Graphes

Plan

Plan

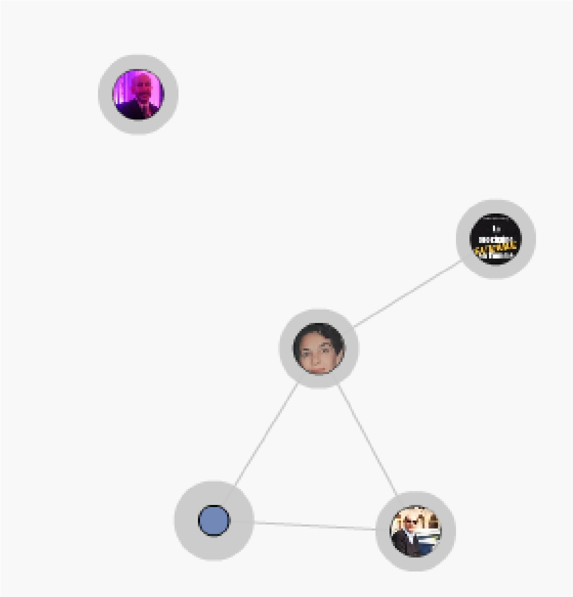
Modélisation

L'utilisation judicieuse d'un graphe peut rendre certains problèmes concrets accessibles à un raisonnement mathématique

Modéliser avec des graphes

- une ensemble d'objets homogènes
  (étudiants, employés, machines, usines, carrefours...)
- les liens entre ces objets
  (est plus habile, est dans le même atelier, collabore avec, est relié par une route...)

Des graphes de tous les jours : réseau Facebook



Des graphes de tous les jours : réseau Linkedin

Your Network of Trusted Professionals

You are at the center of your network. Your connections can introduce you to 1,083,000+ professionals — here's how your network breaks down:

1	**Your Connections** Your trusted friends and colleagues	57
2	**Two degrees away** Friends of friends; each connected to one of your connections	10,400+
3	**Three degrees away** Reach these users through a friend and one of their friends	1,072,500+
	Total users you can contact through an Introduction	1,083,000+

3,218 new people in your network since January 23

Des graphes de tous les jours : transports en communs

Modélisation

Des graphes de la vie courante

- Internet (promenade entre pages web)
- Règles d'un jeu fini (échec, dames. . .)
- Plans des lignes de transport en commun
- Réseau des amis sur Facebook

D'autres graphes

- Molécules chimiques
- Circuits imprimés

Modélisation

Décrire

- les sommets
- les arêtes, arcs
- la pondération des arêtes, arcs
- la question associée

Exemple : le GPS

- les sommets : carrefours
- les arcs : rues orientées
- la pondération des arcs : longueurs (ou temps pour les parcourir)
- la question associée : plus court chemin entre deux sommets

Plan

Graphes

- Soit X un ensemble.
- On note $\binom{X}{2}$ l'ensemble des parties à deux éléments de X.
- En général, on notera uv la partie $\{u, v\}$.
- L'ordre et les répétitions ne sont pas pris en compte : $12 \equiv 21$.

Exemple

Si $X = \{1, 2, 3\}$, alors $\binom{X}{2} = \{12, 13, 23\}$.

Définition

- Un *graphe* est un couple $G = (V, E)$ formé par un ensemble fini V et un sous-ensemble E de $\binom{V}{2}$.

Graphes

Terminologie

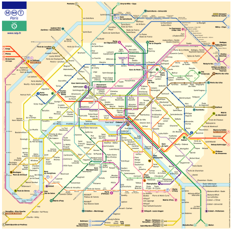
- G : Graphe [*Graph*]
- V : ensemble des sommets du graphe [*Vertices*]
  (on le note aussi $V(G)$)
- E : ensemble des arêtes du graphe [*Edges*]
  (on le note aussi $E(G)$)

- **Ordre** du graphe = nb de sommets = $Card(V) = |V|$

- $n = |V| \qquad\qquad m = |E|$

Quelques exemples de graphes

- $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{12, 13, 23, 24\})$.
- Le métro de Paris : ({stations}, {stations voisines}).

