CURVE BRACHISTOCRONE IN CAMPI DI GRAVITÀ

GIUSEPPE BUTTAZZO, MIHAIL MINTCHEV

Dedicato alla memoria di
Franco Conti

1. La brachistocrona di Galileo

Il problema della brachistocrona, della ricerca cioè della curva lungo la quale il tempo di percorrenza tra due punti fissati è minimo, sotto l'azione di un campo di forze, è probabilmente il primo problema di calcolo delle variazioni in dimensione infinita. Il problema fu formulato nel 1638 da Galileo: si trattava di determinare la curva che connette due punti assegnati, lungo la quale un punto materiale scorre senza attrito, in un campo di gravità costante, impiegando per il percorso il tempo minimo possibile. Galileo, forse per motivi estetici, ma certamente per la mancanza di strumenti matematici appropriati, all'epoca non ancora disponibili, congetturò erroneamente che la soluzione doveva essere un arco di cerchio. La soluzione corretta, un arco di cicloide, fu trovata da Johann Bernoulli solo nel 1697.

Se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ sono i due punti assegnati, con ovviamente $y_2 \le y_1$ come in Figura 1, ed $u(x)$ è la generica curva che li connette,

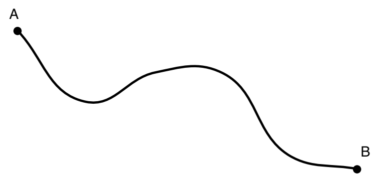

Figura 1. Una generica curva che connette A e B.

nel punto A la velocità è nulla e l'energia è tutta potenziale, mentre in un punto di ascissa x avremo una velocità v che dovrà verificare la conservazione dell'energia totale

$$mgy_1 = \frac{1}{2}mv^2 + mgu(x)$$

dove m è la massa del punto materiale e g la costante di gravità. Si trova quindi

$$v = \sqrt{2g\big(y_1 - u(x)\big)}$$

da cui si ricava che per percorrere lungo la curva data uno spazio ds si impiega un tempo

$$dt = \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{1+|u'(x)|^2}{2g\big(y_1-u(x)\big)}}\,dx$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla ben nota relazione tra ascissa curvilinea ed ascissa cartesiana

$$ds = \sqrt{1+|u'(x)|^2}\,dx\;.$$

Il tempo totale di percorrenza lungo la curva $u(x)$ sarà quindi

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+|u'(x)|^2}{y_1-u(x)}}\,dx$$

e si avrà il problema di minimo

$$\min\big\{T(u)\;:\;u(x_1)=y_1,\;u(x_2)=y_2\big\}\;.$$

Conviene traslare l'origine nel punto A che diventa dunque $(0,0)$ ed invertire l'orientazione dell'asse delle ordinate; in tal modo il problema di minimo diventa

$$\min\Big\{\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^L\sqrt{\frac{1+|u'(x)|^2}{u(x)}}\,dx\;:\;u(0)=0,\;u(L)=H\Big\} \tag{1.1}$$

dove abbiamo posto $x_2 = L$ ed $y_2 = H$.

Sul percorso rettilineo $u(x) = Hx/L$ il tempo impiegato sarà quindi

$$T_{\mathrm{rett}} = \Big(\frac{2(L^2+H^2)}{gH}\Big)^{1/2}. \tag{1.2}$$

L'equazione di Eulero-Lagrange integrata (comunemente detta di DuBois-Reymond) relativa al problema (1.1) si scrive, dopo qualche facile calcolo, nella forma

$$(1+|u'|^2)u = 2c$$

con c costante positiva, e la soluzione, un arco di cicloide tra i punti A e B, si ottiene in forma parametrica:

$$\begin{cases} x(t) = c(t-\sin t)\\ u(t) = c(1-\cos t)\end{cases}\qquad t\in[0,\tau]. \tag{1.3}$$

Le costanti c e τ si determinano poi dalle condizioni

$$x(\tau) = L,\qquad u(\tau) = H.$$

Il tempo di percorrenza dell'arco di cicloide da A a B si calcola facilmente e si trova

$$T_{\min} = \tau\sqrt{c/g}\;.$$

Un caso particolarmente semplice è quello in cui $L = \pi$ ed $H = 2$ in cui si trova $\tau = \pi$ e $c = 1$. Si ha allora

$$T_{\mathrm{rett}} = \Big(\frac{\pi^2+4}{g}\Big)^{1/2},\qquad T_{\min} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}$$

con $T_{\min}/T_{\text{rett}} \simeq 0.84$.

