STA401

Statistique et Calcul des Probabilités

Responsable *: Carole Durand-Desprez*

CHAPITRE 4 : Tests statistiques paramétriques simples

I. Le principe

Test : *Décision à prendre entre 2 hypothèses incompatibles (disjointes)* →
$$\begin{cases} H_0 : Hypothèse 1 \\ H_1 : Hypothèse 2 \end{cases}$$

But : *Est-ce que les différences entre les "**observations**" et un "**modèle posé a priori**" sont **significatives** ou bien sont seulement **dues au hasard** (imprécisions des mesures, mauvais échantillon …) ?*

→ *Poser les hypothèses pour répondre au problème (à la question posée).*

→ *Faire les calculs adéquats pour décider entre les hypothèses .*

- ***Tests paramétriques simples :***
  Test de conformité des paramètres d'une loi normale par rapport à une valeur fixée, donnée. (les observations suivent une loi Normale, ou bien n est assez grand pour l'approximation)-
  Ex : $\mu = 2$? $\sigma^2 = 4$? $p = 51\%$?

- ***Tests plus complexes :*** *Comparaison de 2 échantillons (appariés – indépendants). Test du Khi-deux d'adéquation ou test du Khi-deux d'indépendance entre des variables ...*

Tests paramétriques simples

Exemples :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2 \\ H_1 : \mu \neq 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 4 \\ H_1 : \sigma^2 < 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : p = 0{,}5 \\ H_1 : p > 0{,}5 \end{cases}$$

Pour les observations données, on estime la moyenne par $\overline{x}$ sur l'échantillon ….

*La différence entre $\overline{x}$ et $\boldsymbol{\mu}$ est **significative** ou bien est **due au hasard** ?*

Exemple :

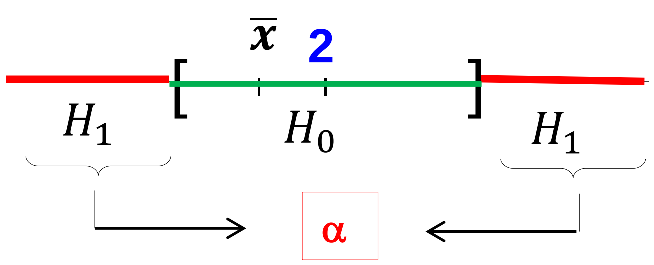
si $\overline{x}$ = 1,95 peut-on considérer que μ = 2 ?

si $\overline{x}$ = 1,998 peut-on considérer que μ = 2 ?

si $\overline{x}$ = 1,9999998 peut-on considérer que μ = 2 ?

si $\overline{x}$ = 2,01 peut-on considérer que μ = 2 ?

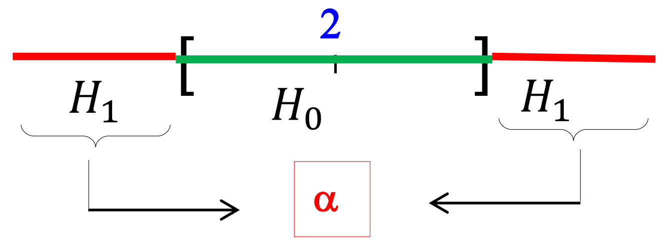
si $\overline{x}$ = 2,0000002 peut-on considérer que μ = 2 ?



$\longrightarrow$ Trouver les *valeurs limites* acceptables

Les risques : risque d'accepter une hypothèse alors qu'elle est fausse (à tort).

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 2 \\ H_1 : \theta \neq 2 \end{cases}$$



- Risque d'erreur de première espèce : α

  $\alpha = P($ *rejeter* $H_0 \mid H_0$ *vraie*$)$ = $P($*accepter* $H_1 \mid H_0$ *vraie*$)$ = risque d'accepter H_1 à tort.