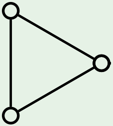


- L'internet : ({pages web}, {(hyper-)liens}).
- Facebook : ({utilisateurs}, {amitiés}).
- Molécules. $V = \{\text{atomes}\}$,
  $E = \{\text{atomes partageant des électrons}\}$.

Représentation graphique

- On représente chaque sommet par un point (ou un disque).
- Pour représenter une arête uv, on trace un trait entre les disques correspondants à u et à v.

Exemple : représentation graphique du cycle à 3 sommets



Remarques

- La forme des “points” et des “ traits ” n'a aucune importance (sauf pour la lisibilité de la figure).
- Ce qui compte, c'est de traduire graphiquement s'il y a une arête entre deux sommets ou non.

Représentation graphique

Exercice

Dessiner les graphes suivants :

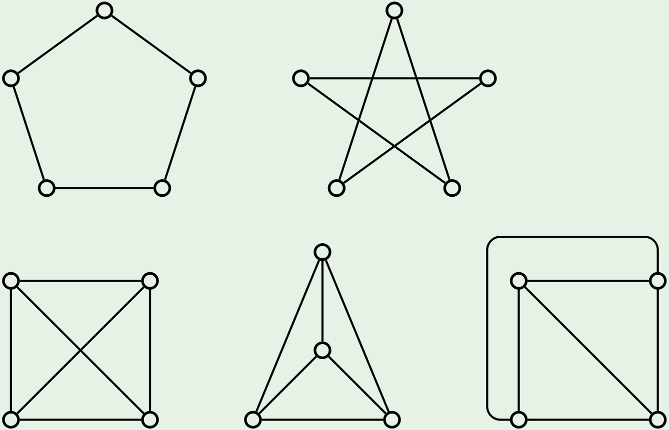
- Les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.
- Les sommets du graphe sont tous les sous ensembles à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$. Deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide.
- Graphe associé à la situation : trois pays envoient chacun à une conférence deux espions qui ne se connaissent pas, chaque espion doit entrer en contact avec tous les espions des autres pays.

(IREM d'Aix-Marseille)

Graphes

Représentation graphique

Est-ce le même graphe ?



Isomorphisme de graphes

Souvent, on ne fera pas de distinction entre deux graphes ayant "la même forme", c'est-à-dire : qu'on ne peut les distinguer si l'on oublie les noms de leurs sommets.

Définition

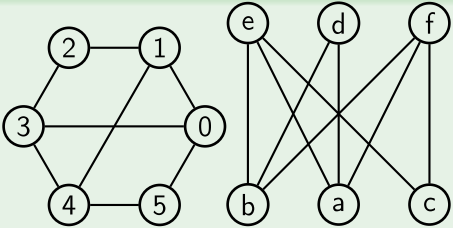
Soient G et H deux graphes.
On dit que G est **isomorphe** à H si et seulement si il existe une bijection $f : V(G) \rightarrow V(H)$ telle que :

$$\forall x \in V(G), \forall y \in V(G), \text{ on a } xy \in E(G) \Leftrightarrow f(x)f(y) \in E(H)$$

Il faut donc avoir une bijection entre les sommets qui préserve les arêtes.

Illustration

Exemple



$1 \mapsto b \quad 2 \mapsto d$
$3 \mapsto a \quad 4 \mapsto e$
$5 \mapsto c \quad 0 \mapsto f$

Remarques

- La relation d'isomorphisme est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive).
- Il n'est pas toujours facile, à partir de représentations graphiques, de décider si deux graphes sont isomorphes.