È anche interessante calcolare il tempo minimo che il punto materiale impiega per tornare all'altezza iniziale; prendendo $H = 0$ si trova $\tau = 2\pi$ e $c = L/(2\pi)$, per cui

$$T_{\min} = \sqrt{2\pi L/g}\ .$$

Prendendo invece la semicirconferenza

$$u(x) = \sqrt{Lx - x^2}$$

si trova con facili calcoli il tempo di percorrenza

$$T_{\text{circ}} = \sqrt{L/g}\int_0^1 (1-x^2)^{-3/4}\,dx \simeq 2.62\sqrt{L/g}.$$

Dunque in tal caso $T_{\min}/T_{\text{circ}} \simeq 0.96$ da cui si vede che l'errore di valutazione commesso da Galileo non era poi così grande! La brachistocrona che connette i punti $(0,0)$ ed $(1,0)$ è riportata in Figura 2.

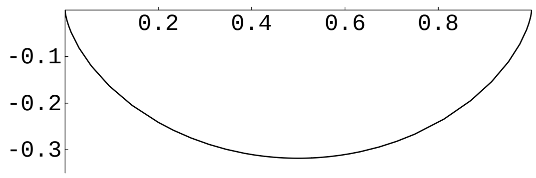

FIGURA 2. La brachistocrona tra $(0,0)$ ed $(1,0)$

2. Il tunnel brachistocrono

Supponiamo ora che il campo di forze in cui deve muoversi il punto materiale non sia costante ma sia generato da una funzione potenziale. Indichiamo con $E(x)$ l'energia potenziale corrispondente (per unità di massa). Se nel punto A di partenza la velocità è nulla, in un generico punto x di una curva φ congiungente A con B avremo una velocità v tale che

$$E(A) = \frac{1}{2}v^2 + E(B)\ .$$

Se parametrizziamo la curva con il parametro $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$, un ragionamento analogo a quello della sezione precedente ci porta a concludere che il tempo di percorrenza lungo la curva φ è dato da

$$T(\varphi) = \int_0^{L(\varphi)} \frac{ds}{v} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{|\varphi'(\tau)|}{\sqrt{2\big(E(A) - E(\varphi(\tau))\big)}}\,d\tau \tag{2.1}$$

dove $L(\varphi)$ è la lunghezza della curva φ, ed il problema della brachistocrona sarà allora

$$\min\big\{T(\varphi)\ :\ \varphi(\tau_0) = A,\ \varphi(\tau_1) = B\big\}.$$

Supponiamo ora che la Terra abbia densità costante ρ e fissiamo due punti A e B sulla superficie terrestre. Vogliamo scavare un tunnel (eventualmente curvilineo) tra A e B in modo che un punto materiale lasciato cadere in A lo percorra senza attrito, arrivando in B nel tempo minimo possibile.

Si può ad esempio immaginare un treno che congiunga due città A e B attraverso un tunnel in cui viaggi senza attrito, sottoposto al solo effetto della forza di gravità. Si tratta quindi del problema della brachistocrona in un campo di gravità newtoniana. È noto che all'interno della sfera di densità ρ l'energia potenziale (per unità di massa) $E(x)$ è quella newtoniana

$$E(x) = \frac{GM(|x|)}{2|x|}$$

dove abbiamo messo nell'origine il centro della Terra e G è la costante di gravitazione universale, mentre $M(|x|)$ è la massa contenuta nella sfera di raggio $|x|$. Dunque $M(r) = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$ e quindi

$$E(r) = \frac{2}{3}\pi\rho G r^2.$$

È evidente che la curva brachistocrona sarà contenuta nel piano passante per l'origine e per i punti A e B; inoltre, su tale piano possiamo supporre i punti A e B come in Figura 3, per cui cerchiamo la brachistocrona tra le curve in forma polare del tipo $r = u(\vartheta)$.

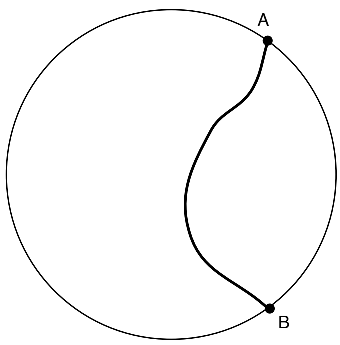

FIGURA 3. Una generica curva tra A e B

Dall'espressione (2.1) si ricava, ricordando che

$$|\varphi'(\tau)|\,d\tau = \sqrt{u^2(\vartheta) + |u'(\vartheta)|^2}\,d\vartheta,$$

$$T(u) = \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}} \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \sqrt{\frac{u^2(\vartheta) + |u'(\vartheta)|^2}{R^2 - u^2(\vartheta)}}\,d\vartheta\,. \tag{2.2}$$

