Jan Glinko

Wstęp

Celem pracy było zaprojektowanie sterownika minimalno-wariancyjnego, lub sterownika średniej ruchomej, dla obiektu opisanego modelem ARMAX.

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t-\tau) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}v(t)$$

gdzie: *y(t)* – sygnał wyjściowy,
u(t) – sygnał wejściowy,
v(t) – szum biały o zerowej wartości średniej i jednostkowej wariancji,
τ - opóźnienie.

Bieguny obiektu oraz rozłożenie zer

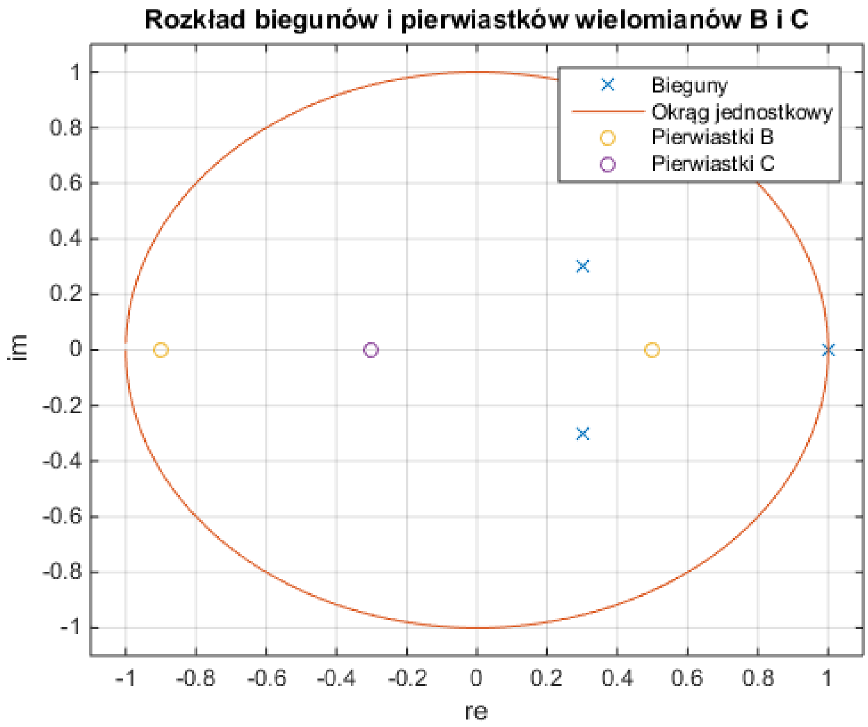
Bieguny obiektu, których położenie związane jest z wielomianem

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.6q^{-1} + 0.78q^{-2} - 0.18q^{-3}$$

oraz pierwiastki wielomianów

$$B(q^{-1}) = 1 + 0.4q^{-1} - 0.45q^{-2}$$
$$C(q^{-1}) = 1 + 0.3q^{-1}$$

są przedstawione na poniższym rysunku



Wartości biegunów: 1, 0.3 + 0.3i, 0.3 – 0.3i;
Pierwiastki wielomianu B: -0.9, 0.5;
Pierwiastki wielomianu C: -0.3.

Korygowanie wielomianu C

Wielomian C należy skorygować w taki sposób, aby wszystkie jego pierwiastki znajdowały się wewnątrz okręgu jednostkowego. Jest to wymóg niezbędny do stabilnego działania sterownika minimalno-wariancyjnego, który umieszcza bieguny w miejsca zer.

Dobór zer skracanych przez sterownik

Skracane przez sterownik zera nie mogą znajdować się na okręgu jednostkowym lub w jego pobliżu, np. w punkcie -0.99. Spowoduje to pojawienie się oscylacji w sygnale sterującym. Nie należy również skracać zer znajdujących się poza okręgiem jednostkowym.

Równania diofantyczne i sposób ich rozwiązania

Projektując sterownik minimalnowariancyjny należy rozwiązać równanie diofantyczne

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1}) * F(q^{-1}) + q^{-k}G(q^{-1})$$

gdzie: $k = \tau$ -opóźnienie,
deg(F) = k-1,
deg(G) = deg(A)-1.

