Coloration

Plan

Plan

Sous-graphes

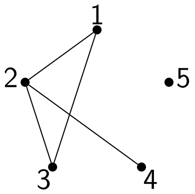
Sous-graphes (rappels)

Soient $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$ deux graphes.

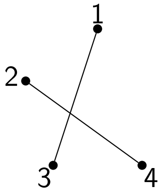
- H est un **sous-graphe** de G si $W \subseteq V$ et $F \subseteq E$.
  À partir de G, on enlève des sommets et des arêtes (ou pas)
- H est un **sous-graphe couvrant** de G si $W = V$ et $F \subseteq E$.
  À partir de G, on garde tous les sommets ; et on enlève des arêtes (ou pas).
- H est un **sous-graphe induit** de G si $W \subseteq V$ et F contient toutes les arêtes $uv \in E$ où $u, v \in W$. On le note $G[W]$[1].
  À partir de G, on enlève des sommets (ou pas) et leurs arêtes incidentes ; pas le droit d'enlever d'autres arêtes.

1. H est appelé le sous-graphe induit (ou parfois engendré) par W

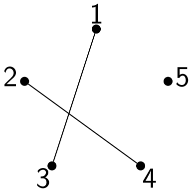
Illustration des différents types de sous-graphe



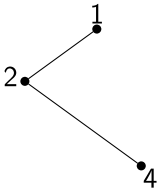
G



sous-graphe de G



sous-graphe couvrant de G



sous-graphe induit de G

Complets et Stables

Complets K_n : $V = \{1, 2 \dots n\}$ et $E = \{ij | i \neq j\}$

Stables $G = (V, E)$ stable si et seulement si $E = \emptyset$

Stable (ou *ensemble indépendant*) d'un graphe : sous-graphe induit stable

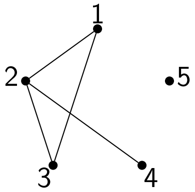
Clique : sous-graphe complet

A quoi ressemble le complémentaire d'un stable ?

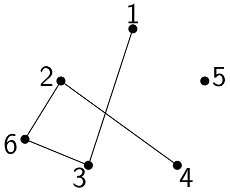
$\omega(G) =$ le nombre de sommets maximum d'une clique de G

$\alpha(G) =$ le nombre de sommets maximum d'un stable de G

$\omega(G)$ et $\alpha(G)$



$\omega(G) = 3$ et $\alpha(G) = 3$



$\omega(H) = 2$ et $\alpha(H) = 4$

Plan

Graphes bipartis

$G = (V, E)$ est **biparti** si et seulement si $\exists A \subseteq V, B \subseteq V$ tels que

- $A \cup B = V$
- $A \cap B = \emptyset$
- $G[A]$ et $G[B]$ stables

Remarques

- (A, B) est une **bipartition** de V [2]
- Un chaîne élémentaire est un graphe biparti
- Un cycle élémentaire ayant un nombre pair de sommets est un graphe biparti

2. par extension, on peut dire que (A, B) est une bipartition de G

Graphes bipartis

Un cycle élémentaire ayant un nombre impair de sommets n'est pas biparti.

- Soit $C_{2p+1} = (v_1, v_2 ... v_{2p+1})$ un cycle élémentaire ($p \geq 1$)
- Si C_{2p+1} est biparti alors il existe une partition $V = A \cup B$ de C_{2p+1} tel que $G[A]$ et $G[B]$ stables
- Sans perte de généralité, $v_1 \in A \Rightarrow v_2 \in B \Rightarrow v_3 \in A$, etc. : $v_k \in B$ si k est pair et $v_k \in A$ si k est impair
- En particulier $v_{2p+1} \in A$ et $v_1 \in A$ et $v_{2p+1}v_1$ est un arc
- Contredit le fait que A est un stable.

Donc un cycle élémentaire est biparti si et seulement si il a un nombre pair de sommets.

Graphes bipartis

Théorème

Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle élémentaire impair comme sous-graphe.