È interessante calcolare il tempo di un percorso rettilineo tra i due punti A e B; in tal caso si ha

$$u(\vartheta) = \frac{R\cos\vartheta_0}{\cos\vartheta}$$

da cui si ricava con facili calcoli

$$T_{\text{rett}} = \sqrt{\frac{3}{\pi\rho G}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{\cos\vartheta_0}{\cos\vartheta\sqrt{\cos^2\vartheta - \cos^2\vartheta_0}}\,d\vartheta = \sqrt{\frac{3\pi}{4\rho G}}\,.$$

In particolare va notato che il tempo T_{rett} di percorrenza del tunnel rettilineo non dipende dai punti A e B sulla superficie terrestre. Sostituendo i valori delle costanti fisiche e ricordando che $g = 4\pi\rho GR/3$, si trova che sulla Terra si ha $T_{\text{rett}} \simeq 42.26$ minuti.

Dunque un treno "gravitazionale" tra Parigi e Londra che viaggiasse in un tunnel rettilineo senza attrito impiegherebbe circa 42.26 minuti per coprire il percorso (si pensi che i più recenti TGV impiegano invece quasi tre ore!).

Naturalmente, il tempo di percorrenza può ancora diminuire se si scelgono percorsi non rettilinei; l'equazione di DuBois-Reymond del problema di minimo relativo al funzionale (2.2) diventa:

$$cu^4 = (R^2 - u^2)(u^2 + |u'|^2)$$

con c costante positiva. Ricavando u' (nella regione dove $u' > 0$) si trova

$$u' = u\sqrt{\frac{ku^2 - R^2}{R^2 - u^2}} \qquad (\text{con } k = 1 + c > 1)$$

da cui integrando si ricava

$$\frac{1}{2}\int_{u^2/R^2}^{1} \sqrt{\frac{1-w}{kw-1}}\,\frac{dw}{w} = \vartheta_0 - \vartheta.$$

Risolvendo l'integrale si ottiene l'espressione in forma implicita

$$\arctan\sqrt{\frac{1 - u^2/R^2}{ku^2/R^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\arctan\sqrt{\frac{k - ku^2/R^2}{ku^2/R^2 - 1}} = \vartheta_0 - \vartheta$$

che conviene scrivere in forma parametrica

$$(2.3) \qquad \begin{cases} \vartheta(t) = \vartheta_0 - t + k^{-1/2}\arctan(\sqrt{k}\tan t) \\ u(t) = R(\cos^2 t + k\sin^2 t)^{-1/2} \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/2]$$

dove ϑ_0 e k sono legati dall'uguaglianza

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\Big).$$

Ad esempio, prendendo $\vartheta_0 = \pi/4$ si ha $k = 4$ e dunque la brachistocrona, rappresentata nella Figura 4, ha l'espressione

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \vartheta(t) = \frac{1}{4}\big(\pi - 4t + 2\arctan(2\tan t)\big) \\ u(t) = R(1 + 3\sin^2 t)^{-1/2} \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/2].$$

Possiamo ora calcolare il tempo minimo di percorrenza; integrando rispetto al parametro t ed usando le espressioni in (2.3) si trova

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{3}{\pi\rho G}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\dot\vartheta^2(t)u^2(t) + \dot u^2(t)}{R^2 - u^2(t)}}\,dt$$

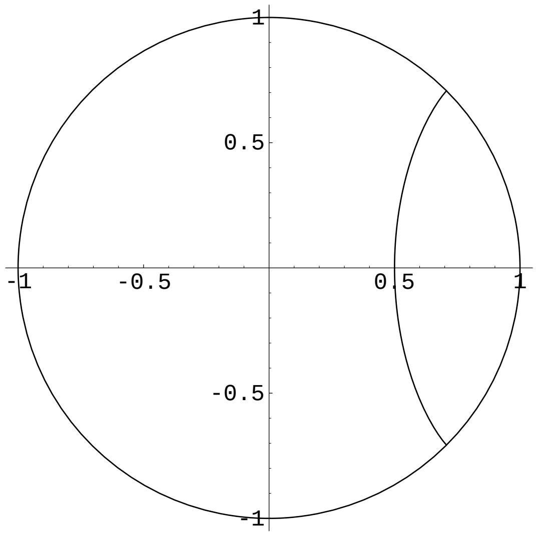

FIGURA 4. La brachistocrona con $\vartheta_0 = \pi/4$.