- Risque d'erreur de deuxième espèce : β

  $\beta = P($ *rejeter* $H_1 \mid H_1$ *vraie*$)$ = $P($*accepter* $H_0 \mid H_1$ *vraie*$)$ = risque d'accepter H_0 à tort.

- Puissance du test : $1-\beta$

  $1-\alpha = P($ *accepter* $H_0 \mid H_0$ *vraie*$)$ = probabilité d'accepter H_0 avec raison.

  $1-\beta = P($ *accepter* $H_1 \mid H_1$ *vraie*$)$ = probabilité d'accepter H_1 avec raison.

- Le risque α *est fixé (contrôlé), le risque* β est calculé (si possible)
- Si la taille de l'échantillon ***n*** grandit (α constant) alors β diminue ($1-\beta$ grandit)
- Si α diminue alors β grandit ($1-\beta$ diminue)

Exemple :

$$\begin{cases} H_0 : \text{ Antivirus est efficace} \\ H_1 : \text{ Antivirus non efficace} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \text{ Antivirus non efficace} \\ H_1 : \text{ Antivirus est efficace} \end{cases}$$

$\alpha = P(\text{ rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie})$
= P(rejet efficacité alors qu'il est efficace)

risque de ne pas mettre sur le marché un bon antivirus

Contrôlé par le commercial

$\beta = P(\text{ rejeter } H_1 \mid H_1 \text{ vraie})$
= P(rejeter non efficacité à tort)

risque de déclarer efficace un mauvais antivirus

$\alpha = P(\text{ rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ vraie})$
= P(accepter efficacité alors que non efficace)

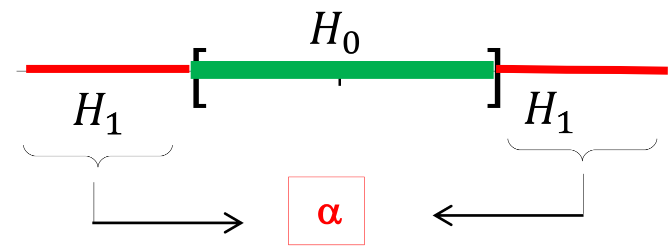
risque de mettre sur le marché un mauvais antivirus

Contrôlé par l'utilisateur.

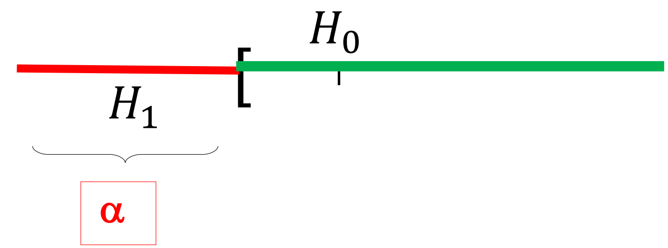
$\beta = P(\text{ rejeter } H_1 \mid H_1 \text{ vraie})$
= P(rejeter efficacité à tort)

risque de déclarer non efficace un bon antivirus

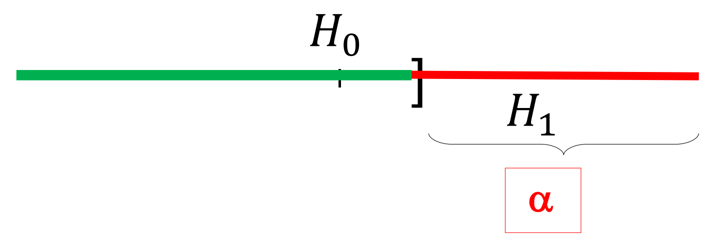
Test bilatéral : $\begin{cases} H_0 : \theta = 2 \\ H_1 : \theta \neq 2 \end{cases}$ *Schéma :*



Test unilatéral inférieur : $\begin{cases} H_0 : \theta = 2 \\ H_1 : \theta < 2 \end{cases}$ *Schéma :*



Test unilatéral supérieur : $\begin{cases} H_0 : \theta = 2 \\ H_1 : \theta > 2 \end{cases}$ *Schéma :*



