Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

8ª Aula Teórica

Sumário:
Cap. 5 Lei da Conservação da energia: Trabalho realizado por forças não conservativas.
Integração numérica.
Cap. 6 lei de conservação do momento: Momento e colisões

Bibliografia:
Cap. 6: Serway, cap. 9; Sørenssen, cap. 11 e 12;

- Teorema Trabalho – Energia

$$W_{0,1} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 = E_{c1} - E_{c0}$$

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ = **Trabalho** = $W_{0,1}$

$\frac{1}{2} m\, |\vec{v}|^2$ = **Energia Cinética** = E_c

Para forças conservativas:

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$$ **Energia potencial**

- Lei da conservação da Energia Mecânica $\quad E = E_c + E_p$

- Sobreposição do trabalho

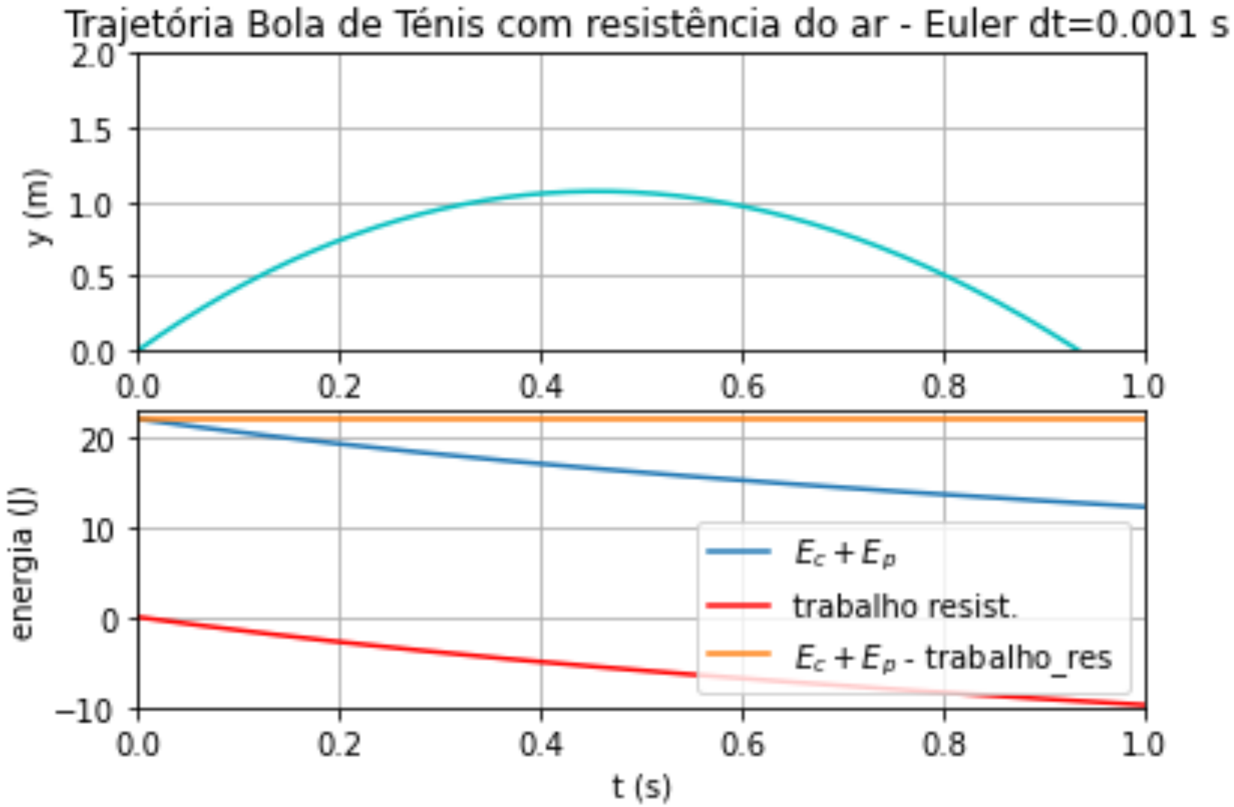
$$W_{0,1} = W_{0,1}^{(conservativo)} + W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$
$$= E_{p0} - E_{p1} + W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$

$$\Rightarrow \quad E(0) = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} - W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$

Trabalho de forças não conservativas

$$E(0) = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} - W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$

Ex: Movimento da bola de ténis com resistência do ar



Cálculo do trabalho realizado pela força não conservativa:

$\boldsymbol{W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}$ e $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

$$W^{\,(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_{res,x}\,v_x\,dt + F_{res,yx}\,v_y\,dt + F_{res,z} v_z\,dt\right)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\,v_x\,dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\,v_y\,dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,z} v_z\,dt$$

Ex: Movimento da bola de ténis com **resistência do ar** (a 2 dimensões)

$$W^{\,(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\,v_x\,dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\,v_y\,dt$$

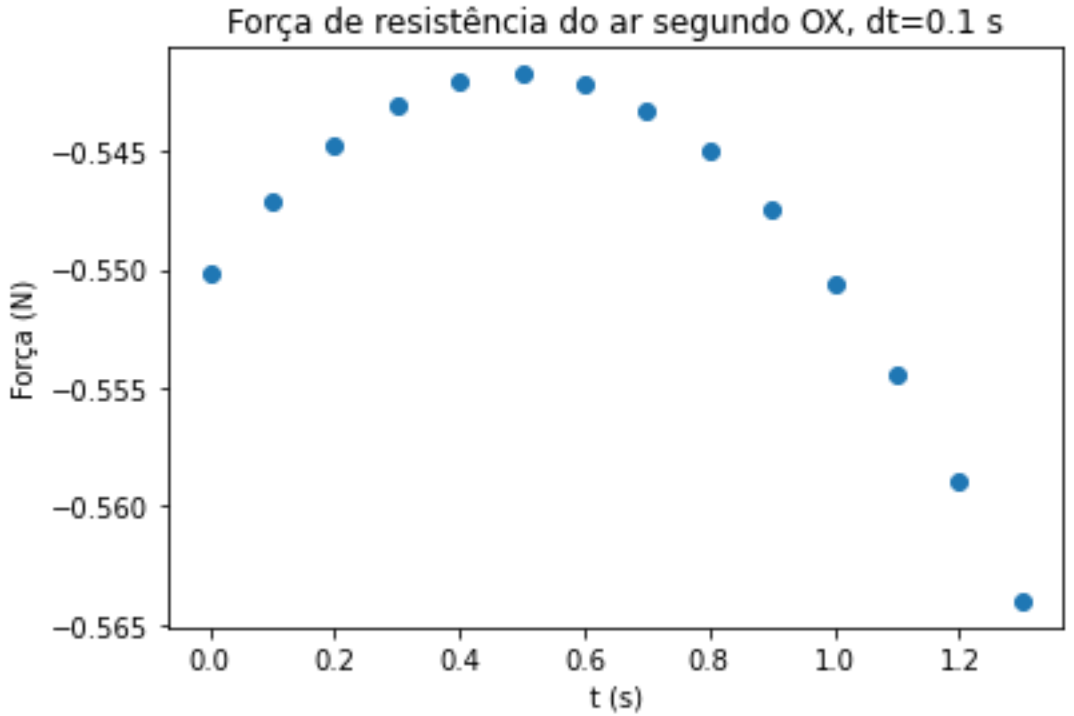
Cálculo do trabalho realizado pela força não conservativa: Força de resistência do ar

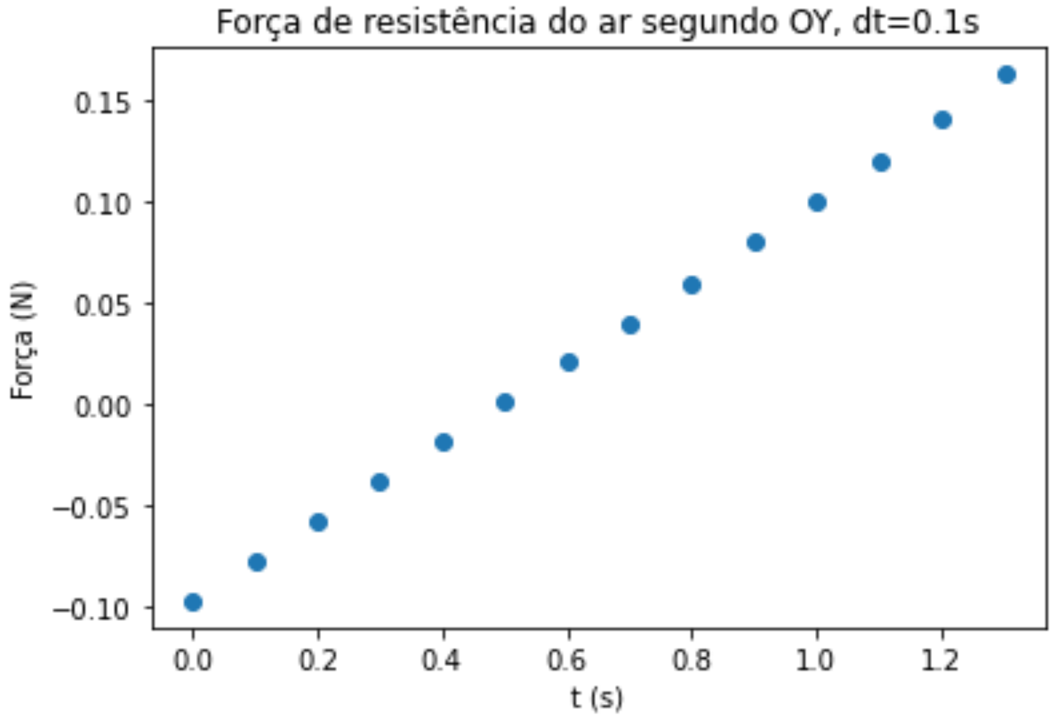
Problemas cap 5 Bola de Ténis

3. Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical.

