Fiche formules résumé Examen Terminal
UGA - L2 Licence Sciences et Technologies - STA401 - année 2022/23

3. Tests Statistiques paramétriques

Le principe :

- Désicion à prendre entre deux hypothèses incompatibles : $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$

- Risque de première espèce ou seuil du test : $\alpha = P[\textit{rejet de } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_0] = P_{\mathcal{H}_0}[\textit{ accepter } \mathcal{H}_1]$

- Risque de deuxième espèce : $\beta = P[\textit{accepter } \mathcal{H}_0 \mid \mathcal{H}_1]$. La puissance du test est $1-\beta$

- Règle de décision : $\left\{ \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T \in W \quad (\textit{la statistique du test } T \textit{ est dans la région critique}) \right\}$

Tests de paramètres : Si X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$\mathcal{H}_0$: $\mu = \mu_0$ et σ^2 connue, alors $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$\mathcal{H}_0$: $\mu = \mu_0$ et σ^2 inconnue, alors $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}} \rightsquigarrow \mathcal{T}_{n-1}$

$\mathcal{H}_0$: $\mu = \mu_0$ et n grand, alors $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$\mathcal{H}_0$: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ et σ^2 et μ inconnues, alors $T = \dfrac{nS^2}{\sigma_0^2} \rightsquigarrow \mathcal{X}^2_{n-1}$

$\mathcal{H}_0$: $p = p_0$ et n grand, alors $T = \dfrac{F - p_0}{\frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \\ \mathcal{H}_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T < -u_{1-\alpha} & \textit{si } \sigma^2 \textit{ connue} \\ \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T < -t^{n-1}_{1-\alpha} & \textit{si } \sigma^2 \textit{ inconnue} \end{array}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \\ \mathcal{H}_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T > u_{1-\alpha} & \textit{si } \sigma^2 \textit{ connue} \\ \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T > t^{n-1}_{1-\alpha} & \textit{si } \sigma^2 \textit{ inconnue} \end{array}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0 \\ \mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T < -u_{(1-\alpha/2)} \textit{ ou } T > u_{(1-\alpha/2)} & \textit{si } \sigma^2 \textit{ connue} \\ \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T < -t^{n-1}_{(1-\alpha/2)} \textit{ ou } T > t^{n-1}_{(1-\alpha/2)} & \textit{si } \sigma^2 \textit{ inconnue} \end{array}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ \mathcal{H}_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T < z^{n-1}_{\alpha}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ \mathcal{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T > z^{n-1}_{1-\alpha}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ \mathcal{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \qquad \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T < z^{n-1}_{\alpha/2} \quad \textit{ou} \quad T > z^{n-1}_{1-\alpha/2}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : p = p_0 \\ \mathcal{H}_1 : p < p_0 \end{cases} \qquad \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T < -u_{1-\alpha} \qquad \textit{si n grand}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : p = p_0 \\ \mathcal{H}_1 : p > p_0 \end{cases} \qquad \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T > u_{1-\alpha} \qquad \textit{si n grand}$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : p = p_0 \\ \mathcal{H}_1 : p \neq p_0 \end{cases} \qquad \textit{Rejet de } \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T < -u_{(1-\alpha/2)} \quad \textit{ou} \quad T > u_{(1-\alpha/2)} \qquad \textit{si n grand}$$

Calcul de la p_{valeur} :

- La p_{valeur} est le seuil limite à partir duquel $\mathcal{H}_0$ est rejetée ($\mathcal{H}_1$ est acceptée) compte tenu des données observées : $\left\{ Rejet\ de\ \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow \alpha > p_{value} \right\}$

- Test unilatéral inférieur : $p_{valeur} = P_{\mathcal{H}_0}(T < T_{calc})$

- Test unilatéral supérieur : $p_{valeur} = P_{\mathcal{H}_0}(T > T_{calc})$

- Test bilatéral (lois Normale et Student) : $p_{valeur} = 2 * [1 - P_{\mathcal{H}_0}(T <\mid T_{calc} \mid)]$

