Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

13ª Aula Teórica

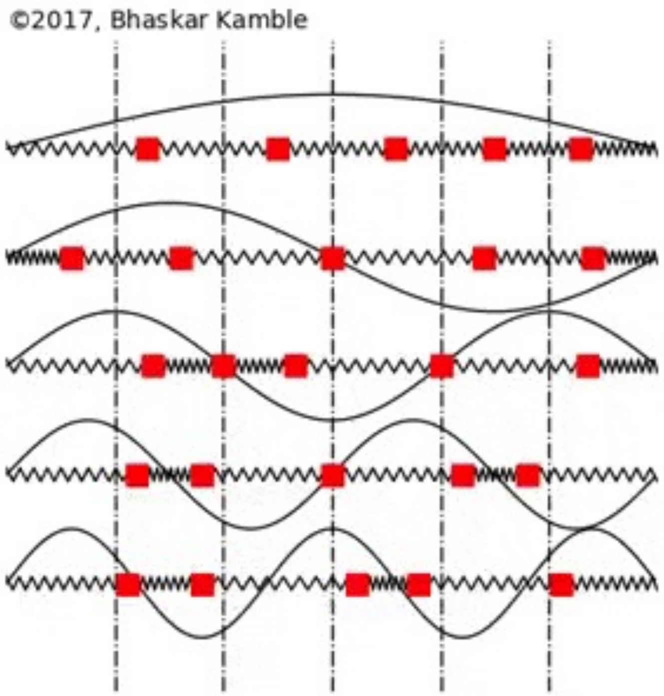
Sumário:

Cap. 9
Osciladores acoplados: Modos Normais.
Osciladores acoplados forçados.
Resolução de problemas.

Bibliografia:

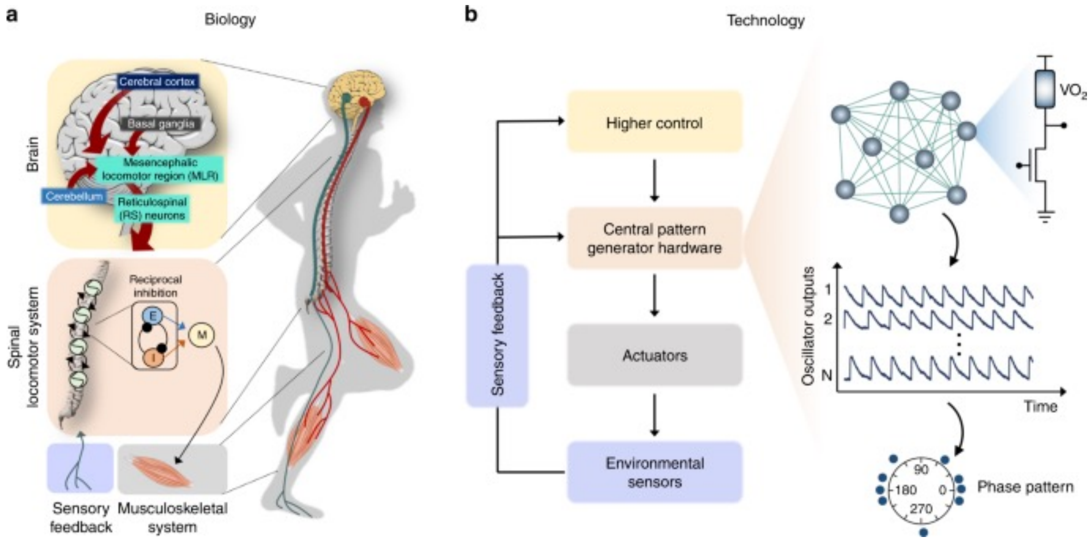
Capítulo 9

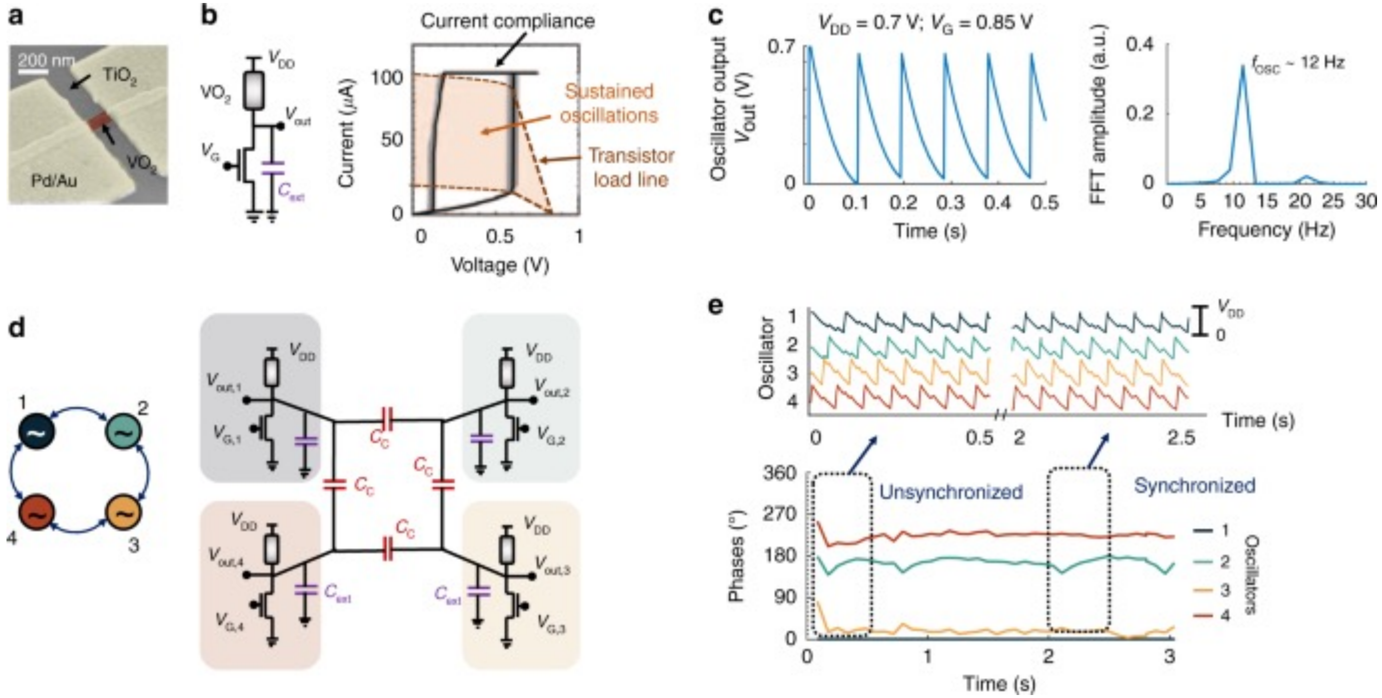
Osciladores Acoplados e Ondas



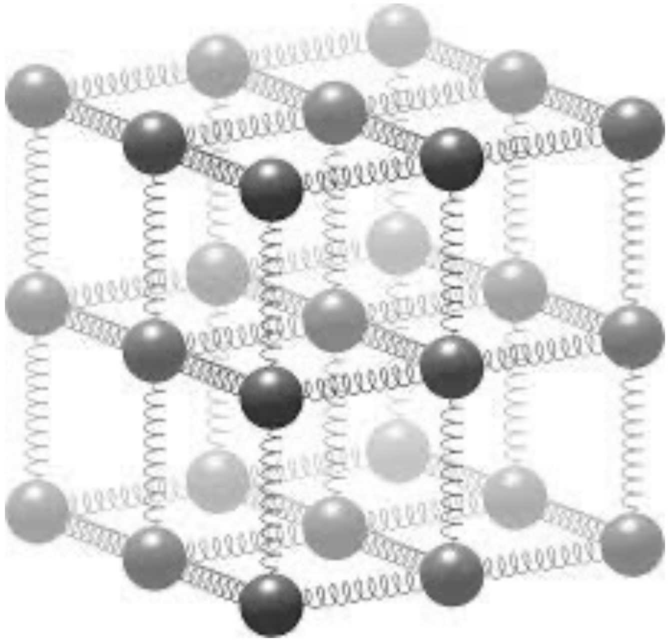
[Waves and oscillations (bhaskar-kamble.github.io)](https://bhaskar-kamble.github.io)

