Exercices d'électromagnétisme

Martin ANDRIEUX

Physique sur un lac

Les eaux d'un lac (de masse volumique μ) s'abaissent d'une hauteur $h = 1\,\mathrm{m}$. Calculer la variation Δg qu'enregistre un gravimètre placé :

- Sur des pilotis, au milieu du lac, juste au dessus de la surface (avant qu'il ne baisse),
- à bord d'une barque ancrée au milieu du lac.

La rayon terrestre est $R = 6400\,\mathrm{km}$, et le champ de pesanteur à l'altitude du lac est $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

$\Delta g = -2\pi G\mu h = -0{,}42 \times 10^{-6}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ $\qquad$ $\Delta g' = \Delta g + \dfrac{2gh}{R} = 2{,}64 \times 10^{-6}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

Cosmogonie du système solaire

Selon l'hypothèse de Laplace, le système solaire aurait été, à un moment de son évolution, constitué d'un tore fluide homogène de masse volumique mu et d'axe (D), animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de (D).

a) On note $\vec{h}$ le champ de gravitation, V le potetiel dont dérive $\vec{h}$, et G la constante de gravitation universelle. Quelle et l'équation locale vérifiée par V ?

b) On note $\vec{a}$ le champ (massique) des forces d'inerties d'entraînement dans le référentiel lié au fluide, et U l potentiel dont dérice $\vec{a}$. Calculer le laplacien ΔU.

c) On admet que la stabilité du système exige que, en tout point de la surface du tore, le champ total $\vec{h} + \vec{a}$ soit dirigé vers l'intérieur de celui-ci. Montrer que ω est nécessairement inférieur à une valeur que l'on calculera en fonction de G et μ.

$\Delta V - 4\pi G\mu = 0$ $\qquad$ $\Delta U = -2\omega^2$ $\qquad$ $\omega^2 < 2\pi G\mu$

Particules colloïdales dans un électrolyte

Dans un colloïde, des particules chargées sont en suspension dans un électrolyte. Pourétudier l'effet de ions dur le champ et le potentiel électrique, on considère en coordonnées sphériques une particule colloïdale de centre O, de rayon R, portant une charge Q uniformément répartie sur sa surface. Les ions de charge $\pm e$ (cations ou anions), auraint en l'abscence de paticule colloïdale la même densité particulaire n_0. Soumis à un potentiel $V(r)$, un ion de qharge a a (en raison de la loi de Boltzmann) la densité particulaire $n_0 \exp\left(-\frac{qV(r)}{k_B T}\right)$.

a) Exprimer, pour $r > R$, la densité volumique de charge $\rho(r)$ en fonction du potentiel $V(r)$, de n_0, T et de constantes. Simplifier cette expression en faisant l'hypothèse que $eV(r) \ll k_B T$ (cela signifie que l'agitation thermique est prépondérente).

b) Dans ce cas, calculer le potentiel $V(r)$, en posant $U(r) = rV(r)$ et $\lambda^2 = \frac{\varepsilon_0 k_B T}{2n_0 e^2}$. On donne le laplacien en coordonnées sphériques pour $V(r)$:

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)$$

c) Quelle est la signification de λ, appelé *longueur de Debye* de la suspension colloïdale ? Que devient $V(r)$ si λ tend vers zéro ou l'infini ? Calculer λ pour de l'eau pure à 300 K, et pour une solution molaire de NaCl. (On donne $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$)

---

a) $\rho(r) \approx -2e^2 n_0 \dfrac{V(r)}{k_B T}$

b) Avec l'équation de Poisson : $V(r) = \dfrac{A}{r}\exp\left(\dfrac{-r}{\lambda}\right)$. On trouve la constante A en écrivant le champ életrique pour $r = R$. Alors

$$V(r) = \frac{Q\exp\left(\frac{R-r}{\lambda}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r\left(1+\frac{R}{\lambda}\right)}$$

c) Pour l'eau pure, $\lambda = 0{,}15\,\mu\mathrm{m}$; pour NaCl molaire, $\lambda = 49$, de l'ordre d'un rayon ionique.

Répartition surfacique de dipôles sur un disque

Un disque de centre O et de rayon R porte, répartis uniformément sur sa surface, des dipôles électriques dont les moments dipolaires lui sont orthogonaux. Soit $\mu = \frac{dp}{dS}$ la densité surfacique de moment dipolaire. Calculer le champ et le potentiel en tout point de l'axe de révolution Oz du disque (plusieures méthodes sont possibles). Que deviennent ces résultats pour $z \gg R$?

$$V(z) = \frac{\mu}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \qquad E(z) = \frac{\mu R^2}{2\varepsilon_0}\left(r^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

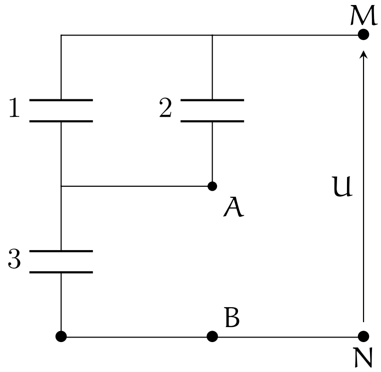
Expérience de Nichols

Un métal contient par unité de volume lorsqu'il est immobile n_0 ions positifs de charge e et n_0 électrons libres de charge $-e$ et de masse m. Un long cylindre de ce métal, de rayon a, est mis en rotation autour de son axe de révolution Oz avec la vitesse angulaire constante ω. À l'équilibre, les ions et les électrons sont entraînés à la vitesse de rotation ω, et n'ont donc pas de mouvement par rapport au métal. À l'équilibre, il apparaît une densité volumique de charge $\rho(r)$ dans le cylindre, ainsi qu'une densité surfacique σ à la surface de celui-ci. En coordonnées cylindriques, on a pour un champ radial : $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{d(rE_r)}{dr}$.

- Calculer le champ électrique dans le métal, et en déduire la différence de potentiel U entre l'axe du cylindre et sa périphérie.
- En déduire la densité $n(r)$ des électrons libres dans le volume du métal, et le charge surfacique σ.

$$U = \frac{m\omega^2 a^2}{2e} \qquad n(r) = n_0 - \frac{2m\varepsilon_0\omega^2}{e^2} \qquad \sigma = -\frac{m\varepsilon_0\omega^2 a}{e}$$

Association de condensateurs et bilan d'énergie



On étudie le système représenté ci-contre, où tous les condensateurs ont même capacité C. Quelle est la charge de chacun d'entre eux ?

On introduit un quatrième condensateur de capacité C entre A et B. Il a été au préalable chargé sous la tension U positive et son armature chargée positivement est placé du côté de A. Quelles sont les nouvelles charges de chaque condensateur à l'équilibre ?

Faire un bilan d'énergie entre l'état initial de la question précedente et l'état final.

$$2q_1 = 2q_2 = q_3 = 2\frac{CU}{3}$$

$q_1' = q_2' = \frac{CU}{4}$ et $q_3' = q_4' = 3\frac{CU}{4}$

L'énergie électrostatique diminue de $\frac{5CU^2}{24}$, et les pertes par effet Joule valent $\frac{CU^2}{24}$