Compter

© N. Brauner, 2019, M. Stehlik 2020

Compétences de cette séquence

- Connaître les **définitions** de
  - Permutations et factorielle
  - Arrangements
  - Combinaisons et coefficients binomiaux
- Connaître **l'usage** pour l'énumération et la preuve
  - Permutations et factorielle
  - Arrangements
  - Combinaisons et coefficients binomiaux
  - Mots (Chaînes de caractères)
- Pouvoir expliquer la **formule du binôme de Newton**
- Preuves
  - Comprendre le principe de **double dénombrement** et pouvoir l'utiliser pour faire des preuves
  - Connaître le **Principe des tiroirs** et savoir l'utiliser
- Programmer le calcul de ces objets en **Python**

Plan

Permutations et factorielles

Une **permutation** de n objets distincts rangés dans un certain ordre, correspond à un changement de l'ordre de succession de ces n objets.

Exemple

Les permutations de $\{A, B, C\}$ sont :
$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$.

La **factorielle** d'un entier naturel n, notée $n!$, est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n.

Exemple

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

On définit $0! = 1$.

Permutations et factorielles

Proposition

Le nombre de permutations de n objets est égal à $n!$.

Permutations et factorielles

Proposition

Le nombre de permutations de n objets est égal à $n!$.

Démonstration.

- Il y a n choix pour le premier terme de la liste.
- Puis pour chacun de ces premiers choix, il y a $n-1$ possibilités pour le deuxième choix, $n-2$ pour le troisième, et ainsi de suite.
- Finalement il y a $n!$ choix possibles pour constituer une liste.

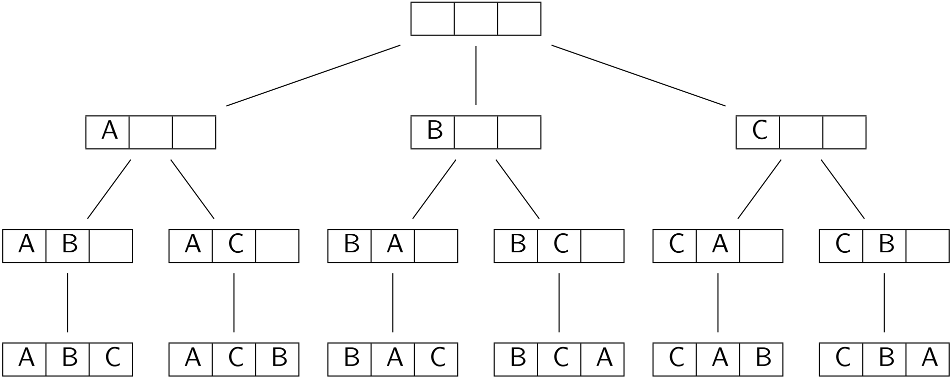
$\square$

Exemple

Combien y-a-t-il de façons différentes d'asseoir les 120 étudiants de cet amphi sur les 120 chaises ?

Une illustration

Il y a $3! = 6$ façons de placer $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ dans $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$.



Implémentation de la factorielle

Calcul **récursif** de la factorielle

Implémentation de la factorielle

Calcul **récursif** de la factorielle

```
factorielle(0) = 1
factorielle(n) = n * factorielle(n-1)      pour n ≥ 1
```

Implémentation de la factorielle

Calcul **récursif** de la factorielle

```
factorielle(0) = 1
factorielle(n) = n * factorielle(n-1)      pour n ≥ 1
```

Calcul **itératif** de la factorielle

Implémentation de la factorielle

Calcul **récursif** de la factorielle

```
factorielle(0) = 1
factorielle(n) = n * factorielle(n-1)     pour n ≥ 1
```

Calcul **itératif** de la factorielle

```
fact = 1
Pour i variant de 1 à n avec un pas de 1
  fact = fact * i
renvoyer fact
```

Vous pouvez la programmer en Python avec correction automatique sur caseine

Plan

Arrangements

Un k-**arrangement** d'un ensemble est une liste ordonnée de cardinalité k.

Exemple

2-arrangements de $\{A, B, C\}$: AB, AC, BA, BC, CA, CB.

Proposition

Le nombre de k-arrangements d'un n-ensemble est $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Arrangements

Un k-**arrangement** d'un ensemble est une liste ordonnée de cardinalité k.

Exemple

2-arrangements de $\{A, B, C\}$: AB, AC, BA, BC, CA, CB.

Proposition

Le nombre de k-arrangements d'un n-ensemble est $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Démonstration.