Graphe complémentaire

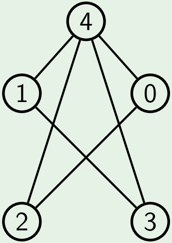
Définitions

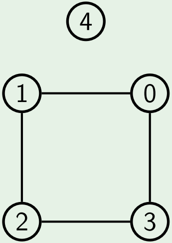
Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Le **graphe complémentaire** de G, noté $\overline{G}$, est défini ainsi :

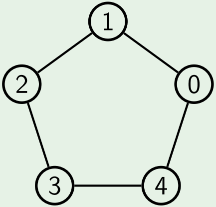
- $\overline{G}$ a les mêmes sommets que G ($V(\overline{G}) = V(G) = V$),
- $\forall u \in V, \forall v \in V, uv \in E(\overline{G}) \Leftrightarrow uv \notin E(G)$ (autrement dit les arêtes de $\overline{G}$ sont les non-arêtes de G).

Un graphe est **auto-complémentaire**
s'il est isomorphe à son complémentaire

Exemples

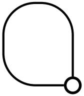




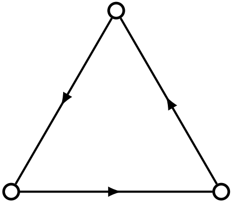


Variantes de graphes

- **Boucle** : arêtes du type $ii \in E$



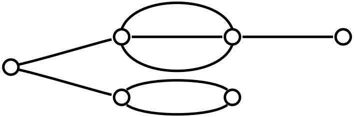
- **Graphe orienté** : E contient des couples ordonnés $(12 \neq 21)$



$E=$ **{arcs}**

Variantes de graphes

- **Multigraphe** : E = collection
  (chaque arête peut apparaître plusieurs fois)



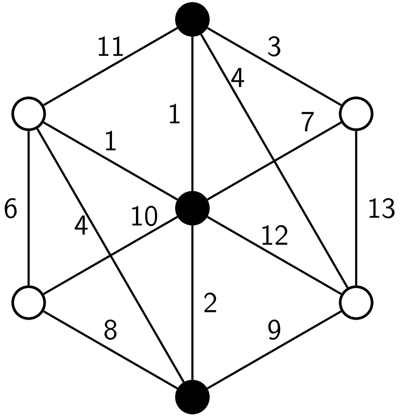
  sinon, graphe simple

ici, au moins dans un premier temps :
graphe = graphe simple, sans boucle, non orienté [1]

1. sauf si explicitement précisé

Variantes de graphes

- **Graphes étiquetés** (labellisés, pondérés, valués) : informations/valeurs sur les sommets et/ou sur les arêtes



Plan

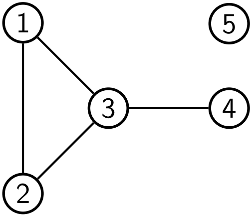
Adjacence et incidence

Définitions

Soient $G = (V, E)$ un graphe, u et v deux sommets de G et e une arête de G.

- u et v sont **adjacents** ou **voisins** si $uv \in E$;
- les deux éléments de e sont ses **extrémités** ;
- e est **incidente** à u si u est extrémité de e ;
- le **voisinage** de u dans G est l'ensemble, noté $N(u)$ (ou $N_G(u)$), des sommets de G adjacents à u ;
- l'ensemble des arêtes incidentes à u est noté $\delta(u)$ (ou $\delta_G(u)$).

Exemple



- 1 et 2 sont adjacents
- 4 est voisin de 3
- $N(3) = \{1, 2, 4\}$
- $N(5) = \emptyset$ (5 est *isolé*)
- l'arête 12 est incidente à 2

Degrés

Exercice

Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

Pour le moment, on manque d'outils pour répondre... On veut construire un graphe G pour lequel :

- les sommets correspondent aux enfants (20 sommets),
- il y a une arête entre deux sommets si les enfants correspondants sont amis.

Si on arrive à construire un tel graphe, on aura prouvé que la configuration est possible.