Démarche générale : α *fixé*

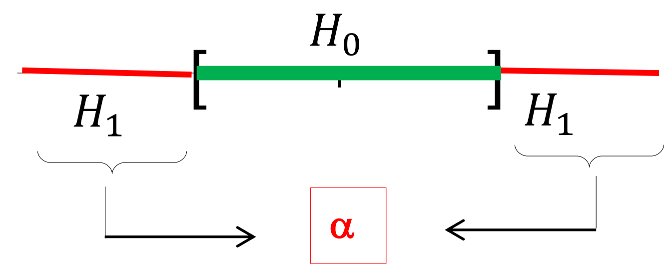
- *Estimer le paramètre à tester*
- *Définir la statistique du test. Définir sa loi sous H_0 (table).*
- *Donner la région critique W (rejet de H_0, règle de décision)*
- *Calcul de la valeur de la statistique T (sur un échantillon). Lecture de table*

- *Décision selon la règle :* $\mathit{Rejet\ de}\ H_0 \Leftrightarrow T \in W$ *[zone rouge]*

II. Tests paramétriques simples (μ, σ^2, p)

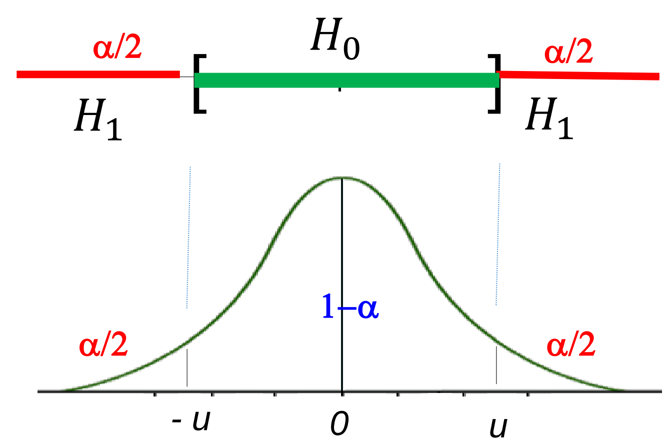
1) Test bilatéral de la moyenne avec σ^2 connue : X suit une loi $N(\mu;\sigma^2)$

$$\begin{cases} H_0 & : \mu = \mu_0 \\ H_1 & : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad \alpha \; fixé$$



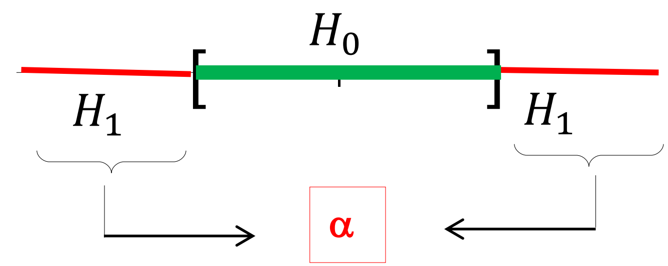
- *Estimer μ :* $\hat{\mu} = \bar{X}$
- *La statistique T et sa loi sous H_0 :* $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad suit \quad N(0;1)$
- *Région critique W (rejet de H_0) :*

rejet de H_0 ssi T dans W (région rouge)
ssi $T < -u$ ou $T > u$



- *Lecture de table N(0;1) :*
  $P(T < u) = 1 - \alpha/2$ $\longrightarrow$ $u_{1-\alpha/2}$
- *Calcul de la valeur de T (sur un échantillon).*
- *Décision selon la règle :* $Rejet \; de \; H_0 \iff T < -u_{1-\alpha/2} \;\; ou \;\; T > u_{1-\alpha/2}$

Preuve :