Po rozwiązaniu powyższego równania otrzymano odpowiednie wielomiany *F* i *G*

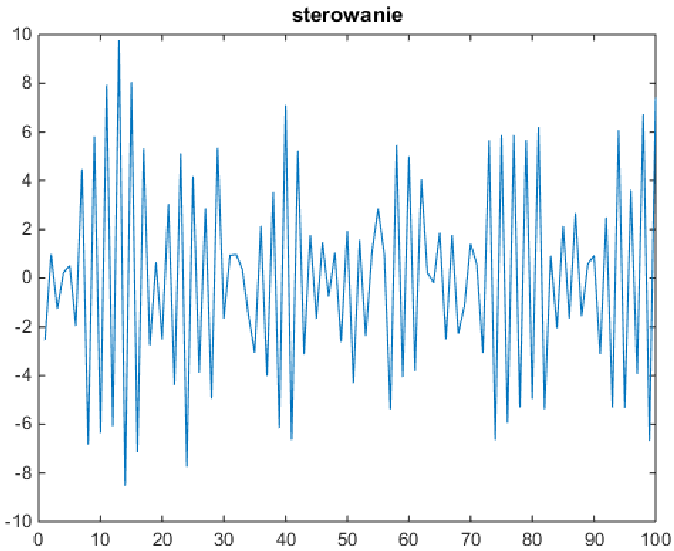
$$F = 1$$

$$G = 1.9 - 0.78q^{-1} + 0.18q^{-2}$$

Sygnał sterujący można obliczyć na podstawie wzoru

$$u(t) = -\frac{G(q^{-1})}{B(q^{-1})F(q^{-1})}y(t)$$

Został przedstawiony na poniższym wykresie



W sygnale sterującym można zauważyć oscylacje, które są charakterystyczne dla modelu posiadającego zera zbyt blisko okręgu jednostkowego. Zastosowano sterownik średniej ruchomej w celu weryfikacji poprawy jakości sterowania. W tym celu rozwiązano zmodyfikowane równanie diofantyczne

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1}) * F(q^{-1}) + q^{-k}G(q^{-1})B^{-}(q^{-1})$$

gdzie: $B^{-}(q^{-1})$ – pierwiastki wielomianu B, które nie będą skrócone,
deg(F) = k – 1 + deg(B^{-}).

Założono, że skróceniu nie ulegnie zero w punkcie 0.9. Po rozwiązaniu powyższego równania otrzymano wielomiany

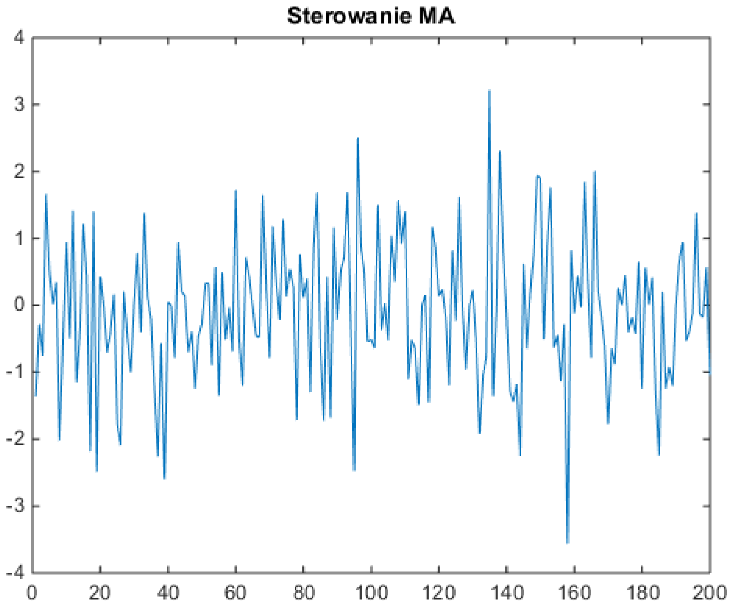
$$G(q^{-1}) = 1.15 - 0.615q^{-1} + 0.15q^{-2}$$
$$F(q^{-1}) = 1 + 0.75q^{-1}$$

Sterowanie obliczono ze wzoru

$$u(t) = -\frac{G(q^{-1})}{B^{+}(q^{-1})F(q^{-1})}y(t)$$

gdzie: $B(q^{-1}) = B^{+}(q^{-1})B^{-}(q^{-1})$.