- Test bilatéral (lois Khi-deux et Fisher) : $p_{valeur} = 2 * Min\,\{P_{\mathcal{H}_0}(T < T_{calc})\,;\, P_{\mathcal{H}_0}(T > T_{calc})\}$

---

4. Tests de comparaisons de 2 échantillons

Test de comparaison de 2 échantillons appariés :

Soient $(x_1, ..., x_n)$ et $(x'_1, ..., x'_n)$ deux séries de données mesurées sur le même échantillon d'individus et sur la même variable X. Soient $D_i = X_i - X'_i$ toutes les différences. On suppose que $D \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_d, \sigma_d^2)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_0 : \mu_d = 0 \\ \mathcal{H}_1 : \mu_d \neq 0 \end{array} \right. \qquad \text{La statistique est } T = \frac{\overline{D}\sqrt{n-1}}{S_d} \rightsquigarrow \mathcal{T}_{n-1}$$

$Rejet\ de\ \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T < -t^{n-1}_{1-\alpha/2}\ \ ou\ \ T > t^{n-1}_{1-\alpha/2}$

Pour un test unilatéral supérieur (si inférieur, échanger X et X') : $Rejet\ de\ \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T > t^{n-1}_{1-\alpha}$

Test de comparaison de 2 échantillons indépendants :

Soient $(X_1, ..., X_{n_1})$ un premier échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, et $(Y_1, ..., Y_{n_2})$ un second échantillon de loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. On suppose les deux échantillons indépendants.

1. $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ \mathcal{H}_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1 \\ \mathcal{H}_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1 \end{array} \right. \ ;\ T = \dfrac{S_1^{'2}}{S_2^{'2}} \rightsquigarrow \mathcal{F}_{(n_1-1;n_2-1)}$

   On suppose T>1. Si T<1 échangez les rôles de X et Y (Attention aux degrés de liberté de la loi de Fisher).

   $Rejet\ de\ \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T > f^{(n_1-1;n_2-1)}_{(1-\alpha/2)}$

   Pour un test unilatéral supérieur : $Rejet\ de\ \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T > f^{(n_1-1;n_2-1)}_{(1-\alpha)}$

2. $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ \mathcal{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{array} \right. \qquad si\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad T = \sqrt{\dfrac{n_1+n_2-2}{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{n_1S_1^2+n_2S_2^2}} \rightsquigarrow \mathcal{T}_{n_1+n_2-2}$

   $Rejet\ de\ \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T < -t^{(n_1+n_2-2)}_{(1-\alpha/2)}\ \ ou\ \ T > t^{(n_1+n_2-2)}_{(1-\alpha/2)}$

   Pour un test unilatéral supérieur : $Rejet\ de\ \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T > t^{(n_1+n_2-2)}_{(1-\alpha)}$

3. Tests des moyennes dans le cas de grands échantillons : $T = \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

   Test bilatéral : $Rejet\ de\ \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T < -u_{(1-\alpha/2)}\ \ ou\ \ T > u_{(1-\alpha/2)}$
   Test unilatéral supérieur : $Rejet\ de\ \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T > u_{(1-\alpha)}$

Test de comparaison de 2 proportions (2 échantillons indépendants) :

Soient p_1 et p_2 les proportions d'un même caractère mesuré sur deux populations différentes de taille $n_1$et n_2 (grands).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_0 :\ p_1 = p_2 \\ \mathcal{H}_1 :\ p_1 \neq p_2 \end{array} \right. \qquad \text{La statistique est } T = \frac{F_1 - F_2}{\sqrt{F(1-F)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \ \text{ avec } \ F = \frac{n_1F_1+n_2F_2}{n_1+n_2}$$

Test bilatéral : $Rejet\ de\ \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T < -u_{(1-\alpha/2)}\ \ ou\ \ T > u_{(1-\alpha/2)}$

Test unilatéral supérieur : $Rejet\ de\ \mathcal{H}_0 \Longleftrightarrow T > u_{(1-\alpha)}$