Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

12ª Aula Teórica

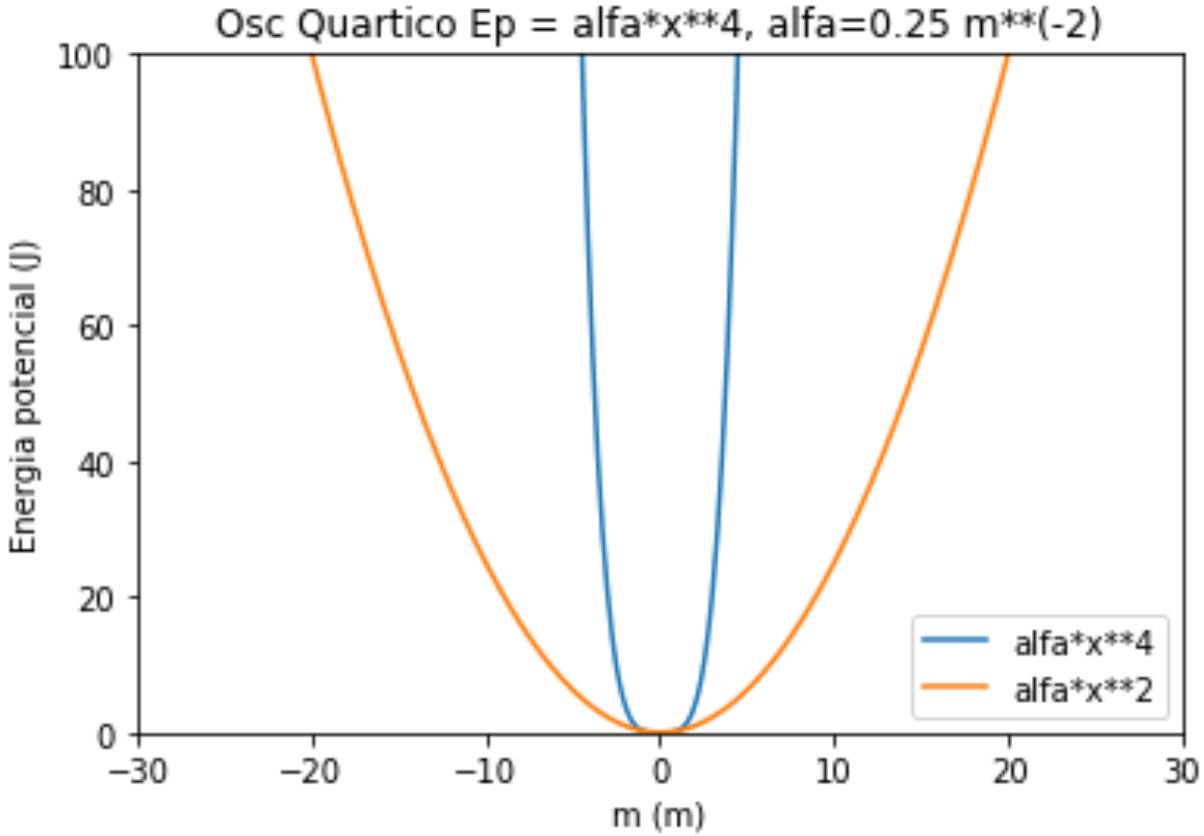
Sumário:
Cap. 8 Oscilações: Caos
Oscilador não harmónico forçado. Método de Runge-Kutta de 4ª ordem.
Oscilador de Lorenz.
Resolução de problemas.

Bibliografia:

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$$E_p = \alpha x^4$$

$\alpha = 0.25\ \mathrm{m}$
$F_x = -4\alpha x^3$



Oscilador extremamente não linear
(força não é proporcional a x , caso do oscilador harmónico)

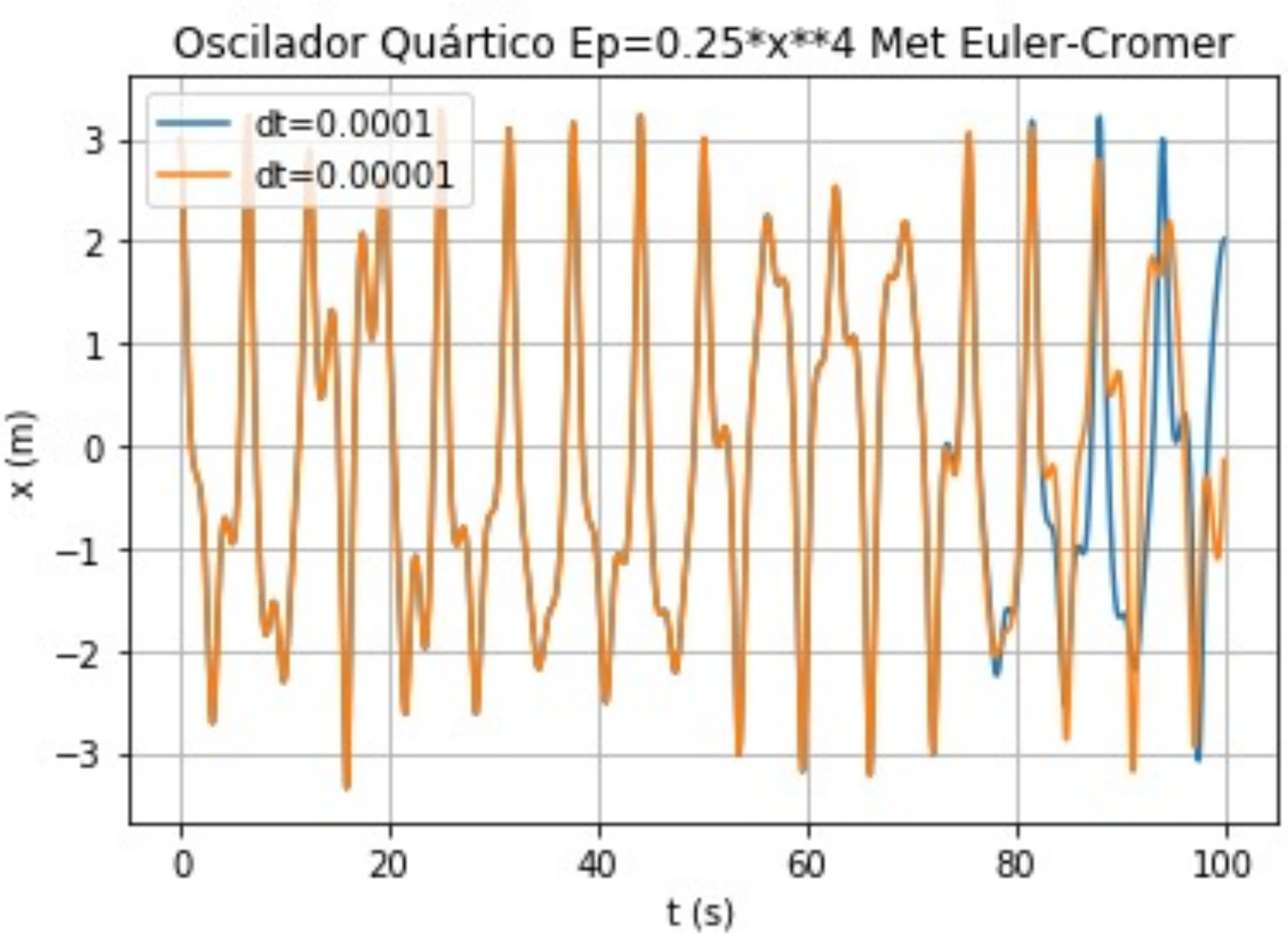
Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