A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$





Integração numérica a 1 dimensão:

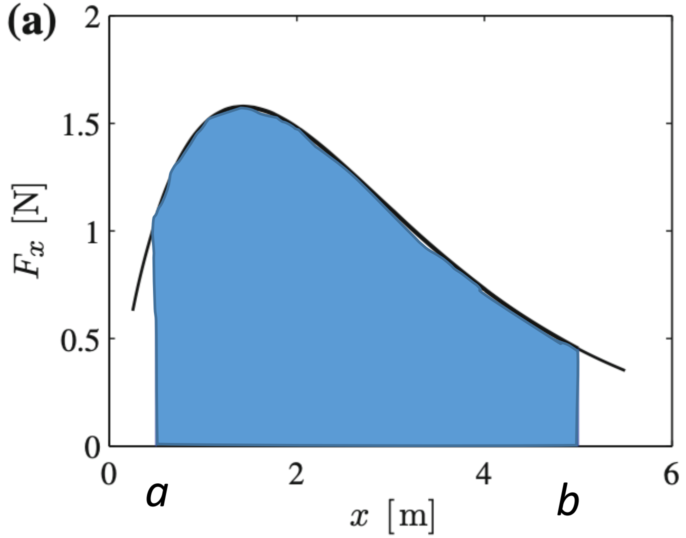
Quando temos uma função $f(x)$ expressa só em pontos x_i, de **índices** $\boldsymbol{i = 0, 1, 2, 3, \dots, n}$, igualmente espaçados por δx, num total de $\boldsymbol{n+1}$ **elementos.**

O integral desta função de pontos discretos, entre dois pontos a e b

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

e onde $n = (b-a)/\delta x$ e $x_i = a + i\,\delta x$, **obtêm-se facilmente por integração numérica.**

A interpretação geométrica do integral é a área limitada pela função entre os dois pontos extremos a e b.



Integração numérica

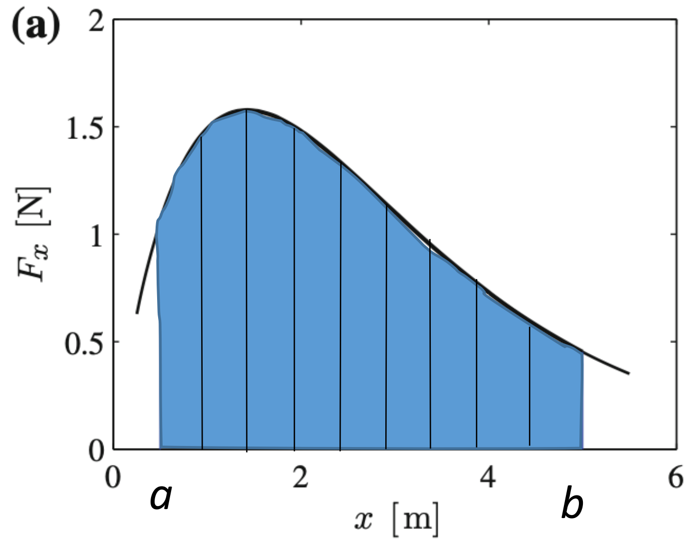
Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de n fatias de espessura** $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = \delta x}$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

Se dividirmos a área em n fatias de espessura

$$\delta x = (b - a)/n$$

e

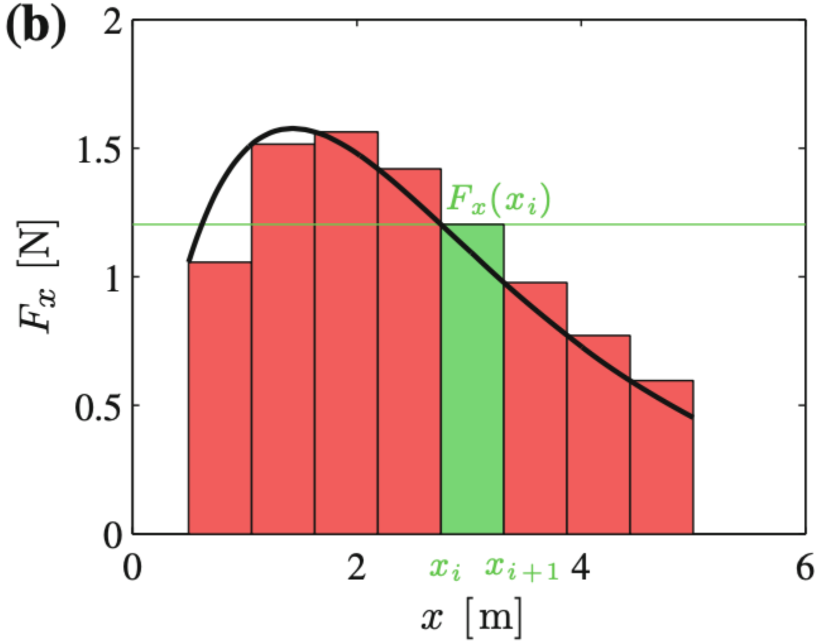
$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx$$



$$x_i = a + (i-1)\delta x$$

Integração numérica

Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de n fatias de espessura** $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = \delta x}$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.



$\delta x = (b - a)/n$

e $\quad I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$

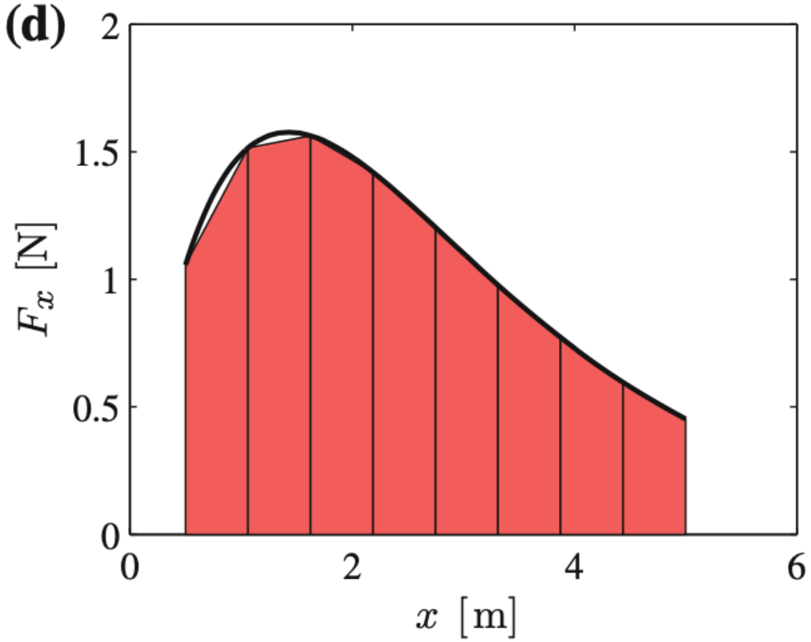
Aproximação retangular: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \;\approx\; f(x_i)\,\delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\delta x = \delta x \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$= \delta x \times [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})]$$

Integração numérica

Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de n fatias de espessura** $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = \delta x}$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.



$\delta x = (b - a)/n$

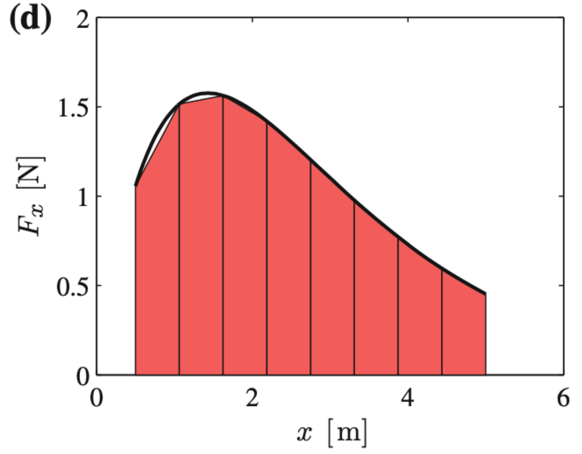
e $\quad I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$

Aproximação trapezoidal: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\,\delta x$$

$$= \delta x \times \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

Integração numérica



Aproximação trapezoidal: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\,\delta x =$$

$$= \delta x \times \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

Em python podemos obter o integral da função $f(x)$ pela aproximação trapezoidal:

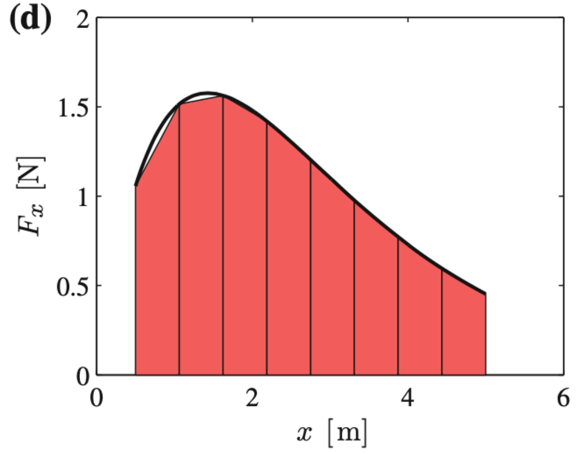
```
Integral = dx * ((f[0]+f[n])*0.5+np.sum(f[1:n]))
```

Note que temos $n+1$ elementos da função. (Em f[1:n] não entra o elemento f[n])

Em termos da dimensão do vetor a integrar, ou seja de $n+1 = n_{dim}$, a integração trapezoidal é calculada por

Integral = dx * ((f[0]+f[n_{dim}-1])*0.5+np.sum(f[1: $n_{dim} - 1$]))

Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal:



$$erro = \left| \overbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx}^{\text{exato}} - \overbrace{\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\ \delta x}^{\text{ap. trapezoidal}} \right|$$

Série de Taylor à volta de x_i

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i) \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} + (x - x_i)^2 \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} + \mathcal{O}((x - x_i)^3)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + (x - x_i) \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} + (x - x_i)^2 \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} + \mathcal{O}((x - x_i)^3) \right] dx$$