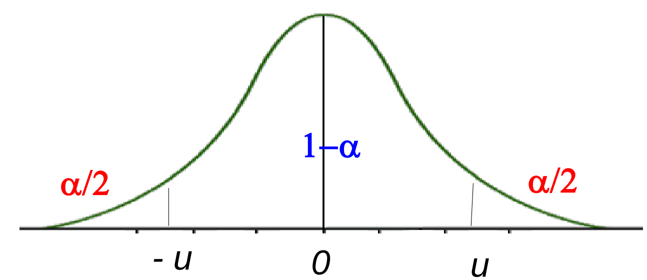
- *Estimer μ :* $\quad \hat{\mu} = \bar{X}$

- *La statistique T et sa loi :*

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad suit \quad N(0;1)$$

$$\alpha = P(\bar{X} < c_1 \;\; ou \;\; \bar{X} > c_2 \mid H_0 \;\; vraie) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{c_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad ou \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c_2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \;\middle|\; \mu = \mu_0 \right)$$

$$= P\left(T < \underbrace{\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{-u} \quad ou \quad T > \underbrace{\frac{c_2 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}_{u} \right) \longrightarrow$$



- *Lecture de table N(0;1) :* $\quad P(T < u) = 1 - \alpha/2 \quad \longrightarrow \quad u_{1-\alpha/2}$

- *Règle de décision :*

$$T < -u_{1-\alpha/2} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{X} < c_1 \quad avec \quad c_1 = \mu_0 - u_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$$

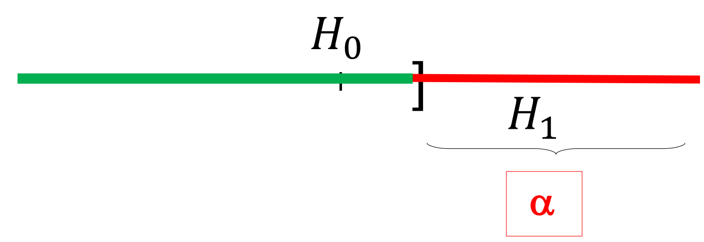
$$T > u_{1-\alpha/2} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{X} > c_2 \quad avec \quad c_2 = \mu_0 + u_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$$

$$Rejet \;\; de \;\; H_0 \quad \Leftrightarrow \quad T < -u_{1-\alpha/2} \quad ou \quad T > u_{1-\alpha/2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{X} < \mu_0 - u_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} \quad ou \quad \bar{X} > \mu_0 + u_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$$

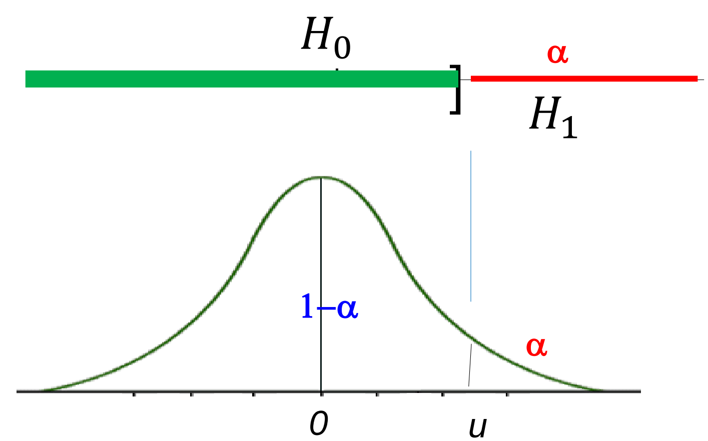
2) ***<u>Test unilatéral supérieur de la moyenne avec σ^2 connue</u> :*** X suit une loi $N(\mu;\sigma^2)$

$$\begin{cases} H_0 \ : \ \mu = \mu_0 \\ H_1 \ : \ \mu > \mu_0 \end{cases} \qquad \alpha \, fixé$$