Sygnał sterujący ma następujący przebieg



Na wykresie można zauważyć, że wartości sygnału sterującego są znacznie mniejsze niż w przypadku sygnału sterującego generowanego przez sterownik minimalno-wariancyjny. Przestały pojawiać się także oscylacje.

Spodziewana wariancja zakłóceń bez sterowania oraz ze sterowaniem

Proces bez sterowania opisuje wzór

$$y(t) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}v(t)$$

Biegun w punkcie 1.0 + 0.0j oznacza, że procesu nie można zaliczyć do grupy procesów stacjonarnych. Wariancja procesu, który można nazwać błądzeniem losowym, rośnie wraz z czasem zgodnie ze wzorem

$$Var(Y_t) = Var(e_1 + e_2 + \cdots + e_t) = Var(e_1) + Var(e_2) + \cdots + Var(e_t) = \sigma^2 + \cdots + \sigma^2 = t\sigma^2$$

Oznacza to, że wariancja rośnie wraz z czasem. Potwierdzają to wyniki symulacji. Nie można zatem podać konkretnej (uśrednionej) wariancji procesu.

Ze sterowaniem zapewnionym przez sterownik średniej ruchomej wyjście procesu opisuje wzór

$$y(t) = F(q^{-1})v(t)$$

Jestem to opis procesu MA. Jeśli proces jest odwracalny, tzn. wszystkie pierwiastki wielomianu leżą wewnątrz okręgu jednostkowego, to wariancja może być opisana wzorem

$$Var(y(t)) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\deg(F)} F_i^2$$

Dla wielomianu F obliczonego na podstawie równań diofantycznych sterownika średniej ruchomej

$$Var(y(t)) = 1 * (1 + 0.75^2) = 1.5625$$

Uśredniona wariancja z 20 realizacji procesu ze sterowaniem średniej ruchomej wynosi 1.5619. Jest to wartość zbliżona do oczekiwanej.

Funkcja autokorelacji

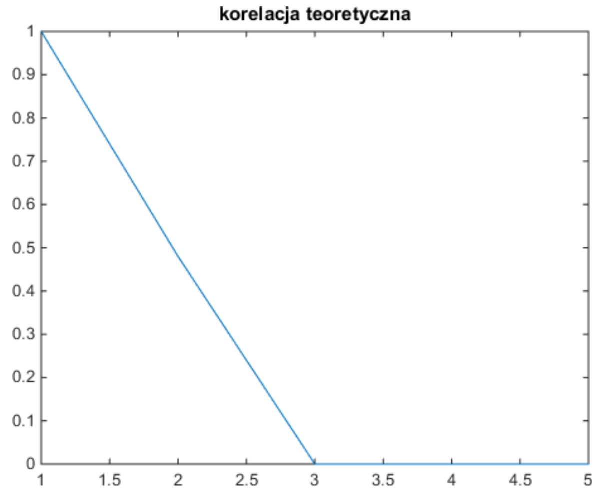
Do obliczenia przykładowej funkcji autokorelacji można posłużyć się wzorem dla procesu MA(1).

