Departamento de Física
Universidade de Aveiro

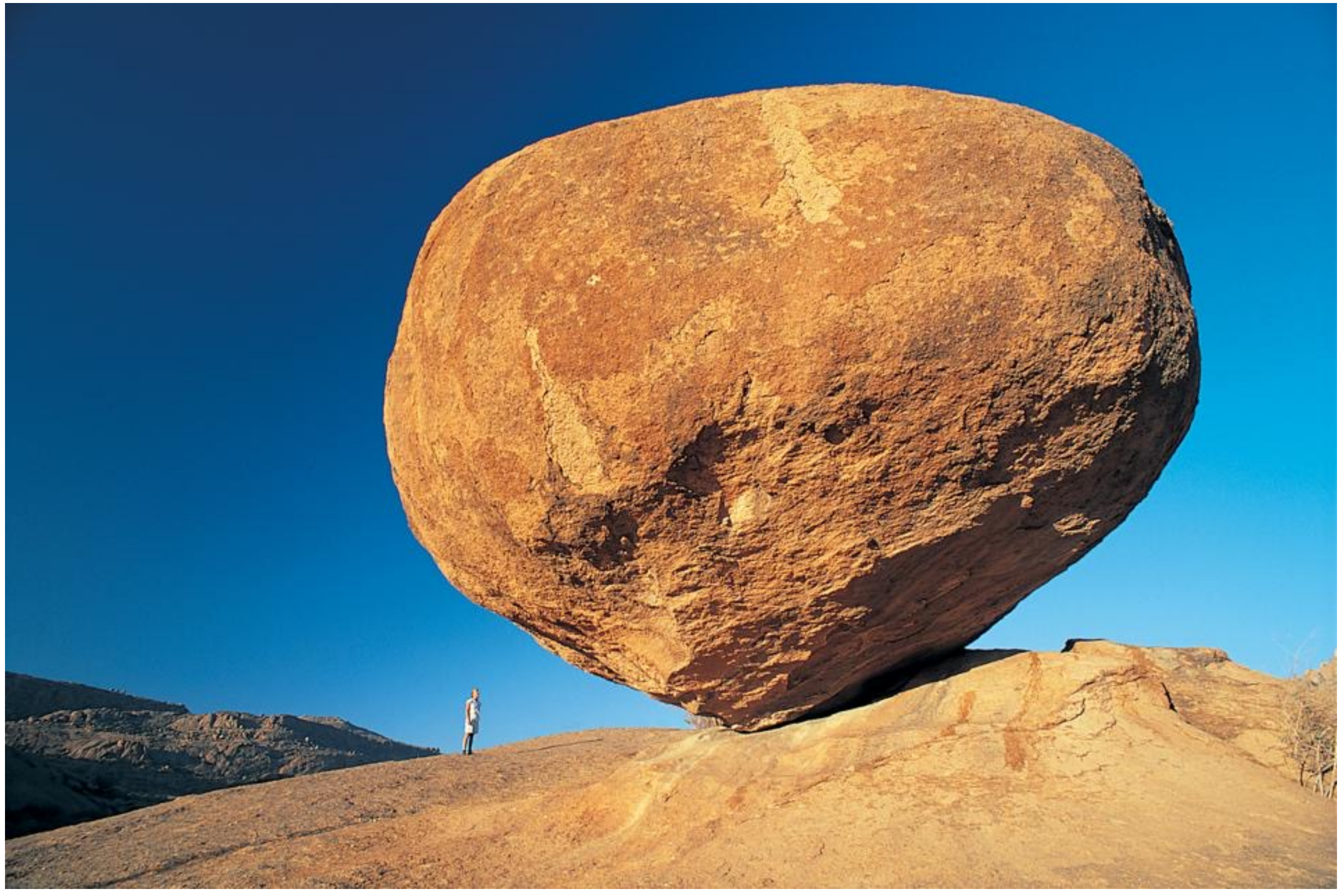
# Modelação de Sistemas Físicos

## 7ª Aula Teórica

Sumário:
Cap. 5: Trabalho e energia

Bibliografia:
Cap. 5: Serway, cap. 7 e 8; Sørenssen, cap. 10 e 11; Villate, cap. 6

# Cap. 5 Trabalho e Energia



$$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \vec{v}(t) \quad \Longrightarrow \vec{r}(t)$$

obtemos <u>a velocidade e a posição em função do tempo</u>

Equivalente à equação fundamental da dinâmica:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\int_C m\,\vec{a}\cdot d\vec{r} \qquad ,d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$$

ao longo da trajetória $C$.

A 1D: $$\int_{x_0}^{x_1} F_x\,dx = \int_{x_0}^{x_1} m\,a_x\,dx$$

Esta formulação permite determinar **a relação da velocidade com a posição**, (mesmo sem sabermos as relações temporais), pois a força em muitos casos depende da posição

Teorema Trabalho – Energia:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_C m\,\vec{a} \cdot d\vec{r} \qquad\qquad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{v}\,dt \qquad\qquad \frac{d}{dt}[v_x(t)^2] = 2\,\frac{d\,v_x(t)}{dt}\,v_x(t)$$

$$\int_C m\,\vec{a} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_{t_0}^{t_1} m\,\vec{a}(t) \cdot \vec{v}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m\left(\frac{d\,v_x}{dt}\,v_x + \frac{d\,v_y}{dt}\,v_y + \frac{d\,v_z}{dt}\,v_z\right) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m\,\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}[v_x(t)^2] + \frac{d}{dt}\left[v_y(t)^2\right] + \frac{d}{dt}[v_z(t)^2]\right)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\Big|_{t_0}^{t_1} \;=\frac{1}{2}m\,|\vec{v}|^2\Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2$$

Trabalho feito no sistema é igual à energia cinetica adicionada

# Teorema Trabalho – Energia

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;\; = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$$

a partir da posição $C_0$ até à posição $C_1$.

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;\; =$ **Trabalho** $= \; W_{0,1}$

$\frac{1}{2} m\, |\vec{v}|^2 =$ **Energia Cinética** $= \; E_c$

a unidade é joule (J), J=kg $\cdot\, \mathrm{m}^2/s^2$

Se soubermos $|\vec{v}_0|$ e o trabalho efetuado $W_{0,1}$, obtemos $|\vec{v}_1|$

**Exemplo de aplicação: (problema 5.1)**

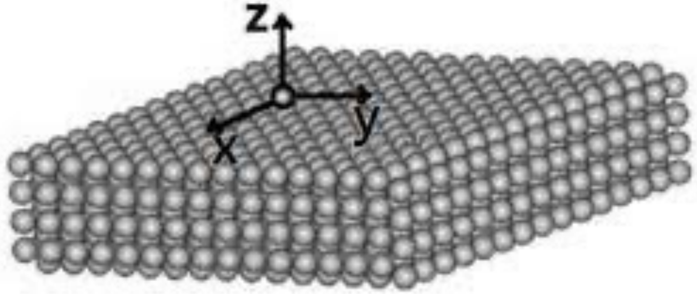
Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

$$F_x = -F_0 \sin\frac{2\pi x}{b}$$

em que $x$ é a posição do átomo e $b$ a distância interatómica dos átomos na superfície do cristal.

Se o átomo partir da posição $x_0$ com velocidade $v_{0x}$, qual a dependência da velocidade em função da posição?
É possível integrar analiticamente e calcular a lei do movimento e a lei da velocidade?

A 1D $\int_{x_0}^{x_1} F_x\, dx = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$




**Exemplo de aplicação: (problema 5.1)**

Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

$$F_x = -F_0 \sin \frac{2\pi x}{b}$$

em que $x$ é a posição do átomo e $b$ a distância interatómica dos átomos na superfície do cristal.

Se o átomo partir da posição $x_0$ com velocidade $v_{0x}$, como depende a velocidade em função da posição?

A 1D $$\int_{x_0}^{x_1} F_x\, dx = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx = \int_{x_1}^{x_2} - F_0 \sin \frac{2\pi x}{b}\ dx = - F_0 \frac{b}{2\pi}\left(-\cos \frac{2\pi x}{b}\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1} = \frac{b\, F_0}{2\pi}\left[\cos \frac{2\pi x_1}{b} - \cos \frac{2\pi x_0}{b}\right]$$

$$\frac{b\, F_0}{2\pi}\left[\cos \frac{2\pi x_1}{b} - \cos \frac{2\pi x_0}{b}\right] = \frac{1}{2} m\, v_{1x}^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2$$

$$v_{1x}^2 = v_{0x}^2 + \frac{b\, F_0}{\pi\, m}\left[\cos \frac{2\pi x_1}{b} - \cos \frac{2\pi x_0}{b}\right],$$ $x_1$ é uma posição qualquer

**Exemplo de aplicação: (problema 5.1)**

Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

$$F_x = -\,F_0 \sin\frac{2\pi x}{b}$$

em que $x$ é a posição do átomo e $b$ a distância interatómica dos átomos na superfície do cristal.