- *Estimer μ :* $\hat{\mu} = \bar{X}$
- *La statistique T et sa loi sous H_0 :* $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad suit \quad N(0;1)$
- *Région critique W (rejet de H_0) :*

rejet de H_0 ssi T dans W (région rouge)
ssi $T > u$

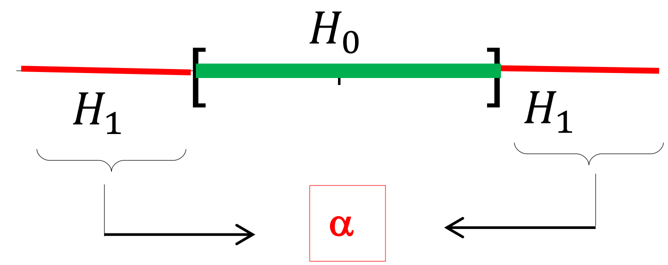


- *Lecture de table N(0;1) :*
  $P(T < u) = 1 - \alpha$ $\longrightarrow$ $u_{1-\alpha}$
- *Calcul de la valeur de T (sur un échantillon).*
- *Décision selon la règle :*

$$Rejet \ \ de \ \ H_0 \iff T > u_{1-\alpha} \iff \bar{X} > \mu_0 + u_{1-\alpha}\,\sigma/\sqrt{n}$$

3) *Exemple :* X suit $N(\mu;\sigma^2)$ avec σ^2 connue, $\sigma^2=4$. Echantillon n=9, $\Sigma\, x_i = 900$.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 99 \\ H_1 : \mu \neq 99 \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}05$$

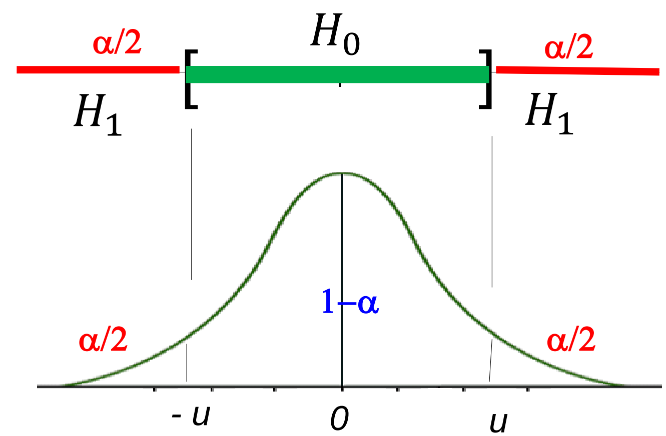


- *Test de moyenne avec* σ^2 connue, donc

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad suit \quad N(0;1)$$

- *Test bilatéral donc (voir dessin) :*
  $P(\,T < u\,) = 1 - \alpha/2$

  Lecture de $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1{,}96$



- *Règle de décision :*

$$Rejet\ de\ H_0 \iff T < -1{,}96 \quad ou \quad T > 1{,}96$$

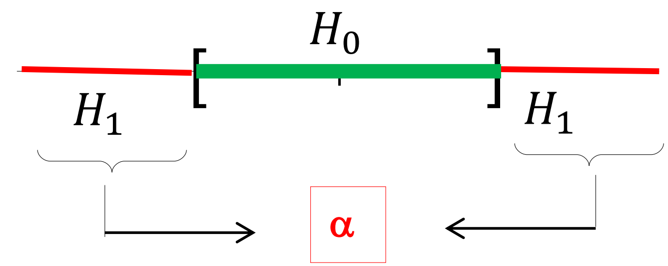
- *Calcul de la valeur de T (sur un échantillon) :*

$$T_{calc} = \frac{(900/9) - 99}{2/\sqrt{9}} = 1{,}5$$ *Ici* *-1,96 <* T_{calc} *< 1,96* *donc on accepte* H_0

→ *On conclut que la moyenne de X est bien égale à 99 avec une probabilité de 95%*

4) ***Test bilatéral de la variance :*** X suit une loi $N(\mu;\sigma^2)$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$