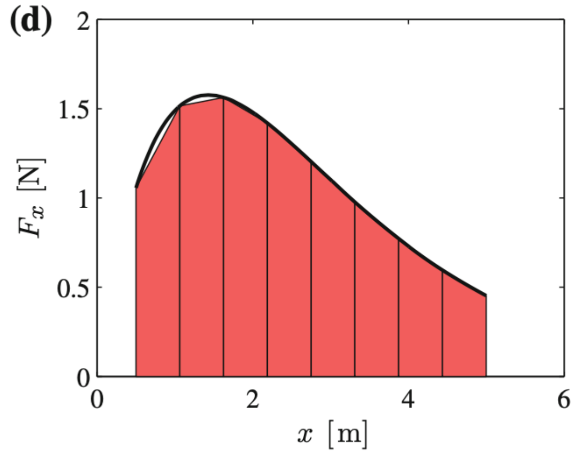
$$= f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3} \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} + \mathcal{O}\left((x_{i+1} - x_i)^4\right)$$

$$= f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal: $erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right)_{exato} - \left(\frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\ \delta x \right)_{ap.trap} \right|$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

exato



Agora,

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} + (x_{i+1} - x_i)^2 \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} + \mathcal{O}((x_{i+1} - x_i)^3)$$

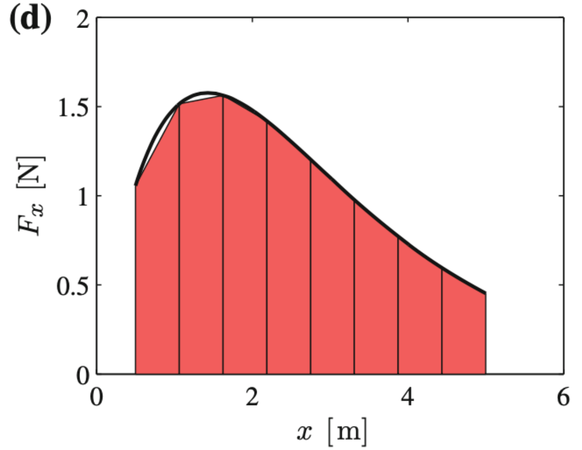
$$= f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} = f(x_i) + \frac{1}{2} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{4} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \delta x = f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{4} + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

aproximação trapezoidal

Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal:



Substituir no erro que se pretende calcular

$$erro = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx - \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\, \delta x \right|$$

$$= \left| \left(f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{6} + \sigma(\delta x^4) \right) - \left(f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{4} + \sigma(\delta x^4) \right) \right| = \sigma(\delta x^3)$$

O erro local de truncatura de um integral de uma fatia é da $\sigma(\delta x^3)$.

O erro global do integral completo, que é um somatório de n fatias, é o acumular dos erros locais, sendo

$$n\, \sigma(\delta x^3) = \frac{b-a}{\delta x}\, \sigma(\delta x^3) = \sigma(\delta x^2)$$

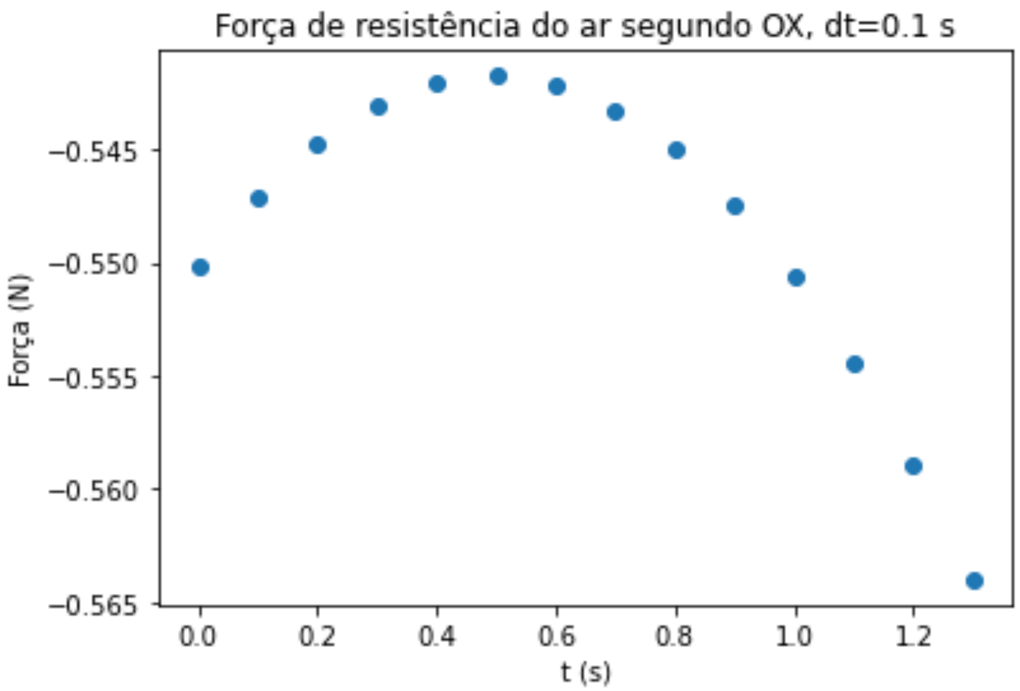
Cálculo do trabalho realizado pela força não conservativa: Força de resistência do ar

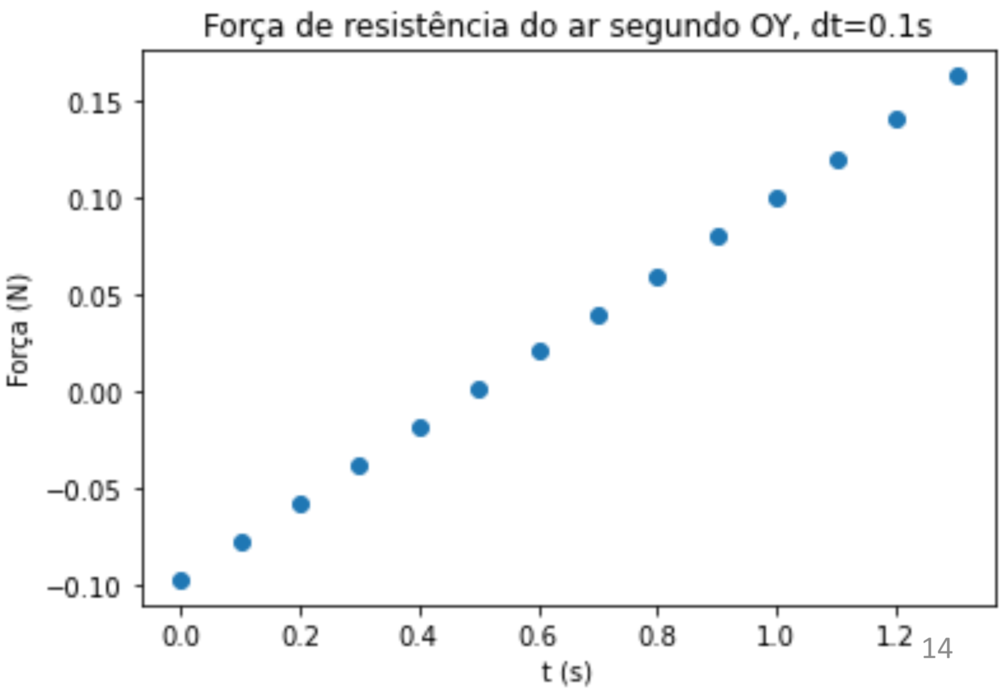
Problemas cap 5 Bola de Ténis

3. Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

c) Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes: $t_a = 0$, $t_b = 0.4$ s e $t_c = 0.8$ s.

$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$





Cálculo do trabalho realizado pela força não conservativa: Força de resistência do ar

Problemas cap 5 Bola de Ténis

3. Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

c) Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes: $t_a = 0$, $t_b = 0.4$ s e $t_c = 0.8$ s.

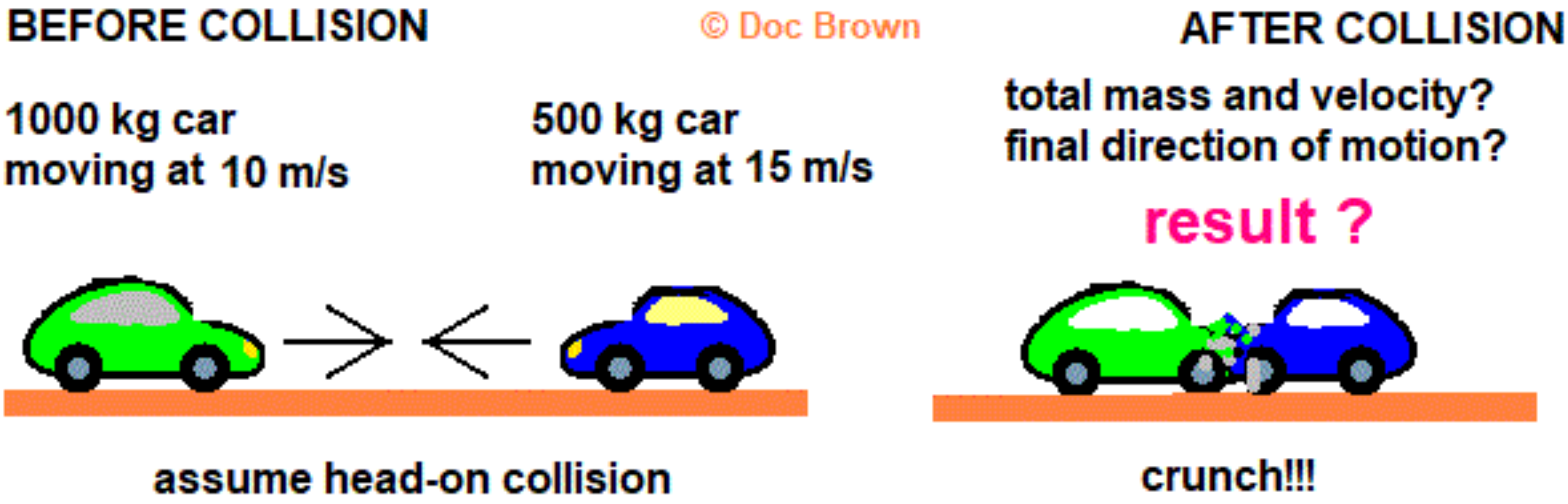
$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$

1. Calcular velocidade pelo método de Euler ⇒ forças em cada passo
2. Integral numérico

Resultado:

c) 0 J; -4.98 J; - 8.38 J

Cap. 6 Momento e colisões



Cap. 5 Momento e colisões

Equação fundamental da dinâmica:

$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \vec{v}(t) \quad \Longrightarrow \vec{r}(t)$

obtemos <u>a velocidade e a posição em função do tempo</u>

Teorema Trabalho-Energia:

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;\; = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$ obtemos a <u>velocidade em função da posição</u>

e a <u>lei de Conservação da Energia Mecânica</u> (para sistemas só com forças conservativas)

Impulso de uma força: $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt$

$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$ vamos obter a <u>lei da Conservação do Momento</u> (para sistemas isolados)

Cap. 6 Momento e colisões

Teorema Impulso-momento e Conservação do momento

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m\vec{a}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m\frac{d\vec{v}}{dt}\,dt = m\,\vec{v}(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

em que $\boldsymbol{m\vec{v}(t)} = \boldsymbol{\vec{p}(t)}$ é o **momento** do corpo no instante t.