- G biparti $\Leftrightarrow$ chaque composante connexe de G est bipartie
- G contient un cycle impair $\Leftrightarrow$ il existe une composante connexe de G qui contient un cycle impair
- donc on considère G connexe

Graphes bipartis

AD : G biparti $\Rightarrow$ G sans cycle impair

- Soit G biparti, avec bipartition (A, B)
- Les sommets d'une chaine quelconque alternent entre A et B.
- Donc, toutes les chaines qui relient des sommets dans des différentes parties de la bipartition sont de longueur impaire, et toutes les chaines qui relient des sommets dans la même partie de la bipartition sont de longueur paire.
- Comme toutes les arêtes de G ont une extrémité dans A et l'autre dans B, tous les cycles de G doivent être bipartis (donc pairs).

Graphes bipartis

AD : G sans cycle impair $\Rightarrow$ G biparti

- Supposons que G est un graphe connexe sans cycle impair.
- Soit r un sommet de G. On découpe $V(G)$ en couche $V_0, V_1, \ldots$ où V_i est l'ensemble des sommets à distance i de r.
- Soit A l'ensemble de sommets de G dont la distance à r est paire, et soit $B = V \backslash A$.
- Soit $e = uv$ une arête de $E(G)$. Montrons par contradiction que u et v ne peuvent pas être à la même distance de r. Soit P_u et P_v un plus court chemin de u à r, et de v à r, respectivement.
- Soit z le premier sommet où P_u et P_v s'intersectent (potentiellement $z = r$).

Graphes bipartis

- Alors la portion de P_u allant de u à z fait la même longueur que celle de P_v allant de v à r, donc on a un cycle impair en les mettant bout à bout tous les deux avec uv : contradiction, donc il n'y a aucune arête entre deux sommets à la même distance de r.
- Aucun arête ne peut aller de V_i à V_{i+2} car cela ferait un chemin de longueur $i+1$ entre r et un sommet de V_{i+2}.
- Cela démontre que (A, B) est bien une bipartition de G.

Graphes bipartis

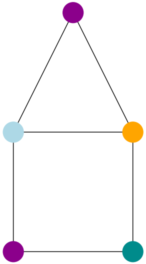
Quels sont les graphes bipartis pour lesquels la bipartition est unique ?

Plan

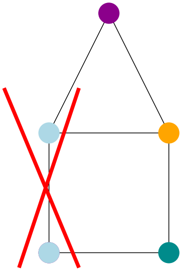
Coloration

k-**coloration** de $G = (V, E)$
fonction $c : V \longrightarrow \{1, 2 \ldots k\}$ telle que $c(u) \neq c(v) \quad \forall uv \in E$

Les sommets de même couleur définissent un stable



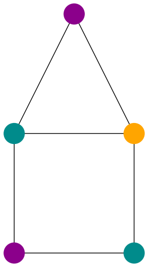
Une 4-coloration de G



Coloration optimale

Nombre chromatique $\chi(G)$

- il existe une $\chi(G)$-coloration de G
- il n'existe pas de $(\chi(G) - 1)$-coloration de G



$\chi(G) = 3$ car 3-coloration
et on ne peut pas faire 2 à cause du triangle.

Est-ce que ce nombre est bien défini pour tout graphe ?

Coloration

Applications
nombreuses applications dans l'industrie, en ingénierie de l'organisation, en informatique. . .