Programmable coupled oscillators for synchronized locomotion,
Dutta et al., *Nature Communications*, 2019



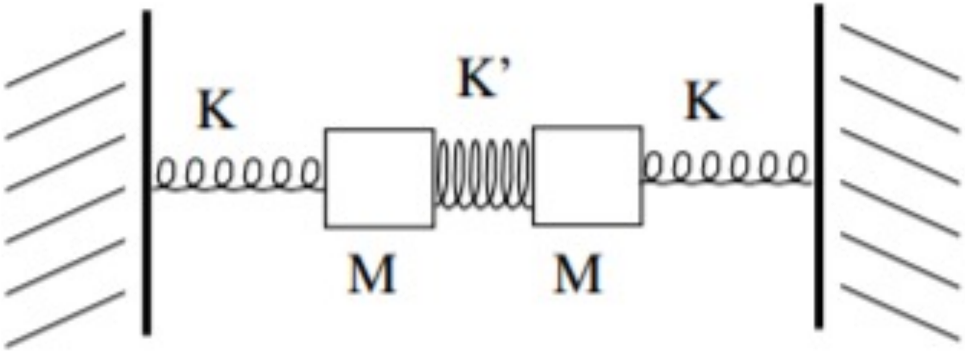


Modelos da matéria



Osciladores Acoplados

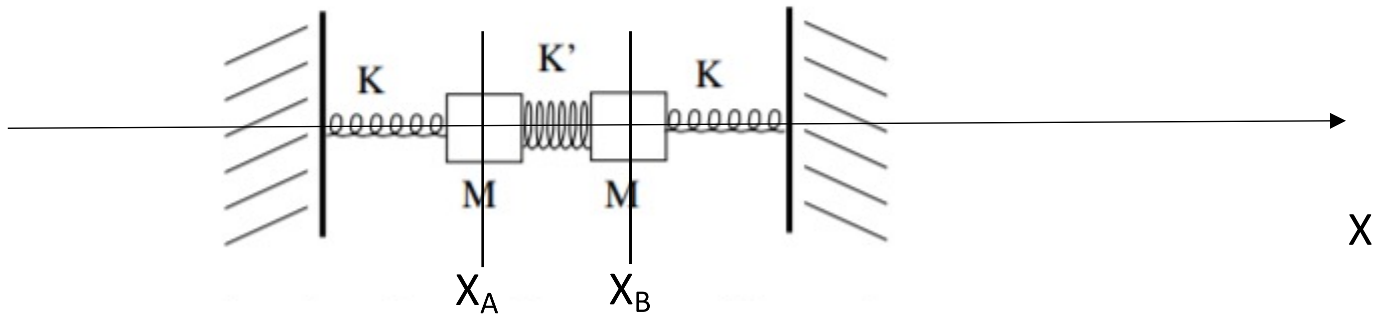
2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k’, e
Ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k



Como são as oscilações? Que frequências?

Osciladores Acoplados

2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k’, e ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k.
Como são as oscilações? Que frequências?

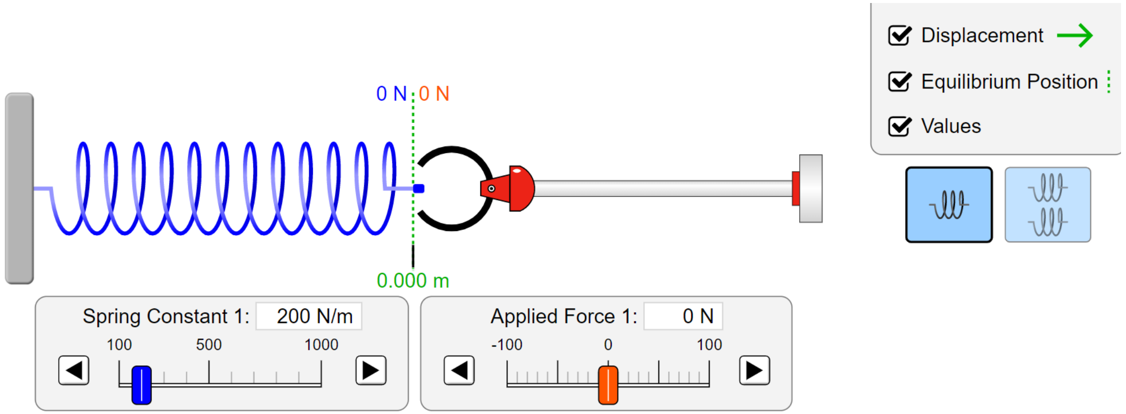


<u>Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 2 corpos.</u>

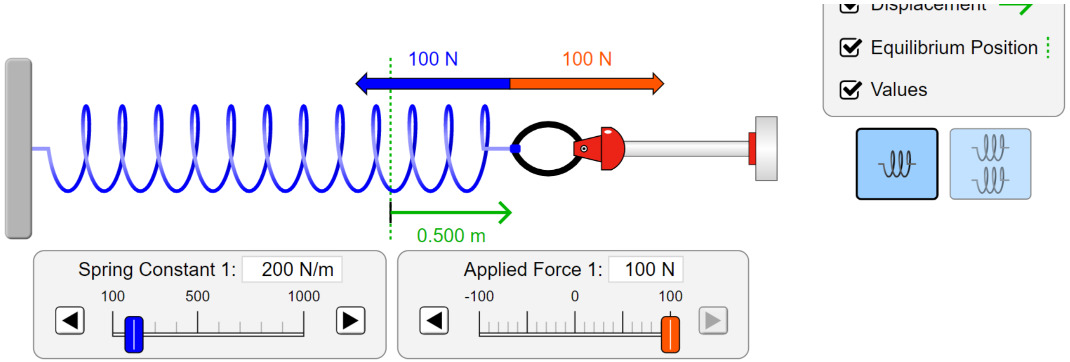
- Que forças aplicada a cada um dos corpos?
- Equação dinâmica de Newton para cada corpo
- Resolver a eq. dinâmica pelo método de Euler-Cromer (oscilações)

Mola: Posição de equilíbrio e comprimento da mola

Equilíbrio:
Posição x_{eq} e comprimento da mola l_{eq}



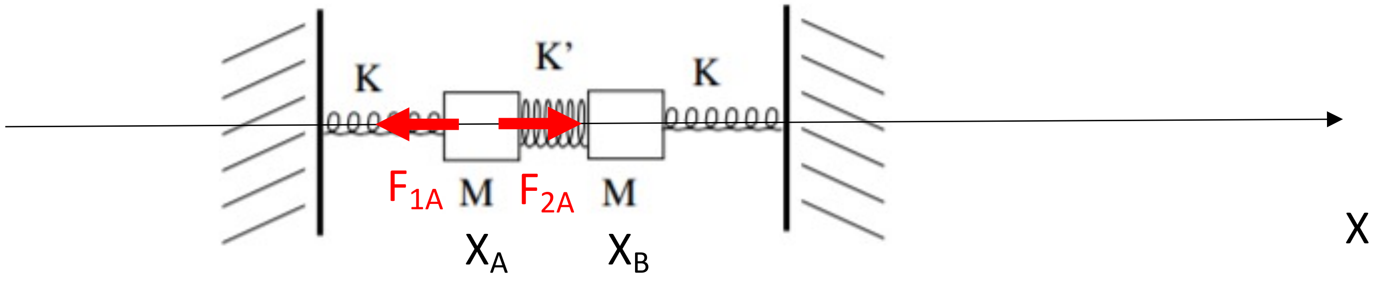
Mola distendida:
O afastamento $x - x_{eq}$ à posição de equilíbrio é quanto o comprimento da mola l aumentou
$x - x_{eq} = l - l_{eq}$



https://phet.colorado.edu/sims/html/hookes-law/latest/hookes-law_en.html

Osciladores Acoplados

2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k’, e
Ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k



Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 2 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

Que forças aplicada a cada um dos corpos?

