

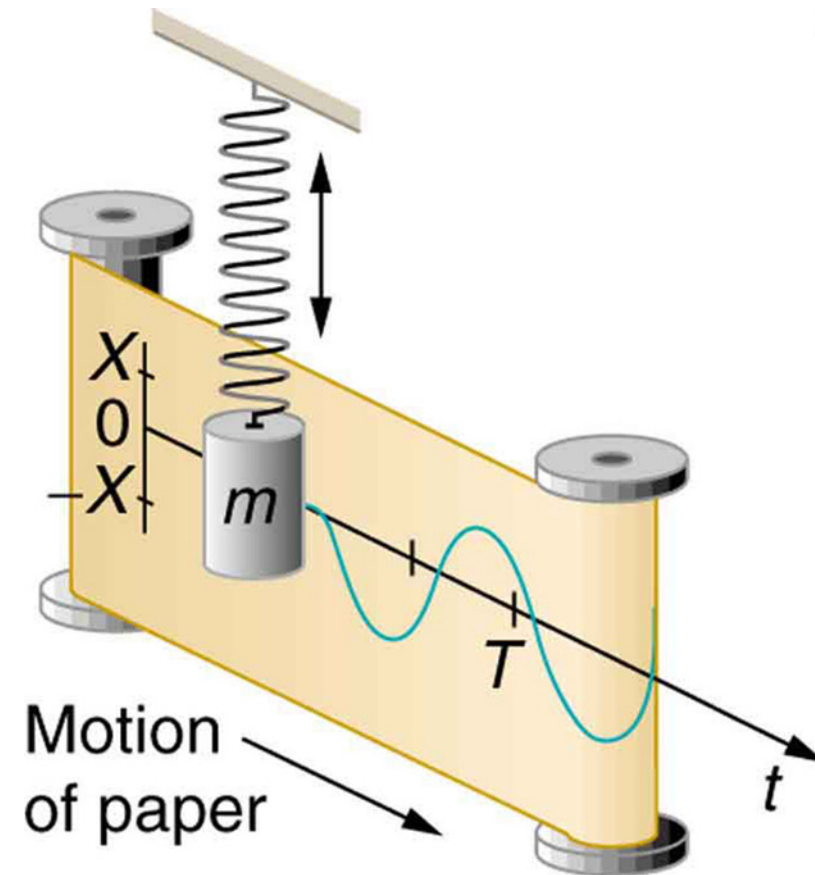
Modelação de Sistemas Físicos

10ª Aula Teórica

Sumário:

Cap. 7 Oscilações
Osciladores Simples e Amortecidos

Bibliografia:
Cap. 7: Serway, cap. 15;

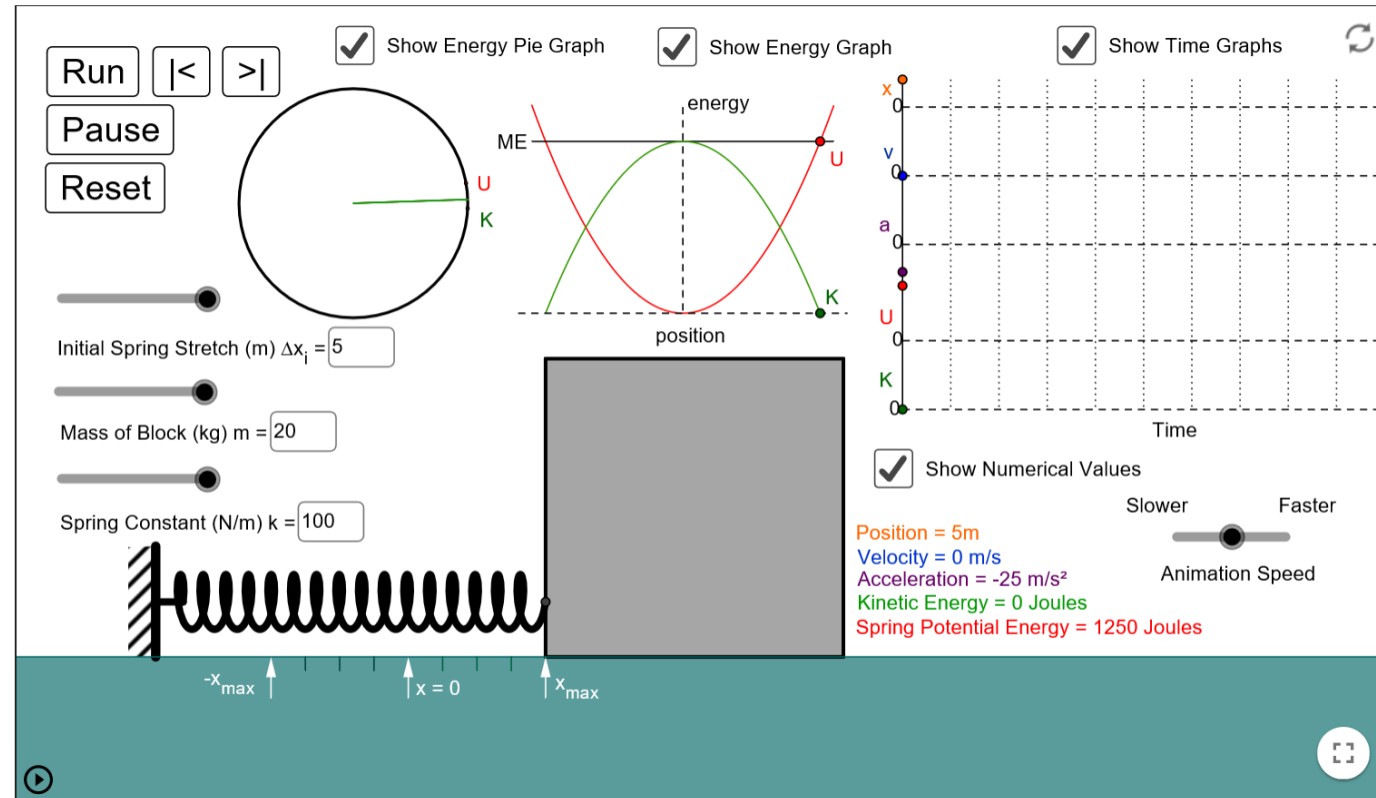


Cap. 7 Oscilações

Simple Harmonic Motion: Mass on a Spring

Autor: Alan Pacey, Tom Walsh

This simulation shows the oscillation of a box attached to a spring. Adjust the initial position of the box, the mass of the box, and the spring constant. Run, Pause, Reset, and Step buttons to examine the animation. Check or uncheck boxes to view/hide various information.



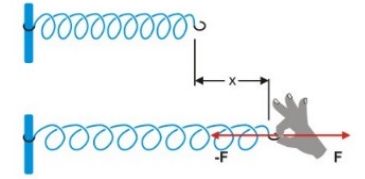
<https://www.geogebra.org/m/EGg2Pvhm>

Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))

Cálculo Analítico:

$$F_x = -k x \Rightarrow a_x = -\frac{k}{m} x \Rightarrow \begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \\ v_x(t) = -A \omega \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$k = m\omega^2$$



Com $x(0)$ e $v_x(0)$ calcula-se A e ϕ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$F_x = -k x = -\frac{dE_p}{dx} \Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{conserva-se}$$

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \\ v_x(t) = -A \omega \sin(\omega t + \phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \\ \frac{v_x(t)}{\omega} = -A \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

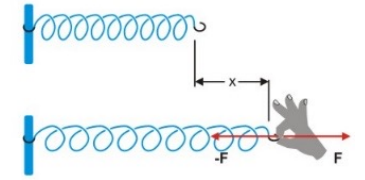
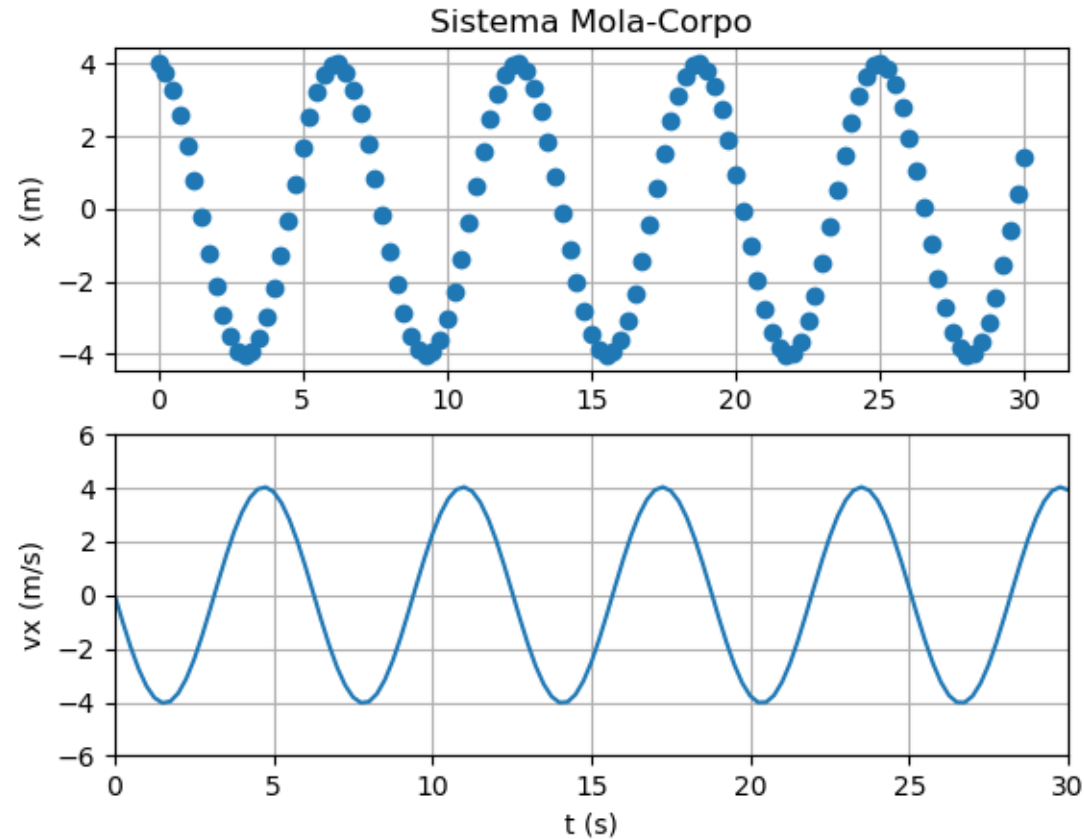
$$\Rightarrow x^2(t) + \left(\frac{v_x(t)}{\omega}\right)^2 = A^2 \quad \text{eq. circunferência raio } A$$

Cap. 7 Oscilações

Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))

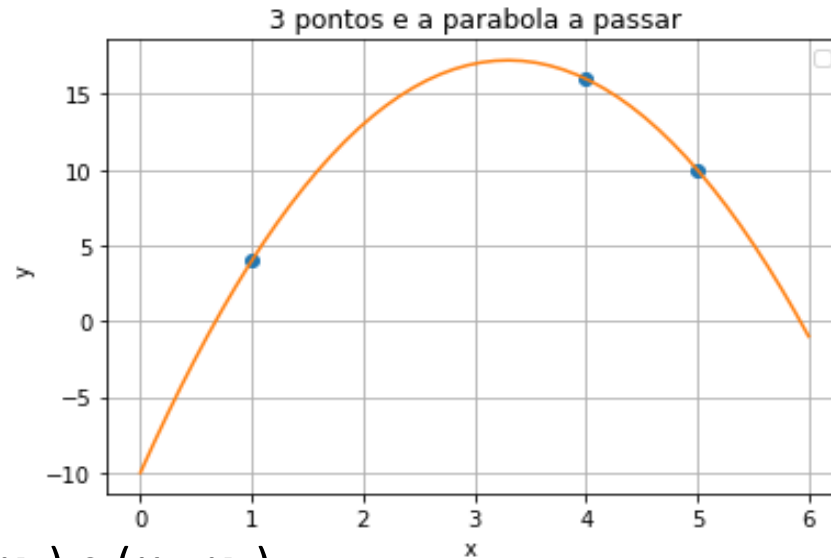
Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer

$$F_x = -k x \Rightarrow \begin{cases} a_x = -\frac{k}{m} x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$



Como calcular a amplitude A e o período T ? Como saber a fase ϕ ?

