Departamento de Física
Universidade de Aveiro

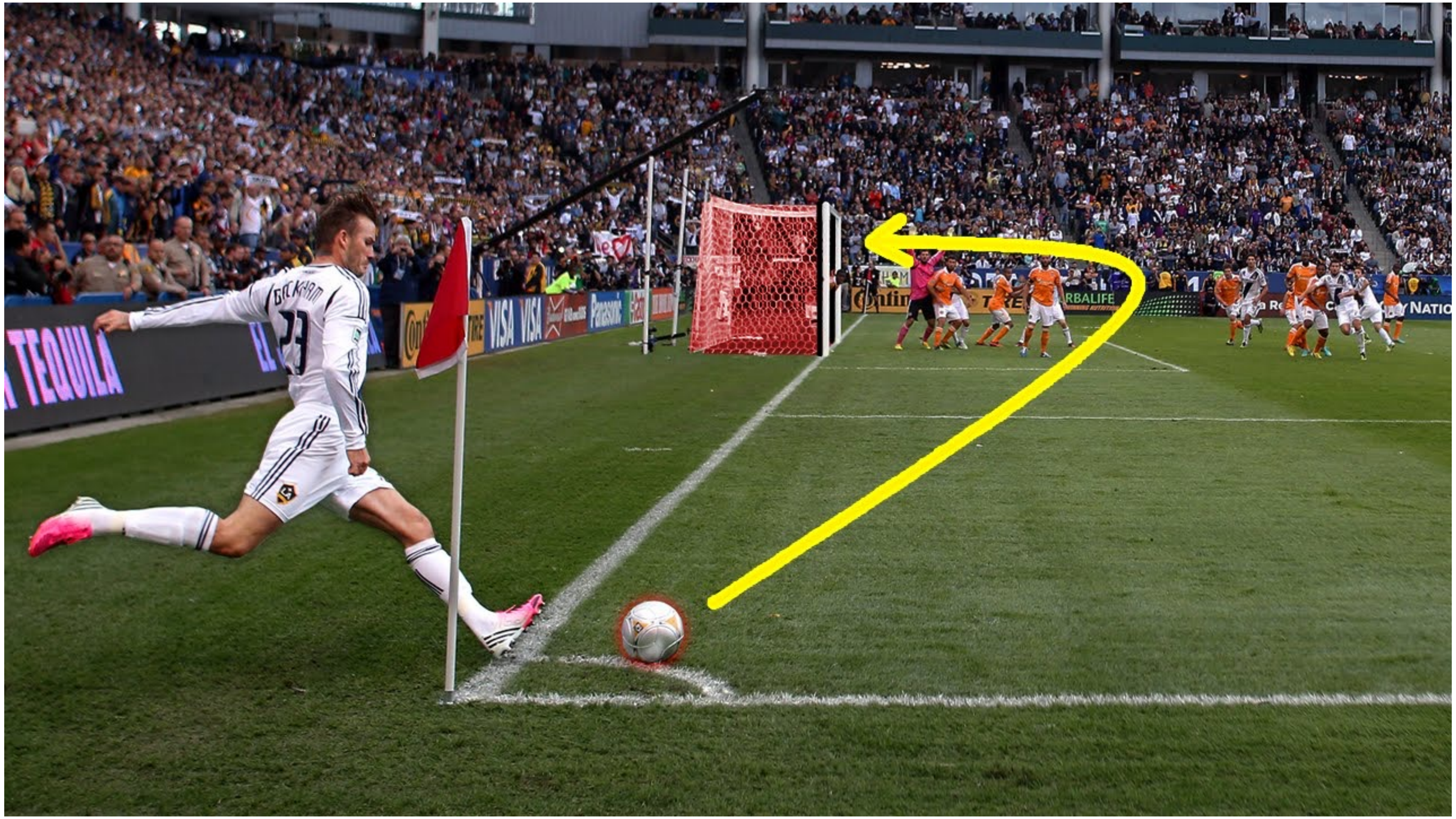
Modelação de Sistemas Físicos

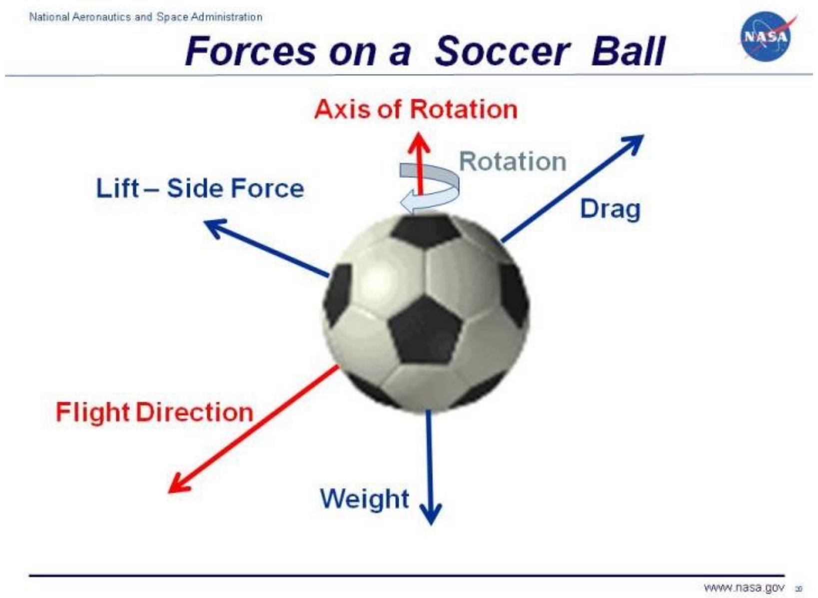
6ª Aula Teórica

Sumário:
Cap. 4: Movimento no plano e no espaço

Bibliografia:
Cap. 4: Serway, cap. 4; Sørenssen, cap. 6; Villate, cap. 6

Cap. 4 Movimento a 3D





Se soubermos as forças aplicadas à bola saberemos a lei do movimento.

1. Peso da bola

$$\vec{F}_{grav} = -mg\hat{\jmath}$$

2. Uma bola em movimento desloca o ar à sua passagem. Por isso sofre uma força de resistência do ar na forma

$$\vec{F}_{res} = -m\, D|\vec{v}|^2\hat{v}$$

3. A rotação da bola faz que o escoamento do ar seja diferente nos lados opostos da bola. O resultado é o aparecimento de uma força perpendicular ao eixo de rotação. É a força de Magnus, que tem a forma

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega}\times\vec{v}$$

$\vec{\omega}$ é o vetor rotação, $|\vec{\omega}|$= ângulo (rad)/segundo
$A = \pi r^2$ a área da secção da bola
ρ_{ar} a densidade do ar
r o raio da bola

Problemas cap 4   Bola de futebol com rotação

Problema:
Determinar se é golo ou não, a bola ser chutada do canto com rotação. Implementar o movimento da bola com rotação, usando o método de Euler. Modificar um programa anterior que seja semelhante e adicionar a parte do método de Euler correspondente à dimensão extra z

Dados:

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 23.8m)$

$\vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right) = (25, 5, -50)$ m/s

$\vec{\omega} = \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right) = (0, 400\ \mathrm{rad/s}, 0)$