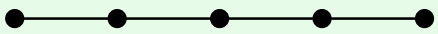
Les problèmes fondamentaux : planification de maintenance

Pour aller plus loin : Graphes parfaits

Coloration

Quelques graphes particuliers

Quel est le nombre chromatique des graphes suivants ? ($n \geq 2$)

- le graphe complet K_n
- le chemin P_n sur n sommets (Ex P_5 : )
- le cycle sur n sommets

Coloration

Quelques graphes particuliers

Quels sont tous les graphes G à n sommets qui vérifient

- $\chi(G) = n$
- $\chi(G) = 1$
- $\chi(G) = 2$

Coloration

Quelques graphes particuliers

Quels sont tous les graphes G à n sommets qui vérifient

- $\chi(G) = n$
- $\chi(G) = 1$
- $\chi(G) = 2$

Le graphe G est biparti $\Leftrightarrow \chi(G) \leq 2$

Plan

Bornes

Rappels

- $\Delta(G)$, le **degré maximum** de G, est le plus grand degré d'un sommet de G : $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(V)$
- $\omega(G)$ est le nombre maximum de sommets d'une clique de G

Bornes sur χ

Théorème

Soit $G = (V, E)$, un graphe. On a

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

et ces deux bornes sont atteintes

Bornes

Preuve par **récurrence** sur n que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

- $H(n)$: soit G un graphe à n sommets, alors $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$
- $H(1)$ est clairement vraie
- Supposons que $H(n)$ est vraie pour $n \geq 1$. Montrons que $H(n+1)$ est vraie.
- Soit $G = (V, E)$ un graphe à $n+1$ sommets, $n \geq 1$.
- Soit $x \in V$ un sommet de G de plus grand degré, cad $d(x) = \Delta(G)$.
- Soit $G' = G[V \backslash \{x\}]$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant x (ainsi que toutes les arêtes incidentes à x).

Bornes

- Par hypothèse de récurrence, $\chi(G') \leq \Delta(G') + 1$
- Or $\Delta(G') \leq \Delta(G)$
- Donc $\chi(G') \leq \Delta(G) + 1$
- On peut donc colorier G' avec au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs
- Comme $d(x) = \Delta(G)$ et qu'au pire, les $\Delta(G)$ voisins de x utilisent $\Delta(G)$ couleurs, il reste une couleur pour x parmi les $\Delta(G) + 1$ couleurs disponibles
- On peut donc colorier G avec au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs

Bornes

Prouvons maintenant que $\chi(G) \geq \omega(G)$.

1. Si G' est un sous graphe de G, alors $\chi(G') \leq \chi(G)$
2. $\chi(K_k) = k$

or G contient une clique de taille $k = \omega(G)$ par définition de ω donc donc $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Bornes

Trouvez des exemples de graphes pour chacun des cas suivants

- $\omega(G) = \chi(G) < \Delta(G) + 1$
- $\omega(G) < \chi(G) = \Delta(G) + 1$
- $\omega(G) < \chi(G) < \Delta(G) + 1$
- $\omega(G) = \chi(G) = \Delta(G) + 1$
- $\chi(G) = \Delta(G) - k$ pour k quelconque

Algorithmes

Algorithme 1 : Un algorithme glouton de coloration

Données : un ordre $v_1, v_2 \ldots, v_n$ sur les sommets de G

Résultat : une coloration de G

$c(v_1) = 1$

pour $i = 2$ *à* n **faire**

  $c(v_i) =$ la plus petite couleur non utilisée par les voisins déjà coloriés de v_i

retourner c

Algorithmes

Un algorithme glouton de coloration

- Proposez un graphe G et un ordre des sommets pour lesquels l'algorithme glouton utilise $\chi(G)$ couleurs
- Proposez un graphe G et un ordre des sommets pour lesquels l'algorithme glouton utilise strictement plus que $\chi(G)$ couleurs

$\Rightarrow$ Cet algorithme n'est PAS optimal

Remarque : pour tout graphe $G = (V, E)$ il existe un ordre $v_1, v_2 \ldots v_n$ tel que l'algorithme glouton colorie G avec $\chi(G)$ couleurs

Coloration

Un algorithme glouton de coloration

L'algorithme glouton utilise au pire $\Delta(G) + 1$ couleurs

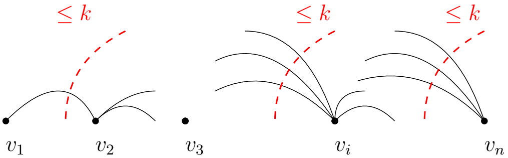
À chaque étape l'algorithme glouton colorie un sommet qui a au plus $\Delta(G)$ voisins déjà coloriés