Cálculo da amplitude da oscilação: **interpolação**



Por três pontos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e (x_2, y_2)
há sempre uma parábola (polinómio de 2º grau) a passar nesses 3 pontos.

Polinómio de Lagrange:

$$y(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

Podemos usar o polinómio para:

- Interpolação – encontrar o valor de y num ponto x onde não temos dados
- Interpolação inversa – encontrar o valor de x que corresponde a um determinado valor de y
- Cálculo de máximo e mínimos

Cálculo da amplitude da oscilação - Cálculo de máximo e mínimos

Por três pontos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e (x_2, y_2) há sempre uma parábola (polinómio de 2º grau) a passar nesses 3 pontos.
Polinómio de Lagrange

$$y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

A condição de máximo, como de mínimo, é :

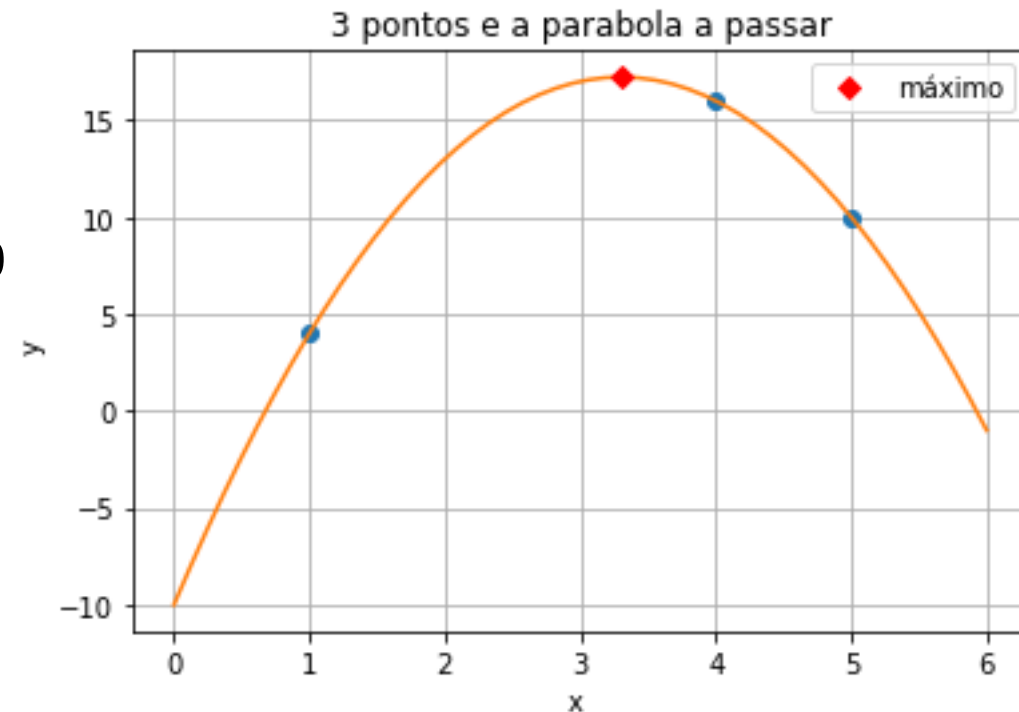
$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{no ponto } (x_m, y_{max})$$

$$\Rightarrow \frac{[(x-x_2)+(x-x_1)]}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{[(x-x_2)+(x-x_0)]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{[(x-x_0)+(x-x_1)]}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_m = \frac{a0+b0+c0}{2(a+b+c)} \quad \Rightarrow y_{max}(x_m) = \text{polinómio de Lagrange}$$

$$a = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad b = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad c = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$a0 = \frac{(x_2+x_1)y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad b0 = \frac{(x_2+x_0)y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad c0 = \frac{(x_0+x_1)y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

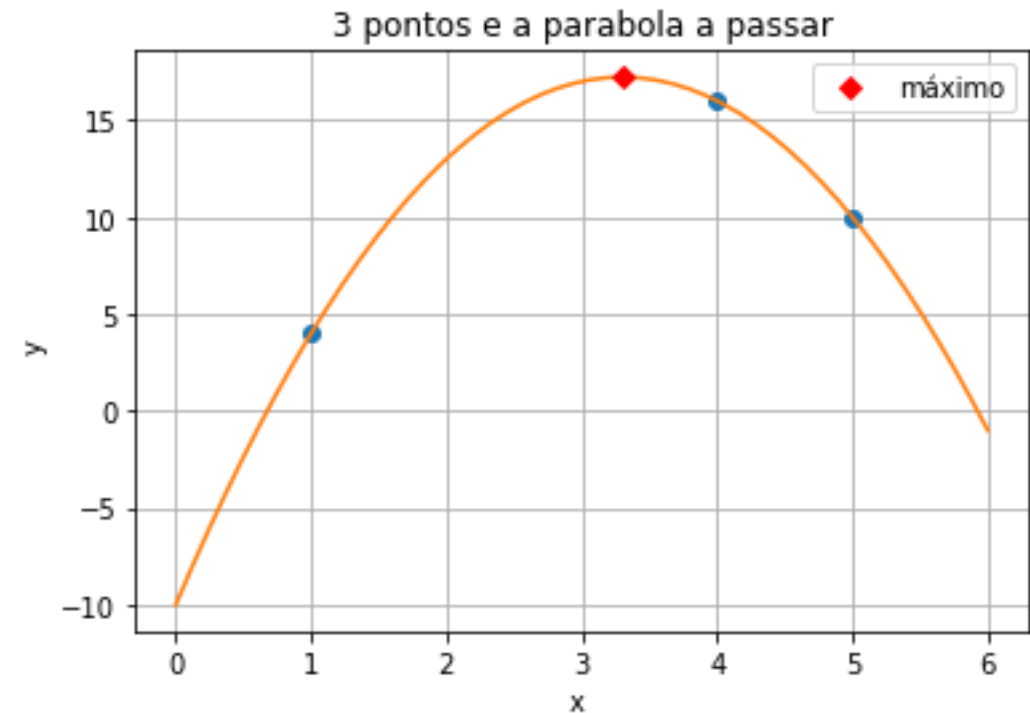


Cálculo da amplitude da oscilação - Cálculo de máximo e mínimos

Por três pontos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e (x_2, y_2) há sempre uma parábola (polinómio de 2º grau) a passar nesses 3 pontos:
Polinómio de Lagrange

O máximo ou o mínimo duma função de pontos discretos por interpolação de Lagrange:

```
def maxminv(x0,x1,x2,y0,y1,y2):  
    # Máximo ou mínimo usando o polinómio de Lagrange  
    # Dados (input): (x0,y0), (x1,y1) e (x2,y2)  
    # Resultados (output): xm, ymax  
    xab=x0-x1  
    xac=x0-x2  
    xbc=x1-x2  
  
    a=y0/(xab*xac)  
    b=-y1/(xab*xbc)  
    c=y2/(xac*xbc)  
  
    xmla=(b+c)*x0+(a+c)*x1+(a+b)*x2  
    xm=0.5*xmla/(a+b+c)  
  
    xta=xm-x0  
    xtb=xm-x1  
    xtc=xm-x2  
  
    ymax=a*xtb*xtc+b*xta*xtc+c*xta*xtb  
    return xm, ymax
```



Cálculo da amplitude da oscilação - Cálculo de máximo e mínimos

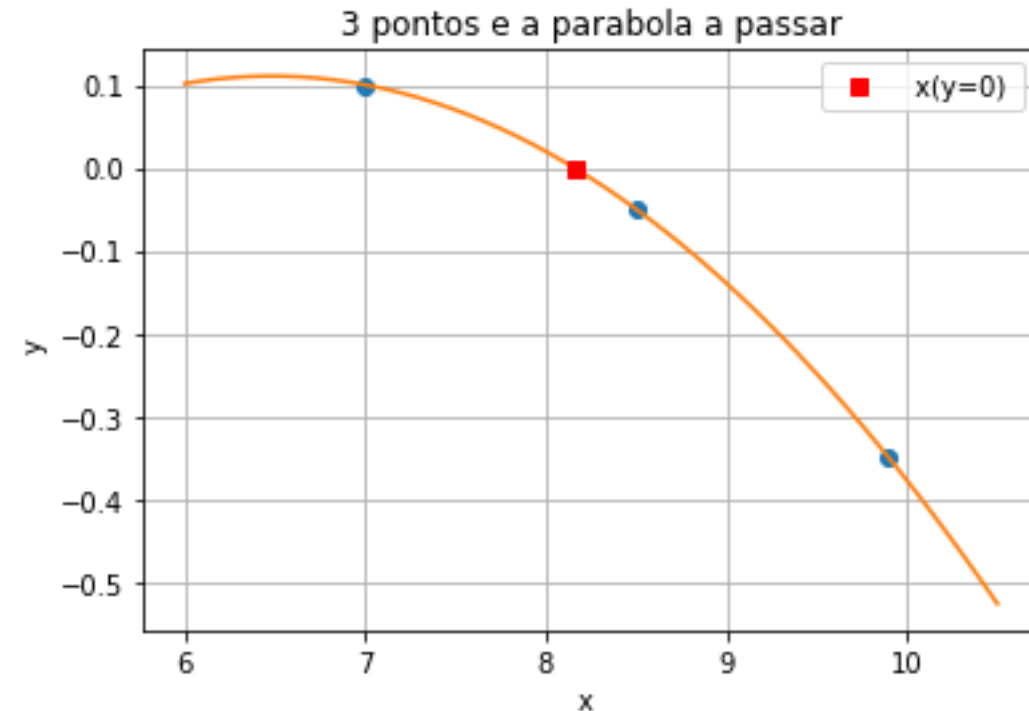
Problema: Dado um certo y_{inp} , qual o x_{out} correspondente?