Cálculo Numérico:

$E_p = \alpha x^4$
$\boldsymbol{x(t=0) = 3.0000}$ **m**
$v_x(t=0) = 0$
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s
$b = 0.05$ kg/s
$\boldsymbol{\alpha = 0.25}$ **m-2**
$F_0 = 7.5\ N$
$\omega_f = 1$ rad/s

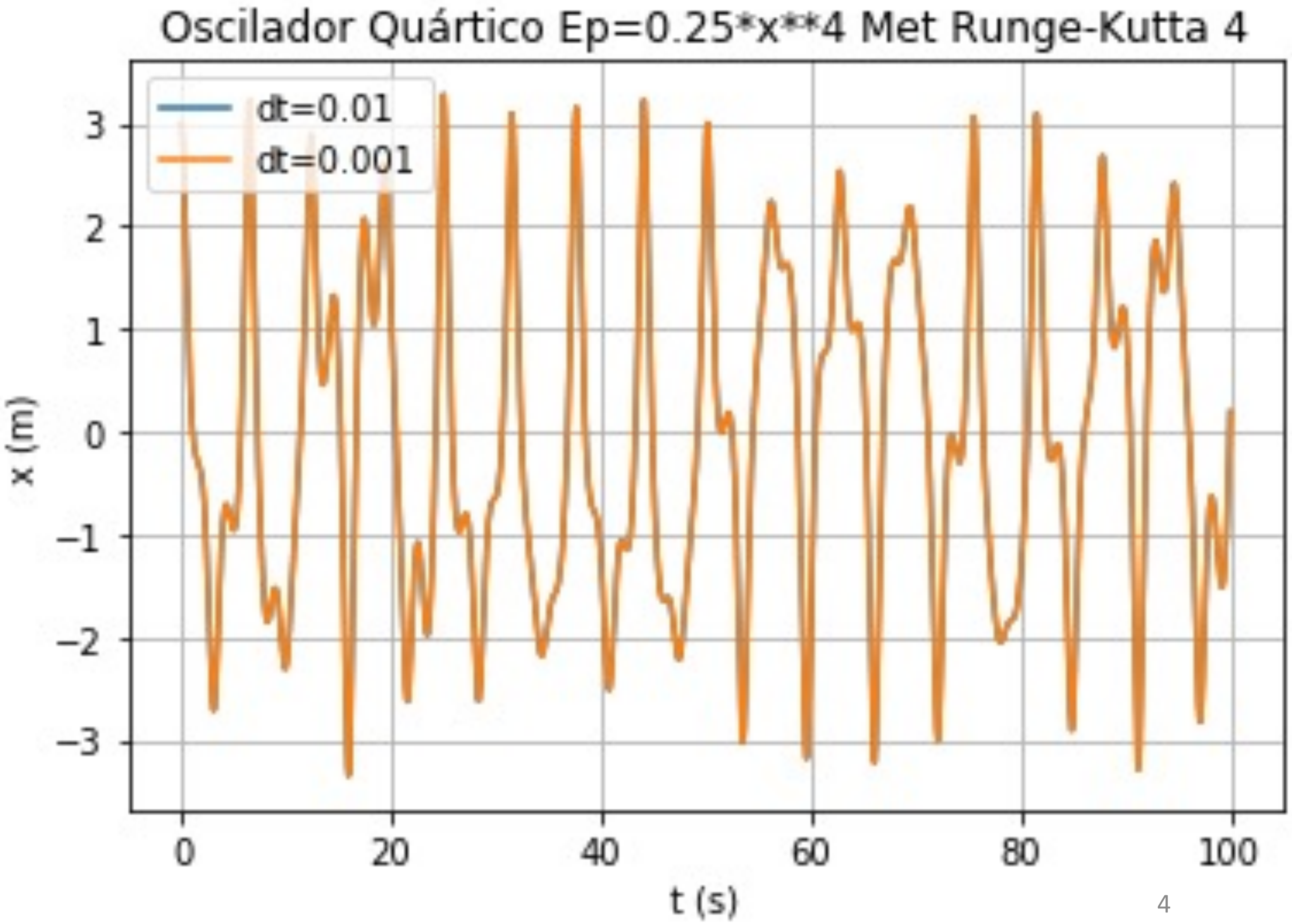
Método de Euler-Cromer

Solução <u>não</u> converge!



Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem



$E_p = \alpha x^4$
$\boldsymbol{x(t=0) = 3.0000}$ **m**
$v_x(t=0) = 0$
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s
$b = 0.05$ kg/s
$\boldsymbol{\alpha = 0.25}$ $\mathbf{m^{-2}}$
$F_0 = 7.5\ N$
$\omega_f = 1\ \mathrm{rad/s}$

Solução converge!

Equação diferencial de 2ª ordem de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = a_x(t, x, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

Exemplo: $a_x(t, x, v_x) = \frac{F_x(t,x,v_x)}{m} - \frac{b}{m}\frac{dx}{dt}$

É transformada em 2 equações diferenciais de 1ª ordem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dv_x}{dt} = a_x(t, x, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

E aplica-se a cada equação diferencial o método numérico conveniente

Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$$

Método de Euler

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x\left(t, v_x(t)\right) \times \delta t$$

ou,

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + c_1 \times \delta t$$

$$c_1 = a_x\left(t, v_x(t)\right)$$

Erro global $\mathcal{O}(\delta t)$

Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

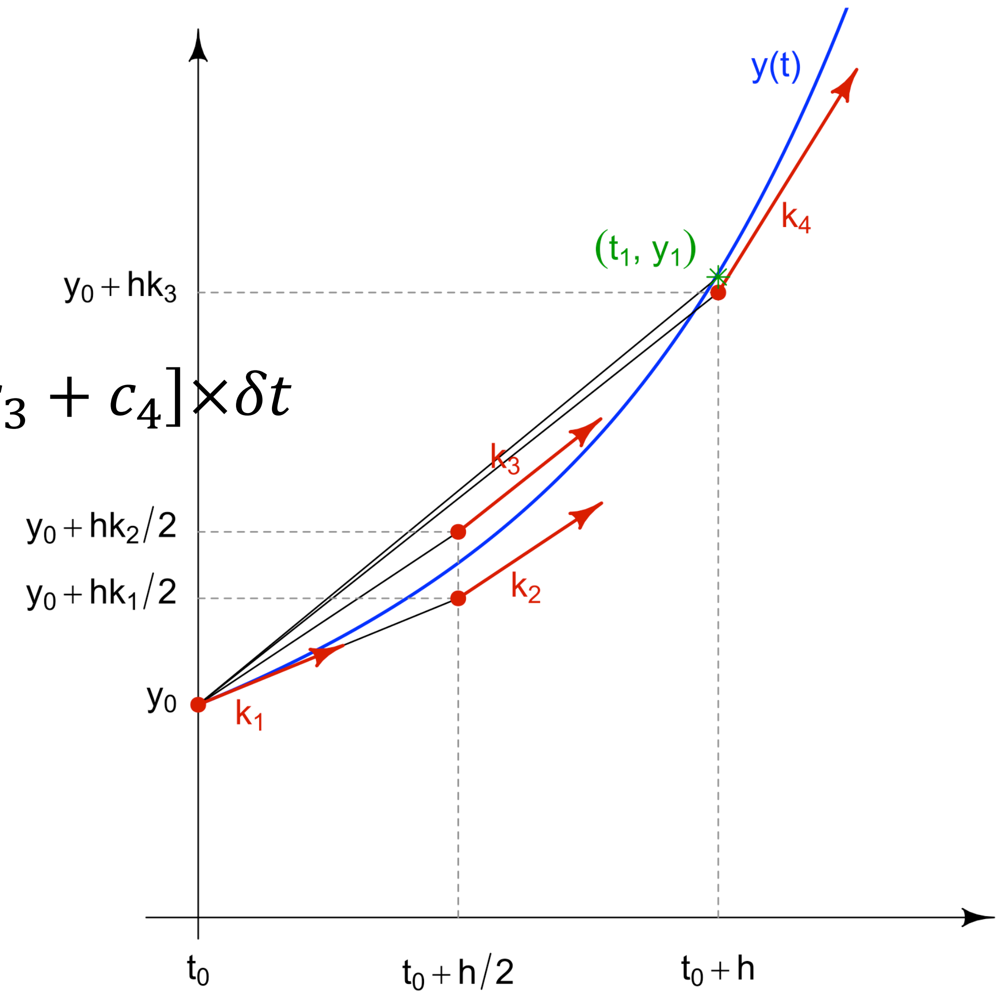
$$\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6}[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$

em que

$$\begin{aligned} c_1 &= a_x\big(t, v_x(t)\big) \\ c_2 &= a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1 \frac{\delta t}{2}\right) \\ c_3 &= a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2 \frac{\delta t}{2}\right) \\ c_4 &= a_x(t + \delta t, v_x(t) + c_3\, \delta t) \end{aligned}$$



Erro global $\mathcal{O}(\delta t^4)$

Problema 8.5:

Implemente o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para calcular a velocidade com que um volante de badmington atinge 2 s depois de ser largado. A velocidade terminal do volante é de 6.80 m/s, e a aceleração é

$a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2}|v_y|v_y$.

Compare o valor obtido com o valor exato, de acordo com a lei $v_y(t) = v_T \tanh(\frac{g\,t}{v_T})$.