Remarque : ceci est une deuxième preuve que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Dégénérescence

k-dégénéré

Soit k un entier naturel. Un graphe G est *k-dégénéré* s'il existe un ordre $v_1, \ldots, v_n$ sur ses sommets tel que chaque v_i a au plus k voisins avant lui dans l'ordre, autrement dit $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, v_i a au plus k voisins v_j tels que $j < i$.
De manière équivalente, v_i est de degré au plus k dans
$G_i = G[v_1, \ldots, v_i] \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

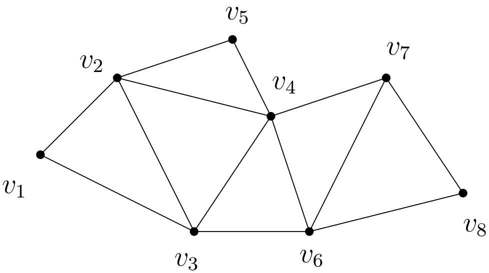


On peut "éplucher" le graphe en enlevant un sommet de degré $\leq k$ dans "ce qui reste".

Dégénérescence

Exemples :

- Les arbres sont 1-dégénérés.
- Le graphe ci-dessous est 2-dégénéré



Dégénérescence et coloration

Théorème

Soit G un graphe k-dégénéré, alors $\chi(G) \leq k+1$.

Soit $v_1, \ldots, v_n$ l'ordre de dégénérescence de G. L'algorithme glouton utilisant cet ordre sur G utilise au plus $k+1$ couleurs.

Plan

Coloration de graphes d'intervalles

Soit $\mathcal{E} = \{E_1, E_2 \ldots E_n\}$ une famille d'ensembles. Le **graphe d'intersection** associé à $\mathcal{E}$ est un graphe $G = (V, E)$ avec

- $V = \{v_1, v_2 \ldots v_n\}$
- $v_i v_j \in E \Leftrightarrow E_i \cap E_j \neq \emptyset$

Construire le graphe d'intersection associé à $\{[1, 3], [2, 7], [4, 6], [5, 8]\}$

Coloration de graphes d'intervalles

Un graphe G est un **graphe d'intervalles** s'il existe un ensemble $\mathcal{I}$ d'intervalles de $\mathbb{R}$ tel que G est le graphe d'intersection associé à $\mathcal{I}$

Montrer que le graphe C_4 (cycle à 4 sommets) n'est pas un graphes d'intervalles

Coloration de graphes d'intervalles

Théorème

Pour G un graphe d'intervalles, on a $\chi(G) = \omega(G)$.

De plus, l'algorithme glouton colorie G avec $\chi(G)$ couleurs si l'ordre des sommets est l'ordre de date de début croissant.
La date de début de l'intervalle $I_i = [a_i, b_i]$ est a_i

Coloration de graphes d'intervalles

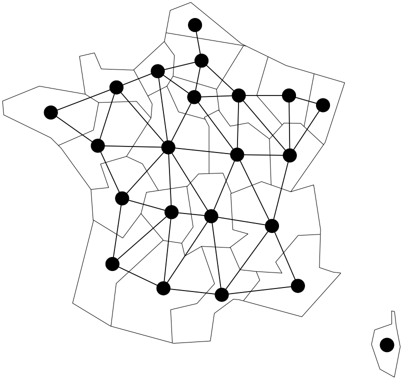
- On sait que $\chi(G) \geq \omega(G)$.
- Soit K, le nombre de couleurs utilisées par l'algorithme glouton en ordonnant les sommets par ordre de date de début croissant : $K \geq \chi(G) \geq \omega(G)$