Interpolação inversa

$$y_{inp} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

$$x_{out} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{cases} a = e + f + g \\ b = e(x_0 + x_1) + f(x_0 + x_2) + g(x_1 + x_2) \\ c = y_{inp} + e x_0 x_1 + f x_0 x_2 + g x_1 x_2 \\ e = \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} \\ f = \frac{y_1}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} \\ g = \frac{y_0}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} \end{cases}$$

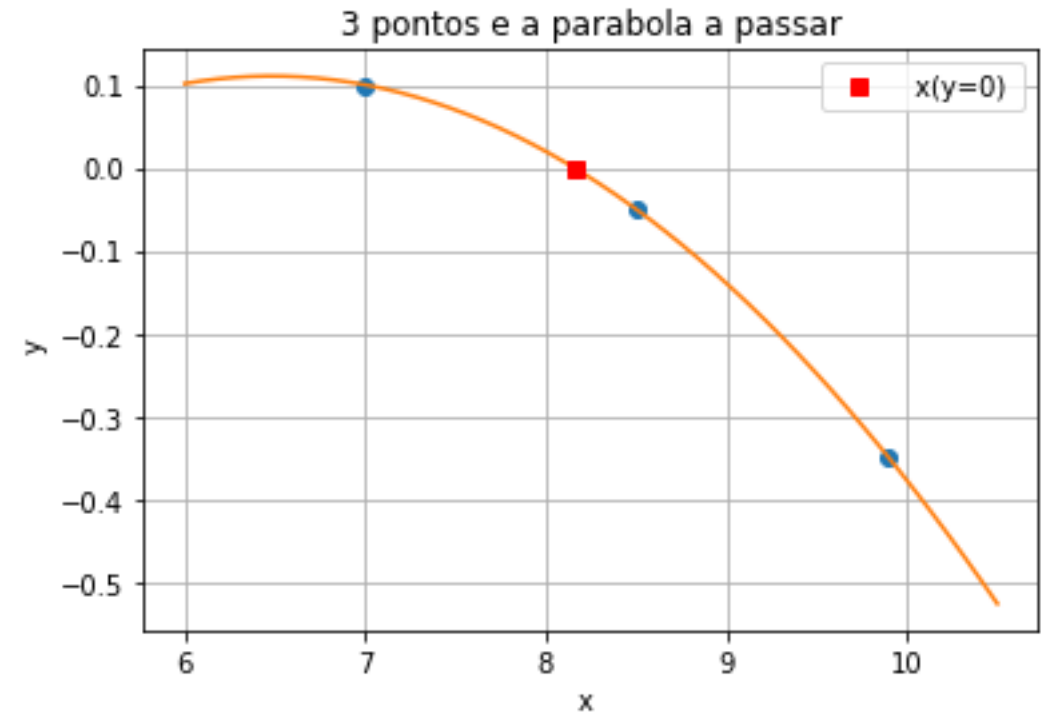


Cálculo da amplitude da oscilação - Cálculo de máximo e mínimos

Problema: Dado um certo y_{inp} , qual o x_{out} correspondente?

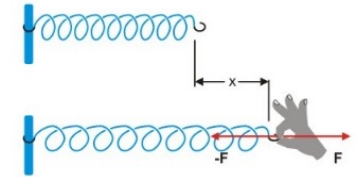
Interpolação inversa
$$x_{out} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

```
def intlaginvv(yinp,xm1,xm2,xm3,ym1,ym2,ym3):  
    # interpolação inversa usando o polinómio de Lagrange  
    # Dados (input): yinp, (x0,y0), (x1,y1), (x2,y2)  
    # Resultados (output): xout, yout  
    xab=xm1-xm2  
    xac=xm1-xm3  
    xbc=xm2-xm3  
    a=ym1/(xab*xac)  
    b=-ym2/(xab*xbc)  
    c=ym3/(xac*xbc)  
    am=a+b+c  
    bm=a*(xm2+xm3)+b*(xm1+xm3)+c*(xm1+xm2)  
    cm=yinp+a*xm2*xm3+b*xm1*xm3+c*xm1*xm2  
    xout=(bm+np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)  
    if xm3 > xm1 and (xout < xm1 or xout > xm3):  
        xout=(bm-np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)  
    if xm1 > xm3 and (xout < xm3 or xout > xm1):  
        xout=(bm-np.sqrt(bm*bm-4*am*cm))/(2*am)  
  
    xta=xout-xm1  
    xtb=xout-xm2  
    xtc=xout-xm3  
    yout=a*xtb*xtc+b*xta*xtc+c*xta*xtb  
    return xout, yout
```



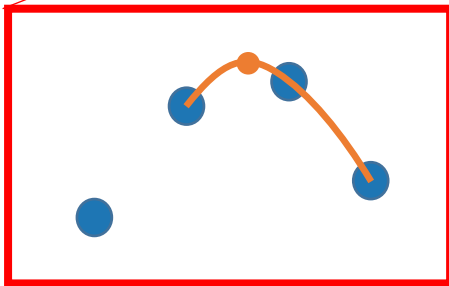
Oscilador Harmônico Simple (a 1D (segundo OX))

Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer:

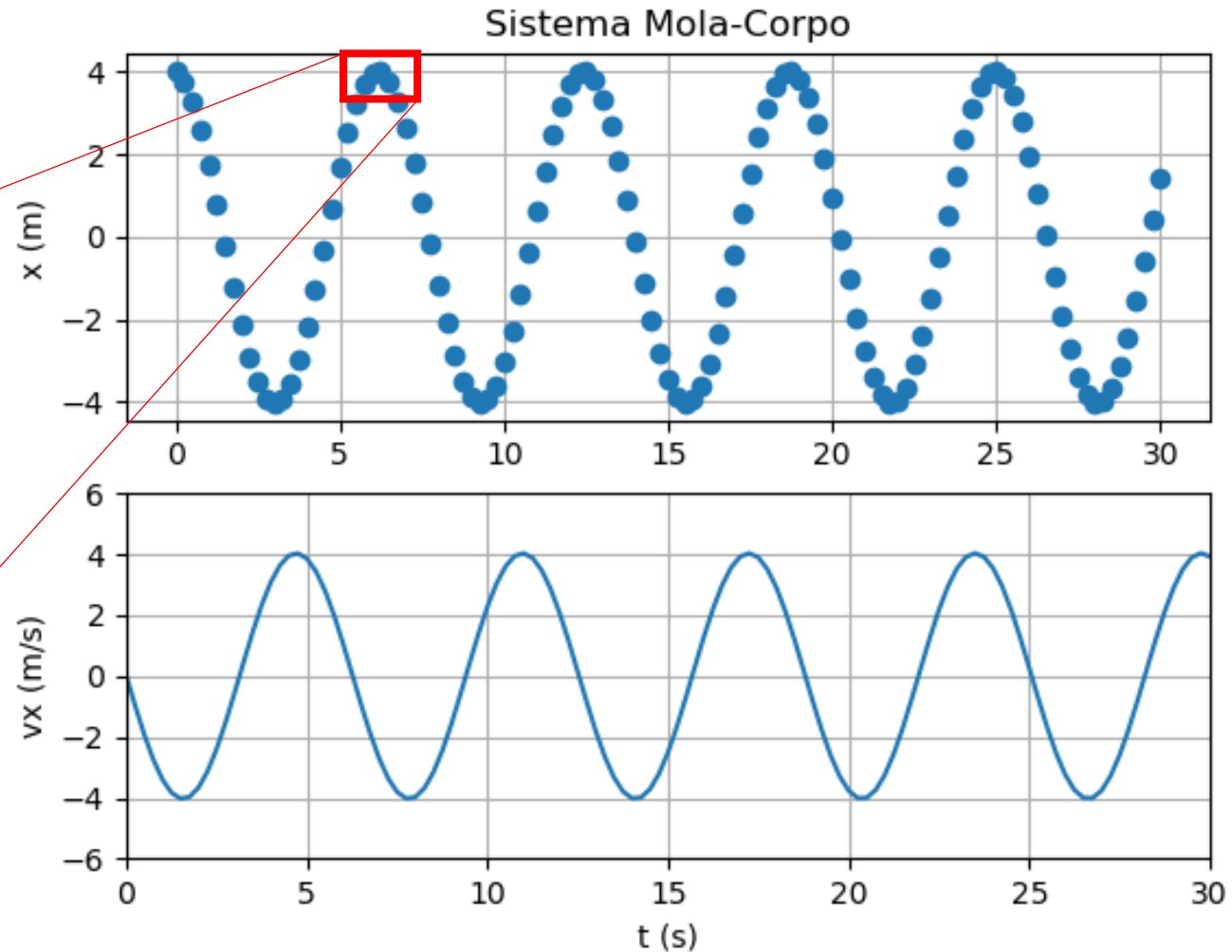


$$F_x = -k x \Rightarrow \begin{cases} a_x = -\frac{k}{m} x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$

Como calcular amplitude A ?



$$A = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$



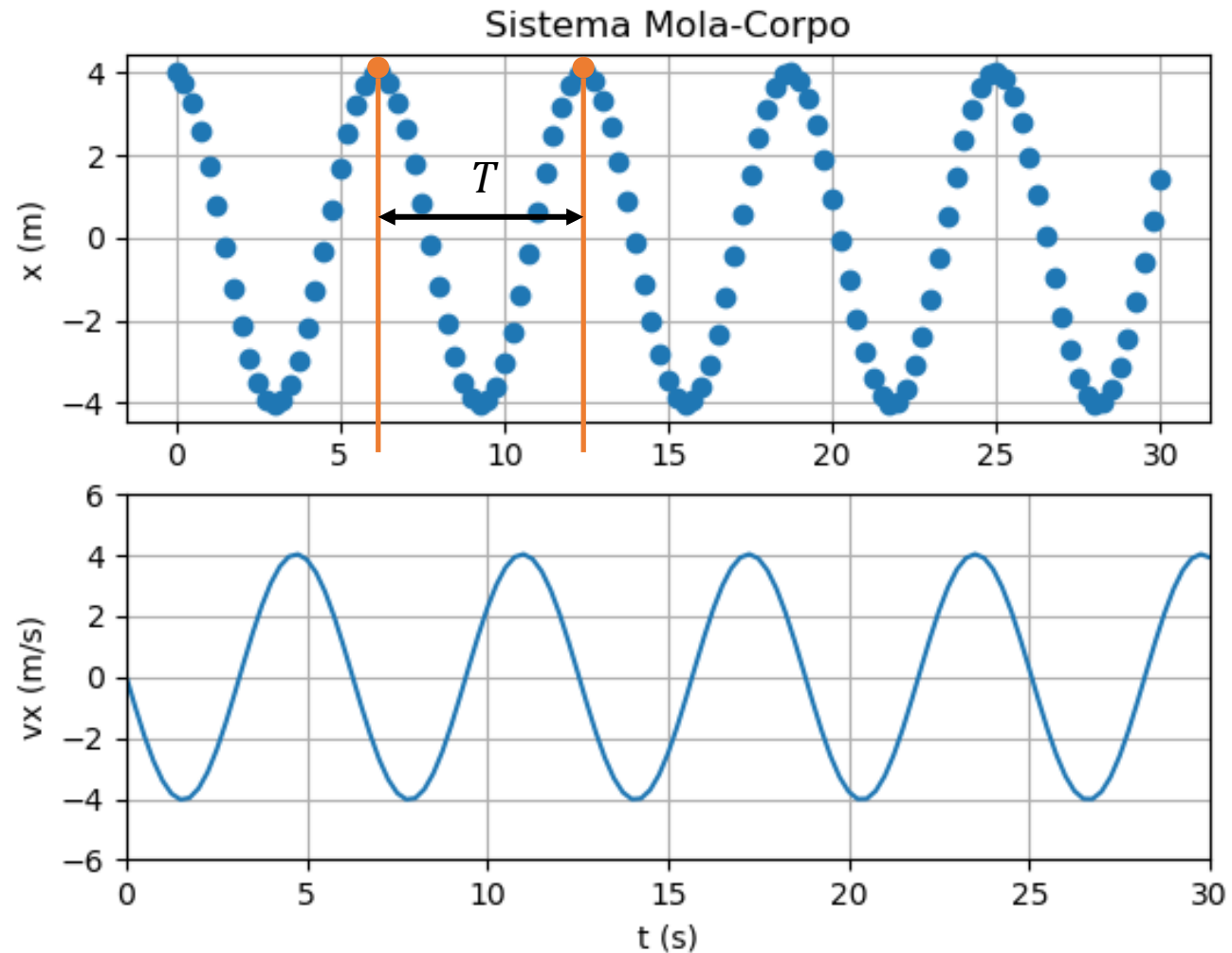
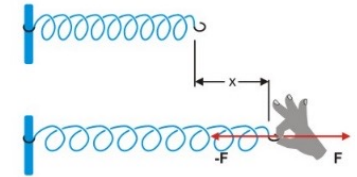
Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))

Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer:

$$F_x = -k x \Rightarrow \begin{cases} a_x = -\frac{k}{m} x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$

Como calcular período T ?

$$T = x_{max2} - x_{max1}$$



Oscilador Harmónico Simple (a 1D (segundo OX))

Cálculo Numérico: Método de Euler-Cromer:

$$F_x = -k x \Rightarrow \begin{cases} a_x = -\frac{k}{m} x \\ x(0) \text{ e } v_x(0) \end{cases}$$

Como calcular fase ϕ ?

