Exercices de méthodologie

Nathan Maillet

Récurrence

On considère l'application Δ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même définié par :

$$\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, (\Delta(u))_n = u_{n+1} - u_n.$$

Soit $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$. Montrer la propriété :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in [n\,;n+p]\,, (\Delta^p(u))_n = f^{(p)}(x)$$

Théorème de Cantor-Bernstein

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux injections. On note g^{-1} la bijection de $g(F)$ sur F qui, à $x \in g(F)$, associe l'unique élément y de F tel que $g(y) = x$. On pose :

$$A_0 = E \backslash g(F) \text{ et } \forall n \geq 1, \begin{cases} B_n = f(A_{n-1}) \\ A_n = g(B_n) \end{cases}$$

On définit alors $\phi : E \to F$ par $\forall x \in E, \phi(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \cup_{n\geq 0} A_n, \\ g^{-1}(x) \text{ sinon.} \end{cases}$ Montrer que ϕ est une bijection.