Corpo A:

$$F_{1A} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right)$$

$$F_{2A} = +k'(x_B - x_A)$$

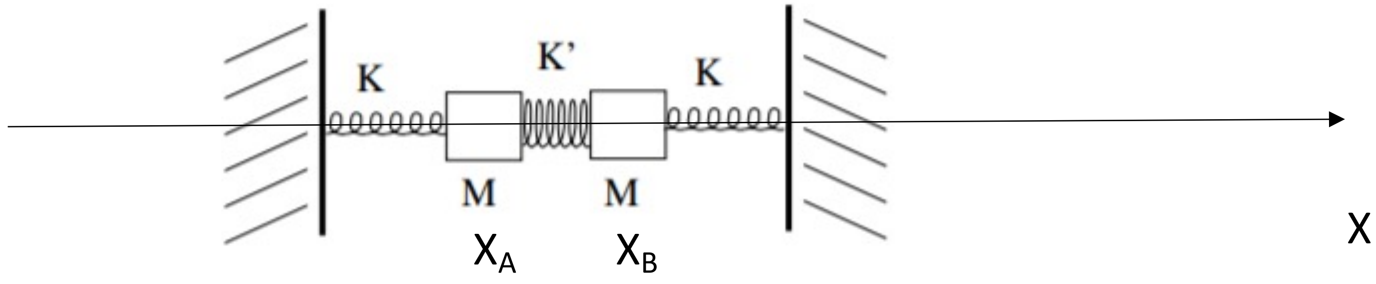
Corpo B:

$$F_{3B} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right)$$

$$F_{2B} = -k'(x_B - x_A) = -\,F_{2A}$$

Osciladores Acoplados

2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k’, e
Ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k



Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 2 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

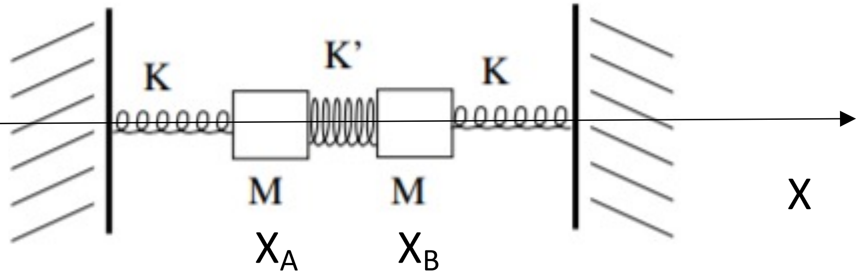
<u>Equação dinâmica de Newton para cada corpo</u>

Corpo A $$m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left[\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right]$$

Corpo B $$m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left[\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right]$$

Note: as equações estão acopladas: Na equação do corpo A aparece a coordenada do corpo B

Osciladores Acoplados



2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k', e
Ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq})\, - k'\,\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\,\right)$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\,(x_B - x_{Beq}) + k'\,\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right)$

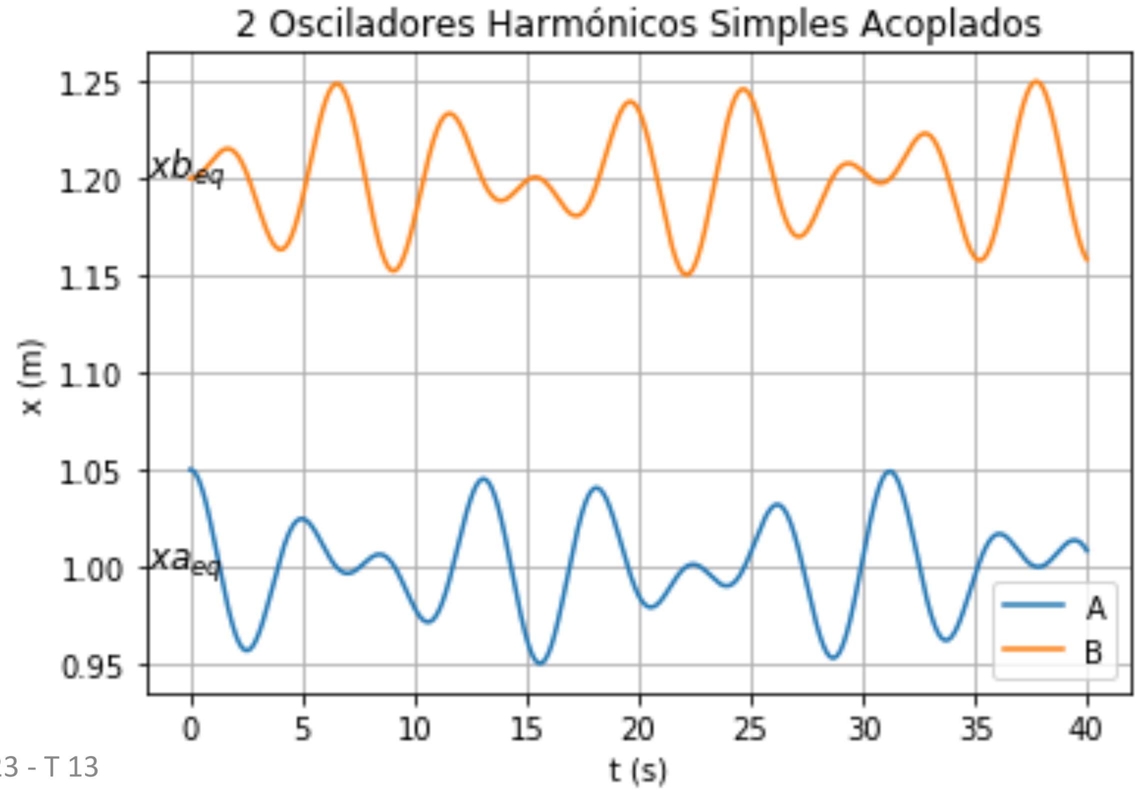
Cálculo Numérico:

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1\ \mathrm{kg}$

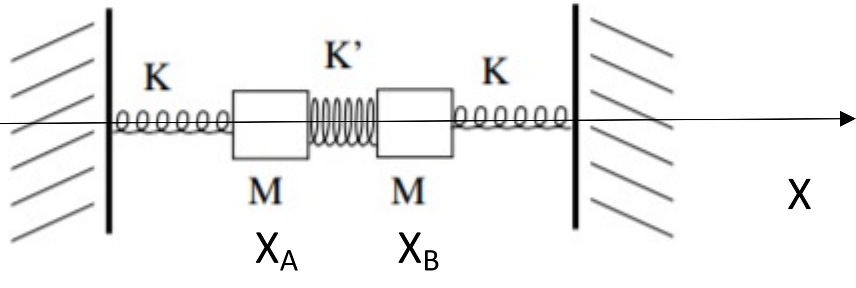
$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\ \ x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m}$

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05\ \mathrm{m}$
$x_{B0} = x_{Beq}$
$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

Movimento não parece periódico.
Temos de aumentar o instante final para
se verificar se existe repetição.