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

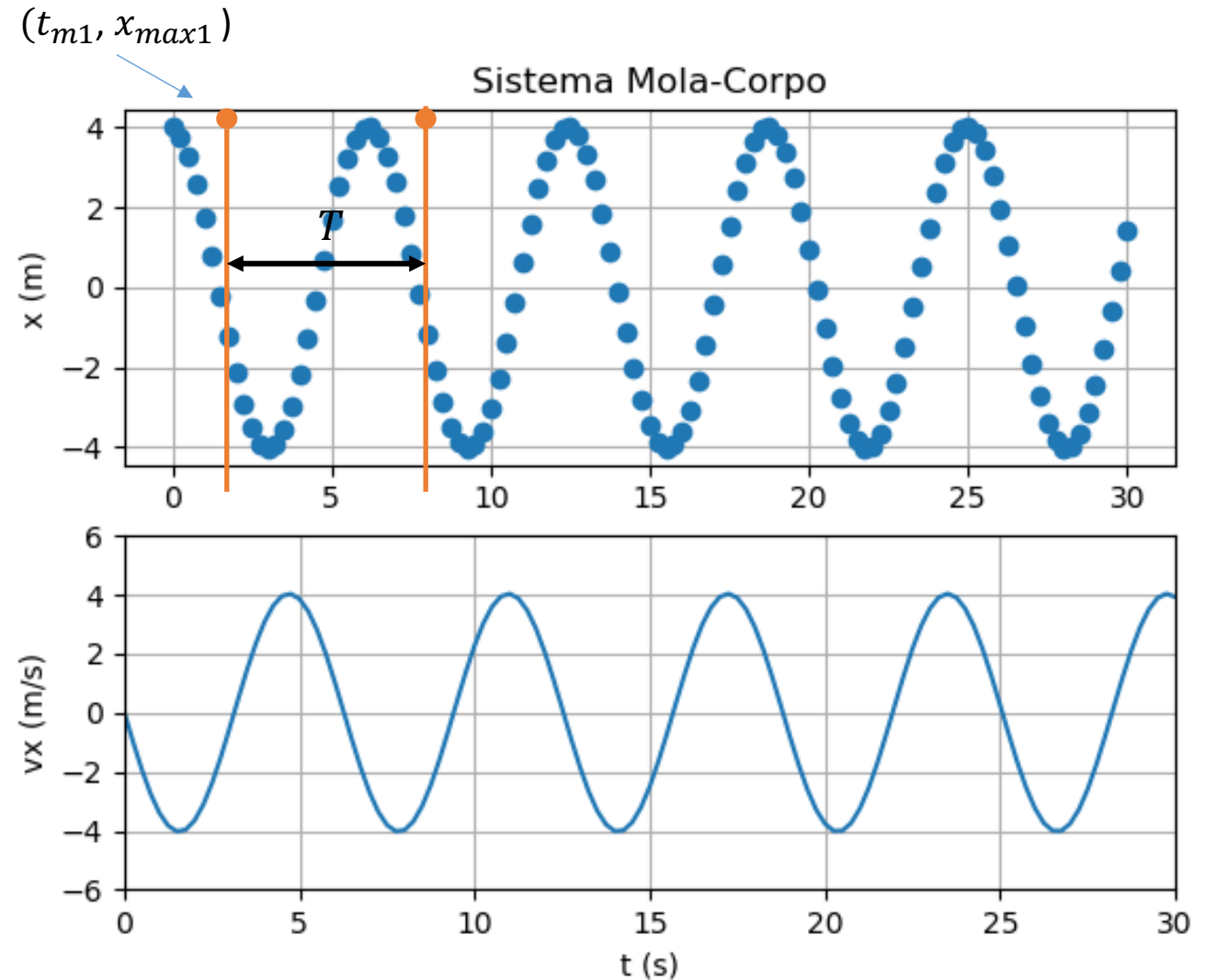
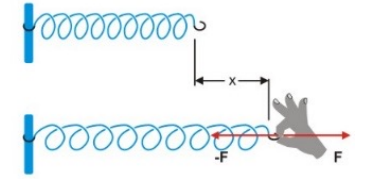
máximo quando $\omega t + \phi = 2\pi, 4\pi, \dots$

primeiro máximo $x_{max1}(t_{m1})$ quando

$$\omega t_{m1} + \phi = 2\pi$$

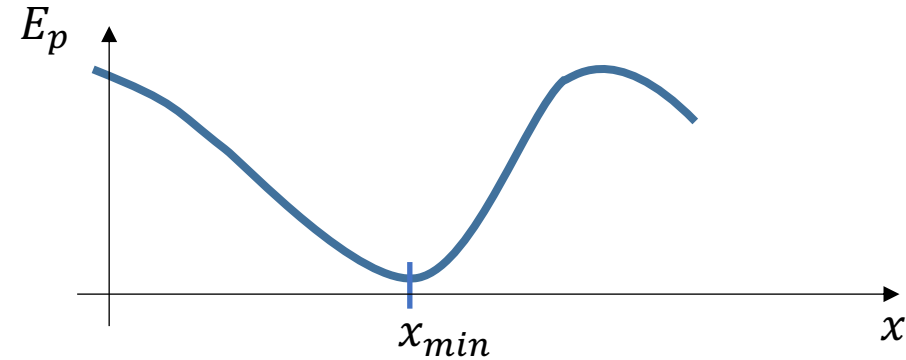
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \phi = 2\pi \left(1 - \frac{t_{m1}}{T}\right)$$



Importância do oscilador harmónico

Energia potencial qualquer, com mínimo em x_{min}



Expansão de Taylor à volta de x_{min} :

$$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_{min}} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 E_p}{dx^3} \right|_{x_{min}} \delta x^3 + o(\delta x^4)$$

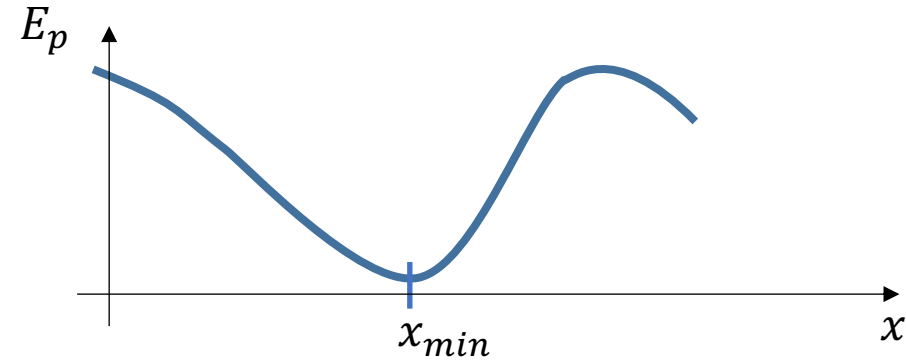
com $\delta x = x - x_{min}$

em x_{min} a força é nula! $F_x(x_{min}) = - \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_{min}} = 0$

$$E_p(x) - E_p(x_{min}) = + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 E_p}{dx^3} \right|_{x_{min}} \delta x^3 + o(\delta x^4)$$

Importância do oscilador harmónico

Energia potencial qualquer, com mínimo em x_{min}



$$E_p(x) - E_p(x_{min}) = +\frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dx^2} \bigg|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 E_p}{dx^3} \bigg|_{x_{min}} \delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

Se fizermos a escolha: $E_p(x_{min}) = 0$ e $x_{min} = 0$

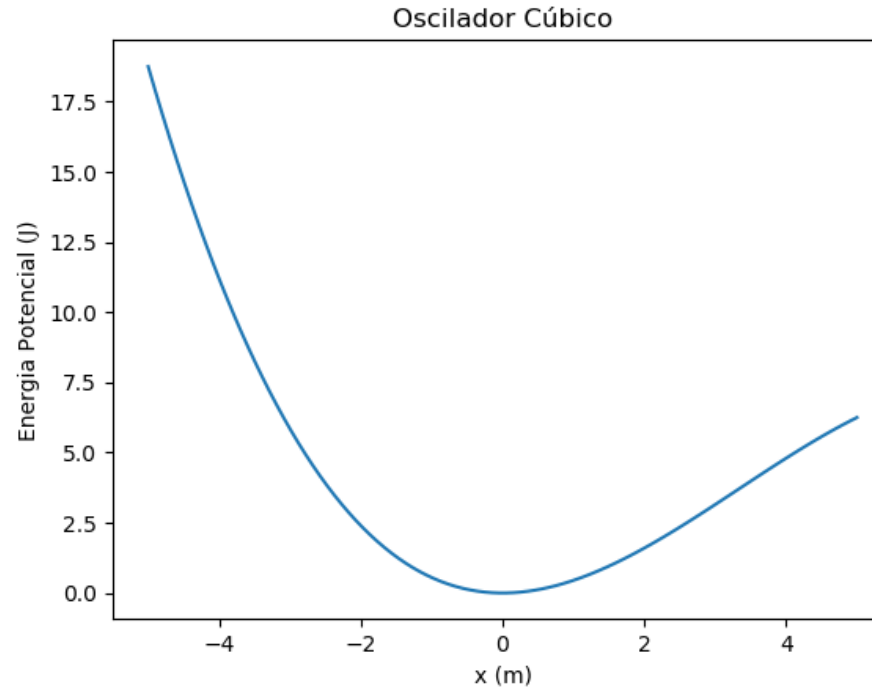
$$E_p(x) = +\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 E_p}{dx^3} \bigg|_{x_{min}} x^3 + \mathcal{O}(x^4) \quad \text{com: } \frac{d^2 E_p}{dx^2} \bigg|_{x_{min}} = k$$

e requer $\delta x \ll 1$

Truncar a $\mathcal{O}(x^2)$ \rightarrow oscilador harmónico simples.

Truncar a $\mathcal{O}(x^3)$ \rightarrow oscilador cúbico.