Il y a n choix pour le premier terme de la liste. Puis pour chacun de ces premiers choix, il y a $n-1$ possibilités pour le deuxième choix, $n-2$ pour le troisième, et ainsi de suite jusqu'à (n-(k-1)) choix pour le k^{ime} choix. Finalement il y a $n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ choix possibles. $\square$

Plan

Combinaisons et coefficients binomiaux

Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$, défini pour tout entier naturel n et tout entier naturel k inférieur ou égal à n, donne le nombre de sous-ensembles différents à k éléments que l'on peut former à partir d'un ensemble contenant n éléments.

Proposition

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Combinaisons et coefficients binomiaux

Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$, défini pour tout entier naturel n et tout entier naturel k inférieur ou égal à n, donne le nombre de sous-ensembles différents à k éléments que l'on peut former à partir d'un ensemble contenant n éléments.

Proposition

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Démonstration.

- Il y a $\frac{n!}{(n-k)!}$ k-arrangements par la proposition précédente.
- Chaque ensemble de k éléments peut être arrangé de $k!$ façons différentes.
- Autrement dit, en comptant tous les k-arrangements, chaque sous-ensemble de k éléments est compté $k!$ fois.
- Donc, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Combinaisons et coefficients binomiaux

Proposition

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Combinaisons et coefficients binomiaux

Proposition

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration 1.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. $\square$

Combinaisons et coefficients binomiaux

Proposition

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration 1.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. □

Démonstration 2.

- Soit X un ensemble à n éléments.
- Si Y est un sous-ensemble de X à k éléments, alors $X \setminus Y$ est un sous-ensemble de X à $n-k$ éléments.
- De même, si Y est un sous-ensemble de X à $n-k$ éléments, alors $X \setminus Y$ est un sous-ensemble de X à k éléments.
- Il y a autant de façons différentes de construire X que de construire Y.
- Donc, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Combinaisons et coefficients binomiaux

Relation de Pascal

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Combinaisons et coefficients binomiaux

Relation de Pascal

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Démonstration.

$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\,\frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. □

Démonstration 2.

- Soit X un ensemble de cardinalité n.
- Fixons un élément x de X. On cherche le nombre de sous-ensembles de X à k éléments :
  - $\binom{n-1}{k-1}$ sous-ensembles de X de cardinalité k qui contiennent x,
  - $\binom{n-1}{k}$ sous-ensembles de X de cardinalité k qui ne contiennent pas x.

□

Combinaisons et coefficients binomiaux

Le triangle de Pascal.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$$
\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

Identités remarquables

$$
\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= x+y\\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
\end{aligned}
$$

Identités remarquables

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= x+y\\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4
\end{aligned}$$

Formule du binôme de Newton

$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$.

Identités remarquables

Formule du binôme de Newton

$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$.

Identités remarquables

Formule du binôme de Newton

$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$.

Démonstration.

- Si on écrit $(x+y)^n$ comme $(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$, alors par distributivité il y aura un terme dans l'expansion pour chaque choix de x ou y de chaque binôme $(x+y)$ du produit.
- Par exemple, il y aura un seul terme x^n correspondant aux choix de x dans chaque binôme.
- En général, il y a $\binom{n}{i}$ façons d'obtenir $x^{n-i}y^i$, donc le coefficient de $x^{n-i}y^i$ est $\binom{n}{i}$.

$\square$

Nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments

Proposition

$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments

Proposition

$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Démonstration.

La somme compte tous les sous-ensembles d'un ensemble. Il y en a 2^n. On peut le montrer de plusieurs façons, par exemple avec la formule du binôme de Newton.

- il y a $\binom{n}{0}$ parties à 0 élément,
- il y a $\binom{n}{1}$ parties à 1 élément,
- il y a $\binom{n}{2}$ parties à 2 éléments,

  ...
- il y a $\binom{n}{n}$ parties à n éléments.

Soit au total : $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = (1+1)^n$ sous-ensembles d'un ensemble à n élements. □

Plan

Mots (Chaînes de caractères)

Un **mot** (ou chaîne de caractères) est une suite ordonnée de caractères.

Proposition

Le nombre de mots de longueur n composés de k caractères est égal à k^n.

Mots (Chaînes de caractères)

Un **mot** (ou chaîne de caractères) est une suite ordonnée de caractères.