Osciladores Acoplados



2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k', e
Ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k

Corpo A $\quad m\,\dfrac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) - k'\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right)$

Corpo B $\quad m\,\dfrac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\,(x_B - x_{Beq}) + k'\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right)$

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg ; $x_{Aeq} = 1.0$ m $\ x_{Beq} = 1.2$ m

<u>Condições iniciais:</u>

Igualmente afastados das suas posições de equilíbrio

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m

$x_{B0} = x_{Beq} + 0.05$ m

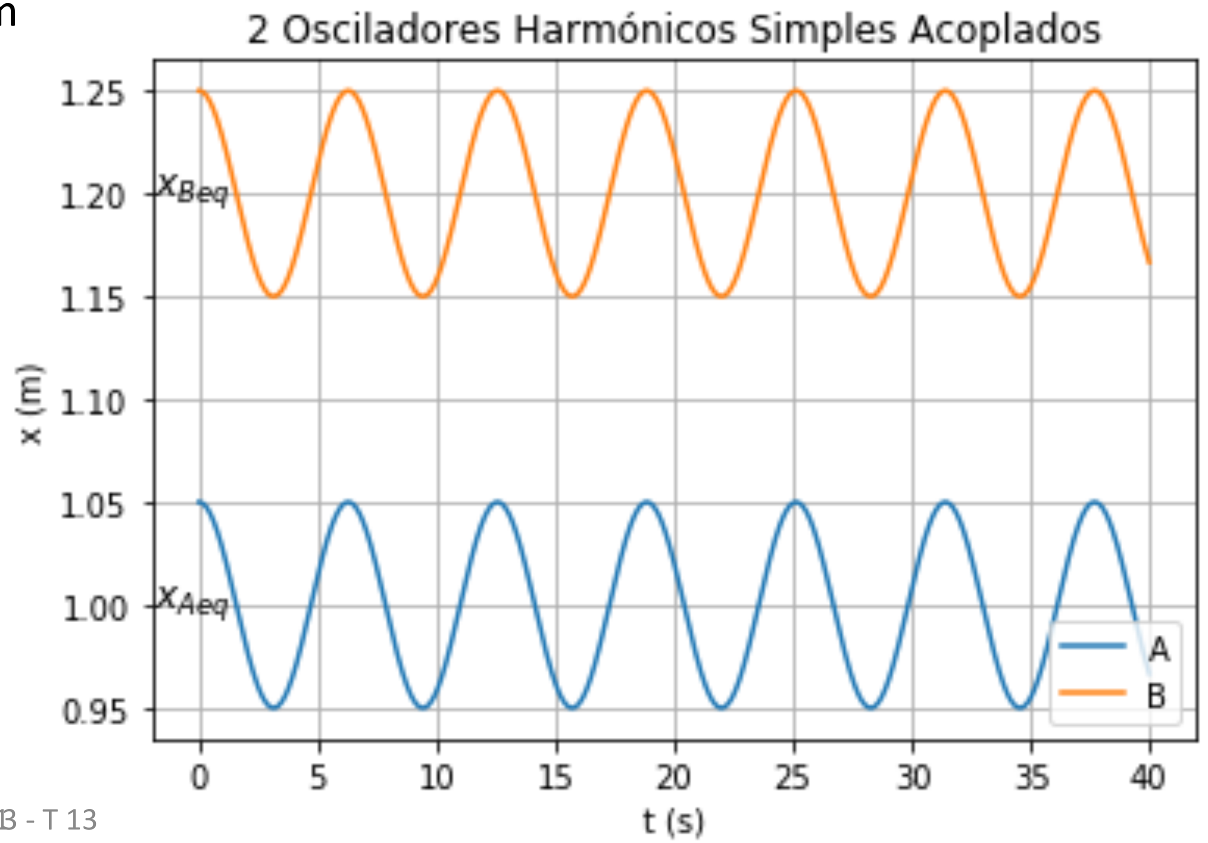
$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

A mola do meio não interfere

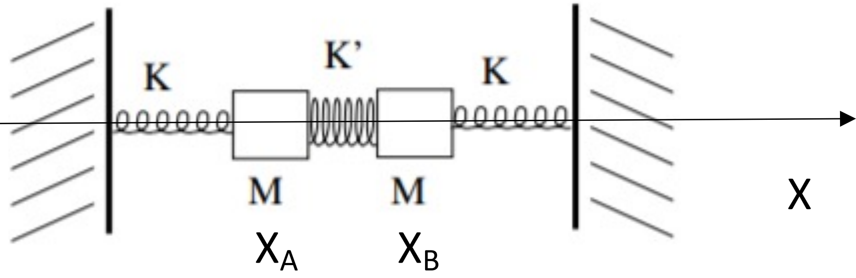
Movimento periódico harmónico

T= 6.283 s $\quad A = x_{eq} + 0.05$ m

$\omega_1 = 1$ rad/s



Osciladores Acoplados



2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k', e
Ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg ; $x_{Aeq} = 1.0$ m $\ x_{Beq} = 1.2$ m

<u>Condições iniciais:</u>

Igualmente afastados das suas posições de equilíbrio

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m

$x_{B0} = x_{Beq} - 0.05$ m

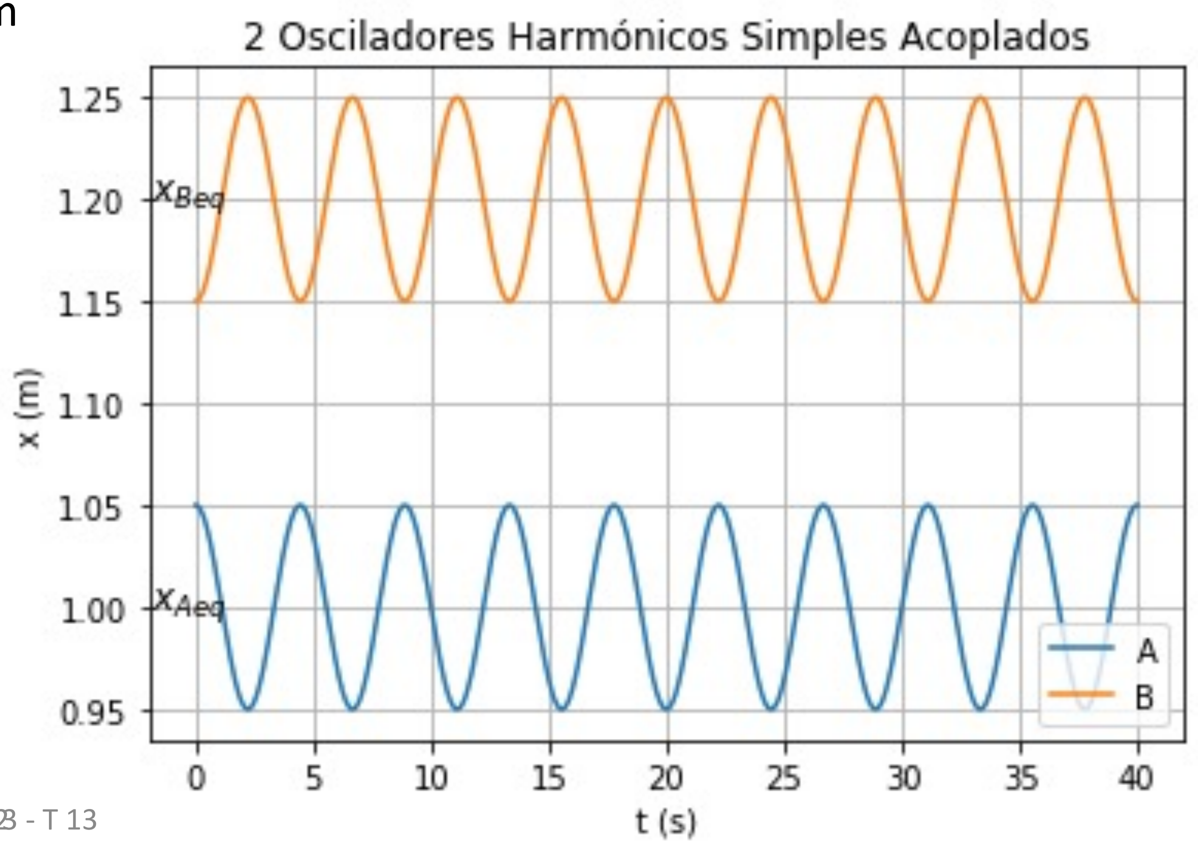
$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

