $m = -\dfrac{1}{3}$, $n = -\dfrac{8}{3}$;

b) $m = \dfrac{1}{3}$, $n = -\dfrac{8}{3}$;

c) $m = 1$, $n = -\dfrac{8}{3}$;

d) $m = 0$, $n = \dfrac{8}{3}$;

e) $m = 0$, $n = -\dfrac{8}{3}$;

f) $m = \dfrac{8}{3}$, $n = -\dfrac{8}{3}$.

12. Dacă polinomul $f = X^3 + aX^2 + X + b$ are o rădăcină dublă egală cu 1, atunci valorile parametrilor reali a şi b sunt:

a) $a = -3$, $b = 1$;

b) $a = -1$, $b = -1$;

c) $a = 4$, $b = -2$;

d) $a = 0$, $b = -2$;

e) $a = -2$, $b = 4$;

f) $a = -2$, $b = 0$.

13. Dacă polinomul $f = X^4 - 4X + m \in \mathbb{R}[X]$ este divizibil cu $X + 1$, atunci valoarea parametrului real m este:

a) $m = 5$;

b) $m = -5$;

c) $m=-4$;
d) $m=4$;
e) $m=-3$;
f) $m=3$.

14. Dacă polinomul $f=X^4-4X+m\in\mathbb{R}[X]$ are o rădăcină reală dublă, atunci valoarea parametrului real m este:
a) $m=5$;
b) $m=-5$;
c) $m=-4$;
d) $m=4$;
e) $m=-3$;
f) $m=3$.

15. Dacă polinomul $f=X^{30}-3X^{20}+aX^{10}+3X^5+aX+b\in\mathbb{R}[X]$ este divizibil cu $(X-1)^2$, atunci valorile parametrilor reali a şi b sunt:
a) $a=\frac{14}{11},\ b=-\frac{41}{11}$;
b) $a=\frac{15}{11},\ b=-\frac{41}{11}$;
c) $a=\frac{15}{11},\ b=-\frac{51}{11}$;
d) $a=-\frac{15}{11},\ b=-\frac{41}{11}$;
e) $a=\frac{15}{11},\ b=\frac{41}{11}$;
f) $a=\frac{15}{11},\ b=-\frac{14}{11}$.

16. Ordinul de multiplicitate al rădăcinii 1 a polinomului $f=X^4-5X^3+9X^2-7X+2\in\mathbb{R}[X]$ este:
a) 0;
b) 1;
c) 2;
d) 3;
e) 4;
f) 1 nu este rădăcină a lui f.

17. Soluţiile reale ale ecuaţiei $16^x + 2 \cdot 8^x - 28 \cdot 4^x - 8 \cdot 2^x + 96 = 0$ sunt:
a) $x \in \{0, 2\}$;
b) $x \in \{1, 2\}$;
c) $x \in \{0, 1\}$;
d) $x \in \{2, 4\}$;
e) $x \in \{-1, -2, 1, 2\}$;
f) $x = 1$.

18. Soluţiile reale ale ecuaţiei $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$ sunt:
a) $x \in \{0, 2\}$;
b) $x \in \{1, 2\}$;
c) $x \in \{0, 1\}$;
d) $x \in \{2, 4\}$;
e) $x \in \{-1, -2, 1, 2\}$;
f) $x = 1$.

19. Dacă rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 ale polinomului $f = X^4 + mX^2 + n \in \mathbb{R}[X]$ verifică relaţia $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$, atunci valoarea reală a parametrului real m este:
a) $m = -1$;
b) $m = -5$;
c) $m = -4$;
d) $m = 4$;
e) $m = -3$;
f) $m = 1$.

20. Dacă polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, se mai poate scrie sub forma $f = (X - x_1^2)(X - x_2^2)(X - x_3^2)$, atunci valorile parametrilor reali a şi b sunt:
a) $a = -1$, $b = -1$;
b) $a = 0$, $b = 1$;
c) $a = 1$, $b = -1$;
d) $a = 1$, $b = 0$;
e) $a = 1$, $b = 1$;
f) $a = -1$, $b = 0$.

21. Dacă polinomul $f = X^3 - X - 5 \in \mathbb{R}[X]$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3, atunci valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este:
a) 0;
b) 4;
c) 10;
d) 15;
e) -5;
f) -10.

22. Dacă restul împărţirii polinomului $f = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - aX + b \in \mathbb{R}[X]$ la $g = (X-2)^2 \in \mathbb{R}[X]$ este $r = 3X - 1$, atunci valorile parametrilor reali a şi b sunt:
a) $a = -1$, $b = -3$;
b) $a = -1$, $b = 3$;
c) $a = 1$, $b = -3$;
d) $a = 1$, $b = 3$;
e) $a = 1$, $b = -1$;
f) $a = -3$, $b = 3$.

23. Probabilitatea ca un element $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ să fie rădăcină a polinomului $f = X^3 - 13X^2 + 39X - 27$ este:
a) $P = \frac{1}{7}$;
b) $P = \frac{2}{7}$;
c) $P = \frac{3}{7}$;
d) $P = \frac{4}{7}$;
e) $P = \frac{5}{7}$;
f) $P = 1$.

24. Dacă ecuaţia $x^3 - 9x^2 + 18x + a - 1 = 0$ are rădăcinile în progresie geometrică, atunci valoarea parametrului real a este:

a) $\{0, 1\}$;
b) $\{0, 9\}$;
c) 9;
d) 1;
e) $\{-7, 1\}$;
f) $\{1, 9\}$.

25. Dacă rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale polinomului $f = X^3 - 3X^2 + aX - 15$ verifică relaţia $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -21$ atunci valoarea parametrului real a este:
a) 31;
b) $\frac{31}{3}$;
c) 3;
d) $\frac{30}{4}$;
e) $\frac{32}{5}$;
f) $\frac{3}{31}$.

26. Dacă $f = X^4 + X^3 + X^2 + X - 4$, atunci $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2014)$ este:
a) 0;
b) 2014;
c) 1;
d) $1012 \cdot 2015$;
e) 2014^2;
f) 1012.

27. Dacă $f = X^3 - 13X^2 + 39X - 27$, atunci soluţiile ecuaţiei $f(\log_2 x) = 0$ sunt:
a) $x \in \{2, 8, 216\}$;
b) $x \in \{-9, -3, -1\}$;
c) $x \in \{1, 3, 9\}$;
d) $x \in \{2, 8, 512\}$;
e) $x \in \{2, 16, 1024\}$;
f) $x \in \{2, 8, 1024\}$.

28. Restul împărţirii polinomului $f = X^{100} - 3X^{99} + 5 \in \mathbb{R}[X]$ la polinomul $g = (X-1)(X+1) \in \mathbb{R}[X]$ este:
a) $r = -3X^2 + 6$;
b) $r = 3X + 6$;
c) $r = -3X + 6$;
d) $r = -3X + 9$;
e) $r = 3X - 6$;
f) $r = -3X^2 + 6X$.

29. Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile polinomului $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, atunci $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)$ este:
a) 125;
b) 25;
c) 20;
d) 15;
e) 10;
f) 5.

30. Soluţiile reale ale ecuaţiei $\ln^3 x - 6\ln^2 x + 11\ln x - 6 = 0$, $x > 0$, sunt:
a) ecuaţia nu are soluţii reale;
b) $x \in \{e, 2e, 3e\}$;
c) $x \in \{-3, -2, -1\}$;
d) $x \in \left\{\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^3}\right\}$;
e) $x \in \{e, e^2, e^3\}$;
f) $x \in \{1, 2, 3\}$.

31. Gradul polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea: $(X-2)^2 \cdot f(X+2) = f^2(X-1)$ este:
a) 2;
b) 1;
c) 0;
d) 3;
e) 6;
f) 8.

32. Numărul polinoamelor $f \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea: $(X-2) \cdot f(X+2) = f^2(X-1)$ este egal cu:
    a) 2;
    b) 0;
    c) 4;
    d) 3;
    e) 1;
    f) 5.

33. Fie $m \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia $x^4 + mx^3 + m^2x^2 - 3x + 2019 = 0$. Afirmaţia adevărată este:
    a) ecuaţia are rădăcina $x_1 = 1$;
    b) ecuaţia are toate rădăcinile reale;
    c) ecuaţia nu poate avea toate rădăcinile reale;
    d) ecuaţia are rădăcina $x_1 = 2$;
    e) ecuaţia are rădăcina $x_1 = -1$;
    f) ecuaţia are rădăcina $x_1 = -2$.

34. Fie $m \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia $x^4 + mx^3 + 4x^2 - 6x + 18 = 0$. Afirmaţia adevărată este:
    a) ecuaţia are rădăcina $x_1 = i$;
    b) ecuaţia are toate rădăcinile reale;
    c) ecuaţia are rădăcina $x_1 = 2i$;
    d) ecuaţia nu poate avea toate rădăcinile reale;
    e) ecuaţia are rădăcina $x_1 = -i$;
    f) ecuaţia are rădăcina $x_1 = -2i$.

35. Fie $m \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia $x^3 + mx^2 - 3x + 5 = 0$. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia are o rădăcină egală cu $1 + i$ este:
    a) $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$;
    b) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$;
    c) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$;

d) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$;

e) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$;

f) $\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

36. Fie ecuaţia $x^3+mx^2-3x+5=0$. Mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia are o rădăcină egală cu $1-i$ este:

a) $\left\{-3,\ \frac{1}{2}\right\}$;

b) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$;

c) $\left\{\frac{5}{3}\right\}$;

d) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$;

e) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$;

f) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

37. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi polinomul $f(X)=X^{n+1}-X+1$. Fie $r(X)$ restul împărţirii polinomului f la polinomul $g(X)=(X-1)^2$. Valoarea $r(1)$ este:

a) 1;
b) 0;
c) 4;
d) 3;
e) 1;
f) 5.

38. Fie $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ şi polinomul $f(X)=X^{2n+1}+3X+m$. Fie $r(X)$ restul împărţirii polinomului f la polinomul $r(X)=x^2-1$. Valoarea $r(m)$ este egală cu:

a) $-m$;
b) $5m$;

c) $4m$;

d) $3m$;

e) m;

f) $2m$.

39. Rădăcinile ecuaţiei $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$ sunt

a) x_1=1, x_2= 1, $x_3=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $x_4=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$;

b) $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_4=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$;

c) $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_4=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$;

d) $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_4=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$;

e) $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_4=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$;

f) $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $x_4=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

40. Rădăcinile ecuaţiei $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$ sunt:

a) $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_4=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$;

b) $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_4=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$;

c) $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $x_4=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$;

d) $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $x_4=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$;

e) $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_4=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

41. Considerăm polinoamele $f(X)=3X^4-2X^3+3X+2$ şi $g(X)=X^2+X+3$ în $\mathbb{R}[X]$. Fie $q(X)$ şi $r(X)$ câtul şi restul împărţirii polinomului $f(X)$ la $g(X)$. Atunci $q(1)+r(1)$ are valoarea:

a) 30;

b) 36;

c) 34;

d) 32;

e) -32;
f) -34.

42. Considerăm polinoamele $f(X) = 5X^4 - 7X^3 + 2X^2 + X - 2$ şi $g(X) = X^3 + 3X - 1$ în $\mathbb{R}[X]$. Fie $q(X)$ şi $r(X)$ câtul şi restul împărţirii polinomului $f(X)$ la $g(X)$. Atunci $q(-1) + r(1)$ are valoarea:
a) 3;
b) -7;
c) 7;
d) -3;
e) 8;
f) 5.

43. Considerăm polinoamele $f(X) = X^4 + \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$ şi $g(X) = X^2 + \hat{2}$ în $\mathbb{Z}_5[X]$. Fie $q(X)$ şi $r(X)$ câtul şi restul împărţirii polinomului $f(X)$ la $g(X)$. Atunci $q(\hat{1}) + r(\hat{1})$ are valoarea:
a) $\hat{1}$;
b) $\hat{0}$;
c) $\hat{4}$;
d) $\hat{2}$;
e) $\hat{3}$;
f) -10.

44. Considerăm polinoamele $f(X) = X^4 + \hat{2}X^3 + \hat{3}X + \hat{1}$ şi $g(X) = X^2 + X + \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_7[X]$. Fie $q(X)$ şi $r(X)$ câtul şi restul împărţirii polinomului $f(X)$ la $g(X)$. Atunci $q(\hat{1}) + r(\hat{1})$ are valoarea:
a) $\hat{5}$;
b) $\hat{4}$;
c) $\hat{3}$;
d) $\hat{2}$;
e) $\hat{1}$;
f) $\hat{0}$.

45. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n > 3$. Resturile împărţirilor lui f prin $X-1$, $X+1$ şi $X+2$ sunt 2, 4 şi 11. Atunci restul împărţirii polinomului f prin $(X^2-1)(X+2)$ este:
a) $X^2 - X - 1$;
b $2X^2 + X - 2$;
c) $2X^2 - X + 1$;
d) $X^2 + X + 1$;
e) $X^2 - X + 2$;
f) $2X^2 + X - 1$.

46. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad $n > 3$. Resturile împărţirilor lui f prin $X-1$, $X+1$ şi $X+3$ sunt 2, 6 şi 18. Atunci restul împărţirii polinomului f prin $(X^2-1)(X+3)$ este:
a) $X^2 + 4X + 3$;
b $X^2 - X - 1$;
c) $X^2 + 2X + 3$;
d) $X^2 - 2X + 3$;
e) $2X^2 + 3$;
f) $3X^2 - X + 1$.

47. Fie polinomul $f(x) = X^3 - 3X^2 - 4X + 12$ din $\mathbb{R}[X]$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale. Atunci $(4-x_1)(4-x_2)(4-x_3)$ are valoarea:
a) 6;
b 3;
c) 0;
d) -10;
e) 12;
f) 18.

48. Fie polinomul $f(X) = X^3 - 6X^2 + 5X + 12$ din $\mathbb{R}[X]$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale. Atunci $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$ are valoarea:
a) 4;
b 2;
c) -2;
d) 1;

e) -6;
f) 6.

49. Fie polinomul $f(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ din $\mathbb{R}[X]$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale. Ştiind că $x_1 + x_2 = -1$, valorile rădăcinilor polinomului f sunt:
a) -2, 1 şi 3;
b) -3, 2 şi 3;
c) -4, 3 şi -3;
d) -3, 2 şi 4;
e) 1, -2 şi 3;
f) 0, -1 şi 3.

50. Fie polinomul $f(X) = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$ din $\mathbb{R}[X]$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale. Ştiind că $x_2 x_3 = 6$, valorile rădăcinilor polinomului f sunt:
a) -3, 1 şi 2;
b) -3, -2 şi -1;
c) -6, -1 şi 1;
d) -6, -1 şi 0;
e) 6, 1 şi 2;
f) 1, 1 şi 3.

51. Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (4a + b) X^3 + (a - b) X^2 + X + 3$, $g = 5X^3 + X + (a - c)$. Atunci $f = g$ dacă (a, b, c) este:
a) $(1; 1; -2)$;
b) $(1; 1; 2)$;
c) $(1; 2; 1)$;
d) $(2; 2; 1)$;
e) $(-2; -2; 1)$;
f) $(-2; 2; 1)$.

52. Forma algebrică a polinomului $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \left(\hat{4}X + \hat{1}\right)^2 + \left(X + \hat{3}\right)\left(\hat{2}X + \hat{2}\right)$ este:
a) $X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$;
b) $\hat{3}X^2 + X + \hat{2}$;
c) $X^2 + X + \hat{3}$;

d) $\hat{3}X^2 + 2X + \hat{2}$;
e) $\hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{2}$;
f) $\hat{2}X^2 + X + \hat{3}$.

53. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Z}_6[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{3}$. Produsul $\pi = f\left(\hat{0}\right) f\left(\hat{1}\right) f\left(\hat{2}\right) f\left(\hat{3}\right) f\left(\hat{4}\right)$ este egal cu:
a) $\hat{0}$;
b) $\hat{1}$;
c) $\hat{2}$;
d) $\hat{3}$;
e) $\hat{4}$;
f) nicio variantă.

54. Dacă polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ satisface simultan condiţiile gradul lui f este minim, restul împărţirii lui f prin $(X+2)$ este (-3) şi restul împărţirii lui f prin $(X-1)$ este 3, atunci polinomul f este:
a) $X+2$;
b) $2X+1$;
c) $2X$;
d) $2X+2$;
e) $X+1$;
f) $-2X+1$.

55. Polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ ce satisface condiţiile: a) grad f minim: b) $x_1 = 1$ este rădăcină simplă a lui f; c) termenul liber este 1; d)restul împărţirii prin $(X-2)$ este egal cu 5, are următoarea formă algebrică:
a) $4X^2 + 3X + 1$;
b) $X^2 - 4X + 3$;
c) $3X^2 - 4X + 1$;
d) $-3X^2 + 4X + 1$;
e) $3X^2 + 4X + 1$;
f) $-4X^2 + X + 1$.

56. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât, simultan, să fie verificate condiţiile: a) grad$f \geq 2$; b) restul împărţirii lui f prin $(X-1)$ este 2;

c) $(X-1)\,f(X) = 2 - Xf(X-3)$. Atunci restul împărţirii lui f prin (X^2+X-2) este:

a) $X-2$;

b) $X+2$;

c) 2;

d) 2;

e) -2;

f) nicio variantă.

57. Fie polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$, $f \in \mathbb{R}[X]$. Dacă f împărţit prin (X^2-3X+1) dă restul $(2X+1)$, iar împărţit prin (X^2-1) dă restul $(-2X+2)$, atunci $S = a^2+b^2+c^2+d^2$ este:

a) $\frac{113}{9}$;

b) 1;

c) $\frac{68}{9}$;

d) $\frac{77}{9}$;

e) $\frac{116}{9}$;

f) 13.

58. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = mX^4 + nX^3 - 3$. Dacă $f(X) \vdots (X-1)^2$, atunci $(m-n)$ este egal cu una din următoarele valori:

a) -1;

b) 1;

c) 21;

d) -21;

e) 0;

f) nicio variantă.

59. Dacă $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + (m+n)X^3 + (m-1)X^2 + X + 2n + 1$, $g = X^2 + 2X + 3$ şi $f \vdots g$, atunci $(2m+3n)$ este:

a) -4;

b) 4;

c) 10;
d) -10;
e) 6;
f) -6.

60. Fie $f \in \mathbb{Z}_6[X]$ a cărui formă este $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, iar $a_n = 2a^3 + \hat{5}$, $a \in \mathbb{Z}_6$. Atunci grad$f$ este:
a) n, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_6$;
b) $n-1$, dacă $a = \hat{1}$;
c) n, dacă $a \neq 0$;
d) $n-1$, dacă $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$;
e) $n-2$, dacă $a \in \mathbb{Z}_6$;
f) n, dacă $a \neq \hat{5}$.

61. Restul împărţirii polinomului $f = (x-1)^{10} + (x-2)^{10}$ prin polinomul $g = X^2 - 3X + 2$ este:
a) $X+1$
b) X;
c) 1;
d) $X-1$;
e) $2X-1$;
f) $-X$.

62. În $\mathbb{Z}_7[X]$ se consideră $f = \hat{2}X^4 + \hat{4}X^3 + \hat{2}X^2 + X + \hat{1}$ şi $g = X + \hat{a}$. Atunci $f \vdots g$ dacă:
a) $a \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$;
b) $a \in \{\hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$;
c) $a \in \{0, \hat{4}\}$;
d) $a \in \{\hat{2}, \hat{5}, \hat{6}\}$;
e) $a \in \{\hat{0}\}$;
f) $a \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$.

63. Se consideră polinomul $f = X^3 - X - 5$, $f \in \mathbb{R}[X]$. Restul împărţirii polinomului f prin $(X-a)$ este -5 dacă:
a) $a = 1$;

b) $a \in \{\pm 1, 0\}$;
c) $a = 0$;
d) $a = \pm 1$;
e) $a = \pm 2$;
f) nicio variantă.

64. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 4X^2 - 5X + 14$ şi $\tau_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci $\tau_5 = a\tau_4 + b\tau_3 + c\tau_2$ pentru (a, b, c) egal cu:
a) $(4; 5; 14)$;
b) $(-4; -5; 14)$;
c) $(4; 5; -14)$;
d) $(4; -5; -14)$;
e) $(5; 4; 14)$;
f) $(5; 4; -14)$.

65. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = (X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$ şi $g = \left(X^2 + X + 1\right)^2$. Atunci $f \vdots g$ dacă:
a) $n \in \{4, 5, 6, \ldots\}$;
b) $n \in \mathbb{N}$;
c) $n \in 2\mathbb{N}$;
d) $n \in (2\mathbb{N} + 1)$;
e) $n \in 6\mathbb{N}$;
f) $n \in (3\mathbb{N} + 1)$.

66. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 - 8X^2 + aX + b$. Dacă $f \vdots (X - 4)$ şi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 22$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile lui f, atunci expresia $E = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 - i}{x_1^3 + x_2^3 + 2i}$ (unde $x_{1,2}$ sunt rădăcinile complexe ale lui f, are valoarea:
a) $E = \dfrac{8 + 11i}{10i}$;
b) $E = \dfrac{11 + 8i}{10}$;
c) $E = \dfrac{8i - 11}{10}$;
d) $E = 1 + i$;

e) $E = \dfrac{11i - 8}{10}$;

f) $E = \dfrac{-11i - 8}{10i}$.

67. Fie polinomul $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$. Atunci $x_1 = i$ este rădăcină a lui f dacă $S = a^2 + b^2$ este:
a) 144;
b) 169;
c) 160;
d) 0;
e) 16;
f) 196.

68. Fie polinomul $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale. Atunci x_1, x_2, x_3 sunt în progresie aritmetică şi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$ dacă $P = ab$ este egal cu:
a) -48;
b) 48;
c) 12;
d) -12;
e) 4;
f) -4.

69. Rădăcinile polinomului $f(X) = X^3 - 6X^2 + mX - 6$ sunt în progresie aritmetică dacă parametrul $m \in \mathbb{R}$ este egal cu:
a) 10;
b) 13;
c) 11;
d) 15;
e) 12;
f) 3.

70. Ecuaţia $f(x) = 0$, unde $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (a+1)X^4 + (a+b-1)X^3 + (a-b+2)X^2 + (a+b-1)X + (1-b)$, admite şi rădăcini independente de parametrii a şi b dacă $(a; b)$ este:

a) $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$;

b) $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

c) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$;

d) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$;

e) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$;

f) $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

71. Fie polinomul $f(X) = X^3 - 3aX + 2ab\,(a > 0)$. Ecuaţia $f(x) = 0$ admite o rădăcină reală dublă dacă:

a) $3a = 2b$;

b) $a = \frac{b^2}{\sqrt{2}}$;

c) $a = b^2$;

d) $a^3 = 5b$;

e) $a = 2b$;

f) $a = b$.

72. Se consideră polinomul $f = X^4 - mX^3 + (m+n)X^2 + (p+1)X + (n-2p)$, $f \in \mathbb{R}[X]$. Atunci f admite 1 ca rădăcină triplă dacă m, n, p sunt astfel încât:

a) $\left(-\frac{17}{7}; \frac{8}{7}; \frac{2}{7}\right)$;

b) $\left(\frac{17}{7}; -\frac{8}{7}; -\frac{2}{7}\right)$;

c) $\left(-\frac{17}{7}; -\frac{8}{7}; \frac{2}{7}\right)$;

d) $\left(-\frac{8}{7}; \frac{17}{7}; -\frac{2}{7}\right)$;

e) $\left(-\frac{8}{7}; -\frac{17}{7}; \frac{2}{7}\right)$;

f) $\left(-\frac{2}{7}; -\frac{8}{7}; \frac{17}{7}\right)$.

73. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 28X + m$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile acestuia. Atunci $x_1 = 2x_2$ dacă parametrul real m este egal cu:
a) ± 48;
b) -48;
c) 12;
d) -12;
e) 24;
f) -24.

74. Ecuaţia $f(x) = 0$, unde $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + (m+1)X^2 + nX - 1$ admite ca rădăcină pe $\left(1 - \sqrt{2}\right)$ dacă $S = m^3 + n^3$ are valoarea:
a) 35;
b) -35;
c) -27;
d) 27;
e) -8;
f) 8.

75. Fie ecuaţia $f(x) = 0$, $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + (2m-5)X^2 + (9-5m)X + 2(m-3)$. Precizati care afirmaţie este corectă:
a) ecuaţia nu admite rădăcini independente de parametrul m;
b) ecuaţia admite cel puţin o rădăcină reală, pentru orice $m \in \mathbb{R}$;
c) ecuaţia admite numai rădăcini reale, pentru orice $m \in \mathbb{R}$;
d) dacă $m > 0$ atunci ecuaţia admite două rădăcini reale negative;
e) ecuaţia admite o rădăcină reală şi două rădăcini complexe, pentru orice $m \in \mathbb{R}$;
f) nicio variantă nu este adevărată.

76. Considerăm polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - X + 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Fie $z = \frac{x_1(1 - x_1^2 + x_3)}{x_2^2}$. Atunci, z este egal cu:
a) x_1;
b) $\frac{1}{x_2}$;

c) 2;
d) $\sqrt{2}$;
e) 1;
f) i.

77. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n$, R_1 restul împărţirii lui f prin $X-1$, R_2 restul împărţirii lui f prin $(X-1)^2$. Fie $r_1 = R_1(2)$, $r_2 = R_2(3)$ şi $r_3 = r_1 + r_2$. Atunci:
a) $r_3 = -2$;
b) $r_3 = 0$;
c) $r_3 = 6$;
d) $r_3 = -5$;
e) $r_3 = 2$;
f) $r_3 = 4$.

78. Fie $f(x) = 0$ ecuaţia asociată polinomului $f = X^n - X - 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi $S = \dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + \cdots + \dfrac{1}{1+x_n}$. Atunci:
a) $S_n = n + (-1)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
b) $S_n = n + (-1)^n$;
c) $S_{100} = -99$;
d) $S_{200} = -200$;
e) $S_3 = 4$;
f) $S_{2018} = 1$.

79. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 + aX^3 + aX + 1$ un polinom ale cărui rădăcini sunt x_1, x_2, x_3, x_4. Atunci $P = \prod_{k=1}^{4}(1 - 2x_k)$ este egal cu:
a) $-17 + a$;
b) $-17 - a$;
c) $17 + 10a$;
d) $17 - 10a$;
e) $10 + 17a$;
f) $10 - 17a$.

CAPITOLUL 18

PRIMITIVE

1. Dacă $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x + 3}{x + 1}$, atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:

   a) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + C$;

   b) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + C$;

   c) $3x^3 - 2x + 3x + C$;

   d) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 3x + C$;

   e) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 3x + C$;

   f) $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 3x + C$.

2. Dacă $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} + x \ln x$, atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:

   a) $\dfrac{4}{3}x\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{2} + C$;

   b) $\dfrac{4}{3}x\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$;

c) $\frac{4}{3}\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$;

d) $\frac{4}{3}\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{2}+C$;

e) $\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^3}{3}+C$;

f) $\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^3}{3}+C$;

3. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{3}x^3-6x^2-4x-3+5\sqrt[3]{x^2}$, atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:

a) $\frac{x^4}{6}-2x^3-2x^2-3x+\frac{15}{2}x\cdot\sqrt[3]{x^2}+C$;

b) $\frac{x^4}{6}-2x^3-2x^2-3x+10x\cdot\sqrt[3]{x^2}+C$;

c) $\frac{x^4}{6}-2x^3-2x^2-3x+\frac{5}{3}x\cdot\sqrt[3]{x^2}+C$;

d) $\frac{x^4}{4}-2x^3-2x^2-3x+3x\cdot\sqrt[3]{x^2}+C$;

e) $\frac{x^4}{6}-2x^3-2x^2-3x+3\cdot\sqrt[5]{x^3}+C$;

f) $\frac{x^4}{6}-2x^3-2x^2-3x+3x\cdot\sqrt[3]{x^2}+C$.

4. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x\cdot 3^x$, atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:

a) $\frac{6^x}{\ln 6}+C$;

b) $\frac{6^{x^2}}{\ln 6}+C$;

c) $6^x\ln 6+C$;

d) $\frac{6^{2x}}{\ln 6}+C$;

e) $\frac{6^x}{\ln 2\cdot\ln 3}+C$;

f) $6^{2x}\ln 6$.

5. Dacă $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln^4 x}{x}$ atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:

a) $4\ln^3 x + C$;
b) $5\ln^5 x + C$;
c) $\ln^5 x + C$;
d) $\dfrac{\ln^5 x}{5} + C$;
e) $\dfrac{\ln^5 x}{x} + C$;
f) $\dfrac{6\ln^5 x}{x} + C$.

6. Primitiva F a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ al cărei grafic trece prin punctul $P(1,5)$ este:
a) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + C$;
b) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$;
c) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 5$;
d) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$;
e) $F(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$;
f) $F(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 4$.

7. Dacă $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x+2}$, atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:
a) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x}{3} - 8 + C$;
b) $\dfrac{x^4}{3} - \dfrac{2x^3}{3} + 2x^2 - 8x + C$;
c) $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + 2x^2 - 8x + C$;
d) $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + 2x^2 + 8x + C$;
e) $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 8x + C$;
f) $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - x + C$.

8. Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = (ax+b)\,e^x$ este primitiva funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (2x+3)\,e^x$, atunci valorile parametrilor reali a şi b sunt:
a) $a = -2$, $b = 1$;

b) $a = -1$, $b = 1$;
c) $a = 1$, $b = 2$;
d) $a = 1$, $b = 1$;
e) $a = 2$, $b = 1$;
f) $a = 2$, $b = 2$.

9. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$, atunci $\displaystyle\int f''(x)\,dx$ este:
a) $(x+1)e^x + C$;
b) $(x+2)e^x + C$;
c) $(x+3)e^x + C$;
d) $(x^2+1)e^x + C$;
e) $(x^2+2)e^x + C$;
f) $x^2e^x + C$.

10. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x\sin(2+3x^2)$, atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:
a) $\dfrac{\cos(2+3x^2)}{6} + C$;
b) $\dfrac{-\cos(2+3x^2)}{6} + C$;
c) $\dfrac{x^2}{2}\cos\left(2+3x^2\right) + C$;
d) $\dfrac{x^2}{2}\cos\left(2x+x^3\right) + C$;
e) $6\cos(2+3x^2) + C$;
f) $-6\cos(2+3x^2) + C$.

11. Fie $a, k \in \mathbb{R}$ şi funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = a \cdot \sqrt[3]{(1+x^2)^k}$. Suma valorilor lui a şi k astfel încât funcţia F să fie o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{1+x^2}$ este egală cu:
a) $\dfrac{5}{7}$;
b) 0;
c) 1;
d) $\dfrac{3}{4}$;

e) $\dfrac{12}{5}$;

f) $\dfrac{35}{8}$.

12. Fie $a, k \in \mathbb{R}$ şi funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = x^k e^{ax}$. Produsul valorilor lui a şi k astfel încât funcţia F să fie o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = (x+1)e^x$ este egal cu:

a) -2;

b) 1;

c) 2;

d) -1;

e) 3;

f) -3.

13. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$ şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin: $f(x) = \begin{cases} 3x-4, & x \leq 2 \\ ax+6, & x > 2. \end{cases}$ Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitiva funcţiei f care are proprietatea $F(3) = 4$ şi suma $S = \sum\limits_{k=3}^{n} F(k)$. Valoarea sumei este:

a) $\dfrac{n^3+15n^2-13n-18}{2}$;

b) $\dfrac{n^3-15n^2+13n-18}{3}$;

c) $\dfrac{-2n^3+15n^2-13n-18}{6}$;

d) $\dfrac{n^3+15n^2-13n+18}{4}$;

e) $\dfrac{-n^3-15n^2+13n-18}{5}$;

f) $\dfrac{-n^3-15n^2-13n-18}{7}$.

14. Fie integrala nedefinită $I = \int e^x \sin x dx$. Atunci:

a) $I = -\dfrac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$;

b) $I = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$;

c) $I = -\frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x) + C$;

d) $I = \frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x) + C$;

e) $I = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$;

f) $I = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C$.

15. Fie integrala nedefinită $I = \int e^{x}\cos x dx$. Atunci:

a) $I = -\frac{1}{2}e^{x}(\sin x + \cos x) + C$;

b) $I = \frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x) + C$;

c) $I = -\frac{1}{2}e^{x}(\sin x - \cos x) + C$;

d) $I = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$;

e) $I = \frac{1}{2}e^{x}(\sin x + \cos x) + C$;

f) $I = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C$.

16. Fie integrala nedefinită $I = \int \sin^{3} x dx$. Atunci:

a) $I = \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{1}{13}\cos 7x + C$;

b) $I = \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{13}\cos 5x + C$;

c) $I = \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{13}\cos 2x + C$;

d) $I = -\frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + C$;

e) $I = \frac{3}{4}\cos 5x + \frac{1}{3}\cos 3x + C$;

f) $I = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$.

17. Fie integrala nedefinită $I = \int \cos^{3} x dx$. Atunci:

a) $I = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$;

b) $I = \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{13}\cos 5x + C$;

c) $I = \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{13}\sin 2x + C$;

d) $I = -\frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + C$;

e) $I = \frac{3}{4}\cos 5x + \frac{1}{3}\sin 3x + C$;

f) $I = \frac{1}{2}\cos 5x + \frac{3}{4}\sin x + C$.

18. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi integralele nedefinite $I_n = \int x^n e^x dx$. Fie $f_n(x) = I_n + nI_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci:

a) $f_n(x) = x^{2n}e^{-x}$;

b) $f_n(x) = x^n e^x$;

c) $f_n(x) = x^{2n}e^x$;

d) $f_n(x) = x^{2n}e^{2x}$;

e) $f_n(x) = x^n e^{-x}$;

f) $f_n(x) = x^n e^{-2x}$.

19. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi integralele nedefinite $I_n = \int x^n \sin x dx$. Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea: $f_n(x) = I_n + n(n-1)I_{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci:

a) $f_n(x) = x^{n+1}(\sin x - x\sin x)$;

b) $f_n(x) = x^{n+1}(n\sin x + x\cos x)$;

c) $f_n(x) = x^{n-1}(n\sin x - x\cos x)$;

d) $f_n(x) = x^{n-1}(\sin x - 2x\cos x)$;

e) $f_n(x) = x^{n+1}(n\sin x + x\cos x)$;

f) $f_n(x) = x^{n+1}(\sin x + x\cos x)$.

20. Fie integrala nedefinită $I = \int \frac{1+x^2}{x^2}\sin\left(x - \frac{1}{x}\right)dx$. Atunci:

a) $I = -\cos\left(x + \frac{1}{x}\right) + C$;

b) $I = \cos\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+C$;

c) $I = -\sin\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+C$;

d) $I = -\cos\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+C$;

e) $I = \sin\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+C$;

f) $I = \sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+C$.

21. Fie $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x\sqrt{x+1}$. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $F : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = (ax^2+bx+c)\sqrt{x+1}$ să fie o primitivă a funcţiei f. Atunci $a+b+c$ este:

a) $\dfrac{4}{3}$;

b) $\dfrac{2}{3}$;

c) $\dfrac{8}{3}$;

d) 4;

e) -2;

f) $-\dfrac{4}{3}$.

22. Fie $f : \left(-\dfrac{1}{2},\infty\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x+1}$. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $F : \left(-\dfrac{1}{2},\infty\right) \to \mathbb{R}$, $F(x) = (ax+b)\sqrt{2x+1}$ este o primitivă a funcţiei f. Atunci a^2+b^2 este:

a) 0;

b) $\dfrac{4}{9}$;

c) 8;

d) 2;

e) 4;

f) $\dfrac{1}{9}$.

23. Dacă $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-2x-3}$, atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:
a) $\ln\left(\sqrt{|x+1|^3|x-3|}\right) + C$;
b) $\ln\left(\sqrt{|x+1| \cdot |x-3|}\right) + C$;
c) $\ln\left(\sqrt[4]{|x+1|^3 \cdot |x-3|}\right) + C$;
d) $\ln\left(\sqrt{\dfrac{|x-3|^3}{|x+1|}}\right) + C$;
e) $\ln\left(\sqrt{\dfrac{|x+1|}{|x-3|}}\right) + C$;
f) $\ln\left(\sqrt{|x-1| \cdot |x+3|}\right) + C$.

24. Dacă $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-3x+2}$, atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:
a) $3\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + C$;
b) $-3\ln|x-1| + 5\ln|x-2| + C$;
c) $5\ln|x-1| - 3\ln|x-2| + C$;
d) $5\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$;
e) $-3\ln|x-1| - 5\ln|x-2| + C$;
f) $-5\ln|x+1| - 3\ln|x-2| + C$.

25. Dacă $f : \mathbb{R}\setminus\{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3x^2-2x)e^x$, atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:
a) $(3x^2 - 4x - 6)\, e^x + C$;
b $(3x^3 - 4x - 4)\, e^x + C$;
c) $(3x^2 - 8x + 8)\, e^x + C$;
d) $(3x^2 - 4x - 8)\, e^x + C$;
e) $(3x^2 + 4x)\, e^x + C$;
f) $3x^2e^x + C$.

26. Dacă $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3x^2 - 2x + 1)e^{2x}$, atunci mulţimea primitivelor funcţiei f este:
a) $(3x^2 - 5x + 7)\, e^{2x} + C$;

b $\frac{1}{2}\left(3x^2-5x-7\right)e^{2x}+C$;

c) $\left(3x^2-6x+8\right)e^{x}+C$;

d) $\frac{1}{4}\left(6x^2-10x+7\right)e^{2x}+C$;

e) $\frac{1}{2}\left(3x^2+4x-10\right)e^{2x}+C$;

f) $3x^3e^x+C$.

27. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+x+1}$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa astfel încât $F(0)=0$. Atunci $F(1)$ are valoarea:

a) $\frac{\ln 3}{\pi}$;

b $\frac{\ln 3}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$;

c) $\pi\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{9}$;

d) $\frac{1}{18}+\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$;

e) $\ln 3+\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$;

f) $\ln 3$.

28. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+2x+1}$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa astfel încât $F(0)=0$. Atunci $F(4)$ are valoarea:

a) 1;

b $\ln 25-10$;

c) $2\ln 5-\frac{5}{2}$;

d) $\ln 10-4$;

e) $\ln 5+4$;

f) $2\ln 5-4$.

29. Fie F o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei $f(x)=(x+2)\sin x$ cu $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Atunci $\lim\limits_{x\to 0}F(x)$ este:

a) -1;

b) 0;

c) 1;

d) 2;

e) -2;

f) -3.

30. Fie F o primitivă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ a funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$ cu $F(0) = 0$. Atunci $\lim\limits_{x \to \infty} F(x)$ este:

a) $\dfrac{1}{3}$;

b) $\dfrac{1}{2}$;

c) 0;

d) ∞;

e) -1;

f) $-\dfrac{1}{2}$.

31. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, x < 0 \\ e^{-x}, x \geq 0 \end{cases}$ satisface afirmaţia:

a) f este derivabilă pe $\mathbb{R}$;

b) nu admite primitive pe$\mathbb{R}$;

c) f admite primitive şi o primitivă a sa este $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x, x \leq 0 \\ -e^{-x}, x > 0 \end{cases}$;

d) f admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi o primitivă a sa este $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x, x \leq 0 \\ -e^{-x} + 1, x > 0 \end{cases}$;

e) f nu are proprietatea lui Darboux;

f) nicio variantă.

32. Valorile parametrului real a pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x, x \leq 0 \\ x + a, x > 0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ se află în:

a) $\emptyset$;

b) $\{1\}$;

c) $\{0\}$;

d) $\{-1,\ 1\}$;
e) $[-1, 1]$;
f) $\{-1,\ 0,\ 1\}$.

33. Funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^{-x}(a\cos 4x+b\sin 4x)$ este o primitivă a funcţiei $f(x)=e^{-x}\cos 4x$ dacă:
a) $a=\frac{1}{17}$, $b=-\frac{4}{17}$;
b) $a=-\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$;
c) $a=1$, $b=0$;
d) $a=-\frac{1}{17}$, $b=\frac{4}{17}$;
e) $a=-\frac{3}{16}$, $b=\frac{5}{16}$;
f) nicio variantă.

34. Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ primitiva funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-1, x<1\\ 1, x=1\\ x^2, x>1\end{cases}$ ce satisface conditia $F(4)=8$. Atunci, $F(1)$ este:
a) -13;
b) 13;
c) 0;
d) >0;
e) 20;
f) nicio variantă.

35. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, x\le 0\\ 0, x\in(0,1)\\ -1, x\ge 1\end{cases}$. Precizaţi care este afirmaţia corectă:
a) $F_1(x)=\begin{cases}x+1, x\le 0\\ 1, x\in(0,1)\\ -x+2, x\ge 1\end{cases}$, primitivă pentru f;

b) $F_2(x) = \begin{cases} x+1, x \leq 0 \\ c, x \in (0,1) \\ -x+c+1, x \geq 1 \end{cases}$ este primitivă pentru f;

c) $F_3(x) = \begin{cases} x+c_1, x \leq 0 \\ c_2, x \in (0,1) \\ -x+c+1, x \geq 1 \end{cases}$, $c_1 \neq c_2$, primitivă a lui F;

d) $F_4(x) = \begin{cases} -x+1, x \leq 0 \\ 1, x \in [0,1] \\ x+2, x \geq 1 \end{cases}$, primitivă pentru f;

e) f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$;

f) f are proprietatea lui Darboux.

36. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2+\ln(1-x), x < 0 \\ a, x = 0 \\ 1+e^{-2x}, x > 0 \end{cases}$. Atunci f admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă parametrul real a este:

a) 1;

b) 2;

c) -1;

d) $\frac{1}{2}$;

e) 3;

f) nicio variantă.

37. Dacă $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & x \in (0,e] \\ ax+b, & x > 0 \end{cases}$ reprezintă o primitivă a unei funcţii $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, atunci ab este:

a) $\frac{3}{e}$;

b) $1-e$;

c) $4e$;

d) $-\frac{6}{e}$;

e) $\frac{e}{2}$;

f) nicio variantă.

38. Dacă $F(x) = e^{-x}(a\sin x + b\cos x)$ este o primitivă a funcţiei $f(x) = e^{-x}\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, atunci $(3a + 5b)$ este egal cu:

a) -5;

b) -4;

c) -3;

d) -2;

e) -1;

f) nicio variantă.

39. Dacă F este o primitivă a funcţiei $f(x) = x - 2 + |x - 1| + |x - 3|$ cu proprietatea $F(2) = 0$, atunci $F(4)$ este egal cu:

a) 8;

b) 7;

c) 6;

d) 5;

e) 4;

f) nicio variantă.

40. Se consideră primitiva F a funcţiei $f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că graficul lui F este tangent curbei de ecuaţie $y = x^2$. Atunci, expresia analitică a lui F este:

a) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 2$;

b) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 1$;

c) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$;

d) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 1$;

e) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$;

f) nicio variantă.

41. Dacă $F : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{c}{x} + b + a\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ este o primitivă a funcţiei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ dacă:

a) $a = b = 1, c = 0$;

b) $a = 1$, $b = c = 0$;

c) $a = -1$, $b = c = 1$;

d) $a = b = c = 1$;

e) $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$;

f) nicio variantă.

42. Primitiva functiei $f(x) = \cos^2 x$, al cărui grafic conţine punctul $M_0\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ este:

a) $F(x) = \dfrac{x}{4} - \dfrac{\sin 2x}{2}$;

b) $F(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{2}$;

c) $F(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$;

d) $F(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{\sin 2x}{2}$;

e) $F(x) = \dfrac{x}{8} - \dfrac{\sin 2x}{4}$;

f) nicio variantă.

43. Dacă F este primitiva funcţiei $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + x^2 - x - 1}$, $x \in D$, cu proprietatea $F(2) = \ln\dfrac{1}{16}$, atunci $F(0)$ este:

a) $\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{\sqrt[4]{3}}{16}$;

b) $-2 + \ln\dfrac{\sqrt[4]{3}}{16}$;

c) $2 + \ln\dfrac{\sqrt[4]{3}}{16}$;

d) $-\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{\sqrt[4]{3}}{16}$;

e) $-3+\ln\frac{\sqrt[4]{3}}{16}$;

f) $-\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt[4]{3}}{16}$.

44. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{xe^{nx}+x^2+a}{e^{nx}+1}$, $a\in\mathbb{R}$. Funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă parametrul real a este:
a) 1;
b) 0;
c) -1;
d) real;
e) în $\mathbb{R}^*$;
f) nicio variantă.

45. Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a unei funcţii continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $F(x)f(x)=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi $F(0)=1$, atunci:
a) $F(x)\equiv 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$;
b) $F(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$;
c) $F(x)=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$;
d) $F(x)=\sqrt{1+x^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$;
e) $F(x)\equiv 0, x\in\mathbb{R}$;
f) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

46. $I=\int\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$, $x\in\mathbb{R}$ este:
a) $\ln(1+\cos^2 x)+C$;
b) $\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+C$;
c) $\operatorname{arctg}(\cos x)+C$;
d) $-\operatorname{arctg}(\cos x)+C$;
e) $-\operatorname{arcctg}(\cos x)+C$;
f) nicio variantă.

47. $I=\int\frac{x}{(x^2+3)(x+1)}dx$, $x>0$ este:

a) $-\frac{1}{4}\ln(x+1)+\frac{1}{8}\ln\left(x^2+3\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$;

b) $-\frac{1}{8}\ln(x+1)+\text{arctg}x+C$;

c) $\frac{1}{2}\ln(x+1)^2+\ln\left(x^2+3\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$;

d) f nu admite primitive pe $(0,\infty)$;

e) $2\ln(x)^2+\text{arctg}x+C$;

f) nicio variantă.

48. $\int\frac{x^2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}dx = \frac{ax+b}{x^2+2x+2}+\int\frac{(cx+d)}{x^2+2x+2}dx$, $x\in\mathbb{R}$ are loc dacă:

a) $a=c=-1,\ b=d=1$;

b) $a=c=0,\ b=d=1$;

c) $a=b=-1,\ c=1, d=0$;

d) $a=0,\ b=c=d=1$;

e) $a=b=1,\ c=0, d=-1$;

f) nicio variantă.

49. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă, atunci integrala nedefinită a funcţiei $g(x)=\left[1+xf'(x)\right]e^{f(x)}$ este:

a) $e^{f(x)}+C$;

b) $-e^{f(x)}+C$;

c) $xe^{f(x)}+C$;

d) $-xe^{f(x)}+C$;

e) $2xe^{f(x)}+C$;

f) nicio variantă.

50. $I=\int\frac{dx}{x\ln x}$, $x>0$ este:

a) $(\ln x)^2+C$;

b) $\ln|\ln x|+C$;

c) $-\ln|\ln x|+C$;

d) $2\ln|\ln x|+C$;

e) $\dfrac{(\ln x)^2}{2} + C$;

f) nicio variantă.

51. $I = \displaystyle\int e^x \sin x dx$, $x \in \mathbb{R}$ este:

a) $\dfrac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$;

b) $e^x \cos x + C$;

c) $\dfrac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C$;

d) $e^x (\sin x + \cos x) + C$;

e) $e^x (-\sin x + \cos x) + C$;

f) nicio variantă.

52. $I = \displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, cu $I\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ este:

a) $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$;

b) $-\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + 2$;

c) $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x + 1$;

d) $\sin 2x + \cos 2x - 1$;

e) $\mathrm{tg}x + \cos 2x$;

f) nicio variantă.

53. $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \sqrt{1 - \cos 2x}}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ este:

a) $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x + C$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln \mathrm{tg}x + C$;

c) $\dfrac{1}{2} \ln \mathrm{tg}x + C$;

d) $\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{tg}x - \ln \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right) + C$;

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{tg}x + \ln \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right) + C$;

f) nicio variantă.

54. $I = \displaystyle\int \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 dx$, $x \in (-1, \infty)$ este:

a) $I = 2x \ln (x + 1) + C$;

b) $I = 2\ln(x+1) - \dfrac{x}{x-1} + C$;

c) $I = x + 2\ln(x+1) - \dfrac{1}{x+1} + C$;

d) $I = x - \dfrac{1}{x+1} + C$;

e) $I = x + 1 + \dfrac{1}{x} + C$;

f) nicio variantă.

55. $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$, $x > 0$, este egal cu:

a) $\sqrt{1+x^2} + \ln\sqrt{x^2+1} + C$;

b) $\sqrt{x^2+1} - \ln\left[\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right] + C$;

c) $\sqrt{x^2+1} + \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{+1x^2}}{x}\right) + C$;

d) $\ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{x^2+1}\right) + \sqrt{x^2+1} + C$;

e) $\ln\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{x^2+1} + C$;

f) $x\ln\sqrt{x^2+1} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

CAPITOLUL 19

INTEGRALA DEFINITĂ

1. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x + 3^{-x}$, atunci $I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ este:

   a) $\frac{16}{\ln 27}$;
   b) $\frac{16}{\ln 9}$;
   c) $\frac{16}{\ln 3}$;
   d) 0;
   e) $\frac{16}{2\ln 3}$;
   f) $16 \ln 27$.

2. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$, atunci $I = \int_{0}^{1} f'(x) \cdot e^{f(x)} dx$ este:

   a) e;
   b) $e - 1$;
   c) $\sqrt{e}$;
   d) $\sqrt{e} - 1$;
   e) $\frac{e^3 - 1}{2}$;

f) $\dfrac{e^2(e-1)}{2}$.

3. Valoarea integralei $I = \displaystyle\int_3^7 \sqrt{2x-5}dx$ este:

a) 9;

b) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$;

d) $\dfrac{13}{3}$;

e) $\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}$;

f) $\dfrac{26}{3}$.

4. Valoarea integralei $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{1}{|x-2|+1}dx$ este:

a) $\ln 2$;

b) $\ln 3$;

c) $\ln 6$;

d) $-\ln 6$;

e) $\ln\dfrac{3}{2}$;

f) $-\ln\dfrac{3}{2}$.

5. Valoarea integralei $I = \displaystyle\int_1^{e^2} x^3 \ln x dx$ este:

a) $\dfrac{7e^8+1}{12}$;

b) $\dfrac{9e^8-1}{16}$;

c) $\dfrac{9e^8+1}{16}$;

d) $\dfrac{7e^8}{16}-1$;

e) $\dfrac{7e^8+1}{16}$;

f) $\dfrac{7e^8-1}{16}$.

6. Valoarea integralei $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+8}{x+2}dx$ este:

a) $-\dfrac{10}{3}$;

b) $\dfrac{10}{3}$;

c) $\dfrac{11}{3}$;

d) 4;

e) 3;

f) $\dfrac{13}{3}$.

7. Valoarea integralei $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx$ este:

a) $\dfrac{\pi}{8}$;

b) $\dfrac{\pi}{8}+1$;

c) $\dfrac{\pi}{8}-1$;

d) $\dfrac{\pi}{4}$;

e) $\dfrac{2\pi}{3}$;

f) $\dfrac{\pi}{4}-1$.

8. Valoarea parametrului real a pentru care $\displaystyle\int_1^{2+a} 7^x \ln 7 dx = 42$ este:

a) $a=-1$;

b) $a=0$;

c) $a=1$;

d) $a=2$;

e) $a=3$;

f) $a=4$.

9. Valoarea parametrului real a pentru care $\int_1^2 \left(x + \frac{a+1}{x}\right) dx = \frac{3}{2} + 3\ln 2$ este:

   a) $a = -1$;

   b) $a = 0$;

   c) $a = 1$;

   d) $a = 2$;

   e) $a = 3$;

   f) $a = 4$.

10. Valoarea integralei definite $\int_1^2 (3x^2\sqrt{x} - 16x)dx$ este:

    a) $\frac{48\sqrt{2}+174}{7}$;

    b) $\frac{48\sqrt{2}-174}{7}$;

    c) $\frac{48\sqrt{2}-165}{7}$;

    d) $\frac{48\sqrt{2}-168}{7}$;

    e) $\frac{48\sqrt{2}-164}{7}$;

    f) $\frac{48\sqrt{2}-154}{7}$.

11. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$, atunci valoarea parametrului real $a \in (0,1)$, pentru care $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 1$, este:

    a) $a = \frac{1}{2}$;

    b) $a = \frac{1}{3}$;

    c) $a = \frac{1}{4}$;

    d) $a = \frac{1}{5}$;

e) $a = \dfrac{2}{3}$;

f) $a = \dfrac{3}{4}$.

12. Valoarea integralei definite $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ este:

a) 1;

b) $\dfrac{e-2}{2e}$;

c) $\dfrac{e-2}{e}$;

d) $\dfrac{-e-2}{e}$;

e) $\dfrac{e+2}{e}$;

f) $\dfrac{2-e}{e}$;

13. Valoarea integralei definite $I = \displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2} dx$ este:

a) $-\dfrac{2}{15}$;

b) $\dfrac{2}{15}$;

c) $\dfrac{8}{15}$;

d) $\dfrac{4}{15}$;

e) $\dfrac{7}{15}$;

f) $\dfrac{1}{15}$.

14. Valoarea integralei definite $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^6+1}} dx$ este:

a) 0;

b) $\dfrac{\pi}{8}$;

c) $\arcsin\sqrt{2}$;

d) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$;

e) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$;

f) $\dfrac{\pi}{4}-1$.

15. Valoarea integralei definite $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x-4}{x+3}dx$ este:

a) 1;

b) $1+7\ln\dfrac{3}{4}$;

c) $1+7\ln\dfrac{4}{3}$;

d) $1-7\ln\dfrac{3}{4}$;

e) $1-7\ln\dfrac{4}{3}$;

f) $1-7\ln 12$.

16. Valoarea parametrului real a pentru care $\displaystyle\int_a^{a+1}\left(x^3+4\right)dx=\frac{31}{4}$ este:

a) $a=-1$;

b) $a=0$;

c) $a=1$;

d) $a=2$;

e) $a=3$;

f) $a=4$.

17. Valoarea integralei definite $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx$ este:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$;

c) $\dfrac{1}{2}$;

d) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$;

e) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$;

f) $\sqrt{2}-1$.

18. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + e^x, & x \leq 1 \\ x + e, & x > 1 \end{cases}$, atunci $I = \int_{-1}^{2} f(x)dx$ este:

a) $\dfrac{4e^2 + 5e + 2}{2e}$;

b) $\dfrac{4e^2 + 5e - 2}{2e}$;

c) $\dfrac{4e^2 - 7e + 2}{2e}$;

d) $\dfrac{4e^2 + 7e - 2}{2e}$;

e) $\dfrac{4e^2 + 7e + 2}{2e}$;

f) $\dfrac{4e^2 - 7e - 2}{2e}$.

19. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin: $f(x) = \begin{cases} x^2 - \sin x, \ x \in (-\infty, 2] \\ x \ln x, \ x \in (2, \infty). \end{cases}$

Fie funcţia $F : [-3, 7] \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\, dt$. Atunci:

a) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + \cos x + 9 - \cos 3, \ x \in [-3, 2] \\ \dfrac{1}{2}x^2 \ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{38}{3} + \cos 2 - \cos 3 - 2\ln 2, \ x \in (2, 7] \end{cases}$;

b) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + \cos x + \sin 5, \ x \in [-3, 2] \\ x^2 \ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + \ln 2, \ x \in (2, 7] \end{cases}$;

c) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + \cos x + 9 - \sin 3, \ x \in [-3, 2] \\ x^2 \ln x + x^2 + 1 - 2\ln 2, \ x \in (2, 7] \end{cases}$;

d) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + \cos x + 9 - \cos 3, \ x \in [-3, 2] \\ \dfrac{1}{2}x^2 \ln x - \dfrac{1}{4}, \ x \in (2, 7] \end{cases}$;

e) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + \cos x + 9 - \cos 1, \; x \in [-3, 2] \\ \dfrac{1}{2}x^2 \ln x - \dfrac{1}{4}x^2, \; x \in (2, 7] \end{cases}$

f) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{5} + \cos x + \sin 1, \; x \in [-3, 2] \\ \dfrac{1}{3}x^2 \ln x - \dfrac{1}{4}x^2, \; x \in (2, 7] \end{cases}$.

20. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin: $f(x) = \begin{cases} x^2, \; x \in (-\infty, 1] \\ x, \; x \in (1, \infty) \end{cases}$.

Fie funcţia $F : [-1, 5] \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\, dt$. Atunci:

a) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 1}{3}, \; x \in [-1, 1] \\ \dfrac{x^3 - 1}{3}, \; x \in (1, 5] \end{cases}$;

b) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 1}{3}, \; x \in [-1, 1] \\ \dfrac{3x^2 + 1}{6}, \; x \in (1, 5] \end{cases}$;

c) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 1}{2}, \; x \in [-1, 1] \\ \dfrac{x^2 + 1}{3}, \; x \in (1, 5] \end{cases}$;

d) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 1}{5}, \; x \in [-1, 1] \\ \dfrac{x^3 + 1}{4}, \; x \in (1, 5] \end{cases}$;

e) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x - 1}{3}, \; x \in [-1, 1] \\ \dfrac{x^3 + x + 1}{3}, \; x \in (1, 5] \end{cases}$;

f) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, \; x \in [-1, 1] \\ \dfrac{x^3 + 1}{3} \; x \in (1, 5] \end{cases}$.

21. Valoarea integralei $\int_{-2019}^{2019} \frac{2019^x - 2019^{-x}}{1 + x^{2020}} dx$ este:
   a) $\frac{\pi}{2}$;
   b) e;
   c) 0;
   d) $-\frac{\pi}{2}$;
   e) 1;
   f) -1.

22. Valoarea integralei $\int_{-2019}^{2019} \frac{2^x - 2^{-x}}{1 + \sin^2 x} dx$ este:
   a) e;
   b) $e^2 - 3$;
   c) 2;
   d) 0;
   e) 1;
   f) π.

23. Valoarea integralei $I = \int_{-1}^{2} \left(\frac{1 + [x-1]}{1 + x^2} - |x-1| \right) dx$ în care $[x]$ este partea întreagă a numărului real x, este:
   a) π;
   b) 3π;
   c) 2;
   d) 0;
   e) $\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi + 5}{2}$;
   f) $e - 1$.

24. Valoarea integralei $I = \int_{-3}^{1} ([x+1] - |x-1|)\, dx$ în care $[x]$ este partea întreagă a numărului real x, este:
   a) π;
   b) e;
   c) 2;
   d) 0;

e) $\operatorname{arctg}2 - \dfrac{\pi+5}{2}$;

f) -10.

25. Valoarea integralei $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(\operatorname{tg}x))\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) dx$ este:

a) $1-\cos 1$;

b) $e{+}\pi$;

c) 2;

d) 1;

e) $\operatorname{arctg}2 - \dfrac{\pi+5}{2}$;

f) -1.

26. Valoarea integralei este: $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^4 x}\left(1+\operatorname{tg}^2(x)\right) dx$:

a) $1{-}\cos 1$;

b) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}3$;

c) 2;

d) 0;

e) $\operatorname{arctg}3 + \dfrac{\pi+5}{2}$;

f) π.

27. Valoarea integralei $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 3\cos x} dx$ este:

a) $1-\cos 1$;

b) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}3$;

c) $-\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2}{5}\ln 3$;

d) 0;

e) $\operatorname{arctg}5 + \dfrac{\pi+5}{5}$;

f) $1+\sin 1$.

28. Calculaţi $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x} dx$:

a) $2-\cos 2$;

b) $\dfrac{1}{2}\text{arctg}3$;

c) $-\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2}{5}\ln 3$;

d) $\dfrac{3\pi}{10}+\dfrac{1}{5}\ln 2$;

e) $\text{arctg}2-\dfrac{\pi+5}{2}$;

f) 0.

29. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$ este:

a) $\dfrac{9\pi}{4}$;

b) $\dfrac{2\pi}{3}$;

c) $\dfrac{8\pi}{3}$;

d) $\dfrac{4\pi}{3}$;

e) -2π;

f) -3.

30. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^5 \sqrt{25-x^2}dx$ este:

a) $\dfrac{7\pi}{4}$;

b) $\dfrac{25\pi}{4}$;

c) $\dfrac{9\pi}{2}$;

d) $\dfrac{5\pi}{3}$;

e) -5π;

f) $\dfrac{3\pi}{4}$.

31. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^3 e^{3x+6}dx$ este:

a) $\dfrac{e^{15}-e^{6}}{2}$;

b) $3\left(e^{15}-e^{6}\right)$;

c) $\dfrac{e^{15}-e^{6}}{3}$;

d) $\dfrac{e^{6}-e^{15}}{3}$;

e) 1;

f) $\dfrac{e^{3}}{3}$.

32. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x \sin^2 x dx$ este:

a) $\dfrac{1}{160}$;

b) $\dfrac{17}{480}$;

c) $5\dfrac{\sqrt{3}}{240}$;

d) $\dfrac{5\sqrt{3}}{480}$;

e) $\dfrac{13}{320}$;

f) 0.

33. Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-2}^{1} |x|e^{-|x|}dx$ este:

a) $\dfrac{2e^2+3}{e^2}$;

b $-\dfrac{e^2+e+1}{e^2}$;

c) $\dfrac{2e^2-2e-3}{e^2}$;

d) $\dfrac{e+3}{e^2}$;

e) $\dfrac{2e^2+e-3}{e^2}$;

f) $3+\dfrac{1}{e^2}$.

34. Fie funcţia $f : \left[-\frac{\pi}{6}, 1\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin 3x, & x \in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right] \\ xe^{3x}, & x \in (0, 1] \end{cases}$. Valoarea integralei $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{1} f(x)dx$ este:
   a) 0;
   b $\frac{1}{9}\left(e^3 + \sqrt{3} + 1\right)$;
   c) $e^3 + 1$;
   d) $\frac{2}{9}\left(e^3 - 1\right)$;
   e) $e^3 + 3\sqrt{3} - 1$;
   f) $\frac{\sqrt{3}}{2} + e^3 - 1$.

35. Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx$ este:
   a) $\ln\frac{5}{2} - \frac{\pi}{4}$;
   b $\ln 5 - \frac{3\pi}{4}$;
   c) $\ln\frac{5}{2} + \text{arctg}2 - \frac{\pi}{2}$;
   d) $\ln 5 + \text{arctg}2 - \frac{\pi}{4}$;
   e) $\ln\frac{5}{2} + \text{arctg}2 - \frac{\pi}{4}$;
   f) $\ln\frac{5}{2} + \text{arctg}2$.

36. Valoarea integralei $\int_0^1 \frac{3x+1}{x^2+x+1}dx$ este:
   a) $\frac{3}{2}\ln 5 - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$;
   b $\frac{5}{2}\ln 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$;
   c) $\frac{3}{2}\ln 3 - \frac{5\pi\sqrt{3}}{18}$;
   d) $\frac{3}{2}\ln 3$;

e) $3\ln 3 - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$;

f) $\dfrac{3}{2}\ln 3 - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

37. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-2}{x^2-2x-3}dx$ este:

a) $-\ln 3$;

b) $3\ln 2$;

c) $\dfrac{\ln 3}{4}$;

d) 2;

e) $\ln 3 - \ln 2$;

f) $\dfrac{\ln 3}{2}$.

38. Valoarea integralei $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} \frac{2}{x^2-x-6}dx$ este:

a) $\ln 4$;

b) $-\dfrac{4}{5}\ln 4$;

c) $2 - 5\ln 4$;

d) $\dfrac{4}{5}\ln 4$;

e) $-\dfrac{2}{5}\ln 4$;

f) $-\dfrac{3}{2}\ln 5$.

39. $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} \left|x^2-1\right| dx$ este:

a) 4;

b) 0;

c) 2;

d) -4;

e) 1;

f) 6.

40. $I = \int_{-2}^{2} [|x-1| + |x+1|]\, dx$ este egală cu:

a) 6;

b) 8;

c) 10;

d) 14;

e) 12;

f) 4.

41. $I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ este:

a) $\frac{\pi}{4}$;

b) $\frac{\pi}{12}$;

c) 0;

d) -1;

e) $\frac{\pi}{6}$;

f) $\frac{\pi}{2}$.

42. Numărul $\alpha = \int_{-1}^{1} \left(x^2 + a\,|x| + b\right) e^{|x|} dx$ este în $\mathbb{Q}$ dacă:

a) $a \in \mathbb{Q}$, $b = 2$;

b) $a, b \in \mathbb{Q}$;

c) $a \in \mathbb{Q}$, $b = 1$;

d) $a \in \mathbb{Q}$, $b = -1$;

e) $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$;

f) nicio variantă.

43. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{1}^{n} \frac{x-1}{x+1} dx$ este egală cu:

a) 0;

b) 1;

c) 2;

d) e;

e) ∞;

f) nu există.

44. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt{n}+3)\int_{n-1}^{n}\left(\dfrac{x+4}{x^2+3x+2}\right)dx$ este egală cu:
a) 0;
b) $\dfrac{1}{e}$;
c) 1;
d) $\sqrt{e}$;
e) e;
f) ∞.

45. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+|x^2-4|\,e^{nx}}{1+(x^2+1)\,e^{nx}}$ şi $I=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$, atunci numărul real I este egal cu:
a) $\dfrac{3\pi}{2}$;
b) $\dfrac{3\pi-2}{4}$;
c) $\dfrac{15\pi-8}{12}$;
d) $\dfrac{5\pi+6}{4}$;
e) 0;
f) $\dfrac{3\pi+2}{4}$;

46. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+xn+1}{n^2+3n-2}\right)^n$ şi $I=\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx$, atunci numărul real I este egal cu:
a) e^{-4};
b) $2e^{-4}$;
c) $2e^{-1}$;
d) $2e^{-2}$;
e) 0;
f) $2e^{-5}$.

47. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este $f(x)=\int_{0}^{x}\left(t^3-3t+2\right)e^{t^2}dt$ şi M este mulţimea punctelor de extrem ale funcţiei f, atunci mulţimea M este:

a) $\{-2\}$;
b) $\{-2, 1\}$;
c) $\{1\}$;
d) $\emptyset$;
e) $\{-1, 2\}$;
f) nicio variantă.

48. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{2t+1}{t^2 - 2t + 2} dt$, atunci abscisa unui punct de minim local al funcţiei f coincide cu:
a) $\frac{1}{2}$;
b) 1;
c) -1;
d) $-\frac{1}{2}$;
e) $\frac{1}{2}$;
f) 0.

49. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^t \ln\left(1 - t + t^2\right) dt$, atunci numărul punctelor de extrem ale funcţiei f este egal cu:
a) 2;
b) 1;
c) 0;
d) 4;
e) 3;
f) nu există.

