Exercices d'électromagnétisme

Martin Andrieux, Nathan Maillet

Physique sur un lac

Les eaux d'un lac (de masse volumique μ) s'abaissent d'une hauteur $h = 1\,\mathrm{m}$. Calculer la variation Δg qu'enregistre un gravimètre placé :

- Sur des pilotis, au milieu du lac, juste au dessus de la surface (avant qu'il ne baisse),
- à bord d'une barque ancrée au milieu du lac.

La rayon terrestre est $R = 6400\,\mathrm{km}$, et le champ de pesanteur à l'altitude du lac est $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

$\Delta g = -2\pi G\mu h = -0{,}42 \times 10^{-6}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ $\qquad$ $\Delta g' = \Delta g + \dfrac{2gh}{R} = 2{,}64 \times 10^{-6}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

Cosmogonie du système solaire

Selon l'hypothèse de Laplace, le système solaire aurait été, à un moment de son évolution, constitué d'un tore fluide homogène de masse volumique mu et d'axe (D), animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de (D).

a) On note $\vec{h}$ le champ de gravitation, V le potetiel dont dérive $\vec{h}$, et G la constante de gravitation universelle. Quelle et l'équation locale vérifiée par V ?

b) On note $\vec{a}$ le champ (massique) des forces d'inerties d'entraînement dans le référentiel lié au fluide, et U l potentiel dont dérice $\vec{a}$. Calculer le laplacien ΔU.

c) On admet que la stabilité du système exige que, en tout point de la surface du tore, le champ total $\vec{h} + \vec{a}$ soit dirigé vers l'intérieur de celui-ci. Montrer que ω est nécessairement inférieur à une valeur que l'on calculera en fonction de G et μ.

$\Delta V - 4\pi G\mu = 0$ $\qquad$ $\Delta U = -2\omega^2$ $\qquad$ $\omega^2 < 2\pi G\mu$

Particules colloïdales dans un électrolyte

Dans un colloïde, des particules chargées sont en suspension dans un électrolyte. Pourétudier l'effet de ions dur le champ et le potentiel électrique, on considère en coordonnées sphériques une particule colloïdale de centre O, de rayon R, portant une charge Q uniformément répartie sur sa surface. Les ions de charge $\pm e$ (cations ou anions), auraint en l'abscence de paticule colloïdale la même densité particulaire n_0. Soumis à un potentiel $V(r)$, un ion de qharge a a (en raison de la loi de Boltzmann) la densité particulaire $n_0 \exp\left(-\frac{qV(r)}{k_B T}\right)$.

a) Exprimer, pour $r > R$, la densité volumique de charge $\rho(r)$ en fonction du potentiel $V(r)$, de n_0, T et de constantes. Simplifier cette expression en faisant l'hypothèse que $eV(r) \ll k_B T$ (cela signifie que l'agitation thermique est prépondérente).

b) Dans ce cas, calculer le potentiel $V(r)$, en posant $U(r) = rV(r)$ et $\lambda^2 = \frac{\varepsilon_0 k_B T}{2 n_0 e^2}$. On donne le laplacien en coordonnées sphériques pour $V(r)$:

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right)$$

c) Quelle est la signification de λ, appelé *longueur de Debye* de la suspension colloïdale ? Que devient $V(r)$ si λ tend vers zéro ou l'infini ? Calculer λ pour de l'eau pure à 300 K, et pour une solution molaire de NaCl. (On donne $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$)

Rappel : Un colloïde est une suspension d'une ou plusieurs substances dispersées régulièrement dans un liquide, formant un système à deux phases séparées.

---

a) $\rho(r) \approx -2e^2 n_0 \dfrac{V(r)}{k_B T}$

b) Avec l'équation de Poisson : $V(r) = \dfrac{A}{r}\exp\left(\dfrac{-r}{\lambda}\right)$. On trouve la constante A en écrivant le champ életrique pour $r = R$. Alors

$$V(r) = \frac{Q\exp\left(\frac{R-r}{\lambda}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r\left(1+\frac{R}{\lambda}\right)}$$

c) Pour l'eau pure, $\lambda = 0{,}15\,\mu\mathrm{m}$; pour NaCl molaire, $\lambda = 49\,\mathrm{pm}$, de l'ordre d'un rayon ionique.

Distribution quadripolaire : molécule de dioxyde de carbone

Compte tenu des différences d'électronégativité de l'oxygène et du carbone, on peut schématiser la molécule de dioxyde de carbone, d'un point de vue électrostatique, par trois charges alignées sur un axe Oz : $+2q$ en O, $-q$ aux points d'abscisse a et $-a$.

a) Calculer le potentiel et le champ en un point M éloigné de O (on pose $OM = r$ et $(Oz, OM) = \theta$).

b) Quelle est l'équation des lignes de champ ?

c) Tracer l'allure de la carte de champ avec les équipotentielles.