Nous allons montrer que $\omega(G) \geq K$

- Soit v_i le premier sommet colorié avec la couleur K par l'algorithme glouton.
- Soit $X = \{$voisins de v_i coloriés avant $v_i\}$.
- X utilise les couleurs de 1 à $K - 1 \Rightarrow |X| \geq K - 1$.
- Tous les sommets de X correspondent à des intervalles contenant a_i = la date de début de I_i
- $X \cup \{v_i\}$ est donc une clique de au moins $K - 1 + 1$ sommets
- Donc $\omega(G) \geq K$

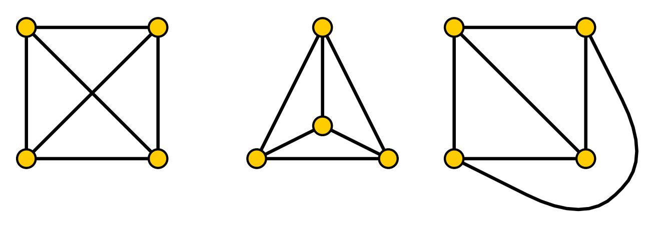
Plan

Origine des graphes planaires



Coloration de graphes planaires

Un **graphe planaire** peut être représenté dans le plan $\mathbb{R}^2$ de telle façon que deux arêtes distinctes ne se croisent pas. Une telle représentation est un **plongement** dans le plan.

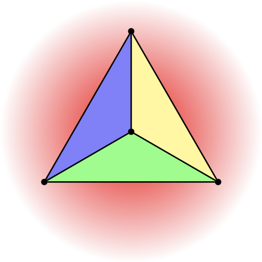


K_4 est planaire : il existe une représentation de K_4 qui est planaire

Application : dessin de circuits imprimés en microelectronique

Coloration de graphes planaires

Dans une représentation plane de G, les **faces** sont les parties connexes du plan lorsqu'on retire l'espace utilisé par les arêtes dans le plan. La face extérieure est non-bornée mais compte comme une face (cela dépend des définitions, mais en général oui) !



Dans le plongement ci-dessus, K_4 a quatre faces.

Coloration de graphes planaires

- n = nombre de sommets
- a (ou m) = nombre d'arêtes
- f = nombre de faces

Tour de magie

1. dessiner un graphe planaire connexe
2. compter n, a, f
3. calculer $n - a + f$ et comparer avec le résultat obtenu par vos camarades

Coloration de graphes planaires

- n = nombre de sommets
- a (ou m) = nombre d'arêtes
- f = nombre de faces

Tour de magie

1. dessiner un graphe planaire connexe
2. compter n, a, f
3. calculer $n - a + f$ et comparer avec le résultat obtenu par vos camarades

$n - a + f = 2$

Moyen mnémotechnique : NAF NAF PARIS (+ signe alterné)

Coloration de graphes planaires

Ceci n'est pas paranormal !

Théorème (Formule d'Euler)

Soit G planaire. Soit f le nombre de faces de G dans une représentation planaire de G, soient n, m, c les nombres de sommets, arêtes et composantes connexes de G. On a $n - m + f = c + 1$.

Récurrence sur m

$H(m)$: G planaire à m arêtes alors $n - m + f = c + 1$

$H(0)$: G planaire à 0 arête $\Rightarrow f = 1, c = n$ ✔

Coloration de graphes planaires

AD : $H(m-1) \Rightarrow H(m)$

- Supposons $H(m-1)$ vrai ($m \geq 1$)
- Soit $G = (V, E)$ planaire à m arêtes
- Soit uv arête quelconque de G (G a au moins une arête)
- Soit $G' = G/uv = (V, E/\{uv\})$ et $n' = n$, $m' = m - 1$, f' et c' les paramètres de G'.
- G' a $m - 1$ arêtes donc par hypothèse de récurrence, $n' - m' + f' = c' + 1$