50. Valoarea limitei $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x \text{tg} t dt}{x^2}$ este:
a) 1;
b) $\frac{1}{2}$;
c) -1;
d) 0;

e) $-\frac{1}{2}$;

f) nicio variantă.

51. Valoarea limitei $l = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x e^{-t^3} dt}{\sin^3 x}$ este:

a) 0;

b) 1;

c) $\frac{2}{3}$;

d) e;

e) ∞;

f) nu există.

52. Dacă $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi $I = \int_0^2 \dfrac{f(x)}{f(x) + f(2 - x)} dx$, atunci valoarea numărului real I coincide cu:

a) 2;

b) -2;

c) $-\frac{1}{2}$;

d) $\frac{2}{3}$;

e) 1;

f) 0.

53. Fie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, o funcţie continuă ce satisface relaţia $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$. Atunci numărul real $I = \int_1^2 f(x)\, dx$ are valoarea:

a) $-\frac{4}{9}$;

b) $-\frac{4}{3}$;

c) $-\frac{5}{9}$;

d) $-\frac{7}{3}$;

e) $\frac{2}{3}$;

f) nicio variantă.

54. $I = \int_0^2 \frac{(2-x)^{2n-1}}{(2+x)^{2n+1}} dx$ are valoarea reală:

a) $\frac{1}{8n}$;

b) $\frac{1}{4n}$;

c) $\frac{1}{2n}$;

d) $\frac{3}{8n}$;

e) 0;

f) $\frac{1}{6n}$.

55. Fie $I(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1}$ şi $L = \lim_{a \to 3} I(a)$. Atunci:

a) $L = 1$;

b) $L = \ln \frac{3}{2}$;

c) $L = 0$;

d) $L = \ln 2$;

e) $L = \ln 3$;

f) nicio variantă.

56. $I = \int_{-1}^1 \frac{x+[x]}{|x|+[x]+2} dx$ este egală cu:

a) $\ln \frac{1}{9}$;

b) $\ln \frac{2}{3}$;

c) $\ln \frac{4}{9}$;

d) $\ln \frac{4}{3}$;

e) $\ln \frac{1}{3}$;

f) nicio variantă.

57. Fie $I = \lim_{a \to -\infty} I(a)$, unde $I(a) = \int_a^0 e^x \left(2x^2 - 3x\right) dx$. Atunci:

a) $I = 7$;

b) $I = \infty$;

c) $I = 0$;

d) $I < -2$;

e) $I = -\infty$;

f) nicio variantă.

58. $L = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{4n - 4 - 2x_n}{\pi}\right]^n$, unde $x_n = \int_1^n \frac{2x^2 dx}{x^2 + 1}$ este:

a) $e^{\frac{4}{\pi}}$;

b) $e^{-\frac{4}{\pi}}$;

c) $e^{\frac{1}{\pi}}$;

d) $e^{\frac{2}{\pi}}$;

e) $e^{-\frac{2}{\pi}}$;

f) $e^{-\frac{1}{\pi}}$.

CAPITOLUL 20

APLICAŢII ALE INTEGRALEI DEFINITE

1. Dacă $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$, atunci aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f şi axa Ox este:
   a) $2 - \ln 15$;
   b) $2 - \ln \dfrac{5}{3}$;
   c) $2 - \ln \dfrac{3}{5}$;
   d) $2 + \ln 15$;
   e) $2 - \ln 2$;
   f) $2 - \ln 5$.

2. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2 + 2$, atunci aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$ este:
   a) $e + 2$;
   b) $e - 2$;
   c) $e - 1$;

d) $e+1$;
e) $e+3$;
f) $e+5$.

3. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+e^x, & x\le 0 \\ \sqrt{x}+1, & x>0 \end{cases}$, atunci volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este:
a) $\dfrac{13\pi}{6}$;
b) $\dfrac{7\pi}{3}$;
c) $\dfrac{5\pi}{2}$;
d) $\dfrac{8\pi}{3}$;
e) $\dfrac{17\pi}{6}$;
f) 3π.

4. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^{-x}$, atunci aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$ este:
a) $\dfrac{3(e+1)}{2e}$;
b) $\dfrac{3e+1}{2e}$;
c) $\dfrac{3e+2}{2e}$;
d) $\dfrac{3}{2}$;
e) $\dfrac{3e-1}{2e}$;
f) $\dfrac{3e-2}{2e}$.

5. Dacă $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, atunci volumul corpului de rotaţie determinat de graficul functiei f este:
a) $\dfrac{29\pi}{6}$;

b) 5π;

c) $\dfrac{31\pi}{6}$;

d) $\dfrac{16\pi}{3}$;

e) $\dfrac{11\pi}{2}$;

f) $\dfrac{17\pi}{3}$.

6. Dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, atunci aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f^2(x)}{x^2+1}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$, este:

a) $\ln\sqrt{2}$;

b) $\ln\sqrt{3}$;

c) $\ln 2$;

d) $\ln 3$;

e) 1;

f) $\ln 4$.

7. Dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, atunci volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$, este:

a) $\pi(2e+1)$;

b) $\pi(2e-1)$;

c) 2π;

d) π;

e) $2\pi e$;

f) π.

8. Dacă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$, atunci aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f şi axa Ox este:

a) $\dfrac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$;

b) $\dfrac{\pi}{2}$;

c) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}+1)$;

d) $\frac{2}{3}$;

e) $\frac{\pi}{3}$;

f) $\sqrt{2}$.

9. Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$, volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei este:

a) $\frac{5\pi}{11}$;

b) $\frac{7\pi}{15}$;

c) $\frac{\pi}{2}$;

d) 5π;

e) $\frac{5\pi}{2}$;

f) $\frac{5\pi}{3}$.

10. Dacă $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$, atunci valoarea parametrului real $a, a>5$, pentru care aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=5$ şi $x=a$, este egală cu $\ln 3$, este:

a) $a=6$;

b) $a=7$;

c) $a=9$;

d) $a=10$;

e) $a=12$;

f) $a=15$.

11. Aria suprafeţei plane mărginită de axa Ox, dreptele $x=0$, $x=1$ şi graficul funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases} x^2-\frac{1}{2}, & x\in\left[0,\frac{1}{4}\right] \\ \frac{1}{3}-x^2, & x\in\left(\frac{1}{4},1\right] \end{cases}$

are valoarea:

a) $\frac{1}{24}+\frac{4\sqrt{3}}{27}$;
b) $\frac{\pi}{3}$;
c) $\frac{e+1}{3}$;
d) 1 ;
e) 2;
f) $1-\sqrt{3+e}$.

12. Aria suprafeţei plane mărginită de axa Ox, dreptele $x=0$, $x=1$ şi graficul funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=xe^x$ are valoarea:
a) $\frac{5}{24}-\frac{\sqrt{3}}{18}$;
b) 1;
c) 2;
d) $\frac{e-1}{2}$;
e) $\frac{e+2}{2}$;
f) e^2.

13. Aria suprafeţei plane mărginită de axa Ox dreptele $x=0$, $x=1$ şi graficul funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x^2e^x$ are valoarea:
a) $\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$;
b) 1;
c) $e-2$;
d) $\frac{e+2}{2}$;
e) $\frac{e-2}{2}$;
f) $\left(\frac{e+2}{2}\right)^2$.

14. Aria suprafeţei plane mărginită de axa Ox, dreptele $x=0$, $x=1$ şi graficul funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x^3e^x$ are valoarea:
a) $\frac{5}{24}-\frac{\sqrt{3}}{18}$;

b) 1;

c) $e-2$;

d) $6-2e$;

e) e;

f) $e+2$.

15. Aria suprafeţei plane mărginită de axa Ox, dreptele $x=0$, $x=1$ şi graficul funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x^4e^x$ are valoarea:

a) $\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{3}}{15}$;

b) 1;

c) $e-2$;

d) $6-2e$;

e) $9e-24$;

f) $e+1$.

16. Volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$ are valoarea:

a) $\frac{5}{24}-\frac{\sqrt{3}}{18}$;

b) 1;

c) $\ln(e-2)$;

d) $6-2e$;

e) $9e-24$;

f) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{5}{2}$.

17. Volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$ are valoarea:

a) $\frac{\pi}{2}\ln 2$;

b) 1;

c) $e-2$;

d) $6-2e$;

e) $9e-24$;

f) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{5}{2}$.

18. Volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sin x$ are valoarea:

a) $\frac{\pi}{2}\ln 2$;

b) $\frac{\pi^2}{2}$;

c) $e-2$;

d) $6-2e$;

e) $9e-24$;

f) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{5}{2}$.

19. Volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\cos x$ are valoarea:

a) $\frac{\pi}{2}\ln 2$;

b) $\frac{\pi}{3}$;

c) $\frac{\pi^2}{2}$;

d) $2e$;

e) $9e$;

f) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{3}{2}$.

20. Volumul corpului de rotaţie în jurul axei Ox ale graficului funcţiei $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sin x+\cos x$ are valoarea:

a) $\frac{\pi}{2}\ln 2$;

b) $\frac{\pi}{3}$;

c) $\frac{\pi}{2}$;

d) π^2;

e) $9e-21$;

f) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2}$.

21. Fie funcţiile $f, g : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x$ şi $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$. Aria suprafeţei plane cuprinsă între graficele celor două funcţii este:
    a) $\frac{9}{4}(\pi - 2)$;
    b) $\frac{9}{4}(2 - \pi)$;
    c) $\frac{9}{2}(\pi - 2)$;
    d) $\frac{9\pi}{4}$;
    e) $\frac{9\pi}{2}$;
    f) 1.

22. Fie funcţiile $f, g : [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x$ şi $g(x) = \sqrt{16 - x^2}$. Aria suprafeţei plane cuprinsă între graficele celor două funcţii este:
    a) $8 + 4\pi$;
    b) $4\pi - 8$;
    c) 8π;
    d) $8 - 4\pi$;
    e) 8;
    f) 1.

23. Aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{x^2 + x - 2}$, axa Ox şi dreptele $x = 2$ şi $x = 4$ este:
    a) $\ln \frac{1}{2}$;
    b) $\ln 4$;
    c) $\ln 2$;
    d) $\ln 3$;
    e) $\ln 5$;
    f) 4.

24. Aria suprafeţei plane cuprinsă între graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$, axa Ox şi dreptele $x = 3$ şi $x = 5$ este:
    a) $\ln 9$;

b) $\ln \frac{9}{5}$;

c) $\ln \frac{2}{9}$;

d) $\ln \frac{9}{5}$;

e) 10;

f) $\ln \frac{9}{2}$.

25. Volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ este:

a) $3\pi + \frac{\pi}{4}(\cos 8 + \cos 4)$;

b $\frac{\pi}{4}(\cos 8 - \cos 4)$;

c) $3\pi + \frac{\pi}{4}(\cos 8 - \cos 4)$;

d) $2\pi + \frac{\pi}{4}(\cos 8 - \cos 2)$;

e) $3\pi + \frac{\pi}{2}(\cos 8 - \cos 4)$;

f) π.

26. Volumul corpului de rotaţie determinat de funcţia $f : [3, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$ este:

a) $\pi \ln \frac{3}{4}$;

b) $4\pi \ln \frac{3}{2}$;

c) $\frac{11\pi}{6}$;

d) $\pi \ln \frac{8}{3}$;

e) $4 \ln \frac{3\pi}{4}$;

f) $\frac{11\pi}{6} + 4\pi \ln 3$.

27. Aria suprafeţei plane delimitată de parabola $y = x^2$ şi de dreapta $2x - y + 3 = 0$ este:

a) 9;

b $\dfrac{34}{3}$;
c) $\dfrac{20}{3}$;
d) $\dfrac{22}{3}$;
e) $\dfrac{32}{3}$;
f) 18.

28. Aria suprafeţei plane delimitată de parabola $y = x^2$ şi de dreapta $3x - y - 2 = 0$ este:
a) $\dfrac{11}{2}$;
b $\dfrac{11}{3}$;
c) $\dfrac{19}{6}$;
d) $\dfrac{1}{2}$;
e) $\dfrac{1}{3}$;
f) $\dfrac{1}{6}$.

29. Volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a mulţimii mărginite de cercul $x^2 + y^2 = 4$ şi parabola $y^2 = 3x$ este:
a) $\dfrac{19\pi}{6}$;
b) $\dfrac{\pi}{6}$;
c) $\dfrac{3\pi}{2}$;
d) $\dfrac{2\pi}{3}$;
e) π;
f) $\dfrac{5\pi}{3}$.

30. Volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a mulţimii mărginite de cercul $x^2 + y^2 = 2$ şi parabola $y^2 = x$ este:
a) $7\pi\sqrt{2}$;

b) $\dfrac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi$;

c) $\dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3}$;

d) $\dfrac{7\pi}{6}$;

e) $\frac{7\pi\sqrt{2}}{6}$;

f) $\dfrac{8\sqrt{2}+7}{6}\pi$.

31. Curbele de ecuaţie $(C_1):\ y^2 = x$, respectiv $(C_2):\ x^2 = 2y$ delimitează un domeniu plan al cărui arie este egală cu:

a) 1;

b) $\dfrac{2}{3}$;

c) $\dfrac{3}{2}$;

d) $\dfrac{1}{3}$;

e) $\dfrac{4}{3}$;

f) $\dfrac{3}{4}$.

32. Aria porţiunii plane determinate de curbele $(C_1):\ x^2 + y^2 - x = 0$, respectiv $(C_2):\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ este:

a) $\dfrac{3\sqrt{3}+8\pi}{96}$;

b) $\dfrac{8\pi-3\sqrt{3}}{96}$;

c) $\dfrac{8\pi+\sqrt{3}}{96}$;

d) $\dfrac{2\sqrt{3}+8\pi}{96}$;

e) $\dfrac{3\sqrt{3}+4\pi}{96}$;

f) $\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{96}$.

33. Se consideră funcţiile $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\operatorname{arctg} x$ şi $g(x) = \ln(1+x^2)$. Fie S aria domeniului delimitat de graficele celor două funcţii. Atunci, valoarea lui S este:
   a) $\dfrac{6+\pi+4\ln 2}{4}$;
   b) $\dfrac{6-\pi+\ln 16}{4}$;
   c) $\dfrac{6-\pi-\ln 16}{4}$;
   d) $\dfrac{6+\pi+2\ln 2}{4}$;
   e) $\dfrac{6-\pi+2\ln 2}{4}$;
   f) $\dfrac{6-\pi-2\ln 2}{4}$.

34. Dacă se consideră funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos \dfrac{x^3-3x}{2}$, atunci G_f, Ox şi dreptele $x=-1$, $x=1$ delimitează o porţiune în plan ce are aria egală cu:
   a) π;
   b) $\dfrac{\pi}{2}$;
   c) $\dfrac{\pi}{3}$;
   d) $\dfrac{2\pi}{3}$;
   e) $\dfrac{3\pi}{2}$;
   f) $\dfrac{\pi}{4}$.

35. Aria domeniului generat de Ox, G_f (unde $f(x) = \ln x,\ x > 0$) şi tangenta la G_f ce trece prin O, are ca valoare:
   a) e;
   b) $\dfrac{e}{2}-1$;
   c) $\dfrac{e}{2}$;
   d) $\dfrac{e}{2}+1$;
   e) $e-1$;

f) $2e$.

36. Fie funcţiile $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = kx$, $k \in (0,1)$. Domeniul delimitat de graficele celor două funcţii este de arie:

a) $a^2 \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)$;

b) $\frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)$;

c) $\frac{a^2}{4} \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)$;

d) $a^2 \ln\left(\frac{1-k}{1+k}\right)$;

e) $\frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{1-k}{1+k}\right)$;

f) $\frac{a^2}{4} \ln\left(\frac{1-k}{1+k}\right)$.

37. Fie $f : \left[1, \sqrt{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{mx^2 + \ln x}$. Aria domeniului din plan determinat de G_f, Ox, $x = 1$, $x = \sqrt{2}$ este egal cu $\frac{1}{m}$ dacă parametrul real m este:

a) $\ln 2$;

b) 2;

c) $\ln 4$;

d) $\ln \frac{1}{2}$;

e) $\ln \frac{1}{4}$;

f) $\ln 8$.

38. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$ şi $A(t)$ aria domeniului generat de G_f, Ox, $x = t$, $x = 3t$. Atunci $l = \lim_{t \to \infty} A(t)$ este:

a) ∞;

b) 0;

c) 1;

d) $3 \ln 3$;

e) $\ln 3$;

f) $\ln 9$.

39. Se consideră porţiunea din plan generată de G_f, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$, Ox, $x = 1$, $x = 2\sqrt{3} - 1$. Fie d o paralelă la axa Oy ce împarte domeniul în două părţi echivalente. Abscisa α a punctului de intersecţie al dreptei d cu axa Ox este egală cu:
a) $\sqrt{3} - 1$;
b) $2\sqrt{3} + 2$;
c) $2\mathrm{tg}\dfrac{7\pi}{24} - 1$;
d) $\mathrm{tg}\dfrac{7\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$;
e) $\sqrt{3}$;
f) 2.

40. Fie S_n aria domeniului determinat de graficul funcţiei $f(x) = e^{-x}\sin\pi$, $x \in [n, n+1]$ şi axa Ox, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci şirul $(S_n)_n$ este:
a) o progresie aritmetică cu $r = -\dfrac{1}{e}$;
b) o progresie aritmetică cu $r = \dfrac{2}{e}$;
c) o progresie geometrică cu $q = \dfrac{1}{e}$;
d) o progresie geometrică cu $q = -\dfrac{1}{e}$;
e) un şir periodic;
f) un şir constant.

41. Volumul corpului obţinut prin rotaţia subgraficului, unde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x(1-x)}$, în jurul axei Ox este egal cu:
a) $\dfrac{\pi^2}{2}$;
b) $\dfrac{\pi^2}{4}$;
c) $\dfrac{\pi^2}{8}$;
d) π^2;

e) $\dfrac{\pi^2}{16}$;
f) $4\pi^2$.

42. Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\arcsin \dfrac{2x}{(1+x^2)}}$. G_f determină, prin rotaţie în jurul axei Ox, un corp al cărui volum V are valoarea:
a) $\dfrac{\pi^2}{4} + \pi \ln 2$;
b) $\dfrac{\pi^2}{4} - \pi \ln 2$;
c) $\dfrac{\pi^2}{2} - \pi \ln 2$;
d) $\dfrac{\pi^2}{2} + \pi \ln 2$;
e) $\pi^2 + \pi \ln 2$;
f) $\pi^2 + \dfrac{\pi}{2} \ln 2$.

43. Curbele de ecuaţie $(C_1): \ y^2 = 9x$, respectiv $(C_2): \ y = 3x$, generează în urma rotaţiei în jurul axei Ox, un corp cu volumul egal cu:
a) 2π;
b) $\dfrac{\pi}{3}$;
c) $\dfrac{\pi}{2}$;
d) $\dfrac{\pi}{6}$;
e) $\dfrac{3\pi}{2}$;
f) $\dfrac{\pi}{4}$.

44. Fie $V(m)$ volumul corpului generat prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f(x) = mx + 1$, $x \in [0,2]$. $V(m)$ are valoarea minimă atunci când parametrul real m este egal cu:
a) $\dfrac{3}{4}$;
b) $\dfrac{1}{2}$;
c) $-\dfrac{3}{4}$;

d) $-\dfrac{1}{2}$;

e) $\dfrac{1}{4}$;

f) $-\dfrac{1}{4}$.

45. Graficul funcţiei $f : \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+tgx}}$ determină, în urma rotaţiei în jurul axei Ox, un corp al cărui volum V se află în intervalul:
a) $\left[\pi, \pi\sqrt{3}\right]$;

b) $\left[\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\pi^2}{24}, \dfrac{\pi^2}{24}\right]$;

c) $\left[\dfrac{\pi^2}{4}, \dfrac{\pi^2}{3}\right]$;

d) $[1, 2]$;
e) $[0, 1]$;
f) $[2\pi, e^{\pi}]$.

46. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ şi numerele $a, b, c > 1$ astfel încât a, b, c formează progresie geometrică cu raţia q. Graficul lui f generează prin rotaţie în jurul lui Ox, un corp. Notm̆ cu V_1 volumul corpului obţinut când $x \in [1, a]$, V_2 volumul când $x \in [1, b]$, respectiv V_3 dacă $x \in [1, c]$. Atunci:
a) V_1, V_2, V_3 sunt în progresie aritmetică (cu $r = \pi \ln q$);
b) V_1, V_2, V_3 sunt în progresie geometrică (cu $q' = \pi q$);
c) V_1, V_2, V_3 sunt în progresie geometrică $\left(\text{ cu } r = \pi \ln \dfrac{1}{q}\right)$;
d) $V_1, V_3 = 2V_2$;
e) $V_1 + V_2 = V_3$;
f) $V_3 = \sqrt{V_1 V_2}$.

47. Funcţia $f : (1, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}$ generează prin rotaţia graficului său în jurul axei Ox, $x \in [2, 0]$, un corp al cărui volum este $V(a)$. Atunci $l = \lim\limits_{a\to\infty} V(a)$ este:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi^2 + \dfrac{\pi \ln 7}{6}$;
b) 0;
c) $\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{6} - \dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}$;
d) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$;
e) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{\ln 7\pi}{6}$;
f) $\dfrac{\pi \ln 7}{6} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi^2}{2} - \pi\mathrm{arctg}\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$.

48. Volumul corpului generat ca urmare a rotaţiei în jurul axei Ox a graficului funcţiei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1 + \ln x)}}$, $x \in [a, e^2]$, este egal cu $\pi \ln \dfrac{3}{2}$ dacă parametrul real a este:
a) 1;
b) e;
c) $\dfrac{e}{2}$;
d) e^2;
e) $\dfrac{e}{3}$;
f) $\dfrac{e^2}{2}$.

49. Fie funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$. Volumul corpului obţinut rotind în jurul axei Ox graficul funcţiei f se află în mulţimea:
a) $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;
b) $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;
c) $\left[\dfrac{\pi}{28}, \dfrac{\pi}{7}\right]$;
d) $\left[\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{\pi}{6}\right]$;
e) $\left[\dfrac{\pi}{28}, \dfrac{\pi}{4}\right]$;
f) $\left[\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

50. Valoarea maximă a volumului corpului generat în urma rotaţiei în jurul axei Ox de către graficul funcţiei $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{e^x}{x}}$ este:

a) $\frac{\pi}{4}$;

b) $\pi\left(\frac{e^4+e^2+1}{4}\right)$;

c) $\pi\left(\frac{e^4+1}{4}\right)$;

d) $\pi\left[\frac{e^4-e^2+1}{4}\right]$;

e) $\pi\left(\frac{e^2-1}{4}\right)$;

f) $\pi\left(\frac{e^4-1}{4}\right)$.

CAPITOLUL 21

INDEX

Exercițiile au fost propuse/prelucrate/alese de către:

Capitolul	**Lascu D.**	**Vasiliu P.**	**Olteanu A.**	**Sporiş A.L.**
1.	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 44
2.	1 – 16	17 – 26	27 – 36	37 – 51
3.	1 – 7	8 – 17	18 – 27	28 – 37
4.	1 – 11	12 – 21	22 – 31	32 – 36
5.	1 – 17	18 – 27	28 – 37	38 – 70
6.	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 50
7.	1 – 31	32 – 41	42 – 51	52 – 81
8.	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 50
9.	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 50
10.	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 50
11.	1 – 11	12 – 21	22 – 31	32 – 46
12.	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 46
13.	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 45
14.	1 – 11	12 – 21	22 – 31	32 – 46
15.	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 50
16.	1 – 30	31 – 50	51 – 60	61 – 85
17.	1 – 30	31 – 40	41 – 50	51 – 80
18.	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 55
19.	1 – 18	19 – 28	29 – 38	39 – 58
20.	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 50

CAPITOLUL 22

RĂSPUNSURI

Capitolul 1

1.	a		11.	b		21.	c		31.	b		41.	b
2.	c		12.	b		22.	a		32.	d		42.	b
3.	e		13.	c		23.	c		33.	f		43.	d
4.	b		14.	d		24.	a		34.	a		44.	b
5.	f		15.	e		25.	b		35.	c			
6.	b		16.	f		26.	a		36.	b			
7.	f		17.	a		27.	c		37.	a			
8	a		18.	b		28.	b		38.	c			
9.	e		19.	c		29.	a		39.	e			
10.	a		20.	d		30.	d		40.	a			

Capitolul 2

1.	b		11.	a		21.	e		31.	a		41.	a		51.	b
2.	a		12.	f		22.	f		32.	d		42.	d			
3.	d		13.	b		23.	a		33.	b		43.	e			
4.	f		14.	f		24.	b		34.	d		44.	c			
5.	a		15.	a		25.	c		35.	b		45.	e			
6.	e		16.	f		26.	d		36.	c		46.	f			
7.	d		17.	a		27.	a		37.	a		47.	a			
8	a		18.	e		28.	d		38.	e		48.	b			
9.	c		19.	c		29.	a		39.	f		49.	b			
10.	e		20.	d		30.	b		40.	f		50.	a			

Capitolul 3

1.	f		11.	d		21.	b		31.	f			
2.	f		12.	e		22.	c		32.	d			
3.	e		13.	f		23.	d		33.	d			
4.	b		14.	d		24.	e		34.	c			
5.	f		15.	b		25.	f		35.	a			
6.	b		16.	e		26.	f		36.	d			
7.	e		17.	f		27.	b		37.	c			
8	d		18.	e		28.	b						
9.	b		19.	a		29.	c						
10.	f		20.	c		30.	a						

Capitolul 4

1.	d		11.	d		21.	a		31.	b			
2.	c		12.	f		22.	a		32.	d			
3.	e		13.	b		23.	b		33.	e			
4.	b		14.	c		24.	e		34.	f			
5.	a		15.	d		25.	d		35.	a			
6.	c		16.	e		26.	a		36.	a			
7.	f		17.	d		27.	e						
8	a		18.	a		28.	d						
9.	c		19.	b		29.	f						
10.	f		20.	c		30.	c						

Capitolul 5

1.	d		11.	c		21.	d		31.	a		41.	d		51.	e		61	a
2.	b		12.	a		22.	b		32.	c		42.	f		52.	a		62	e
3.	a		13.	f		23.	f		33.	d		43.	a		53.	b		63	c
4.	f		14.	f		24.	e		34.	e		44.	b		54.	d		64	b
5.	b		15.	b		25.	b		35.	a		45.	c		55.	e		65	a
6.	a		16.	f		26.	c		36.	d		46.	e		56.	a		66	b
7.	f		17.	a		27.	e		37.	a		47.	a		57.	b		67	b
8	a		18.	e		28.	c		38.	a		48.	c		58.	c		68	a
9.	d		19.	f		29.	b		39.	b		49.	b		59	b		69	b
10.	a		20.	c		30.	a		40.	c		50.	d		60	c		70	d

Capitolul 6

1.	d		11.	a		21.	a		31.	b		41.	d
2.	c		12.	b		22.	b		32.	a		42.	b
3.	a		13.	c		23.	b		33.	b		43.	e
4.	f		14.	a		24.	d		34.	c		44.	a
5.	e		15.	e		25.	d		35.	d		45.	c
6.	b		16.	f		26.	e		36.	a		46.	b
7.	a		17.	f		27.	d		37.	b		47.	d
8	b		18.	f		28.	f		38.	c		48.	a
9.	d		19.	c		29.	c		39.	a		49.	c
10.	a		20.	d		30.	f		40.	b		50.	a

Capitolul 7

1.	f		11.	a		21.	b		31.	d		41.	d		51.	c		61.	d		71.	e		81.	c
2.	b		12.	d		22.	d		32.	f		42.	b		52.	b		62.	a		72.	a			
3.	a		13.	e		23.	a		33.	f		43.	c		53.	d		63.	d		73.	b			
4.	b		14.	b		24.	c		34.	c		44.	a		54.	b		64.	a		74.	c			
5.	d		15.	a		25.	d		35.	d		45.	f		55.	f		65.	f		75.	a			
6.	e		16.	b		26.	a		36.	e		46.	a		56.	f		66.	c		76.	b			
7.	f		17.	e		27.	e		37.	f		47.	c		57.	b		67.	a		77.	d			
8	e		18.	a		28.	b		38.	a		48.	f		58.	a		68.	b		78.	a			
9.	f		19.	c		29.	e		39.	b		49.	d		59.	c		69.	c		79.	f			
10.	b		20.	e		30.	a		40.	c		50.	a		60.	e		70.	d		80.	c			

Capitolul 8

1.	d		11.	e		21.	a		31.	a		41.	a
2.	f		12.	b		22.	b		32.	f		42.	d
3.	c		13.	c		23.	b		33.	e		43.	d
4.	d		14.	d		24.	d		34.	c		44.	e
5.	a		15.	e		25.	d		35.	d		45.	b
6.	d		16.	f		26.	e		36.	d		46.	b
7.	b		17.	a		27.	d		37.	b		47.	d
8	d		18.	b		28.	f		38.	a		48.	c
9.	a		19.	c		29.	c		39.	c		49.	e
10.	a		20.	a		30.	f		40.	a		50.	a

Capitolul 9

1.	d		11.	d		21.	d		31.	c		41.	c
2.	e		12.	b		22.	a		32.	a		42.	e
3.	a		13.	c		23.	c		33.	b		43.	a
4.	f		14.	d		24.	c		34.	a		44.	b
5.	c		15.	e		25.	d		35.	e		45.	e
6.	d		16.	f		26.	c		36.	a		46.	b
7.	e		17.	f		27.	b		37.	b		47.	f
8	d		18.	c		28.	a		38.	a		48.	b
9.	c		19.	c		29.	c		39.	c		49.	b
10.	d		20.	a		30.	a		40.	b		50.	c

Capitolul 10

1.	c		11.	a		21.	d		31.	a		41.	b
2.	a		12.	b		22.	b		32.	d		42.	e
3.	a		13.	c		23.	a		33.	c		43.	e
4.	b		14.	d		24.	a		34.	b		44.	a
5.	a		15.	a		25.	a		35.	c		45.	c
6.	c		16.	f		26.	b		36.	d		46.	d
7.	b		17.	a		27.	a		37.	e		47.	c
8	d		18.	b		28.	a		38.	b		48.	a
9.	f		19.	c		29.	b		39.	c		49.	d
10.	c		20.	d		30.	a		40.	f		50.	b

Capitolul 11

1.	e		11.	e		21.	d		31.	e		41.	d
2.	b		12.	a		22.	a		32.	e		42.	e
3.	c		13.	b		23.	b		33.	a		43.	b
4.	e		14.	c		24.	c		34.	a		44.	b
5.	a		15.	d		25.	d		35.	a		45.	a
6.	e		16.	e		26.	d		36.	c		46.	c
7.	b		17.	f		27.	e		37.	e			
8	f		18.	a		28.	f		38.	c			
9.	b		19.	b		29.	a		39.	a			
10.	a		20.	c		30.	f		40.	b			

Capitolul 12

1.	b		11.	a		21.	b		31.	c		41.	d
2.	a		12.	b		22.	d		32.	a		42.	a
3.	d		13.	c		23.	a		33.	c		43.	b
4.	e		14.	d		24.	f		34.	e		44.	c
5.	c		15.	e		25.	e		35.	c		45.	e
6.	b		16.	f		26.	c		36.	d		46.	a
7.	f		17.	a		27.	a		37.	c			
8	b		18.	b		28.	d		38.	b			
9.	d		19.	c		29.	b		39.	e			
10.	a		20.	d		30.	a		40.	d			

Capitolul 13

1.	a		11.	a		21.	b		31.	b		41.	d
2.	d		12.	b		22.	a		32.	c		42.	c
3.	e		13.	c		23.	e		33.	a		43.	e
4.	f		14.	d		24.	c		34.	e		44.	b
5.	a		15.	e		25.	a		35.	d		45.	c
6.	d		16.	f		26.	b		36.	e			
7.	a		17.	a		27.	b		37.	b			
8	d		18.	b		28.	a		38.	b			
9.	d		19.	c		29.	b		39.	a			
10.	b		20.	d		30.	f		40.	b			

Capitolul 14

1.	e		11.	d		21.	d		31.	b		41.	c
2.	b		12.	a		22.	a		32.	c		42.	e
3.	b		13.	b		23.	b		33.	b		43.	a
4.	f		14.	c		24.	d		34.	a		44.	e
5.	b		15.	d		25.	b		35.	d		45.	a
6.	e		16.	e		26.	c		36.	c		46.	c
7.	a		17.	f		27.	e		37.	a			
8	c		18.	a		28.	c		38.	b			
9.	a		19.	b		29.	a		39.	d			
10.	b		20.	c		30.	f		40.	c			

Capitolul 15

1.	b		11.	a		21.	a		31.	b		41.	f
2.	d		12.	b		22.	b		32.	c		42.	b
3.	d		13.	c		23.	c		33.	a		43.	b
4.	a		14.	f		24.	b		34.	b		44.	a
5.	f		15.	e		25.	c		35.	e		45.	c
6.	e		16.	f		26.	d		36.	a		46.	b
7.	a		17.	f		27.	e		37.	b		47.	b
8	f		18.	e		28.	e		38.	c		48.	a
9.	e		19.	c		29.	f		39.	d		49.	a
10.	d		20.	d		30.	f		40.	a		50.	d

Capitolul 16

1.	a		11.	e		21.	c		31.	a		41.	a		51.	b		61.	a		71.	f		81.	f
2.	d		12.	f		22.	b		32.	b		42.	b		52.	a		62.	b		72.	c		82.	e
3.	a		13.	b		23.	b		33.	c		43.	d		53.	a		63.	c		73.	d		83.	f
4.	f		14.	a		24.	c		34.	d		44.	b		54.	b		64.	d		74.	f		84.	a
5.	b		15.	e		25.	c		35.	e		45.	e		55.	c		65.	e		75.	d		85.	d
6.	e		16.	c		26.	c		36.	f		46.	b		56.	f		66.	a		76.	c			
7.	d		17.	b		27.	e		37.	a		47.	a		57.	e		67.	c		77.	b			
8	b		18.	e		28.	b		38.	b		48.	b		58.	a		68.	b		78.	c			
9.	a		19.	e		29.	f		39.	c		49.	c		59.	d		69.	c		79.	d			
10.	b		20.	d		30.	b		40.	d		50.	d		60.	b		70.	c		80.	e			

Capitolul 17

1.	d		11.	e		21.	a		31.	a		41.	a		51.	a		61.	c		71.	c
2.	a		12.	f		22.	d		32.	b		42.	b		52.	b		62.	f		72.	b
3.	e		13.	b		23.	b		33.	c		43.	c		53.	d		63.	b		73.	a
4.	b		14.	f		24.	e		34.	d		44.	f		54.	b		64.	c		74.	b
5.	e		15.	b		25.	b		35.	e		45.	c		55.	c		65.	b		75.	b
6.	a		16.	d		26.	a		36.	f		46.	d		56.	d		66.	a		76.	e
7.	c		17.	b		27.	d		37.	a		47.	e		57.	a		67.	c		77.	a
8	d		18.	c		28.	c		38.	b		48.	f		58.	d		68.	a		78.	b
9.	a		19.	a		29.	f		39.	c		49.	a		59.	b		69.	c		79.	c
10.	c		20.	d		30.	e		40.	d		50.	b		60.	a		70.	c			

Capitolul 18

1.	d		11.	f		21.	a		31.	d		41.	a		51.	a
2.	b		12.	b		22.	b		32.	c		42.	c		52.	b
3.	f		13.	c		23.	c		33.	d		43.	f		53.	b
4.	a		14.	d		24.	b		34.	a		44.	b		54.	c
5.	d		15.	e		25.	c		35.	e		45.	b		55.	b
6.	b		16.	f		26.	d		36.	b		46.	d			
7.	c		17.	a		27.	e		37.	d		47.	a			
8	e		18.	b		28.	f		38.	b		48.	b			
9.	a		19.	c		29.	f		39.	b		49.	c			
10.	b		20.	d		30.	b		40.	a		50.	b			

Capitolul 19

1.	a		11.	a		21.	c		31.	c		41.	b		51.	e
2.	d		12.	c		22.	d		32.	b		42.	d		52.	e
3.	f		13.	b		23.	e		33.	c		43.	b		53.	a
4.	c		14.	a		24.	f		34.	d		44.	c		54.	a
5.	e		15.	e		25.	a		35.	e		45.	c		55.	e
6.	b		16.	c		26.	b		36.	f		46.	b		56.	c
7.	a		17.	b		27.	c		37.	f		47.	a		57.	a
8	b		18.	d		28.	d		38.	b		48.	d		58.	b
9.	d		19.	a		29.	a		39.	a		49.	a			
10.	b		20.	b		30.	b		40.	c		50.	b			

Capitolul 20

1.	b		11.	a		21.	a		31.	b		41.	c
2.	a		12.	b		22.	b		32.	a		42.	c
3.	e		13.	c		23.	c		33.	c		43.	e
4.	f		14.	d		24.	f		34.	a		44.	c
5.	c		15.	e		25.	c		35.	b		45.	b
6.	a		16.	f		26.	d		36.	a		46.	a
7.	d		17.	a		27.	e		37.	a		47.	f
8	a		18.	b		28.	f		38.	e		48.	b
9.	b		19.	c		29.	a		39.	b		49.	c
10.	f		20.	d		30.	b		40.	c		50.	d

CAPITOLUL 23

INDICAŢII

Capitolul 1

4. Prin verificare obţinem raspunsul corect b).

5. $\frac{x+4}{x+1} = 1 + \frac{3}{x+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+1 \in \{-3,\ -1,\ 1,\ 3\}$.