$V(M) = qa^2\dfrac{1-3\cos^2(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ $\qquad$ $r = k|\sin(\theta)|\sqrt{|\cos(\theta)|}$

Répartition surfacique de dipôles sur un disque

Un disque de centre O et de rayon R porte, répartis uniformément sur sa surface, des dipôles électriques dont les moments dipolaires lui sont orthogonaux. Soit $\mu = \frac{dp}{dS}$ la densité surfacique de moment dipolaire. Calculer le champ et le potentiel en tout point de l'axe de révolution Oz du disque (plusieures méthodes sont possibles). Que deviennent ces résultats pour $z \gg R$?

$V(z) = \dfrac{\mu}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{z}{|z|} - \dfrac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$ $\qquad$ $E(z) = \dfrac{\mu R^2}{2\varepsilon_0}\left(r^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}}$

Expérience de Nichols

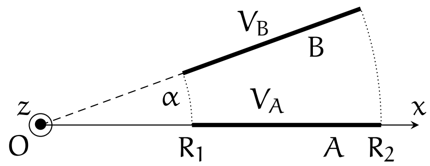
Un métal contient par unité de volume lorsqu'il est immobile n_0 ions positifs de charge e et n_0 électrons libres de charge $-e$ et de masse m. Un long cylindre de ce métal, de rayon a, est mis en rotation autour de son axe de révolution Oz avec la vitesse angulaire constante ω. À l'équilibre, les ions et les électrons sont entraînés à la vitesse de rotation ω, et n'ont donc pas de mouvement par rapport au métal. À l'équilibre, il apparaît une densité volumique de charge $\rho(r)$ dans le cylindre, ainsi qu'une densité surfacique σ à la surface de celui-ci. En coordonnées cylindriques, on a pour un champ radial : div $\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{d(rE_r)}{dr}$.

- Calculer le champ électrique dans le métal, et en déduire la différence de potentiel U entre l'axe du cylindre et sa périphérie.
- En déduire la densité $n(r)$ des électrons libres dans le volume du métal, et le charge surfacique σ.

$$U = \frac{m\omega^2 a^2}{2e} \qquad n(r) = n_0 - \frac{2m\varepsilon_0\omega^2}{e^2} \qquad \sigma = -\frac{m\varepsilon_0\omega^2 a}{e}$$

Capacité d'un condensateur diédrique

On considère un condensateur dont les deux armatures, rectangulaires, sont situées dans deux plans verticaux faisant entre eux un angle α. Les côtés veticaux de ces rectangles, de hauteur h, sont respectivement situés aux distance R_1 etR_2 de l'axe Oz (voir figure).



a) Les deux armatures sont portées respectivement aux potenteils $V_A = 0$ et $V_B = V_0$. Si l'on néglige les effets de bords, quelle est l'allure des équipotentielles et des lignes de champ entre A et B ? En déduire le potentiel $V(M)$ et le champ $\vec{E}(M)$ en un point quelconque entre les armature.

b) Retrouver l'expression de $V(M)$ à partir du laplacien en coordonnées cylindriques.

c) Calculer par deux méthodes la capacité de ce condensateur.

$$V = V_0\frac{\theta}{\alpha} \text{ et } \vec{E} = -\frac{V_0}{\alpha r}\vec{u_\theta} \qquad C = \frac{\varepsilon_0 h}{a}\ln\left(\frac{R_1}{R_1}\right)$$

Effet thermoélectrique dans un condensateur plan

Dans un condensateur plan, l'armature K (cathode) au potentiel zéro émet des électrons avec une vitesse nulle. L'armature A (anode) est portée au potentiel U_0. On note m la masse de l'électron (de charge $-e$), D la distance entre les armatures et S leur aire. Un régime permanent est établi et l'intensité des électrons traversant le conducteur est i (avec $i > 0$). Quelle est la relation liant U_0 et i ?

Indication : Chercher une solution de la forme $V(x) = Ax^\alpha$.

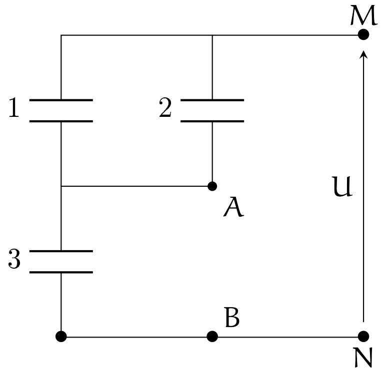
$$i = \frac{4\varepsilon_0}{9}\left(\frac{2e}{m}\right)^{\frac{1}{2}} U_0^{\frac{3}{2}} \frac{S}{D}^2$$

Association de condensateurs et bilan d'énergie

On étudie le système représenté ci-contre, où tous les condensateurs ont même capacité C. Quelle est la charge de chacun d'entre eux ?

On introduit un quatrième condensateur de capacité C entre A et B. Il a été au préalable chargé sous la tension U positive et son armature chargée positivement est placé du côté de A. Quelles sont les nouvelles charges de chaque condensateur à l'équilibre ?

Faire un bilan d'énergie entre l'état initial de la question précedente et l'état final.