- **A lei fundamental da dinâmica é reescrita em termos do momento:**

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- Quando a massa do corpo é constante obtemos a forma conhecida

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

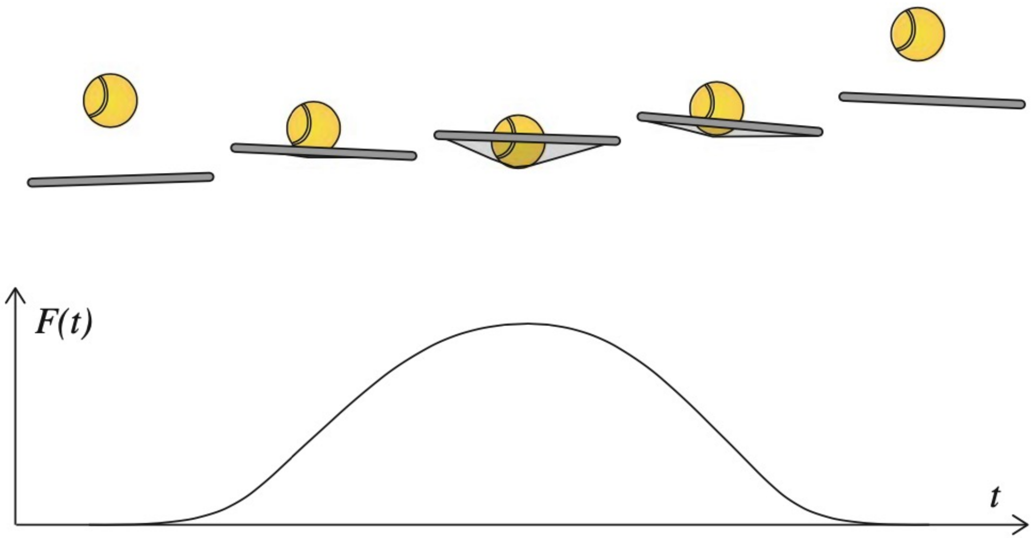
- Quando $\vec{F} = 0$,

$\vec{p}_1 = \vec{p}_0$ ou conservação do momento

Impulso e mudança do momento

Estimativa da força de colisão:

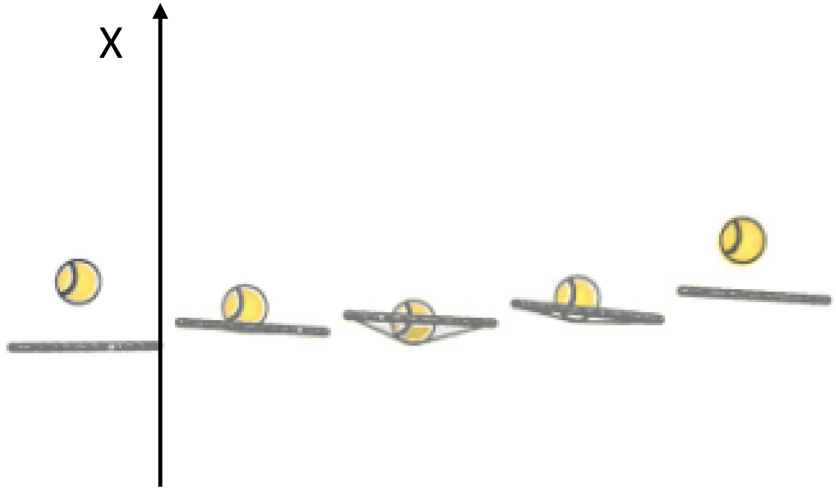
Fig. 12.2 Illustration a ball being hit by a tennis racket, showing an illustration of the collision as a function of time, and a plot of the force $F(t)$ from the racket on the ball as a function of time



Sorrensen p. 357

Impulso de uma força:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$



Estimativa da força de colisão:

Impulso de uma força:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

A 1D

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt = p_{1x} - p_{0x}$$

Se soubermos p_{1x} e p_{0x}, calculamos $\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt$

Estimativa da força F_x

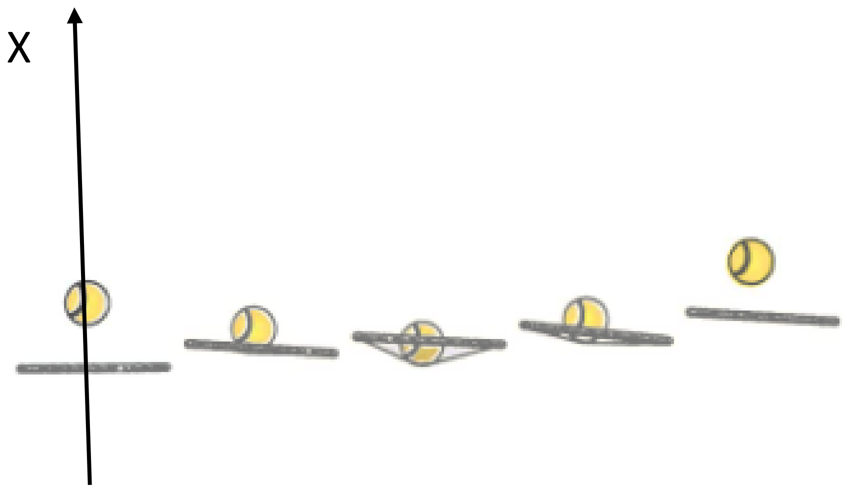
$$\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt = \bar{F}_x\,(t_1 - t_0)$$

$\bar{F}_x =$ **força média** durante a colisão

$$\Rightarrow \quad \bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)}$$

Impulso de uma força:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$



Estimativa da força F_x

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt = \bar{F}_x\,(t_1 - t_0)$$

$$\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)}$$

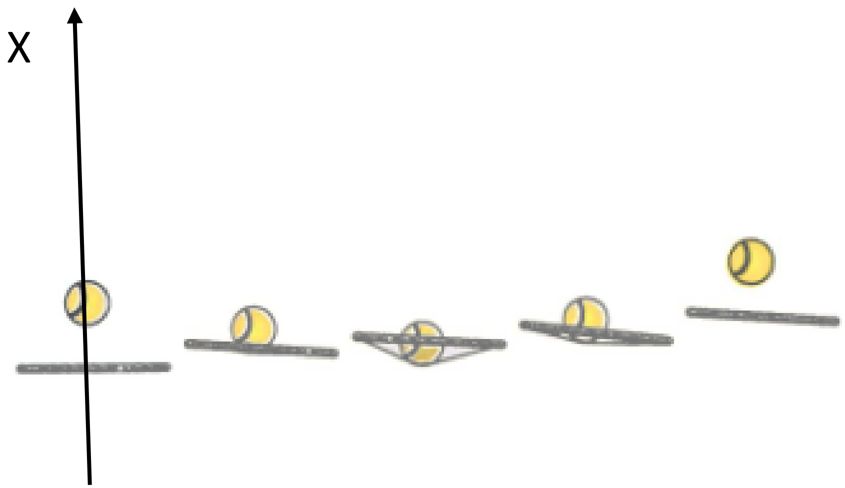
Problema:

Se $m = 0.057$

$\vec{v}_0 = -30\,\hat{\imath}\,\mathrm{km/h}$

$\vec{v}_1 = 30\,\hat{\imath}\,\mathrm{km/h}$

Qual a força média do impacto que durou 0.06 s?



Impulso de uma força:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\,dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

Estimativa da força F_x

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\,dt = \bar{F}_x\,(t_1 - t_0)$$

$$\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\,dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)}$$

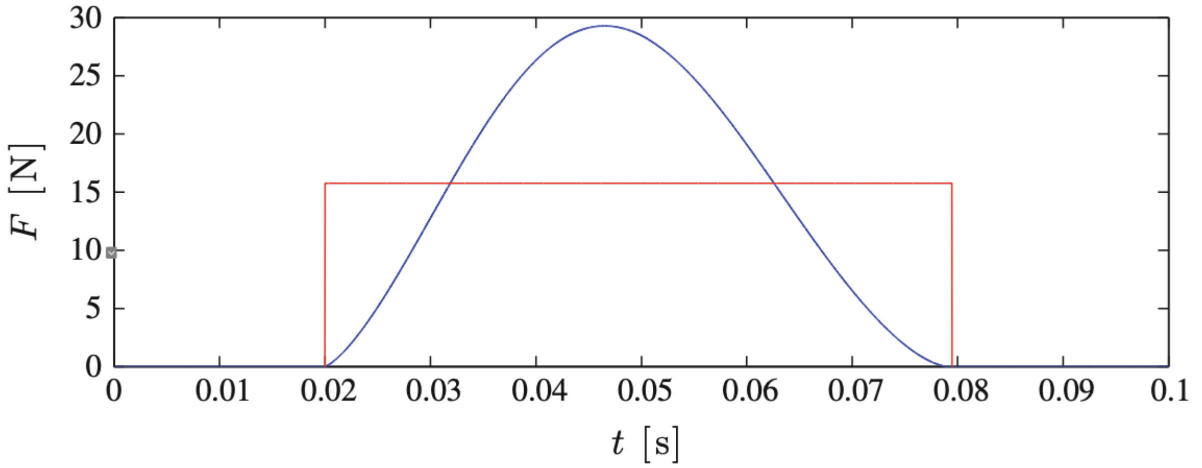
Problema:

Se
$$m = 0.057$$
$$\vec{v}_0 = -30\,\hat{\imath}\,\mathrm{km/h}$$
$$\vec{v}_1 = 30\,\hat{\imath}\,\mathrm{km/h}$$

Qual a força média do impacto que durou 0.06 s?