6. $\frac{x+1}{3-x} \geq 0,\ x \in \mathbb{Z} \Rightarrow\ x \in [-1,\ 3) \cap \mathbb{Z}\ = \{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$.

7. $\frac{3-x}{5+x} - 1 = \frac{-2x-2}{x+5} \geq 0,\ x \in \mathbb{N} \Rightarrow\ x \in (-5,\ -1] \cap \mathbb{N}\ = \emptyset$.

10. $-2 \leq 3x-2 \leq 2\ \Rightarrow A = \left[0,\ \frac{4}{3}\right]$; $x+2 \in \{-15,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 15\}$, $x \in \mathbb{N} \Rightarrow B = \{1,\ 3,\ 15\}$.

11. Evident $A = [-1, 3]$. Atunci $A \cap \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\}$.

12. $A = [-5, -1]$ şi $A \cap \mathbb{Z} = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$.

13. $\frac{2n+3}{n} = 2 + \frac{3}{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{3}{n} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \in \{1, 3\}$.

17. Se pune condiţia $\Delta < 0$, adică $m^2 - 4m < 0$ din care rezultă $m \in (0, 4)$.

21. Deoarece că $A = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$, $B = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ şi $C = (-\infty, -3) \cup \cup (4, \infty)$, obţinem $A \cap B = (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$, deci $C \subset A \cap B$.

23. Deoarece $\frac{2x+3}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1} \in \mathbb{Z}$, obţinem că $A = \{-6, -2, 0, 4\}$. Se observă uşor că $B = (-4, 4) \cap \mathbb{Z} = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ şi $C = \left\{-\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Prin urmare $A \cap B = \{-2, 0\}$, deci $C \cup (A \cap B) = \left\{-2, -\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

25.Deoarece $|x-3| \leq 5$ obţinem că $-5 \leq x - 3 \leq 5$, deci $x \in [-2, 8]$. Prin urmare $A = [-2, 8]$. Se observă uşor că $B = (-5, 3]$, deci $A \cap B \cap \mathbb{Z} = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

26. Faptul că $|x+2| \leq 6$ implică $x \in [-8, 4]$, deci $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Cum $\frac{x-3}{x-6} \leq 0$, obţinem $x \in [3, 6)$, deci $B = \{3, 4, 5\}$. Prin urmare $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ şi $|A \cup B| = 6$.

28. Se observă că $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 7\}$ şi $B = \{1,\ 2,\ 7,\ 14\}$, deci $A \cap B = \{2,\ 7\}$.

30. Cum $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8\}$ şi $B = \{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7\}$, avem $|A| + |B| = 6 + 5 = 11$.

32. $5x + 3y = 150 \Leftrightarrow x = \frac{3(50-y)}{5} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow y \in [0, 50]$ şi $y \vdots 5 \Leftrightarrow y \in \{0, 5, 10, 15, ..., 45, 50\}$. Deci, $cardC = 11$.

33. În $[-3, 2)$, inecuaţia dată este echivalentă cu: $(-x+2) - (x+3) \geq 1 \Leftrightarrow -2x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -1$. Deci, $S = [-3, 2) \cap (-\infty, -1] = [-3, -1]$. Astfel, $M = \{-3, -2, -1\}$ şi de aici,$(-3)(-2)(-1) = -6$.

34. $\frac{4n+9}{n+1} = 4 + \frac{5}{n+1} \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n + 1 = 1$ sau $n + 1 = 5 \Leftrightarrow n \in \{0, 4\} \Rightarrow cardA = 2$.

35. $B = \{0, 1, 2, 3\}$; $\frac{2x+5}{x+1} = 2 + \frac{3}{x+1} \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N} \Rightarrow C = \{0, 2\}$. Atunci, $M = (A \cup B) \setminus (B \cap C) = \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{0, 2\} = \{1, 3, 4\} \Rightarrow 1 + 3 + 4 = 8$.

37. $(n^2+2) \vdots (n+1) \Leftrightarrow \frac{n^2+1}{n+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (n-1) + \frac{3}{(n+1)} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow M = \{-4, -2, 0, 2\} \Rightarrow S = 16 + 4 + 4 = 24$.

38. $x \geq 0$, $x^2 - x = mx(x+1) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{m+1}{1-m} > 0$. Pentru $x < 0$, $x^2 + x = mx(x+1) \Rightarrow (x+1)(1+m) = 0 \Rightarrow x_3 = -1, m \neq -1$.

39. $\frac{3m}{m+2} = \frac{3n}{n+2} \Rightarrow m = n$.

40. $a^2 - xa + 1 = 0$ admite cel putin o rădăcină reală nenulă $\Rightarrow \Delta \geq 0$.

41. $\frac{x^3-3x+2}{2x+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2\left(x^3-3x+2\right)}{2x+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{27}{2x+1} \in \mathbb{Z}$.

42. $\sqrt{x} + 1 + |\sqrt{x} - 1| = 2$.

43. $\left\{\alpha = a + \sqrt{b}\,|a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - b = 1\right\} \subseteq M$.

44. $\Delta < 0$.

Capitolul 2

1. Din $a_3 = a_1 + 2r = 7$ şi $a_5 = a_1 + 4r = 13$, obţinem $a_1 = 1$, $r = 3$. Deci, $a_9 = a_1 + 8r = 25$.

5. Din $a_2 = a_1 + r = 3$ şi $a_5 = a_1 + 4r = 5$, obţinem $a_1 = \frac{7}{3}$, $r = \frac{2}{3}$. Deci, $a_{28} = a_1 + 27r = \frac{61}{3}$, de unde $S_{28} = \frac{(a_1+a_{28})\cdot 28}{2} = \frac{952}{3}$.

6. Avem suma unei progresii aritmetice de raţie $r = 2$, cu $a_1 = 1$, 27 de termeni şi $a_{27} = 53$. Deci, $S = \frac{(a_1+a_{27})\cdot 27}{2} = 27^2$.

8. Avem $a_2 + a_{15} = 2a_1 + 15r = 23$. Deci, $S_{16} = \frac{(a_1+a_{16})\cdot 16}{2} = \frac{(a_1+a_1+15r)\cdot 16}{2} = 184$.

9. Din $b_3 = b_1q^2 = 6$ şi $b_5 = b_1q^4 = 24$, obţinem $b_1 = \frac{3}{2}$, $q^2 = 4$. Deci, $b_9 = b_1q^8 = \frac{3}{2} \cdot 4^4 = 384$.

12. Se aplică formula $S_n = b_1\frac{q^n-1}{q-1}$.

15. Din $b_2 + b_3 = b_1\left(q + q^2\right) = b_1\left(4 + 16\right) = 20b_1 = 10$, obţinem $b_1 = \frac{1}{2}$. Se aplică formula $S_n = b_1\frac{q^n-1}{q-1}$.

17. Din $S_1{=}a_1{=}\ 3$ şi $S_2{=}a_1{+}a_2{=}\ 8$, obţinem $a_2 = 5$. Raţia progresiei este $r = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$. Deci, $a_{2019}{=}a_1{+}r \cdot (2019{-}1) = 3 + 2 \cdot 2018 = 4039$.

18. $S_{2019}{=}2019^2{=}\ 4076361$.

19. Termenii din sumă sunt în progresie aritmetică cu $a_1 = 1$ şi $r = 4$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ numărul de termeni din sumă şi S_n suma lor. Evident $S_n = 2 \cdot n^2 - n$. Se determină valoarea lui n din ecuaţia $2 \cdot n^2{-}n{=}\ 2016$. Se obţine $n = 32$. Are loc egalitatea: $x = a_{32} = 1 + 4 \cdot (32 - 1) = 125$. Soluţia ecuaţiei este $x = 125$.

25. Se presupune că există cel puţin o progresie aritmetică care are suma primilor n termeni egală cu S_n. Fie a_1, a_2, a_3 primii trei termeni ai acestei progresii. $S_1{=}a_1{=}\ 2018$. $S_2{=}a_1{+}a_2{=}\ 2019$. De aici se obţine $a_2{=}\ 1.S_3{=}a_1{+}a_2{+}a_3{=}\ 2022$. Se obţine $a_3{=}\ 3$. Deoarece numerele 2018, 1 şi 3 nu pot fi termenii consecutivi

ai unei progresii aritmetice rezultă că nu există progresii aritmetice care au suma primilor n termeni egală cu S_n=n^2−$2 \cdot n$+2019.

26. Se determină $a_k = S_k - S_{k-1} = k^2 + 2k - (k-1)^2 - 2(k-1) = 2k+1$. Atunci $a_k \cdot S_k = (2k+1)(k^2+2k) = 2k^3 + 5k^2 + 2k$. Rezultă că: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot S_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (2k^3 + 5k^2 + 2k) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 + 5 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + 2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} k$. Deoarece $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ se obţine suma din enunţ: $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot S_k = = \frac{n(n+1)\left(3n^2+13n+11\right)}{6}$.

27. Avem $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, deci $a_{50} = 20 + 49 \cdot 5 = 265$.

29.Deoarece $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică, termenul general este de forma $a_n = a_1 + (n-1)r$. Sistemul devine $\begin{cases} a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 5r = 27 \\ a_1 + r + a_1 + 3r + a_1 + 6r = 36 \end{cases}$, echivalent cu $\begin{cases} 3a_1 + 7r = 27 \\ 3a_1 + 10r = 36 \end{cases}$ şi are soluţia $r = 3$ şi $a_1 = 2$.

31. Deoarece $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică, termenul general este de forma $a_n = a_1 q^{n-1}$. Sistemul devine $\begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 26 \\ a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^5 = 702 \end{cases}$ şi se poate rescrie sub forma $\begin{cases} a_1 \left(1 + q + q^2\right) = 26 \\ a_1 q^3 \left(1 + q + q^2\right) = 702 \end{cases}$. Soluţia $q = 3$, $a_1 = 2$.

33. Deoarece $x-1$, 2, $x+2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, avem că $(x-1)(x+2) = 4$ echivalent cu $x^2 - x - 6 = 0$ care are rădăcinile $x_1 = -3$ şi $x_2 = 2$.

35. Deoarece a_1, a_2, a_3 sunt termeni ai unei progresii aritmetice de raţie r, obţinem că $a_2 = a_1 + r$ şi $a_3 = a_1 + 2r$. Cum $a_1 + a_2 + a_3 = 9$, avem că $a_1 + r = 3$. Deoarece $a_1 + 1$, $a_2 + 1$ şi $a_3 + 3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, avem că $(a_2+1)^2 = (a_1+1)(a_3+3)$ echivalent cu $16 = (a_1+1)(r+6)$. Ţinând cont că $r = 3 - a_1$ obţinem ecuaţia $r^2 + 2r - 8 = 0$ care are rădăcinile $r_1 = -4$ şi $r_2 = 2$. Cum progresia are termeni pozitivi,

$r=2$, deci $a_1=1$. Suma primilor 50 de termeni este $S_{50}=\frac{(a_1+a_{50})50}{2}=\frac{(1+99)50}{2}=2500$.

37. $a_1+a_2+a_3+a_4=40 \Leftrightarrow 2a_1+3r=20$; $a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=104 \Leftrightarrow 2a_1+(2n-5)\,r=52$; $(a_1+a_n)n)=432 \Leftrightarrow [2a_1+(n-1)\,r]\,n=432$. Deci, $a_1=7$, $r=2$ şi $n=12$. Deci, $a_{10}=25$.

38. $2\,(y+4)=x+z$, $y^2=xz$, $(y+4)^2=x\,(z+32)$. Deci, $x_1=2$, $y_1=6$, $z_1=18$ sau $x_2=\frac{2}{9}$, $y_2=-\frac{10}{9}$, $z_2=\frac{50}{9}$.

39. $a_1=5, r=4=9-5, S_n=629$, $2n^2+3n-629=0 \Rightarrow n_1=17, n_2=-\frac{37}{2}$.

40. $a_1+r=5; (a_1+2r)^2=a_1\,(a_1+10r) \Rightarrow a_1=2$ şi $r=3 \Rightarrow S_{10}=155$.

41. $a_1+9r=35$, $a_1+34r=10 \Rightarrow a_1=44$ şi $r=-1$. Deci, $S_{45}=990$.

42. $\frac{(x-2)+(x-4)+...+(x-2n)}{x}=12$, $x-2n=2 \Rightarrow n^2-23n-24=0 \Rightarrow n_1=24$ şi $n_2=-1$. Deci, $x=50$.

43. $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{1}{2}\,(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}) \Rightarrow a_1=3r \Rightarrow k=\frac{S_{15}}{S_5}=\frac{10\cdot r\cdot 15}{5\cdot r\cdot 5}=6$.

45. $a_n=2\cdot 3^{\frac{n}{2}} \Rightarrow a_4=2\cdot 3^2=18$.

46. $b=a+r, c=a+2r$; $(b-1)=(a-1)\,(r-2)\,, (c+3)=(a-1)\,(r-2)^2$ $\Leftrightarrow a=\frac{2r-3}{r-3}$, $r^2-3r-4=0 \Rightarrow r_1=4$ şi $r_2=-1$, deci, $a_1=5$ şi $a_2=\frac{5}{4}\notin\mathbb{N}$. Deci, $S=a+b+c=27$.

48. $2a+3r=24$, $4a^2+12ar-27r^2=0 \Rightarrow a_1=6, r_1=4 \Rightarrow 6,10,14,18$; $a_2=18, r_2=-4 \Rightarrow 18,14,10,6$. Atunci, $abcd=2^4\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7=15120$.

49. $y^2=xz \Rightarrow 2\ln y=\ln x+\ln z \Rightarrow \div\ \ln x, \ln y, \ln z$.

50. $\left(\sqrt{5x+10}\right)^2=(x-2)\,(x+4) \Rightarrow x_1=6$ sau $x_2=-3$.

51. $a=a_p, b=a_q, c=a_r \Rightarrow a=u\cdot v^{p-1}, b=u\cdot v^{q-1}, c=u\cdot v^{r-1} \Rightarrow E=u^{q-r+r-p+p-q}\cdot v^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}=1$.

Capitolul 3

1. Folosim $(f\circ g)\,(x)=f\,(g\,(x))$.

5. $f(1)+f(2)+\ldots+f(2019)=2(1+2+\cdots+2019)-2019=2019^2$. Folosim faptul că $f(3)=0$.

8. Presupunem că există cel puţin o funcţie cu proprietatea din enunţ. Înlocuind $x=0$ în relaţia din enunţ se obţine egalitatea: $f(0)+f(1)=2$. Înlocuind $x=1$ în relaţia din enunţ se obţine egalitatea: $f(1)+f(0)=5$. Egalităţile obţinute sunt contradictorii. Rezultă că nu există funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x)+f(1-x)=3x+2$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

9. Presupunem că există cel puţin o funcţie cu proprietatea din enunţ. Înlocuind $x=1$ în relaţia din enunţ se obţine egalitatea: $f(2019)+f\left(\frac{1}{2019}\right)=2$. Înlocuind $x=-1$ în relaţia din enunţ se obţine egalitatea: $f\left(\frac{1}{2019}\right)+f(2019)=0$. Egalităţile obţinute sunt contradictorii. Rezultă că nu există funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(2019^x)+f(2019^{-x})=x+1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

10. Se demonstrează că funcţia din enunţ este o funcţie pară: $f(-x)=2019^{-x}+2019^x=f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Deoarece funcţia este pară graficul funcţiei este simetric faţă de axa Oy şi deci simetric faţă de dreapta de ecuaţie $x=0$.

11. Se arată că funcţia din enunţ este o funcţie impară: $f(-x)=\log_2\left(\frac{2019+x}{2019-x}\right)=\log_2\left(\frac{2019-x}{2019+x}\right)^{-1}=-\log_2\left(\frac{2019-x}{2019+x}\right)=-f(x)$ pentru orice $x\in(-2019,\ 2019)$. Cum funcţia este impară, graficul funcţiei este simetric faţă de originea axelor de coordonate.

12. Funcţia din enunţ se poate rescrie astfel: $f(x)=x^{2018}(x+1)+1$ ceea ce sugerează calculul valorilor: $f(0)=1$ şi : $f(-1)=1$. Deoarece $f(0)=f(-1)$ şi $0\neq-1$ rezultă că funcţia nu este injectivă.

13. Se rescrie $f(x)=x(x^2-4)+1$ şi se demonstrează, de exemplu, că $f(0)=f(2)$. Deci, funcţia nu este injectivă.

14. Se demonstrează că funcţia este injectivă. Fie $x_1,x_2\in(-\infty,3)$ cu proprietatea $f(x_1)=f(x_2)$ adică $2x_1-1=2x_2-1$ de unde rezultă $x_1=x_2$. Fie $x_1,x_2\in[3,8)$ cu proprietatea $f(x_1)=f(x_2)$, adică $5x_1-10=5x_2-10$, de unde rezultă $x_1=x_2$. Presupunem prin absurd că există $x_1\in(-\infty,3)$ şi $x_2\in[3,8)$ cu proprietatea $f(x_1)=f(x_2)$. Deoarece $2x_1-1<5$ şi $5x_2-10=5$, presupunerea făcută este falsă şi, deci, funcţia este injectivă. Se demonstrează

că funcţia este surjectivă. Se demonstrează că ecuaţia $f(x) = y$ în necunoscuta x are cel puţin o soluţie în $\mathbb{R}$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$. Fie $y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) = y$. Dacă $x \in (-\infty, 3)$ ecuaţia $f(x) = y$ devine $2x - 1 = y$ cu soluţia $x = \frac{y+1}{2} < 3$ şi de aici se obţine $y < 5$. Dacă $x \in [3, 8)$ ecuaţia $f(x) = y$ devine $5x - 10 = y$ cu soluţia $x = \frac{y+10}{5} = 3$ şi de aici se obţine $y = 5$. Rezultă că funcţia este surjectivă. Deoarece funcţia este injectivă şi surjectivă rezultă că este bijectivă şi deci este inversabilă. Inversa funcţiei f este funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $g(y) = \begin{cases} \frac{y+1}{2},\ y < 5 \\ \frac{y+10}{5},\ y = 5 \end{cases}$. Altfel scris, inversa funcţiei f este funcţia $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2},\ x < 5 \\ \frac{x+10}{5},\ x = 5 \end{cases}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

16. $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -g(x) + 2,\ g(x) \in (-\infty, 2) \\ g(x) + 3,\ g(x) \in [2, 8) \end{cases}$. Se rezolvă inecuaţia $g(x) < 2$. Dacă $x \in (-\infty, 5)$, inecuaţia devine $3x - 2 < 2$ şi de aici $x \in (-\infty, 5) \cap \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$. Dacă $x \in [5, 8)$ inecuaţia devine $-x + 1 < 2$ şi de aici $x \in [5, 8) \cap (-1, 8) = [5, 8)$. Se rezolvă inecuaţia $g(x) \geq 2$. Dacă $x \in (-\infty, 5)$ inecuaţia devine $3x - 2 \geq 2$ şi de aici $x \in (-\infty, 5) \cap \left[\frac{4}{3}, 8\right) = \left[\frac{4}{3}, 5\right)$. Dacă $x \in [5, 8)$ inecuaţia devine $-x+1 \geq 2$ şi de aici $x \in [5, 8) \cap (-\infty, -1] = \emptyset$. Se obţine $h(x) = \begin{cases} -(3x - 2) + 2,\ x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \\ (3x - 2) + 3,\ x \in \left[\frac{4}{3}, 5\right) \\ -(-x + 1) + 2,\ x \in [5, 8) \end{cases}$.

Funcţia h rescrisă este: $h(x) = \begin{cases} -3x + 4,\ x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \\ 3x + 1,\ x \in \left[\frac{4}{3}, 5\right) \\ x + 1,\ x \in [5, 8) \end{cases}$.

18. Deoarece funcţia $g : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 2$ este strict descrescătoare şi funcţia f este strict monotonă, este necesar ca funcţia $h(x) : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ să fie strict descrescătoare ceea ce implică $m > 2$. De asemenea, $h(1) \leq g(1)$, deci $m \leq 4$. Prin urmare, $m \in (2, 4]$.

20. Se observă că $(f\circ g)(x)=\begin{cases} f(3x+1), & x\leq 2 \\ f(2-x), & x>2 \end{cases}$. Analizând separat fiecare caz, obţinem funcţia $(f\circ g)(x)=\begin{cases} 6x+5, & x\in(-\infty,-1) \\ -2-9x, & x\in[-1,2] \\ -5+3x, & x\in(2,4] \\ 7-2x, & x\in(4,\infty) \end{cases}$.

22. Fie $D=\mathrm{Im}(f)$ şi $y\in\mathrm{Im}(f)$. Prin urmare există $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\frac{x^2-3x+4}{x^2-x+1}=y$ ceea ce conduce la $(y-1)x^2+(3-y)x+(y-4)=0$. Dacă $y=1$ obţinem $x=\frac{3}{2}$. Dacă $y\neq 1$ ecuaţia are soluţii reale dacă $\Delta\geq 0$ ceea ce conduce la $y\in\left[\frac{7-2\sqrt{7}}{3},\frac{7+2\sqrt{7}}{3}\right]$. Se observă că $1\in\left[\frac{7-2\sqrt{7}}{3},\frac{7+2\sqrt{7}}{3}\right]$.

24. Fie $y\in\mathrm{Im}(f)$. Atunci există $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=y$, echivalent cu $\frac{2x}{x^2+2}=y$. Obţinem ecuaţia $yx^2-2x+2y=0$ care are soluţii reale dacă $\Delta\geq 0$. Obţinem $y\in[-1,1]$.

26. Punând condiţia $x^2-3x+2\geq 0$, obţinem $x\in(-\infty,1]\cup[2,\infty)$.

28. $f(m+1)=m$

29. $f(1)=0\Leftrightarrow |1-m|+|1-2|-2=0$.

30. $f(x)+3f(-x)=4(x^2+1)$ şi $3f(x)+f(-x)=4(x^2+1)$.

31. $f(0)=0$, $f(k)-f(k+1)=2k$, $k=\overline{0,16}$.

32. $(f\circ f)(x)=5x-4\Rightarrow f(x)=f^{-1}(5x-4)\Rightarrow x=1$: $f(1)=f^{-1}(1)$. Avem: $f(f(f(x)))=5f(x)-4\Rightarrow f(5x-4)=5f(x)-4\Rightarrow f(1)=1$.

33. $f\uparrow$ pe $[-2,1]$ şi $f\uparrow$ pe $(1,3]$ şi $l_s(1)=l_d(1)=f(1)\Rightarrow f\uparrow$ pe $[-2,3]\Rightarrow$ $Imf=[f(-2);f(3)]=[-2,10]$.

35. $P\in G_f\Leftrightarrow f\left(2+\sqrt{3}\right)=15\Rightarrow a=1,b=4\Rightarrow f(x)=\left[(2x+8)+\sqrt{3}(x-4)\right]\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow x=4$; $f(4)=16$.

36. Pentru $x=-1$, avem $f(7)=-11$. Înlocuind în relaţia din ipoteză, avem $f(2-5x)=10x-1\Rightarrow f(t)=3-2t\Rightarrow G_f: y=3-2x\Rightarrow m_d=-2$.

37. $(x,f(x))\in A\Leftrightarrow x(-2x-3)-x-2(-2x-3)=-2\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Capitolul 4

4. $f\left(\sqrt{4}\right) = f\left(2\right) = 0.$

5. Se rezolvă sistemul format din ecuaţiile $f\left(1\right) = 0$ şi $f\left(-1\right) = 3$.

6. Se rezolvă ecuaţia $f\left(x\right) = 2x$.

8. Se rezolvă ecuaţiile $\frac{2x+5}{3} = \pm 1$.

10. Se explicitează modulele şi se studiază cazurile $x \in (-\infty, -2]$, $x \in (-2,\ 1]$ şi $x \in [1,\ +\infty)$ şi se obţin soluţiile $x_1 = -4$ şi $x_2 = 3$.

12. Fie $a,\ b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ cu proprietatea $f\left(x\right) = ax + b$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Se înlocuieşte $f\left(x\right)$ în relaţia din enunţ şi se obţine egalitatea: $ax+b+a\left(x-1\right)+b = 3x+2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Se obţine egalitatea $2ax + 2b - a = 3x + 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ din care se obţine sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 2a = 3 \\ 2b - a = 2 \end{cases}$ a cărui soluţie este dată de: $a = \frac{3}{2}$ şi $b = \frac{7}{4}$. Se obţine funcţia de gradul întâi dată prin $f\left(x\right) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$. Rezultă că $k = 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 10$.

13. Din inecuaţia $2x - 1 \leq 3$ se obţine: $x \in (-\infty, 2]$. Din inecuaţia $x + 1 > 5$, se obţine $x \in (4, \infty)$. Soluţia sistemului este $x \in (-\infty, 2] \cap (4, \infty) = \emptyset$.

14. Se explicitează cele două module: $|x-1| = \begin{cases} 1-x,\ x \in (-\infty, 1) \\ x-1,\ x \in [1, \infty) \end{cases}$ şi $|x| = \begin{cases} -x,\ x \in (-\infty, 0) \\ x,\ x \in [0, \infty) \end{cases}$. Pentru $x \in (-\infty, 0)$, ecuaţia devine $1 - x + x = 2$ şi de aici $x \in \emptyset$. Pentru $x \in [0, 1)$, ecuaţia devine $1 - x - x = 2$ şi de aici $x = -\frac{1}{2} \notin [0, 1)$. Pentru $x \in [1, \infty)$, ecuaţia devine: $x - 1 - x = 2$ şi de aici $x \in \emptyset$. Rezultă că $x \in \emptyset$. Ecuaţia nu are soluţii reale.

16. Folosind proprietăţile funcţiei modul, inecuaţia este echivalentă cu:$x - 2 \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ şi de aici se obţine soluţia inecuaţiei: $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$.

18. Folosind proprietăţile funcţiei modul, inecuaţia este echivalentă cu $-11 < x + 3 < 11$ şi de aici se obţine soluţia inecuaţiei: $x \in [-14, 8]$.

20. Soluţia inecuaţiei $|2x - 3| = 5$ este $x \in [-1, 4]$. Soluţia inecuaţiei $|x + 1| > 7$ este $x \in (-\infty, -8) \cup (6, \infty)$. Soluţia sistemului este $x \in [-1, 4] \cap [(-\infty, -8) \cup (6, \infty)] = \emptyset$. Sistemul de inecuaţii nu are soluţii reale.

22. Deoarece A şi B aparţin graficului funcţiei şi graficul este un segment, obţinem $f:[2,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Funcţia verifică condiţiile $f(2)=3$ şi $f(4)=1$. Obţinem sistemul $\begin{cases}2a+b=3\\4a+b=1\end{cases}$ care are soluţia $a=-1$, $b=5$. Deci $f(x)=5-x$.

23. Deoarece (x_0,y_0) aparţine graficelor celor două funcţii, obţinem că $f(x_0)=y_0$ şi $g(x_0)=y_0$. Prin urmare, avem sistemul $\begin{cases}2x_0-y_0=1\\x_0-y_0=-3\end{cases}$ care are soluţia $x_0=4$, $y_0=7$. Deci $x_0+y_0=11$.

25. Se observă că $|x-4|=\begin{cases}x-4, & x\geq 4\\4-x, & x<4\end{cases}$. Dacă $x<4$, inecuaţia devine $-3\leq 4-x\leq 5$ şi obţinem $x\in[-1,4)$. Dacă $x\geq 4$, inecuaţia este $-3\leq x-4\leq 5$ şi obţinem $x\in[4,9]$. Deci $x\in[-1,9]$.

27. Fie $g(x)=ax+b$. Atunci $f(g(x))=2ax+2b-3$. Cum $f(g(x))=4x+5$, obţinem $2a=4$ şi $2b-3=5$, deci $a=2$, $b=4$ şi $g(x)=2x+4$.

29. Deoarece $g_1:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$, $g_1(x)=2x-1$ este crescătoare, funcţia are un punct de maxim în $g_1(1)=1$. Deoarece $g_2:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g_2(x)=5-4x$ este descrescătoare, funcţia are un punct de maxim în $g_2(1)=1$. Prin urmare $a-1\geq 1$ echivalent cu $a\geq 2$.

33. $(g\circ f)(x)=-3\Leftrightarrow 4(3x+8)-8=-3$.

34. $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$.

35. $a\geq 1\Rightarrow a-2<a$, $a^2+1\geq a$, $a^2\geq a$, $a^3+3\geq a\Rightarrow (a-2+1)+f\left(a^2\right)-f\left(a^2\right)+a^3+2-4+a^2=0$.

36. $f(a)=-1\Rightarrow a\in\left\{\frac{1}{2},1\right\}$. $a=1$: $f(x)=2x-3\Rightarrow S_I=\{-2,1\}$; $a=\frac{1}{2}$: $f(x)=x-\frac{3}{2}\Rightarrow S_{II}=\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$.