Corpos com movimento em espelho

Movimento periódico harmónico

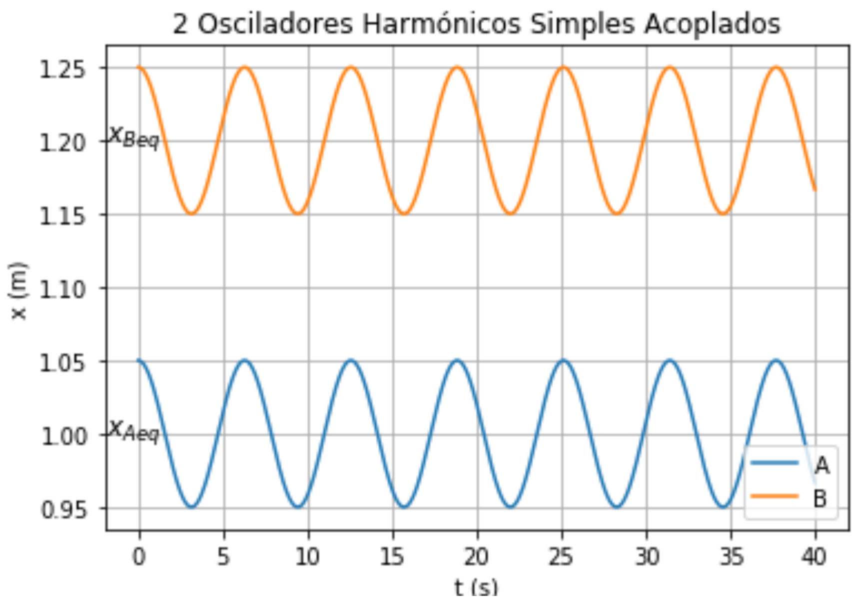
T= 4.442 s $\quad A = x_{eq} + 0.05$ m

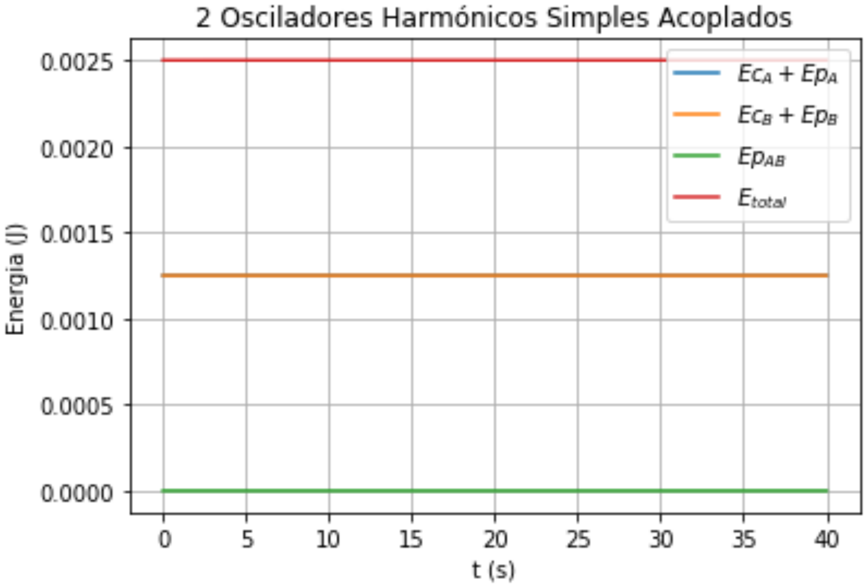
$\omega_2 = 1.414$ rad/s



Modos Normais

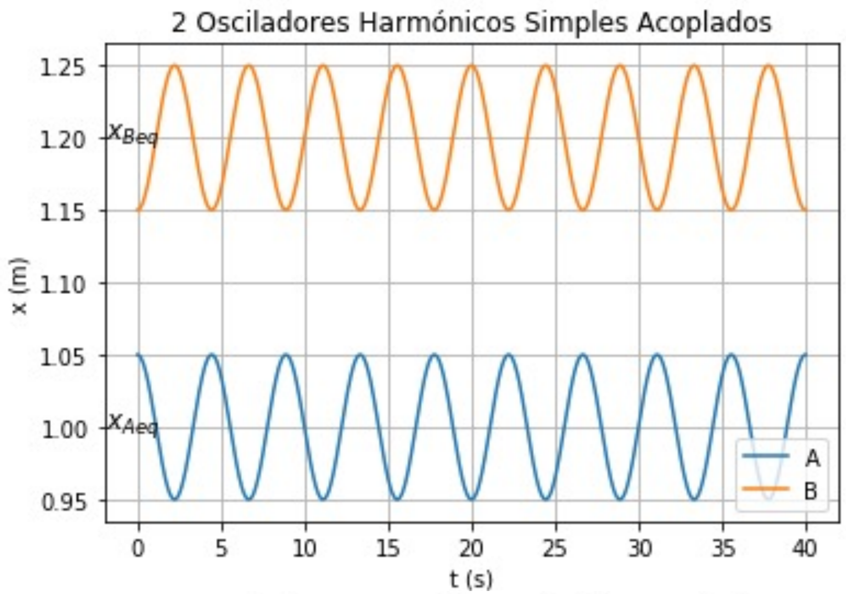
Modo normal 1 $\omega_1 = 1$ rad/s

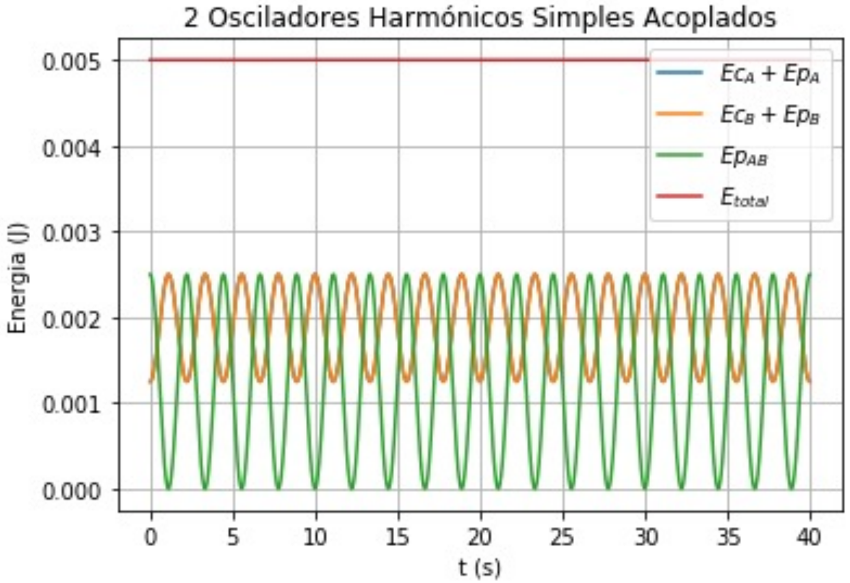




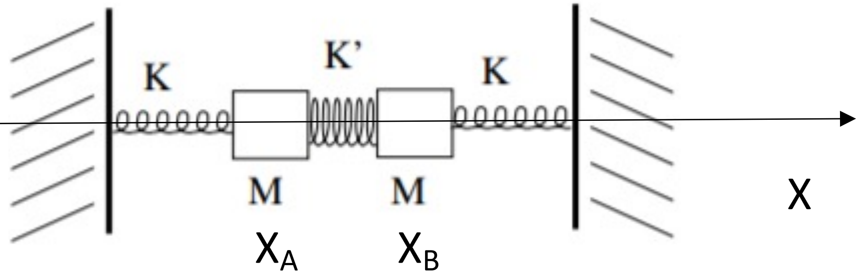
movimento sinusoidal simples

Modo normal 2 $\omega_2 = 1.414$ rad/s



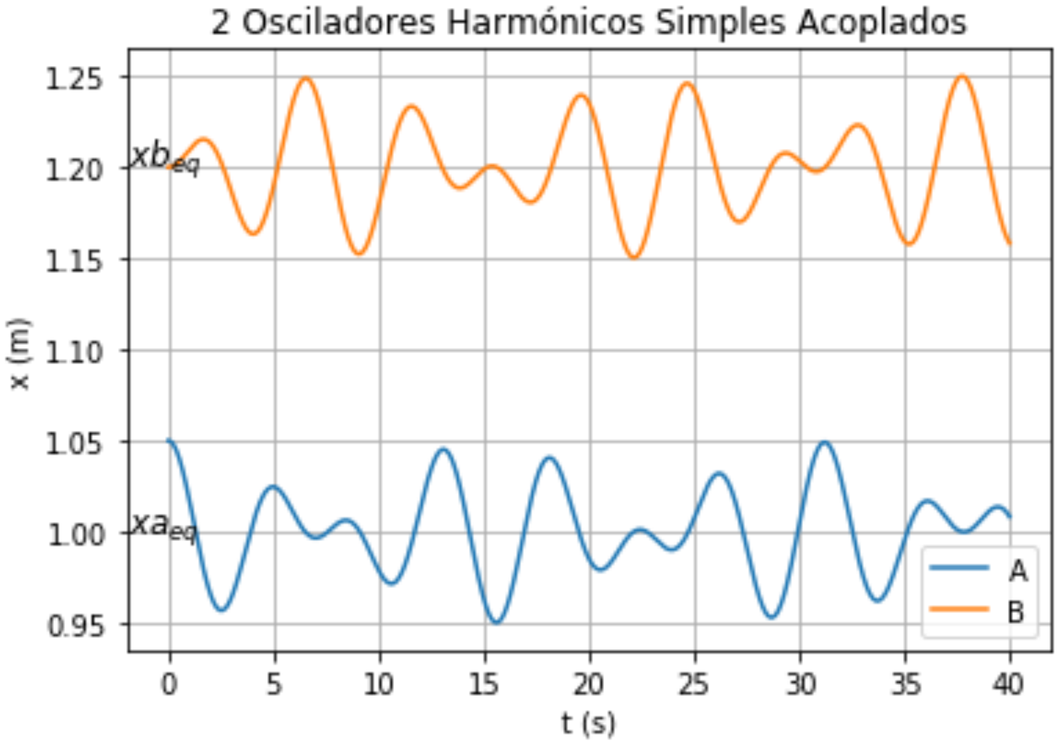


Modos Normais



Corpo A $\quad m\dfrac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Corpo B $\quad m\dfrac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Bea}\right)\right)$



$x_{Aeq} = 1.0$ m $\;x_{Aeq} = 1.2$ m

<u>Condições iniciais:</u>

$\boldsymbol{x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05}$ **m**

$\boldsymbol{x_{B0} = x_{Beq}}$

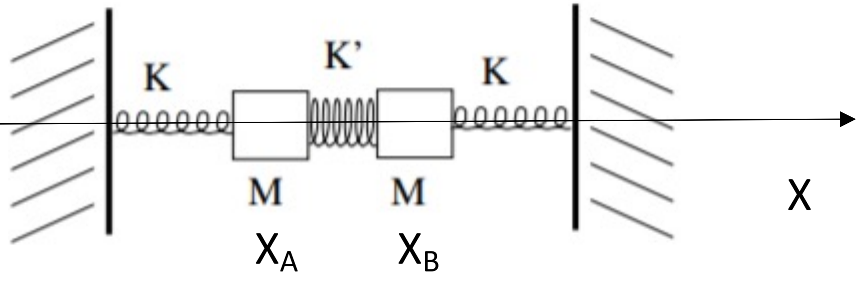
$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

Movimento não periódico

É uma sobreposição dos modos normais?

$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} ?$$

Modos Normais



Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Substituindo

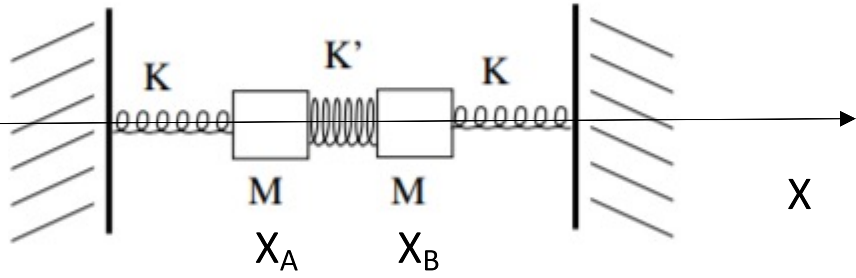
$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

Obtêm-se (problema de valores e vetores próprios): $\quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k\prime}{m}}$

Sobreposição dos dois modos normais é solução válida.

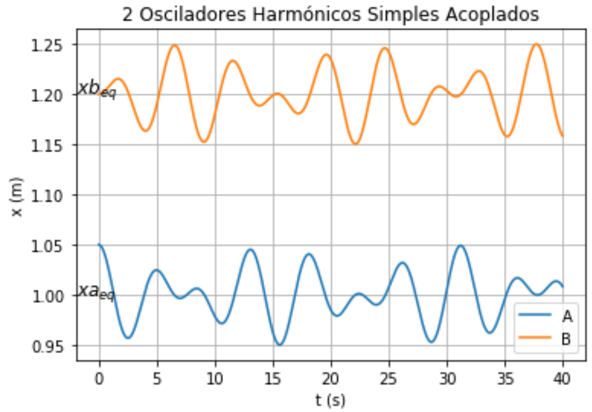
