Colles série 3 : graphiques et caractéristiques des lois normales et binômiales

Sujet 1:

Soit X une variable de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = 1$ et $\sigma^2 = 1$.

1. Dans quel intervalle centré en μ peut-on garantir que plus de 99 fois sur 100 on observera une réalisation de X ? Représenter sur un même graphique les fonctions de répartition et densité de X sur cet intervalle.
2. Ajouter les éléments permettant une lecture graphique du quantile d'ordre 65%.

Sujet 2:

Soit X une variable de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = 1$ et $\sigma^2 = 1$.

1. Dans quel intervalle centré en μ peut-on garantir que plus de 99 fois sur 100 on observera une réalisation de X ? Représenter la densité de X sur cet intervalle. Tracer en vert les contours de la surface représentant $P(X \leq \mu - \sigma)$. Calculer cette quantité
2. Quelle surface représente $P(X \geq \mu - \sigma, X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma])$? En tracer les contours en rouge et calculer sa valeur. En déduire le calcul de $P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma] | X \geq \mu - \sigma)$.

Sujet 3:

Soit X une variable de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = 3$ et $\sigma^2 = 1$. On considère les évènements $A = \{X < \mu - \sigma\}$, $B = \{X > \mu + \sigma\}$ et $C = \bar{A} \cap \bar{B}$.

1. Représenter la densité de X sur l'intervalle $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$. Représenter avec trois couleurs différentes les évènements trois évènements, A, B et C (on utilisera `segments` avec l'option `lwd=3` permettant d'avoir un trait plus épais que le choix par défaut `lwd=1`). Que forme l'ensemble de ces trois évènements ?
2. Tracer en vert les contours de la surface représentant $P(C)$. A-t-on $P(C) = 0$? Sinon la calculer. En déduire le calcul de $P(A|C)$.

Sujet 4:

Soit X une variable de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu = 2$ et $\sigma^2 = 3$ et U une variable de loi normale centrée et réduite.

1. Calculer les quantiles d'ordre $(0.1, 0.2, ..., 0.9)$ de U et les affecter à `qu` puis les quantiles d'ordre $(0.1, 0.2, ..., 0.9)$ de X qui seront affectés à `qx`. Représenter le nuage des points d'abscisses les quantiles de U et d'ordonnées ceux de X.
2. Quelle est l'équation de la droite obtenue (indication : on cherchera par une lecture graphique l'ordonnée à l'origine et la pente et on superposera la droite d'ordonnée à l'origine et de pente lues avec `abline`) ? Donner l'expression du quantile d'ordre α de X en fonction du quantile d'ordre α de U.

Sujet 5:

Soit X une variable de loi $\mathcal{B}(n, 2/n)$ avec $n \geq 2$ et Y de loi $\mathcal{P}(2)$. Définir pour commencer $n = 2$.

1. Partitionner la fenêtre graphique loi $\mathcal{B}(n, 2/n)$ en deux élements placés l'un au dessus de l'autre. Représenter dans la partie supérieure la loi de probabilité de X et dans la partie inférieure celle de Y avec comme limite sur l'axe des abscisses l'intervalle $[0, n]$ et sur l'axe des ordonnées $[0, 1]$ pour les deux graphes. Ajouter en pointillés de même couleur que celle utilisée pour chaque loi une horizontale qui passe par le mode (la valeur de k pour laquelle $P(X = k)$ est maximum). Comparer les deux graphiques pour $n = 2$.
2. Refaire tourner les lignes de codes permettant de faire la question 1 en augmentant n. Que se passe-t-il lorsque $n \to +\infty$? Quelle approximation de la loi $\mathcal{B}(n, 2/n)$, vient-on d'illustrer ici ?

Sujet 6:

Soit X une variable discrète à valeurs dans $\{1, 2, ..., 6\}$ de loi de probabilité données par $(1/3, 0, 1/3, 0, 1/3, 0)$ et Y de loi $\mathcal{B}(1, p)$ avec $p = 1/3$ et indépendante de X.

1. Représenter sur un même graphique la loi de probabilité de X (diagramme en barres) et la fonction de répartition de X. Quelle lecture graphique de la médiane, obtient-on ? (rappel : c'est la plus petite modalité à partir de laquelle la FdR dépasse 0.5).
2. Calculer $P(X \in [2, 5.5])$ et $P(Y = 0)$. Que vaut $P(X \in [2, 5.5] | Y = 0)$?