Capitolul 5

1. Se pun condiţiile $\Delta\leq 0$ şi $a=m-2>0$.

2. Din relaţiile lui Viète obţinem $x_1^2+x_2^2=m^2-2m+10=(m-1)^2+9$ a cărei valoare minimă se atinge pentru $m=1$.

3. $\Delta = 0$

4. $\Delta > 0$

5. $\Delta < 0$

6. Se rezolvă inecuaţia şi se iau soluţiile din $\mathbb{Z}$.

7. Se folosesc relaţiile lui Viète.

8. Se ridică la puterea a 3-a prima relaţie a lui Viète.

9. Se folosesc sumele $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ şi $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

10. $x = x_V = \frac{-b}{2a}$

11. $f_{\max} = y_V = \frac{-\Delta}{4a}$

12. $f(m) = -1$

14. $y_V = 1$

15. $\Delta < 0$

16. $\Delta < 0$ şi $a < 0$

17. Rezolvând ecuaţia $f(x) = g(x)$, obţinem $x_1 = -2$ şi $x_2 = 2$. Deci, $y_1 = f(x_1) = 5$ şi $y_2 = f(x_2) = 5$.

18. Funcţia de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x^2 - x + 2$ este strict pozitivă pe $\mathbb{R}$ deoarece $\Delta = -7 < 0$ şi coeficientul lui x^2 este strict pozitiv. Deoarece $|x-1| \geq 0$ rezultă că $x^2 - x + 2 + |x-1| > 0$ şi deci ecuaţia $x^2 - x + 2 + |x-1| = -1$ nu are soluţii reale.

19. Fie $S = y_1 + y_2$ şi $P = y_1 \cdot y_2$. Ecuaţia de gradul al doilea în necunoscuta y care are rădăcinile y_1 şi y_2 este $y^2 - Sy + P = 0$. Din relaţiile lui Viète pentru ecuaţia de gradul al doilea rezultă: $s = x_1 + x_2 = m$ şi $p = x_1 \cdot x_2 = 2$. Se calculează S şi P în funcţie de s şi p. $S = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{s^2-2p}{p} = \frac{m^2-4}{2}$, $P = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 1$. Ecuaţia cerută în enunţ este: $y^2 - \frac{m^2-4}{2} y + 1 = 0$.

20. Coordonatele vârfurilor parabolelor asociate funcţiilor f_m sunt: $x_V = \frac{m+1}{2}$ şi $y_V = -\frac{m^2+2m-3}{4}$. Prin calcul direct se verifică egalitatea: $y_V = -x_V^2 + 1$ ceea ce demonstrează că vârfurile acestor parabole se găsesc pe curba de ecuaţie $y = -x^2 + 1$.

22. Cu notaţiile consacrate, $\mathrm{Im}\,(f) = \left[\frac{-\Delta}{4a}, \infty\right)$ deoarece $a = 1 > 0$. Deoarece $\Delta = -7$, se obţine $\mathrm{Im}\,(f) = \left[\frac{7}{4}, \infty\right)$.

24. Deoarece $a = -1 < 0$ rezultă că funcţia este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$. Cum $\frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2}$ şi $(-6, -1) \subset \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ se obţine că $f((-6, -1)) = (f(-6), f(-1)) = (-28, 2)$.

26. Deoarece $a = -1 < 0$ rezultă că funcţia este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ şi strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$. Cum $\frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2}$ rezultă inegalităţile: $f(-2) < f(x) < f\left(-\frac{1}{2}\right)$ pentru orice $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ şi $f(2) < f(x) < f\left(-\frac{1}{2}\right)$ pentru orice $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. Deoarece $f(-2) = 0$, $f(2) = -4$ şi $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$ se obţine că $f((-2, 2)) = \left(-4, \frac{9}{4}\right]$.

27. Folosind proprietăţile funcţiei modul, inecuaţia se transformă în sistemul de inecuaţii: $\begin{cases} x^2 - x + 2 \leq 1 \\ -1 \leq x^2 - x + 2 \end{cases}$. Deoarece mulţimea soluţiilor primei inecuaţii este mulţimea vidă, rezultă că mulţimea soluţiilor inecuaţiei din enunţ este tot mulţimea vidă.

28. Notăm $S = x_1 + x_2$ şi $P = x_1 x_2$. Atunci ecuaţia care are rădăcinile x_1 şi x_2 este $x^2 - Sx + P = 0$. În cazul nostru, $S = 1$ şi $P = -6$, deci ecuaţia este $x^2 - x - 6 = 0$.

30. Fie x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei şi presupunem că $x_2 = 3x_1$. Ştim că $x_1 + x_2 = m + 2$ şi $x_1 x_2 = 27$. Din ultima ecuaţie obţinem că $3x_1^2 = 27$, deci $x_1 = 3$ sau $x_1 = -3$. Dacă $x_1 = 3$ avem că $x_2 = 9$ şi cum $m + 2 = 12$ obţinem $m = 10$. Dacă $x_1 = -3$ atunci $x_2 = -9$ şi obţinem $m = -14$.

32. Punem condiţiile $a > 0$ şi $\Delta < 0$ şi obţinem $a^2 + 4 < 0$, deci $a \in \emptyset$.

34. Vârful parabolei are coordonatele (x_V, y_V) unde $x_V = -\frac{b}{2a}$ şi $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$. în cazul nostru, $x_V = m - \frac{1}{2}$ şi $y_V = 1$. Cum $y_v = x_V + \frac{1}{2}$, obţinem $m = 1$.

36. Punctele de intersecţie dintre graficul funcţiei $f(x)$ şi axa Ox se determină din condiţia $f(x) = 0$. Rezolvând ecuaţia $x^2 - 3x + 2 = 0$, obţinem $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$, deci suma absciselor este 3.

38. $f(6) = f(2) = 0$, $f(0) = 4$.

39. $f(2) = 9$, $f(3) = f'(3) = 0$.

40. $f(0) = 1,\ f(2) = 1,\ f(x) = -1$ are o unică rădăcină reală.

41. $x_v = \frac{2m+1}{2m},\ y_v = -\frac{1}{4m};\ V \in d \Leftrightarrow 2x_v + 3y_v + 5 = 0.$

42. $y_v > -1 \Leftrightarrow \left(\frac{m-1}{m}\right) > -1.$

43. $f_m(a) = b,\ (\forall)\, m \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow m\left(a^2 - 8a + 7\right) + (a - 1 - b) = 0,\ (\forall)\, m \in \mathbb{R}^*.$

47. $m < 0,\ y_v > 0$

48. $m < 0,\ 4 = -\frac{(5-3m)}{2m},\ f(4) = 16 \Rightarrow m = -1, c = 0 \Rightarrow S = -\sum_{k=1}^{100} k^2 + 8\sum_{k=1}^{100} k.$

49. $Imf = [y_{min}, \infty)$

50. $\Delta_{numărător} < 0$ şi $\Delta_{numitor} < 0.$

51. $-3 \leq \frac{x^2+mx+1}{x^2-x+1} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - (m+2)\,x + 1 \geq 0$ şi $4x^2 + (m-3)\,x + 4 \geq 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}.$

Capitolul 6

1. Rezolvând sistemul format din ecuaţiile $x+3y = 1$ şi $2x-5y = -3$, obţinem $x = -\frac{4}{11},\ y = \frac{5}{11}.$

2. $\left((1-i)^2\right)^6 = (-2i)^6 = (-2)^6\left(i^2\right)^3 = -2^6 = -64$

3. $|z| = \frac{|8+6i|}{|3+4i|} = \frac{10}{5} = 2$

4. Se scrie numărul în forma algebrică şi se egalează partea imaginară cu 0.

5. $\Delta < 0$

6. $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 5 + 12i$ şi se rezolvă sistemul care se obţine de aici.

8. Din $y = \pi - x$, rezultă $\cos(\pi - x) = -\cos x$ şi $\sin(\pi - x) = \sin x$.

11. $P = i^{1+2+\ldots+2019} = i^{\frac{2019\cdot 2020}{2}} = i^{1010\cdot 2019} = \left(i^{1010}\right)^{2019}$. Deoarece $i^{4k+2} = -1$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, se obţine $i^{1010} = -1$ şi $P = -1$.

12. Evident $S = \frac{1-i^{2020}}{1-i}$. Deoarece $i^{4k} = 1$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$ se obţine $i^{2020} = 1$ şi $S = 0$.

13. $E = 0$.

14. Discriminantul ecuaţiei este: $\Delta = 4 - 8 = -4 \in \mathbb{R}$. Rădăcinile sunt: $z_{1,2} = \frac{-2\pm 2i}{2} = -1 \pm i$. Se obţin rădăcinile $z_1 = -1 - i$ şi $z_2 = -1 + i$.

15. Fie $z = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R}$. Înlocuind în ecuaţie se obţine ecuaţia: $x^2 - y^2 + 2xyi + x^2 + y^2 + i = 0$ şi de aici sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x^2 = 0 \\ 2xy + 1 = 0 \end{cases}$. Din prima ecuaţie se obţine $x = 0$ şi apoi înlocuind în a doua ecuaţie se obţine $1 = 0$ ceea ce arată că mulţimea soluţiilor ecuaţiei este vidă.

16. Ecuaţia are rădăcinile: $z_1 = 1 - \frac{1}{2}i$ şi $z_2 = -1 + \frac{1}{2}i$. Suma lor este egală cu 0.

17. Fie $z = x + iy$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $\sqrt{1+i} = x + iy$. Ridicând la puterea 2 în ambii membri ai ecuaţiei se obţine ecuaţia: $1 + i = x^2 - y^2 + 2xyi$ şi de aici sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$. Sistemul are două soluţii: $x_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ şi $y_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ de unde se obţine $z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ şi $x_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ şi $y_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ de unde se obţine $z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Astfel, $\sqrt{1+i} = \{z_1, z_2\}$ cu $z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ şi $z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

20. Prin calcul direct se obţine egalitatea $\frac{z_1^2+z_2^2}{2} = 1$.

23. Amplificăm fiecare fracţie cu conjugatul numitorului şi obţinem: $\frac{x-3-xi+3i}{2} + \frac{y+3+2y+3i}{5} = 1 - 4i$. Aducând la acelaşi numitor, obţinem sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 5x + 4y - 3 = 10 \\ -5x + 2y + 21 = -40 \end{cases}$ care are soluţia $x = 9$ şi $y = -8$.

24. Se observă uşor că $i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot i^7 + i + i^3 + i^5 + i^7 + 1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7} = 2$ dacă ţinem cont că $i^3 = -i$, $i^5 = i$ şi $i^7 = -i$.

25. Folosind proprietăţile modulului unui număr complex, obţinem: $\left|\frac{(1-2i)(2+3i)(1-i)}{(2+i)(1+3i)(2-3i)}\right| = \frac{|1-2i||2+3i||1-i|}{|2+i||1+3i||2-3i|} \frac{\sqrt{5}}{5}$.

26. Deoarece $\frac{1-i\sqrt{2}}{a+(a+2)i} \in \mathbb{R}$, avem că $\frac{1}{a} = \frac{-\sqrt{2}}{a+2}$. Soluţia acestei ecuaţii este $a = 2(1-\sqrt{2})$.

28. Înlocuind $z = x + iy$ în expresia dată, obţinem $\frac{x+2+i(y+1)}{3-y+ix} \in \mathbb{R}$. Prin urmare $\frac{x+2}{3-y} = \frac{y+1}{x}$ şi, prelucrând, obţinem $x^2 + 2x = -y^2 + 2y + 3$, deci $(x+1)^2 - 1 = -(y-1)^2 + 4$. Obţinem $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$.

31. $|z| = \frac{\sqrt{2}^{2018}}{\sqrt{2}^{2019}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

32. $x + 2y = -3$ şi $-4x + 2y = 5 \Rightarrow x + \frac{1}{5} = 2y$

33. $3x + \sqrt{x^2 + 16} = 14$ şi $y = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{15}{2}$, $x_2 = 3$, $y = 4$

34. $5a - 6b = 8$, $-4a - b = 8 \Rightarrow z = -\frac{40}{29} - \frac{72}{29}i \Rightarrow |z| = \frac{8}{29}\sqrt{106}$.

35. $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \Leftrightarrow Rez = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

36. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Imz = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 0\}$.

37. $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2 = 1$

38. $Imz = \frac{a^2+2a+3}{2(a^2+1)} = \frac{1}{2} + \frac{a+1}{a^2+1}$.

39. $z^2 = \bar{z} \Rightarrow a^2 - b^2 = a$, $b\,(2a+1) = 0 \Rightarrow b = 0$, $a \in \{0, 1\}$ şi $a = -\frac{1}{2}$, $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Deci, $S = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

40. $z = a + ib$, $(1-z)\,(1-iz) \in \mathbb{R} \Rightarrow (a+b)\,(a-b-1) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$ sau $a - b - 1 = 0$. Punctul $M\,(a, b)$ se află fie pe dreapta $d_1 : x + y = 0$, fie pe $d_2 : x - y - 1 = 0$, care sunt drepte concurente.

41. $z^3 = 1 \Rightarrow \alpha = z^{17} + \frac{1}{z^{17}} = z^2 + \frac{1}{z^2} = \frac{z+1}{z^2} = -1$.

42. $z = \left[\frac{(10-2a)}{5} + \frac{(a-5)i}{5}\right] \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = 5$.

43. $a^2 + b^2 = 9$, $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 0, b = \pm 3$ sau $a = \pm 3, b = 0$.

44. $\left(\frac{2}{1-i}\right)^{10} = \left[\frac{2(1+i)}{2}\right]^{10} = (2i)^5 = +32i \Rightarrow a = 0, b = 32$.

45. $a^3 - 15a - 4 = 0 = 4$ sau $a^2 + 4a + 1 = 0$, $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 4$.

46. $z^2 = \omega$, ω rădăcină a ecuaţiei: $x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \omega^3 = -1 \Rightarrow z^{600} = 1$.

47. $M = \{-3i, (2+i)\} \Rightarrow S_n = [2\,(1-i)]^n \Rightarrow |S_6| = 2^9 \in \mathbb{Q}$.

48. $M = \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\} \Rightarrow S = 1$.

49. $z = a + ib$, $a = 0$, $b = -\frac{13}{8} \Rightarrow M = \left\{-\frac{13}{8}i\right\}$.

50. $(1+ai)(1+ai^2)(1+ai^3)(1+ai^4) = 1-a^4 \in \mathbb{R}$, $(1+ai)(1+ai^2)(1+ai^3) = (1+a^2)(1-a) \in \mathbb{R} \Rightarrow n \in \{4k, 4k+3\}$.

Capitolul 7

1. Deoarece $\sqrt{a} \geq 0$, rezultă că ecuaţia nu are soluţii reale.

2. Se ridică la pătrat, se rezolvă ecuaţia şi se verifică soluţiile obţinute.

5. Se ridică la puterea a 3-a.

6. Se scrie de forma $2\sqrt{x} = 8 - x$ şi se ridică la pătrat.

11. Se scrie $\sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$ şi se egalează puterile.

15. Se scrie $3^x \cdot 3 + 3^x = 8 \Leftrightarrow 4 \cdot 3^x = 8 \Leftrightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$.

16. $2^x = t$, $t > 0$

17. $5^{1-x} = \frac{5}{5^x}$

18. Împărţind ecuaţia cu 3^{2x} şi notând $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, $t > 0$, obţinem: $4t^2 - t - 18 = 0$ cu soluţiile $t_1 = -2 < 0$ şi $t_2 = \frac{9}{4}$. Deci, $x = -2$ este singura soluţie reală.

19. Se rezolvă inecuaţia $x^2 + x + 1 > 3$.

20. Inecuaţia este echivalentă cu $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} \Leftrightarrow 2x - 1 < 2x$, deci $x \in \mathbb{R}$.

21. $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5$

24. $2(x+1) = x + 2$

25. $\lg \frac{x+1}{(x-1)^2} = 1 \Leftrightarrow 10x^2 - 21x + 9 = 0$ cu soluţiile $x_1 = \frac{3}{5}$, care nu convine, şi $x_2 = \frac{3}{2}$. Deci, singura soluţie reală este $x = \frac{3}{2}$.

26. Ecuaţia este echivalentă cu $3 + \lg(x+1) = 1$, adică $x + 1 = 10^{-2}$.

27. Trecând în baza 3, obţinem ecuaţia $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \log_3 x = 11$.

28. Se notează $\log_3 x = t$ şi se rezolvă ecuaţia $3t^2 - 10t + 3 = 0$.

29. Ţinând cont că bazele sunt subunitare, obţinem succesiv: $\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2 - 3x + 1\right) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 > 1$ şi se rezolvă inecuaţia.

30. $(2x-5)^2 = x^2 - 8$ cu soluţiile $x_1 = \frac{11}{3}$ şi $x_2 = 3$ care nu convine.

31. Inecuaţia este echivalentă cu $\log_7 \frac{x^2-5x}{x+4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x}{x+4} > 7$.

32. Se trec toţi logaritmii în una dintre bazele 2, 3 sau 5. Vom folosi baza 2. Se obţine: $a = \frac{\log_2 48}{\log_2 3} = \frac{\log_2\left(3\cdot 2^4\right)}{\log_2 3} = \frac{4+\log_2 3}{\log_2 3}$; $b = \frac{\log_2 90}{\log_2 5} = \frac{\log_2\left(2\cdot 5\cdot 3^2\right)}{\log_2 5} = \frac{1+\log_2 5+2\log_2 3}{\log_2 5}$. Din aceste ecuaţii se determină $\log_2 3$ şi $\log_2 5$. Se obţin expresiile: $\log_2 3 = \frac{4}{a-1}$ şi $\log_2 5 = \frac{a+7}{(a-1)(b-1)}$. Se trece şi x în baza 2 şi se obţine: $x = \log_{20} 60 = \frac{\log_2 60}{\log_2 20} = \frac{\log_2\left(2^2\cdot 3\cdot 5\right)}{\log_2(2^2\cdot 5)} = \frac{2+\log_2 3+\log_2 5}{2+\log_2 5}$. Se înlocuiesc $\log_2 3 = \frac{4}{a-1}$ şi $\log_2 5 = \frac{a+7}{(a-1)(b-1)}$ şi se obţine: $x = \frac{2ab-a+2b+5}{2ab-a-2b+9}$.

34. Se determină $k \in \mathbb{N}$ cu proprietatea: $3^k = 35 < 3^{k+1}$. Evident $k = 3$ şi de aici se obţine că: $[\log_3 35] = 3$.

36. Deoarece $3^2 + 4^2 = 5^2$ rezultă că $x = 2$ este o soluţie a ecuaţiei. Se demonstrează că este singura soluţie a ecuaţiei. Se presupune că există o soluţie $x_0 < 2$. Deoarece $x_0 < 2$ există $r > 0$ astfel încât $x_0 = 2 - r$ şi $3^{x_0} + 4^{x_0} = 5^{x_0}$ adică $3^{2-r} + 4^{2-r} = 5^{2-r}$. Folosind egalitatea $3^2 + 4^2 = 5^2$ se obţine egalitatea: $3^2 \cdot (3^{-r} - 5^{-r}) + 4^2 \cdot (3^{-r} - 5^{-r}) = 0$ ceea ce este absurd deoarece $3^2\,(3^{-r} - 5^{-r}) > 0$ şi $4^2\,(3^{-r} - 5^{-r}) > 0$. Rezultă că ecuaţia nu are soluţii mai mici decât 2. Analog se demonstrează că ecuaţia nu are soluţii mai mari decât 2. În concluzie ecuaţia are soluţia unică $x = 2$.

38. Se pune condiţia de existenţă a logaritmului: $x-2 > 0$ din care rezultă $x \in (2, +\infty)$. Ecuaţia se rescrie: $x-2 = 3^2$ şi de aici $x = 11 \in (2, +\infty)$.

39. Condiţiile de existenţă conduc la sistemul de inecuaţii: $\begin{cases} x-2>0 \\ x^2-4>0 \\ -x^2+3x-2>0 \end{cases}$.

Din prima inecuaţie se obţine $x \in (2, +\infty)$. Din a doua inecuaţie se obţine $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Din ultima inecuaţie se obţine $x \in (1, 2)$. Rezultă $x \in (2, +\infty) \cap ((-\infty, -2) \cup (2, +\infty)) \cap (1, 2) = \emptyset$. Ecuaţia nu are soluţii reale. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei este egal cu 0.

40. Condiţiile de existenţă sunt: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$. Din prima inecuaţie se obţine $x \in [2, +\infty)$. Din a doua inecuaţie se obţine $x \in [-3, +\infty)$. Rezultă că ecuaţia este definită pentru $x \in [2, +\infty) \cap [-3, +\infty) = [2, +\infty)$. Se ridică la puterea

2 ambii membri ai ecuaţiei şi se obţine ecuaţia: $x^2 + 5x + 11 = 0$ care nu are soluţii reale. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei este egal cu 0.

41. Condiţiile de existenţă sunt: $\begin{cases} \log_{\frac{2}{7}}(x-2) > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$. Prima inecuaţie conduce la inecuaţia $x-2 < 1$ şi de aici $x \in (-\infty, 3)$. Din a doua inecuaţie se obţine $x \in (2, +\infty)$. Domeniul de definiţie al funcţiei este: $D = (-\infty, 3) \cap (2, +\infty) = (2, 3)$.

42. Deoarece $\sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq 0$ şi $\sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq 0$, obţinem că $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq 0$ prin urmare ecuaţia nu are soluţii reale.

44. Notăm $t = 2^x$. Ecuaţia devine $t^2 - 9t + 8 = 0$ care are rădăcinile 1 şi 8. Prin urmare, $x \in \{0, 3\}$.

48. Din condiţiile de existenţă, obţinem că $x \geq -3$. Amplificând fracţia cu $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+3}$ obţinem $\frac{2x+10+2\sqrt{x^2+10x+21}}{4} = 3$ ceea ce conduce la $\sqrt{x^2 + 10x + 21} = 1 - x$. Observăm că $1 - x \geq 0$, prin urmare $x \in [-3, 1]$. Ridicând la pătrat şi prelucrând se obţine $x = -\frac{5}{3}$. Ecuaţia are o singură soluţie, deci produsul este $-\frac{5}{3}$.

49. Din condiţiile de existenţă obţinem $x \geq -1$. Folosind proprietăţile logaritmilor, obţinem $\log_3(x+1)(x+3) = 1$, deci $(x+1)(x+3) = 3$ cu soluţiile 0 şi -4, din care doar $x = 0$ convine.

51. Deoarece $\left(2^x + 2^{-x}\right)^2 = 4^x + 4^{-x} + 2 = 16$ şi $2^x + 2^{-x} > 0$, obţinem că $2^x + 2^{-x} = 4$.

52. $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)k} \Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

53. $x \in [-3, 0) \cup (0, 3]$, $E(x) > \sqrt{5} \Rightarrow x \in \left(0, \sqrt{5}\right)$.

54. Notăm: $y = \sqrt{x^2 - 6x + 6} \geq 0$. Ecuaţia devine: $y^2 - 4y + 3 = 0$, $y \geq 0 \Rightarrow y \in \{1, 3\} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$ sau $x^2 - 6x - 3 = 0$.

55. $x \geq 1$; $4 \geq \sqrt{x^4 - x^2}$.

56. $3 - 2x \geq 0$, $x \neq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$, $x \neq 0$. Dacă $x < 0$: $\frac{\sqrt{3-2x}}{x} < 0 \Rightarrow S_1 = (-\infty, 0)$. Dacă $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$: $3 - 2x < x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Rightarrow S_2 = \left(1, \frac{3}{2}\right]$.

57. $a^3 + 3a - 14 = 0 \Rightarrow a_1 = 2$, $a_{2,3} \in \mathbb{C}$.

58. $D = \left[-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right]$, $a = \sqrt{4x+1}$, $b = \sqrt{9-4x} \Rightarrow a+b = 4$, $ab = 3 \Rightarrow$ $a = 1, b = 3$ sau $a = 3, b = 1$.

59. $\sqrt{x-1} \geq 0$, $\sqrt{x+2} \geq 0$, $\sqrt{x-3} \geq 0$; $x-1 = 0$, $x+2 = 0$, $x-3 = 0 \Rightarrow$ $x \in \emptyset$.

61. $x \in [-1, 1]$, $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt[4]{1-x} \Rightarrow a+b = 2$, $a^2 + b^4 = 2 \Rightarrow$ $b^4 + b^2 - 4b + 2 = 0 \Rightarrow b = 1$ sau $b^3 + b^2 + 2b - 2 = 0$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}$.

63. $\log_3 2 \cdot 3^3 = 3 + \log_3 2$

66. $E = \frac{2\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x}{\log_5 x + \log_5 x} = \frac{5}{4}\log_3 5$.

67. $7^x = t > 0$, $49t\frac{4}{7}t = 347 \Leftrightarrow \frac{347t}{7} = 347 \Rightarrow x = 1$.

70. $3 + 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 \Rightarrow x = 1$.

73. $\frac{3x+1}{x-2} > 0$, $\log_2\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) > 0 = \log_2 1 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-2} > 1$.

74. $\lg\sqrt[5]{175} = \frac{2}{5}\lg 5 + \frac{1}{5}\lg 7$

75. $log_3 12 = 1 + 2a$, $\log_{36} 3 = \frac{1}{2+2a}$, $\log_3 4 = 2a$, $\log_{108} 3 = \frac{1}{3+2a}$, $E = \frac{(2a-1)}{\frac{1}{2(1+a)}} - \frac{2a}{\frac{1}{(3+2a)}} \Rightarrow E = 2$.

76. $E = (\log_2 x) \cdot \frac{1}{2}(\log_2 x) + \frac{1}{2}(\log_2 x)\frac{1}{3}(\log_2 x) - \frac{2}{3}(\log_2 x)^2 = 0$

Capitolul 8

1. Se foloseşte definiţia.

4. $7x \geq x^2 + 10$, $x \in \mathbb{N}$.

5. Se foloseşte binomul lui Newton.

7. $4x \geq x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow$ $x \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, din care doar $x = 3$ verifică ecuaţia.

11. Se observă că are loc egalitatea: $k! \cdot k = (k+1)! - k!$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Se obţine: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}((k+1)! - k!) = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \cdots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1$.

13. Evident $x \in \mathbb{N}$. Din condiţiile de existenţă a combinărilor se obţine sistemul de inecuaţii: $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x^2 - x + 4 \geq 0 \\ x+5 \geq x^2 - x + 4 \end{cases}$. Rezolvarea acestui sistem conduce la soluţia: $x \in \{0, 1, 2\}$. Înseamnă că dacă ecuaţia are soluţii atunci acestea se găsesc în mulţimea $\{0, 1, 2\}$. Pentru $x = 0$ se obţine: $C_5^4 = 7$ ceea ce este fals. Pentru $x = 1$ se obţine: $C_6^4 = 7$ ceea ce este fals. Pentru $x = 2$ se obţine: $C_7^6 = 7$ ceea ce este adevărat. În concluzie ecuaţia are soluţia unică $x = 2$. Suma soluţiilor ecuaţiei este egală cu 2.

14. Ecuaţia are soluţia unică $x = 1$. Produsul soluţiilor ecuaţiei este egal cu 1.

15. Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = C_{1234}^k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{1234-k} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{1}{5^{1234}} \cdot C_{1234}^k \cdot 2^{1234-k} \cdot 3^k$ pentru $k = 0, 1, 2, \ldots, 1234$. Se compară T_k cu T_{k+1}. Se obţine $\frac{T_k}{T_{k+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{k}{1235-k}$. Se calculează $\frac{T_k}{T_{k+1}} - 1 = \frac{5(k-741)}{3(1235-k)}$. Pentru orice $k < 741$ se obţine $T_k < T_{k+1}$ adică: $T_1 < T_2 < \cdots < T_{741}$. Pentru orice $k > 741$ se obţine $T_k > T_{k+1}$ adică: $T_{742} > T_{743} > \cdots > T_{1235}$. Pentru $k = 741$ are loc egalitatea $T_k = T_{k+1}$ şi deci $T_{741} = T_{742}$. Rezultă că există doi termeni egali care sunt cei mai mari din dezvoltare şi anume: $T_{741} = \frac{1}{5^{1234}} \cdot C_{1234}^{740} \cdot 2^{494} \cdot 3^{740}$, $T_{742} = \frac{1}{5^{1234}} \cdot C_{1234}^{741} \cdot 2^{493} \cdot 3^{741}$ şi $T_{741} = T_{742}$.

16. Există doi termeni egali care sunt cei mai mari din dezvoltare şi anume:

$T_9 = \frac{1}{4^{11}} \cdot C_{11}^8 \cdot 3^8 = \frac{55 \cdot 3^9}{4^{11}}$, $T_{10} = \frac{1}{4^{11}} \cdot C_{11}^9 \cdot 3^9 = \frac{55 \cdot 3^9}{4^{11}}$ şi $T_9 = T_{10}$.

17. Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = C_{2018}^k \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{2018-k} \cdot \left(\sqrt[3]{3}\right)^k = C_{2018}^k \cdot 2^{\frac{2018-k}{2}} \cdot 3^{\frac{k}{3}}$ pentru $k = 0, 1, 2, \ldots, 2018$. Se determină numărul de termeni raţionali. Se pun condiţiile: $\frac{2018-k}{2} \in \mathbb{N}$ şi $\frac{k}{3} \in \mathbb{N}$. Din aceste condiţii rezultă că numărul k trebuie să fie multiplu de 6. De aici se deduce că numărul termenilor raţionali din dezvoltare este egal cu numărul multiplilor de 6 din mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, 2018\}$. Acest număr este egal cu $\left[\frac{2018}{6}\right] + 1 = 337$. Restul termenilor sunt iraţionali. În final se obţine că numărul termenilor iraţionali din dezvoltare este egal cu $2019 - 337 = 1682$.

19. Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = C_{200}^{k} \cdot x^{\frac{200-k}{3}} \cdot y^{\frac{k}{5}}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 200$. Se pune condiţia ca exponentul lui x să fie egal cu 0 şi se obţine $k = 200$. Termenul cerut este $T_{200+1} = C_{200}^{200} \cdot x^0 \cdot y^{\frac{200}{5}} = y^{40}$.

20. Se foloseşte relaţia de recurenţă $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$. Se obţin egalităţile: $k^2 \cdot C_n^k = k \cdot \left(k \cdot C_n^k\right) = k \cdot n \cdot C_{n-1}^{k-1} = n \cdot \left(k \cdot C_{n-1}^{k-1}\right) = n \cdot \left((k-1) \cdot C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k-1}\right)$. Aplicând din nou relaţia de recurenţă rezultă: $(k-1) \cdot C_{n-1}^{k-1} = (n-1) \cdot C_{n-2}^{k-2}$. Rezultă egalitatea: $k^2 \cdot C_n^k = n \cdot \left((n-1) \cdot C_{n-2}^{k-2} + C_{n-1}^{k-1}\right) = n \cdot (n-1) \cdot C_{n-2}^{k-2} + n \cdot C_{n-1}^{k-1}$. Înlocuind în sumă se obţin egalităţile: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \cdot C_n^k = C_n^1 + \sum\limits_{k=2}^{n} k^2 \cdot C_n^k = C_n^1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \left(n\,(n-1) \cdot C_{n-2}^{k-2} + n \cdot C_{n-1}^{k-1}\right) = C_n^1 + n\,(n-1) \cdot \sum\limits_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} + n \cdot \sum\limits_{k=2}^{n} C_{n-1}^{k-1}$. Se foloseşte în continuare suma coeficienţilor binomiali $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Suma din enunţ devine: $S_n = n + n\,(n-1)\,2^{n-2} + n\,(2^{n-1} - 1) = n\,(n+1)\,2^{n-2}$.

21. Ţinând cont că $P_n = n!$, obţinem că $x + y + z = 4! + 3! + 2019 + 4! \cdot 3! + \frac{4!}{3!} - 2019 = 178$.

23. Observăm că $n - 1 \geq 0$ implică $n \geq 1$. Inecuaţia se poate rescrie sub forma $n(n+1) < 42$, echivalent cu $n^2 + n - 42 < 0$. Prin urmare, $n \in (-7, 6)$. Cum $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 1$, obţinem că $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

24. Din condiţiile de existenţă, avem că $n \in [-2, 44] \cap \mathbb{N}$. Ecuaţia devine $\frac{45 \cdot 46}{44-n} = 2070$ care are soluţia $n = 43$.

26. Deoarece $5 \leq n + 1$ şi $4 \leq n$, trebuie să avem $n \geq 4$. Ecuaţia devine $n + 1 = 35$, deci $n = 34$.

27. Termenul al cincilea al dezvoltării este $T_5 = C_{15}^4 x^{11} \left(-x^{-1}\right)^4 = 1365x^7$.

30. Deoarece $\frac{C_n^4}{C_n^2} = \frac{5}{2}$, obţinem $n = 8$.

31. $n + 1 > 5$, $n \in \mathbb{N}$; $n^2 - 3n - 18 = 0$.

32. $x \in \mathbb{N}$ şi $x \geq 7$, $x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x \in \{2, 6\}$.

33. $(n-2) \,\vdots\, 3 \Rightarrow n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

34. $kC_n^k = \frac{kn!}{k!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}$

35. $x \in \mathbb{N}$ şi $x^2 - 7x + 10 \leq 0$.

36. $x \in \mathbb{N}$, $2A_4^2 = C_{x+1}^x + C_{x+5}^{x+3} \Rightarrow x^2 + 11x - 26 = 0$.

37. $3x + 4 \geq x^2 + 2x - 4$, $x^2 + 2x - 4 = 6$.

39. $x \in \mathbb{N}$, $3x \geq 2y - 7$, $y \geq 4$, $3x - 2y = 19$ şi $21x - 68y = -245$.