$t_0 = 0\ s$

Massa da bola $m = 0.45$ kg

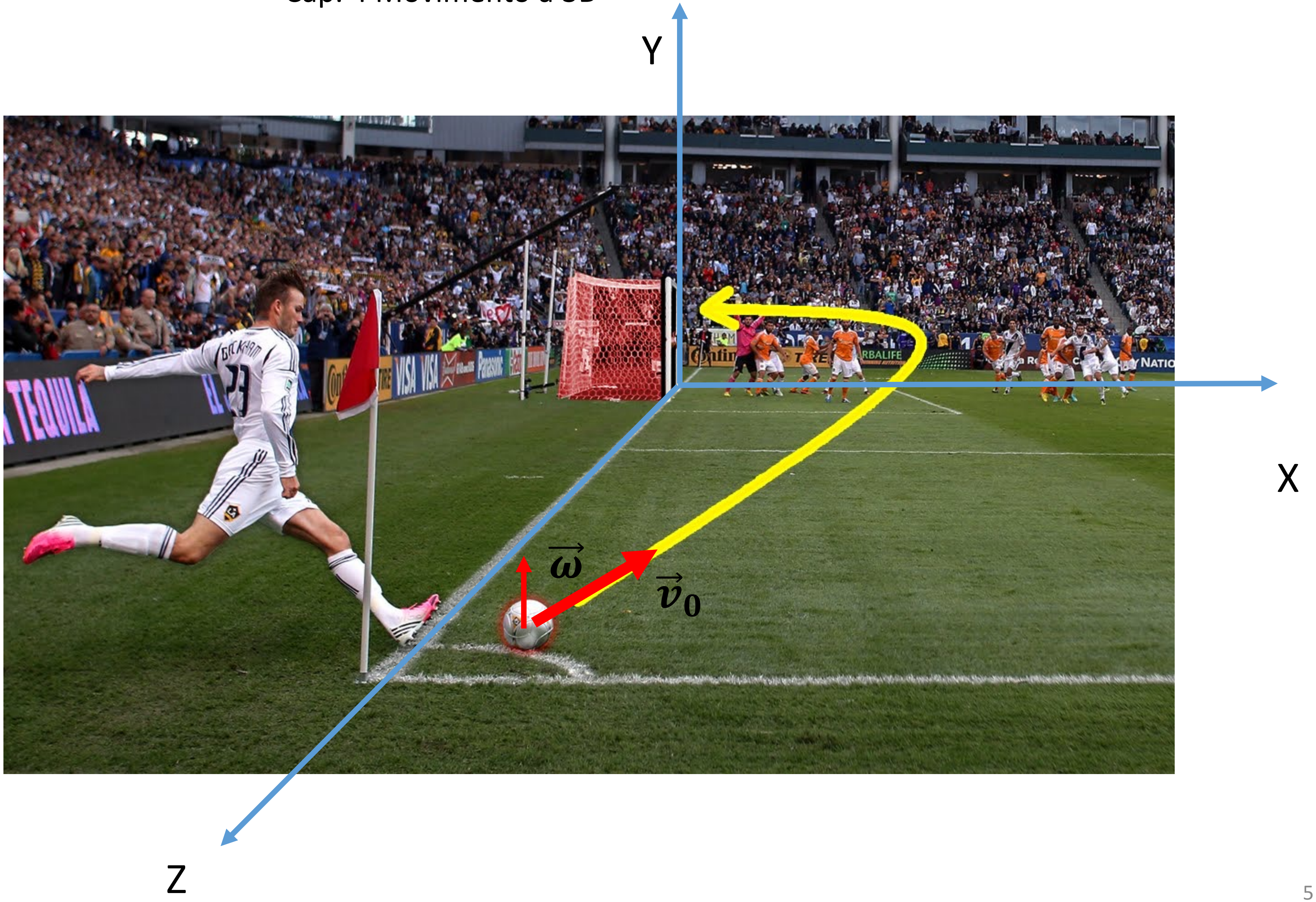
Raio da bola: $r = 11$ cm

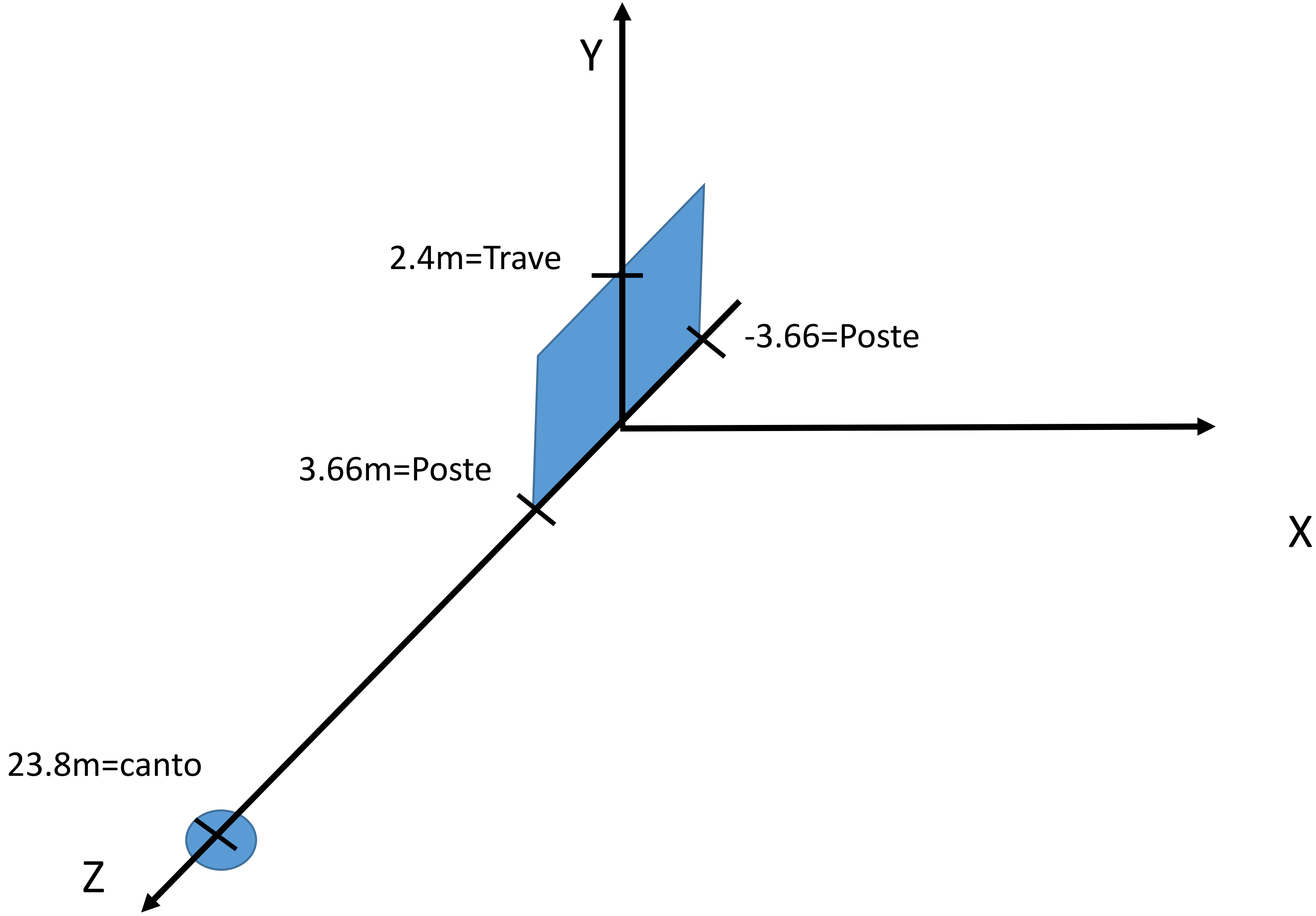
Área transversal da bola: $A = \pi\, r^2$

