Séries

Martin Andrieux

Définition

Une série est dite *convergente* quand la suite des sommes partielles converge. Dans le cas contraire, elle est dite *divergente*.

1 Séries à termes positifs

Théorèmes de comparaison

- Si pour $n > n_2$ on a $x_n < y_n$, alors

$$\begin{cases} \sum y_n \text{ cv} \implies \sum x_n \text{ cv} \\ \sum x_n \text{ div} \implies \sum y_n \text{ div} \end{cases}$$

- Même conclusion si $x_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(y_n)$
- Si $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$, les séries sont de même nature. De plus, si les séries divergent, leur sommes partielles sont équivalentes, sinon, leur restes sont équivalents.

Séries de référence

- $\sum q^n$ converge si et seulement si $q < 1$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

- $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Critère de d'Alembert

Avec $\sum x_n$ une série à termes positifs, Si $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ a une limite l, alors

- Si $l < 1$, la série converge
- Si $l > 1$, la série diverge

2 Séries quelconques

Définition

Avec $\sum x_n$ une série à termes réels, si $\sum |x_n|$ converge, alors la série converge. On la qualifie alors de série *absolument convergente*. Si la série converge sans converger absolument, elle est *semi-convergente*.

Théorème spécial des séries alternées

Avec $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n$ et $\forall n\, \alpha_n \geqslant 0$, si α_n décroit vers 0, alors la série est convergente. De plus :

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k \right| \leq \alpha_{n+1}$$

Utilisation de DL

Avec $\sum u_n$, si tous les termes du développement limité de u_n convergent, alors la série converge.

Transformation d'Abel

Réécrire le terme général de la série comme différence de sommes partielles bornées permet d'établir la nature de la série.

Le théorème d'Abel dit que si b_n décroit vers 0 et si

$$(A_n)_{n \geqslant 0} = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

est bornée, alors $\sum a_n b_n$ converge.

Produit de Cauchy

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels. Le produit de Cauchy de ces deux séries est :

$$\sum_{n \geqslant 0} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

Si les séries des a_n et des b_n sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy est absolument convergent et tend vers le produit des limites des deux séries