Coloration de graphes planaires

Deux cas

- $c' = c$:
  - dans ce cas, il y a chemin entre u et v dans G', donc l'arête uv dans G clôt une face supplémentaire par rapport à G' : $f = f' + 1$.
  - En résumé $c = c'$, $n = n'$, $m = m' + 1$, $f = f' + 1$ et $n' - m' + f' = c' + 1$ donc $n - m + f = n' - m' - 1 + f' + 1 = c' + 1 = c + 1$ ✔
- $c' \neq c$, alors nécessairement $c = c' - 1$ (ajout d'une arête) :
  - On a $f' = f$ (l'arête uv ne bordait aucune face, sinon il y avait un chemin de u à v dans G')
  - en résumé $n = n', m = m' + 1, c = c' - 1, f = f'$ implique $n - m + f = n' - (m' + 1) + f' = c' + 1 - 1 = c + 1$ ✔

Coloration de graphes planaires

Il existe un autre théorème célèbre concernant les graphes planaires lié à la coloration de graphe

Théorème (Le théorème des 4 couleurs)

Soit G planaire, alors $\chi(G) \leq 4$

TROP DUR POUR NOUS

De notre niveau : un graphe planaire est 6-coloriable.

Coloration de graphes planaires

Lemme

Soit G planaire. Alors, il existe un sommet de G de degré ≤ 5.

- On considère G connexe, planaire sans perte de généralité. Si $n < 3$, le résultat est vrai ; on suppose $n \geq 3$ dans la suite.
- On sait que $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 2m$
- Or par double-comptage du degré des faces :
  - toute face est bordée par au moins 3 arêtes
  - chaque arête borde au plus 2 faces

  $\Rightarrow 2m \geq 3f$
- G planaire $\Rightarrow n - m + f = 2$ car G connexe
- Donc $0 < n - m + f \leq n - m + \frac{2}{3}m \Rightarrow 6n > 2m = \sum_{v \in V} d(v)$
- Donc le degré moyen est < 6, donc $\exists v$ tel que $d(v) \leq 5$.

Coloration de graphes planaires

Lemme

Tout graphe planaire est 5-dégénéré.

C'est un corollaire du lemme précédent.

Par récurrence sur n.
Vrai pour $n = 1$.
Soit G un graphe planaire à $n + 1$ sommets. Il possède un sommet de degré ≤ 5, appelons-le v_{n+1}. Par hypothèse de récurrence, $G \setminus \{v_{n+1}\}$ est 5-dégénéré, soit $v_1, \ldots, v_n$ un de ses ordres de dégénérescence, alors $v_1, \ldots, v_{n+1}$ est un ordre de dégénérescence dans G.

Coloration de graphes planaires

Lemme

Tout graphe planaire est 5-dégénéré.

C'est un corollaire du lemme précédent.

Par récurrence sur n.
Vrai pour $n = 1$.
Soit G un graphe planaire à $n+1$ sommets. Il possède un sommet de degré ≤ 5, appelons-le v_{n+1}. Par hypothèse de récurrence, $G \setminus \{v_{n+1}\}$ est 5-dégénéré, soit $v_1, \ldots, v_n$ un de ses ordres de dégénérescence, alors $v_1, \ldots, v_{n+1}$ est un ordre de dégénérescence dans G.

Théorème

Soit G planaire, alors, $\chi(G) \leq 6$

Coloration de graphes planaires

Théorème

Soit G planaire, alors, $\chi(G) \leq 6$

Autre preuve, par récurrence $|V(G)|$ (qui revient au même)
$H(n)$: G planaire à n sommets, alors, $\chi(G) \leq 6$.
$n = 1$ ✔ (même $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)
AD : $H(n) \Rightarrow H(n+1)$

- Supposons $H(n)$ vraie pour $n \geq 1$.
- Soit G planaire d'ordre $n+1$. Par le lemme, il existe x sommet tel que $d(x) \leq 5$.
- $G[V/\{x\}]$ est planaire à n sommets donc $\chi(\mathrm{G[V/\{x\}]}) \leq 6$.
- Comme $d(x) \leq 5$, quelle que soit la 6-coloration de $G[V/\{x\}]$ il reste au moins une couleur disponible pour x
- $\Rightarrow \chi(G) \leq 6$ ✔