E a amplitudes e as fases iniciais: A_1, A_2, ϕ_1 e ϕ_2?

Modos Normais



Corpo A $\quad m\,\dfrac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Corpo B $\quad m\,\dfrac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$



$x_{Aeq} = 1.0$ m $\;x_{Aeq} = 1.2$ m

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m

$x_{B0} = x_{Beq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

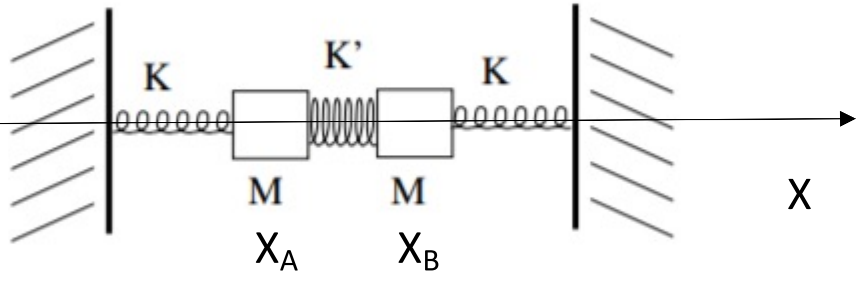
$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ v_{xA} = -\omega_1 A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) - \omega_2 A_2\sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ v_{xB} = -\omega_1 A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) + \omega_2 A_2\sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

para t = 0
$$\begin{cases} x_{eqA} + 0.05 = x_{eqA} + A_1\cos(\phi_1) + A_2\cos(\phi_2) \\ x_{eqB} = x_{eqB} + A_1\cos(\phi_1) - A_2\cos(\phi_2) \\ 0 = -\omega_1 A_1\sin(\phi_1) - \omega_2 A_2\sin(\phi_2) \\ 0 = -\omega_1 A_1\sin(\phi_1) + \omega_2 A_2\sin(\phi_2) \end{cases}$$

4 equações a 4 incógnitas.

$\phi_1 = \phi_2 = 0 \quad$ e $\; A_1 = A_2 = 0.025$ m

Modos Normais



Corpo A $\quad m\,\dfrac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) \,-\, k'\,\big((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\big)$

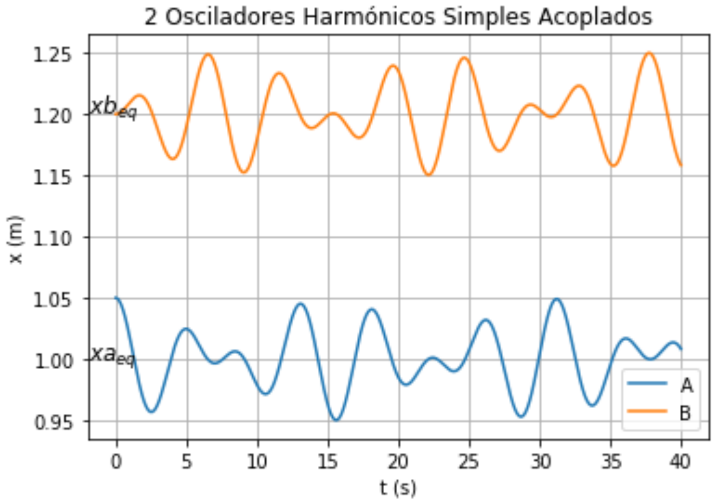
Corpo B $\quad m\,\dfrac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\,(x_B - x_{Beq}) + k'\,\big((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\big)$