Se o átomo partir da posição $x_0$ com velocidade $v_{0x}$, como depende a velocidade em função da posição?

$$v_{1x}^2 = v_{0x}^2 + \frac{b\,F_0}{\pi\,m}\left[\cos\frac{2\pi x_1}{b} - \cos\frac{2\pi x_0}{b}\right],$$

$x_1$ é uma posição qualquer

$x_0 = 0,$

$$v_x = \pm\sqrt{v_{0x}^2 + \frac{b\,F_0}{\pi\,m}\left[\cos\frac{2\pi x}{b} - 1\right]}$$

\+ sentido positivo do eixo OX

\- sentido negativo do eixo OX

Teorema Trabalho – Energia: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;= \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2$

Exemplo: $F_x = -\,F_0 \sin\frac{2\pi x}{b} \;\Longrightarrow v_x = \;\pm\sqrt{v_{0x}^2 + \frac{b\,F_0}{\pi\,m}\left[\cos\frac{2\pi x}{b} - 1\right]}$ obtemos a velocidade em função da posição

<u>Muitas forças relevantes dependem da posição </u>( e outras constantes):

- Gravítica Peso: $\vec{P} = m\,\vec{g}$
- Gravítica Geral: $\vec{F}_{grav} = -G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- Elástica: $\vec{F} = -k\vec{r}$
- Elétrica: $\vec{F}_{elet} = -k\,\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- Elétrica num campo*:* $\vec{F}_{elet} = q\vec{E}_{elet}$

<u>Forças que não dependem da posição</u>*:*

- Resistência do ar: $\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v}$
- Força de Magnus: $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega}\times\vec{v}$

Teorema Trabalho – Energia:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \frac{1}{2} m \, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m \, |\vec{v}_0|^2$$

## Sobreposição do trabalho:

$\vec{F}$ é a força resultante de todas as forças aplicadas $\vec{F}_i$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$W_{0,1} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \int_C \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \ = \sum_i \int_C \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \ = \sum_i W_i \qquad W_i = \int_C \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

o trabalho feito é a soma do trabalho feito por cada força

Teorema Trabalho – Energia

<u>Trabalho realizado por uma força constante</u> $F_x = F_0$

*Ex:* **1D – O carro a acelerar ou a travar**

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_x \, dx = \int_{x_0}^{x_1} F_0 \, dx = F_0 \, (x_1 - x_0) = F_0 \, \Delta x$$
$$= \begin{cases} + \text{ se força e deslocamento mesmo sentido (acelerar)} \\ - \text{ se força e deslocamento sentidos opostos (travar)} \end{cases}$$

*Ex:* **Peso** $F_y = -mg$ ( eixo OY positivo a apontar para cima)

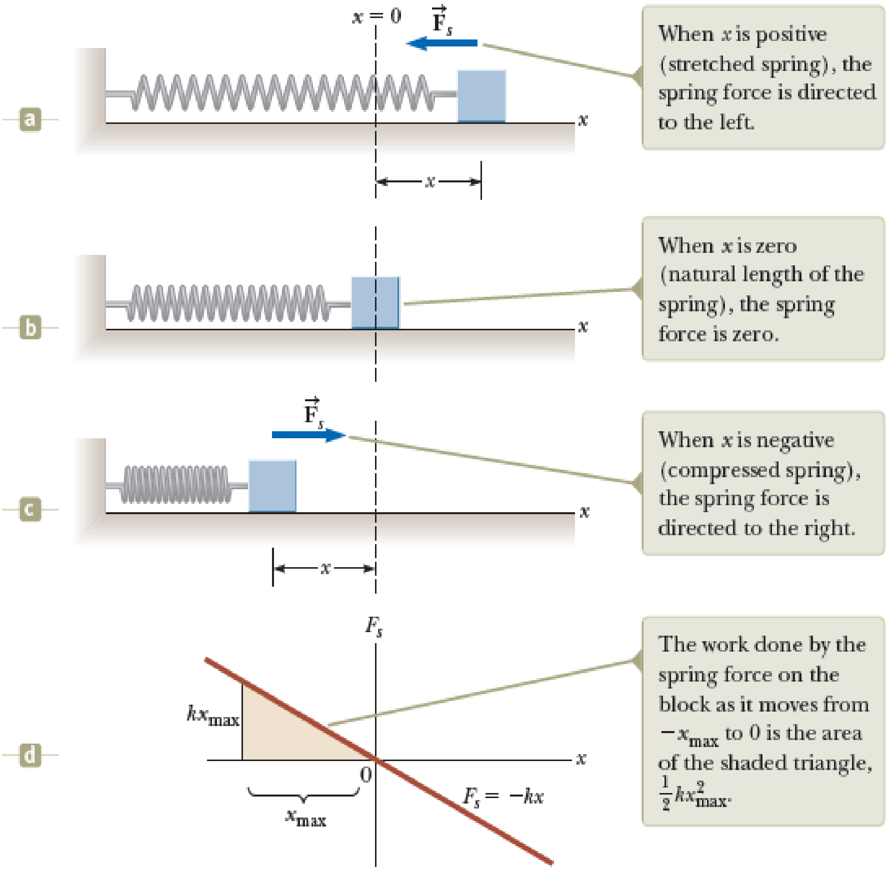
$$W_{0,1} = -m\, g\, (y_1 - y_0) = m\, g\, (y_0 - y_1) = \begin{cases} + \quad y_0 > y_1 : \text{ponto inicial mais alto} \\ - \quad y_0 < y_1 : \text{ponto inicial mais baixo} \end{cases}$$

Teorema Trabalho – Energia

Trabalho realizado por uma força elástica $\vec{F} = -k\,\vec{r}$

Ex: 1D $F_x = -k\,x$

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_x\,dx = \int_{x_0}^{x_1} -k\,x\;\,dx = -\frac{1}{2}k\,(x^2)\Big|_{x_0}^{x_1}$$
$$= \frac{1}{2}k({x_0}^2 - {x_1}^2)$$



Teorema Trabalho – Energia $W_{0,1} = \frac{1}{2} m\, v_{1x}^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2$

Trabalho realizado por uma força constante $F_y = -mg$ $W_{0,1} = m\, g\, y_0 - m\, g y_1$

Trabalho realizado por uma força elástica $F_x = -k\, x$ $W_{0,1} = \frac{1}{2} k\, {x_0}^2 - \frac{1}{2} k\, {x_1}^2$

São exemplos de forças conservativas (não há dissipação de energia)

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$$

trabalho pode ser descrito como uma diferença de energias *potenciais*

Força constante $F_y = -mg$ $E_p = m\, g\, y$ ou $E_p = m\, g\, y + Constante$

Força elástica $F_x = -k\, x$ $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$ ou $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2 + Constante$

Esta constante é à nossa escolha!

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$ (forças conservativas)

Teorema Trabalho – Energia $W_{0,1} = \frac{1}{2}m\, v_{1x}^2 - \frac{1}{2}mv_{0x}^2 = E_{c1} - E_{c0}$

Por forças que dependem só da posição $W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$

$$\Rightarrow E_{c1} - E_{c0} = E_{p0} - E_{p1}$$

Ou, $E_{c1} + E_{p1} = E_{c0} + E_{p0}$

Os pontos inicial (0) e final (1) são quaisquer:

$$\Rightarrow\ E_c + E_p = \text{constante em todo o movimento}$$

## Lei da conservação da Energia Mecânica $E = E_c + E_p$

$E_p$ = outra forma de energia : Energia Potencial

## Lei da conservação da Energia Mecânica $E = E_c + E_p$

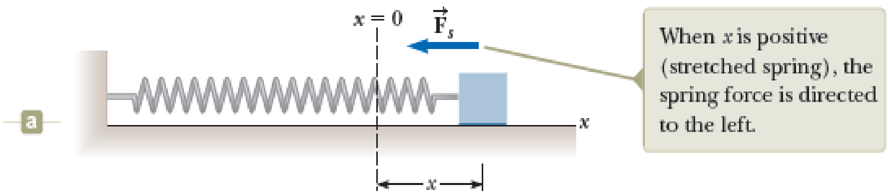
Por forças dependem só da posição

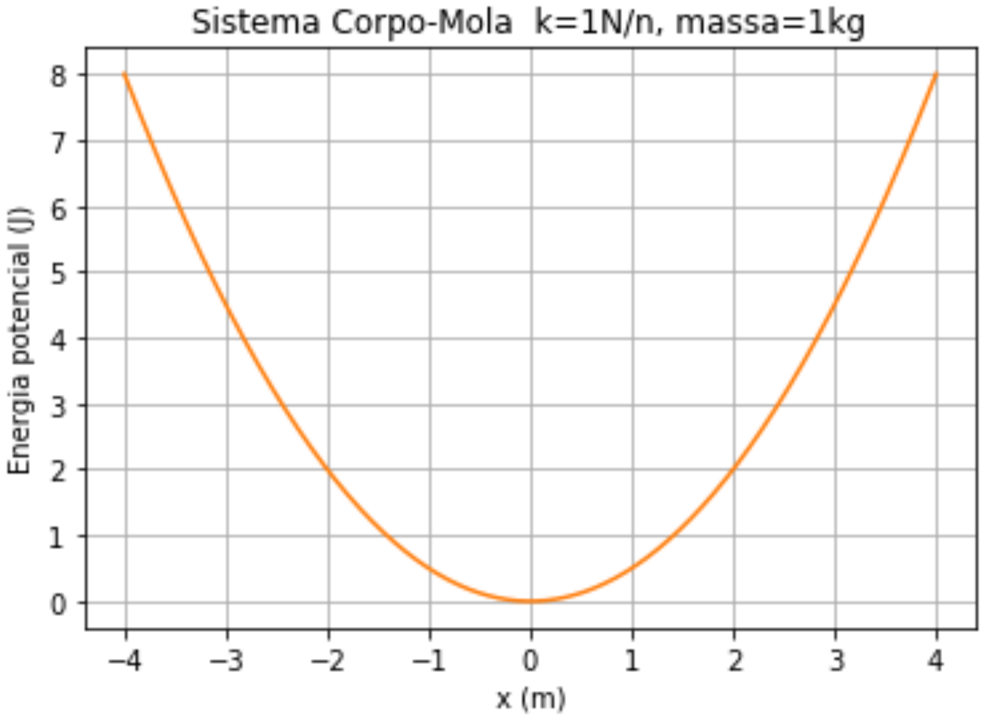
Peso: $E = \frac{1}{2} m\, v_y^2 + mgy$

Elástica $E = \frac{1}{2} m\, v_x^2 + \frac{1}{2} k\, x^2$

Temos sempre a velocidade num ponto como função da posição (se soubermos as condições iniciais ou equivalente)

# Lei da conservação da Energia Mecânica $E = E_c + E_p$




Sistema mola-corpo $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$

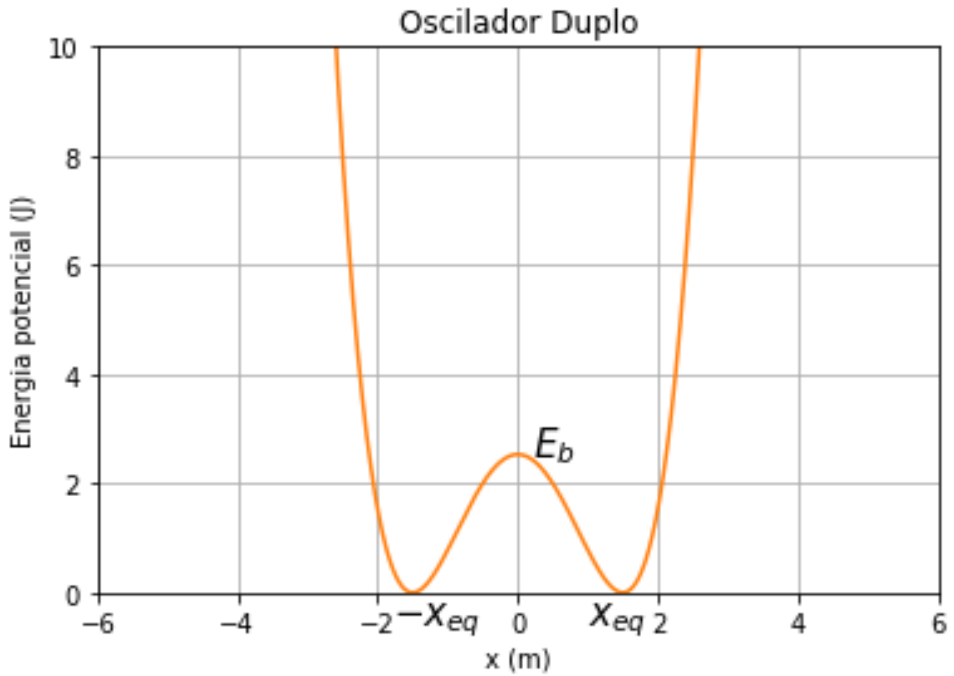
Diagrama de Energia

1. Se a energia total for $E = 8$ J,
o corpo não se desloca em $x < -0.4$ m nem em $x > 0.4$ m

2. Pontos em que a $E_p$ é plana, é um ponto de equilíbrio, pois $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$

# Lei da conservação da Energia Mecânica $E = E_c + E_p$

Diagrama de Energia




Oscilador poço duplo $\quad E_p = \frac{1}{2}k\left(x^2 - x_{eq}^2\right)^2$

Pontos de equilíbrio $\quad F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$

Estável: 2 pontos $\quad (-x_{eq}, 0)$ e $(x_{eq}, 0)$

Instável: 1 ponto $\quad (0,\ E_b)$

1. **Se a energia total do corpo for** $E < E_b$

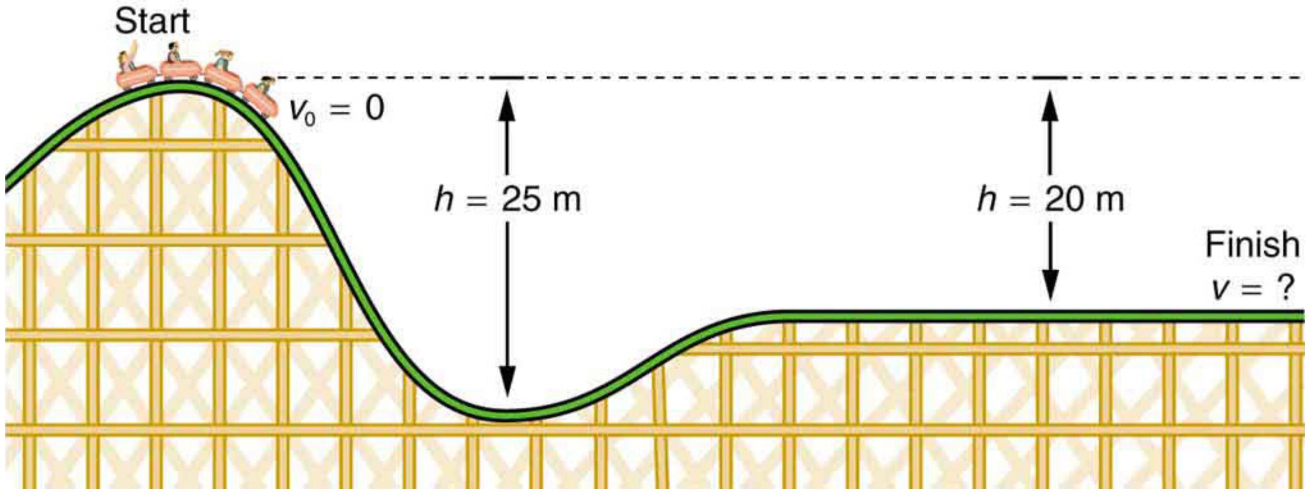
   O corpo desloca-se ou na parte esquerda ou (exclusive) na parte direita, à volta de $x_{eq}$, limitado pelas posições em que a $E_p = E$

2. **Se a energia total do corpo for** $E > E_b$

   O corpo desloca-se na parte esquerda e na parte direita, à volta de $x_{eq}$, limitado pelas posições em que a $E_p = E$

## Diagrama de Energia

Carruagem de massa $m$




1. Pontos de equilíbrio: $F_x = -\frac{dE_p}{dx}$

o mais baixo: ponto de equilíbrio estável

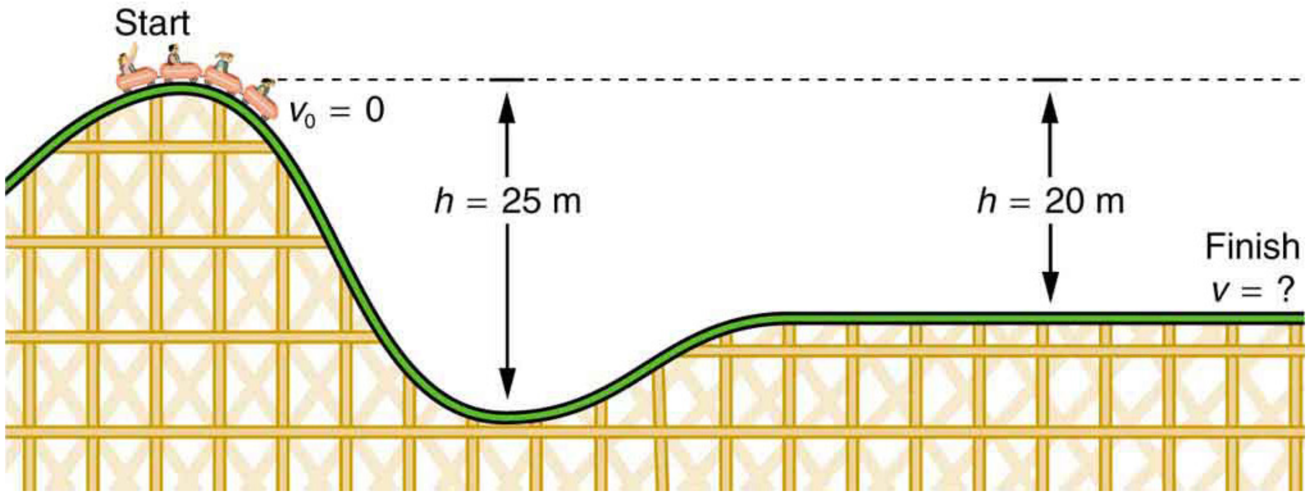
cimo da montanha: ponto de equilíbrio instável (a mais pequena perturbação faz o corpo sair da posição de equilíbrio)