R: 6.75747944 m/s

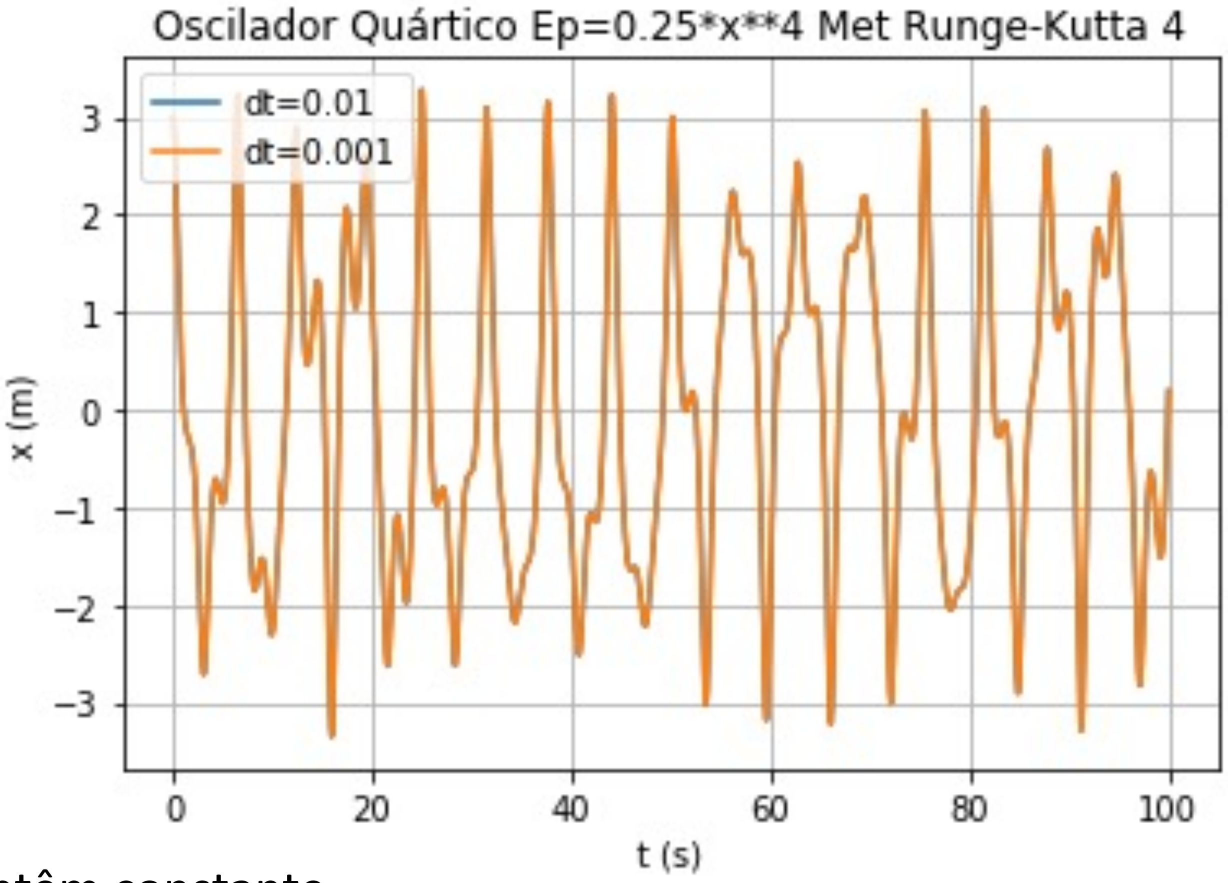
No e-learning está a função

```
def rk4(t,vx,acelera,dt):
    """
    Integração numérica de equação diferencial de 2ª ordem:
               dvx/dt = ax(t,vx)    de valor inicial
    Erro global:  proporcional a dt**4
    acelera=dvx/dt=Força(t,vx)/massa  : acelera é uma FUNÇÃO
    input:  t = instante de tempo
           vx(t) = velocidade
           dt = passo temporal
    output: vxp = vx(t+dt)
    """
```

```
global g,vt
def acelera(t,vx):
    ax=g-g/vt**2*np.abs(vx)*vx
    return ax
```

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$E_p = \alpha x^4$
$\boldsymbol{x(t=0) = 3.0000}$ **m**
$v_x(t=0) = 0$
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s
$b = 0.05$ kg/s
$\boldsymbol{\alpha = 0.25}$ **m⁻²**
$F_0 = 7.5\ N$
$\omega_f = 1$ rad/s
Método de Runge-Kutta de 4ª ordem
Solução converge!



Caraterísticas:

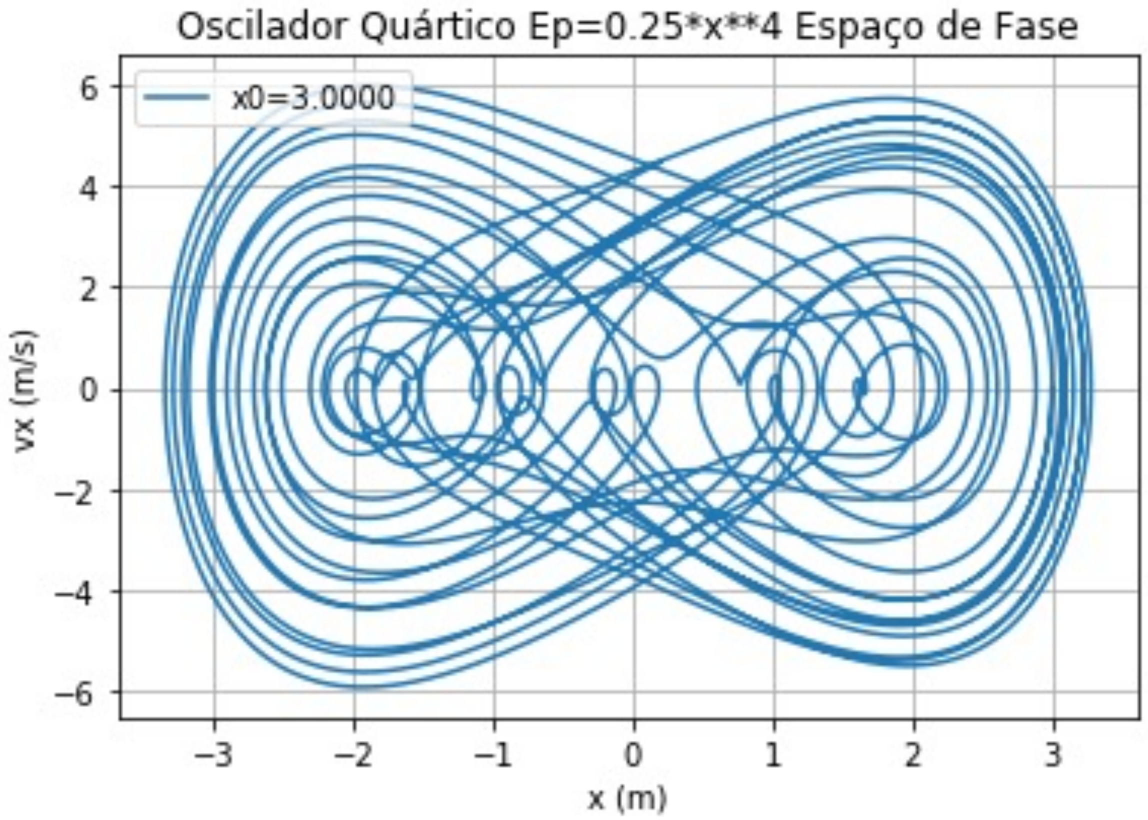
* A amplitude (posição máxima e mínima) não se mantêm constante
* O período (intervalo de tempo entre dois máximos de amplitude) não se mantêm constante

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$E_p = \alpha x^4$
$\boldsymbol{x(t=0) = 3.0000}$ **m**
$v_x(t=0) = 0$
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s
$b = 0.05$ kg/s
$\boldsymbol{\alpha = 0.25}$ **m-2**
$F_0 = 7.5\ N$
$\omega_f = 1$ rad/s
Método de Runge-Kutta de 4ª ordem
Solução converge!

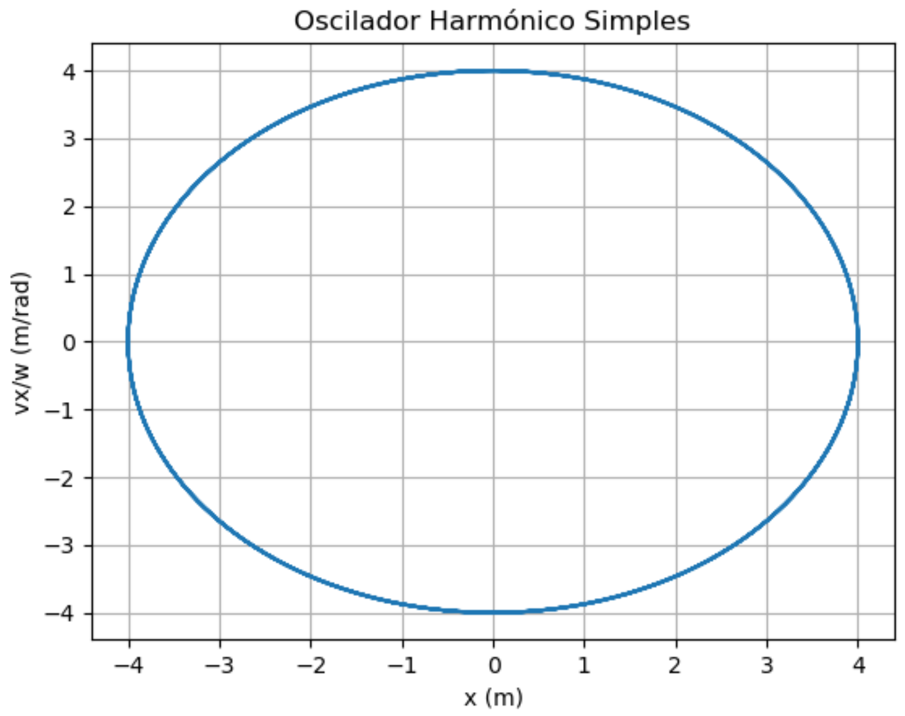
Caraterísticas:
* A figura no espaço de fase é muito complexa

Espaço de Fase:

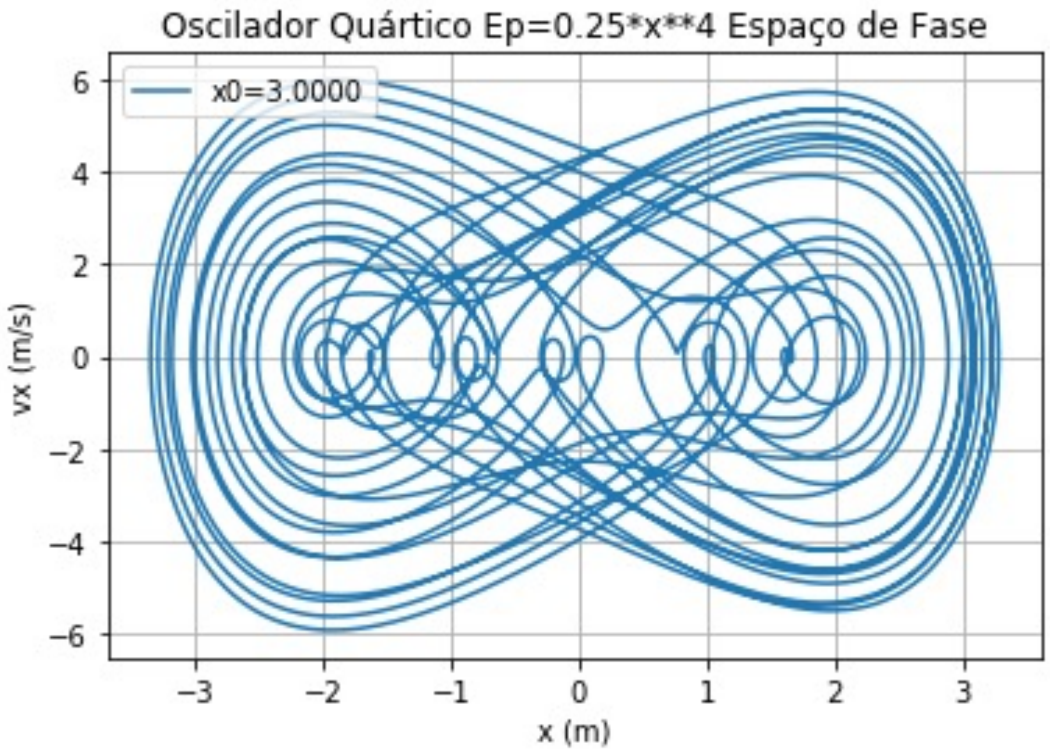


Espaço de fase

Oscilador Harmónico Forçado e Amortecido



Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado e Amortecido



As duas trajetórias no espaço das fases contrastam imenso!

Harmónico: Trajetória fechada (parte estacionária)

Quártico: A trajetória nunca se fecha!

- Cap. 7 Oscilações: Condições iniciais **extramente próximas**

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$E_p = \alpha x^4$

$\boldsymbol{x(t=0) = 3.0000}$ **m e 3.0003m**

$v_x(t=0) = 0$

$k = 1$ N/m;

$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

$b = 0.05$ kg/s

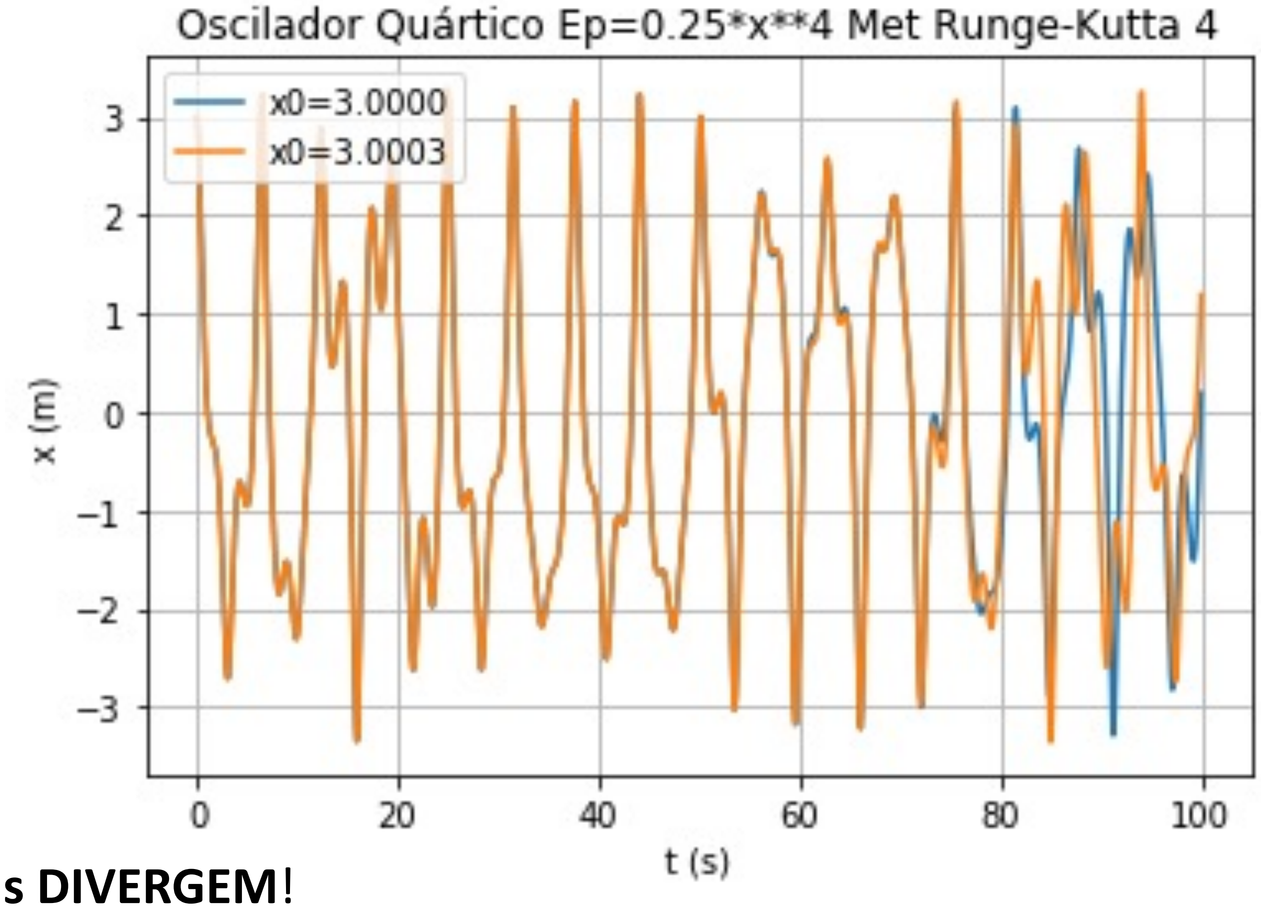
$\alpha = 0.25\ \mathrm{m}^{-2}$

$F_0 = 7.5\ N$

$\omega_f = 1\ \mathrm{rad/s}$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Solução converge!