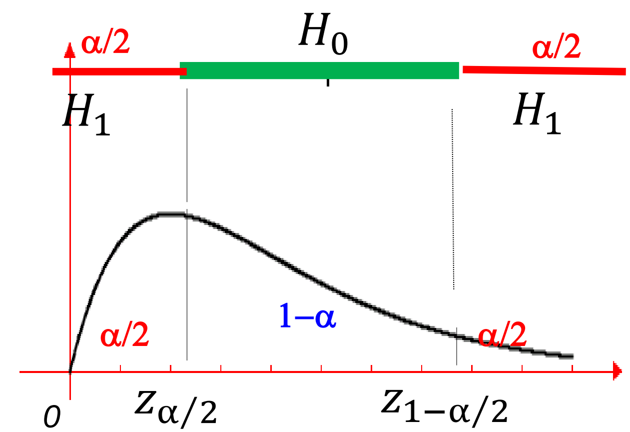
- *Estimer σ^2 :* $\widehat{\sigma^2} = S'^2$

$$T = \frac{nS^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma_0^2} \quad suit \quad \aleph^2_{n-1}$$

- *Rejet de H_0 ssi T dans W (région rouge)*

- *Lecture de table* $\aleph^2_{n-1}$ *:*

$$\longrightarrow \qquad z^{n-1}_{\alpha/2} \quad et \quad z^{n-1}_{1-\alpha/2}$$



- *Décision selon la règle :*

$$\begin{aligned} Rejet\ de\ H_0 \quad &\Leftrightarrow \quad T < z^{n-1}_{\alpha/2} \quad ou \quad T > z^{n-1}_{1-\alpha/2} \\ &\Leftrightarrow \quad S^2 < \frac{\sigma_0^2}{n} z^{n-1}_{\alpha/2} \quad ou \quad S^2 > \frac{\sigma_0^2}{n} z^{n-1}_{1-\alpha/2} \end{aligned}$$

5) Formules des statistiques de tous les tests paramétriques (sous H_0):.

$H_0 : \mu = \mu_0$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad suit \quad N(0;1)$$

→ σ^2 connue

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S'/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}} \quad suit \quad T_{n-1}$$

→ σ^2 inconnue

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad suit \quad N(0;1)$$

→ σ^2 inconnue
cas asymptotique :
n grand

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

$$T = \frac{nS^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma_0^2} \quad suit \quad \aleph_{n-1}^2$$

$H_0 : p = p_0$

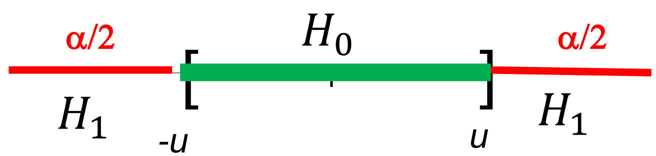
$$T = \frac{F - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \quad suit \quad N(0;1)$$

→ Cas asymptotique :
n grand

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

$Rejet\ de\ H_0 \iff T < -u_{1-\alpha/2}\ \ ou\ \ T > u_{1-\alpha/2}$ $(\sigma^2 connue)$

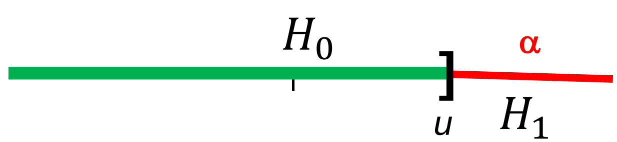
$Rejet\ de\ H_0 \iff T < -t_{1-\alpha/2}^{n-1}\ \ ou\ \ T > t_{1-\alpha/2}^{n-1}$ $(\sigma^2 inconnue)$



$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

$Rejet\ de\ H_0 \iff T > u_{1-\alpha}$ $(\sigma^2 connue)$

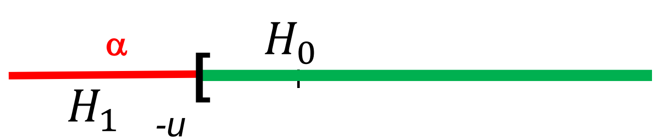
$Rejet\ de\ H_0 \iff T > t_{1-\alpha}^{n-1}$ $(\sigma^2 inconnue)$