2. Energia Mecânica: Instante inicial $v_0 = 0$ e $y_0 = 25$ m ( ponto mais baixo $y = 0$)

$$E = E_c + E_p = 0 + m\,g\,y_0$$

Diagrama de Energia

Carruagem de massa $m$




2. Energia Mecânica : Instante inicial $v_0 = 0$ e $y_0 = 25$ m ( ponto mais baixo $y = 0$)

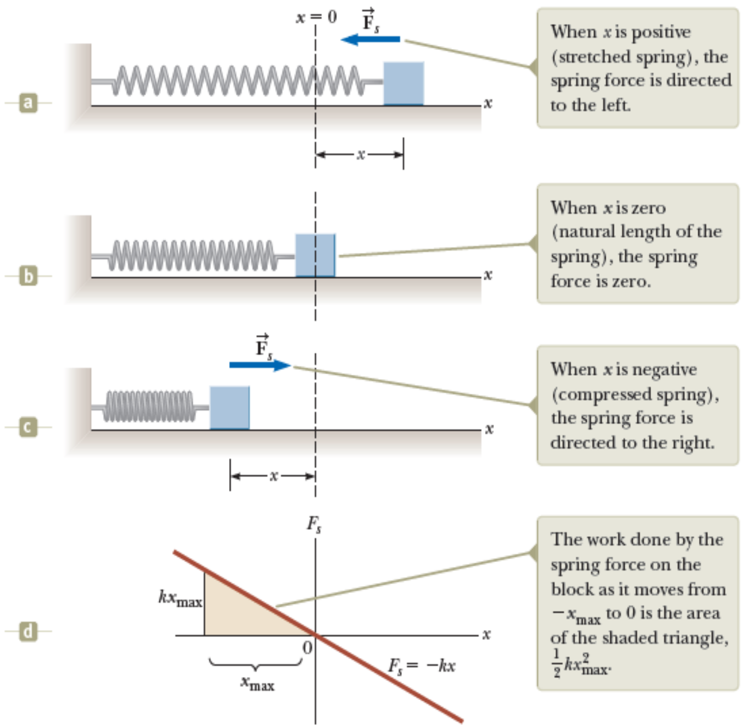
$$E = E_c + E_p = 0 + m\,g\,y_0$$

**Problema:**

Se a carruagem com os passageiros tiver a massa de 1000 kg, qual a velocidade

a) No ponto mais baixo?
b) na zona plana?

## Sistema Mola-Corpo




Mola de constante elástica $k$
Corpo de massa $m$
Posição de equilíbrio $x_{eq} = 0$

Força: $F_x = -k\,x$

Energia potencial: $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$

Energia mecânica conserva-se: $E = \frac{1}{2} m\, v_x^2 + \frac{1}{2} k\, x^2$

Problema:
Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que $k$ é a constante elástica da mola, num corpo de massa $m$. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Calcule a energia total, do sistema com as condições iniciais: $x_0 = 4$ m e $v_{0x} = 0$.

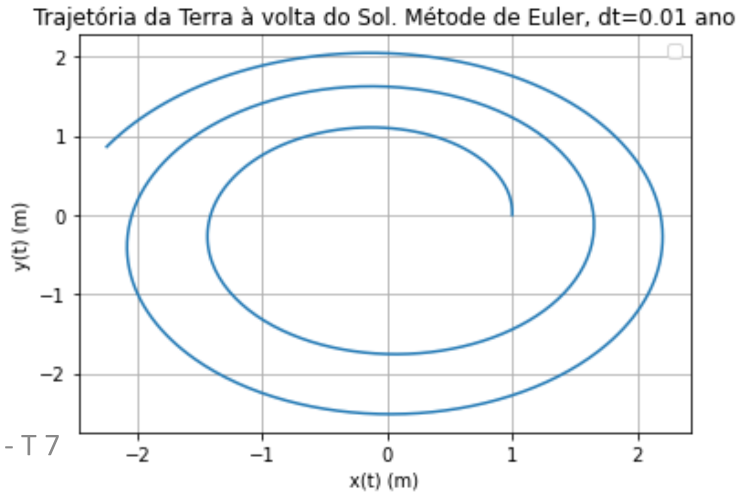
b) Compare o cálculo de energia mecânica se integrar numericamente as equações $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$ e $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ para encontrar a lei do movimento, usando o método de **Euler** e o método de **Euler-Cromer**

# Métodos de Integração

Integração pelo método de Euler

```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt x
```

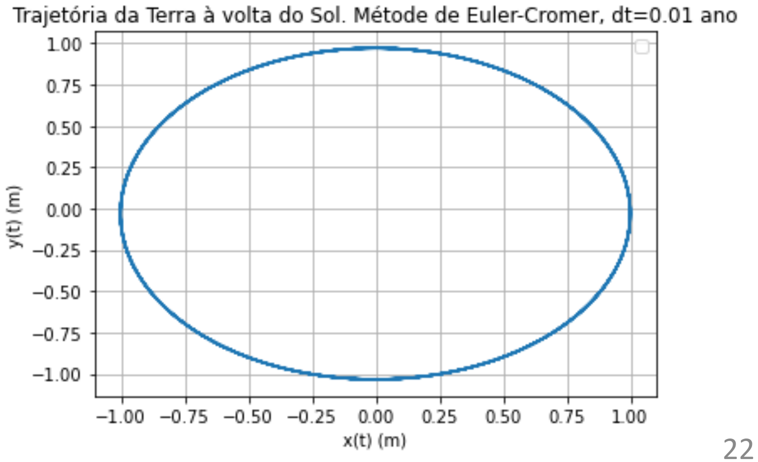
$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\ (t)\times\delta t$$




Integração pelo método de Euler-Cromer

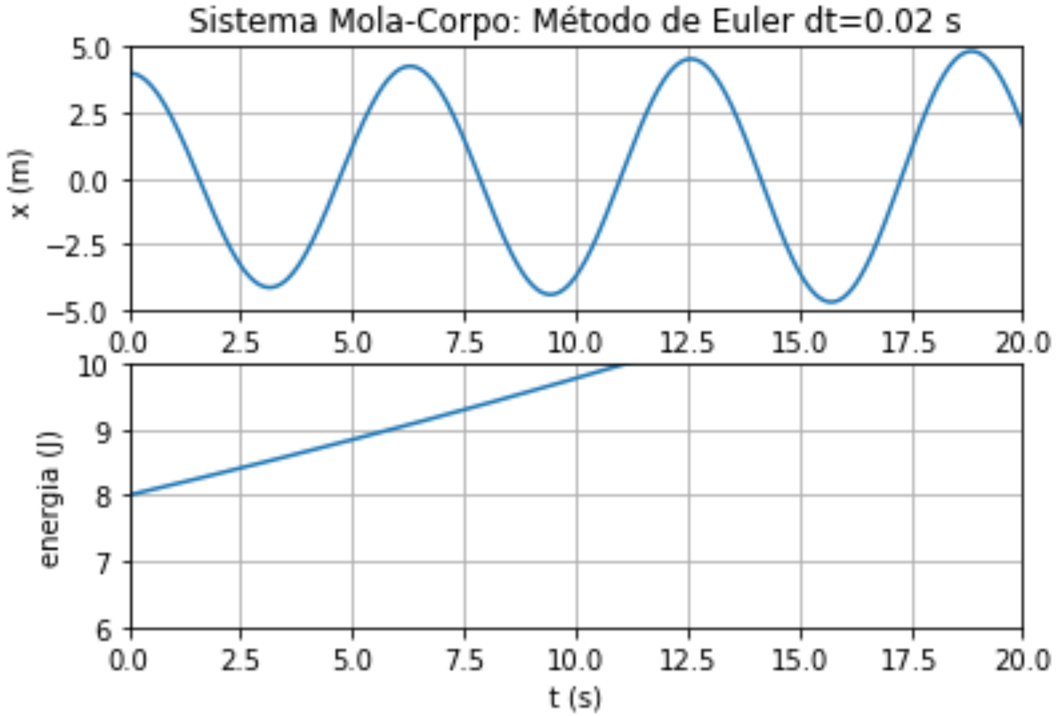
```
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
    ax[i]=-gm/r**3*x[i]
    ay[i]=-gm/r**3*y[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i+1]*dt x
```

