

Séries

Martin ANDRIEUX
Nathan MAILLET

Définition

Une série est dite *convergente* quand la suite des sommes partielles converge. Dans le cas contraire, elle est dite *divergente*.

Critère de d'Alembert

Avec $\sum x_n$ une série à termes positifs, Si $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ a une limite l , alors

- Si $l < 1$, la série converge
- Si $l > 1$, la série diverge

1 Séries à termes positifs

Théorèmes de comparaison

- Si pour $n > n_2$ on a $x_n < y_n$, alors

$$\begin{cases} \sum y_n \text{ cv} \implies \sum x_n \text{ cv} \\ \sum x_n \text{ div} \implies \sum y_n \text{ div} \end{cases}$$

- Même conclusion si $x_n = \mathcal{O}(y_n)$
- Si $x_n \sim y_n$, les séries sont de même nature. De plus, si les séries divergent, leur sommes partielles sont équivalentes, sinon, leur restes sont équivalents.

Définition

Avec $\sum x_n$ une série à termes réels, si $\sum |x_n|$ converge, alors la série converge. On la qualifie alors de série *absolument convergente*. Si la série converge sans converger absolument, elle est *semi-convergente*.

Théorème spécial des séries alternées

Avec $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ et $\forall n \alpha_n \geq 0$, si α_n décroît vers 0, alors la série est convergente. De plus :

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k \right| \leq \alpha_{n+1}$$

Séries de référence

- $\sum q^n$ converge si et seulement si $q < 1$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

- $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Utilisation de DL

Avec $\sum u_n$, si tous les termes du développement limité de u_n convergent, alors la série converge.

Transformation d'Abel

Réécrire le terme général de la série comme différence de sommes partielles bornées permet d'éta-

blir la nature de la série.

Le théorème d'Abel dit que si b_n décroît vers 0 et si

$$(A_n)_{n \geq 0} = \sum_{k=0}^n a_k$$

est bornée, alors $\sum a_n b_n$ converge.

Produit de Cauchy

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels.
Le produit de Cauchy de ces deux séries est :

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

Si les séries des a_n et des b_n sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy est absolument convergent et tend vers le produit des limites des deux séries

Dans le cas de séries entières de rayons de convergence non nuls R_a et R_b , on a :

$$R \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \times \sum_{n \geq 0} b_n z^n \right) \geq \min(R_a, R_b)$$