Oscilador cúbico:
$$E_p(x) = +\frac{1}{2}k x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 E_p}{dx^3} \Big|_{x_{min}} x^3 = \frac{1}{2}k x^2 + \alpha x^3$$



Solução analítica (muito) difícil

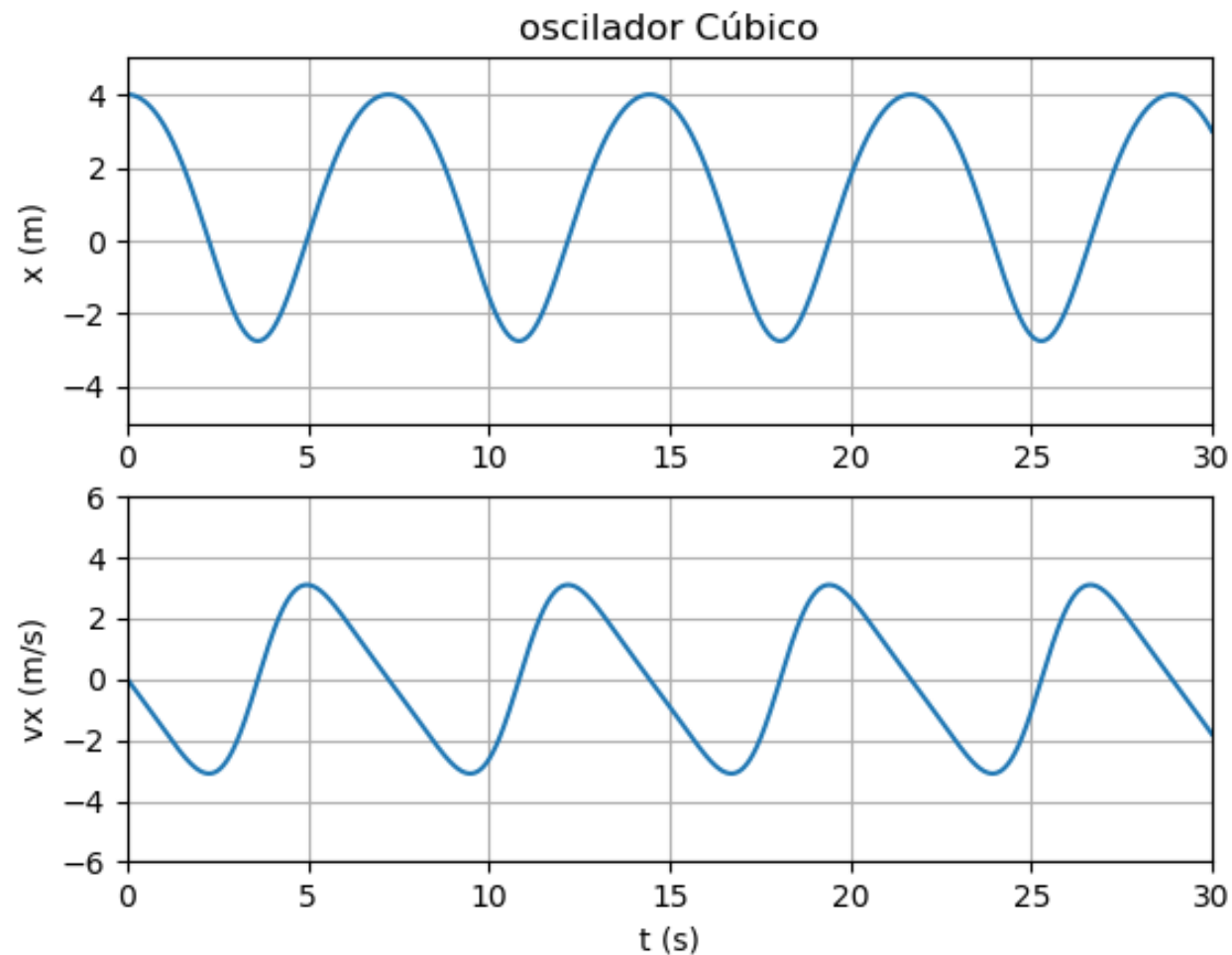
⇒ Método de Integração Numérico de Euler-Cromer

Oscilador cúbico: $E_p(x) = +\frac{1}{2}k x^2 + \alpha x^3$

Método de Integração Numérico de Euler-Cromer

Força: $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -k x - \alpha x^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}x^2 \\ x(0) \\ v_x(0) \end{cases}$$

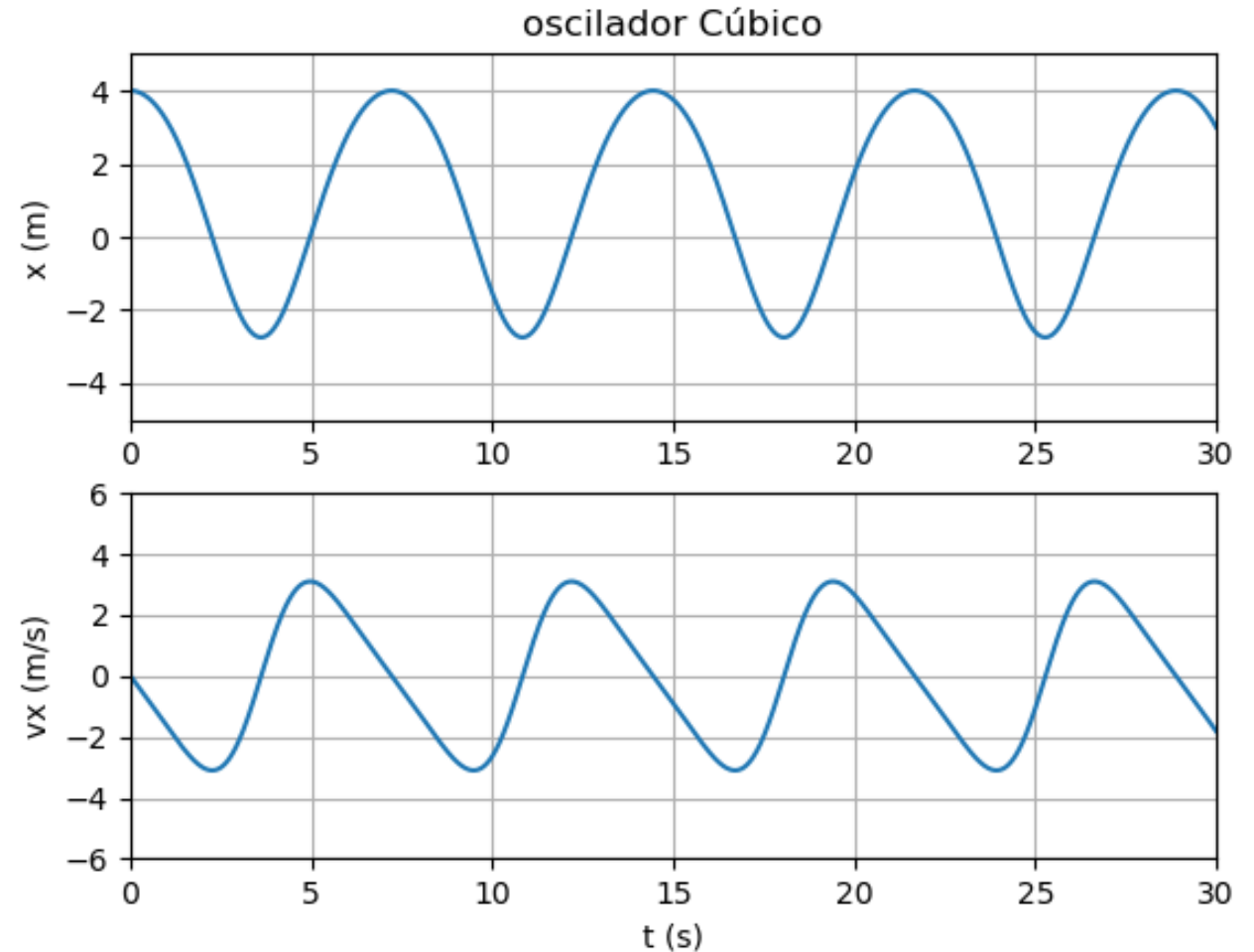


Oscilador cúbico:

$$E_p(x) = +\frac{1}{2}k x^2 + \alpha x^3$$

Método de Integração Numérico de Euler-Cromer

- Movimento periódico
- Podemos calcular a amplitude e o período usando os métodos de interpolação.

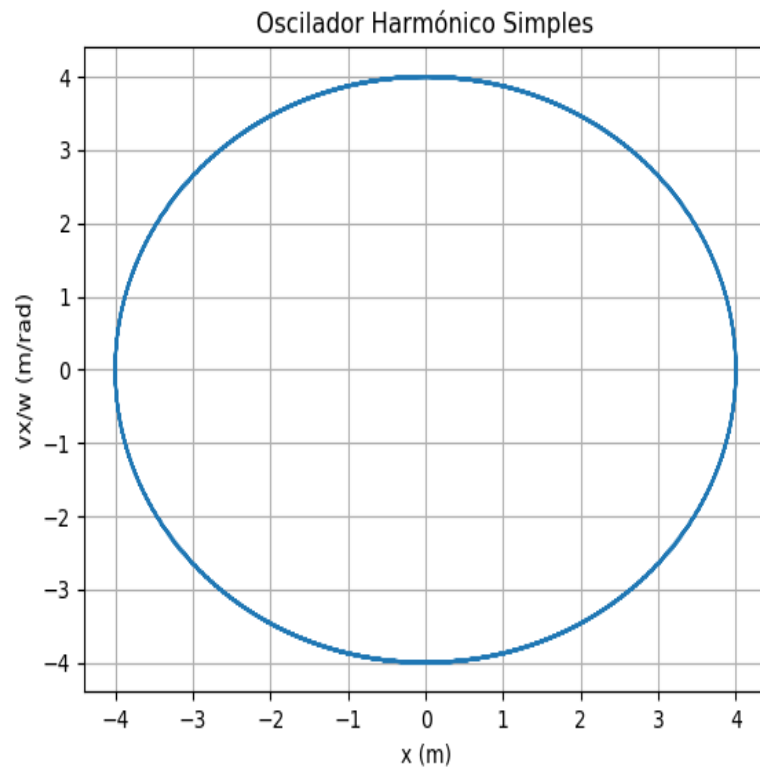


Espaço de fase (x, v_x)

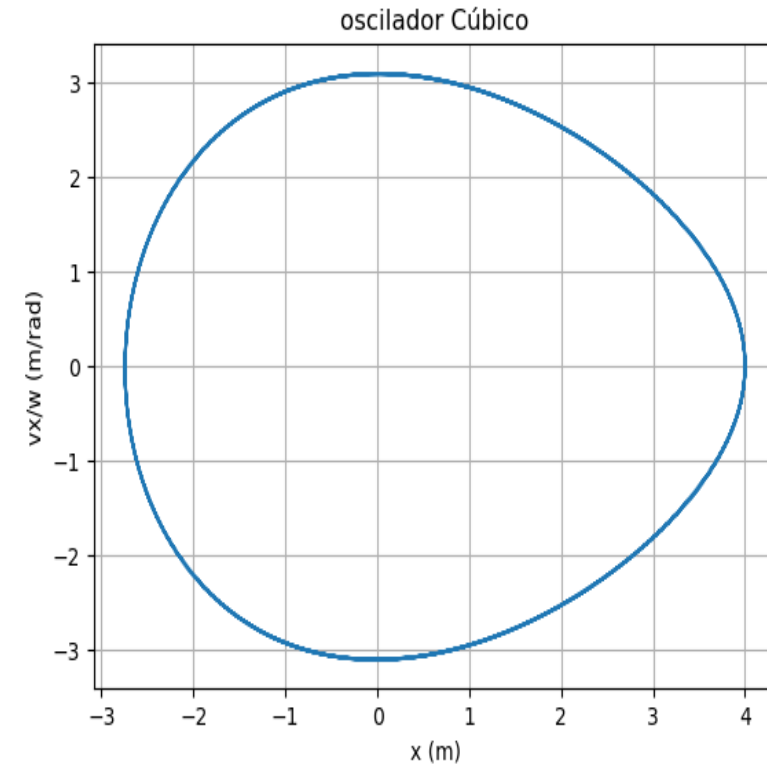
Oscilador Harmónico Simples:

$$x^2(t) + \left(\frac{v_x(t)}{\omega}\right)^2 = A^2 \quad \text{eq. circunferência raio } A$$