Proposition

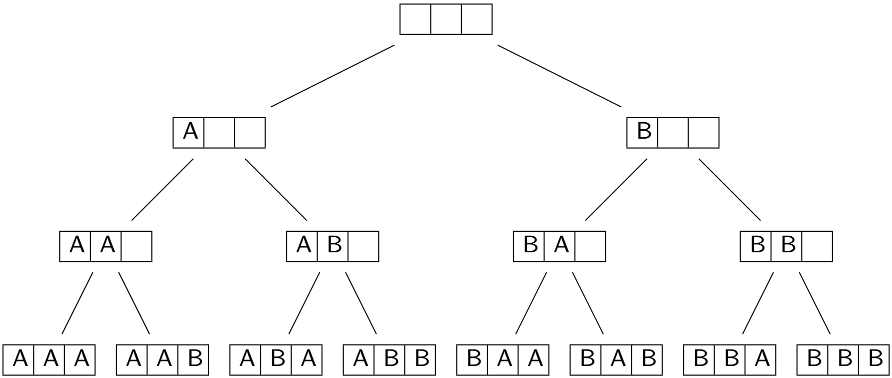
Le nombre de mots de longueur n composés de k caractères est égal à k^n.

Démonstration.

Il y a k possibilités pour chaque lettre du mot, donc il y a k^n mots différents au total. $\square$

Une illustration

Il y a $2^3 = 8$ mots de longueur 3 composés des lettres A et B.



Mots (Chaînes de caractères)

Proposition

Le nombre de mots de longueur n composés de k uns et $n-k$ zéros est $\binom{n}{k}$.

Mots (Chaînes de caractères)

Proposition

Le nombre de mots de longueur n composés de k uns et $n-k$ zéros est $\binom{n}{k}$.

Démonstration.

- Le nombre de permutations du mot est $n!$.
- Pour chaque permutation, toutes les permutations des uns sont équivalentes (donnent le même mot).
- Pareil pour les zéros.
- Donc, le nombre de mots est $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ (en fait il suffit de choisir la place des k uns parmi les n places possibles). $\square$

Remarque

Le même genre de raisonnement peut-être utilisé pour dénombrer les anagrammes d'un mot.
Par exemple, le mot "ananas" a $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$ anagrammes.

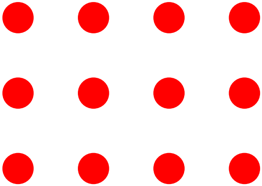
Plan

Principe du double comptage

On compte la cardinalité d'un ensemble X de deux manières différentes. Cela fournit deux expressions différentes pour $|X|$. Donc, elles sont égales.

Exemple (de l'école primaire)

$m \times n = n \times m$

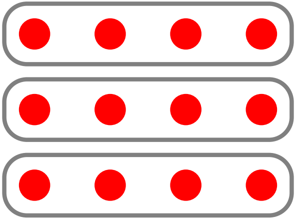


Principe du double comptage

On compte la cardinalité d'un ensemble X de deux manières différentes. Cela fournit deux expressions différentes pour $|X|$. Donc, elles sont égales.

Exemple (de l'école primaire)

$m \times n = n \times m$

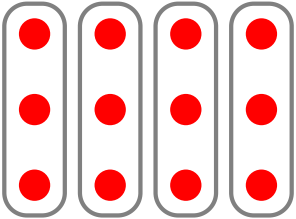


Principe du double comptage

On compte la cardinalité d'un ensemble X de deux manières différentes. Cela fournit deux expressions différentes pour $|X|$. Donc, elles sont égales.

Exemple (de l'école primaire)

$m \times n = n \times m$



Principe du double comptage

Proposition

La somme des n premiers entiers impairs ($n \geq 1$) est égale à n^2.

Principe du double comptage

Proposition

La somme des n premiers entiers impairs ($n \geq 1$) est égale à n^2.

Démonstration par récurrence sur n.

- Si $n = 1$, la somme est égale à $1 = 1^2$ (initialisation).
- Supposons que la propriété soit vraie pour un $n \geq 1$ quelconque. Considérons la somme des $n + 1$ premiers entiers impairs. Par l'hypothèse de récurrence, on sait que $1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$. Donc, $1 + 3 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$, et donc la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$. (hérédité)
- Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

$\square$

On aurait pu aussi utiliser la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique.

Principe du double comptage

Proposition

La somme des n premiers entiers impairs ($n \geq 1$) est égale à n^2.

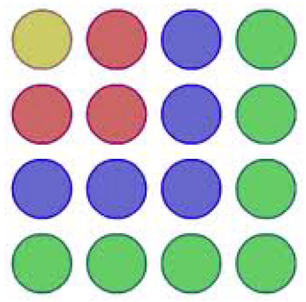
Principe du double comptage

Proposition

La somme des n premiers entiers impairs ($n \geq 1$) est égale à n^2.

