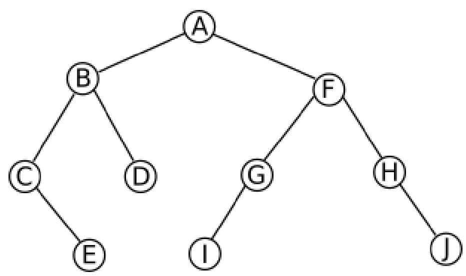
Contrôle continu INF303 - L2 INM 9 novembre 2021

A lire attentivement avant de commencer le sujet :
— **Toutes les réponses doivent être justifiées (sauf pour l'exercice 2).**
— Tous les graphes sont considérés comme simples et sans boucle.
— Le barème est donné à titre indicatif.
— Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso manuscrite.
— Les appareils électroniques sont interdits.
— Cet énoncé comporte 2 pages et 7 exercices.

Exercice 1 : (2 points)
On souhaite ranger 10 livres sur une étagère.

1. Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2. On suppose maintenant que parmi ces 10 livres, il y a 5 livres d'informatique, 3 livres de mathématiques et 2 livres de mécanique. On souhaite que tous les livres de chaque thématique soit rangés ensemble (côte à côte). Combien y a-t-il de dispositions possibles qui respectent cette organisation ?

Exercice 2 : (2 points)
Voici un arbre binaire enraciné en A :



Ecrire le mot formé par les sommets de cet arbre selon le parcours en :

1. profondeur préfixe,
2. profondeur infixe,
3. profondeur postfixe,
4. largeur.

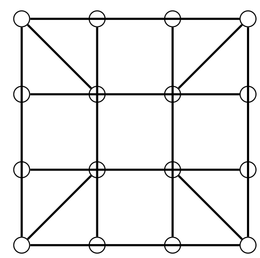
Exercice 3 : (4 points)
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (ne pas oublier de justifier les réponses !) :

1. Pour tout entier $n \geq 4$, il existe un graphe 3-régulier.
2. Il existe un graphe de séquence de degrés $(5, 4, 4, 4, 4, 1)$.
3. Si un graphe G est connexe alors son complémentaire $\overline{G}$ est non connexe. .
4. Si tous les sommets d'un graphe G sont de degré pair, alors le graphe G est eulérien.

Exercice 4 : (2 points)
Soit T un arbre avec un sommet de degré 1000. Est-il possible que T contienne moins de 1000 sommets de degré 1 ?

Exercice 5 : (3 points)

Une ville est composée de 28 rues, toutes de longueur 1, qui correspondent aux arêtes du graphe suivant.



Question 1 – Le graphe est-il eulérien (c'est-à-dire, contient-il un cycle eulérien) ? Sinon, combien d'arêtes au minimum faut-il ajouter pour rendre le graphe eulérien ?
Question 2 – Existe-t-il un tour de la ville (démarrant et arrivant au même endroit) qui passe au moins une fois par toute les rues de longueur 32 ? de longueur 36 ?

Exercice 6 : (4 points)

Un réseau informatique est composé de sept stations de travail localisées dans sept centres différents. Certains centres sont reliés entre eux par des lignes de communication. Les équipements étant vétustes, il a été décidé de procéder à leur remplacement par un matériel plus moderne. Ce remplacement peut être effectué selon les coûts donnés par la matrice suivante :

	2	3	4	5	6	7
1	2	c	c	c	c	c
2		7	9	c	c	6
3			2	c	3	6
4				c	5	c
5					8	c
6						c

La valeur c veut dire qu'il n'existe pas de ligne reliant directement les deux centres correspondants, mais on peut la construire pour un coût $c = 10$.

On souhaite moderniser les lignes existantes ou en construire de nouvelles afin que toutes les stations soient liées directement ou indirectement tout en minimisant le cout total. On suppose que les lignes non modernisées sont inutilisables.

Question 1 – Modélisez ce problème comme un problème d'optimisation dans un graphe.
Question 2 – Résolvez le problème avec les données fournies, donnez les étapes, indiquez les lignes à moderniser ainsi que le coût total de cette opération.
Question 3 – Que peut-on dire si le coût c de construction de la ligne $(4; 7)$ diminue et devient 5 ?

Exercice 7 : (4 points)

Le but de l'exercice est de démontrer par récurrence la propriété suivante : un graphe connexe à n sommets a au moins $n - 1$ arêtes.

Question 1 – Montrer que la propriété est vraie pour $n = 1$. On suppose donc dans les questions suivantes que $n > 1$.
Question 2 – Un graphe connexe peut-il avoir un sommet de degré 0 ?
Question 3 – Si tous les sommets sont de degré au moins 2, que peut-on dire du nombre d'arêtes du graphe ?
Question 4 – Montrer que si la propriété est vraie pour tout graphe connexe à $n - 1$ sommets, alors elle sera aussi vraie pour tout graphe connexe à n sommets ayant (au moins) un sommet de degré 1.
Question 5 – Finir de rédiger proprement la récurrence en utilisant les questions précédentes et conclure.