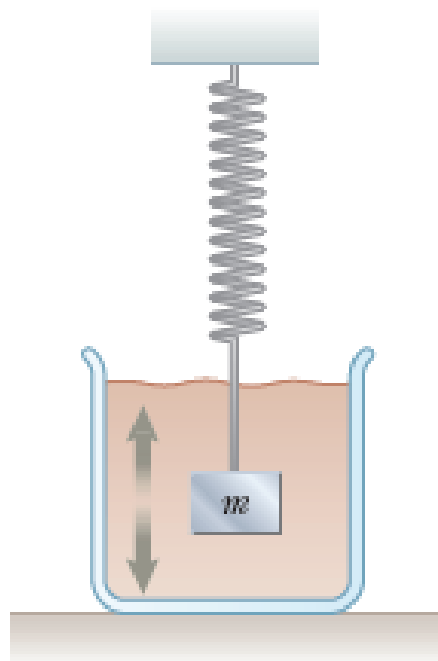
\Rightarrow plot $\frac{v_x(t)}{\omega}$ vs x



Oscilador Cúbico:



Oscilador Harmônico Amortecido



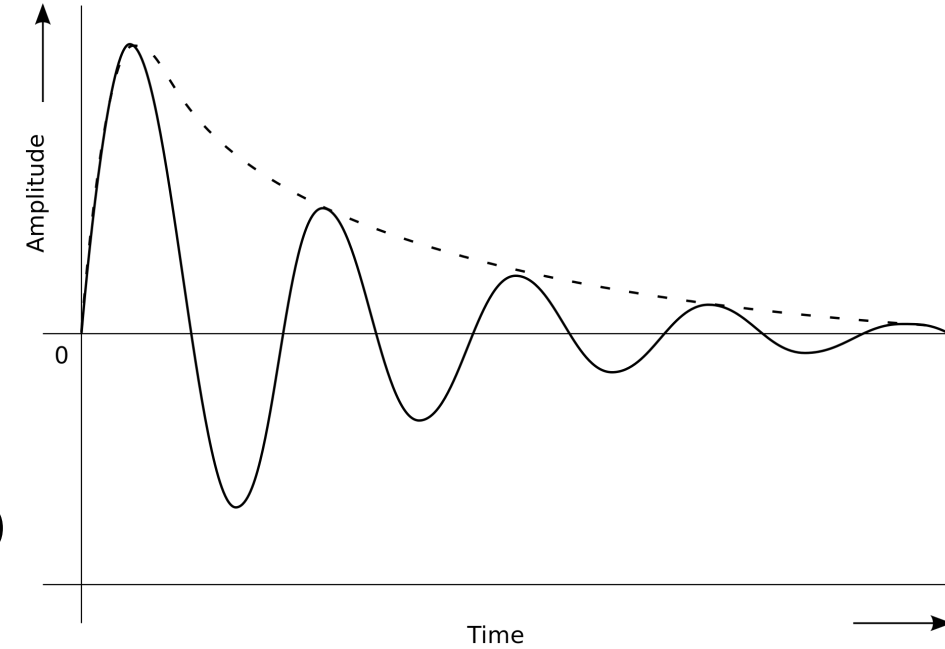
$$F_x^{\text{resistência}} = -bv_x$$

Oscilador Harmônico Amortecido

Amortecimento fraco: $b < 2 m \omega_0$

$$F_x = -k x - b v_x \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x = -\omega_0^2 x - \frac{b}{m} v_x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \\ v_x(t) = -A_a \omega e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega t + \phi) - A_a \frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$



$$\text{em que } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{frequência de oscilação sem amortecimento}$$

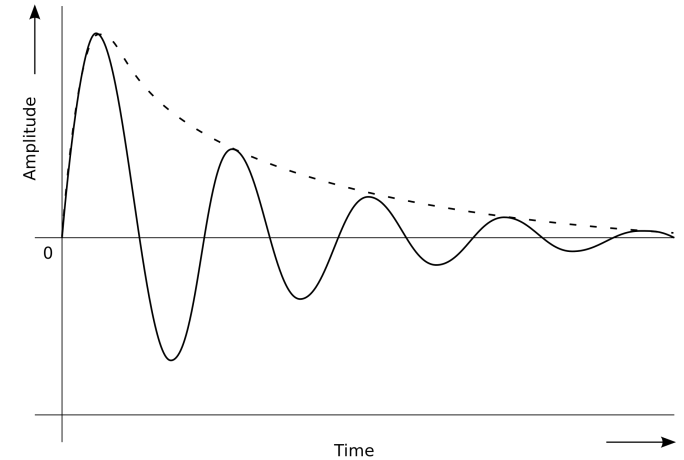
Oscilador Harmónico Amortecido Cálculo Analítico:

Amortecimento fraco: $b < 2 m \omega_0$

$$F_x = -k x - b v_x \Rightarrow a_x = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \\ v_x(t) = -A_a \omega e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega t + \phi) - A_a \frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$



Sabendo $x(0)$ e $v_x(0)$ calcula-se A_a e ϕ :

$$\phi = \arctan \left[-\left(\frac{v_x(0)}{x(0)} + \frac{b}{2m}\right) / \omega \right]$$

obtemos 2 valores . Temos de escolher qual deles é!

$$A_a = \sqrt{x(0)^2 + \left((v_x(0) + x(0) \frac{b}{2m}) / \omega\right)^2}$$

Oscilador Harmônico Amortecido Outros casos

Amortecimento forte $b > 2 m \omega_0$

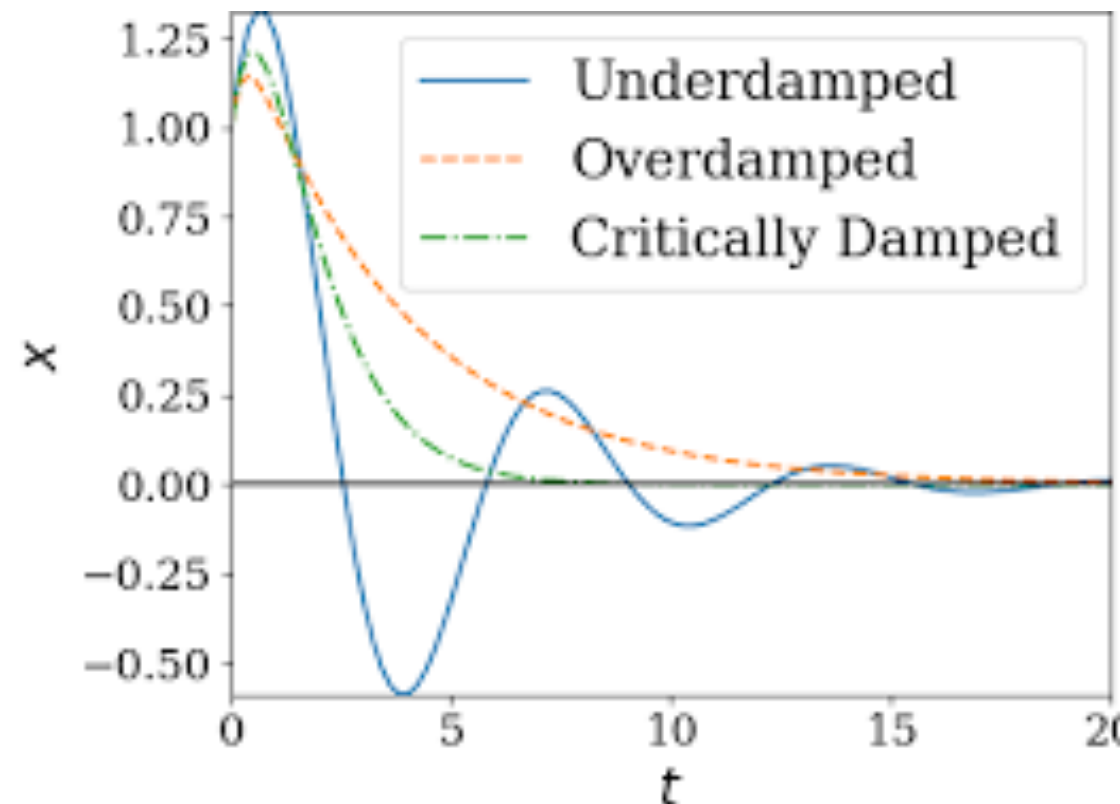
Amortecimento tão forte que o corpo vai diretamente para a posição de equilíbrio, sem oscilar

Decaimento exponencial $x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} \{C e^{\omega t} + D e^{-\omega t}\}$

Amortecimento critico (ou excecional) $b = 2 m \omega_0$

Quando começa o amortecimento forte

Decai o mais rapidamente possível $x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} \{C + Dt\}$



Oscilador Harmônico Amortecido

Amortecimento forte: $b > 2 m \omega_0$

$$F_x = -k x - b v_x \Rightarrow a_x = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x$$

$$k = 1 \text{ N/m}$$

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$

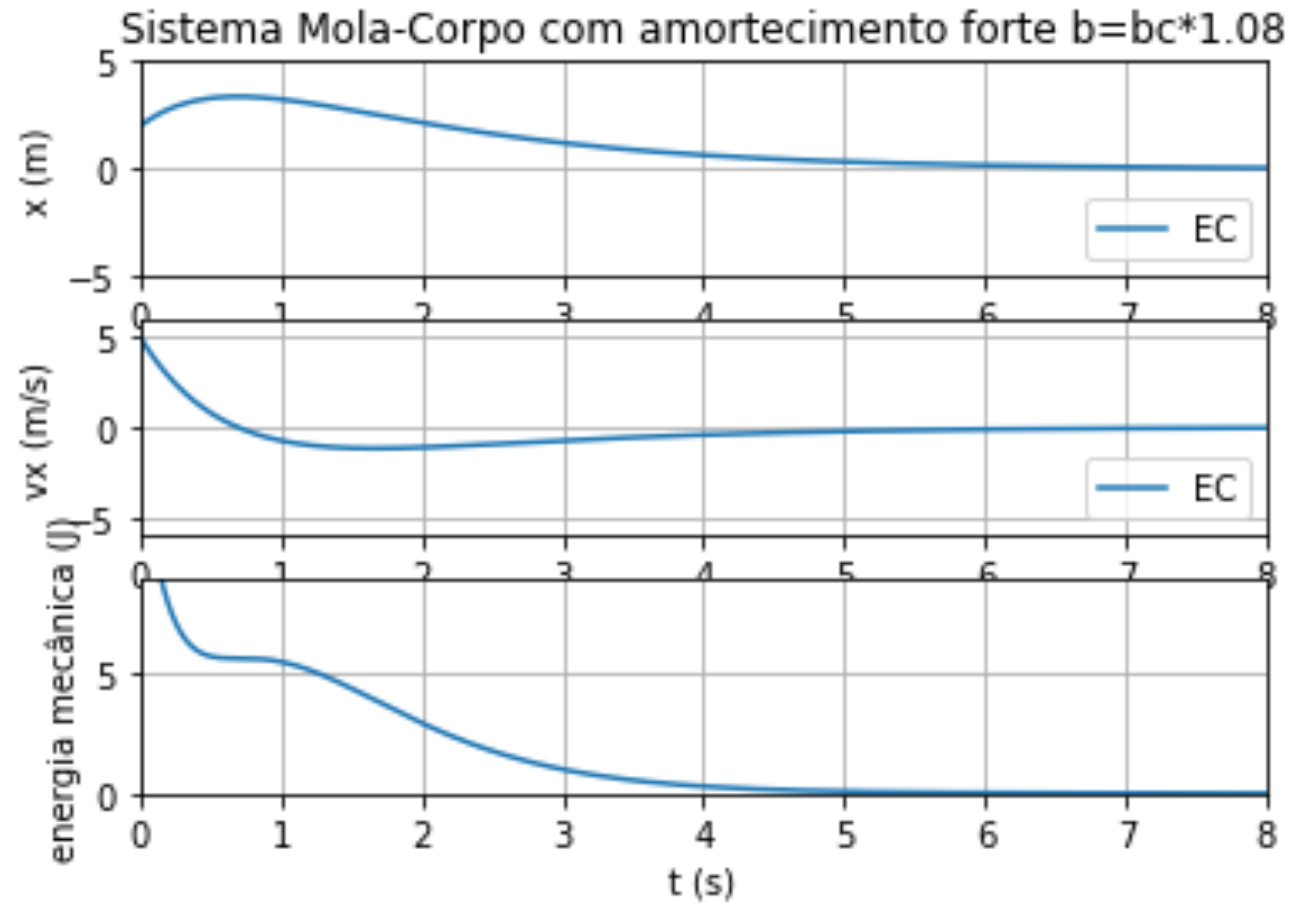
$$b_c = 2 \text{ kg/s}$$

$$b = b_c \times 1.08 = 2.16 \text{ kg/s}$$

$$x(0)=2\text{m} \quad \text{e} \quad v_x(0) = 5\text{m/s}$$

Cálculo Numérico

Usando o método de Euler-Cromer obtivemos as soluções:



Oscilador Harmônico Amortecido

Amortecimento fraco: $b < 2 m \omega_0$

$$F_x = -k x - b v_x \Rightarrow a_x = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x$$

$$k = 1 \text{ N/m}$$

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$

$$b_c = 2 \text{ kg/s}$$

$$b = b_c \times 0.08 = 0.16 \text{ kg/s}$$

$$x(0)=2\text{m} \quad \text{e} \quad v_x(0) = 5\text{m/s}$$

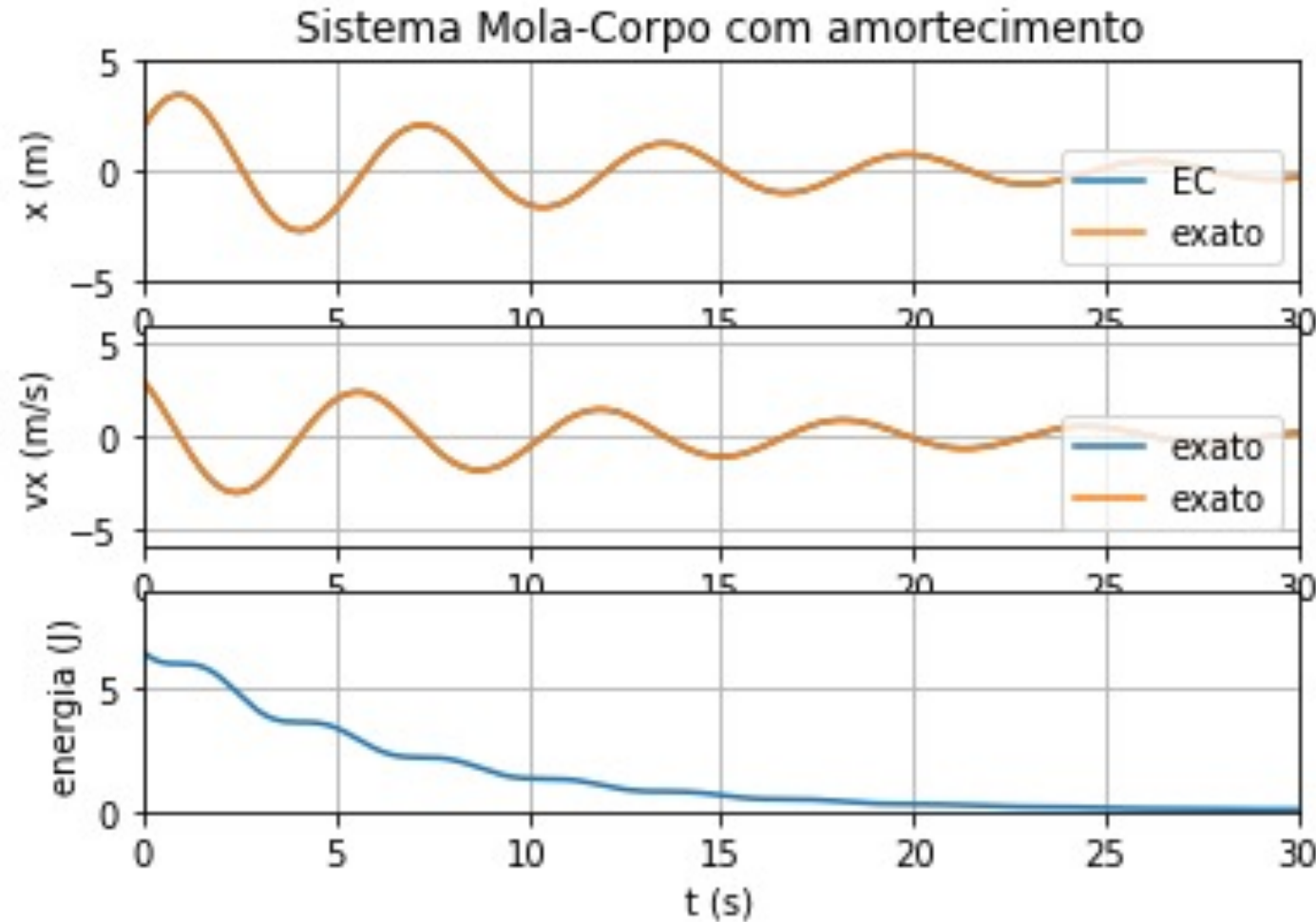
Do resultado numérico ($\delta t = 10^{-5} \text{ s}$)

$$T = 6.3034 \text{ s}$$

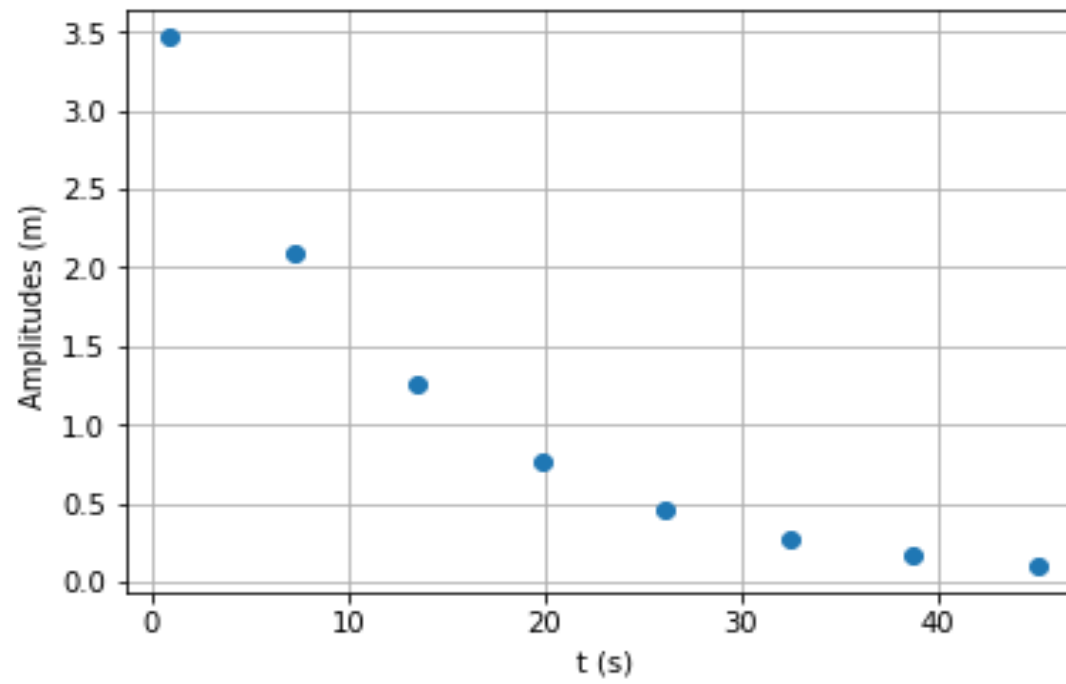
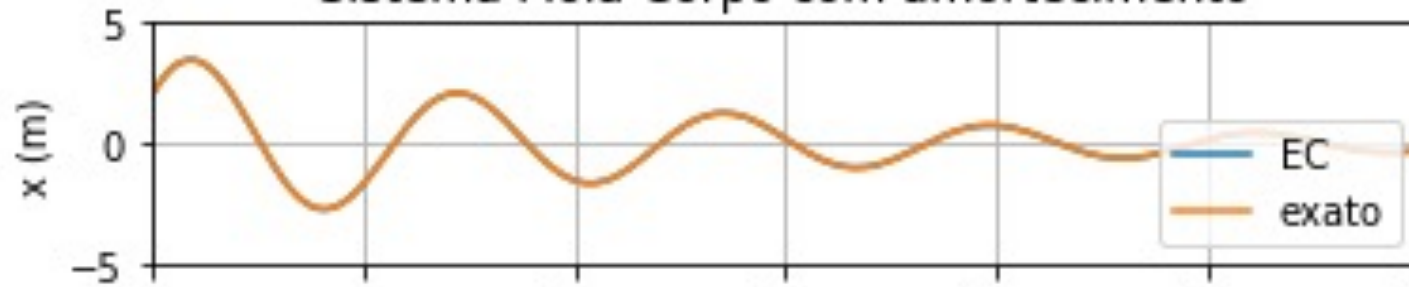
$$\omega = 0.9968 \text{ rad/s}$$

$$\omega^{\text{analítico}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = 0.9968 \text{ rad/s}$$

Cálculo Numérico



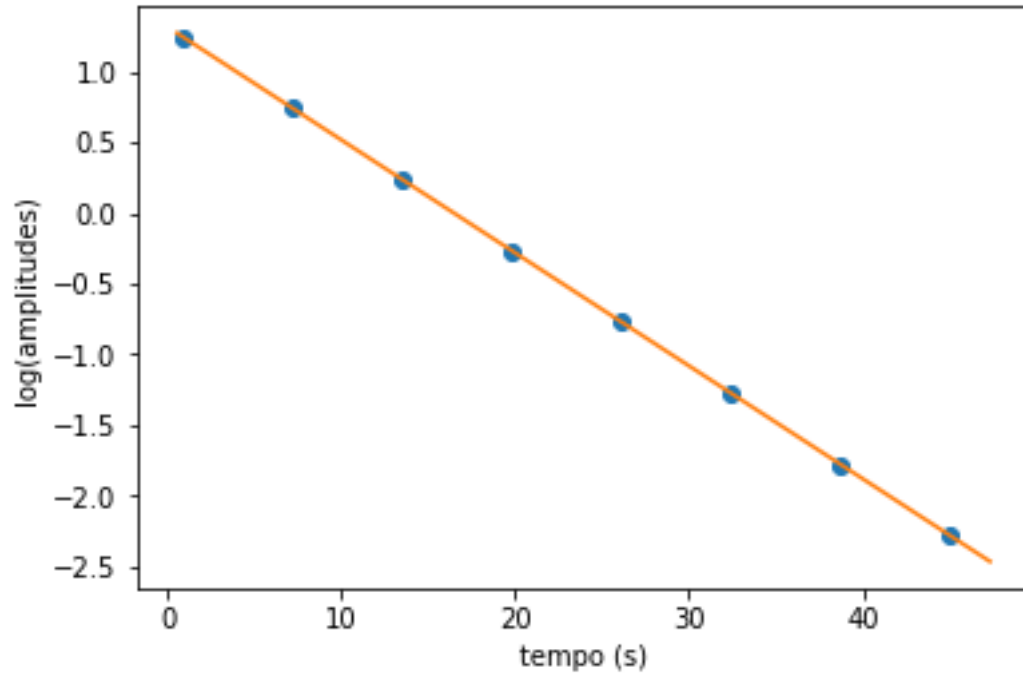
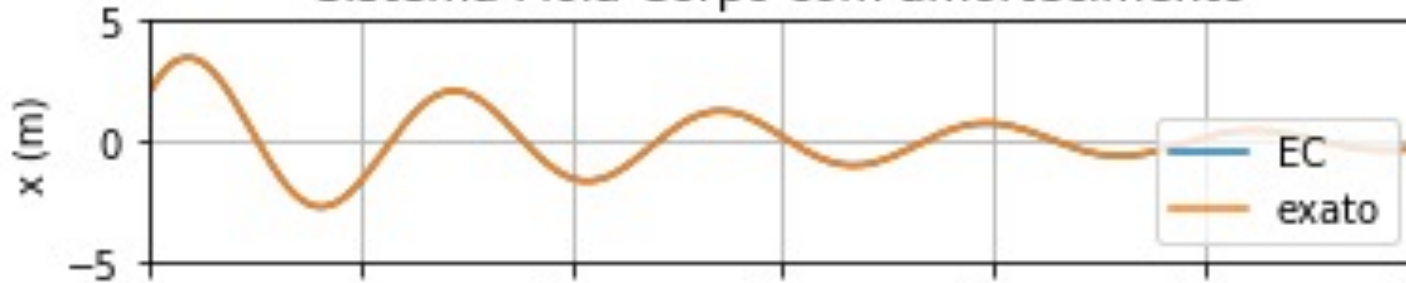
Sistema Mola-Corpo com amortecimento



