Fiche Partiel-CC2
UGA - L2 Licence Sciences et Technologies - STA401 - année 2022/23

---

1. Données et Modèles

Calculs statistiques :

Un échantillon de données $(x_1, ..., x_n)$ est une série de valeurs prises par une variable X sur n individus.

La moyenne empirique : $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$

La variance empirique : $s_x^2 = \frac{1}{n} \left(\sum x_i^2\right) - \overline{x}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \overline{x})^2$

L'écart-type empirique : s_x

La fréquence empirique : $f = \frac{k}{n}$ k est le nombre de réalisations d'un évènement parmi les n individus

Un échantillon centré réduit a une moyenne de 0 et une variance de 1.

La médiane est la plus petite valeur prise par X telle qu'au moins la moitié des effectifs soit inférieur.

Le premier quartile est la plus petite valeur prise par X telle qu'au moins le quart des effectifs soit inférieur.

Le 3ème quartile est la plus petite valeur prise par X telle qu'au moins les 3/4 des effectifs soit inférieur.

Probabilités :

La probabilité d'un évènement est la proportion d'individus qui réalisent cet évènement (dans la population).

$P[\Omega] = 1$; $P[\emptyset] = 0$; $0 \leq P[A] \leq 1$; $P[\overline{A}] = 1 - P[A]$; $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

La probabilité conditionnelle de A sachant B est $P[A \mid B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]}$

Deux évènements A et B sont indépendants ssi : $P[A \mid B] = P[A]$ ou $P[A \cap B] = P[A]P[B]$

En notant $\overline{B}$ l'évènement contraire de B, on a : $P[A] = P[A \mid B]P[B] + P[A \mid \overline{B}]P[\overline{B}]$

Formule de Bayes : $P[A \mid B] = \dfrac{P[B \mid A]P[A]}{P[B]} = \dfrac{P[B \mid A]P[A]}{P[B \mid A]P[A] + P[B \mid \overline{A}]P[\overline{A}]}$

Lois :

X suit la loi Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: $P[X = 1] = p$; $P[X = 0] = 1 - p$; $E[X] = p$ *et* $Var[X] = 1 - p$

X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ *: [n expériences indépendantes ou tirages avec remise]*

$$P[X = k] = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1 - p)^{n-k} \qquad avec \qquad E[X] = np \quad et \quad Var[X] = np(1 - p)$$

X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: $P[X = k] = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ *avec* $E[X] = \lambda$ *et* $Var[X] = \lambda$

Pour les lois continues, on lit sur les tables $\boxed{\text{le quantile } x_p \text{ d'ordre p : } P[X \leq x_p] = F(x_p) = p}$

La loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$, la loi de Student $\mathcal{T}_n$ de paramètre n, la loi du Khi-deux $\mathcal{X}_n^2$ de paramètre n, la loi de Fisher-Snédécor $\mathcal{F}_{(n_1,n_2)}$ de paramètres (n_1, n_2).

Notations : u_p est le quantile d'ordre p de $\mathcal{N}(0, 1)$; t_p^n est le quantile d'ordre p de $\mathcal{T}_n$; z_p^n est le quantile d'ordre p de $\mathcal{X}_n^2$; $f_p^{n_1;n_2}$ est le quantile d'ordre p de $\mathcal{F}_{(n_1,n_2)}$.

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on centre et on réduite : $Y = (X - \mu)/\sigma \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

T.C.L : (conditions) : la loi $\mathcal{B}(n, p)$ peut être appochée par la loi $\mathcal{N}(np\,;\, np(1 - p))$

Autre approximation (conditions) : la loi $\mathcal{B}(n, p)$ peut être appochée par la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$

Autre approximation (conditions) : la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être appochée par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

Inégalité Markov : X v.a. positive, $a > 0$, $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$

Inégalité Bienaymé Tchebychev : X v.a. positive, $a > 0$, $P(\mid X - E(X) \mid \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$

Intervalle de fluctuation de p pour une loi $\mathcal{B}(n,p)$ avec un niveau de confiance de $1-\alpha$:

$I(p,\alpha) = \left] p - u_{1-\alpha/2}\, \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + u_{1-\alpha/2}\, \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right[$ où $u_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $(1-\alpha/2)$ de $\mathcal{N}(0,1)$

Intervalle de fluctuation de μ pour une loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ avec un niveau de confiance de$1-\alpha$:

$I(\mu,\alpha) = \left] \mu - u_{1-\alpha/2}\, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \,;\, \mu + u_{1-\alpha/2}\, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$ où $u_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $(1-\alpha/2)$ de $\mathcal{N}(0,1)$

---

2. Estimation Statistique

Estimateurs ponctuels :

Un estimateur d'un paramètre est une fonction de $(X_1, ..., X_n)$ qui approche ce paramètre. Un 'bon' estimateur est sans biais et convergent.

Une estimation est la valeur de l'estimateur prise sur un échantillon de données.

Notations :	$\widehat{p} = F$	$\widehat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$	$\widehat{\sigma^2} = S'^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \overline{X})^2$

Si $(X_1, ..., X_n)$ est un échantillon gaussien de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ alors :

$\overline{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$ $\qquad \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ $\qquad \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} \rightsquigarrow \mathcal{T}_{n-1}$ $\qquad \dfrac{nS^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \mathcal{X}^2_{n-1}$

Pour n grand : $\dfrac{F-p}{\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

Estimations par intervalles de confiance pour un niveau de confiance $1-\alpha$:

$I(\mu,\alpha) = \left] \overline{X} - u_{1-\alpha/2}\, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + u_{1-\alpha/2}\, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$ si σ^2 est connue ; $u_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $(1-\alpha/2)$ de $\mathcal{N}(0,1)$

$I(\mu,\alpha) = \left] \overline{X} - t^{n-1}_{1-\alpha/2}\, \dfrac{S'}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + t^{n-1}_{1-\alpha/2}\, \dfrac{S'}{\sqrt{n}} \right[$ si σ^2 est inconnue ; $t^{n-1}_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $(1-\alpha/2)$ de $\mathcal{T}_{n-1}$

$I(\sigma^2,\alpha) = \left] \dfrac{nS^2}{z^{n-1}_{1-\alpha/2}} ; \dfrac{nS^2}{z^{n-1}_{\alpha/2}} \right[$ si σ^2 et μ sont inconnues ; $z^{n-1}_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $(1-\alpha/2)$ de $\mathcal{X}^2_{n-1}$

Cas de grands échantillons :

$I(\mu,\alpha) = \left] \overline{X} - u_{1-\alpha/2}\, \dfrac{S}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + u_{1-\alpha/2}\, \dfrac{S}{\sqrt{n}} \right[$ où $u_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $(1-\alpha/2)$ de $\mathcal{N}(0,1)$

$I(p,\alpha) = \left] F - u_{1-\alpha/2}\, \dfrac{\sqrt{F(1-F)}}{\sqrt{n}} \,;\, F + u_{1-\alpha/2}\, \dfrac{\sqrt{F(1-F)}}{\sqrt{n}} \right[$