$\rho_{ar} = 1.225\ \mathrm{kg/m^3}$

$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v}$

$\vec{\omega} \times \vec{v} = (\omega_y v_z, 0, -\omega_y v_x)$ neste caso


Y
X
Z
$\vec{\omega}$
$\vec{v}_0$
TEQUILA
VISA VISA



Golo:

$$x < 0$$

$$-3.66 < z < 3.66 \text{ m}$$

$$0 < y < 2.4 \text{ m}$$

As projeções das forças de peso e resistência do ar são:

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \\ P_z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} F_{res,x} = -m\, D|\vec{v}|v_x \\ F_{res,y} = -m\, D|\vec{v}|v_y \\ F_{res,z} = -m\, D|\vec{v}|v_z \end{cases}$$

O vetor velocidade angular $\vec{\omega} = (0, \omega_y, 0)$ rad/s, faz que a força de Magnus seja

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r\, \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & \omega_y & 0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r \left(\omega_y v_z\, \hat{\imath} - \omega_y v_x \hat{k} \right)$$

e assim as projeções da força de Magnus são:

$$\begin{cases} F_{Magnus,x} = \frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r \omega_y v_z \\ F_{Magnus,y} = 0 \\ F_{Magnus,z} = -\frac{1}{2} A\, \rho_{ar}\, r \omega_y v_x \end{cases}$$

Problemas cap 4   Bola de futebol com rotação

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \\ P_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{res,x} = -m\, D|\vec{v}|v_x \\ F_{res,y} = -m\, D|\vec{v}|v_y \\ F_{res,z} = -m\, D|\vec{v}|v_z \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{Magnus,x} = \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\, r\omega_y v_z \\ F_{Magnus,y} = 0 \\ F_{Magnus,z} = -\frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\, r\omega_y v_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = -D|\vec{v}|v_x + \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\, r\omega_y v_z/m \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \\ a_z = -D|\vec{v}|v_z - \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\, r\omega_y v_x/m \end{cases}$$

Problemas cap 4   Bola de futebol com rotação

$$\begin{cases} a_x = -D|\vec{v}|v_x + \frac{1}{2}A\ \rho_{ar}\ r\omega_y v_z/m \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \\ a_z = -D|\vec{v}|v_z - \frac{1}{2}A\ \rho_{ar}\ r\omega_y v_x/m \end{cases}$$

Dados:

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 23.8m)$

$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = (25, 5, -50)$ m/s

$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 400\ \mathrm{rad/s}, 0)$

$t_0 = 0\ s$

Massa da bola $m = 0.45$ kg

Raio da bola: $r = 11$ cm

Área transversal da bola: $A = \pi\, r^2$

Densidade do ar $\rho_{ar} = 1.225\ \mathrm{kg/m^3}$

Dados:

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0,0,23.8m)$

$\vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right) = (25,5,-50)$ m/s

$\vec{\omega} = \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right) = (0, 400 \text{ rad/s}, 0)$

$t_0 = 0\ s$

Massa da bola = 0.45 kg

Velocidade terminal da bola =100 km/h

Raio da bola: $r = 11$ cm

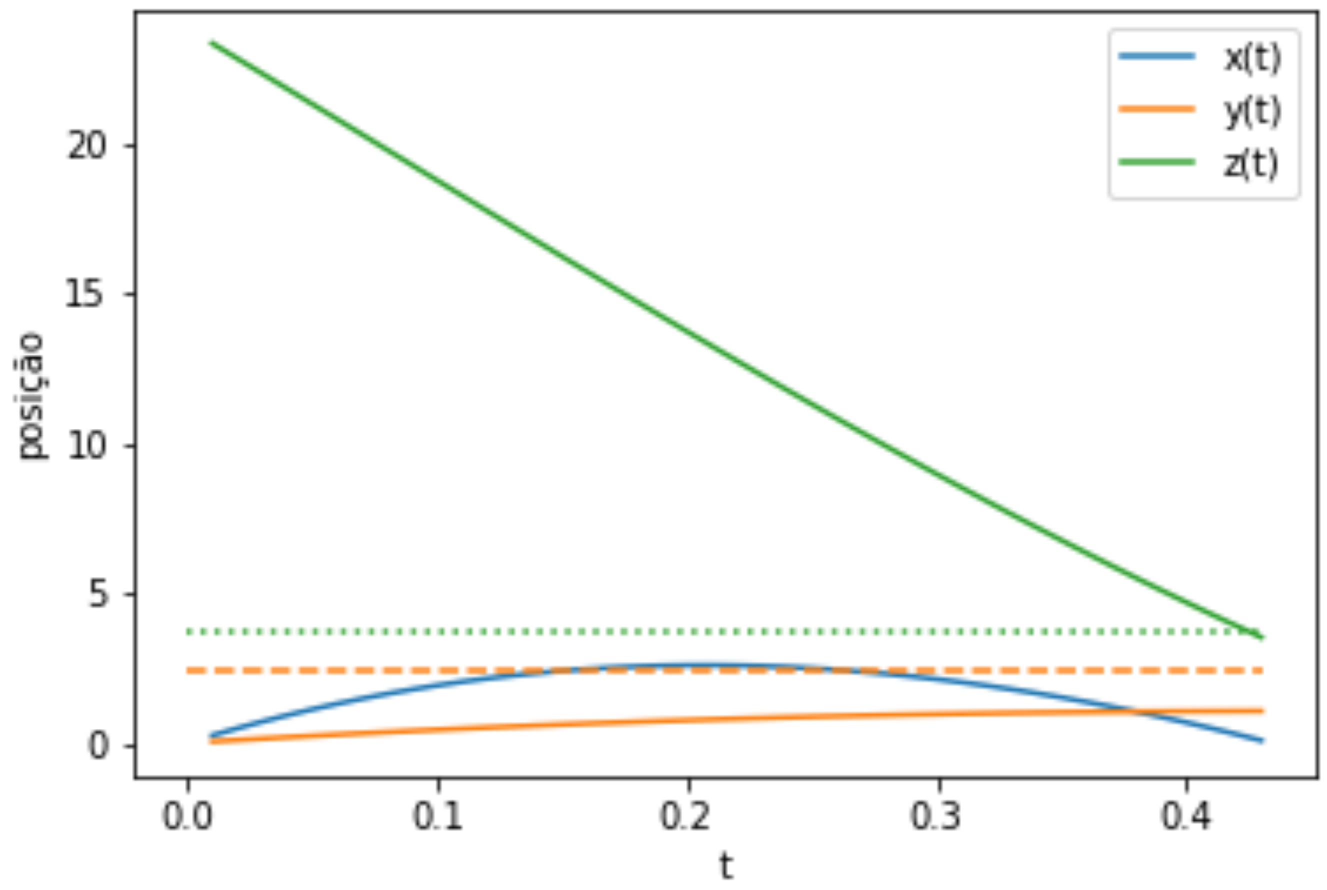
Área transversal da bola: $A = \pi\, r^2$

$\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$

$$\begin{cases} a_x = -D|\vec{v}|v_x \ + \frac{1}{2}A\ \rho_{ar}\ r\omega_y v_z \\ a_y = -g\ - D|\vec{v}|v_y \\ a_z = -m\ D|\vec{v}|v_z - \frac{1}{2}A\ \ \rho_{ar}\ r\omega_y v_x \end{cases}$$