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\ (t+\delta t)\times\delta t$$

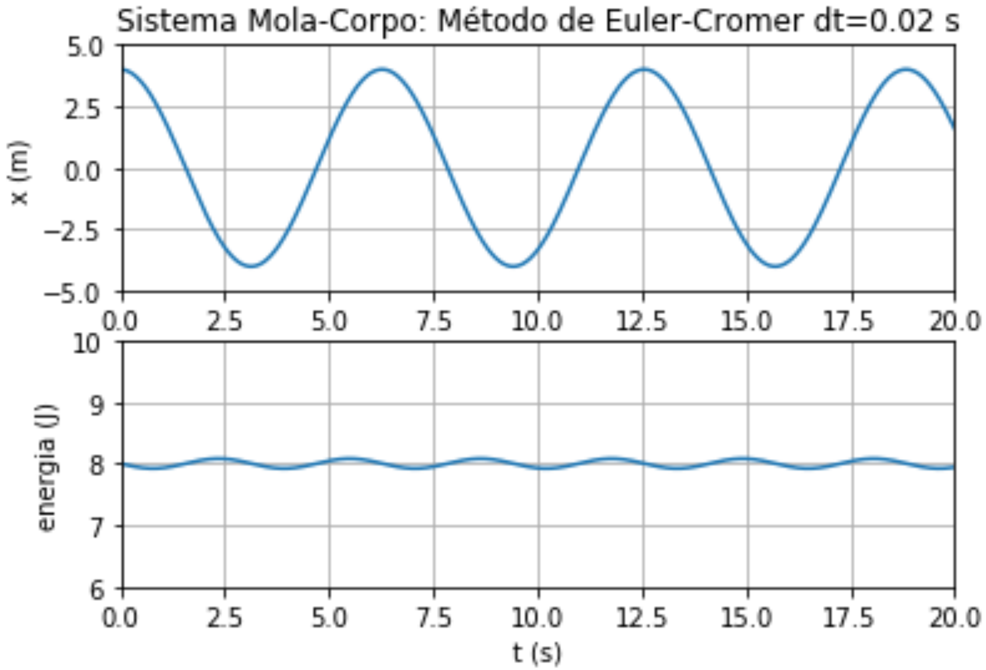


## Sistema Mola-Corpo

b) Compare o cálculo de energia total se integrar numericamente as equações $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$ e $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ para encontrar a lei do movimento, usando o método de Euler e o método de Euler-Cromer



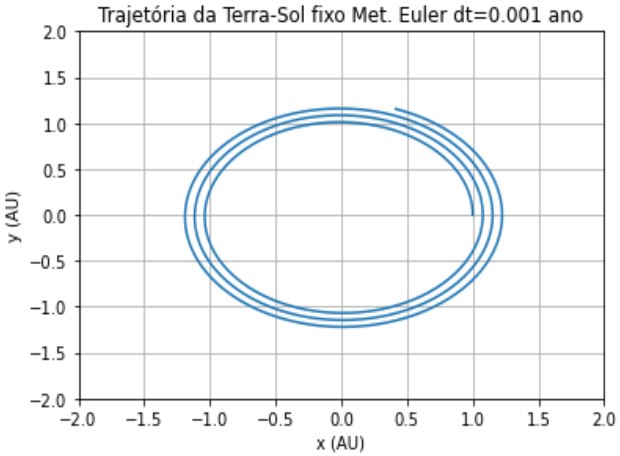

O método de Euler não conserva a energia mecânica

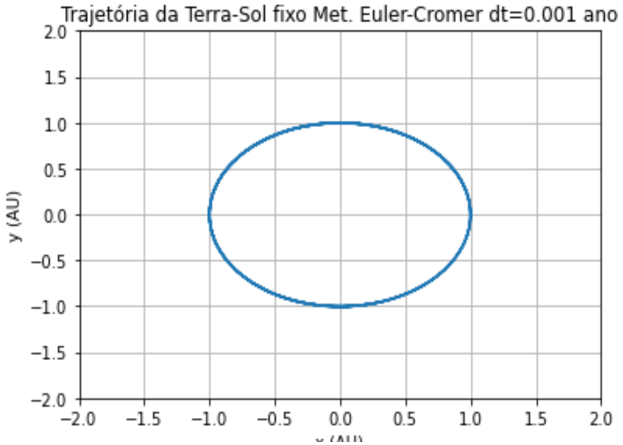


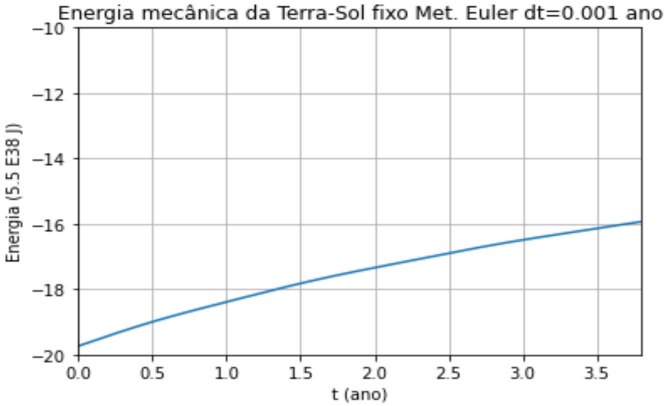

O método de Euler-Cromer conserva a energia mecânica

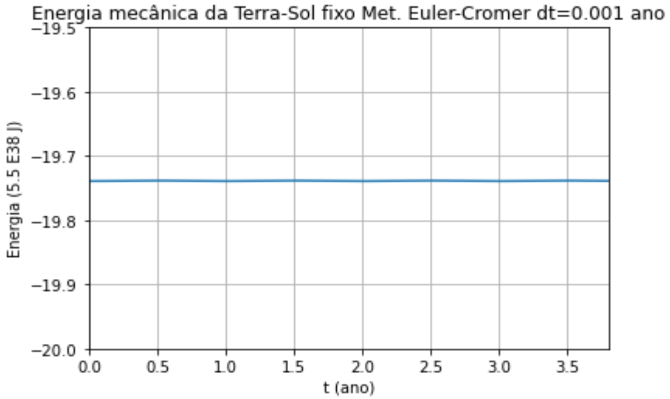
A **conservação da energia mecânica é um bom teste aos métodos de integração numérica.**
Recusam-se os métodos que não conservam a energia mecânica (para as forças conservativas)