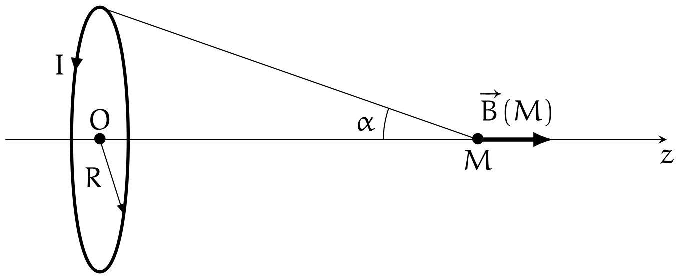


$2q_1 = 2q_2 = q_3 = 2\dfrac{CU}{3}$

$q_1' = q_2' = \frac{CU}{4}$ et $q_3' = q_4' = 3\frac{CU}{4}$

L'énergie électrostatique diminue de $\frac{5CU^2}{24}$, et les pertes par effet Joule valent $\frac{CU^2}{24}$

Moment magnétique d'une sphère chargée en surface et en rotation



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3(\alpha)\vec{u_z}$$

Une sphère de rayon R porte une charge Q uniformément répartie à sa surface, et tourne avec la vitesse angulaire constante ω autour d'un de ses diamètres.

a) Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ au centre O de la sphère.

b) Calculer le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de cette distribution de courants par un découpage de la distribution en spires élémentaires.

c) On peut montrer que le moment dipolaire magnétique d'une distribution de courantes surfaciques peut s'écrire : $\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\iint \overrightarrow{OM} \wedge \vec{j_s}(M)dS$. Retrouver alors la valeur de $\vec{\mathcal{M}}$, en utilisant aussi le moment d'inertie d'une coquille sphérique par rapport à un des ses diamètres (dont on pourra vérifier qu'il vaut $\frac{2}{3}mR^2$).

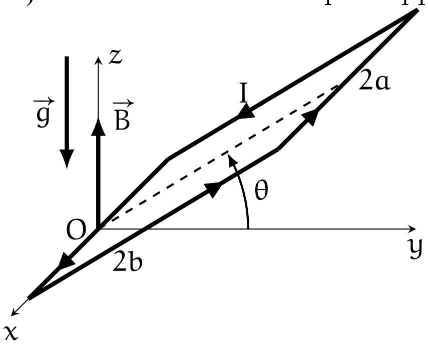
$\vec{B}(O) = \dfrac{\mu_0 Q}{6\pi R}\omega$

$\vec{\mathcal{M}} = \dfrac{QR^2}{3}\omega$

Équilibre d'un cade rectangulaire dans un champs magnétique

Un cadre rectangulaire, parcouru par un courant continu d'intensité $I > 0$, est mobile sans frottemtn autour d'un de ses côtés horizontaux, de longueur $2a$ (les deux côtés non nécessairement horizontaux ont pour longueur 2b). Il est placé dans un champ magnétique uniforme et vertical $\vec{B}$ (voir figure ci-dessous).

On note m la masse totale du cade et J son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Ox.



Déterminer les positions d'équilibre du cadre et discuter leur stabilité. Pour la position d'équilibre stable, déterminer la pulsation des petites oscillations au voisinage de l'équilibre.

On a équilibre pour $\tan(\theta) = -\dfrac{mg}{4aIB}$. La position d'équilibre est $\theta_0 \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right]$, et la pulsation des oscillations est alors telle que $\omega^2 = \dfrac{4abIB\cos(\theta_0) - mgb\sin(\theta_0)}{J}$

Inductance mutuelle de deux spires par deux méthodes

Soient deux spires coaxiales de rayons respectifs b et R, et dont les centres sont séparés par la distance a. On admet que $b \ll a$ et $b \ll R$. Montrer que l'on peut, par deux méthodes différentes, calculer le coefficient de mutuelle inductance M des deux spires.

$M = \dfrac{\mu_0 \pi b^2}{2R\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)^{3/2}}$ (on peut calculer le flux de la grande spire dans la petite, ou celui de la petite -considérée comme un dipôle magnétique- dans la grande)

Inductance propre d'une bobine torique à spires carrées

On enroule régulièrement N spires sur la surface torique engendrée par la rotation d'un cadre carré autour d'un axe Oz contenu dans le plan du cadre et parallèle à un de ses côtés. Chaque côté du cadre a pour longueur $2a$, et le centre du cadre est à la distance d de l'axe Oz.

a) Calculer le coefficient d'inductance propre L de la bobine ainsi constituée (deux méthodes possibles). A.N. : $N = 500, a = 0{,}9\,\text{cm}, d = 5\,\text{cm}$. Simplifier cette expression lorsque $\frac{a}{d} \ll 1$, et comparer le résultat obtenu avec celui d'un solénoïde rectiligne.

b) Un second tore comportant N' spires est superposé au précédent. Calculer le coefficient d'inductance mutuelle M entre les deux circuits.

$L = \dfrac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d-a}\right) = 0{,}328\,\mathrm{mH}$; si $a \ll d, L = \dfrac{2\mu_0 N^2 a^2}{\pi d} = 0{,}324\,\mathrm{mH}$ (on peut calculer L avec le flux u avec l'énergie magnétique)

$M^2 = LL'$