dove abbiamo indicato con $\dot{\vartheta}$ e con $\dot{u}$ le derivate rispetto al parametro t. Dopo qualche calcolo si ottiene

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{3(k-1)}{\pi\rho G}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{cos^2 t + k \sin^2 t}\, dt = \sqrt{\frac{3\pi(k-1)}{4k\rho G}}.$$

Ad esempio, tornando al caso del treno "gravitazionale" tra Parigi e Londra, che distano in linea d'aria 343 km, si ha $\vartheta_0 \simeq 5.38 \cdot 10^{-2}$ da cui si ricava $k \simeq 1.072$ e quindi

$$T_{\min} = \pi\sqrt{\frac{(k-1)R}{kg}} \simeq 10.97 \text{ minuti},$$

ben inferiore ai 42.26 minuti del percorso rettilineo.

Naturalmente, la velocità massima $\overline{v}$ si raggiunge nel punto centrale della traiettoria; nel percorso rettilineo si trova

$$\overline{v}_{\text{rett}} = R \sin\vartheta_0 \sqrt{4\pi\rho G/3}$$

mentre nella brachistocrona si ha

$$\overline{v}_{\text{brac}} = \frac{2R}{\pi}\sqrt{\vartheta_0(\pi - \vartheta_0)}\sqrt{4\pi\rho G/3}\ .$$

Nel solito esempio Parigi-Londra si trova

$$\overline{v}_{\text{rett}} \simeq 1528 \text{ km/h} \qquad \overline{v}_{\text{brac}} \simeq 7373 \text{ km/h}.$$

Va notato che la velocità massima in assoluto si raggiunge nel centro della Terra su un percorso rettilineo lungo un diametro. Si trova quindi

$$\overline{v}_{\max} = \sqrt{gR} \simeq 284146 \text{ km/h}.$$

3. La brachistocrona newtoniana

Un altro problema in cui il campo gravitazionale non è costante è quello in cui si vuole far scorrere senza attrito un punto materiale su una guida nello spazio, sottoposto soltanto all'attrazione gravitazionale di una massa puntiforme M che si suppone posizionata nell'origine. L'energia potenziale (per unità di massa) sarà allora

$$E(r) = -\frac{GM}{r}\,.$$

Avremo quindi, lungo una curva data in coordinate polari dall'equazione $r = u(\vartheta)$, come in Figura 5, il tempo di percorrenza

$$T(u) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{\frac{u^2(\vartheta) + |u'(\vartheta)|^2}{2GM\big(1/u(\vartheta) - 1/R_0\big)}}\, d\vartheta \tag{3.1}$$

dove (ϑ_0, R_0) e (ϑ_1, R_1) sono le coordinate polari dei punti iniziale e finale, per cui imporremo le condizioni $u(\vartheta_0) = R_0$ e $u(\vartheta_1) = R_1$.

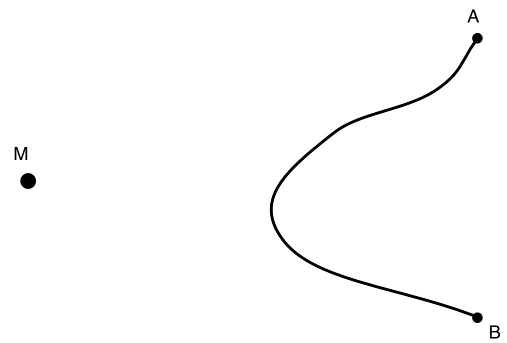

Figura 5. Una generica curva $u(\vartheta)$.

Avremo allora il problema di minimo

$$\min\big\{T(u) \ : \ u(\vartheta_0) = R_0,\ u(\vartheta_1) = R_1\big\}.$$

Naturalmente, quando il punto materiale raggiunge l'origine, si avrà una velocità infinita. Dalla conservazione dell'energia, partendo dall'infinito (cioè con $R_0 = +\infty$), a distanza r dall'origine avremo la velocità

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}\ ;$$

ad esempio, se M è la massa del Sole ($\simeq 1.99 \cdot 10^{30}$ kg) ed r è il raggio del Sole ($\simeq 6.96 \cdot 10^{8}$ m) avremo la velocità

$$v \simeq 617589 \text{ m/sec} \simeq 0.002\, c$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto (ricordiamo che siamo in un modello gravitazionale newtoniano!).