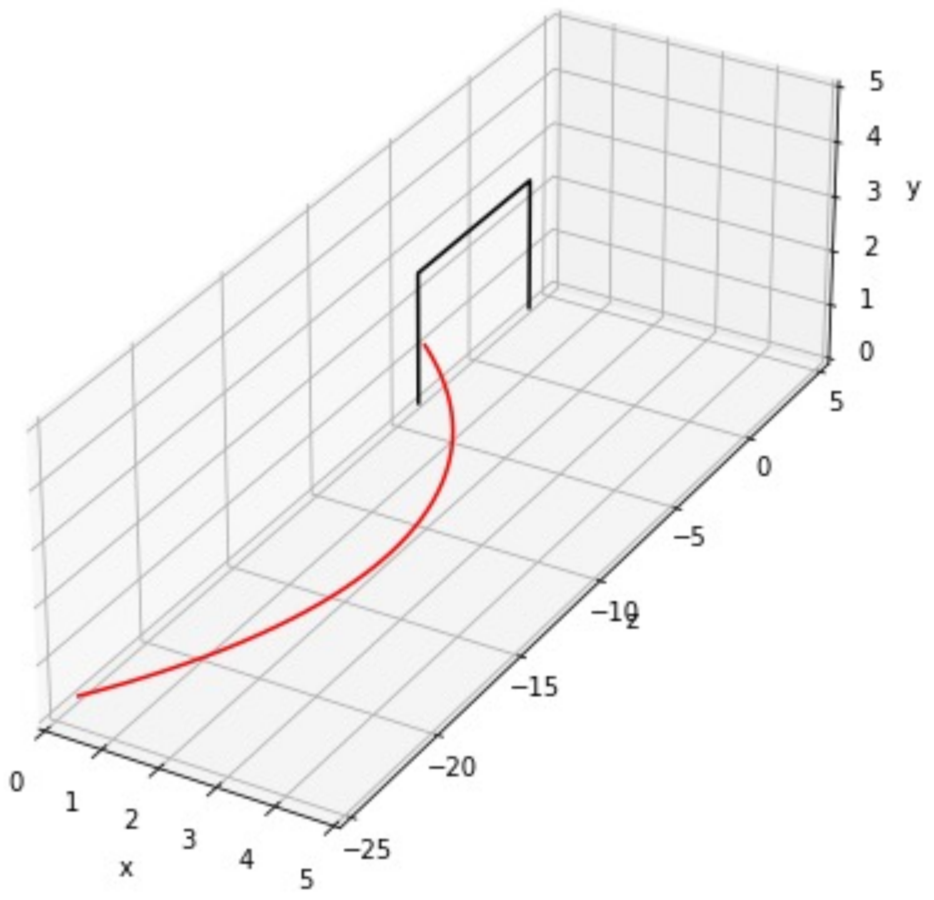
Solução:

```
dres=g/vt**2   #coeficiente para resistência do ar
mag=0.5*1.225*0.11*np.pi*0.11**2 #coeficiente força Magnus
ómega_y = 400 #componente y da rotação

for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2+vy[i]**2+vz[i]**2) #|v|
    amx=mag*ómega_y*vz[i]/m  #força de Magnus - x
    amz=-mag*ómega_y*vx[i]/m #força de Magnus – z

    ax[i]=-dres*vv*vx[i]+amx
    ay[i]=-g-dres*vv*vy[i]
    az[i]=-dres*vv*vz[i]+amz

    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    vz[i+1]=vz[i]+az[i]*dt

    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
    z[i+1]=z[i]+vz[i]*dt
```



Golo:

$$x < 0$$
$$-3.66 < z < 3.66 \text{ m}$$
$$0 < y < 2.4 \text{ m}$$



Golo:

$x < 0$

$-3.7 < z < 3.7$ m

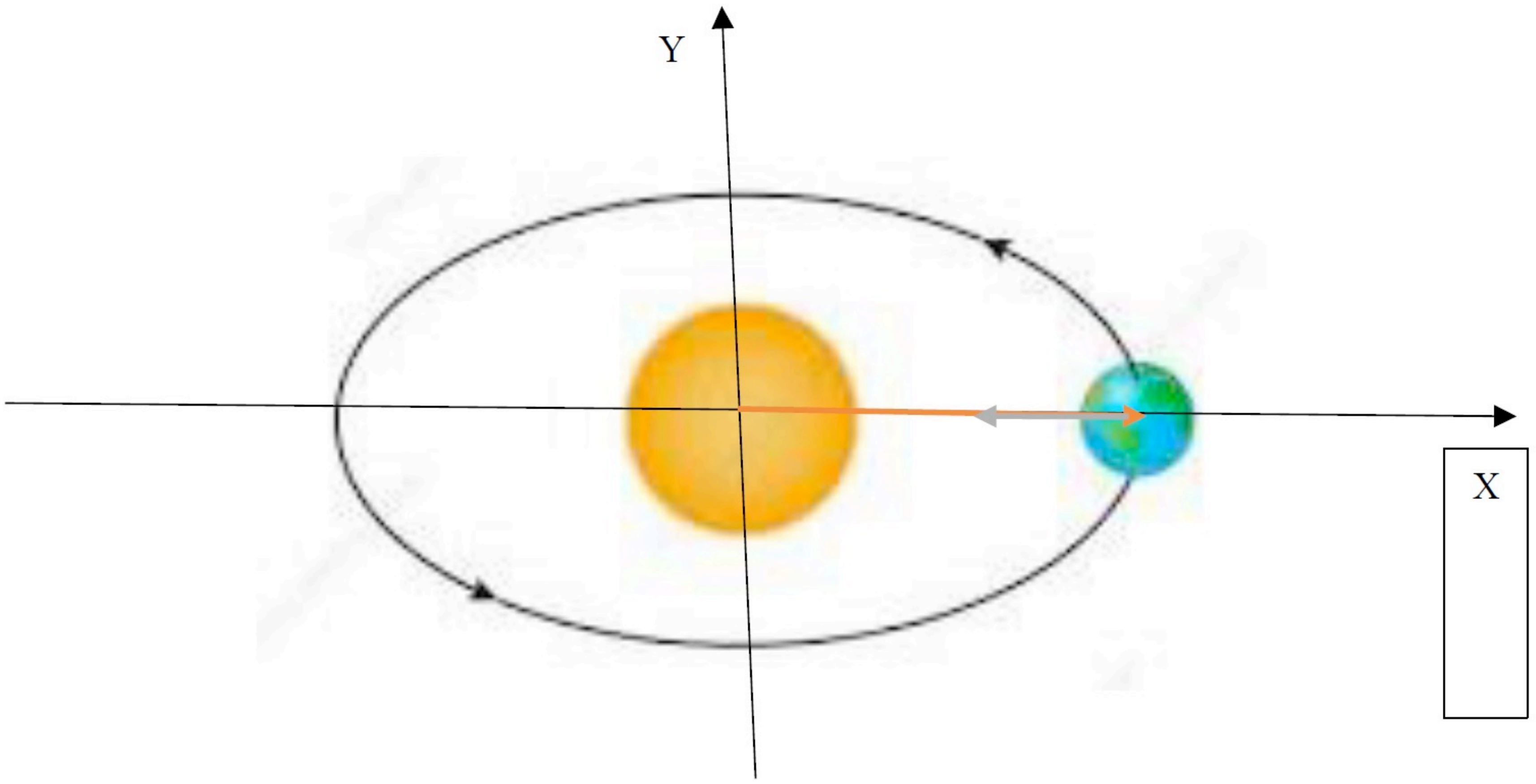
$0 < y < 2.4$ m

É GOLO!