# Conservação de Energia mecânica <u>como teste (ou critério) de validação</u> do método numérico de integração



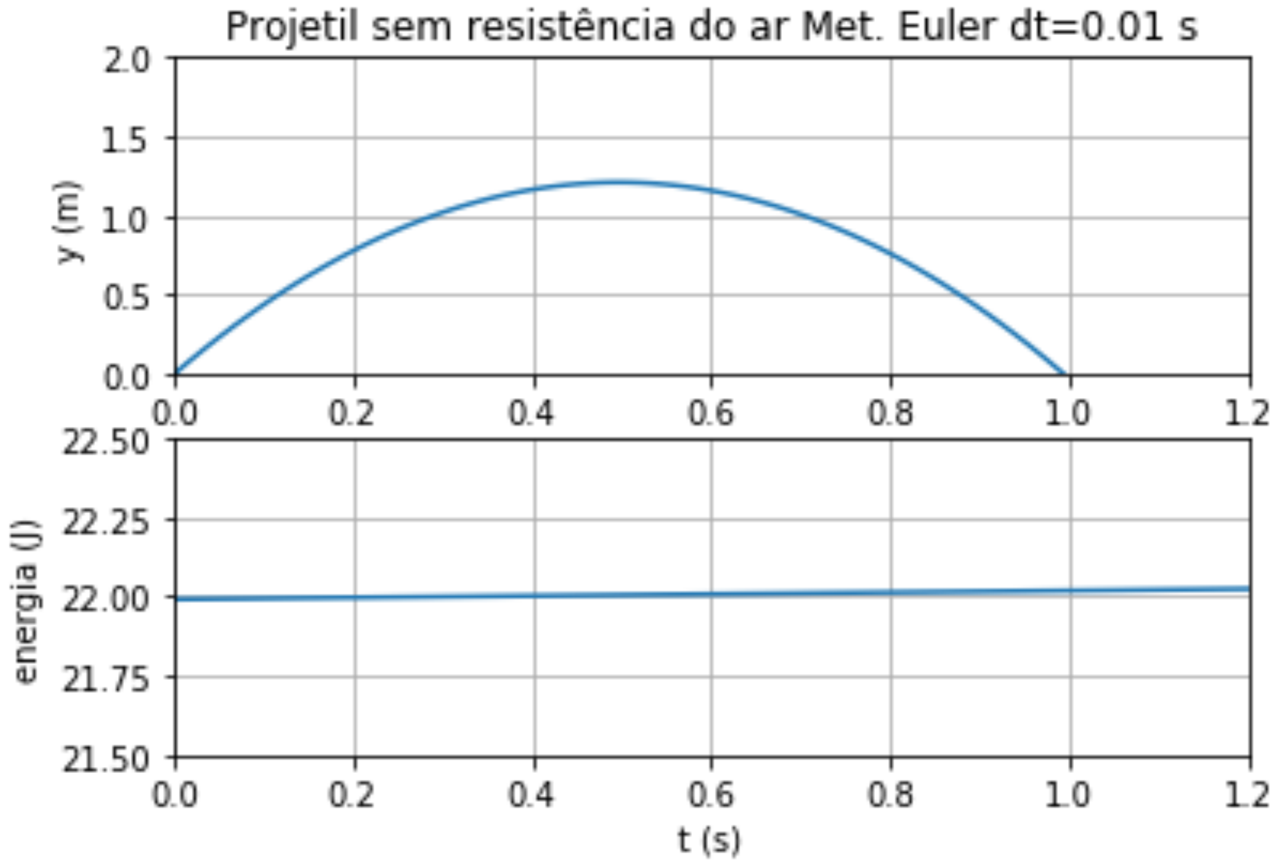



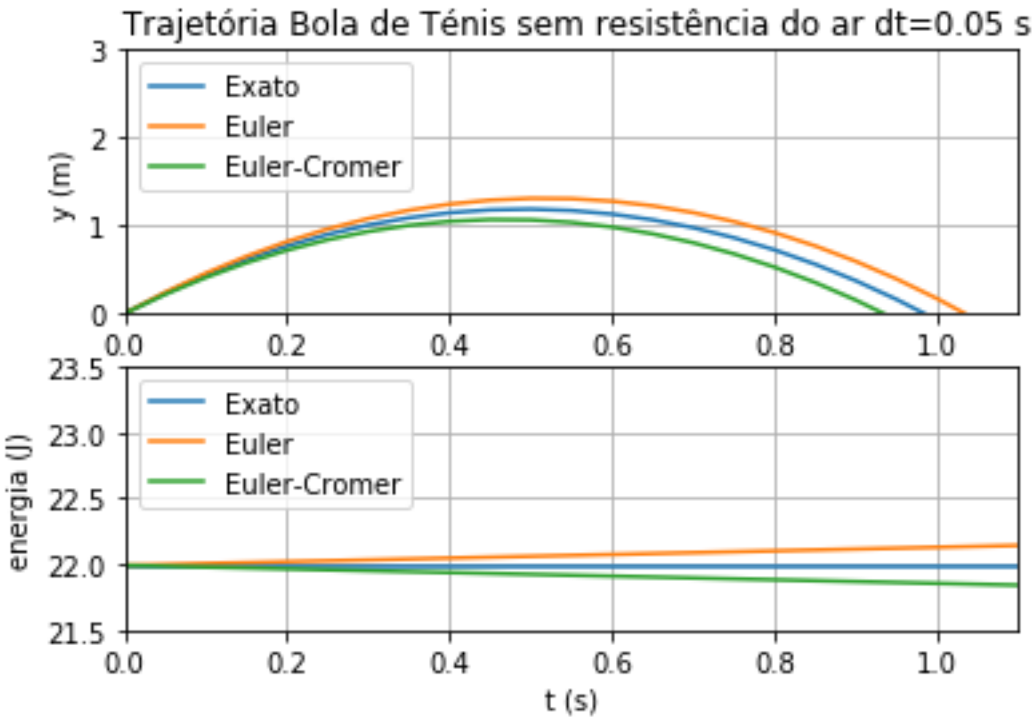

O **método de Euler**
não mantem a conservação de energia mecânica
(o que é falso neste caso)

O **método de Euler-Cromer**
mantem a conservação de energia mecânica (em média)

# Conservação de Energia Mecânica como teste (ou critério) de validação do método numérico de integração



# Conservação de Energia mecânica como teste (ou critério) de validação do método numérico de integração




No caso movimento do projétil, sem resistência do ar (movimento não periódico) os métodos de Euler e de Euler-Cromer mantêm a mesma precisão no cálculo da energia mecânica.

Repare que o passo temporal não é pequeno, de modo a enfatizar os desvios à trajetória exata (a analítica) e à energia mecânica

# Forças conservativas e não conservativas

Forças conservtivas: O trabalho pode ser escrito em termos de energia potencial:

$$\int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} \ = E_{p0} - E_{p1}$$

Ex:

- Gravítica $\vec{F}_{grav} = -G \frac{m\,M}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- Elástica $\vec{F} = -k\vec{r}$
- Elétrica $\vec{F}_{elet} = -k \frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

Forças não conservtivas: O trabalho **não** pode ser escrito em termos de energia potencial

$$W_{0,1}^{(não\ conservativo)} = \int_C \vec{F}^{(não\ conservativa)} \cdot d\vec{r}$$

Ex:

- Resistência do ar $\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v}$
- Força de Magnus $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega}\times\vec{v}$
- Atrito $\vec{F}_{atrito} = -\,\mu\,\left|\vec{N}\right|\hat{v}$

# Trabalho de forças não conservativas

Teorema Trabalho – Energia: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;\; = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$

e pela definição de energia potencial : $\int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} \;\; = E_{p0} - E_{p1}$

<u>Sobreposição do trabalho:</u>

Notar: $\vec{F}$ é a força resultante de todas as forças aplicadas $\vec{F}_i$

$$\vec{F} = \vec{F}^{(conservativa)} + \vec{F}^{(não\ conservativa)}$$

$$W_{0,1} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;\; = \;\; \int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{F}^{(não\ conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1} + \int_C \vec{F}^{(não\ conservativa)} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1} + W_{0,1}^{(não\ conservativo)} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$$

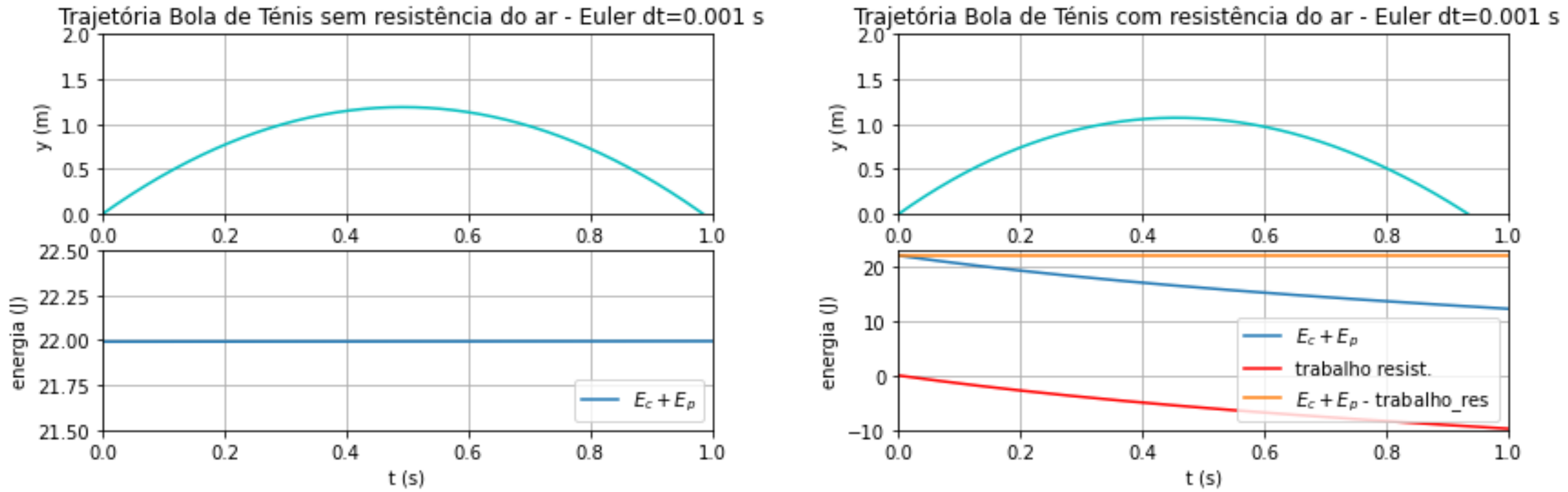
$$\frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} + W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$

$$W_{0,1}^{(não\ conservativo)} = \int_C \vec{F}^{(não\ conservativa)} \cdot d\vec{r}$$

# Trabalho de forças não conservativas

Ex: Movimento da bola de ténis com resistência do ar

$$E(0) = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} - W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$



# Potência

Trabalho: $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C m\, \vec{a} \cdot d\vec{r}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt \qquad d\vec{r} = \vec{v}\, dt \quad \left(\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}\right)$$

