TP3 : Calculs de probabilités avec la loi Normale

Exercice pour l'extraction de données : Charger le jeu de données cardiaque.csv et l'affecter à `cardiaque`. En extraire l'échantillon des pressions systoliques et donner les résumés numériques usuels de cet échantillon : taille, moyenne, écart-type empirique corrigé (noté s' dans le cours) et quartiles.

Objectifs : *Savoir faire des calculs de probabilités sur une variable de loi normale.*

R propose des fonctions qui permettent de calculer exactement les valeurs de la densité, de la fonction de répartition ou de la fonction de quantile ainsi ainsi qu'un générateur de nombre tiré au hasard pour un assez large éventail de lois usuelles. Dans cette partie on utilisera surtout la loi normale d'espérance notée μ et de variance notée σ^2. On la notera $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sous R :

- sa densité est `dnorm()` et prend trois arguments réels x, $\mu \in R$ et $\sigma > 0$:
  `dnorm(x,mean=0,sd=1)=dnorm(x,0,1)`=f(x) pour une $\mathcal{N}(0,1)$
- sa fonction de répartition est `pnorm` et prend trois arguments x, $\mu \in R$ et $\sigma > 0$:
  `pnorm(x,0,1)`$= P(X \leq x) = \phi(x)$ pour une $\mathcal{N}(0,1)$
- sa fonction quantile est `qnorm` et prend trois arguments $q \in [0,1]$, μ et σ :
  `qnorm(q,0,1)`$=\phi^{-1}(q)$
- `rnorm()` son générateur aléatoire qui prend trois arguments n, μ et σ :
  `rnorm(10,0,1)` retourne dix valeurs tirées sous la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Exercice Préliminaire :

1. Représenter sur un même graphique les densité des lois $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ pour les couples $(\mu, \sigma) \in \{(0,1),(0,0.5),(0,2),(3,1)\}$ en quatre couleurs différentes. Y ajouter les verticales passant par -1 et 1 et représenter en rouge le segment de l'axe des abscisses où $|x| \leq 1$. En numérotant les quatre courbes de 1 à 4, classer dans l'ordre croissant les quatre valeurs p_1, p_2, p_3 et p_4 où p_i est définie comme la probabilité que la variable de densité numéro i soit à une distance inférieure à 1 de 0 ($P(X \in [0-1, 0+1] = [-1,1])$).
2. Représenter sur un même graphique et superposées la densité et la fonction de répartition d'une $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ pour un couple (μ, σ) de votre choix. Que se passe-t-il si on augmente ou diminue σ ou μ ?

Exercice 1 :

Soit X une variable de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec μ et σ quelconques et U de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Calculer $P(X \in [-2,4])$ avec $\mu = 2$ et $\sigma = 3$.
2. Choisir deux valeurs pour μ et σ et calculer $P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma])$. Changer les valeurs de l'un ou l'autre des paramètres ou les deux et recalculer la probabilité précédente.
3. Calculer , $P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma])$ et $P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma])$ pour un couple (μ, σ) quelconque et choisi au préalable.

4. Soit $n = 9$, calculer les quantiles d'ordres $1/(n+1), 2/(n+1), ..., n/(n+1)$ de la variable U. Il s'agit des déciles (ils sont neuf et coupent la droite rélle en dix intervalles tels que la probabilité de se trouver X dans chacun de ces intervalles vaille 10%. Les retrouver sur les tables statistiques.

5. Tracer la fonction de répartition de U et marquer par des points rouges sur l'axe des abscisses les positions des quantiles précédemment calculés. Placer sur l'axe des ordonnées des points rouges pour représenter les points d'abscisse 0 et ordonnées $1/(n+1), 2/(n+1), ...n/(n+1)$. Ajouter à l'aide de la fonction graphique secondaire `segments` des segments verticaux en pointillés noirs allant d'un quantile placé sur l'axe des abscisses jusqu'à l'intersection avec la courbe tracée. Idem du point obtenu tracer une horizontale en pointillés jusqu'à l'axe des ordonnées.

6. Calculer les quantiles d'ordres $1/(n+1), 2/(n+1), ..., n/(n+1)$ de la variable X avec $\mu = -1$ et $\sigma = 5$ et représenter les quantiles obtenus pour X selon ceux obtenus pour U.

7. Rajouter sur votre graphique la droite d'équation $y = \sigma x + \mu$. Conclure.

Exercice 2 :

Soit X une variable de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec $\mu = 2$ et $\sigma = 3$. Soient les évènements $A = \{X \in [1,5]\}$, $B = \{X \in [0,2[\}$, $C = \{X \geq 2\}$ et $D = \{X \leq 0\}$.

1. Calculer les probabilités des évènements A, B, C et D.

2. Calculer les probabilités conditionnelles de A sachant B, A sachant C et A sachant D.

3. Retrouver la valeur de $P(A)$ en utilisant la formule des probabilités totales appliquées avec la partition (B, C, D) de l'univers de tous les possibles Ω.

Exercice 3 :

Soit Y une variable de loi $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 10$ et $p = 0.3$. Soient les évènements $A = \{X \in [1,5]\}$, $B = \{X \in [0,2[\}$, $C = \{X \geq 2\}$.

1. Calculer les probabilités des évènements A, B et C.

2. Calculer les probabilités conditionnelles de A sachant B, et A sachant C.

3. Retrouver la valeur de $P(A)$ en utilisant la formule des probabilités totales appliquées avec la partition (B, C) de l'univers de tous les possibles Ω.

4. Tracer la fonction de répartition de Y en utilisant l'option `type="s"` de la fonction `plot()` qui permet de tracer une fonction en escaliers.

5. Y superposer la fonction de répartition d'une $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ en vert.

6. Refaire le tracé précédent pour des valeurs de n de plus en plus grandes. Quelle conjecture pourrait-on tirer de cette expérience numérique ?