R: $$\bar{F}_x = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)} = \frac{0.057\ \times 30/3.6 - 0.057 \times (-30/3.6)}{0.06}$$

$$= 15.8\ \mathrm{N}$$



O gráfico da força, F_x, em função do tempo que durou a colisão, e a força média, $\bar{F}_x$.

Problema 6.4:

Um carro segue a 60 km/h. Sofre um acidente e o carro para em 0.2 s.
O condutor não tem o cinto colocado e embate no volante do carro.
a) Se o condutor tiver a massa de 75 kg, qual a força média que sofre (no torax) durante o acidente?
b) Qual a função do 'airbag'? O que muda no acidente?

Problema 6.4:

Um carro segue a 60 km/h. Sofre um acidente e o carro para em 0.2 s.
O condutor não tem o cinto colocado e embate no volante do carro.
a) Se o condutor tiver a massa de 75 kg, qual a força média que sofre (no torax) durante o acidente?
b) Qual a função do 'airbag'? O que muda no acidente?

R:

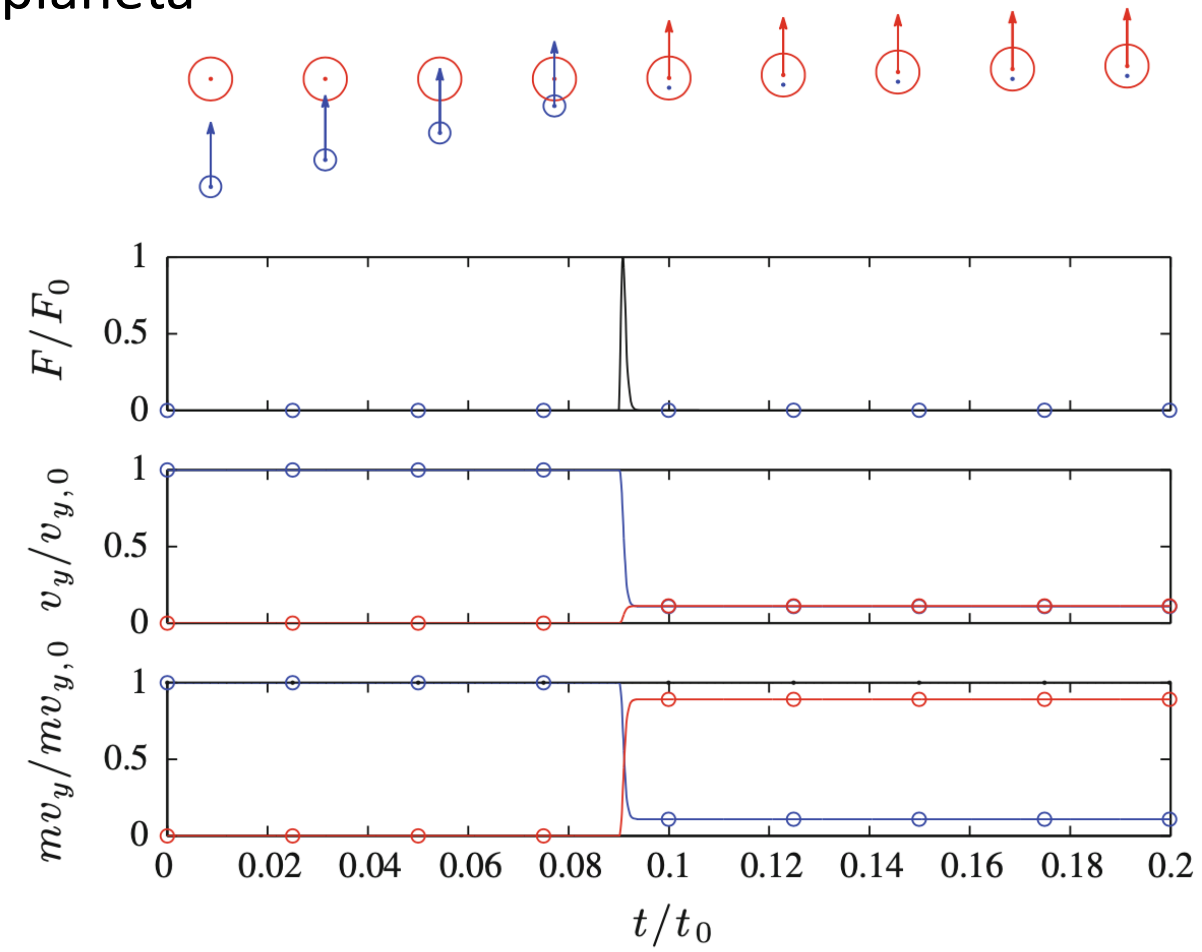
$$\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)} = \frac{75 \times \frac{60}{3.6} - 75 \times (0)}{0.2} = 6250 \text{ N}$$

Sistema de 2 corpos

EX: Colisão meteoro-planeta

início t_0

termina t_1



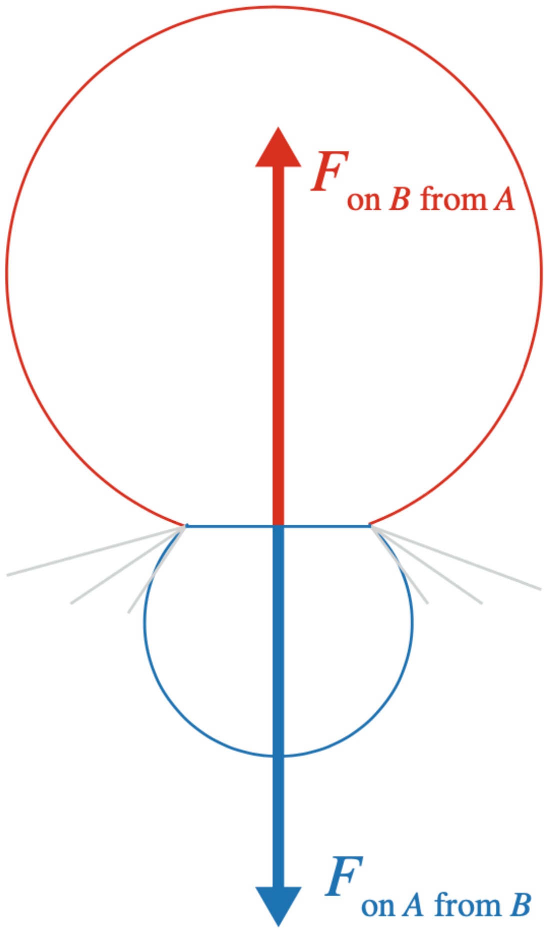
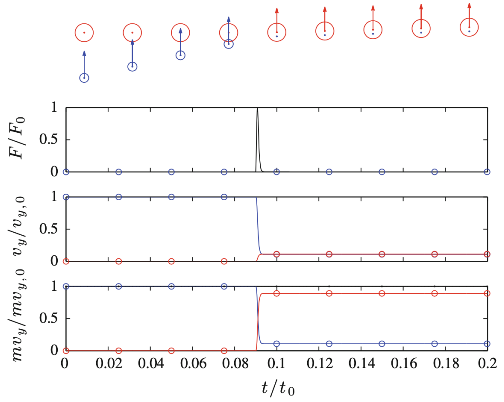


Fig. 12.1 Illustration a collision between a meteor and a planet

Sorenssen p. 353

Sistema de 2 corpos: Colisão meteoro-planeta



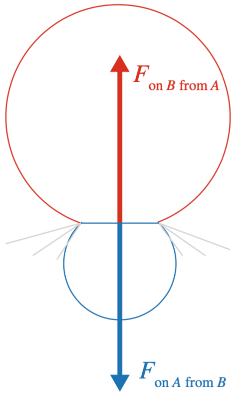


Fig. 12.1 Illustration a collision between a meteor and a planet

início t_0

meteoro (A) m_A , $\vec{v}_{A,0}$

planeta (B) m_B , $\vec{v}_{B,0}$

termina t_1

quais são os valores após a colisão?

Segunda lei de Newton

Força de B em A: $\vec{F}_A = m_A\, \vec{a}_A$

Força de A em B: $\vec{F}_B = m_B\, \vec{a}_B$

Terceira lei de Newton

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A$$

não conhecemos as forças...

$$m_A\, \vec{a}_A = -m_B\, \vec{a}_B$$

ou

$m_A\, \vec{a}_A + m_B\, \vec{a}_B = 0$ em todos os tempos.