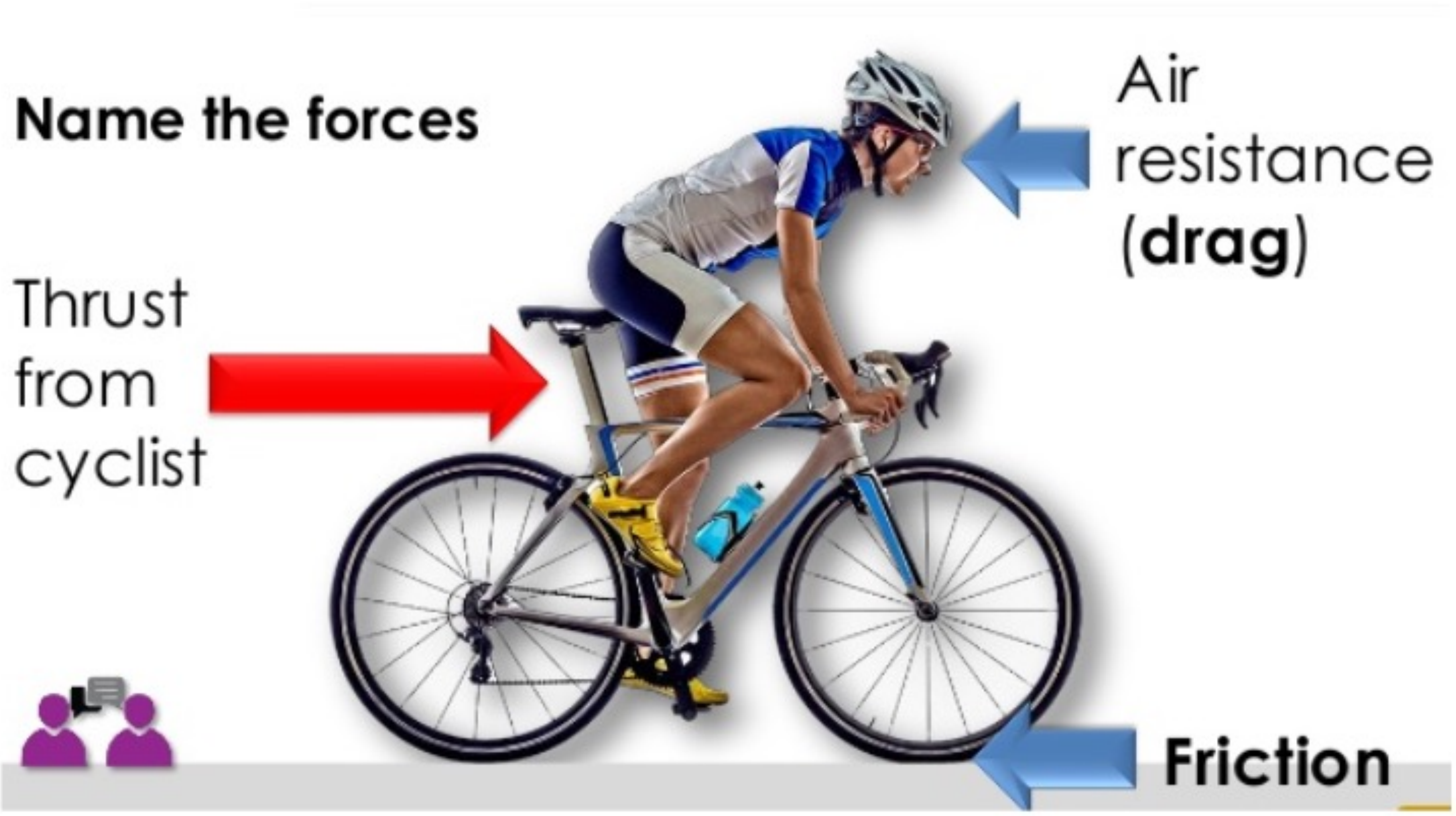
$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = P_o = \text{Potência}$$

trabalho realizado por unidade de tempo

Unidade 1 W = 1 J/s

**Potência desenvolvida por um ciclista:**

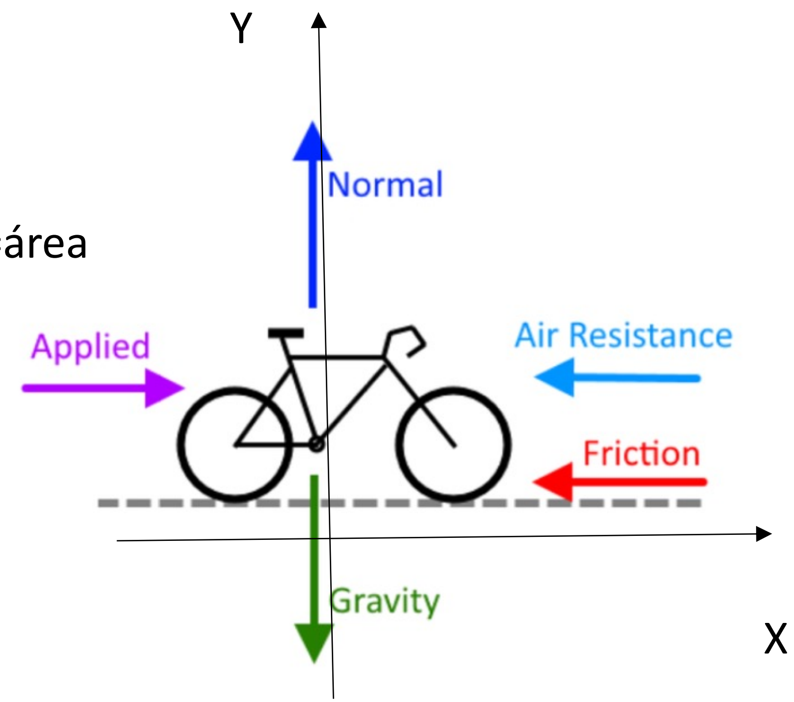
O ciclista para manter uma velocidade constante (força resultante nula) tem de pedalar.
O esforço do ciclista serve sobretudo para anular as forças de resistência do ar e a força de resistência ao rolamento (ou fricção).



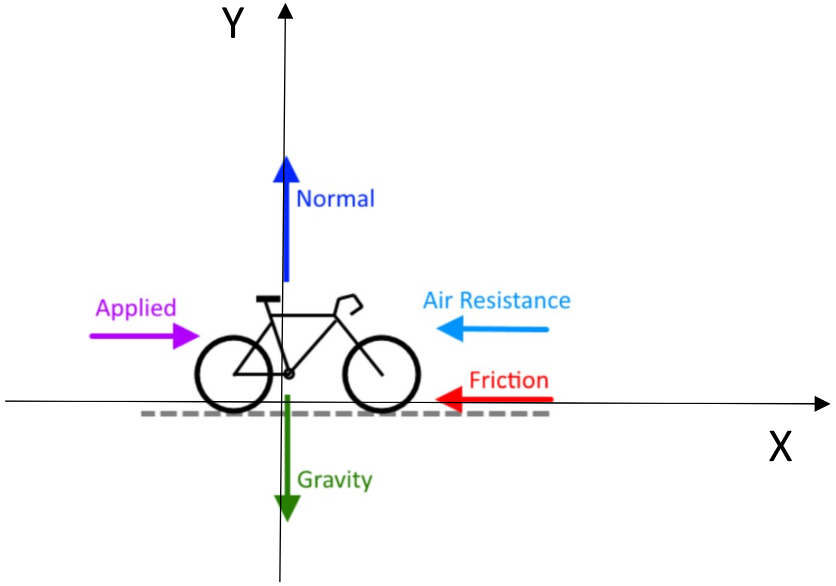
**Potência desenvolvida por um ciclista**:
O ciclista para manter uma velocidade constante (força resultante nula) tem de pedalar.
O esforço do ciclista serve sobretudo para anular as forças de resistência do ar a força de resistência ao rolamento (ou fricção).

## Forças:

- Força desenvolvida pelo ciclista $\vec{F}_{cic}$
- Força de resistência do ar $\vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} |\vec{v}|\, \vec{v},$ A=área
- Peso $\vec{P}$
- Normal $\vec{N}$
- Força de resistência ao rolamento ou fricção $|\vec{F}_{rol}| = \mu\, |\vec{N}|$



# Potência




**Forças:**

$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$ segundo OX

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} + 0 - F_{res} - F_{rol} + 0 \\ F_y = 0 - P + 0 + 0 + N \quad = 0 \end{cases}$$

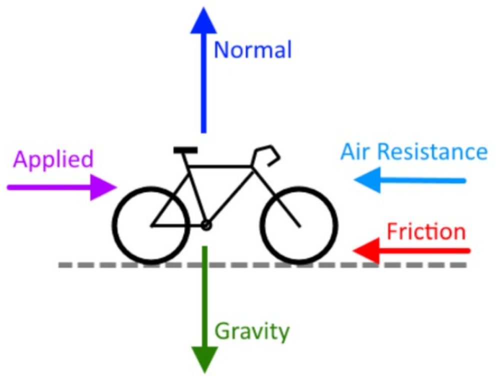
$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - F_{res} - \mu N \\ 0 = -mg + N \end{cases} \qquad \begin{cases} F_x = F_{cic} - F_{res} - \mu N \\ N = mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \dfrac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g \\ N = mg \end{cases}$$

**Notação** a seguir : $\left|\vec{N}\right| \equiv N$

Nunca confundir $\left|\vec{N}\right| \equiv N$ com a componente $N_x$

# Potência




Forças:

$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$ segundo OX

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g \\ N = mg \end{cases}$$

Qual a potência desenvolvida pelo ciclista manter uma velocidade uniforme (constante) (ou $F_x = 0$) ?