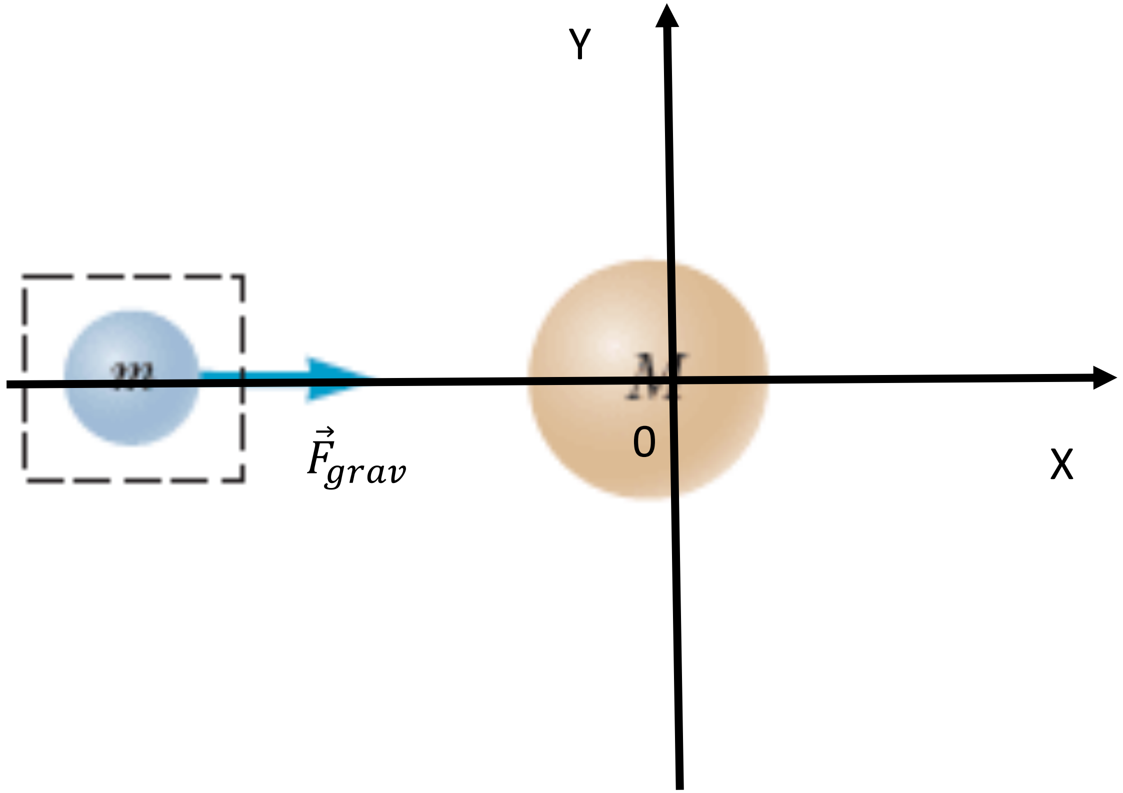
Código plot 3D:

```
plt.figure(figsize=(8,8))
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot3D(x[x>=0],-z[x>=0],y[x>=0], 'r')
goalx = [0,0,0,0]
goaly = [0,2.4,2.4,0]
goalz = [-3.66,-3.66,3.66,3.66]
ax.plot3D(goalx,goalz,goaly, 'k')
ax.set_xlim3d(0, 5)
ax.set_ylim3d(-25, 5)
ax.set_zlim3d(0, 5)
ax.set_box_aspect((2,6,2))
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('z')
ax.set_zlabel('y')
```

Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.



Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.



Força de gravidade

$\vec{F}_{grav} = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\,\hat{r}$ em que $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

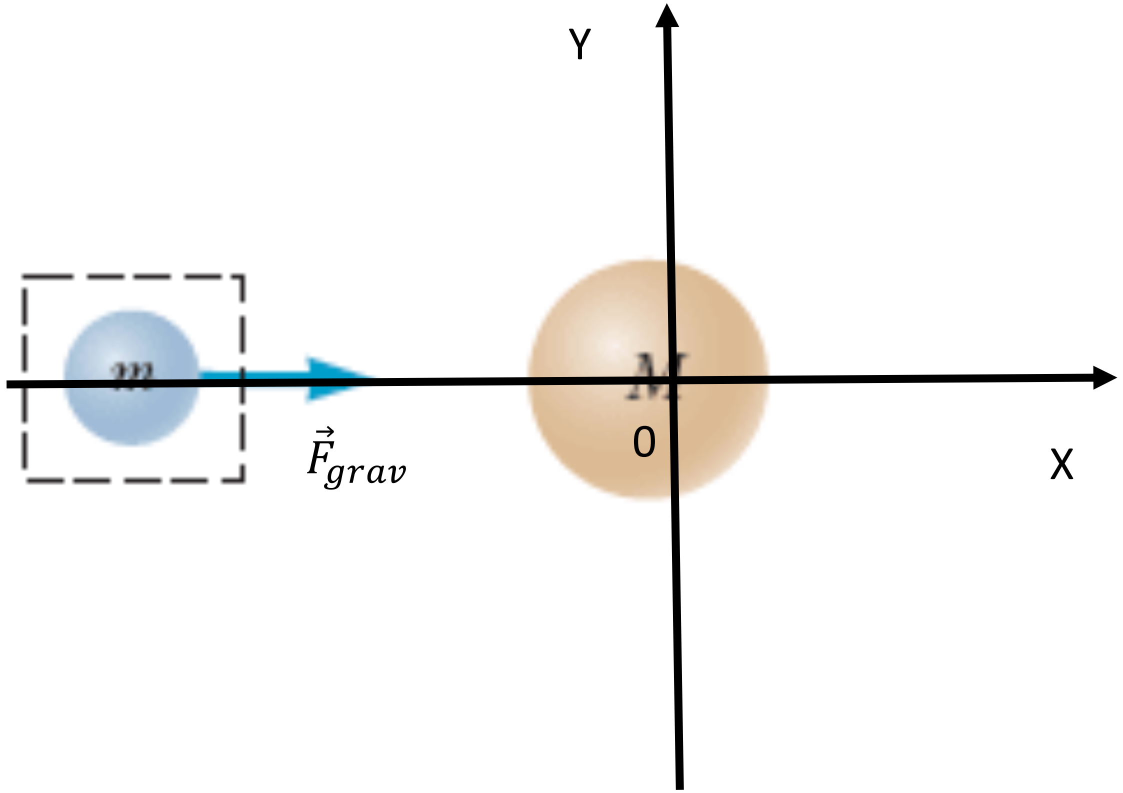
$\vec{r}$ é o vetor com origem no Sol e termina na Terra

$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$

$$\vec{F}_{grav} = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$= -\,G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}(\,x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}) = (-G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}x, -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}y\,)$$

Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.



Condições iniciais

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (-distancia\ ao\ sol, 0)$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = \left(0, -2\frac{pi}{ano} * distancia\ ao\ sol\right)$$

Sistema Astronómico de unidades

Grandeza	Símbolo	Definição	Valor no SI	Conversão do SI
Massa	M	Massa do Sol	$1{,}989 \times 10^{30}$ kg	$1\ \text{kg} = 5{,}028 \times 10^{-31}\,\text{M}$
Distância	AU	Distância média da Terra ao Sol	$1{,}498 \times 10^{11}$ m	$1\ \text{m} = 6{,}676 \times 10^{-12}\,\text{AU}$
Tempo	ano	Período da Terra em volta do Sol	$3{,}15 \times 10^{7}\,\text{s}$	$1\ \text{s} = 3{,}17 \times 10^{-8}\,\text{ano}$

Neste sistema, a constante de gravitação é

$$G = 6.67408 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) = 6.67408 \times 10^{-11} \frac{(6.676\times10^{-12}\ \text{AU})^3}{5.028\times10^{-31}\ \text{M}\ (3.17\times10^{-8}\ \text{ano})^2} = 4\pi^2\ \text{AU}^3/(\text{M} \cdot \text{ano}^2),$$

a unidade de energia é 5.50×10^{38} J e a unidade de velocidade é 4718.48 m/s.