Coloration de graphes planaires

Algorithme 2 : coloration d'un graphe planaire en 6 couleurs max

```
// Trouve un ordre des sommets par degré croissant
// puis colorie dans l'ordre inverse
```

$i = 0$

tant que *il existe un sommet non numéroté* **faire**

- choisir x non numéroté de plus petit degré dans le graphe des sommets non numérotés
- numéroter x par i
- $i{+}{+}$

on note $x[i]$ le sommet numéroté i ;

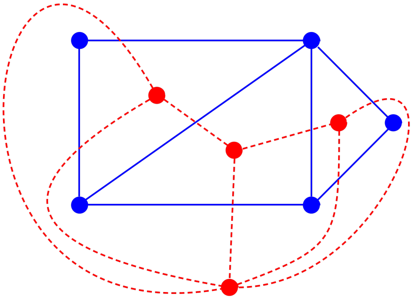
pour $i = n$ *à* 1 **faire**

- affecter à $x[i]$ la plus petite couleur non affectée à ses voisins

Dual d'un graphe planaire

Pour tout graphe planaire G plongé dans le plan, on peut définir un multigraphe G^* appelé le **dual de** G :

- $V(G^*)$: faces de G
- $E(G^*)$: pour chaque arête de G bordant la face f_1 et la face f_2, on crée l'arête $f_1 f_2$ dans G^* (parfois $f_1 = f_2 \rightarrow$ boucle)



Dual d'un graphe planaire

Propriétés du dual :

- Le dual d'un graphe planaire est toujours planaire.

Dual d'un graphe planaire

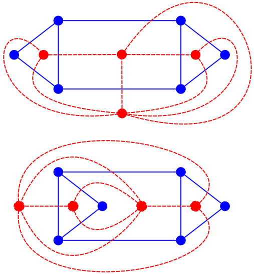
Propriétés du dual :

- Le dual d'un graphe planaire est toujours planaire.
- Un graphe connexe est le dual de son dual (le=isomorphe au)

Dual d'un graphe planaire

Propriétés du dual :

- Le dual d'un graphe planaire est toujours planaire.
- Un graphe connexe est le dual de son dual (le=isomorphe au)
- Le dual dépend (peut dépendre) du plongement.

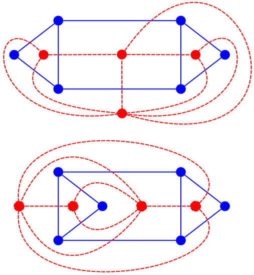


Source : Kirelagin Wikipedia user

Dual d'un graphe planaire

Propriétés du dual :

- Le dual d'un graphe planaire est toujours planaire.
- Un graphe connexe est le dual de son dual (le=isomorphe au)
- Le dual dépend (peut dépendre) du plongement.
- Le dual est toujours connexe



Source : Kirelagin Wikipedia user

Coloration de graphes planaires

Preuve plus formelle du double-comptage de $2m \geq 3f$

On utilise le dual d'un plongement du graphe G.

- On construit comme graphe auxiliaire H une 1-subdivision du dual G^* (dual + ajout de sommets lorsqu'une arête de G^* croise une arête de G) :
  - $H = (A \cup B, E)$ biparti
  - $A = \{$faces de G dans une représentation planaire$\}$
  - $B = \{$arêtes de G dans une représentation planaire$\}$
  - $\phi\alpha$ est une arête de H si et seulement si $\alpha \in B$ borde $\phi \in A$
- D'une part $|E| = \sum_{\phi \in A} d_H(\phi)$.
- D'autre part $|E| = \sum_{\alpha \in B} d_H(\alpha)$.
- Or $d_H(\phi) \geq 3 \quad \forall \phi \in A$ implique $|E| \geq 3|A| = 3f$
- et $d_H(\alpha) \leq 2 \quad \forall \alpha \in B$ implique $|E| \leq 2|B| = 2m$
- Donc $3f \leq |E| \leq 2m$ ✔