Caraterísticas:

- Soluções com condições iniciais **extramente próximas DIVERGEM**!
- A diferença entre condições iniciais pode ser **menor que o erro experimental de cada condição inicial**
- **Apesar de a solução ser ÚNICA (para uma condição inicial), não se consegue calcular (prever) a evolução a médio prazo - CAOS -**

Osciladores Forçados:

- Os. Harmónico Amortecido e Forçado no regime estacionário:
  Insensíveis às condições iniciais

- para alguns parâmetros do Osc. Quártico Amortecido e Forçado, ou seja para Forças não lineares:
  Extrema sensibilidade às condições iniciais – **CAOS**

Edward Norton Lorenz (1917-2008)

Fundador da teoria do caos.

Contribuições muito importantes dadas às ciências da atmosfera.

Lorenz foi professor de meteorologia no MIT, tendo sido em matemática a sua formação inicial, obtida na Universidade de Harvard.

Por João Corte-Real, Universidade de Évora

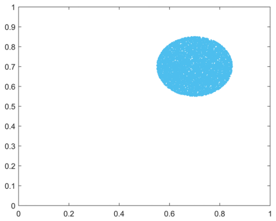
Caos

"Quando o presente determina o futuro, mas o presente aproximado não determina aproximadamente o futuro."

Definição de Sistema caótico:

1. Extrema sensibilidade às condições iniciais
2. Não periódico
3. Topologicamente transitivo

   trajetórios eventualmente passam em qualquer região do espaço



Nota: sempre movimento determinístico

Equações de Lorenz

Estudo da evolução temporal da convecção dum fluido com num modelo muito simples.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = r\,x\ - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy\ - bz \\ \quad x(t = 0) = x_0 \\ \quad y(t = 0) = y_0 \\ \quad z(t = 0) = z_0 \end{cases}$$

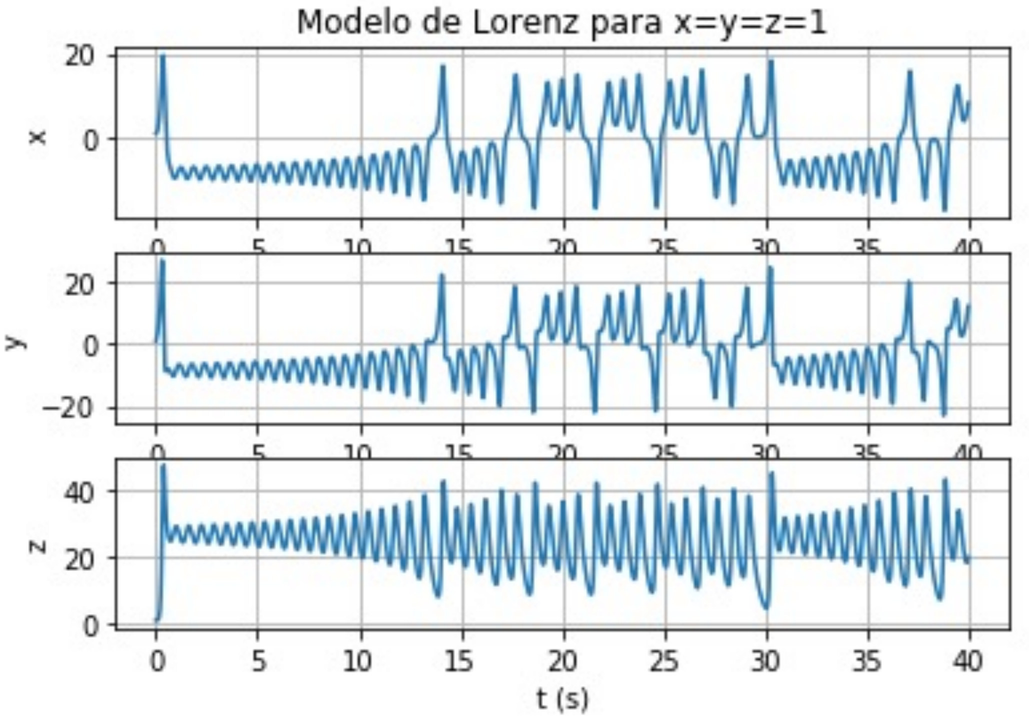
As variáveis x, y e z não possuem significado físico direto.

Equações de Lorenz

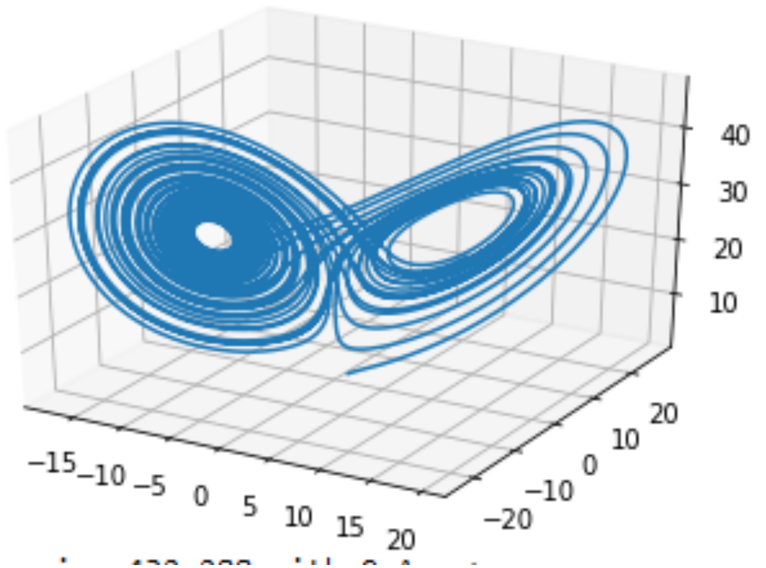
Estudo da evolução temporal da convecção dum fluido com num modelo muito simples.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = r\,x\, - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy\, - bz \\ \quad x(t=0) = x_0 \\ \quad y(t=0) = y_0 \\ \quad z(t=0) = z_0 \end{cases}$$