Degrés

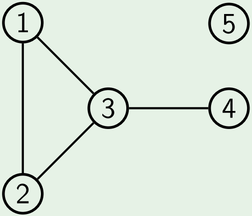
Définition

Soient G un graphe et v un sommet de G.
Le **degré** de v dans G, noté $d(v)$ (ou $d_G(v)$), est le nombre d'arêtes de G incidentes à v.
C'est aussi (par simplicité des graphes définis dans ce cours) le nombre de voisins de v : $d(v) = |N(v)|$.

- Si $d(v) = 0$ on dit que v est **isolé**.
- Si $d(v) = 1$ on dit que v est une **feuille**.

Degrés

Exemple 1



$d(1) = 2 = d(2), \quad d(3) = 3, \quad d(4) = 1, \quad d(5) = 0$

Degrés

Exemple 2

Soit $G = (V, E)$ avec $V = \{a, b, c, d\}$ et $E = \{ab, ac, ad, bd\}$.

- Quel est l'ordre du graphe ?
- Quels sont les sommets adjacents à d ?
- Combien y-a-t-il d'arêtes incidentes à c ?
- Quel est le degré de d ?

La somme des degrés

Théorème

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On a $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Démonstration succincte.

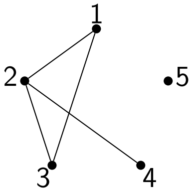
Chaque arête $uv \in E$ contribue pour :

- 1 dans le degré de u,
- 1 dans le degré de v.

$\square$

On verra une autre démonstration un peu plus tard dans ce cours.

Illustration



$$S = \sum_{v \in V} d(v) = 2 + 3 + 2 + 1 + 0 = 8$$

$$S = 2|E| = 2 \times 4 = 8$$

Une conséquence

Corollaire

Dans tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Retour sur l'exemple des enfants et de leurs amis

- 7 enfants avec 3 amis $\rightarrow$ 7 sommets de degré 3
- 9 enfants avec 4 amis $\rightarrow$ 9 sommets de degré 4
- 4 enfants avec 5 amis $\rightarrow$ 4 sommets de degré 5

Cela fait $7 + 4 = 11$ sommets de degré impair, c'est impossible car dans tout graphe il y a un nombre pair de sommets de degré impair.

Plan

Représentation matricielle et par listes

- Il y a plusieurs façons de représenter un graphe en mémoire de l'ordinateur.

- On va en voir trois :
  1. matrice d'adjacence
  2. matrice d'incidence
  3. liste d'adjacence

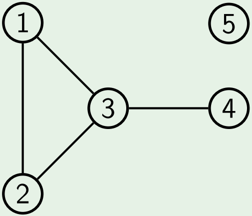
- En général, chacune est plus ou moins adaptée au problème considéré et possède des avantages/inconvénients notamment par rapport à la densité (en arêtes) du graphe.

Représentations matricielles

Matrice d'adjacence de G : matrice M binaire **carrée** d'ordre n

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

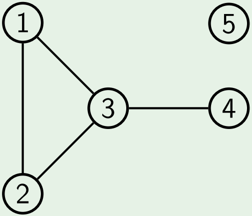
- M est symétrique ($M_{ij} = M_{ji} \quad \forall ij$)
- M est nulle sur la diagonale

Représentations matricielles

Matrice d'incidence de G : matrice M binaire de taille $n \times m$

$$M_{ie} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est extrémité de } e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

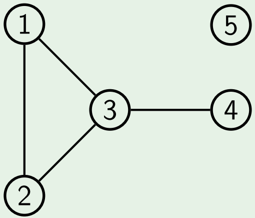
- exactement deux 1 dans chaque colonne

Représentation machine des graphes

- **Liste d'adjacence** : tableau de n listes chaînées
  liste dans la case i = liste des voisins de i

Exemple

- 1 : [2,3]
- 2 : [1,3]
- 3 : [1,2,4]
- 4 : [3]
- 5 : []



Il existe d'autres structures de données pour représenter les graphes

Représentation machine des graphes

Exercice

Dans une matrice d'incidence, que représente :

- la somme des coefficients de la ligne i ?
- la somme de tous les coefficients de la matrice ?