$$\rho(0) = 1$$

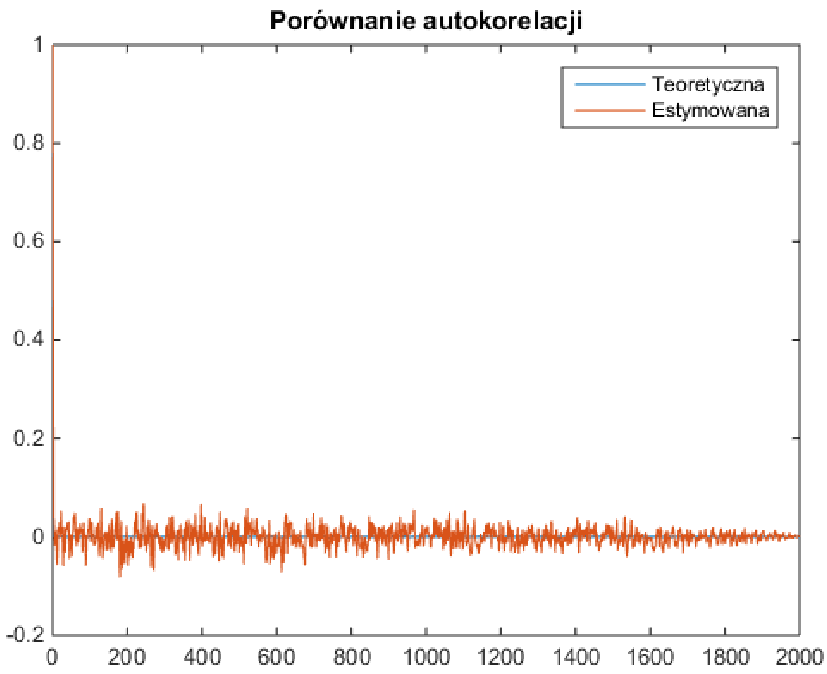
$$\rho(1) = \frac{F_1}{1 + F_1^2}$$

$$\rho(k) = 0 \; dla \; k > 1$$

Wykres korelacji teoretycznej:



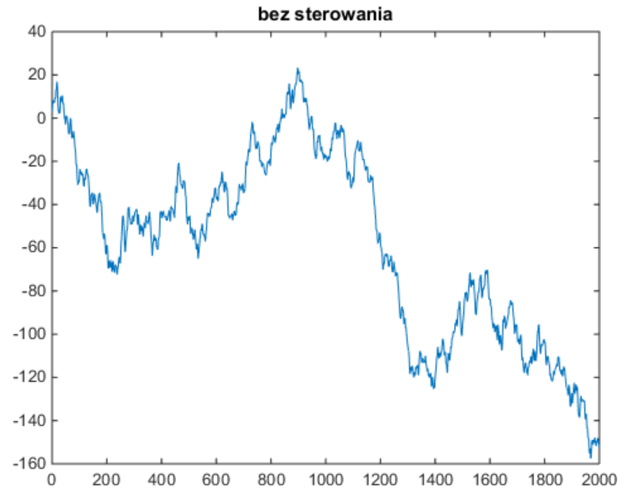
Porównanie z estymatą funkcji autokorelacji:



Można zauważyć, że estymata funkcji autokorelacji jest zbliżona do wartości teoretycznej.

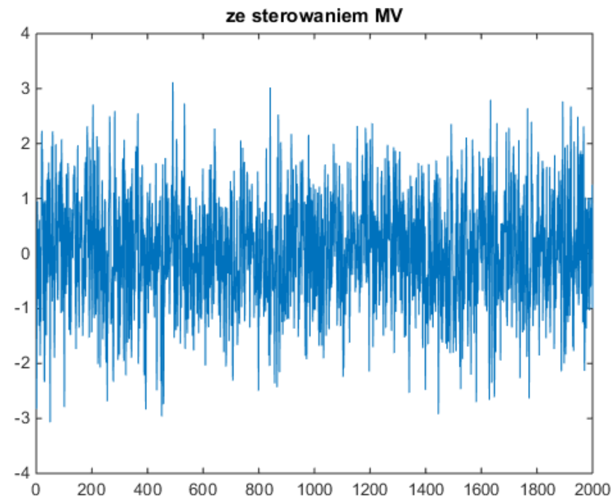
Wyniki symulacji układu otwartego i zamkniętego

Układ otwarty, u(t) = 0

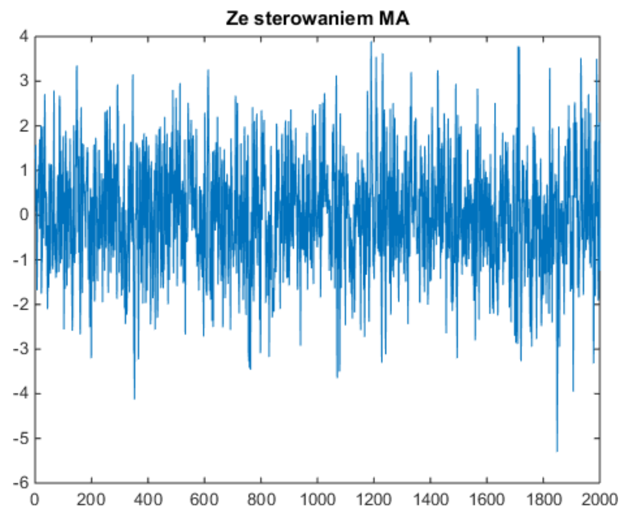


Jest to proces niestacjonarny, opisywany jako błądzenie losowe.

