Espaces préhilbertiens

Nathan Maillet

Dans toute la suite, $(E, \langle . , . \rangle)$ désigne un espace préhilbertien et x, y deux éléments de E

Égalités de polarisations

$$\langle x , y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

Égalité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Théorème de Pythagore :

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Procédé de Gram-Schmidt

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E euclidien. Il existe une unique base orthonormale $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $P_{(e_i)}^{(\varepsilon_i)}$ soit triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. La formule générale pour les ε_i est :

$$\varepsilon_{i+1} = \frac{\varepsilon'_{i+1}}{\|\varepsilon'_{i+1}\|} \text{ avec } \varepsilon'_{i+1} = e_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \langle e_{i+1} , \varepsilon_j \rangle \varepsilon_j$$

Théorème de projection

Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension fini. La projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est la projection orthogonale sur F notée P_F. P_F est le seul point en lequel $d(x, F)$ est atteinte. Si $(e_i)_1^n$ est une base *orthonormale* de E, on a :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x , e_i \rangle e_i$$

Définition

Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est orthonormale totale si elle est orthonormale et $\mathrm{Vect}\,(e_n, n \in \mathbb{N})$ est dense dans E.

Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale totale, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x , e_k \rangle e_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$$

Définition

$f \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique ($f \in S(E)$) si $\langle x , f(y) \rangle = \langle f(x) , y \rangle$

Théorème spectrale

$f \in S(E)$ si et seulement si il existe une base orthonormale qui diagonalise f

Si $S \in S_n(\mathbb{R})$, S est diagonale dans une base orthonormale

Définition

Un élément f de $\mathcal{L}(E)$ est dit orthogonal si $\langle f(x) , f(u) \rangle = \langle x , y \rangle$. C'est équivalent à : f conserve la norme

Groupe orthogonal

Si E est de dimension n, $f \in \mathsf{O}(\mathsf{E})$ si et seulement si il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

avec $\forall 1 \leq i \leq k, R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$