40. $x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}$ şi $x \geq y + 1$, $2C_{x-1}^y = C_{x-1}^x + C_x^y$ şi $\left(A_x^{y+1}\right)^2 = A_x^y \cdot A_{x+1}^{y+1} \Rightarrow$ $x - 3y = 0$ c si $(x - y)^2 = x + 1$.

41. $\frac{T_7}{T_{n-5}} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6^{\frac{n-12}{3}} = 6^{-1}$.

42. $T_3 = C_4^2 \left(\sqrt{x}\right)^{4-2} \left(\sqrt[3]{x^{-1}}\right)^2$.

43. $T_{k+1} = C_{17}^k \cdot x^{\frac{34-3k}{4}} y^{\frac{4k-17}{6}}$, $\frac{34-3k}{4} = \frac{4k-17}{6}$.

44. $C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^2 = C_n^1 \Rightarrow n = 8$, $2^{2x} + 2^x - 2 = 0$.

45. $T_{k+1} = C_{20}^k \cdot 2^{\frac{60-5k}{6}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{60-5k}{6} \in \mathbb{Z}$, $k \in \{0, ...20\}$.

46. $2^n = 2^7 \Rightarrow n = 7$, $T_{k+1} = C_7^k x^{\frac{13k-28}{36}} \Rightarrow k = 4 \Rightarrow C_7^4 = 35$.

47. $2^{n-1} = 2^8 \Rightarrow n = 9$, $T_{k+1} = C_9^k \cdot x^{3-k} \Rightarrow k = 4$.

48. $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22 \Rightarrow n = 6$, $T_3 + T_5 = 135 \Rightarrow 2^{x+1} + 2^{-x+2} = 9$.

49. $P(x) = \left(10x^8 - x^3 - 8x\right)^{2018} \Rightarrow P(1) = 1$.

50. $T_{k+1} = C_n^k \cdot 2^{\frac{n-k}{2}} 3^{\frac{k}{4}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow k = 4m \leq n$. Dar m poate fi ce mult 7 $\Rightarrow$ $7 \leq \frac{n}{4} < 8$.

Capitolul 9

1. $\det A = m + 1 = 0$.

5. Se arată că $A^n = 5^{n-1} \cdot A$.

6. $\det A = (1 - m^2)\, x^2 + 2x + 3 - 2m \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică se pun condiţiile $\Delta < 0$ şi $m \neq 1$.

8. $\det X(a) = 4a + 1 \neq 0$

11. Prin calcul direct sau aplicând teorema Cayley-Hamilton se obţine egalitatea $A^2 = 7 \cdot A$. Prin inducţie se poate demonstra că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are

loc egalitatea $A^n = 7^{n-1} \cdot A$. Pentru $n = 2019$ se obţine că $A^{2019} = 7^{2018} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 7^{2018} & 6 \cdot 7^{2018} \\ 2 \cdot 7^{2018} & 4 \cdot 7^{2018} \end{pmatrix}$.

12. $A^{2019} = 9^{2018} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 9^{2018} & 2 \cdot 9^{2018} \\ 9 \cdot 9^{2018} & 6 \cdot 9^{2018} \end{pmatrix}$.

13. Prin calcul direct sau aplicând teorema Cayley-Hamilton se obţine egalitatea: $A^2 = 13 \cdot I_2$. Prin inducţie se poate demonstra că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ au loc egalităţile: $A^{2n} = 13^n \cdot I_2$ şi $A^{2n+1} = 13^n \cdot A$. Deoarece numărul $2019 = 2 \cdot 1009 + 1$ este impar rezultă că: $A^{2019} = 13^{1009} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 13^{1009} & 2 \cdot 13^{1009} \\ 2 \cdot 13^{1009} & -3 \cdot 13^{1009} \end{pmatrix}$.

14. $A^{2018} = 36^{1009} \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 36^{1009} & 0 \\ 0 & 36^{1009} \end{pmatrix}$.

15. Prin calcul direct se obţin puterile lui A: $A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 10 \\ 10 & 13 & 13 \\ 13 & 10 & 13 \end{pmatrix}$ şi $A^3 = \begin{pmatrix} 72 & 69 & 75 \\ 75 & 72 & 69 \\ 69 & 75 & 72 \end{pmatrix}$. Înlocuind în relaţia din enunţ se obţine egalitatea matriceală: $\begin{pmatrix} 72 & 69 & 75 \\ 75 & 72 & 69 \\ 69 & 75 & 72 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 13 & 13 & 10 \\ 10 & 13 & 13 \\ 13 & 10 & 13 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De aici se obţin valorile: $p=-3$, $q=-15$ şi $r=-18$. Suma valorilor coeficienţilor p, q, $r \in \mathbb{R}$ cu proprietatea din enunţ este egală cu -36.

16. $p = -9$, $q = 21$ şi $r = -18$ şi deci produsul valorilor coeficienţilor p, q, $r \in \mathbb{R}$ cu proprietatea din enunţ este egală cu 3402.

17. $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Prin inducţie se demonstrează că: $C=(A+B)^n=2^{n-1}(A+B)=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

18. Fie $S_1=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$, $S_2=\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}=2^n-1$, $S_3=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $S_4=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$, $S_5=\sum_{k=1}^{n} 1=n$ şi $S_6=\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Se obţine: $B=\begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2^n-1 & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \frac{n}{n+1} & n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{pmatrix}$.

19. Mai întâi se determină dimensiunile lui A. Fie p numărul liniilor lui A şi q numărul coloanelor lui A. Numărul liniilor lui A trebuie să fie egal cu numărul liniilor lui C. Rezultă $p=1$. Numărul coloanelor lui A trebuie să fie egal cu numărul liniilor lui B. Rezultă $q=2$. Rezultă că matricea A are o singură linie şi două coloane. Fie $x,\ y\in\mathbb{R}$ cu proprietatea $A=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$. Rezultă egalitatea: $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 11 \end{pmatrix}$. Se obţine sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 4x+2y=6 \\ 6x+5y=11 \end{cases}$. Sistemul are soluţia unică $x=1$ şi $y=1$. Se obţine în final $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

20. Matricea A se poate rescrie: $A=2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$.

În aceste condiţii: $A^{2019}=2^{2019}\begin{pmatrix} \cos\left(2019\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(2019\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(2019\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2019\pi}{3}\right) \end{pmatrix}=$
$=2^{2019}\begin{pmatrix} \cos(673\pi) & -\sin(673\pi) \\ \sin(673\pi) & \cos(673\pi) \end{pmatrix}$. Se obţine: $A^{2019}=2^{2019}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2^{2019} & 0 \\ 0 & -2^{2019} \end{pmatrix}$.

21. Deoarece $A^2=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ obţinem $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

23. Observăm că $C=\begin{pmatrix}6&-1&-5\\-1&0&-7\\0&-1&4\end{pmatrix}$, prin urmare $2AC-3B=2\begin{pmatrix}13&-1&-7\\-6&2&1\\1&-2&15\end{pmatrix}-$
$3\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&2\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26&1&-17\\-9&4&-4\\2&-1&27\end{pmatrix}$.

25. Deoarece $A^2=\begin{pmatrix}-4&1&1\\-3&0&-1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}$, obţinem că $\mathrm{Tr}\,(A^2)=-4+0-2=-6$.

26. Deoarece $A^2=3A$, se poate demonstra uşor prin inducţie că $A^n=3^{n-1}A$, deci $A^{2019}=3^{2018}A$ şi $\mathrm{Tr}\,(A^{2019})=3^{2018}\cdot 3=3^{2019}$.

27. Deoarece $\det(A)=6$, matricea este inversabilă. Cum $A^t=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}$,
calculând complemenţii algebrici obţinem $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&-5\\-3&3&-3\\1&1&1\end{pmatrix}$.

29. Deoarece rangul este 2 şi $\begin{vmatrix}1&-1\\0&2\end{vmatrix}=2$, cei doi minori obţinuţi prin bordare trebuie să fie 0. Deoarece $\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&2&a\\3&-1&3\end{vmatrix}=0$, obţinem $a=0$, iar $\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&2&3\\3&-1&b\end{vmatrix}=0$ implică $b=9$.

31. $(y^2+6)+2y=3+6\Leftrightarrow y^2+2y-3=0$.

34. $x^2+x-y^2=\frac{1}{4}$, $(2x+1)\,y=0$.

38. $A=\left(\sum_{k=1}^{2018}k\cdot k!\right)I_2=\left\{\sum_{k=1}^{2018}[(k+1)!-k!]\right\}I_2$.

40. În $\mathbb{N}$: $a+2d+3g=3$, $b+2e+3h=1$, $c+27+3i=2\Rightarrow 6$ soluţii.

41. $a^3-3a^2+2a=0$, $a\in\mathbb{R}^*\Rightarrow a\in\{1,2\}$.

42. $A^2-A=O_2\Rightarrow A^n=A_1$, $n\neq 0$, $A^0=I_2$.

43. $A^n=2^{n-1}A$, $(\forall)\,n\geq 1$.

44. $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ 45. $A = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$.

46. $A^{4n} = 3^{2n} I_3$, $n \in \mathbb{N}$.

49. $a_{22} = a^n \Rightarrow a^{2018}$.

Capitolul 10

1. $(x-7)(x^2-3) = 0$

2. $\det A = 3(m^2-4)$ care este minim pentru $m = 0$.

4. $\det A = x(x^2+3)$

6. $(8-x)(x^2-3) = 0$

7. $\det A = a^2 - 2a + 1 \neq 0$

11. Deoarece matricea A este o matrice pătratică are loc egalitatea $\det(A^n) = (\det(A))^n = 27^n$.

14. Deoarece $\det(A) = 18 \neq 0$ rezultă că matricea este inversabilă. Se scrie $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Se calculează matricea adjunctă şi se obţine $A^* = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. Se obţine: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-5}{18} \end{pmatrix}$. Suma elementelor matricei inverse este egală cu $\frac{1}{2}$.

16. Se calculează determinantul şi se obţine: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$. Ecuaţia devine: $-x^3 + 3x^2 - 4x + 4 = 0$. Se observă că $x_1 = 2$ este o rădăcină a ecuaţiei. Se împarte $-x^3 + 3x^2 - 4x + 4$ la $x - 2$ şi se obţine câtul $-x^2 + x - 2$. Se rezolvă ecuaţia $-x^2 + x - 2 = 0$ şi se obţin rădăcinile:

$x_2 = \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ şi $x_3 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$. În concluzie, ecuaţia din enunţ are rădăcinile: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ şi $x_3 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$.

18. Se calculează determinantul şi se obţine: $D(m) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$. Folosind relaţiile lui Viète se obţine $D(m) = -m^3 + 3m^2$. Ecuaţia $D(m) = 0$ devine $-m^3 + 3m^2 = 0$ şi de aici se obţin valorile $m_1 = 0$ şi $m_2 = 3$.

19. Deoarece liniile 1 şi 2 sunt proporţionale rezultă că toţi minorii de ordinul 2 sunt nuli. Se obţine $\operatorname{rang}(A) = 1$.

21. Valoarea determinantului este $3ab(a-b) - b^3 - a^3 - (a-b)^3$. Înlocuind $ab = 1$ obţinem $6a - 6b - 2a^3$.

23. Deoarece $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ 4 & x+1 \end{vmatrix} = 14$ obţinem că $x^2 - 3x + 4 = 14$, deci $x^2 - 3x - 10 = 0$, ecuaţie ce are rădăcinile $x_1 = -2$ şi $x_2 = 5$.

25. Observăm că $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x & 1 \\ \sin x & \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

27. Punctele A, B şi C sunt coliniare dacă $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, echivalent cu $x^2 - 1 = 0$. Prin urmare, $x = 1$ sau $x = -1$.

29. Se observă că rădăcinile ecuaţiei sunt $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ şi $x_3 = 2$. Valoarea determinantului este $3x_1x_2x_3 - x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 = -9$.

32. $a + b = 4$, $ab = 1$

34. $(7 - x)(x^2 - 3) = 0$

35. $(x+1)\left[m\left(x^2 - x + 1\right) + \left(x^3 - x^2 - x\right)\right] = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ singura rădăcină independentă de parametrul m.

36. $S = \left\{-\frac{m}{2m+1}; 1\right\}$

37. Notăm $\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{3} x_k^n$. Avem $\Delta^2 = \det\left(A \cdot A^T\right) = \begin{vmatrix} 3 & \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 \\ \Sigma_2 & \Sigma_3 & \Sigma_4 \end{vmatrix}$.
Dar $\Sigma_1 = S_1 = 2$, $\Sigma_2 = S_1^2 - 2S_2 = -2$, $\Sigma_3 = 2\Sigma_2 - 3\Sigma_1 - 15 = -25$, $\Sigma_4 = 2\Sigma_3 - 3\Sigma_2 - 5\Sigma_1 = -54$.

38. $S_1 = 0$ şi cum $x_1 + x_2 = 0$, avem $x_3 = 0$. Deci, $S_3 = 0 \Leftrightarrow a^2 + a = 0$.

39. Cum $\varepsilon^3 = 1$ si $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\Delta^{999} = \varepsilon^{999} = 1$.

41. $\det A \neq 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2a^2 - 5a + 2 > 0$.

42. $\det A = S_1\left(-S_1^2 + 3S_2\right)$

43. $a_{32} = 0$

44. $\det\left(I_3 + aA\right) = 3a + 1$

45. $\left(\det A\right)^2 = 1$

46. $x + 1 = 0$, $z^2 + 2 = 0$, $y^3 + 2 = 0$.

47. $\alpha + \beta = -2$

48. $rangA \leq \min(3;4) = 3$. Dacă $a \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$, există 2 minori de ordin 3 nenuli. 49. În $\mathbb{Z}$: $a = d$, $b = -c$ şi $ad - bc = 1$ sau $a = -d$, $b = c$ şi $ad - bc = -1$.

Capitolul 11

2. $\det A = (a-1)^2(a+2) \neq 0$

3. $\det A = a(a-2)(a-3)$

4. $\det A = 1 + a^2$, $\Delta_x = 1$, $\Delta_y = a^2$, $\Delta_z = a^2$

5. $\det A = -5m = 0$

7. $\det A = (m-1)^2(m+2) \neq 0$

11. Din primele două ecuaţii obţinem $x = \frac{1}{3}$ şi $y = -\frac{2}{3}$, iar din ultima ecuaţie obţinem $m = -1$.

12. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ matricea coeficienţilor necunoscutelor sistemului. Deoarece $\Delta = \det(A) = 27 \neq 0$ rezultă că sistemul este compatibil determinat şi poate fi rezolvat cu regula lui Cramer. Se calculează determinanţii: $\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 27$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 4 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 27$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 27$. Valorile necunoscute lor sunt: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1$. Suma valorilor necunoscute lor este egală cu 3.

13. Sistemul este compatibil determinat şi are soluţia: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{36}{36} = 1$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{36}{36} = 1$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{36}{36} = 1$. Produsul valorilor necunoscutelor este egal cu 1.

14. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matricea coeficienţilor necunoscutelor sistemului. Se calculează rangul acestei matrice. Deoarece $\det(A) = 0$ rezultă că $\operatorname{rang}(A) < 3$. Deoarece minorul $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ rezultă că $\operatorname{rang}(A) = 2$. Fie $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ matricea extinsă a sistemului. Se calculează $\operatorname{rang}(\bar{A})$. Considerăm minorul $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Rezultă că $\operatorname{rang}(\bar{A}) = 3$. Deoarece $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(\bar{A})$ din teorema Kronecker–Capelli rezultă că sistemul este incompatibil.

16. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ matricea coeficienţilor necunoscutelor sistemului. Se calculează rangul acestei matrice. Deoarece $\det(A) = 0$ rezultă că $\operatorname{rang}(A) < 3$. Deoarece minorul $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ rezultă că $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Fie $\bar{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ matricea extinsă a sistemului. Se calculează $\operatorname{rang}\left(\bar{A}\right)$. Se construiesc, folosind coloana termenilor liberi, şi se calculează toţi minorii de ordinul 3: $\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=0$ şi $\Delta_3=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=0$. Deoarece minorul $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3\neq 0$ rezultă că $\operatorname{rang}\left(\bar{A}\right)=2$. Se obţine egalitatea $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}\left(\bar{A}\right)=2$. Din teorema Kronecker–Capelli rezultă că sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Sistemul are două necunoscute principale şi două ecuaţii principale. Necunoscutele principale sunt x şi y. Sistemul are o singură necunoscută secundară. Necunoscuta secundară este $z=\alpha\in\mathbb{R}$. Sistemul are o singură ecuaţie secundară şi anume ecuaţia $x+y-2z=3$. Sistemul format cu necunoscutele şi ecuaţiile principale este compatibil determinat şi poate fi rezolvat cu regula lui Cramer. Acest sistem este: $\begin{cases} 2x-y=1+\alpha \\ -x+2y=2+\alpha \end{cases}$. Soluţia acestui sistem este: $x=\frac{4+3\alpha}{3}$, $y=\frac{5+3\alpha}{3}$. Soluţia sistemului din enunţ este: $x=\frac{4+3\alpha}{3}$, $y=\frac{5+3\alpha}{3}$ şi $z=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

18. Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 3 & m \end{pmatrix}$ matricea coeficienţilor necunoscutelor sistemului. Se studiază rangul matricei coeficienţilor. Se calculează $\det(A)=-m^2+10m-9$. Se rezolvă ecuaţia $\det(A)=0$ care are soluţiile m_1=1 şi $m_2=9$. Pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{1,9\}$ se obţine că $\operatorname{rang}(A)=3$. Rezultă că sistemul are soluţie unică pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{1,9\}$. Mulţimea valorilor lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică este $\mathbb{R}\setminus\{1,9\}$.

19. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 3 & m \end{pmatrix}$ matricea coeficienţilor necunoscutelor sistemului şi $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ m & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & m & 4 \end{pmatrix}$ matricea extinsă a sistemului. Se pune condiţia $\text{rang}\,(A) \neq \text{rang}\left(\bar{A}\right)$. Se calculează $\det(A) = -m^2 + 10m - 9$. Se rezolvă ecuaţia $\det(A) = 0$ care are soluţiile m_1=1 şi $m_2 = 9$. Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 9\}$ se obţine că $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\left(\bar{A}\right) = 3$ caz în care sistemul este compatibil determinat. Pentru $m = 1$ sistemul devine: $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = -3 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases}$. În acest caz $\text{rang}\,(A) = 2$ şi $\text{rang}\left(\bar{A}\right) = 3$ şi sistemul este incompatibil. Pentru $m = 9$ sistemul devine: $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ 9x + 2y + z = -3 \\ x + 3y + 9z = 4 \end{cases}$. În acest caz $\text{rang}\,(A) = 2$ şi $\text{rang}\left(\bar{A}\right) = 3$ şi sistemul este incompatibil. În concluzie, sistemul din enunţ este incompatibil pentru $m \in \{1, 9\}$.

21. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ matricea coeficieţilor necunoscutelor sistemului şi $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ m & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ matricea extinsă a sistemului. Se pune condiţia $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\left(\bar{A}\right) = 2$. Se calculează $\det(A) = 5m - 5$. Se rezolvă ecuaţia $\det(A) = 0$ care are soluţia $m = 1$. Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se obţine că $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\left(\bar{A}\right) = 3$ caz în care sistemul este compatibil determinat. Pentru $m = 1$ sistemul devine: $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + z = \frac{4}{3} \end{cases}$. În acest caz se obţine că: $\text{rang}\,(A) = \text{rang}\left(\bar{A}\right) = 2$. Rezultă că mulţimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil simplu nedeterminat este mulţimea $\{1\}$.

22. Sistemul admite soluţie unică dacă $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, echivalent cu $a^3 \neq -1$, deci $a \neq -1$.

24. Deoarece matricea coeficienţilor are rangul 2, sistemul liniar este compatibil simplu nedeterminat dacă $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ a & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ şi $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2b \end{vmatrix} = 0$ echivalent cu $a = 1$ şi $b = 3$.

26. Se observă că determinantul matricei coeficienţilor este $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$, deci sistemul este de tip Cramer. Soluţia acestu sistem este $x = 8$, $y = 5$, $z = 2$, deci $x^2 + y^2 + z^2 = 93$.

28. Se observă că rangul matricei coeficienţilor este 1 şi este egal cu rangul matricei extinse, deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat. Dacă x este necunoscuta principală şi y, z sunt necunoscutele secundare, $y = b$, $z = c$ cu $b, c \in \mathbb{R}$, atunci $x = -1 - 2b - c$, deci $x + y + z = 2c - b - 1$.

32. $\Delta = 0$ şi $\Delta_c \neq 0 \Rightarrow a = 3$ şi $b \neq 3$.

33. $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = -7$.

34. $\Delta = 0$ şi $\Delta_c \neq 0$ dacă $a = -2$.

35. $\Delta = 0$ şi $\Delta_c = 0$ dacă $a = -2$.

36. Dacă $a = \pm 1$, sistemul admite 2 soluţii.

37. Pentru $a \in \{1, 2\}$, sistemul este incompatibil.

38. $\Delta = -3$, $\bar{z} = \frac{e^a(e^a-1)}{-3} > 0$.

39. $x = y = 1 \Rightarrow a = 2$, $b = 3$.

40. $rangA = 2 \Leftrightarrow a = -1$, $\Delta_c = 0 \Leftrightarrow b = -16$.

41. $\Delta = 1 + m^2$, $x = \frac{1}{m^2+1}$, $y = \frac{m}{1+m^2}$, $z = \frac{m^2}{1+m^2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y}$.

42. $\Delta = 5$, $x = \frac{9m+5}{5}$, $y = \frac{14m-10}{5}$, $z = \frac{13m-10}{5} \in \mathbb{N} \Rightarrow m = 5$.

Capitolul 12

1. Se poate aplica regula lui l'Hospital.

4. $\lim\limits_{x\to 1, x>1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1, x<1} f(x) = -\infty$, deci $x = 1$ este ecuaţia asimptotei verticale la G_f; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = 3$, deci $y = x + 3$ este ecuaţia oblice spre $\pm\infty$ la G_f.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(1-a)x^2+(1-2a)x+1}{x+2} = 3 + b \Leftrightarrow 1 - a = 0$ şi $1 - 2a = 3 + b$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+m\right)}{x} = 1 + m = 3$.

7. $\lim\limits_{x\to -8, x<-8} f(x) = \lim\limits_{x\to -8, x>-8} f(x)$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = a + b$

11. Se pune condiţia ca $x^2 - mx + m \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că discriminantul trinomului de gradul al doilea $x^2 - mx + m$ trebuie să fie strict negativ şi deci: $\Delta = m^2 - 4m < 0$. Se obţine $m \in (0, 4)$.

12. Din condiţia $\Delta = m^2 - 4m = 0$. Se obţine $m \in \{0, 4\}$.

13. Din condiţia $\Delta = m^2 - 4m > 0$. Se obţine $m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

14. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$. Rezultă că dreapta de ecuaţie $y = 1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$. Deoarece $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$ rezultă că funcţia f nu are puncte de discontinuitate de speţa a doua şi deci nu are asimptote verticale. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$, rezultă că dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

15. Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$ rezultă că dreapta de ecuaţie $y = 1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$. Deoarece $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$, rezultă că dreapta de ecuaţie $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$ rezultă că dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

16. Se poate aplica regula lui L'Hospital şi se obţine $L = \frac{1+2^2+3^2}{2} = 7$.

17. $L = \frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$.

18. Este nedeterminarea 1^∞. Se prelucrează convenabil şi se obţine: $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1+\dfrac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x - x}}\right)^{m\frac{1}{x^2}\frac{\sin x - x}{x}}$. Aplicând de două ori regula lui L'Hospital se obţine: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$. Rezultă că $L = e^{-\frac{m}{6}}$. Condiţia din enunţ conduce la ecuaţia: $e^{-\frac{m}{6}} = e^{-2}$ din care rezultă $m = 12$.

21. Observăm că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1-ax^2-bx-ax-b}{x+1}\right) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2(1-a)-x(b+a)-b+1}{x+1}\right) = 1$, prin urmare $1-a=0$ şi $b+a=-1$, ceea ce implică $a=1$ şi $b=-2$.

22. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}x = 0$, avem că $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}x)^{\frac{1}{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\mathrm{tg}x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}x}}\right]^{\frac{\mathrm{tg}x}{2x}} =$ $= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-2x+1}) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-2x+1}} = -\frac{1}{2}$

24. Considerăm şirurile $x_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ şi $y_n = 2n\pi$. Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\cos y_n = 1$ obţinem că limita nu există.

25. Se utilizează faptul că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ şi se obţine valoarea $\frac{2}{3}$.

26. Deoarece $\frac{2x^3+3x+2}{x^2+1} = 2x + \frac{x+2}{x^2+1}$, obţinem că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - 2x = 0$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - 2x = 0$, deci dreapta $y = 2x$ este asimptotă oblică.

27. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{3}{5}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3}{5}$ obţinem că funcţia are ca asimptotă orizontală dreapta $y = \frac{3}{5}$.

28. Deoarece $-1 \le \sin 2x \le 1$, obţinem că $e^{-x} \le (2+\sin 2x)e^{-x} \le 3e^{-x}$. Conform criteriului “cleştelui”, valoarea limitei este 0.

30. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^5-3} = 0$ şi funcţia $\sin^2(3x)$ este mărginită, obţinem că valoarea limitei este 0.

31. $b = \sqrt{4+a}$, $\sqrt{4+a} = 3 \Rightarrow a = 5$, $b = 3$.

32. $8-b^3=0$, $-a+24=12\Rightarrow a=12$, $b=2$.

33. $l=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{(2^x-1)+(3^x-1)+(4^x-1)}{3}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}+\frac{4^x-1}{x}\right)}$.

34. $l=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\left(e^{x^2}-1\right)}{x^2}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right]=\frac{3}{2}$.

35. $l=\lim\limits_{x\to\infty}2\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)=2\lim\limits_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)=0$.

36. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2e^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)}{\frac{1}{x(x+1)}x(x+1)}=1$

37. $l=e^{-1}$

38. $y=x-\pi$, $l=\frac{(-\pi)}{3}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{-y}=\frac{\pi}{3}$.

39. $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x(x+1)}\right]=1$

40. $l=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

41. $l=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)}{\ln x}}=\frac{1}{e}$.

42. $l=\left[1+\frac{(a^x-c^x)+(b^x-d^x)}{c^x+d^x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\sqrt{\frac{ab}{cd}}}=\sqrt{\frac{ab}{cd}}$.

44. $l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}\right)=\frac{3}{2}$.

45. $l=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{3^{x-3}-1}{x-3}\cdot 3^3+\frac{\ln[1+(x-3)]}{(x-3)}\right]=27\ln 3+1$.

46. $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4}{x^2+2}\right)^{mx}=e^{3m}\Rightarrow m=-2$.

Capitolul 13

1. Din condiţia de continuitate în punctul $x=1$, adică $\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=f(1)$, obţinem $2=\frac{a+2}{3}$.

2. Din condiţia de continuitate în punctul $x=0$, obţinem $4=b$, iar din condiţia de continuitate în punctul $x=1$, obţinem $a+b=\frac{1}{2}$.

6. Funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+4x^2-5$, este continuă pe $[a,b]$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$. Dacă $f(a)\cdot f(b)<0$, atunci există cel puţin un $c\in\mathbb{R}$ astfel

încât $f(c) = 0$. Observăm că $f(0) = -5$ şi $f(2) = 19 > 0$. Deci, ecuaţia are cel puţin o soluţie în intervalul $[0, 2]$.

11. Se pune condiţia ca $x^2 - mx + m \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că discriminantul trinomului de gradul al doilea $x^2 - mx + m$ trebuie să fie strict negativ şi deci: $\Delta = m^2 - 4m < 0$. Se obţine $m \in (0, 4)$.

12. Din condiţia $\Delta = m^2 - 4m = 0$, se obţine $m \in \{0, 4\}$.

13. Din condiţia $\Delta = m^2 - 4m > 0$, se obţine $m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

14. Deoarece $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{x}{1+x^2} = 0$ şi $f(0) = 0$ rezultă că funcţia f este continuă în punctul $x = 0$. Funcţia este continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$ deoarece este obţinută prin operaţii elementare cu funcţii continue pe fiecare din cele două intervale. Rezultă că funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$ şi deci numărul punctelor de discontinuitate ale funcţiei este egal cu 0.

15. Deoarece $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{x}{1+x^2} = 0$ rezultă că punctul $x = 0$ este punct de discontinuitate al funcţiei. Deoarece funcţia este continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$ (este obţinută prin operaţii elementare cu funcţii continue pe fiecare din cele două intervale) rezultă că numărul punctelor de discontinuitate ale funcţiei este egal cu 1.

16. Deoarece $\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow -1} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-1}$, $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x) = \lim\limits_{x \searrow -1} \frac{ax}{1+x^2} = -\frac{a}{2}$ şi $f(-1) = -\frac{a}{2}$ rezultă că funcţia f este continuă în punctul $x = -1$ dacă şi numai dacă $-\frac{a}{2} = e^{-1}$ din care rezultă că $a = -2e^{-1}$.

17. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ rezultă că funcţia poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 0$. Cum $f(0) = a$ rezultă că valoarea lui a este egală cu 0.

18. Deoarece $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$ rezultă că funcţia nu poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 0$. Deci $a \in \emptyset$.

19. Discriminantul funcţiei de gradul al doilea de la numitorul fracţiei este egal cu -2. Rezultă că $D = \mathbb{R}$, funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$ şi astfel numărul punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este egal cu 0.

20. Discriminantul funcţiei de gradul al doilea de la numitorul fracţiei este egal cu 6. Rezultă că numărul punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este egal cu 2.

21. Funcţia f este continuă în 0 prin urmare $\lim\limits_{x \nearrow 0} 2x^3 - 3x + 2a = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = f(0)$. Obţinem că $2a = 3 = 3b$, deci $a = \frac{3}{2}$ şi $b = 1$.

23. Deoarece f este continuă în $\frac{\pi}{6}$, obţinem că $m\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\frac{\sqrt{3}}{3} + m\sqrt{3}$ de unde obţinem că $m = -\frac{1}{3}$.

26. Deoarece f este continuă în 0 şi $\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{2}{3} \sin x + 3a = 3a = 3$ şi $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{b \ln(1+x)}{3x} = \frac{b}{3} = 3$, obţinem că $a = 1$ şi $b = 9$.

29. Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}$, avem că f este continuă şi în $x = b$. Prin urmare $\lim\limits_{x \nearrow b}(5ax + 6) = \lim\limits_{x \searrow b}(3x + 2a) = 2a$. Obţinem că $5ab + 6 = 2a$ şi $3b + 2a = 2a$, deci $b = 0$ şi $a = 3$.

31. $l_s(1) = l_d(1) = f(1) \Leftrightarrow e = -a \Leftrightarrow a = -e$.

32. $l_s(1) = l_d(1) = f(1) \Leftrightarrow 2 - \sqrt{a^2 + a + 1} = |a|$.

33. $l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ şi $b^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right) \in A$.

34. $l_s(0) = l_d(0) = f(0) \Leftrightarrow a \in \emptyset$

35. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x+1}, x \in [0,1) \\ \frac{x-1}{2x}, x \in [1,2) \\ 0 \quad , \quad x = 2 \end{cases} \Rightarrow S = 1 + 2 = 3.$

36. $l_s(1) = l_d(1) = f(1) \Leftrightarrow e + 1 + m = e \Leftrightarrow m = -1$.

37. $l_d(0) = f(0) \Leftrightarrow e^2 = m$

38. $f(x) = \begin{cases} |x-1|, x > 0 \\ 1 \;, \quad x = 0 \\ \cos x, x < 0 \end{cases} \Rightarrow D_c = \mathbb{R}.$

39. $f(x) = \begin{cases} 1, \quad |x| > 1 \\ \frac{1}{2}, \quad |x| = 1 \\ \frac{-x^2+6}{x^2+4}, |x| < 1 \end{cases} \Rightarrow l_s(\pm 1) = l_d(\pm 1) = f(\pm) \Rightarrow D_c = \mathbb{R}.$

40. $x_0 \in D_c \Leftrightarrow x_0^3 - 2x_0 = x_0^2 - 2 \Leftrightarrow x_0 \in \left\{\pm\sqrt{2}, 1\right\}$.

41. $l_s(2) = l_d(2) = f(2) \Leftrightarrow 2a + b = 4 + 2b + a \Leftrightarrow a = 4 + b$.

42. $f(x) = 2^x(x^2 + 1) - 3$ continuă pe $\mathbb{R}$ şi $f(0)f(1) < 0$

43. $f(x) = x^2 - 2 \cdot 3^{-x} + 1$, continuă pe $\mathbb{R}$, $f(0)f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

44. $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ şi $x^2 - 3x + 2 \neq 0$

Capitolul 14

1. Din condiţia de continuitate în punctul $x = -1$, adică $l_s(-1) = l_d(-1) = f(-1)$, obţinem $a+b = 0$, iar din condiţia de derivabilitate în punctul $x = -1$, adică $f'_s(-1) = f'_d(-1) \in \mathbb{R}$, obţinem $-4a = 2$.

2. Se pun condiţiile $f(1) = 3$ şi $f'(1) = 1$.

4. $G_f \cap Oy = A(0,1)$, $y - 1 = f'(0)(x - 0)$.