Condições iniciais neste sistema de unidades

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (-1{,}0)$ AU

$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (0, -2\pi)$ AU/ano

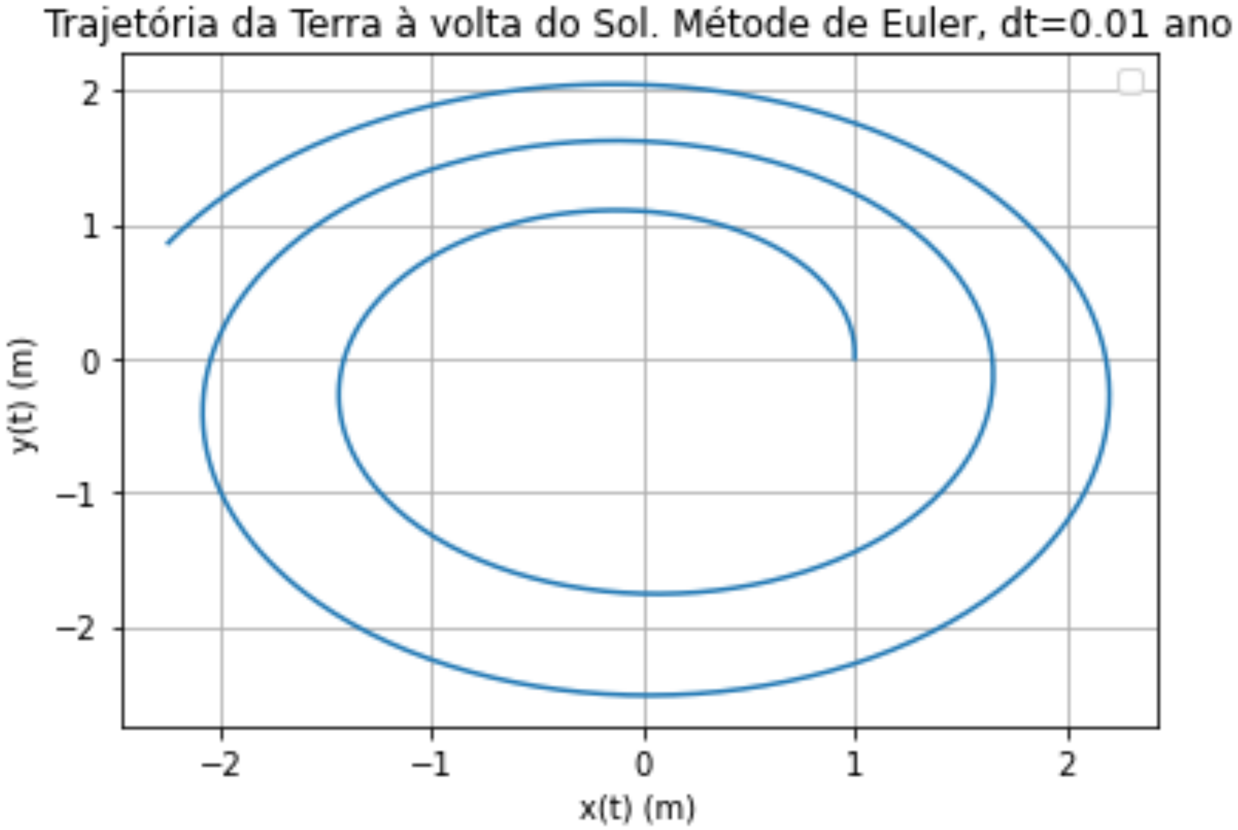
tornam-se muito mais simples.

Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.

$$\vec{F}_{grav} = \left(-G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}\,x,\ -G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}\,y\,\right)$$

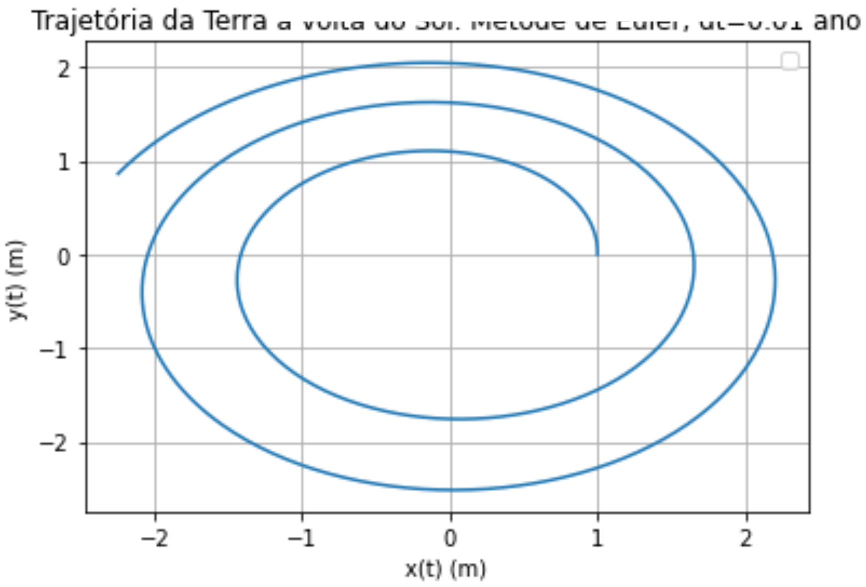
Integração pelo método de Euler

```
t[0]=0
vx[0]=v0x
vy[0]=v0y
x[0]=x0
y[0]=y0

for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```



Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.

$$\vec{F}_{grav} = \left(-G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}x,\ -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}y\right)$$



Método de Euler

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\ (t)\times\delta t$$
$$v_x(t+\delta t) \approx x(t) + a_x\ (t)\times\delta t$$

Método de Euler-Cromer (ou Euler modificado)

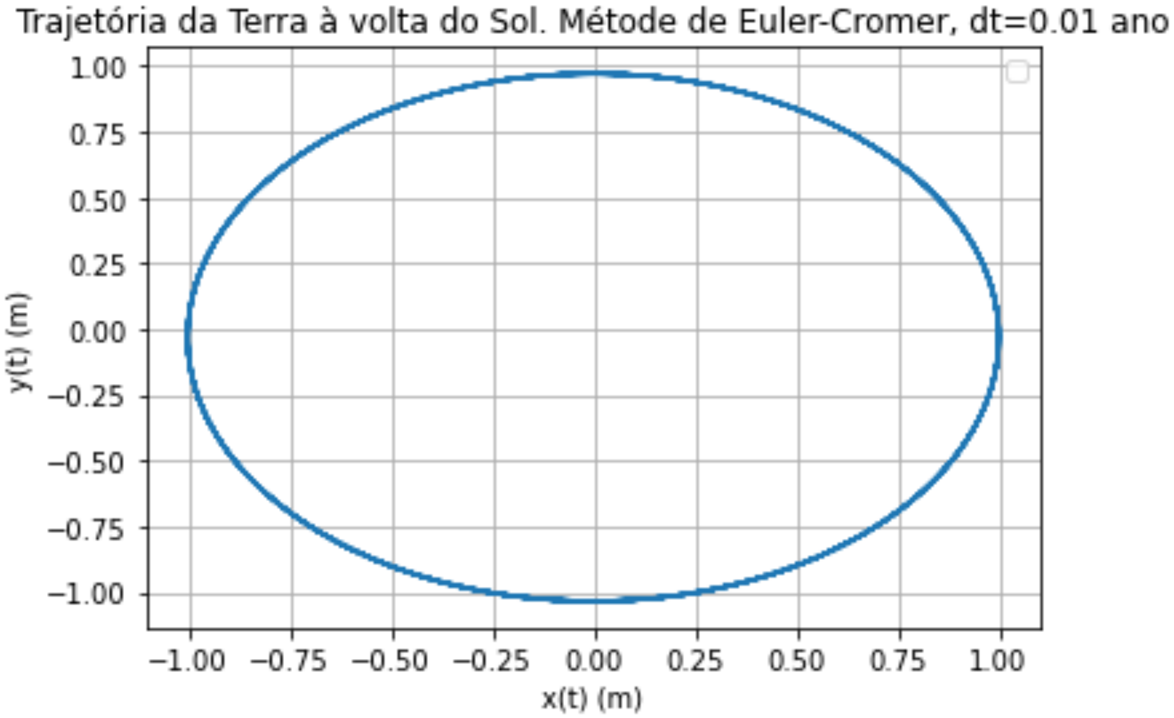
$$v_x(t+\delta t)\ \approx x(t) + a_x\ (t)\times\delta t$$
$$\boldsymbol{x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x(t+\delta t)\times\delta t}$$

Sistema Terra-Sol. Consideremos o Sol como fixo e na origem dos eixos OX e OY.

$$\vec{F}_{grav} = \left(-G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}\,x,\, -G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^3}\,y\,\right)$$

Integração pelo método de <u>Euler-Cromer</u>