$x_{Aeq} = 1.0$ m $\;x_{Aeq} = 1.2$ m

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m

$x_{B0} = x_{Beq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$



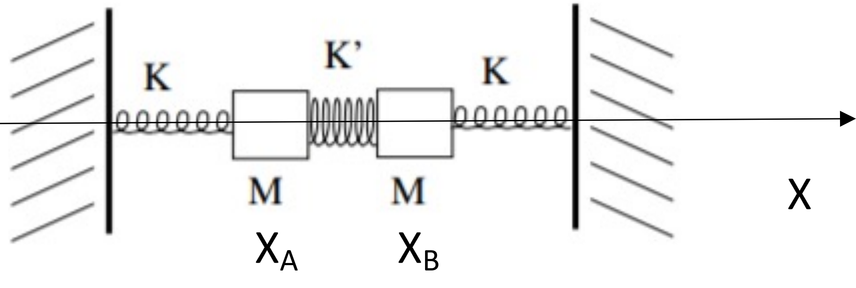
Movimento não periódico $\quad \begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$

Certo! Com $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k\prime}{m}}$

Mas é uma sobreposição de 2 movimentos harmónicos

Qualquer movimento de 2 corpos acoplados por interação elástica é uma sobreposição de MODOS NORMAIS

Modos Normais



Corpo A $\quad m\,\dfrac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

Corpo B $\quad m\,\dfrac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right)$

$x_{Aeq} = 1.0\ \text{m} \qquad x_{Aeq} = 1.2\ \text{m} \qquad k = 1\,\frac{\text{N}}{\text{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\text{N}}{\text{m}};\ m = 1\ \text{kg}$

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05\ \text{m}$

$x_{B0} = x_{Beq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

Problema 9.1:

Obter a evolução dos corpos A e B

a) Usando o método de Euler-Cromer

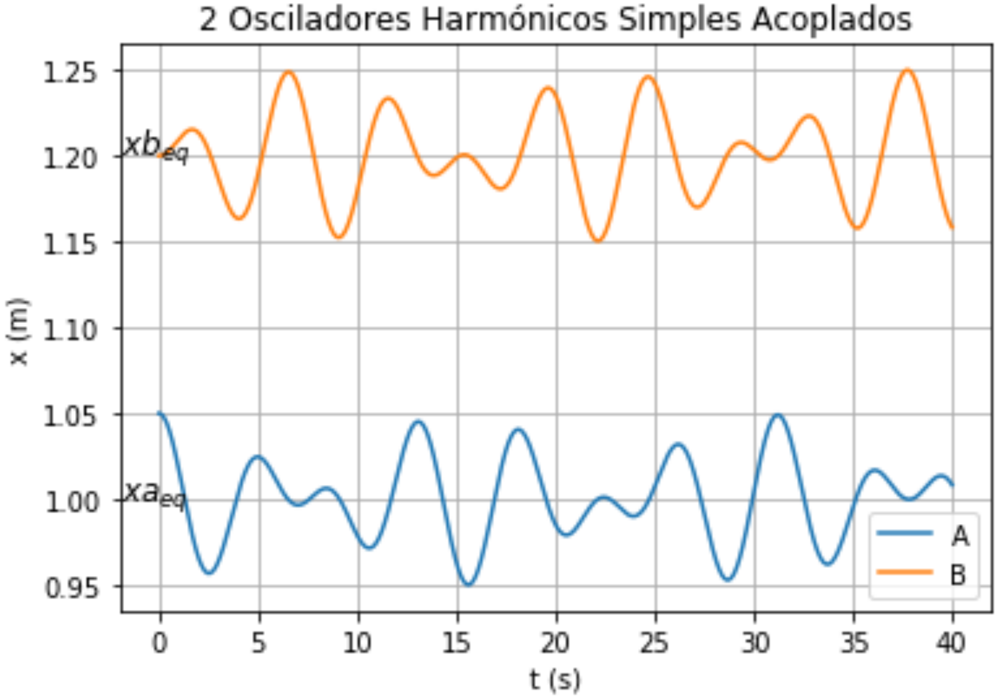
b) usando a sobreposição dos modos normais

$$\begin{cases} x_A(t) = x_{eqA} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B(t) = x_{eqB} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

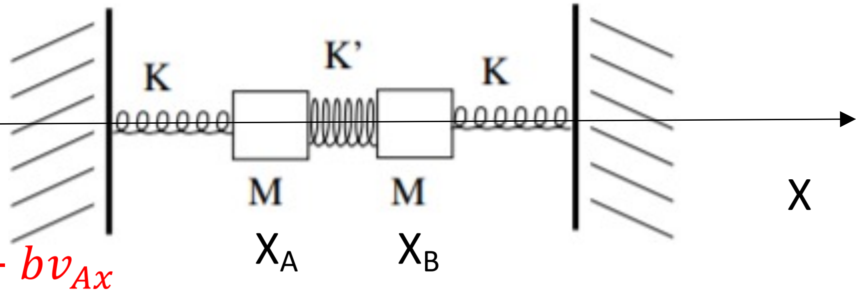
Com $\phi_1 = \phi_2 = 0$ e $A_1 = A_2 = 0.025$ m

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s e $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k\prime}{m}} = 1.414$ rad/s

c) e verificar que as soluções encontradas são a mesma (iguais)



Modos Normais



Amortecido:

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) - k'\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right) - bv_{Ax}$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\,(x_B - x_{Beq}) + k'\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right) - bv_{Bx}$