$$\sigma = 10; b = \frac{8}{3}; r = 28;$$



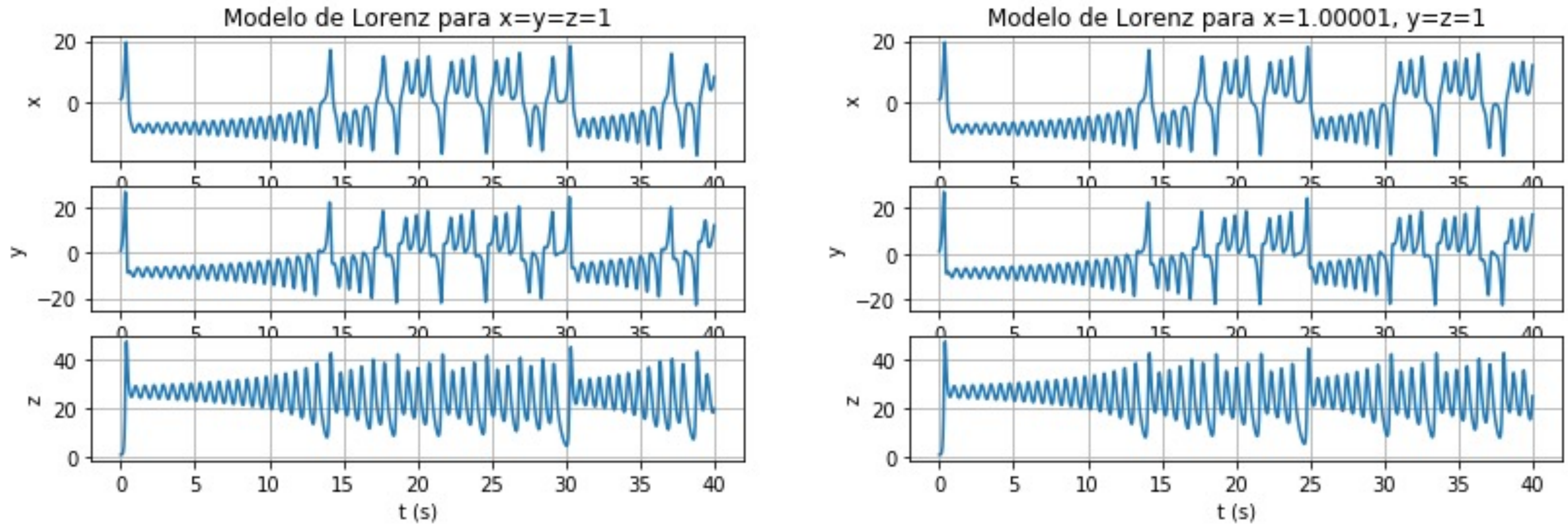
Espaço de fase



Solução não periódica e irregular

Equações de Lorenz

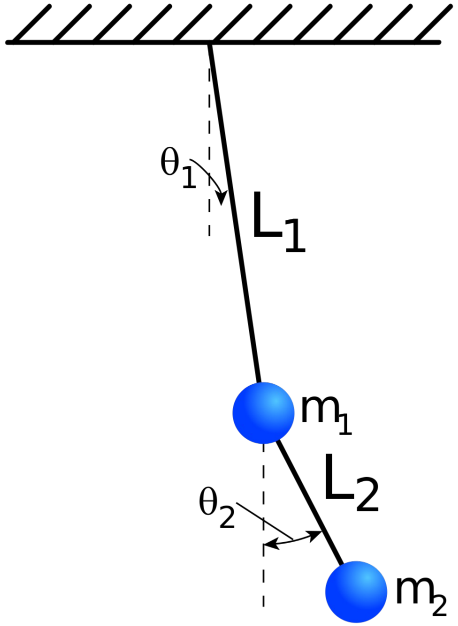
Estudo da evolução temporal da convecção dum fluido com num modelo muito simples.



Estas equações de Lorenz possuem uma <u>extrema sensibilidade às condições iniciais:</u>

= CAOS

Duplo Pêndulo



Análise das forças, (gravidade e tensão nas ligações)
Relações entre posições x e y e ângulos θ

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{-g(2m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2 g\sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\sin(\theta_1 - \theta_2)m_2[L_2{\omega_2}^2 + L_1\cos(\theta_1 - \theta_2)\,{\omega_1}^2]}{L_1[2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2)]}$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)[L_2 m_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\,{\omega_2}^2 + L_1\,(m_1 + m_2){\omega_1}^2 + \mathrm{g}(m_1 + m_2)\cos\theta_1]}{L_2[2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2)]}$$

$$\theta_1(t = 0) = \theta_{10}$$
$$\theta_2(t = 0) = \theta_{20}$$
$$\omega_1(t = 0) = \omega_{10}$$
$$\omega_2(t = 0) = \omega_{20}$$

https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html

Teorema de Poincaré-Bendixon:

O caos não pode ser observado em sistemas autónomos bidimensionais:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

Ex: oscilador harmônico simples, pêndulo simples...

Note: as funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ não dependem do tempo, a variável independente.

Teorema de Poincaré-Bendixon:

O caos não pode ser observado em sistemas autónomos bidimensionais:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$$

Não é o caso das (3) equações de Lorenz

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma\,(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = r\,x\ - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy\ - bz \\ \quad x(t=0) = x_0 \\ \quad y(t=0) = y_0 \\ \quad z(t=0) = z_0 \end{cases}$$

nem do caso das (4) equações do duplo pêndulo

e do Osc. Quártico Amortecido e Forçado?

são 2 equações **não autónomas**
(forçamento depende de tempo)

podem ser escritos como 3 autónomas com dy/dt=1