$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

$Rejet\ de\ H_0 \iff T < -u_{1-\alpha}$ $(\sigma^2 connue)$

$Rejet\ de\ H_0 \iff T < -t_{1-\alpha}^{n-1}$ $(\sigma^2 inconnue)$



$$\begin{cases} H_0 & : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 & : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$Rejet\ de\ H_0 \iff T < z_{\alpha/2}^{n-1} \quad ou \quad T > z_{1-\alpha/2}^{n-1}$$

$$\begin{cases} H_0 & : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 & : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$Rejet\ de\ H_0 \iff T > z_{1-\alpha}^{n-1}$$

$$\begin{cases} H_0 & : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 & : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

$$Rejet\ de\ H_0 \iff T < z_{\alpha}^{n-1}$$

$$\begin{cases} H_0 & : p = p_0 \\ H_1 & : p \neq p_0 \end{cases}$$

$$Rejet\ de\ H_0 \iff T < -u_{1-\alpha/2} \quad ou \quad T > u_{1-\alpha/2} \qquad (ngrand)$$

$$\begin{cases} H_0 & : p = p_0 \\ H_1 & : p > p_0 \end{cases}$$

$$Rejet\ de\ H_0 \iff T > u_{1-\alpha} \qquad (ngrand)$$

$$\begin{cases} H_0 & : p = p_0 \\ H_1 & : p < p_0 \end{cases}$$

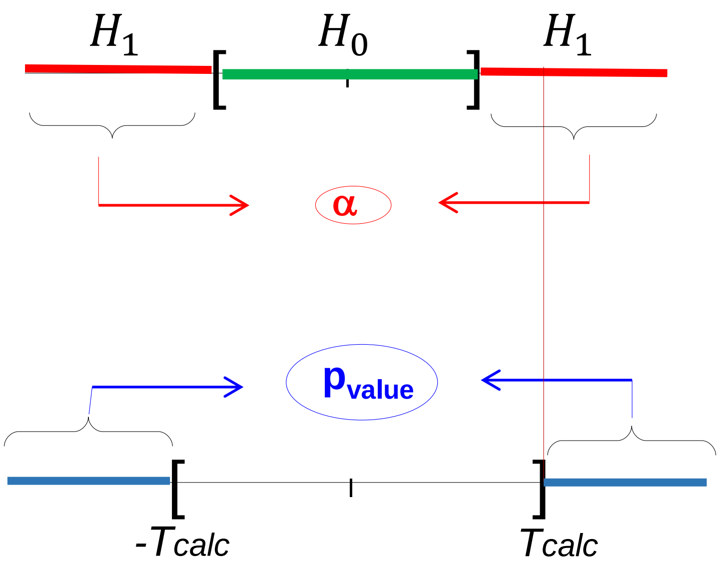
$$Rejet\ de\ H_0 \iff T < -u_{1-\alpha} \qquad (ngrand)$$

III. La p-valeur d'un test :

- La p_{val} est le risque limite α^* à partir duquel la décision va basculer :
- La p_{val} est le risque limite α^* au-dessus duquel on accepte H_1 .
- La p_{val} est le risque limite α^* au-dessous duquel on accepte H_0 .

