Contrôle continu — INF303 25 octobre 2017

À lire attentivement avant de commencer le sujet :

— *Justifier proprement vos réponses ; vous ne recevrez pas tous les points pour une réponse correcte sans justification. On peut énoncer des résultats du cours sans les démontrer.*
— *Le barème (sur 20 points) est inscrit à titre indicatif et est susceptible de changements.*
— *Les documents ne sont pas autorisés à l'exception d'une feuille A4 recto-verso.*
— *Les appareils électroniques sont interdits.*
— *Vous ne devez pas répondre au crayon à papier.*
— *Le document fait deux pages.*

Exercice 1. **(3 points)** On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes. **L'ordre des cartes dans la main ne joue aucune rôle.**

Question 1. Combien y a-t-il de mains différentes ?

> $\binom{52}{5} = 2598960$.

Question 2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?

> $4 \cdot \binom{48}{4} = 778320$.

Question 3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?

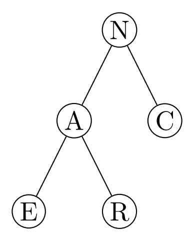
> $\binom{52}{5} - \binom{48}{5} = 886656$.

Question 4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

> Il y a $\binom{48}{5}$ mains sans roi, $\binom{48}{5}$ mains sans dame, et $\binom{44}{5}$ mains contenant aucun roi et aucune dame. Donc, la réponse est $\binom{52}{5} - 2\binom{48}{5} + \binom{44}{5} = 260360$.

Exercice 2. **(2 points)**

Voici l'arbre A :



Écrire le mot formé par les sommets de A selon le parcours en :

1. profondeur préfixé ;
2. profondeur infixé ;
3. profondeur postfixé ;
4. largeur.

> 1. NAERC
> 2. EARNC
> 3. ERACN
> 4. NACER

Exercice 3. **(2 points)**

Soit G un graphe acyclique (une forêt) sur n sommets, m arêtes et $k \geq 1$ composantes connexes. Prouvez que $m = n - k$ par récurrence sur k.

> Soit $P(k)$ la proposition « tout graphe acyclique sur n sommets, m arêtes et k composantes connexes satisfait la relation $m = n - k$ ».
> Le cas de base est $k = 1$. Soit G un graphe acyclique sur n sommets, m arêtes et 1 composante connexe. Donc, G est un arbre. Par la caractérisation des arbres, on a $m = n - 1$, et $P(1)$ est vrai.
> Supposons que $P(k)$ est vrai pour un entier $k \geq 1$. Soit G un graphe acyclique sur n sommets, m arêtes et $k+1$ composantes connexes. Soit G_1 une composante connexe de G, et soit G_2 le graphe consistant des autres k composantes connexes de G. Notons n_i et m_i le nombre de sommets et arêtes dans G_i. Comme G_1 est un arbre, on a $m_1 = n_1 - 1$. Par l'hypothèse de récurrence, $m_2 = n_2 - k$. Donc, $m = m_1 + m_2 = (n_1 - 1) + (n_2 - k) = (n_1 + n_2) - (k + 1) = n - (k + 1)$ et $P(k + 1)$ est vrai.
> Donc $P(k) \implies P(k + 1)$ et le résultat est vrai par récurrence.

Exercice 4. **(3 points)** Considérons un ensemble de cinq villes qui doivent être reliées par un réseau routier. Le coût de construction d'une route entre les villes i et j est a_{ij}, où $A = (a_{ij})$ est donné par la matrice ci-dessous (un coup de $+\infty$ signifie qu'on ne peut pas construire de route) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & +\infty & 10 \\ 11 & 9 & +\infty & 0 & 7 \\ 9 & 8 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 1. Trouver le coût minimum d'un réseau routier qui connecte toutes les villes. Quel algorithme avez-vous utilisé ?

> $3 + 3 + 7 + 8 = 21$; l'algorithme de Kruskal.

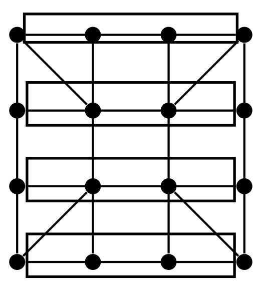
Exercice 5. **(2 points)**

Soit T un arbre avec un sommet de degré 1000. Est-il possible que T contienne moins de 1000 sommets de degré 1 ?

> Non ; soit n_1 le nombre de feuilles de T. On a $2(n-1) = 2m = \sum_{v \in V(T)} d(v) \geq n_1 + 1000 + 2(n - 1 - n_1)$, d'où $n_1 \geq 1000$.

Exercice 6. **(3 points)**

Une ville est composée de 28 rues, toutes de longueur 1, qui correspondent aux arêtes du graphe suivant.



Question 1. Le graphe est-il eulérien (c'est-à-dire, contient-il un cycle eulérien) ? Sinon, combien d'arêtes au minimum faut-il ajouter pour rendre le graphe eulérien ?

> Le graphe n'est pas eulérien ; il contient 16 sommets de degré impair. Il faut ajouter au moins 8 arêtes pour rendre le graphe eulérien.

Question 2. Existe-t-il un tour de la ville (démarrant et arrivant au même endroit) qui passe au moins une fois par toute les rues de longueur 32 ? de longueur 36 ?

> Un tour de longueur 32 n'existe pas, car le graphe n'est pas eulérien. Si on double 8 arêtes disjointes (un couplage), alors on obtient un graphe eulérien. Autrement dit, il existe un tour de longueur 36 qui passe au moins une fois par toute les roues.

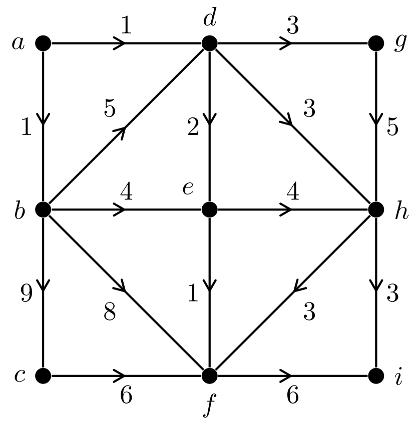
Exercice 7. **(3 points)**

Question 1. Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer la distance du sommet a aux autres sommets dans le réseau suivant.

v	a	b	c	d	e	f	g	h	i
dist(a,v)	0	1	10	1	3	4	4	4	7

Question 2. Dans quel ordre l'algorithme traite-il les sommets ?

Les sommets sont traités (marqués) dans l'ordre a,(b,d),e,(f,g,h),i,c, où l'ordre des sommets dans les parenthèses peut être arbitraire.



Exercice 8. (2 points)

Soit $G[X,Y]$ un graphe biparti (c'est à dire que $V(G) = X \cup Y$ et que X et Y sont des stables, autrement dit toutes les arêtes de G ont une extrémité dans X et l'autre dans Y).

Question 1. Montrer que $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$.

Soit m le nombre d'arêtes dans G. Comme chaque arête a exactement une extrémité dans X, et exactement une extrémité dans Y, alors $\sum_{v \in X} d(v) = m = \sum_{v \in Y} d(v)$.

Question 2. En déduire que si G est k-régulier ($k \geq 1$), alors $|X| = |Y|$. (Un graphe est *k-régulier* si tous ses sommets sont de degré exactement k).

On a $k|X| = \sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v) = k|Y|$.