Colisão meteoro-planeta

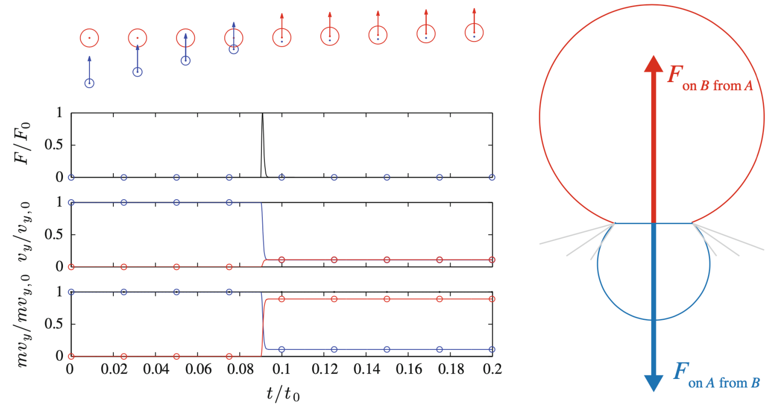


Fig. 12.1 Illustration a collision between a meteor and a planet

$$\vec{F}_A = m_A\, \vec{a}_A$$

$$\vec{F}_B = m_B\, \vec{a}_B = -\,\vec{F}_A$$

$$m_A\, \vec{a}_A + \ m_B\, \vec{a}_B = 0 \ \text{ em todos os tempos.}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} m_A\, \vec{a}_A + \ m_B\, \vec{a}_B \ dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} m_A\, \vec{a}_A\ dt + \int_{t_0}^{t_1} m_B\, \vec{a}_B\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m_A\, \frac{d\vec{v}_A}{dt}\, dt + \int_{t_0}^{t_1} m_B\, \frac{d\vec{v}_B}{dt}\, dt$$

$$= m_A\vec{v}_A(t_1) - m_A\vec{v}_A(t_0)\ +\ m_B\vec{v}_B(t_1) - \ m_B\vec{v}_B(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow\ m_A\vec{v}_A(t_1) + \ m_B\vec{v}_B(t_1) = \ m_A\vec{v}_A(t_0) + \ \ m_B\vec{v}_B(t_0)$$

Colisão meteoro-planeta

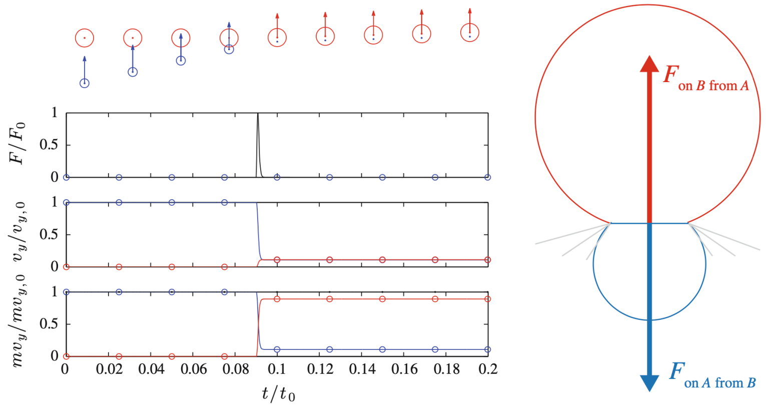


Fig. 12.1 Illustration a collision between a meteor and a planet

$$\vec{F}_A = m_A\,\vec{a}_A$$

$$\vec{F}_B = m_B\,\vec{a}_B = -\,\vec{F}_A$$

$$m_A\vec{v}_A(t_1) + m_B\vec{v}_B(t_1) = m_A\vec{v}_A(t_0) + m_B\vec{v}_B(t_0)$$

Para t_0 e t_1 quaisquer

Momento total

$$\vec{P} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = constante$$

Lei da conservação de momento

Sorenssen p. 353

Colisão meteoro-planeta

Antes da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,0}$

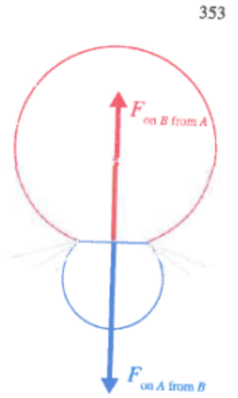
Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

Depois da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,1}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

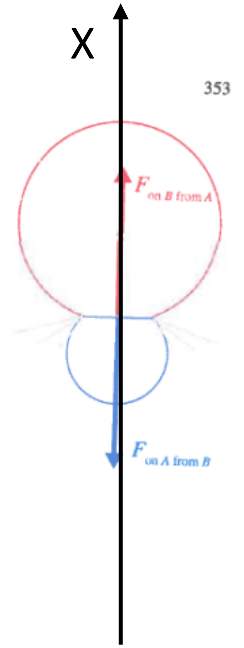
Depois da colisão os 2 corpos seguem juntos $\vec{v}_1$



Sabemos que o momento total é constante $\vec{P} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B$

Permite determinar a velocidade dos corpos depois da colisão

Colisão meteoro-planeta



Antes da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,0}$
Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

$$P_x = m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x}$$

Depois da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,1}$
Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

Depois da colisão os 2 corpos seguem juntos $\vec{v}_1$

$$P_x = m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

O momento total conserva-se:

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A\ v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A\ v_{1x} + m_B v_{1x} = (m_A + m_B) v_{1x}$$

$$\Rightarrow \quad v_{1x} = \frac{m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x}}{m_A + m_B}$$

Sistema de 2 corpos

- Existem fenómenos com forças complicadas.
- O Impulso é difícil ou impossível de ser calculado.

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_A$
Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_B$

Que forças existem entre os 2 corpos?

Forças internas: forças entre os corpos do sistema (sistema Terra-Sol: força gravítica de atração)

$$\vec{F}_A^{(B)} \qquad \vec{F}_B^{(A)}$$

Forças externas: forças entre os corpos do sistema e o meio ambiente

$$\vec{F}_A^{ext} \qquad \vec{F}_B^{ext}$$

2ª Lei de Newton:

Corpo A $$\sum \vec{F}_A^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}$$

Corpo B $$\sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

3ª Lei de Newton:

$$\vec{F}_B^{(A)} = -\vec{F}_A^{(B)}$$

Somarmos: $$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} = \sum \vec{F}^{ext}$$

Generalização da 2ª Lei de Newton para o sistema de 2 corpos

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{P}$$

= momento total do sistema de 2 corpos

Sistema de 2 corpos

Se todas as forças externas forem nulas $\sum \vec{F}^{ext} = 0$

temos um sistema de 2 corpos isolado

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{implica} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

Num sistema de 2 corpos isolado o momento total conserva-se

Generalização para sistema de muitos corpos (N)

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Se o sistema for isolado ($\sum \vec{F}^{ext} = 0$) temos a conservação do momento total $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$

Colisões

Processo que envolve forças muito grandes entre os corpos, durante um intervalo de tempo muito curto

Num sistema de 2 corpos isolado, em que **o momento total conserva-se**:

Antes da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,0}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

Depois da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,1}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

Colisões: Num sistema de 2 corpos isolado, em que o momento total conserva-se.

Antes da colisão		**Depois da colisão**	
Corpo A	com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,0}$	Corpo A	com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,1}$
Corpo B	com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,0}$	Corpo B	com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

A 1 dimensão, o momento total é:

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} \qquad\qquad m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

Pela conservação do momento total

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

também é em qualquer instante da colisão

Se soubermos as quantidades antes da colisão (massa e velocidades)
temos 1 equação com 2 incógnitas

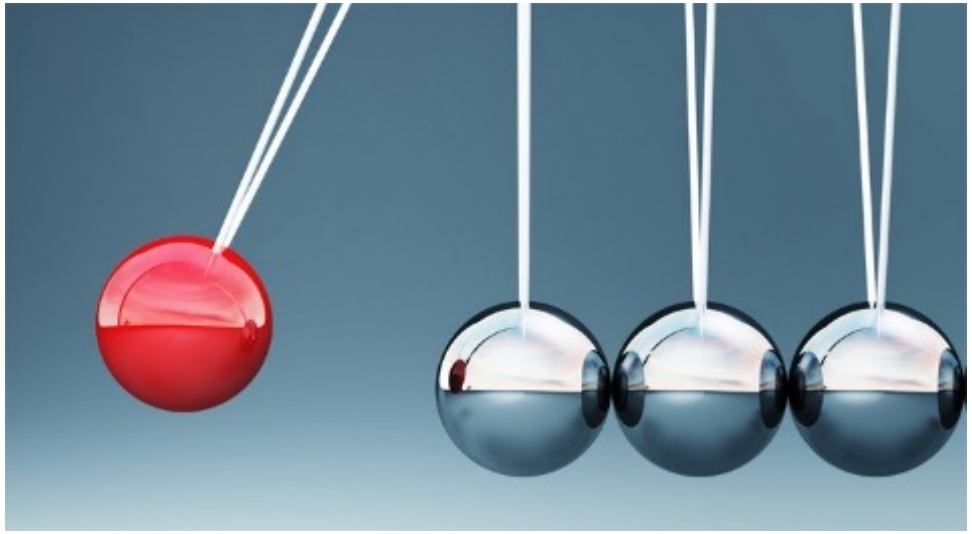
$v_{A,1x}$ e $v_{B,1x}$ (será preciso mais uma equação para serem calculadas)

Colisões: Num sistema de 2 corpos isolado, em que o momento total conserva-se.

Se soubermos as quantidades antes da colisão (massa e velocidades),
temos 1 equação com 2 incógnitas

$v_{A,1x}$ e $v_{B,1x}$ (será preciso mais uma equação para serem calculadas)

- **Se só atuarem forças conservativas,**
  a energia mecânica total também se conserva (mais uma equação)
- Quando acontece chama-se **Colisão Elástica**
- Quando não há conservação da energia mecânica, chama-se **Colisão Inelástica**



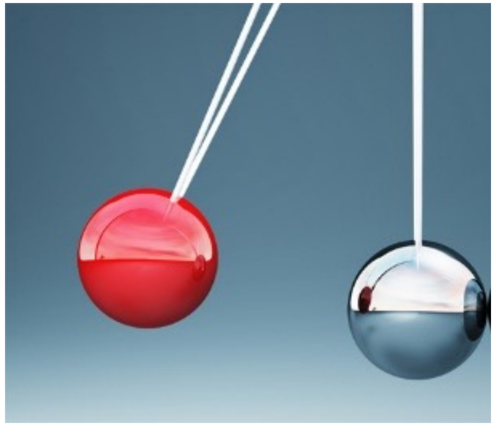
Ex. **Colisão Elástica: Pêndulo de Newton**

Lei de conservação do momento:

Antes: o momento proveniente da bola que vai colidir

Depois da colisão: há várias possibilidades de combinações entre as várias massas e velocidades.