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1\ \mathrm{kg}$

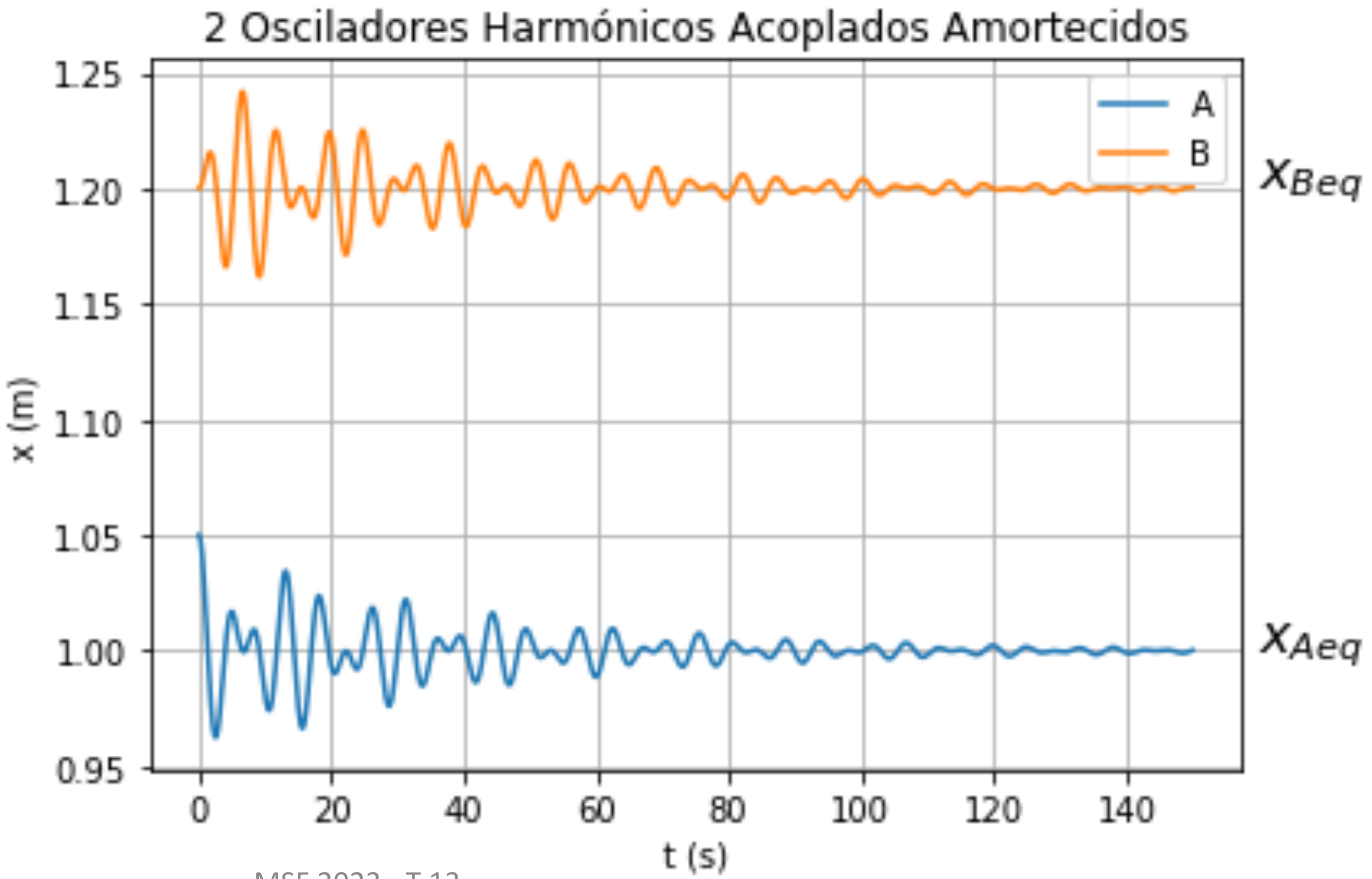
$\boldsymbol{b = 0.05}$

$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\quad x_{Aeq} = 1.2\ \mathrm{m}$

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05\ \mathrm{m}$

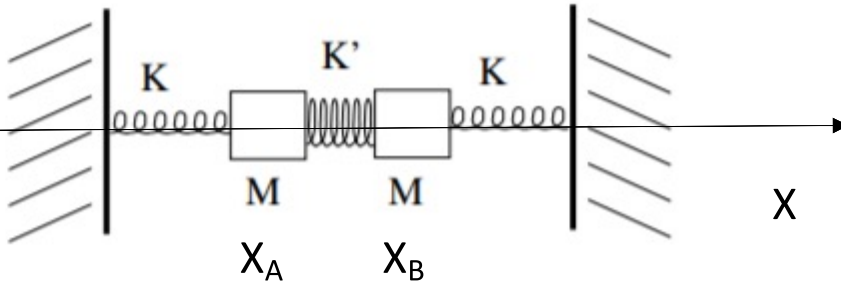
$x_{B0} = x_{Beq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$



Ambos os osciladores tendem para a Sua posição de equilíbrio

Modos Normais



Forçado no corpo A:

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) - k'\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right) - bv_{Ax} + F_0\cos(\omega_f t)$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\,(x_B - x_{Beq}) + k'\left((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\right) - bv_{Bx}$

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\; m = 1$ kg

$b = 0.05$ kg/s

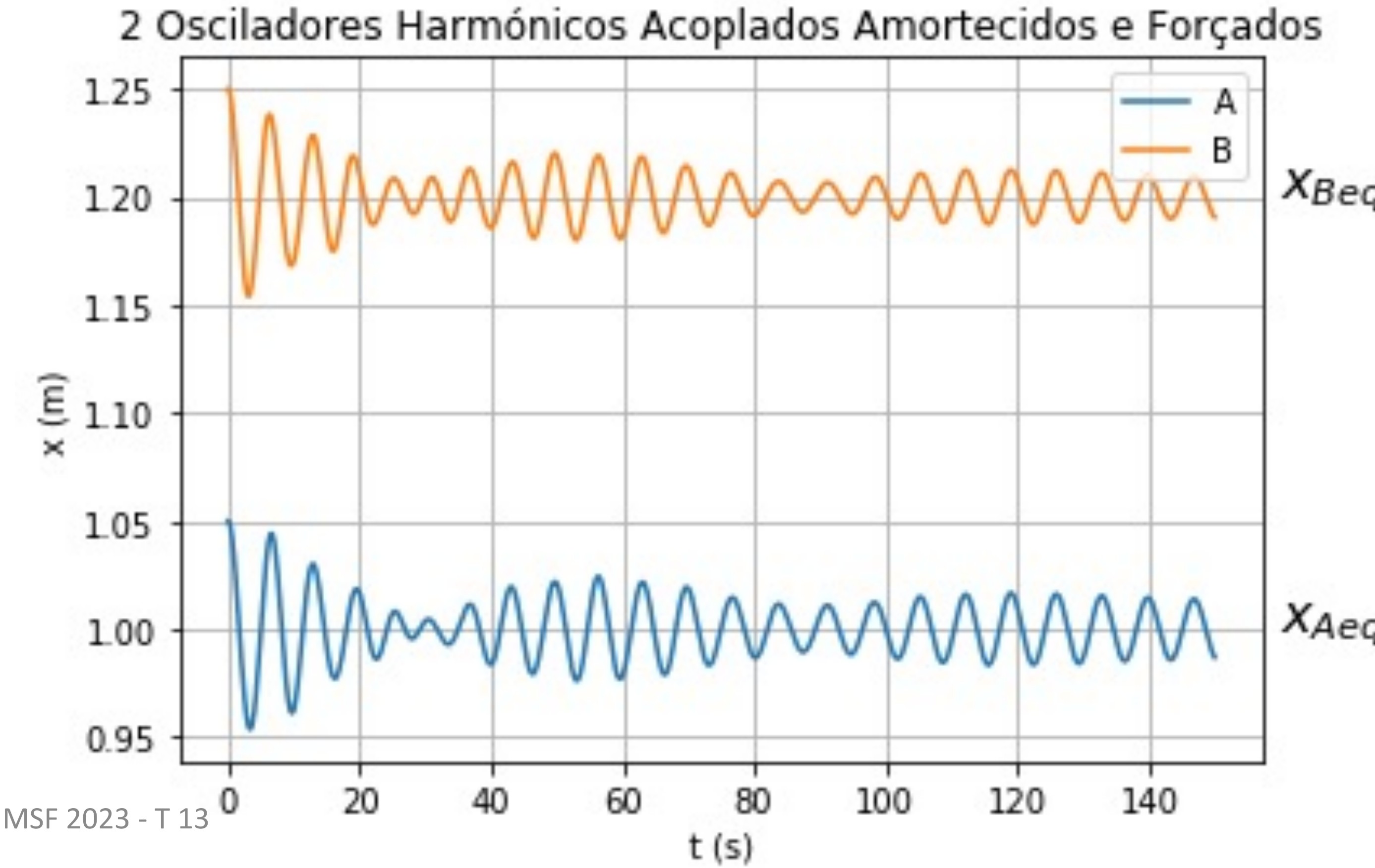
$F_0 = 0.005\,N\,;\; \omega_f = 1$ rad/s

$x_{Aeq} = 1.0$ m $\;x_{Beq} = 1.2$ m

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m

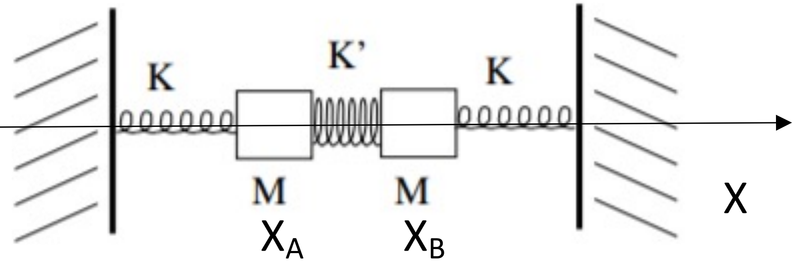
$x_{B0} = x_{Beq} + 0.05$ m

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$



Cada oscilador tende para um regime estacionário
Harmónico simples. (?)
Podemos calcular
a amplitude, a frequência e a forma sinusoidal.

Modos Normais



Forçado no corpo A:

Corpo A $\quad m\dfrac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right) - bv_{Ax} + F_0\cos(\omega_f t)$

Corpo B $\quad m\dfrac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\left(x_B - x_{Beq}\right) + k'\left(\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right) - bv_{Bx}$

Ressonância nos dois corpos na **frequência dos modos normais (como no caso de um oscilador)**

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s} \text{ e } \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k\prime}{m}} = 1.414 \text{ rad/s}$$