Dans une matrice d'adjacence, que représente :

- la somme des coefficients de la colonne j ?
- la somme des coefficients de la ligne i ?
- la somme de tous les coefficients de la matrice ?

Exercice

Quel est le nombre maximum d'arêtes si on a n sommets ?

La somme des degrés - le retour

Théorème

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On a $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Démonstration.

Autre démonstration (par double comptage) Soit S la somme de tous les éléments de la matrice d'incidence de G.

- La somme de chaque ligne est égale au degré du sommet correspondant, donc $S = \sum_{v \in V} d(v)$.
- La somme de chaque colonne est égale à deux, et on a $|E|$ colonnes, donc $S = 2|E|$.

□

Et pour les graphes orientés ?

Il est aussi possible de représenter des graphes orientés par des matrice d'adjacence, matrice d'incidence ou listes d'adjacence. Il faut alors adapter un peu la représentation pour distinguer l'arc ij de l'arc ji :

- Matrice d'adjacence : la définition ne change pas, mais la matrice ne sera plus forcément symétrique puisqu'on peut voir $ij \in E$ et $ji \notin E$.
- Matrice d'incidence : utiliser ± 1

$$M_{ia} = \begin{cases} 1 & \text{si arc } a \text{ sortant de } i \\ -1 & \text{si arc } a \text{ entrant dans } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Liste d'adjacence : j est dans la liste de la case i ssi $ij \in E$

Représentation machine des graphes

Comparaison très approximative

	matrice adjacence	matrice incidence	liste adjacence
mémoire	n^2	$n \times m$	$n + 4m$ (ou $n + 2m$)
peu d'arêtes	–	++	++
bcp d'arêtes	++	–	-
i et j voisins ?	1	m	d(i)
i isolé ?	n	m	1
nb d'arêtes ?	n^2	1	$n + 2m$

Plan

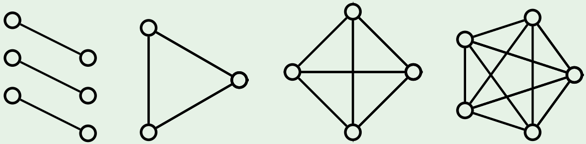
Graphes K-réguliers

Définition

Soit un entier $K \geq 0$.
Un graphe G est dit K-**régulier** ssi $\quad d(v) = K \quad \forall v \in V$

Exemple

1-régulier 2-régulier 3-régulier 4-régulier



Graphes complets

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier.

- Le *graphe complet* à n sommets est le graphe $(\{1, \ldots, n\}, \binom{\{1,\ldots,n\}}{2})$.
- Il est noté K_n.

Remarque : le graphe complet d'ordre n est le graphe $(n-1)$-régulier à n sommets.

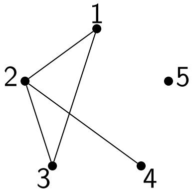
Sous-graphes

Définition

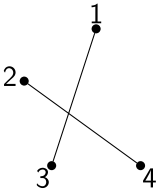
Soient $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$ deux graphes.

- H est un *sous-graphe* de G si $W \subseteq V$ et $F \subseteq E$.
  "une partie des sommets, une partie des arêtes entre ces sommets"
- H est un *sous-graphe couvrant* de G si $W = V$ et $F \subseteq E$.
  "tous les sommets, une partie des arêtes"
- H est un *sous-graphe induit* de G si $W \subseteq V$ et F contient toutes les arêtes $uv \in E$ où $u \in W$ et $v \in W$. On le note $G[W]$ (et $G = G[V]$).
  "une partie des sommets, toutes les arêtes entre ces sommets"

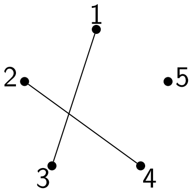
Illustration des différents types de sous-graphes



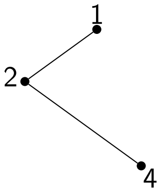
G



sous-graphe de G



sous-graphe couvrant de G



sous-graphe induit de G