Mas **só uma bola emerge** de todo o conjunto? Tem-se também a conservação da energia.



Considere primeiro o sistema com 2 bolas

Antes: o momento proveniente da bola que vai colidir

Bola A com massa m e velocidade $v_{A,x0}$

Bola B com massa m e velocidade 0

momento $P_x = mv_{A,x0}$

energia cinética $\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv_{A,x0}{}^2$

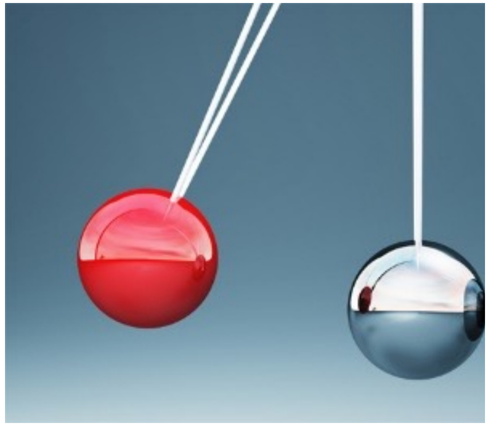
Depois da colisão:

Bola A com massa m e velocidade $v_{A,x1}$

Bola B com massa m e velocidade $v_{B,x1}$

momento $P_x = mv_{A,x1} + mv_{B,x1}$

energia cinética $\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv_{A,1x}{}^2 + \frac{1}{2}mv_{B,1x}{}^2$



Considere primeiro o sistema com 2 bolas

Antes da colisão:

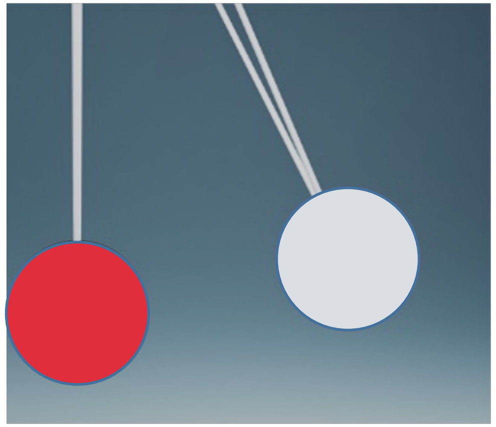
momento $P_x = mv_{A,x0}$

energia cinética $\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv_{A,x0}{}^2$

Depois da colisão:

momento $P_x = mv_{A,x1} + mv_{B,x1}$

energia cinética $\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv_{A,x1}{}^2 + \frac{1}{2}mv_{B,x1}{}^2$



Conservação de momento e energia

$$\begin{cases} mv_{A,x0} = mv_{A,x1} + mv_{B,x1} \\ \frac{1}{2}mv_{A,x0}{}^2 = \frac{1}{2}mv_{A,x1}{}^2 + \frac{1}{2}mv_{B,x1}{}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{A,x0} = v_{A,x1} + v_{B,x1} \\ v_{A,x0}{}^2 = v_{A,x1}{}^2 + v_{B,x1}{}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{A,x0} - v_{A,x1} = v_{B,x1} \\ v_{A,x0}{}^2 - v_{A,x1}{}^2 = v_{B,x1}{}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{A,x0} - v_{A,x1} = v_{B,x1} \\ (v_{A,x0} + v_{A,x1})(v_{A,x0} - v_{A,x1}) = v_{B,x1}{}^2 \end{cases}$$

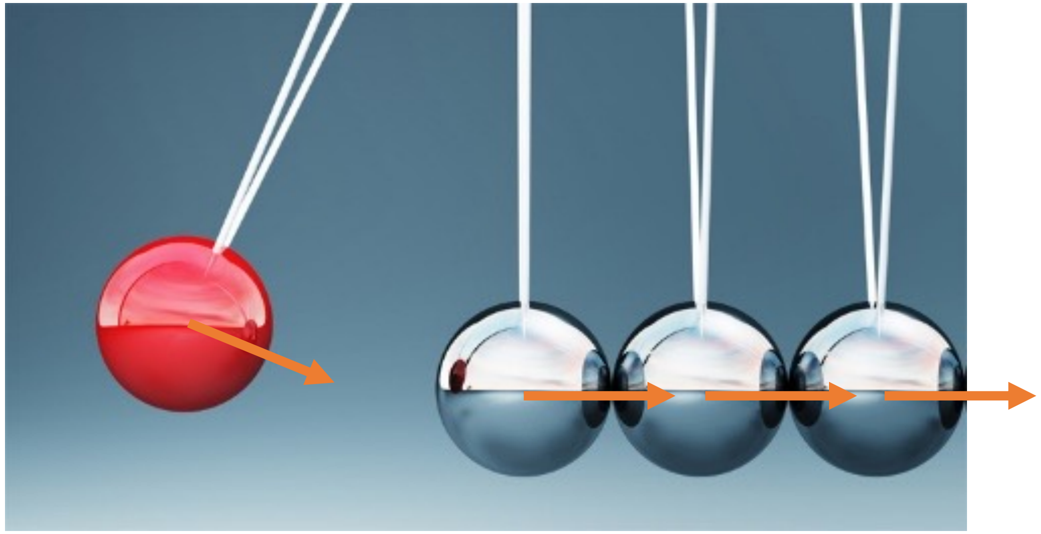
$$\begin{cases} v_{A,x0} - v_{A,x1} = v_{B,x1} \\ v_{A,x0} + v_{A,x1} = v_{B,x1} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{A,x1} = 0 \\ v_{B,x1} = v_{A,x0} \end{cases}$$

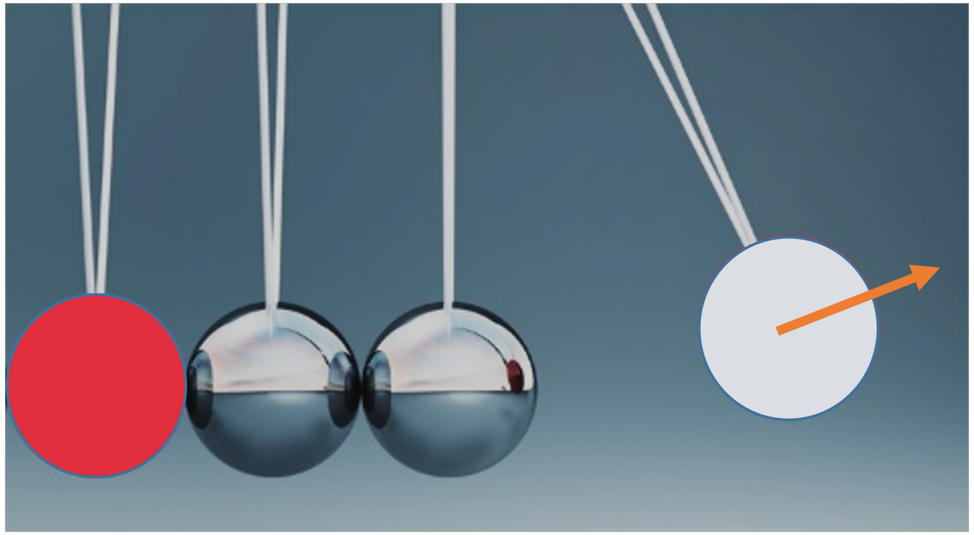
todo o momento transferido à segunda bola