```
t[0]=0
vx[0]=v0x
vy[0]=v0y
x[0]=x0
y[0]=y0

for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i+1]*dt
```



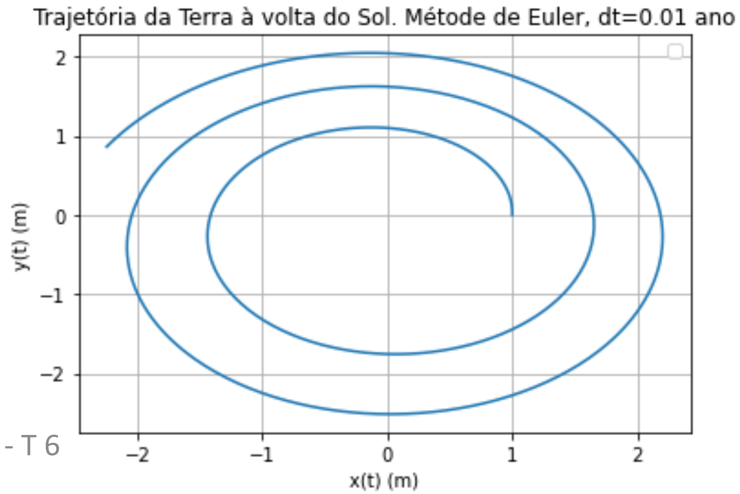
Produz órbitas fechadas

Métodos de Integração

Integração pelo método de Euler

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt x
```

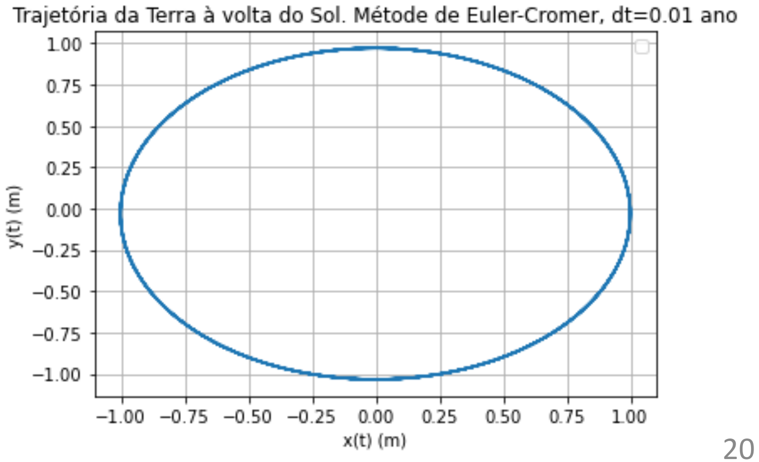
$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\ (t)\times\delta t$$