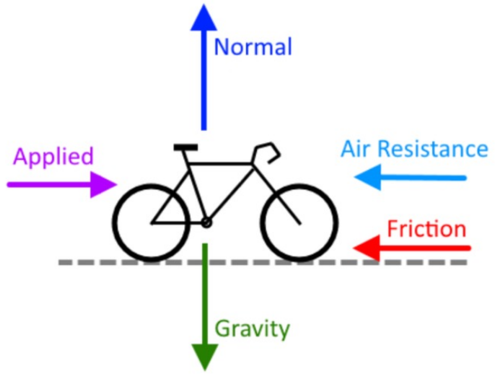
Potência $P_{o,cic} = F_{cic}\, v = ?$

$F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = 0$ e movimento sempre no sentido positivo $v_x = v$

$$\Rightarrow F_{cic} = \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v^2 + \mu\, m\, g$$

$$\Rightarrow P_{o,cic} = \left(\frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v^2 + \mu\, m\, g\right) v$$

Problema:
<u>Qual a potência desenvolvida pelo ciclista</u>
para manter uma <u>velocidade uniforme </u>(constante) de 30 km/k e de 40 km/h?
E o record mundial de velocidade 296.010 km/h?




O coeficiente de resistência $\mu$ de um piso liso de alcatrão é de 0.004
e o coeficiente de resistência do ar é $C_{res} = 0.9$
A massa do ciclista-bicicleta é de 75 kg,
e a área frontal dociclista-bicicleta é de $A = 0.30$ m$^2$

$$F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = 0$$

e movimento sempre no sentido positivo $v_x = v$

$$\Rightarrow F_{cic} = \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v^2 + \mu\, m\, g$$

$$\Rightarrow P_{o,cic} = \left(\frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v^2 + \mu\, m\, g\right) v$$

$v = 30$ km/h $\Rightarrow$ $P_{o,cic} = 120\ \text{W} = 0.163\ \text{cv}$
$v = 40$ km/h $\Rightarrow$ $P_{o,cic} = 260\ \text{W} = 0.353\ \text{cv}$

$v = 296.010$ km/h $\Rightarrow$ $P_{o,cic} = 92177\ \text{W} = 125\ \text{cv}$
como é possível??

Record mundial de velocidade   set 2018

Denise Mueller-Korenek    183.932 mph (milhas/hora) = 296.010 km/h

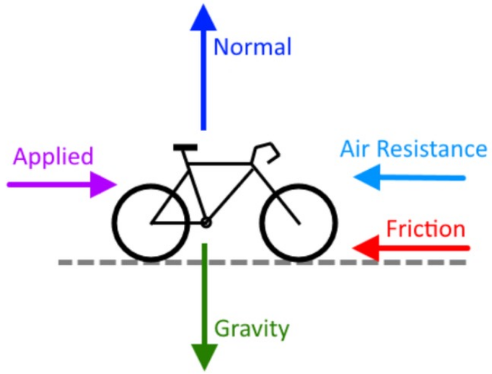
Velocidade do ciclista



Reduzir drasticamente resistência do ar

https://www.youtube.com/watch?v=A6y_G_DJAzM

# Como calcular a velocidade do ciclista?




Se soubermos a potência desenvolvida pelo ciclista podemos calcular a lei da velocidade e a lei do movimento

$$P_{cic} = F_{cic}\, v \quad \Longrightarrow \quad F_{cic} = P_{cic}/v$$

Forças:

$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$ segundo OX

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = m\, a_x \\ F_y = -mg + N = 0 \end{cases}$$

$$m\, a_x = \frac{P_{o,cic}}{v} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g$$

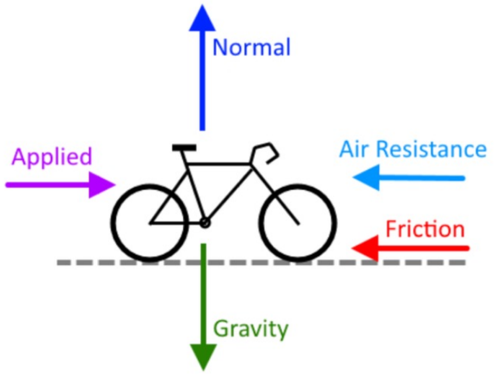
**Problema 12:** Determine a evolução temporal da velocidade de um ciclista, se este produzir continuamente a potência 0.4 cv e partir com um empurrão de 1 m/s?

a) Qual a sua velocidade terminal?

b) Ao fim de quanto tempo atinge 90% da sua velocidade terminal?

c) Quanto tempo leva a percorrer 2 km?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.




Forças: $\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$ segundo OX

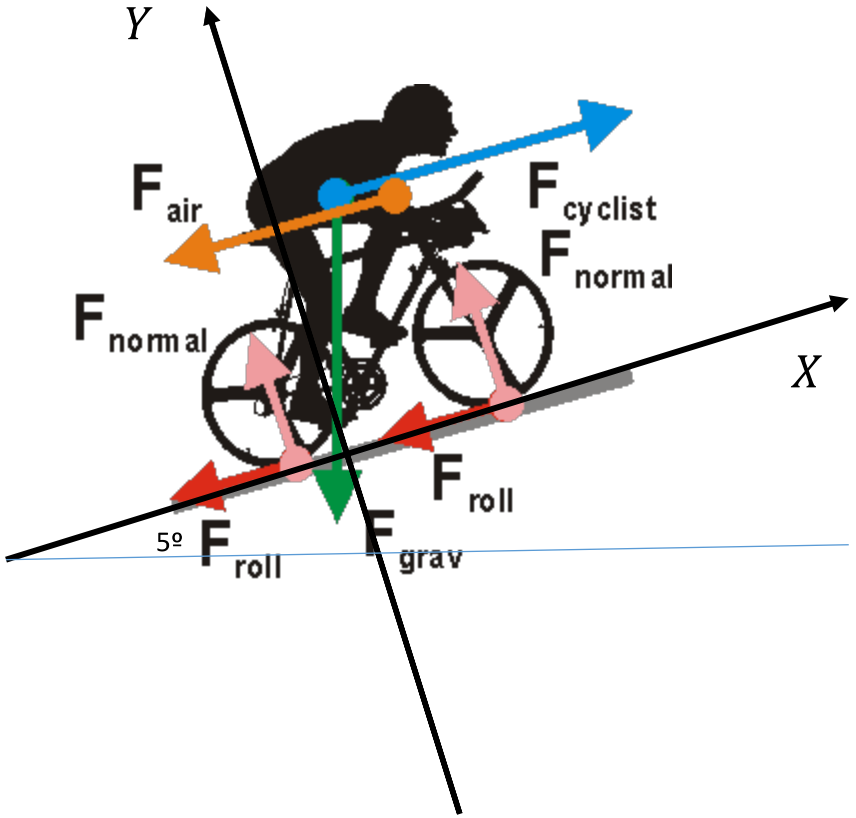
$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = m\, a_x \\ F_y = -mg + N = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_x = \frac{P_{o,cic}}{m\, v} - \frac{C_{res}}{2m} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, g$$

**Problema 13:** O ciclista do problema anterior sobe uma colina com uma inclinação de 5º.

a) Quanto tempo demora a percorrer 2 km?

b) Qual a sua velocidade terminal?




Forças: $\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$ segundo OX

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - P \sin 5º - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = m\, a_x \\ F_y = -m\, g \cos 5º + N = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{P_{o,cic}}{v} - P \sin 5º - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = m\, a_x \\ N = m\, g \cos 5^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; a_x = \frac{P_{o,cic}}{m\, v} - g \sin 5^\circ - \frac{C_{res}}{2m} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, g$$

**Problema 12:**

$$a_x = \frac{P_{o,cic}}{m\ v} - \frac{C_{res}}{2m} A\ \rho_{ar} v\ v_x - \mu\ g$$

**Problema 13:**

$$a_x = \frac{P_{o,cic}}{m\ v} - g\sin 5^\circ - \frac{C_{res}}{2m} A\ \rho_{ar} v\ v_x - \mu\ g$$

Dados:

$\mu = 0.004$

$C_{res} = 0.9$

$m = 75$ kg

$A = 0.30$ m$^2$

$P_{o,cic} = 0.4$ cv

$v_0 = 1$ m/s

Solução numérica (Euler)