Proces resztowy dla sterownika MV:

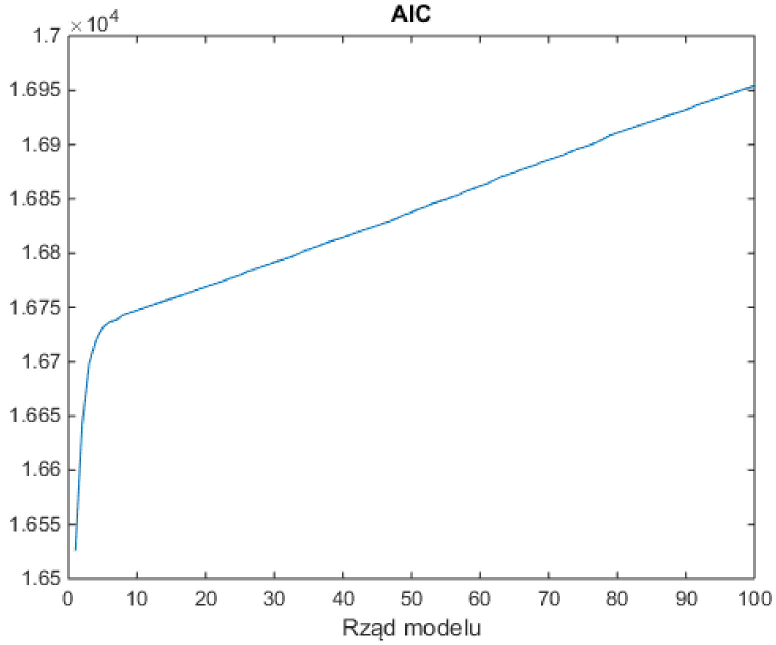


Proces resztowy dla sterownika MA

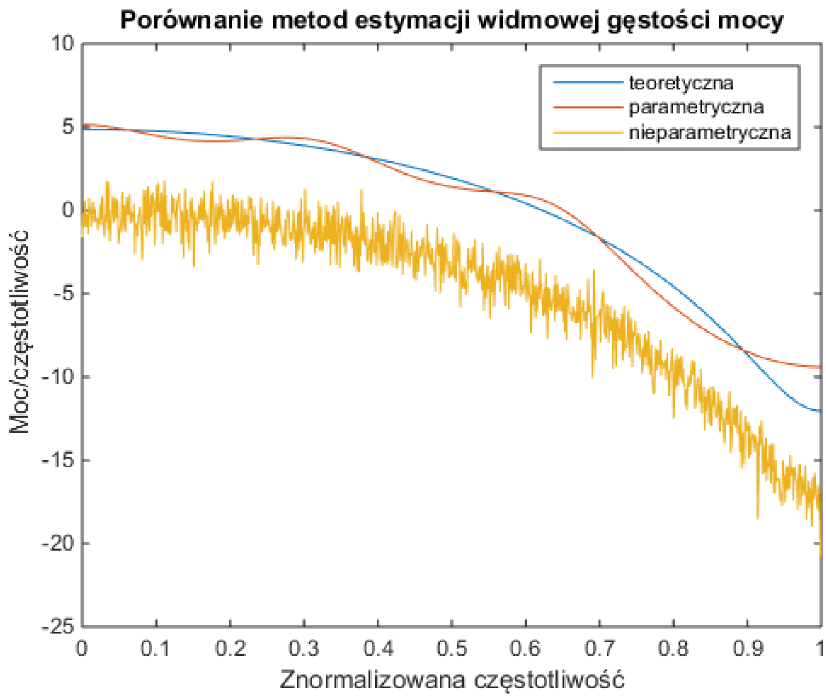


Oszacowanie widma procesu resztowego

Jako metodę nieparametryczną estymaty widma procesu resztowego wybrano perdiodogram. Jako metodę parametryczną wybrano estymatę Yule'a-Walkera. Rząd metody parametrycznej określono za pomocą kryterium Akaikego. Dla modeli do rzędu 100 wartość parametru jest przedstawiona na poniższym wykresie:



Wybrano rząd modelu 5 na podstawie analizy wykresu.
Tak jak w przypadku wariancji, estymaty widma są średnią z 20 realizacji.



Estymacja parametryczna jest mniej obciążona od periodogramu. Metoda Yule'a-Walkera zwraca wartości bardziej zbliżone do teoretycznego przebiegu widma niż metoda periodogramu.