Integração pelo método de Euler-Cromer

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i+1]*dt x
```

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\ (t+\delta t)\times\delta t$$

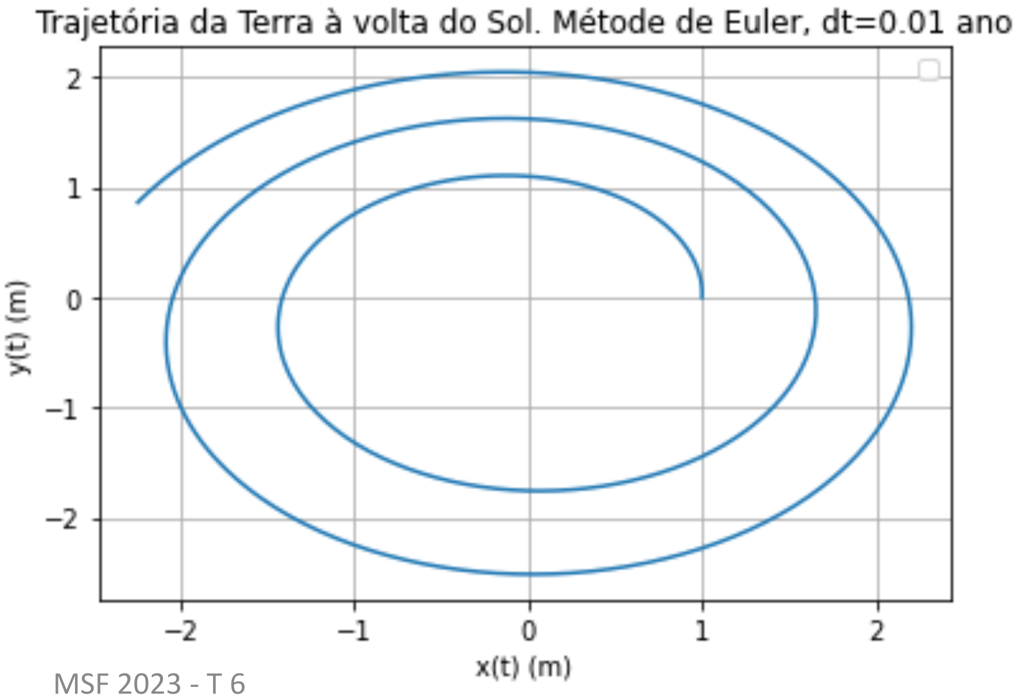


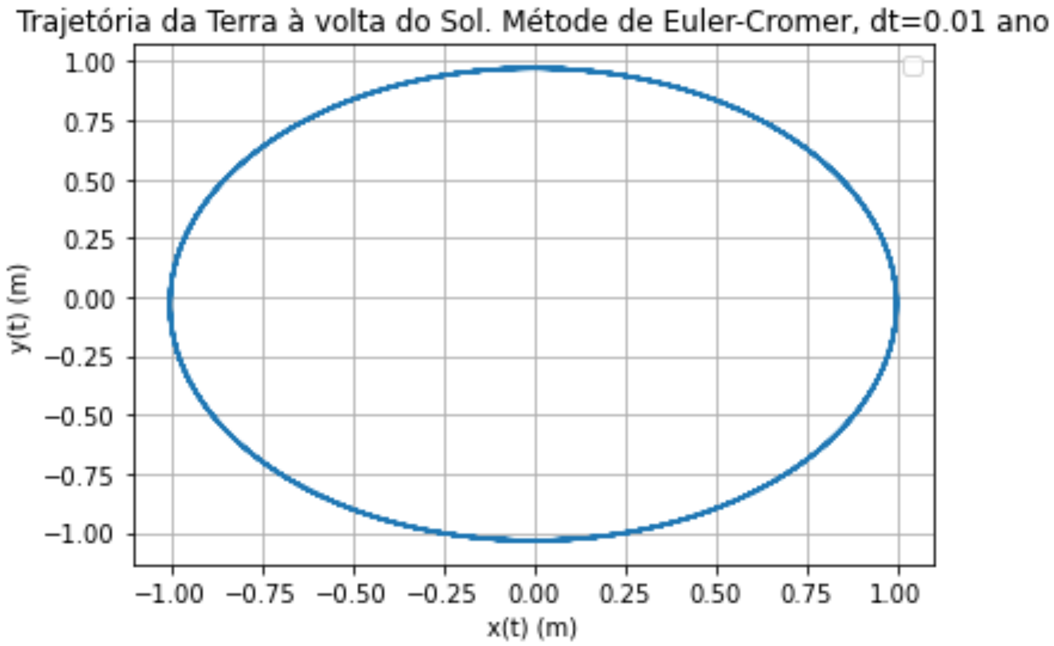
Métodos de Integração

O método de <u>Euler-Cromer</u> :

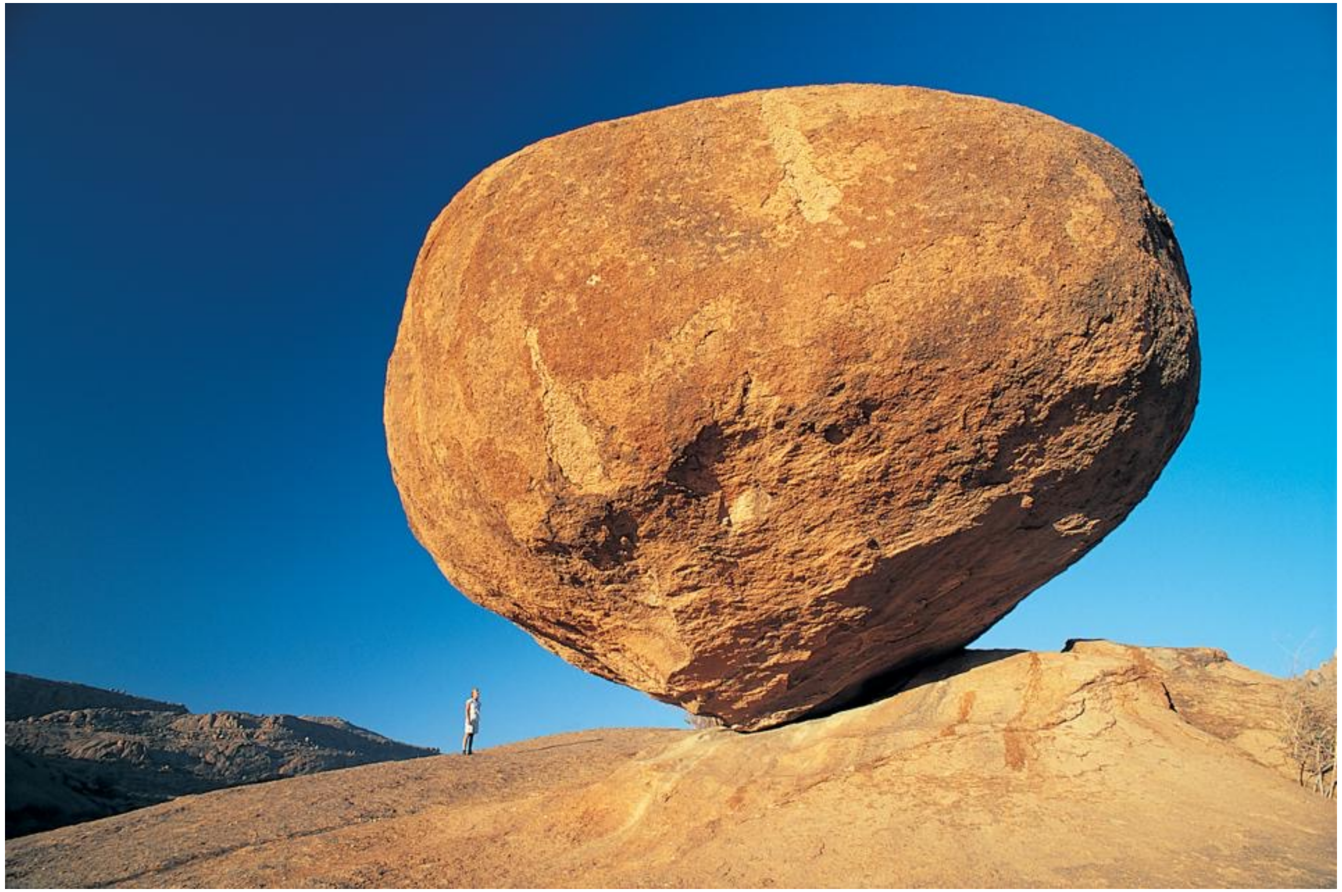
- Mesmo erro de truncatura que o método de Euler
- Mas para movimentos periódicos, o erro anula-se ao fim de um período
- Conserve melhor a energia

Método de Euler mediocre para movimentos periódicos.





Cap. 5 Trabalho e Energia



$$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \vec{v}(t) \quad \Longrightarrow \vec{r}(t)$$

obtemos <u>a velocidade e a posição em função do tempo</u>

Equivalente à equação fundamental da dinâmica:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C m\,\vec{a}\cdot d\vec{r} \qquad , d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$$

ao longo da trajetória C.

A 1D: $$\int_{x_0}^{x_1} F_x\,dx = \int_{x_0}^{x_1} m\,a_x\,dx$$

Esta formulação permite determinar **a relação da velocidade com a posição**, (mesmo sem sabermos as relações temporais), pois a força em muitos casos depende da posição

Teorema Trabalho – Energia

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$$

A partir da posição C_0 até à posição C_1.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \textbf{Trabalho} = W_{0,1}$$

$$\frac{1}{2} m\, |\vec{v}|^2 = \textbf{Energia cinética}$$

Se soubermos $|\vec{v}_0|$ e o trabalho efetuado $W_{0,1}$, obtemos $|\vec{v}_1|$

Teorema Trabalho – Energia:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\int_C m\,\vec{a}\cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r}=\frac{d\vec{r}}{dt}dt=\;\vec{v}\,dt \qquad \frac{d}{dt}[v_x(t)^2]=2\,\frac{d\,v_x(t)}{dt}\,v_x(t)$$

$$\int_C m\,\vec{a}\cdot d\vec{r} \;=\int_{t_0}^{t_1} m\,\vec{a}(t)\cdot\vec{v}\,dt=\int_{t_0}^{t_1} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt=\int_{t_0}^{t_1} m\left(\frac{d\,v_x}{dt}\,v_x+\frac{d\,v_y}{dt}\,v_y+\frac{d\,v_z}{dt}v_z\right)dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} m\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}[v_x(t)^2]+\frac{d}{dt}\left[v_y(t)^2\right]+\frac{d}{dt}[v_z(t)^2]\right)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)\Big|_{t_0}^{t_1}\;=\frac{1}{2}m\,|\vec{v}|^2\Big|_{t_0}^{t_1}=\frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2-\frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2-\frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2$$

Trabalho feito no sistema é igual à energia cinetica adicionada