Il tempo $T_0(R)$ di caduta libera da una distanza R verso l'origine si calcola facilmente; si trova

$$T_0(R) = \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1/r - 1/R}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\,.$$

Prendendo poi $\vartheta_1 = -\vartheta_0$ ed $R_1 = R_0 = R$ si può calcolare il tempo di percorrenza del percorso rettilineo, dato da $u(\vartheta) = R\cos\vartheta_0/\cos\vartheta$, e si trova

$$T_{\rm rett} = \sqrt{\frac{2R^3\cos^3\vartheta_0}{GM}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}\,.$$

Prendendo ad esempio $\vartheta_0 = \pi/4$ si trova

$$T_{\rm rett} \simeq 3.97\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\,.$$

Anche in questo caso possiamo scrivere l'equazione di DuBois-Reymond; si trova

$$cu^4 = \Big(\frac{1}{u} - \frac{1}{R_0}\Big)(u^2 + |u'|^2)$$

con c costante positiva. Ricavando u' (nella regione dove $u' > 0$) si ottiene l'equazione differenziale autonoma

$$u' = u\sqrt{\frac{cR_0u^3}{R_0 - u} - 1} \tag{3.2}$$

da cui, integrando si ricava

$$\int_{u/R_0}^1 \Big(\frac{cR_0^3w^3}{1-w} - 1\Big)^{-1/2}\frac{dw}{w} = \vartheta_0 - \vartheta.$$

Riportiamo nella Figura 6 il grafico della curva brachistocrona la cui distanza minima dall'origine è la metà della distanza iniziale.

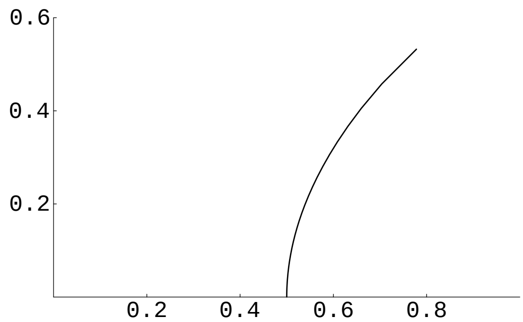

FIGURA 6. La brachistocrona newtoniana con $u_{\min} = u(\vartheta_0)/2$.

Utilizzando l'equazione (3.2) si può ricavare l'espressione del tempo minimo di percorrenza: supponendo $R_1 = R_0 = R$ e $\vartheta_1 = -\vartheta_0$ si ha, scrivendo

$u = Rw$,

$$T_{\min} = \frac{2}{\sqrt{2GM}} \int_0^{\vartheta_0} \sqrt{\frac{u^2 + |u'|^2}{1/u - 1/R}}\, d\vartheta = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}} \int_0^{\vartheta_0} \sqrt{\frac{w^2 + |w'|^2}{1/w - 1}}\, d\vartheta$$

dove w verifica l'equazione differenziale

$$w' = w\sqrt{\frac{cR^3 w^3}{1-w} - 1}$$

con le condizioni $w(1) = 1$, $cR^3 w^3(0) = 1 - w(0)$. Si ha quindi, cambiando variabile nell'integrale,

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{2R^3}{GM}} \int_{w(0)}^{1} w^2 \sqrt{\frac{cR^3}{(1-w)(cR^3 w^3 + w - 1)}}\, dw\ .$$

Ad esempio, per la curva brachistocrona della Figura 6, la cui distanza minima dall'origine è la metà della distanza iniziale, si ha $w(0) = 1/2$ e $cR^3 = 4$, da cui

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{8R^3}{GM}} \int_{1/2}^{1} \frac{w^2}{\sqrt{(1-w)(4w^3 + w - 1)}}\, dw \simeq 2.105\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\ ,$$

che risulta solo di poco inferiore al doppio del tempo di caduta libera calcolato prima

$$2T_0(R) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \simeq 2.221\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\ .$$

Riferimenti bibliografici

[1] G. BUTTAZZO, G. DAL MASO, E. DE GIORGI: *Calcolo delle variazioni.* Enciclopedia del Novecento, Vol. XI Suppl. II, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma (1998), 831–848.

[2] G. BUTTAZZO, M. GIAQUINTA, S. HILDEBRANDT: *One-dimensional Calculus of Variations: an Introduction.* Oxford University Press, Oxford (1998), viii+262 pp. Russian translation: Tamara Rozhkovskaya, Novosibirsk (2002).

Giuseppe Buttazzo
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
Via Buonarroti 2
56127 Pisa, ITALY
`buttazzo@dm.unipi.it`

Mihail Mintchev
Dipartimento di Fisica
Università di Pisa
Via Buonarroti 2
56127 Pisa, ITALY
`mintchev@df.unipi.it`