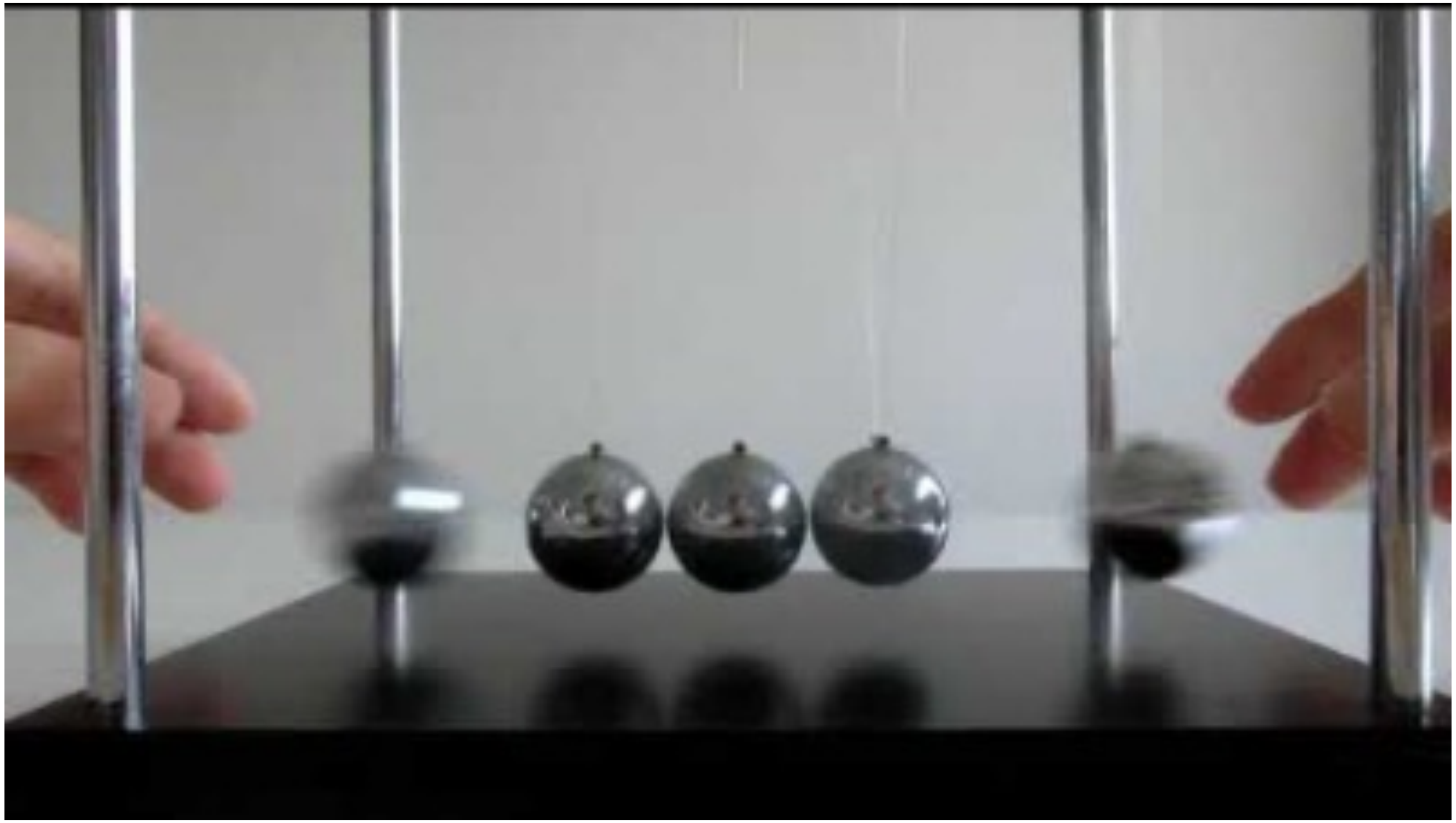
Ex. **Colisão Elástica**

O Sistema com 4 bolas

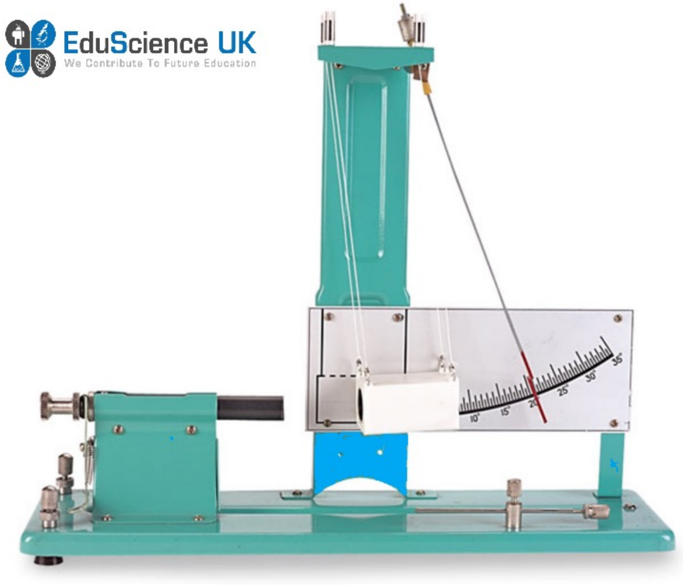
Conservação de momento e energia cinética
momento transferida a cada bola em sucessão

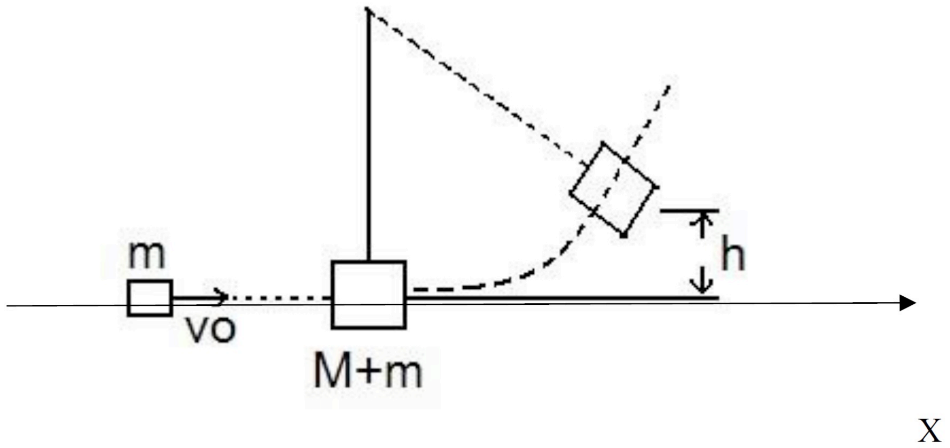




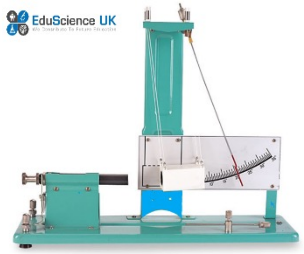


Ex: **Pêndulo balístico**: medição da velocidade de uma bala





1. Colisão bala – bloco
2. Elevação pelo pêndulo do bloco-bala a altura *h*

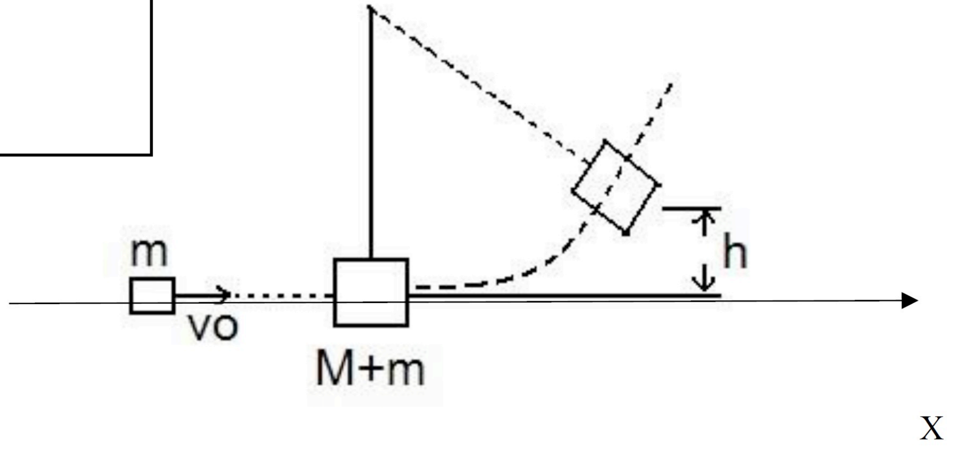


Pêndulo balístico: medição da velocidade de uma bala

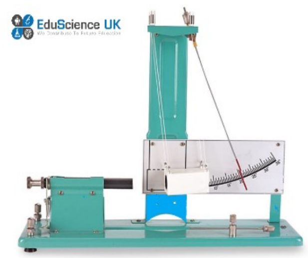
1. Colisão bala – bloco

Antes da colisão	Depois da colisão
Momento da bala $m_{bala}v_{bala,x}$ Momento do bloco 0	Bala-bloco $(m_{bala} + M_{bloco})V$
Conservação do momento $m_{bala}v_{bala,x} = (m_{bala} + M_{bloco})V$	

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala}+M_{bloco})}{m_{bala}}V$$



Note: porque os dois corpos vão juntos depois da colisão, só temos 1 incógnita
Não é preciso analisar a energia



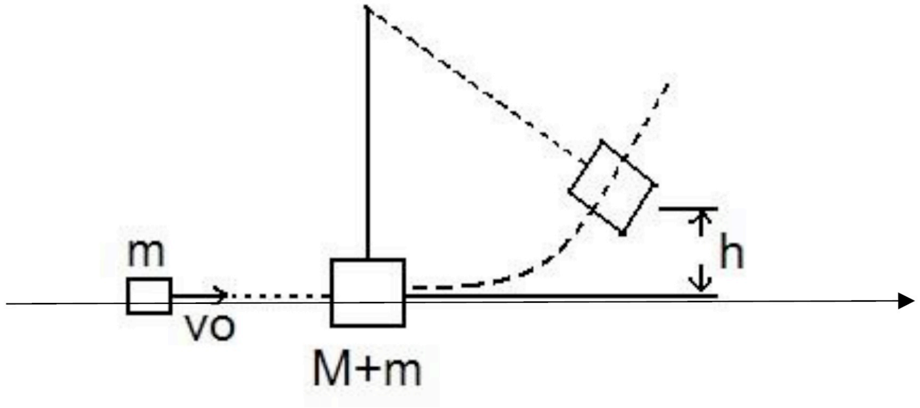
Pêndulo balístico: medição da velocidade de uma bala

1. Colisão bala – bloco

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala} + M_{bloco})}{m_{bala}} V$$

2. **Elevação pelo pêndulo do bloco-bala a altura** *h*

Os dois corpos juntos sobem como um pêndulo até à altura h, transformando energia cinética em energia potencial



X

Energia mecânica:

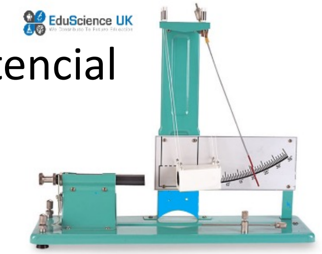
- No ponto mais baixo do pêndulo $\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 + 0$
- No ponto a altura *h* $0 + (m_{bala} + M_{bloco})\, g\, h.$

Pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 = (m_{bala} + M_{bloco})\, g\, h$$

2. **Elevação pelo pêndulo do bloco-bala a altura** *h*

Os dois corpos juntos sobem como um pêndulo até à altura h, transformando energia cinética em energia potencial



Energia mecânica

No ponto mais baixo do pêndulo $\frac{1}{2}(m_{bala}+M_{bloco})V^2 + 0$

No ponto a altura h $0 + (m_{bala}+M_{bloco})\ g\ h.$

Pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}(m_{bala}+M_{bloco})V^2 = (m_{bala}+M_{bloco})\ g\ h$$

$$\Rightarrow\ V^2 = 2\ \ g\ h$$

e de passo 1.

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala}+M_{bloco})}{m_{bala}}V$$

$$\Rightarrow\ v_{bala,x} = \frac{(m_{bala}+M_{bloco})}{m_{bala}}\sqrt{2\ \ g\ h}$$

Mostre que a colisão é inelástica.