Démonstration par double comptage.

- On va compter le nombre de disques dans le carré de deux façons différentes.
- Si on compte par couleur, on obtient l'expression $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$.
- Le côté du carré contient n disques, donc le nombre de disques est n^2.
- On a donc prouvé que : $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.



$\square$

Principe du double comptage

Proposition

La somme des n premiers entiers $(n \geq 1)$ est égale à $n(n+1)/2$.

Principe du double comptage

Proposition

La somme des n premiers entiers $(n \geq 1)$ est égale à $n(n+1)/2$.

Démonstrations possibles.

- par récurrence sur n,
- avec formule suite arithmétique,
- par double-comptage,
- ...

$\square$

Principe du double comptage

Proposition

La somme des n premiers entiers ($n \geq 1$) est égale à $n(n+1)/2$.

Principe du double comptage

Proposition

La somme des n premiers entiers ($n \geq 1$) est égale à $n(n+1)/2$.

Démonstration par double comptage.

- Soit S la valeur de la somme.
- Écrivons la somme deux fois, sur deux lignes, dans des ordres inverses :

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ S & = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

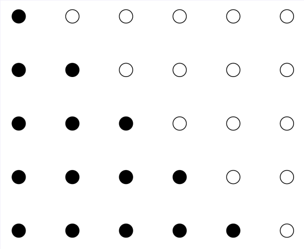
$\square$

Principe du double comptage

Suite démonstration par double comptage.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \ldots + n-1 + n \\ S &= n + n-1 + \ldots + 2 + 1 \end{aligned}$$

- Il y a n lignes, et la somme de chaque ligne vaut $n+1$.
- Ainsi, $2S = n(n+1)$, soit $S = n(n+1)/2$.



$\square$

Principe du double comptage

Proposition

La somme des n premiers entiers $(n \geq 1)$ est égale à $n(n+1)/2$.

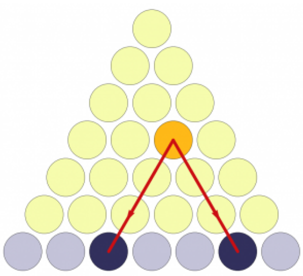
Principe du double comptage

Proposition

La somme des n premiers entiers ($n \geq 1$) est égale à $n(n+1)/2$.

Démonstration par double comptage (autre).

Chaque disque jaune correspond à une combinaison unique de deux disques bleus. Il y a $1 + 2 + \ldots + n$ disques jaunes et $n + 1$ disques bleus. Donc, $1{+}2{+}\ldots{+}n = \binom{n+1}{2} = n(n{+}1)/2$.



□

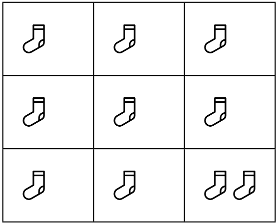
Plan

Principe des tiroirs

ou principe des **cages à pigeon**

Principe des tiroirs

Si n chaussettes occupent m tiroirs, et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette.



Principe des tiroirs

Il doit y avoir au moins deux personnes dans l'agglomération de Grenoble avec le même nombre de cheveux sur leur tête.

Principe des tiroirs

Il doit y avoir au moins deux personnes dans l'agglomération de Grenoble avec le même nombre de cheveux sur leur tête.

Démonstration.

Une tête normale a environ 150 000 cheveux et il est raisonnable de supposer que personne n'a plus de 300 000 de cheveux sur la tête. Il y a plus de 400 000 personnes dans l'agglomération de Grenoble. Si nous associons à chaque nombre de cheveux sur une tête un tiroir, et si nous plaçons chaque habitant de Grenoble dans le tiroir correspondant à son nombre de cheveux sur la tête, alors d'après le principe des tiroirs, il y a nécessairement au moins deux personnes ayant exactement le même nombre de cheveux sur la tête dans l'agglomération de Grenoble. $\square$

Principe des tiroirs : version plus générale

Principe des tiroirs général

Si n chaussettes occupent m tiroirs, alors au moins un tiroir doit contenir au moins $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ chaussettes (où $\lceil x \rceil$ désigne l'entier immédiatement supérieur ou égal à x).

Exemple

Dans une classe de n étudiants, il doit y avoir au moins $\left\lceil \frac{n}{12} \right\rceil$ étudiants qui sont nés le même mois.