Schéma de décision

Schéma de calcul



Si $\alpha > p_{val}$ alors on accepte H_1 (rejet de H_0)
Si $\alpha < p_{val}$ alors on accepte H_0 (rejet de H_1)

Démarche pour le calcul de la p-valeur :

- Calcul de la valeur prise par la statistique T du test : T_{calc}
- Calcul de p_{val} (sous H_0) :
  - test unilatéral sup : $p_{val} = P(T > T_{calc})$
  - test unilatéral inf : $p_{val} = P(T < T_{calc})$
  - test bilatéral (lois *N(0;1)* ou Student) : $p_{val} = 2 * P(T > |T_{calc}|)$
  - test bilatéral (lois Khi-deux ou Fisher) : $p_{val} = 2 * Min[P(T < T_{calc}); P(T > T_{calc})]$
- Conclure selon α et p_{val}

Exemple : X suit $N(\mu;\sigma^2)$ avec σ^2 connue, $\sigma^2=4$. Echantillon n=9, x = 100.

$$\begin{cases} H_0 & : \mu = 99 \\ H_1 & : \mu \neq 99 \end{cases} \qquad \alpha \ non\ fixé$$

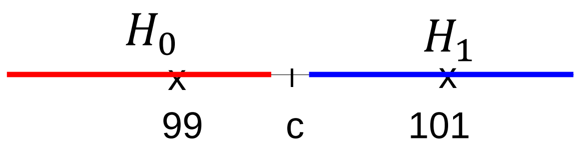
- Calcul : $T_{calc} = \dfrac{\bar{x} - 99}{\sigma/\sqrt{n}} = 1{,}5$
- Ici, T suit la loi *N(0;1)*, lecture sur la table *N(0;1)*
  Test bilatéral : p_{val} = 2 P(T>1,5) = 2 (1-P(T<1,5)) = 2(1-0,934) = 0,132
- Conclusion : Si on prend un risque α > 13,2% alors on conclura : $\mu \neq 99$
  si on prend un risque α < 13,2% on conclura alors : $\mu = 99$

IV. La puissance d'un test :

- *Calcul, sous H_0, de la valeur limite c.*
- *Calcul du risque de seconde espèce : $\beta = P(\text{accepter } H_0 \mid H_1 \text{ vraie})$*
- *Puissance : $1-\beta$ (Probabilité d'accepter H_1 avec raison)*

Exemple : X suit $N(\mu;\sigma^2)$ avec σ^2 connue, $\sigma^2=4$. Echantillon n=9, x = 100.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 99 \\ H_1 : \mu = 101 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \mu = 99 \\ H_1 : \mu > 99 \end{cases} \qquad \alpha = 0{,}05$$



- Calcul de c : $T_{calc} = \dfrac{\bar{x} - 99}{\sigma/\sqrt{n}} = 1{,}5 \qquad u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1{,}6449$

$$c = \mu_0 + 1{,}6449\,\sigma/\sqrt{n} = 100{,}0966$$

- Calcul de $\beta = P(accepter H_0 \mid H_1) = P(\bar{X} < c \mid H_1) = P\left(\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \dfrac{c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu = 101\right)$

$$\beta = P\left(T < \frac{c - 101}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P(T < -1{,}57) = 1 - P(T < 1{,}57) \approx 0{,}0582$$

- Puissance : $1-\beta = 0{,}9418$
- La probabilité d'accepter H_1 avec raison est 94,18%. Le risque d'accepter H_0 à tort est 5,82%

Propriétés et conséquences :

- La puissance d'un test ($1-\beta$) est fonction de la nature de H_1.
- Un test unilatéral est plus puissant qu'un test bilatéral.
- Plus la taille de l'échantillon ***n*** est grand, plus la puissance $1-\beta$ est grande, plus β est petit (α constant)
- Plus α diminue, plus la puissance $1-\beta$ diminue, plus β grandit.

Si H_1 est acceptée $\longrightarrow$ On accepte une différence avec un risque α (fixé)

Si H_0 est acceptée
- $\longrightarrow$ H_0 est réellement vraie (égalité acceptée, proba $1-\alpha$)
- $\longrightarrow$ La puissance est insuffisante (β grand), ***n*** insuffisant

⇨ Pour α fixé, trouver ***n*** pour avoir une puissance $1-\beta$ plus grande (donc un risque β plus petit)

$\longrightarrow$ Exemple (voir TD)