Que lei segue o decréscimo das amplitudes?

Cap. 7 Oscilações

Sistema Mola-Corpo com amortecimento



Por regressão linear

$m = -0.08000031898266281$ $dm = 1.3765157967774959e-09$

$b = 1.3180827347694213$ $db = 3.737587029359997e-08$

$r^{**2} = 0.99999999999999983$

$$A = e^b e^{mt}$$

$$A = 3.736 e^{-0.0800 t} \text{ m}$$

Solução analítica:

$$A = 3.748 e^{-0.08 t}$$

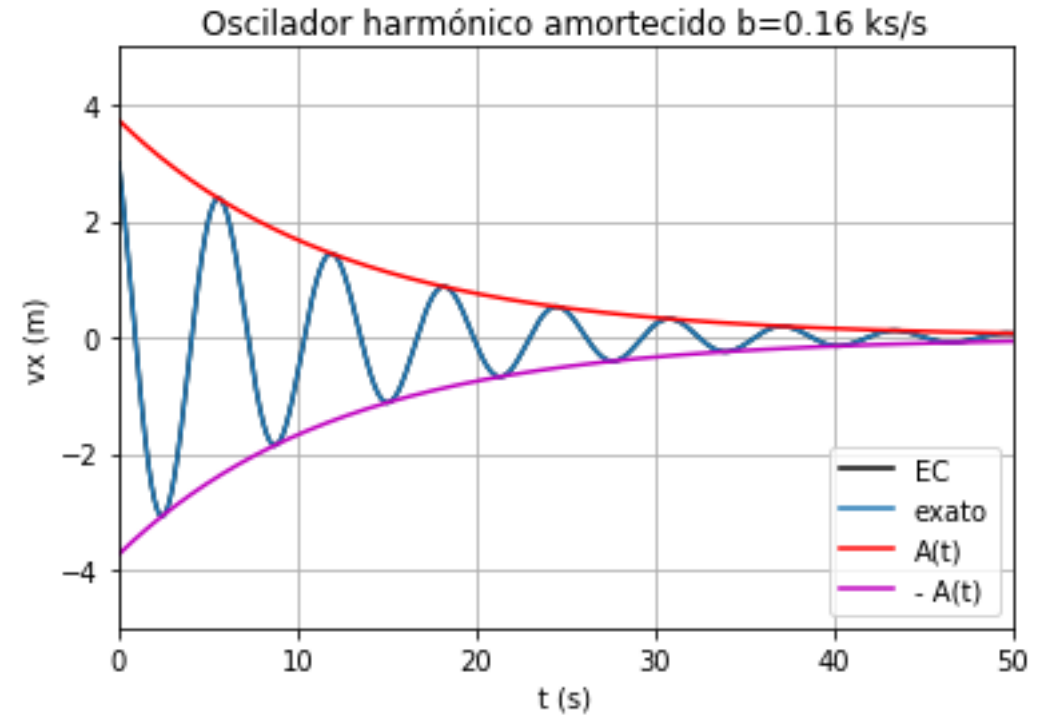
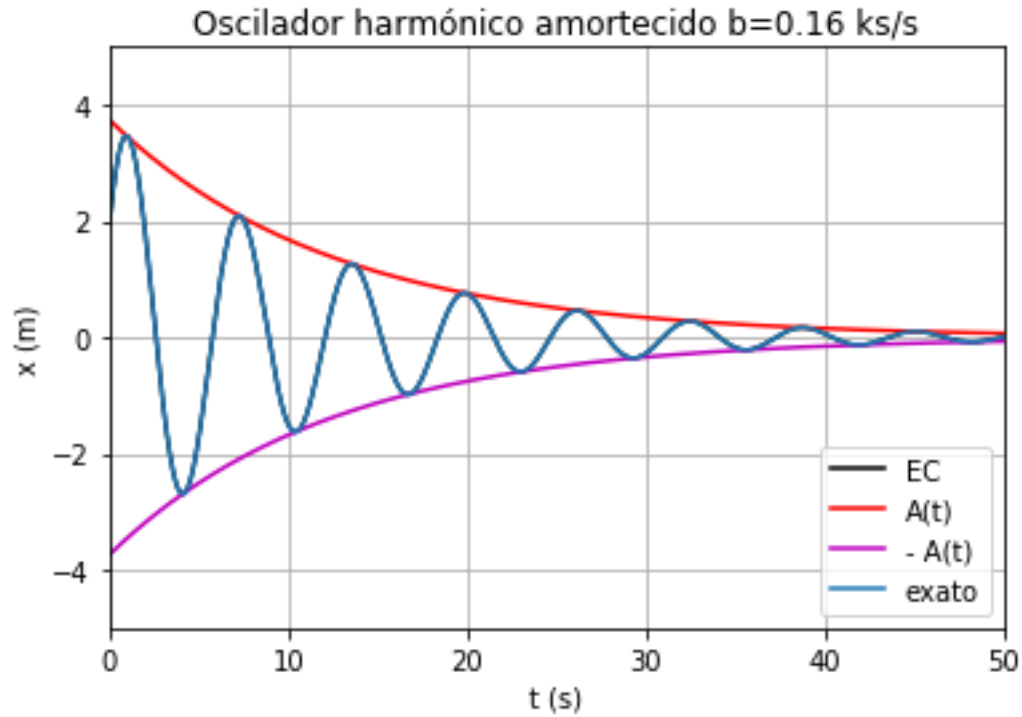
$$A_a = \sqrt{x(0)^2 + \left((v_x(0) + x(0) \frac{b}{2m})/\omega\right)^2}$$

Cap. 7 Oscilações

$$A(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi)$$

$$v_x(t) = -A(t) \left[\omega \sin(\omega t + \phi) + \frac{b}{2m} \cos(\omega t + \phi) \right]$$

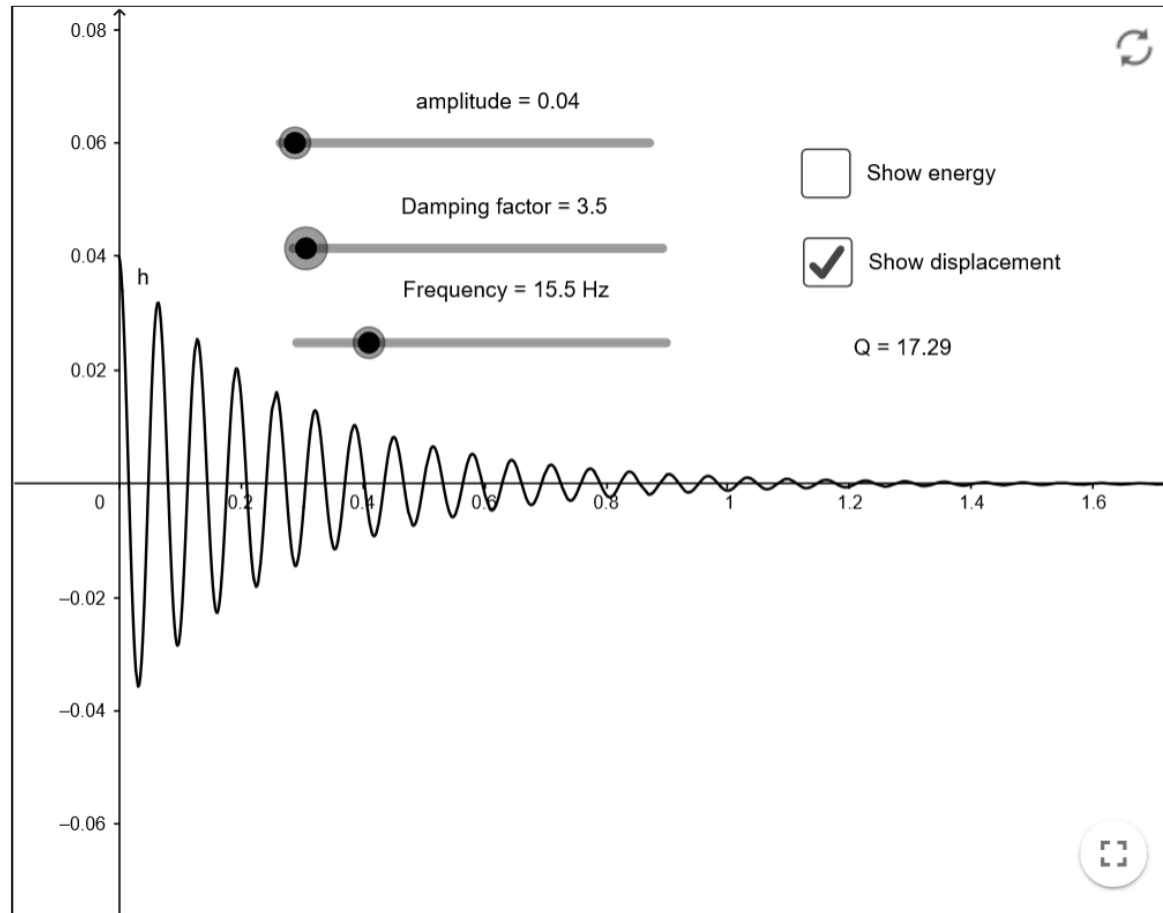


Cap. 7 Oscilações

Damped harmonic motion

Autor: Chris Hamper

Vary the damping factor to see the change in Q value



Problema 7.13

Um corpo de massa 1 kg preso a uma mola ($k = 100 \text{ N/m}$) executa um movimento harmónico simples com amplitude igual a 10 cm. A oscilação tem início numa das posições extremas.

- a) Determine a energia cinética e energia potencial elástica do oscilador no instante de tempo em que elas são iguais.
- b) Determine o primeiro instante de tempo e a posição respetiva em que isso acontece.
- c) De seguida, o oscilador fica sujeito a amortecimento ($b = 2 \text{ kg/s}$). Determine a variação de energia mecânica no segundo ($\Delta t = 1 \text{ s}$) seguinte.