5. Se pun condiţiile $f(x_0) = 0$ şi $f'(x_0) = 0$.

7. Se pun condiţiile $f(-2) = 0$, $f'(-2) = 0$ şi $f''(-2) \neq 0$.

8. Se calculează $f'(1)$.

12. $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ ceea ce demonstrează injectivitatea funcţiei f. Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ şi f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ rezultă că $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$ şi de aici se obţine surjectivitatea funcţiei f. Rezultă că funcţia f este bijectivă şi deci este inversabilă. $\left(f^{-1}\right)'(8) = \frac{1}{f'(x_0)}$ unde x_0 este soluţia unică a ecuaţiei $f(x) = 8$. Se observă că soluţia unică a acestei ecuaţii este $x_0 = 1$ şi de aici se obţine $\left(f^{-1}\right)'(8) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$.

14. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2}\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}f(x)$ din care se obţine egalitatea: $(1 + x^2)f'(x) = x\,f(x)$. Derivând ambii membri ai egalităţii $(1 + x^2)f'(x) = x\,f(x)$ se obţine egalitatea: $(1 + x^2)f''(x) + 2xf'(x) = xf'(x) + f(x)$ din care se deduce: $(1 + x^2)f''(x) + xf'(x) = f(x)$. Rezultă $m = 1$.

15. Se presupune pentru început că $x = 1$. Se obţine că $T_n(1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Fie în continuare $x \neq 1$. Se pleacă de la egalitatea: $S_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Derivând pe $S_n(x)$ şi amplificând cu rezultatul derivării cu x se obţine: $T_n(x) = xS'_n(x) = x\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$.

17. Din continuitatea funcţiei în punctul $x_0 = 1$ se obţine ecuaţia $a \cdot e = 1 + b$. Din condiţia de derivabilitate a funcţiei în punctul $x_0 = 1$ se obţine ecuaţia $a \cdot e = 2 + b$. Se obţine astfel un sistem de ecuaţii din care rezultă ecuaţia $1 + b = 2 + b$ care nu are soluţii reale.

19. Se pune condiţia $x^2 - mx + 1 \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. De aici se obţine condiţia: $\Delta = m^2 - 4 < 0$ din care rezultă $m \in (-2,\ 2)$.

21. Se foloseşte derivata de ordinul n a funcţiei $g : \mathbb{R} \setminus \{-a\} \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = \frac{1}{x+a}$ cu a constant: $g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$. Se scrie $f(x) = 2\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$. Rezultă că: $f^{(n)}(x) = 2\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$.

22. Deoarece $f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}$, obţinem că $f'(1) = \frac{5}{6}$.

24. Deoarece $f'(x) = 2x + 3 - 2\cos x \sin x = 2x + 3 - \sin(2x)$ şi $f''(x) = 2 - 2\cos(2x)$, obţinem că $f(0) + f'(0) + f''(0) = 4$.

26. Se observă că $f(x) = 2x^3 + x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}} + 3(x+2)^{-1}$, deci $f'(x) = 6x^2 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{(x+2)^2}$, deci $f'(1) = \frac{47}{6}$.

28. Deoarece f este derivabilă în $x = 0$, trebuie să avem că $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{2ax-3-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{2x^2-3x+1-f(0)}{x}$, prin urmare $2a = -3$, deci $a = -\frac{3}{2}$. Atunci $E\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{29}{2}$.

29. Deoarece $f''(x) = 2a$, obţinem $a = 4$. Cum $f'(1) = 2a + b$, vom avea $b = -6$, iar faptul că $f(2) = -1$ implică $c = -5$. Prin urmare, $f(x) = 4x^2 - 6x - 5$.

30. Ecuaţia admite rădăcina dublă $x = 2$ dacă $f(2) = f'(2) = 0$. Obţinem $a = -7$ şi $b = 16$.

32. $l_s(0) = l_d(0) = f(0)$ şi $f'_s(0) = f'_d(0) \Rightarrow a = 0, b = 2$.

33. $(\exists)\, f'(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \{1, 2\}$

34. $l_s(-1) = l_d(-1) = f(0-1)$ şi $l_s(0) = l_d(0) = f(0)$, $f'_s(0) = f'_d(0)$, $f'_s(-1) = f'_d(-1) \Rightarrow a = 0$.

35. $l_s(0) = l_d(0) = f(0)$ şi$f'_s(0) = f'_d(0) \Rightarrow 1 = b$ şi $a = \frac{1}{2}$.

36. $f'(0) = -2$

37. $f'(x) = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} \Rightarrow \alpha(a) = \frac{a^2}{a^2+1} + \frac{1}{|a|}$.

38. $g'(2) = \frac{1}{f'(x_0)}$, unde $f(x_0) = 2 \Rightarrow g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$.

39. $l_s(1) = l_d(1) = f(1)$, $f'_s(1) = f'_d(1)$, $f''_s(1) = f''_d \Rightarrow a + b + c = -1$, $2a + b = -2$, $a + 3 = 0$.

40. $f'(0) = 1 \Rightarrow a = b^2$, $b \in \mathbb{R}^*$.

41. $f'(1) = g'(1) \Rightarrow 2a + b = 1$, $f(1) = g(1) \Rightarrow a + b = -1$.

42. $f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2}, x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{2}{1+x^2}, \quad x \in (-1, 1) \end{cases}$

43. $f'(1) = \frac{1}{2}$

44. $f'(0) = 1 + 3\pi e$

45. $f'(x) = \ln\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{x}\right) + \frac{e}{x-e}$

46. $f^{(100)}(0) = -3 \cdot \frac{199!!}{2^{100}}$

Capitolul 15

2. $f'(x) = e^x(x^2 + 6x + m + 4)$, $\Delta = 20 - 4m > 0$

4. $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$

8. $f'(1) = 0$

11. Se foloseşte şirul lui Rolle. Se calculează $f'(x) = 3x^2 - 3$. Se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$ care are rădăcinile $x_1 = -1$ şi $x_2 = 1$. Se calculează: $f(x_1) = f(-1) = 7 > 0$, $f(x_2) = f(1) = 3 > 0$ şi limitele funcţiei f la extremităţile domeniului de definiţie: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Se construieşte tabelul asociat şirului lui Rolle:

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f(x)$	$-\infty$		7		3		∞

Numărul alternanţelor de semn în şirul lui Rolle este egal cu 1. Rezultă că ecuaţia $f(x) = 0$ are o singură rădăcină reală în intervalul $(-\infty, -1)$.

13. Se calculează derivata de ordinul întâi a funcţiei: $f'(x) = \frac{-ax^2 + 2x(1-b) + a}{(x^2+1)^2}$. Rezolvarea ecuaţiei $f'(x) = 0$ revine la studiul ecuaţiei de gradul al doilea: $-ax^2 + 2x(1-b) + a = 0$. Discriminantul acestei ecuaţii este egal cu $\Delta = 4(1-b)^2 + 4a^2 > 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$ şi $b \in \mathbb{R}$. Rezultă că ecuaţia $f'(x) = 0$

are două rădăcini reale şi distincte. Deoarece derivata schimbă semnul la stânga şi la dreapta fiecăruia din cele două puncte rezultă existenţa a două puncte de extrem local.

14. Se studiază monotonia funcţiei f. Se calculează $f'(x) = (x^2 + 2x) e^x$. Se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$ care are rădăcinile $x_1 = -2$ şi $x_2 = 0$. Se calculează: $f(x_1) = f(-2) = 4e^{-2}$, $f(x_2) = f(0) = 0$ şi limitele funcţiei f la extremităţile domeniului de definiţie: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \; = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \; = \infty$. Din tabelul de variaţie se deduce că $\operatorname{Im}(f) = (0, \infty)$.

16. Vom demonstra că există două puncte pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu axa Ox pentru orice valori $a \in \mathbb{R}^*$ şi $b \in \mathbb{R}$. Se demonstrează că funcţia f are două puncte de extrem local pentru orice valori $a \in \mathbb{R}^*$ şi $b \in \mathbb{R}$. Se calculează$f'(x) = -2 \cdot \frac{ax^2 - x(1-b) - a}{(x^2+1)^2}$. Rădăcinile derivatei sunt rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea: $ax^2 - x(1-b) - a = 0$. Discriminantul acestei ecuaţii este egal cu $\Delta = (1-b)^2 + 4a^2 > 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$ şi $b \in \mathbb{R}$. Rezultă că ecuaţia $ax^2 - x(1-b) - a = 0$ are două rădăcini reale x_1 şi x_2 pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$ şi $b \in \mathbb{R}$. Rezultă că ecuaţia $f'(x) = 0$ are două rădăcini reale şi deci funcţia f are două puncte de extrem local. În plus $x_1 x_2 = \frac{-a}{a} = -1$ ceea ce demonstrează că produsul absciselor punctelor de tangenţă în care tangenta este paralelă cu axa Ox este egal cu -1.

17. Se calculează $f'(x) = -2 \cdot \frac{x}{1-x^2}$. Deoarece derivata de ordinul întâi se anulează în punctul $x = 0$ şi are semne contrare la stânga şi la dreapta punctului $x = 0$ rezultă că funcţia are un singur punct de extrem local în punctul $x = 0$. Se calculează $f''(x) = -2 \cdot \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} < 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Rezultă că f este concavă pe $(-1, 1)$.

18. Fie $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin: $f(x) = 2\operatorname{arctg}(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ pentru orice $x \in [1, \infty)$. Se calculează $f'(x) = 0$. Rezultă că există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = c$ pentru orice $x \in [1, \infty)$. În particular, pentru $x = 1$ se obţine $f(1) = c$. Dar $f(1) = 2\operatorname{arctg}(1) + \arcsin(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Rezultă că $c = \pi$ şi de aici rezultă $a = \pi$.

19. $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & x < 0 \\ \frac{\pi}{4}, & x > 0 \end{cases}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

21. Deoarece $f'(x) = 3x^2 - 12x$, observăm că $x = 0$ şi $x = 4$ sunt puncte critice care sunt puncte de extrem. Atunci $0f''(0) + 4f''(4) = 48$.

23. Deoarece $f(1) = -8$, obţinem ecuaţia $a + b = 7$. Tangenta la grafic în $x = 1$ este paralelă cu dreapta $y = -13x + 1$, prin urmare $f'(1) = -13$. Deci a doua ecuaţie este $2a + b = 10$. Rezolvând sistemul format din cele două ecuaţii obţinem $a = 3$ şi $b = 4$.

25. Deoarece f nu are asimptote verticale, avem că $x = -1$ este rădăcină dublă a polinomului $g(x) = 3ax^3 - x^2 + bx + 5$. Prin urmare, $g(-1) = g'(-1) = 0$. Obţinem $a = -1$ şi $b = 7$, deci $a + b = 6$.

27. Funcţia are două puncte de extrem: $x = \sqrt{2}$ punct de maxim şi $x = -\sqrt{2}$ punct de minim.

31. $f'(x) < 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow m \in (-\infty, 0) \cap [(-\infty, -1) \cup (1, \infty)]$.

32. $f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{x^2+4}, x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \\ \frac{4}{x^2+4}, \quad x \in (-2, 2) \end{cases} \Rightarrow 2$ puncte de extrem.

33. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + (-m + 2)\, x = 0$ are 3 rădăcini reale $\Leftrightarrow m \in (1, \infty)$.

34. $f'(x) > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow me^{2x} + 2\,(m + 1)\, e^x + (m + 1) > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > 0$.

35. $f'(\pm 2) = 0 \Leftrightarrow a = \pm 12$

36. $f'(x) = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$, $x_m = \frac{x_M}{2} \Rightarrow m = 3$.

37. $f'(-1) = 0$ şi $f'(5) = 0 \Rightarrow a = 2, b = 0$.

38. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{a}{3}} \Rightarrow m + M = f(x_1) + f(x_2) = 2b$.

39. $d : y = -\frac{1}{2}x + 3$, asimptotă; $f'(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$.

40. $f'(\pm 1) = 0 \Rightarrow a = 0$, $a > 0$ sau $b = \frac{1}{2}$.

41. $4 - 2a + b = 0$ şi $f'(2) = 0 \Leftrightarrow b = 2a - 4$ şi $a = 4 \Rightarrow a = b = 4$.

42. $f'(-1) = 0$, $f'\left(\frac{5}{9}\right) = 0$ şi $f(-1) = 1 \cdot \frac{1}{3}$.

43. $f''(x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$; $m = 1$, $n = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = 5$.

44. $f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2}, x < -1 \text{ sau } x > 1 \\ \frac{2}{1+x^2}, x \in (-1, 1) \end{cases} \Rightarrow z = 1$.

45. $a=-1$, $|x_1-x_2|=2$ cu $f'(x_{1,2})=0$, $-2+c=0 \Rightarrow a=-1, b=3, c=2$.

46. $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax-1}{x+1}-x\right)=1 \Rightarrow a=2$.

47. $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3bx+2b^2}{x+a}-x\right)=1 \Rightarrow a+3b=-1$.

48. $s=0 \Leftrightarrow a^2-4a=0$, $a>0 \Rightarrow a=4$.

49. $m=1 \Leftrightarrow \frac{a}{c^3}=1$, $n=-3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{c^3x^4}{(b+cx)^3}-x\right]=-3 \Leftrightarrow \frac{b}{c}=1$, $c\neq 0$.

50. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ax+\sqrt{bx^2+cx+1}}{x}=4$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(ax+\sqrt{bx^2+cx+1}\right)=-1 \Rightarrow a+\sqrt{b}=4$, $a=\sqrt{b}$, $c=2\sqrt{b} \Rightarrow a=2$, $b=c=4$.

Capitolul 16

1. $x*x*x=\ln(3e^x)=x+\ln 3=0$

2. $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{de\, n\, ori}=nx+(n-1)x$

6. $x*x*y=(x-3)^2\cdot(y-3)=1^2\cdot 8$

7. $x*3=3*x=3$

9. $x*(x+2)=\frac{4}{13} \Leftrightarrow x^2-24x-22=0$

13. $5*x'=-\frac{20}{3}$

14. $x*x*x=9(x+7)^3-7=x$

15. $x*(3x-1)=9(x+7)(x+2)-7\leq 47$

17. $x^2-8x+15=0$

18. Se rezolvă sistemul $x+y=6$, $-x+y=-2$.

19. $e_1=3$, $e_2=4$

20. Se rezolvă sistemul $x^2+y^2=5$, $x^2y^2=4$.

21. $x\circ(x+1)=2x+4$, $x*(x+1)=x^2-5x+9$

22. Se ajunge la sistemul $x+y=-2$, $-x+y=0$.

23. $D_{18}=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$, $x*2=2*x=2$

24. $a \circ b \circ b = 2 + (a-2)(b-2)^2 = 14$, deci $(a-2)(b-2)^2 = 12 \cdot 1^2$ sau $(a-2)(b-2)^2 = 3 \cdot 2^2$.

27. $2\sqrt{5} \circ x' = 1 + \sqrt{5}$

29. $x \circ (x-1) \circ (x-2) = (x-7)(x-8)(x-9) + 7$

31. Se demonstrează că mulţimea M este stabilă în raport cu operaţia "$*$". Fie $x, y \in M$. Rezultă că: $|x| < 1$ şi $|y| < 1$, iar de aici se obţine că: $|x| \cdot |y| < 1$ şi $|xy| < 1$. Ultima inegalitate este echivalentă cu $xy \in (-1, 1)$ şi de aici se obţine că $xy + 1 > 0$. Se demonstrează apoi că $\frac{x+y}{xy+1} > -1$ şi $\frac{x+y}{xy+1} < 1$. Inegalitatea $\frac{x+y}{xy+1} > -1$ este echivalentă cu inegalitatea $\frac{(x+1)(y+1)}{xy+1} > 0$ ceea ce este adevărat. Inegalitatea $\frac{x+y}{xy+1} < 1$ este echivalentă cu inegalitatea $\frac{(x-1)(1-y)}{xy+1} < 0$ ceea ce este adevărat. Din cele de mai sus rezultă că mulţimea M este stabilă în raport cu operaţia "$*$". Se demonstrează că operaţia "$*$" este asociativă. Din asociativitatea operaţiei "$*$" şi din faptul că mulţimea M este stabilă în raport cu operaţia "$*$", rezultă că $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ 2019\ ori} \in M = (-1, 1)$ şi deci ecuaţia $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{de\ 2019\ ori} = 2019$ nu are soluţii în mulţimea M.

34. Numărul de elemente distincte din G este egal cu cel mai mic număr natural k cu proprietatea $\sigma^k = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Se calculează succesiv:

$$\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\sigma^3 = \sigma^2 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\sigma^4 = \sigma^3 \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$

Cel mai mic număr natural k cu proprietatea $\sigma^k = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ este egal cu 4 şi deci numărul de elemente distincte din G este egal cu 4. În plus, $G = \{e,\ \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$.

36. Se demonstrează că legea de compoziţie "$*$" este comutativă: $x * y = xy - 2x - 2y + 6 = yx - 2y - 2x + 6 = y * x$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Se studiază existenţa elementului neutru al legii de compozije "$*$". Fie $e \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $x * e = e * x = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Din comutativitatea legii de compoziţie "$*$" egalitatea $x * e = e * x$ este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Din ecuaţia $x * e = x$ se determină e. Ecuaţia $x * e = x$ devine: $xe - 2x - 2e + 6 = x$ din care se obţine $e = 3 \in \mathbb{R}$. Se determină elementele inversabile din $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie "$*$". Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, se caută $x' \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$. Egalitatea $x * x' = x' * x$ are loc datorită comutativităţii legii de compoziţie "$*$". Din ecuaţia $x' * x = e$ se determină x'. Ecuaţia $x' * x = e$ devine: $xx' - 2x - 2x' + 6 = 3$, din care rezultă pentru orice $x \neq 2$ că:$x' = \frac{2x-3}{x-2} \in \mathbb{R}$. Elementele din $\mathbb{R}$ care sunt egale cu inversele lor sunt soluţiile ecuaţiei $\frac{2x-3}{x-2} = x$. Se obţine ecuaţia de gradul al doilea: $x^2 - 4x + 3 = 0$ care are soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 3$. Rezultă că elementele din $\mathbb{R}$ care sunt egale cu inversele lor în raport cu legea de compoziţie "$*$" sunt: $x_1 = 1$ şi $x_2 = 3$. Produsul lor este egal cu 3.

37. Se demonstrează că legea de compoziţie "$*$" este comutativă: $x * y = xy - 2x - 2y + 6 = yx - 2y - 2x + 6 = y * x$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$. Se studiază existenţa elementului neutru al legii de compoziţie "$*$". Fie $e \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea $x * e = e * x = x$ pentru orice $x \in \mathbb{Z}$. Din comutativitatea legii de compoziţie "$*$" egalitatea $x * e = e * x$ este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{Z}$. Din ecuaţia $x * e = x$ se determină e. Ecuaţia $x * e = x$ devine: $xe - 2x - 2e + 6 = x$ din care se obţine $e = 3 \in \mathbb{Z}$. Se determină elementele simetrizabile din $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziţie "$*$". Pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ se caută $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$. Egalitatea $x * x' = x' * x$ are loc datorită comutativităţii legii de compoziţie $x * x' = x' * x$. Din ecuaţia $x' * x = e$ se determină x'. Ecuaţia $x' * x = e$ devine: $xx' - 2x - 2x' + 6 = 3$ din care rezultă pentru orice $x \neq 2$ că: $x' = \frac{2x-3}{x-2}$. Se pune condiţia ca $\frac{2x-3}{x-2} \in \mathbb{Z}$ pentru $x \in \mathbb{Z}$. Au loc egalităţile: $\frac{2x-3}{x-2} = \frac{2x-4+1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$. Condiţia $\frac{2x-3}{x-2} \in \mathbb{Z}$ pentru $x \in \mathbb{Z}$ se reduce la condiţia $\frac{1}{x-2} \in \mathbb{Z}$ pentru $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 2$. Rezultă că $x - 2$ trebuie să fie divizor al lui 1. Se obţin ecuaţiile: $x - 2 = -1$ din care rezultă $x = 1$ şi $x - 2 = 1$ din care rezultă $x = 3$. Singurele elemente simetrizabile din $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziţie "$*$" sunt $x = 1$ şi $x = 3$.

39. Fie e_1 elementul neutru din grupul $(\mathbb{R},+)$. Evident $e_1=0$. Fie e_2 elementul neutru din grupul $(\mathbb{R},*)$. Evident $e_2=1$. Se pune condiţia $f(e_1)=e_2$ care se scrie $f(0)=1$ şi de aici se obţine $m=1$.

40. Se pune condiţia ca legea de compoziţe "$*$" să fie comutativă: $x*y$=$y*x$ pentru orice x, $y\in\mathbb{R}$. Rezultă egalitatea: xy+ax+by=yx+ay+bx pentru orice x, $y\in\mathbb{R}$. De aici rezultă că a=b. Se pune condiţia ca legea de compoziţie "$*$" să fie asociativă: $(x*y)*z$=$x*(y*z)$ pentru orice x, y, $z\in\mathbb{R}$. Această egalitate se rescrie: xyz+axz+byz+axy+a^2x+aby+bz=xyz+axy+bxz+ax+byz+aby+b^2z pentru orice x, y, $z\in\mathbb{R}$. De aici se obţine egalitatea: a^2x+ bz= ax+b^2z pentru orice x, y, $z\in\mathbb{R}$. Se obiņ ecuaţiile: a^2=a şi b^2=b. Din prima ecuaţie se obţin valorile: a_1= 0 şi a_2= 1. Din a doua ecuaţie se obţin valorile: b_1= 0 şi b_2= 1. Deoarece a, $b\in\mathbb{R}^*$ rezultă că perechea $(\mathbb{R},*)$ este monoid comutativ pentru a=b= 1.

41. Prin calcul direct se demonstrează că ecuaţia are soluţiile: x_1=$\widehat{5}$ şi x_2=$\widehat{6}$. Suma lor este egală cu $\hat{0}$.

42. Prin calcul direct se demonstrează că ecuaţia nu are soluţii în mulţimea $\mathbb{Z}_5$. Mulţimea soluţiilor din $\mathbb{Z}_5$ ale ecuaţiei este egală cu mulţimea vidă.

43. Fie Δ=$\begin{vmatrix} \widehat{2} & \widehat{3} \\ \widehat{1} & \widehat{1} \end{vmatrix}$=$\widehat{4}$ determinantul sistemului. Evident Δ=$\widehat{4}$ este inversabil în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ şi Δ^{-1}=$\widehat{4}$. Rezultă că sistemul este compatibil determinat şi are soluţie unică care poate fi obţinută cu regula lui Cramer. Numărul k al soluţiilor sistemului este egal cu 1.

44. Fie Δ=$\begin{vmatrix} \widehat{2} & \widehat{3} \\ \widehat{1} & \widehat{1} \end{vmatrix}$=$\widehat{6}$ determinantul sistemului. Evident Δ=$\widehat{6}$ este inversabil în inelul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ şi Δ^{-1}=$\widehat{6}$. Rezultă că sistemul este compatibil determinat şi are soluţie unică care poate fi obţinută cu regula lui Cramer. Se calculează determinanţii: Δ_x=$\begin{vmatrix} \widehat{2} & \widehat{3} \\ \widehat{2} & \widehat{1} \end{vmatrix}$=$\widehat{3}$ şi Δ_y=$\begin{vmatrix} \widehat{2} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{2} \end{vmatrix}$=$\widehat{2}$. Valorile necunoscutelor sunt: x=$\Delta_x\cdot\Delta^{-1}$=$\widehat{4}$ şi y=$\Delta_y\cdot\Delta^{-1}$=$\widehat{5}$. Suma valorilor necunoscutelor din $\mathbb{Z}_7$ ale sistemului este egală cu s=$\widehat{4}$+$\widehat{5}$=$\widehat{2}$.

45. Prin calcul direct se obţine că $A^3 = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ şi deci $k = 3$.

46. Se determină elementele zero şi unitate în corpul $(\mathbb{R}, *, \circ)$, $e_1 = 2$ şi respectiv $u_1 = \frac{5}{2}$. Elementele zero şi unitate în corpul numerelor reale $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sunt $e_2 = 0$ şi respectiv $u_2 = 1$. Se pun condiţiile: $f(e_1) = e_2$ şi $f(u_1) = u_2$. Se obţin valorile $m = 2$ şi $n = -4$.

47. Singurele elemente simetrizabile în inelul $(Z, *, \circ)$ sunt $x = 1$ şi $x = 3$.

48. Se observă că $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$, $x \circ 2 = 2$, $2 \circ y = 2$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$. Folosind asociativitatea operaţiei "$\circ$" şi luând $x = (-2018) \circ (-2017) \circ \cdots (-1) \circ 0 \circ 1$ şi $y = 3 \circ \cdots \circ 2017 \circ 2018$ rezultă că $E = (x \circ 2) \circ y = 2 \circ y = 2$.

50. Se adună elementele de pe liniile doi şi trei la elementele de pe prima linie şi se obţine: $\det(A) = \begin{vmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{3} & \widehat{4} & \widehat{2} \\ \widehat{4} & \widehat{2} & \widehat{3} \end{vmatrix} = \hat{0}$.

55. În $\mathbb{Z}_8$, soluţiile ecuaţiei sunt $\hat{3}$ şi $\hat{7}$.

56. În $\mathbb{Z}_{12}$, soluţiile ecuaţiei sunt $\hat{1}$, $\hat{3}$, $\hat{5}$, $\hat{7}$, $\hat{9}$ şi $\hat{11}$.

57. Din tabla operaţiei se observă că $(G, *)$ nu este grup.

58. Se verifică uşor că $(G, *)$ este grup abelian cu elementul neutru 1. Simetricul lui 3 este 7.

59. Se observă că elementul neutru este $e = 3$. Deoarece x coincide cu simetricul său, avem $x \circ x = e$ echivalent cu $x^2 - 4x + 3 = 0$. Ecuaţia are două soluţii: $x_1 = 1$ şi $x_2 = 3$, prin urmare $S = 4$.

62. $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$, $(\forall)\, x, y \in (3, \infty) \Rightarrow 2(x-3)^2 + 3 = 35$.

63. $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \circ x \circ y = (x-3)^2(y-3) + 3 = 30$ $\Rightarrow (x-3)^2 \in \{1, 9\}$ si $(y-3) \in \{27, 3\}$.

64. $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (-2) \circ y = x \circ (-2) = -2$, $(\forall)\, x, y$.

65. $e = -\frac{1}{2} \Rightarrow x' = -1 + \frac{1}{4(x+1)}$, $(\forall)\, x > -1$.

66. $x \circ e = x \Leftrightarrow 6 - xe = 5x - x^2 - xe$, $(\forall)\, x$.

67. $x \circ y = (x-3)(y-3)+3$, $(\forall)\, x, y \Rightarrow (x-3)(y-3) = 0$, $(x-4)(y-2) = -2$.

68. $x \circ y = 4(x+1)(y+1) - 1$, $(\forall)\, x, y$.

69. $x \circ y = y \circ x$, $(\forall)\, x, y \Rightarrow a = 2 \Rightarrow x \circ y = (x-2)(y-2) + (b-4)$; $\circ$ asociativă $\Leftrightarrow b = 6$.

70. $x \circ y = (x-5)(y-5) + 5$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-5)^3 + 5 = x$. Notăm cu $t = x - 5$, $t^3 - t = 0 \Rightarrow t \in \{-1, 0, 1\}$.

71. $x_n = x_0 \circ x_{n-1}$, $n \geq 1 \Rightarrow x_3 = 2\,|x_0|$.

72. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\, x, y, z \Leftrightarrow (ac - b - b^2)(x - z) = 0)$, $(\forall)\, x, z$.

73. $x \circ y = y \circ x$, $(\forall)\, x, y \Rightarrow b = 2a$, $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\, x, y, z \Rightarrow 4a^2 = 2a$.

74. $x \circ e = x = e \circ x$ şi $e = 4$.

75. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $(\forall)\, x, y, z \Rightarrow a = -1, b = 1 \Rightarrow \circ$ - admite $e = 0$ element neutru.

76. $\circ$ admite $e = 0$ element neutru; $x' = -1 + \frac{1}{x+1} \in \mathbb{Z}$.

79. $x \circ (-1) = (-1) \circ x = x$, $(\forall)\, x \Rightarrow b = c = 1 + a$, $\frac{1}{2} \circ \left(-\frac{11}{8}\right) = -1 \Rightarrow a = +2$, $b = c = 3$.

80. $x * x * x = e^{27} + 1 \Rightarrow \ln(x-1) = 3$.

81. $x * e = e * x = x$, $(\forall)\, x \Rightarrow e = a + 1 \Rightarrow x * x' = a + 1$.

82. $x * y = (x-2)(y-2) + 2$, $(\forall)\, x, y \Rightarrow \alpha = (x-2)^{2019} + 2$.

83. $A^2 = A \Rightarrow X(a)\, X(b) = I_2 + [(a+1)(b+1) - 1]\, A = X((a+1)(b+1) - 1)$.

84. $x * y = (x-4)(y-4) + 4$, $x \circ y = (x-5)(y-5) + 5$, $(\forall)\, x, y$, $f(x) = ax + b$, $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$, $(\forall)\, x, y$.

85. Definim $f_\alpha : \mathbb{R} \to M_\alpha$, $f_\alpha(x) = A_\alpha(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, izomorfism de grupuri. Atunci, $g = f_b \circ f_a^{-1}$ izomorfism de grupuri.

Capitolul 17

2. Prin împărţire obţinem: $r = (4-a)\, X + b - 4$, deci $4 - a = 3$ şi $b - 4 = -1$.

3. Prin împărţire obţinem: $r = (3a+5)\,X + b - 2a - 4$, deci $3a + 5 = 2$ şi $b - 2a - 4 = -1$.

4. $f\left(1\right) = 12$

5. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 27$. Dacă $x = \alpha$ este rădăcina dublă, atunci $f\left(\alpha\right) = 0$, $f'\left(\alpha\right) = 0$, $f''\left(\alpha\right) \neq 0$. Obţinem $\alpha = -\frac{7}{6}$ şi $\alpha = \frac{1}{2}$. Din $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + m = 0$, obţinem $m = 2$.

8. Din $x_1 + x_3 = 2x_2$ şi $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, obţinem $x_2 = 3$, iar din $f\left(3\right) = 0$, rezultă $15 + a = 0$.

9. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - 2\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\right)$

10. $f\left(-3\right) = 0$

11. $f\left(2\right) = 1$, $f\left(1\right) = 2$

12. $f\left(1\right) = 0$, $f'\left(1\right) = 0$, $f''\left(1\right) \neq 0$

13. $f\left(-1\right) = 0$

15. $x = 1$ rădăcină dublă

17. Din $2^x = t > 0$, obţinem $t^4 + 2t^3 - 28t^2 - 8t + 96 = 0$ cu soluţiile $t_1 = 2$, $t_2 = 4$, $t_3 = -2$ şi $t_4 = -6$.

20. Din $f = \left(X - x_1\right)\left(X - x_2\right)\left(X - x_3\right) = \left(X - x_1^2\right)\left(X - x_2^2\right)\left(X - x_3^2\right)$, obţinem $x_1 = x_1^2$, $x_2 = x_2^2$, $x_3 = x_3^2$. Deci, $x_1 = 0$ sau $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ sau $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ sau $x_3 = 1$. Cum $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, rezultă că una din rădăcini este egală cu 0, iar celelalte două sunt egale cu 1. Se determină a şi b din sistemul $f\left(0\right) = 0$ şi $f\left(1\right) = 0$.

24. Din $x_1x_2x_3 = 1 - a$ şi $x_1x_3 = x_2^2$, rezultă că $x_2 = \sqrt[3]{1-a}$. Înlocuind în ecuaţia iniţială, obţinem $\sqrt[3]{1-a} = 0$ şi $\sqrt[3]{1-a} = 2$.

25. Se foloseşte relaţia $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + a\left(x_1 + x_2 + x_3\right) - 3 \cdot 15 = 0$.

26. $f\left(1\right) = 0$

27. $f = \left(X - 1\right)\left(X - 3\right)\left(X - 9\right)$

28. $r = aX + b$, $f = (X-1)(X+1) \cdot q + aX + b$, $f(1) = a + b = 3$, $f(-1) = -a + b = 9$.

29. $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$

30. $\ln x = t$, $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = (t-1)(t-2)(t-3) = 0$.

31. Fie $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $\operatorname{grad}(P) = n$. Rezultă că: $\operatorname{grad}(P(X+2)) = n$, $\operatorname{grad}\left((X-2)^2 P(X+2)\right) = n+2$ şi $\operatorname{grad}(P^2(X-1)) = 2n$. Pentru ca egalitatea din enunţ să poată avea loc este necesară egalitatea gradelor polinoamelor din cei doi membri ai egalităţii. Se obţine ecuaţia $2n = n+2$ şi de aici $n = 2$.

32. Pentru început se determină gradul polinoamelor din enunţ. Fie $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $\operatorname{grad}(P) = n$. Rezultă că: $\operatorname{grad}(P(X+2)) = n$, $\operatorname{grad}((X-2)P(X+2)) = n+1$ şi $\operatorname{grad}(P^2(X-1)) = 2n$. Pentru ca egalitatea din enunţ să poată avea loc este necesară egalitatea gradelor polinoamelor din cei doi membri ai egalităţii. Se obţine ecuaţia $2n = n+1$ şi de aici $n = 1$. Rezultă că dacă există un polinom cu proprietatea din enunţ, atunci gradul lui este egal cu 1. Există $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ astfel încât $P(X) = aX + b$. Egalitatea din enunt devine: $(X-2)(a(X+2)+b) = (a(X-1)+b)^2$. Egalând coeficienţii lui X se obţine sistemul de ecuaţii cu necunoscutele a şi b: $\begin{cases} a^2 = a \\ 2ab - 2a^2 = b \\ (b-a)^2 = -4a - 2b \end{cases}$. Deoarece $a \neq 0$, din prima ecuaţie rezultă $a = 1$. Înlocuind $a = 1$ în a doua ecuaţie, se obţine: $2b - 2 = b$ din care se obţine $b = 2$. Înlocuind $a = 1$ şi $b = 2$ în ultima ecuaţie, se obţine că $1 = -8$ ceea ce arată că nu există niciun polinom cu proprietatea din enunţ.

33. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuaţiei. Se observă că 0 nu este rădăcină a ecuaţiei. Rezultă că toate rădăcinile ecuaţiei sunt nenule. Presupunem că toate rădăcinile sunt reale şi deci: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 > 0$. Evident: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$. Folosind relaţiile lui Viète se obţine: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = m^2 - 2m^2 = -m^2 < 0$ ceea ce este în contradicţie cu presupunerea făcută. Rezultă că ecuaţia nu poate avea toate rădăcinile reale.

34. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuaţiei. Se demonstrează că: $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=-\frac{1}{3}<0$. Ecuaţia nu poate avea toate rădăcinile reale.

35. Fie $x_1=1+i$. Deoarece ecuaţia are toţi coeficienţii numere reale, rezultă că ecuaţia admite şi rădăcina $x_2=1-i$. Rezultă că polinomul asociat ecuaţiei este divizibil cu: $(X-x_1)(X-x_2)=(X-1-i)(X-1+i)=X^2-2X+2$. Se împarte polinomul asociat ecuaţiei la X^2-2X+2 şi se pune condiţia ca restul împărţirii să fie egal cu 0 pentru orice valoare a lui X. Restul împărţirii este egal cu $(2m-1)X+1-2m$. Din condiţia ca restul să fie nul pentru orice valoare a lui X se obţine ecuaţia: $2m-1=0$ din care rezultă $m=\frac{1}{2}$. Câtul împărţirii este egal cu $X+m+2$. Rezultă $x_3=-m-2=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$.

36. Fie $x_1=1-i$. Înlocuind pe x_1 în ecuaţie, se obţine ecuaţia $i(2m-1)=0$ din care se deduce $m=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$.

37. Vom determina pentru început restul împărţirii polinomului f la polinomul g. Se aplică teorema împărţirii cu rest. Există şi sunt unic determinate polinoamele $q(X)$ şi $r(X)$ cu $\operatorname{grad}(r)<\operatorname{grad}(g)$ astfel încât $f(X)=g(X)\cdot q(X)+r(X)$ pentru orice X. Deoarece $\operatorname{grad}(r)<\operatorname{grad}(g)=2$, rezultă că $\operatorname{grad}(r)\leq 1$. Există $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $r(X)=aX+b$. Egalitatea din teorema împărţirii cu rest devine: $f(X)=(X-1)^2\cdot q(X)+aX+b$ pentru orice X. Pentru $X=1$ se obţine: $f(1)=a+b$ şi de aici $a+b=1$. Derivând funcţiile polinomiale asociate polinoamelor din ambii membri ai egalităţii $f(X)=(X-1)^2\cdot q(X)+aX+b$ şi apoi înlocuind pe X cu 1, se obţine ecuaţia $n-1=a$. Rezultă $b=2-n$ şi deci restul împărţirii polinomului f la polinomul g este egal cu $r(X)=(n-1)X+2-n$. Evident $r(1)=n-1+2-n=1$.

39. Ecuaţia este o ecuaţie reciprocă de gradul 4. Se observă că ecuaţia nu are rădăcini nule. Se împarte ecuaţia cu x^2 şi se obţine ecuaţia: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$. Se face schimbarea de variabilă $x+\frac{1}{x}=y$ şi se obţine ecuaţia de gradul al doilea în necunoscuta y: $y^2+3y-4=0$. Se rezolvă această ecuaţie şi se obţin rădăcinile: $y_1=-2$ şi $y_2=1$. Se rezolvă apoi ecuaţiile de gradul al doilea: $x+\frac{1}{x}=y_1=-2$ şi $x+\frac{1}{x}=y_2=1$. Din prima ecuaţie se obţin rădăcinile: $x_1=x_2=-1$. Din a doua ecuaţie se obţin rădăcinile: $x_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ şi $x_4=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. În concluzie, rădăcinile ecuaţiei din enunţ sunt: $x_1=x_2=-1$, $x_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ şi $x_4=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

41. Împărţind $f(X)$ la $g(X)$ obţinem $q(X) = 3X^2 - 5X - 4$ şi $r(X) = 22X + 14$. Deci $q(1) + r(1) = 30$.

44. Împărţind $f(X)$ la $g(X)$ obţinem $q(X) = X^2 + X + \hat{5}$ şi $r(X) = \hat{4}X + \hat{3}$. Deci $q(\hat{1}) + r(\hat{1}) = \hat{0}$.

45. Deoarece resturile împărţirilor lui f prin $X-1$, $X+1$ şi $X+2$ sunt 2, 4 şi 11 obţinem că $f(1) = 2$, $f(-1) = 4$ şi $f(-2) = 11$. Restul împărţirii polinomului f prin $(X^2-1)(X+2)$ este un polinom de forma $r(X) = aX^2 + bX + c$ cu proprietatea că $f(1) = r(1)$, $f(-1) = r(-1)$ şi $f(-2) = r(-2)$. Obţinem sistemul $\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=4 \\ 4a-2b+c=11 \end{cases}$ cu soluţia $a = 2$, $b = -1$ şi $c = 1$.

47. Din relaţiile lui Viète, avem că $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-4 \\ x_1x_2x_3=-12 \end{cases}$. Deoarece $(4-x_1)(4-x_2)(4-x_3) = 64-16(x_1+x_2+x_3)+4(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-x_1x_2x_3$, obţinem $(4-x_1)(4-x_2)(4-x_3) = 12$.

49. Din relaţiile lui Viète avem că $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-5 \\ x_1x_2x_3=-6 \end{cases}$. Deoarece $x_1 + x_2 = -1$, obţinem $x_3 = 3$ şi sistemul $\begin{cases} x_1+x_2=-1 \\ x_1x_2=-2 \end{cases}$ care are soluţia $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ sau $x_1 = -2$, $x_1 = 1$. Prin urmare, rădăcinile polinomului sunt -2, 1 şi 3.

54. $gradf = 1$, $f(-2) = 3$ şi $f(1) = 3$.

55. $gradf = 2$, $f(1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(2) = 5$.

56. $f(1) = 2$, $X \to 1$: $0 = 2 - f(-2)$.

57. $a + c = -2$, $b + d = 1$, $8a + 3b + c = -19$, $3a + b - d = -9$.

58. $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$

59. $m - n = 7$, $3m + 8n = -1$

60. $(\forall)\, a \in \mathbb{Z}_6$, $a^3 = a$. Ecuaţia $\hat{2}a = \hat{1}$ nu are soluţii în $\mathbb{Z}_6$ deoarece $\hat{2} \notin \mathcal{U}(\mathbb{Z}_6)$.

61. $f(1) = f(2) = 1$

62. $f\left(\hat{4}\right) = f\left(\hat{5}\right) = f\left(\hat{6}\right) = \hat{0}$.

63. $f(a) = -5$

64. $x_k^n - 4x_k^{n-1} - 5x_k^{n-2} + 14x_k^{n-3} = 0$, $k = 1, 2, 3$.

65. $f(\varepsilon) = f'(\varepsilon) = 0$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

66. $f(4) = 0$ şi $S_1^2 - 2S_2 = 22 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 6$, $x_1 x_2 = 5$.

67. $f(i) = 0$

68. $\div x_1, x_2, x_3 \Rightarrow x_1 = \alpha - r$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \alpha + r$, $S_1 = 3 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow f(1) = 0$ $\Rightarrow a + b = 8$. Din $S_1^2 - 2S_2 = 11 \Rightarrow 9 - \frac{\cancel{2}a}{\cancel{4}_2} = 11 \Rightarrow a = -4$, $b = 12$.

69. $(\exists)\, \alpha \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a = \alpha - \alpha^3 \Leftrightarrow a = -(\alpha - 1)\,\alpha\,(\alpha + 1)$.

70. $\div x_1, x_2, x_3$ şi $S_1 = 6 \Rightarrow x_2 = 2$.

71. $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

72. $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ şi $f'''(1) \neq 0$.

73. $S_1 = 0$ şi $S_2 = -28$; $x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_2^2 = 4$.

74. $S_3 = 1$, $x_1 = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = -1$.

75. $f = m\,(2X^2 - 5X + 2) + (X^3 - 5X^2 + 9X - 6) \Rightarrow x_1 = 2$ rădăcină independentă de $m \in \mathbb{R}$.

76. $x_k^3 - x_k + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{x_1 - x_1^3 + x_1 x_3}{x_2^2} = \frac{1 - \frac{1}{x_2}}{x_2^2} = \frac{x_2 - 1}{x_2^3} = \frac{x_2 - 1}{x_2 - 1} = 1$.

77. $f(1) = R_1 \Leftrightarrow R_1 = -1$; $f(1) = a + b$, $f'(1) = a \Rightarrow a = 0$, $b = -1 \Rightarrow$ $R_2(X) = -1$.

78. $S_n = -\frac{f'(-1)}{f(-1)}$

79. $P = 2^4 f\left(\frac{1}{2}\right)$

Capitolul 18

1. $\int f(x)\,dx = \int (x^2 - x + 3)\,dx$

4. $\int f(x)\,dx = \int 6^x dx$

5. $\ln x = t$, $\frac{dx}{x} = dt$

6. $F(x) = \int f(x)\,dx + C$, $F(1) = 5$

7. $\int f(x)\,dx = \int (x-2)(x^2+4)\,dx$

8. $F'(x) = f(x)\,, \forall x \in \mathbb{R}$

9. $\int f''(x)\,dx = f'(x) + C$

10. $2 + 3x^2 = t$, $xdx = \frac{dt}{6}$

11. Se pune condiţia ca pentru orice $x \in \mathbb{R}$ să aibă loc egalitatea: $F'(x) = f(x)$. Evident $F'(x) = 2ax\frac{k}{3}(1+x^2)^{\frac{k-3}{3}}$. Din egalitatea $F'(x) = f(x)$ se obţin ecuaţiile: $2a\frac{k}{3} = 1$ şi $k - 3 = 1$ din care rezultă valorile căutate: $k = 4$ şi apoi $a = \frac{3}{8}$. Suma valorilor lui a şi k este egală cu $\frac{35}{8}$.

12. $a = 1$ şi $k = 1$.

13. Se impune continuitatea funcţiei f în punctul $x = 2$. De aici se obţine $a = -2$. Pentru $a = -2$ mulţimea primitivelor funcţiei f este mulţimea funcţiilor $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin: $F(x) = \begin{cases} 3\frac{x^2}{2} - 4x + C_1, & x \leq 2 \\ -2\frac{x^2}{2} + 6x + C_2, & x > 2 \end{cases}$ cu $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$. Din continuitatea funcţiei F în punctul $x = 2$, se obţine relaţia: $-2 + C_1 = 8 + C_2$. Fie $C_1 = C \in \mathbb{R}$ şi de aici $C_2 = C - 10$. Se obţine: $F(x) = \begin{cases} 3\frac{x^2}{2} - 4x + C, & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 10 + C, & x > 2 \end{cases}$. Primitiva funcţiei f care are proprietatea $F(3) = 4$ se obţine din condiţia $F(3) = 4$ din care rezultă $C = 5$. În concluzie, primitiva cerută în enunţ este funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin: $F(x) = \begin{cases} 3\frac{x^2}{2} - 4x + 5, & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 5, & x > 2 \end{cases}$. Suma cerută este: $S = \sum\limits_{k=3}^{n} F(k) = \sum\limits_{k=3}^{n} \left(-k^2 + 6k - 5\right) = \dfrac{-2n^3 + 15n^2 - 13n - 18}{6}$.

14. Alegând părţile $f'(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$ şi integrând prin părţi, se obţine: $I = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$. Alegând acum părţile $f'(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$ şi integrând din nou prin părţi, se obţine: $I = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) - I$. Rezultă că $2I = e^x(\sin x - \cos x)$, de unde: $I = \frac{1}{2}e^x \cdot (\sin x - \cos x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

16. Din egalitatea $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ se determină: $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$. Integrând, se obţine: $I = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

17. Se foloseşte egalitatea $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ şi se obţine $I = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

18. Alegând părţile $f'(x) = e^x$, $g(x) = x^n$ şi integrând prin părţi, se obţine: $I_n = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x$. Cum $\int x^{n-1}e^x = I_{n-1}$ are loc egalitatea: $I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$ şi de aici se obţine egalitatea din enunţ: $I_n + nI_{n-1} = x^n e^x$.

19. Se integrează de două ori prin părţi. Se obţine recurenţa: $I_n + n(n-1)I_{n-2} = x^{n-1}(n\sin x - x\cos x)$.

20. Se observă că are loc egalitatea: $\left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1+x^2}{x^2}$. Cu această observaţie integrala poate fi rescrisă astfel: $I = \int \left(x - \frac{1}{x}\right)' \cdot \sin\left(x - \frac{1}{x}\right)dx$. Se face schimbarea de variabilă $x - \frac{1}{x} = t$ şi se obţine: $I = \int \sin t dt = -\cos t$. Revenind la variabila iniţială, se obţine: $I = -\cos\left(x - \frac{1}{x}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

21. Fiind produs de funcţii derivabile, F e derivabilă. Funcţia F e primitivă pentru f pe $(-1, \infty)$ dacă $F'(x) = f(x)$, echivalent cu $(2ax+b)\sqrt{x+1} + (ax^2 + bx + c)\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = 5x\sqrt{x+1}$. Prelucrând, obţinem $(5a-10)x^2 + (4a+3b-10)x + 2b + c = 0$, ceea ce conduce la sistemul $\begin{cases} 5a - 10 = 0 \\ 4a + 3b - 10 = 0 \\ 2b + c = 0 \end{cases}$ cu soluţia $a = 2$, $b = \frac{2}{3}$ şi $c = -\frac{4}{3}$. Prin urmare, $a + b + c = \frac{4}{3}$.

23. Descompunând în fracţii simple, obţinem $f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x-3} + \frac{3}{4}\frac{1}{x+1}$, deci $\int \frac{x-2}{(x-3)(x+1)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-3}dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{4}\ln|x-3| + \frac{3}{4}\ln|x+1| + C = \ln\left(\sqrt[4]{|x+1|^3|x-3|}\right) + C$.

25. Se aplică de două ori formula integrării prin părţi şi se obţine $\int (3x^2 - 2x)e^x dx = (3x^2 - 8x + 8)e^x + C$.

27. Se observă că $F(x) = \int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + 2\int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \ln|x^2 + x + 1| + \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$. Cum $F(0) = 0$, obţinem $C = -\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$. Prin urmare, $F(1) = \ln 3 + \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

29. Se observă că $F(x) = \int (x+2)\sin x dx = -(x+2)\cos x + \sin x + C$. Deoarece $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, obţinem $C = -1$. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = -3$.

32. Dacă $a = 0$, f este continuă pe $\mathbb{R}$. Deci,f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

33. $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -a + 4b = 1$, $4a + b = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{17}$, $b = \frac{4}{17}$.

34. $F(1) = -13$

35. $f(\mathbb{R}) = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow f$ nu are proprietatea lui Darboux $\Rightarrow f$ nu admite primitive.

36. f continuă pe $\mathbb{R}$ dacă $a = 2$.

37. F derivabilă pe $\mathbb{R}$ dacă $a = \frac{3}{e}$, $b = -2 \Rightarrow ab = -\frac{6}{e}$.

38. $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = b = -\frac{1}{2} \Rightarrow (3a + 5b) = -4$.

40. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + c$. Deci, $C = -2$.

41. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1 \Rightarrow b = 1$, $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow a = 1$, $c = 0$.

42. $F(x) = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + C$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow C = 0$.

43. $F(x) = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$, $F(2) = \ln\frac{1}{16} \Rightarrow C = \frac{1}{6} + \ln\frac{\sqrt[4]{3}}{16} \Rightarrow F(0) = -\frac{1}{3} + \ln\frac{\sqrt[4]{3}}{16}$.

44. $f(x) = \begin{cases} x, x > 0 \\ \frac{a}{2}, x = 0 \\ x^2 + a, x < 0 \end{cases}$ admite primitive dacă $a = 0$.

45. $F(x) \cdot F'(x) = x$ şi $F(0) = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

46. Notăm $\cos x = t$, $I = -arctg\,(\cos x) + C$.

47. $f(x) = -\frac{1}{4(x+1)} + \frac{x+3}{4(x^2+3)}$.

48. $\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = -\frac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{1}{x^2+2x+2} \Rightarrow a = c = 0$, $b = d = 1$.

49. $g(x) = \left(xe^{f(x)}\right)'$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int g(x)\,dx = xe^{f(x)} + C$.

52. $I = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2} dx$.

53. $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$

54. $I = \int \left[1 + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx$

55. $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Capitolul 19

2. $f(x) = t$, $f'(x)\,dx = dt$, $x = 0 \Rightarrow t = f(0) = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = f(1) = \frac{1}{2}$, $I = \int_0^{\frac{1}{2}} e^t dt$

3. $2x - 5 = t$, $dx = \frac{dt}{2}$, $x = 3 \Rightarrow t = 1$, $x = 7 \Rightarrow t = 9$, $I = \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{t}dt$

4. $I = \int_0^2 \frac{1}{3-x}dx + \int_2^3 \frac{1}{x-1}dx$

5. Se aplică formula de integrare prin părţi.

6. $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

7. $I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2)^2+1}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctgt}\big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$

11. $I = \int_{-a}^{a} (-x+1)\,dx$

12. Se aplică formula de integrare prin părţi.

13. $1 - x^2 = t$, $xdx = -\frac{dt}{2}$, $x^2 = 1 - t$, $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 0$, $I = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\sqrt{t}dt$

14. $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^6+1}}$ este funcţie impară, deci $I = \int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0$.

15. $I = \int_0^1 \left(1 - \frac{7}{x+3}\right)dx$

17. $x^4 + 1 = t$, $x^3dx = \frac{dt}{4}$, $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 2$, $I = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{4}\int_1^2 t^{-\frac{1}{2}}dt$.

18. $I = \int_{-1}^1 (1+e^x)\,dx + \int_1^2 (x+e)\,dx$

19. Pentru $x \in [-3,2]$, expresia funcţiei F este: $F(x) = \int_{-3}^x f(t)\,dt = \int_{-3}^x (t^2 - \sin t)\,dt$. Calculând integrala, se obţine pentru $x \in [-3,2]$ că: $F(x) = \frac{x^3}{3} + \cos x + 9 - \cos 3$. Pentru $x \in (2,7]$, expresia funcţiei F este: $F(x) = \int_{-3}^2 f(t)dt + \int_2^x f(t)\,dt = \int_{-3}^2 (t^2 - \sin t) + \int_2^x t\ln t dt$. Calculând integrala, se obţine pentru $x \in (2,7]$ că: $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{38}{3} + \cos 2 - \cos 3 - 2\ln 2$. În concluzie, $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \cos x + \sin 5, & x \in [-3,2] \\ x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + \ln 2, & x \in (2,7] \end{cases}$.

21. Funcţia de sub integrală este impară şi, deci, integrala este egală cu 0.

22. Funcţia de sub integrală este impară şi, deci, integrala este egală cu 0.

23. Pe intervalul de integrare au loc egalităţile: $[x-1] = \begin{cases} -2, & x \in [-1,0) \\ -1, & x \in [0,1) \\ 0, & x \in [1,2) \end{cases}$

şi $|x-1| = \begin{cases} 1-x, & x \in [-1,1) \\ x-1, & x \in [1,2] \end{cases}$. Se obţine: $I = \int_{-1}^{0} \left(\frac{-1}{1+x^2} - 1 + x\right) dx + \int_0^1 (x-1)dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{1+x^2} + 1 - x\right) dx$. Fie $I_1 = \int_{-1}^{0} \left(\frac{-1}{1+x^2} - 1 + x\right) dx$. Evident $I_1 = -\text{arctg}x|_{-1}^{0} - x|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}|_{-1}^{0} = -\frac{\pi+6}{4}$. Fie $I_2 = \int_0^1 (x-1)\, dx = -\frac{1}{2}$. Fie $I_3 = \int_1^2 \left(\frac{1}{1+x^2} + 1 - x\right) dx = \text{arctg}x|_1^2 + x|_1^2 - \frac{x^2}{2}|_1^2 = \text{arctg}2 - \frac{\pi+2}{4}$. Se obţine $I{=}I_1{+}I_2{+}I_3{=}\text{arctg}2{-}\frac{\pi+5}{2}$.

25. Evident $(\text{tg}x)' = 1+\text{tg}^2 x$. Se face schimbarea de variabilă $\text{tg}x = t$. Rezultă că: $(\text{tg}x)'dx = (1+\text{tg}^2 x)\, dx = dt$. Limitele de integrare se modifică astfel: pentru $x = 0$ rezultă $t = 0$ şi pentru $x = \frac{\pi}{4}$ rezultă $t = 1$. Se obţine: $I = \int_0^1 \sin t dt = -\cos t|_0^1 = 1 - \cos 1$.

27. Se caută constantele reale A şi B care satisfac egalitatea: $\sin x - \cos x = A(\sin x + 3\cos x) + B(\sin x + 3\cos x)'$ pentru orice $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Se obţin valorile: $A{=}-\frac{1}{5}$ şi $={-}\frac{2}{5}$. Înlocuind în egalitatea de mai sus şi apoi în integrală, se obţine: $I = -\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 3\cos x)'}{\sin x + 3\cos x} dx = -\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\ln 3$.

29. Făcând substituţia $x = 3\sin t$, integrala devine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{9\pi}{4}$.

31. Integrala se rescrie sub forma $e^6 \int_0^3 e^{3x} dx$. Făcând substituţia $t = 3x$, integrala devine $\frac{e^6}{3} \int_0^9 e^t dt = \frac{e^{15} - e^6}{3}$.

33. Se observă că funcţia $f(x) = |x|e^{-|x|} = \begin{cases} -xe^x, & x \in [-2,0] \\ xe^{-x}, & x \in (0,1) \end{cases}$. Prin urmare, $\int_{-2}^{1} |x|e^{-|x|}dx = \int_{-2}^{0} -xe^x dx + \int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{2e^2 - 2e - 3}{e^2}$.

35. Se observă că $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx = \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \ln|x^2 + 2x + 2|\,|_0^1 + \text{arctg}(x+1)\,|_0^1 = \ln\frac{5}{2} + \text{arctg}2 - \frac{\pi}{4}$.

37. Descompunând în fracţii simple, obţinem $\int_0^2 \frac{x-2}{(x-3)(x+1)}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{x-3}dx + \frac{3}{4}\int_0^2 \frac{1}{x+1}dx = \frac{\ln 3}{2}$.

41. $\frac{1}{x} = t$, $I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{12}$.

42. $I = 2\left[(a-b-2) + (b+1)\,e\right] \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}, b = -1$.

43. $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-1}{n} - \frac{2}{n}\ln\left(\frac{n+1}{2}\right)\right] = 1.$

44. $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left[3\ln\left(\frac{n+1}{6}\right)^{n+\sqrt{n}+3} - 2\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\left(n+\sqrt{n}+3\right)}\right] = 1.$

45. $f(x) = \begin{cases} \frac{\left|x^2-4\right|}{x^2+1}, x > 0 \\ 2, \quad x = 0 \\ x^2, \quad \text{x} < 0 \end{cases} \Rightarrow I = \int_{-1}^{0} x^2 dx - \int_0^1 \frac{x^2-4}{x^2+1}dx = \frac{15\pi-8}{12}.$

46. $f(x) = e^{x-3} \Rightarrow I = \int_{-1}^{1} xf(x)\, dx = 2e^{-4}.$

47. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)e^{x^2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2 \Rightarrow M = \{-2\}.$

48. $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ şi $f'(x) < 0, x < -\frac{1}{2}$ şi $f'(x) > 0, x > -\frac{1}{2}.$

49. $f'(x) = e^x \ln(1 - x + x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1.$

50. Se aplică regula lui L'Hospital, $l = \frac{1}{2}$.

52. $2 - x = t$, $I = \int_0^2 \frac{f(2-t)}{f(t)+f(2-t)}dt \Rightarrow I = 1.$

53. $f(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow I = -\frac{4}{9}$.

54. Cu schimbarea de variabilă $t = x+2$, se obţine: $I = \int_2^4 \left(\frac{4}{t} - 1\right)^{2n-1}\cdot\frac{1}{t^2}dt.$ Cu schimbarea de variabilă $\frac{4}{t} - 1 = y$, avem: $I = \frac{1}{8n}$.

55. Pentru $a > 3$, $I(a) = \ln\left(\frac{a}{a-2}\right) \Rightarrow l_d = \ln 3$. Pentru $a < 3$, $I(a) = \ln\left[a(4-a)\right] \Rightarrow l_s = \ln 3$. Deci, $L = \ln 3$.

56. $I = \int_{-1}^{0} -1dx + \int_0^1 \frac{x}{x+2}dx = \ln\frac{4}{9}.$

57. $I(a) = e^a\left(-2a^2 + 7a - 7\right) + 7 \Rightarrow \lim\limits_{a\to-\infty} I(a) = 7.$

58. $x_n = 2\left(n - 1 - arctgn + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow L = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4arctgn-2\pi}{\pi}\right)n} = e^{-\frac{4}{\pi}}.$

Capitolul 20

1. $A = \int_0^2 \frac{x}{x+3}dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{3}{x+3}\right)dx$

3. $V = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{x}+1\right)^2 dx$

6. $A = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right)$

7. $V = \pi\int_0^1 f^2(x)\, dx = \pi\int_0^1 xe^x dx$

10. $A = \int_5^a \frac{1}{x}dx = \ln x|_5^a = \ln a - \ln 5 = \ln 3$

11. Aria cerută este egală cu $A = \int_0^1 |f(x)|dx$. Explicitând modulul, se obţine: $|f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{2} - x^2, & x \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{3} - x^2, & x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{3}}] \\ x^2 - \frac{1}{3}, & x \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1] \end{cases}$. Se obţine: $A = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} - x^2\right) dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{3} - x^2\right) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$. Calculând cele trei integrale, se obţine aria $A = \frac{1}{24} + \frac{4\sqrt{3}}{27}$.

16. $V = \pi \int_1^2 f^2(x)\, dx = \pi \int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \ln(1+x^2)|_1^2 = \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

21. Pentru a obţine punctele de intersecţie ale graficelor celor două funcţii, rezolvăm ecuaţia $f(x) = g(x)$ ceea ce implică $x = 0$ sau $x = 3$. Atunci aria suprafeţei este $\int_0^3 |x - 3 - \sqrt{9 - x^2}|dx = \frac{9}{4}(\pi - 2)$.

23. Aria suprafeţei plane căutate este $\int_2^4 \left|\frac{3}{x^2+x-2}\right| dx = 3 \ln \frac{|x-1|}{|x+2|}\Big|_2^4 = \ln 2$.

25. Volumul corpului de rotaţie este $\pi \int_{-1}^{2} (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = 3\pi + \frac{\pi}{4}(\cos 8 - \cos 4)$.

27. Punctele de intersecţie dintre parabolă şi dreaptă sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 = 2x + 3$. Rezolvând ecuaţia, obţinem $x = -1$ şi $x = 3$. Prin urmare aria căutată este $\int_{-1}^3 |x^2 - 2x - 3|dx = \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3)dx = \frac{32}{4}$.

29. Punctele de intersecţie dintre parabolă şi cerc sunt soluţia sistemului $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y^2 = 3x \end{cases}$. Cum $x \geq 0$, obţinem punctele $A(1, -\sqrt{3})$ şi $B(1, \sqrt{3})$. Considerând funcţia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x}. & x \in [0, 1] \\ \sqrt{4 - x^2}, & x \in (1, 2] \end{cases}$, obţinem că volumul corpului căutat este $\pi \int_0^2 f^2(x)dx = \pi \int_0^1 3x dx + \pi \int_1^2 (4 - x^2)dx = \frac{19\pi}{6}$.

31. $\begin{cases} y^2 = x \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow O(0, 0),\ A\left(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}\right) \Rightarrow A = \int_0^{\sqrt[3]{4}} \left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{2}{3}$.

32. $\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases} \Rightarrow O(0, 0), A\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A = \int_0^{\frac{3}{4}} \left(\sqrt{x - x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x\right) dx = \frac{3\sqrt{3}+8\pi}{96}$.

33. $A=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^1 \left[xarctgx-\ln\left(1+x^2\right)\right]dx=\frac{6-\pi-4\ln 2}{4}$.

34. $A=\int_{-1}^1 |f(x)|\,dx=\int_{-1}^1 \arccos\left(\frac{x^3-3x}{2}\right)dx \overset{y=-x}{\Leftrightarrow} \int_{-1}^1\left[\pi-\arccos\left(\frac{y^3-3y}{2}\right)\right]dx \Rightarrow$ $2A=\int_{-1}^1 \pi dy=2\pi \Rightarrow A=\pi$.

35. $d: y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$ tangentă în $(x_0,f(x_0))$ la G_f. $O\in d \Leftrightarrow$ $\ln x_0-1=0 \Leftrightarrow x_0=e \Rightarrow A=\int_0^e \frac{1}{e}xdx-\int_1^e \ln xdx=\frac{e}{2}-1$.

37. $A=\int_1^{\sqrt{2}} f(x)\,dx=\int_1^{\sqrt{2}} xe^{mx^2}dx=\frac{e^{2m}-e^m}{2m}=\frac{1}{m} \Leftrightarrow e^{2m}-e^m-2=0 \Rightarrow$ $m=\ln 2$.

38. $A(t)=\int_t^{3t}\frac{x}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)\Big|_t^{3t}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{9t^2+9}{t^2+9}\right)\to\frac{\ln 9}{2}=\ln 3$.

39. $A=\int_1^{2\sqrt{3}-1}\frac{dx}{(x+1)^2+4}\overset{y=x+1}{=}\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{y^2+4}=2\int_2^{a+1}\frac{dx}{y^2+4}\Leftrightarrow\frac{\pi}{24}arctg\frac{(a+1)}{2}-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow$ $\frac{7\pi}{24}=arctg\left(\frac{a+1}{2}\right)$.

40. $t=x-n$, $S_n=\int_n^{n+1}|f(x)|\,dx=\int_0^1 e^{-t-n}\sin\pi tdt=\frac{\pi e^{-n}\left(e^{-1}+1\right)}{\left(\pi^2+1\right)}\Rightarrow$ $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{1}{e}$.

41. $V=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1\sqrt{x(1-x)}dx$, $\sqrt{\frac{1-x}{x}}=t$, $V=\pi\int_0^\infty\frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^3}dt=$ $\frac{\pi^2}{8}$.

42. $V=\pi\int_0^1 \arcsin\frac{2x}{1+x^2}dx=\pi\left[x\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\Bigg|_0^1-\ln\left(1+x^2\right)\Bigg|_0^1\right]=$ $\pi\left[\frac{\pi}{2}-\ln 2\right]$.

43. $\begin{cases} y^2=9x \\ y=3x \end{cases}\Rightarrow O(0,0),A(,3)\Rightarrow V=\pi\int_0^1\left(9x-9x^2\right)dx=\frac{3\pi}{2}$.

44. $V(m)=\pi\int_0^2(mx+1)^2\,dx=\pi\left(\frac{8}{3}m^2+4m+2\right)$ este minim dacă $m=-\frac{3}{4}$.

45. $V=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+tgx}dx=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{\pi^2}{24}+\frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\Rightarrow V\in$ $\left[\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\pi^2}{24},\frac{\pi^2}{24}\right]$.

46. $V_1=\pi\int_1^a\frac{1}{x}dx=\pi\ln a$, $V_2=\pi\ln b$, $V_3=\pi\ln c$. Cum $b^2=ac$, avem $2\ln b=\ln a+\ln c$ adică $\frac{V_1+V_3}{2}=V_2$, adică $\div V_1,V_2,V_3$. $r=V_2-V_1=\pi\ln\frac{b}{a}=$ $\pi\ln$.

47. $V(a) = \pi \int_2^a \frac{x}{x^3-1} dx = \pi \left(\frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_2^a \Rightarrow l = \lim_{a \to \infty} V(a) =$
$\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6} \ln \frac{1}{7} - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{5}{\sqrt{3}} \right)$.

48. $V = \pi \int_a^{e^2} \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = x \ln(1+\ln x) \Big|_a^{e^2} = \pi \ln \frac{3}{2} \Rightarrow a = e.$

49. $V = \pi \int_0^1 \frac{x^6}{(x+1)^2} dx$, $1 \le (x+1)^2 \le 4 \Rightarrow \frac{x^6}{4} \le \frac{x^6}{(x+1)^2} \le x^6 \Rightarrow \frac{\pi x^7}{28} \Big|_0^1 \le V \le \frac{\pi x^7}{7} \Big|_0^1$.

50. $V = \pi \int_1^2 e^x \frac{1}{2} dx \le \frac{\pi}{2} \int_1^2 \left(e^{2x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{\pi}{4} \left(e^4 - e^2 + 1 \right)$.