Exercices de probabilités

Martin Andrieux, Nathan Maillet

Variable aléatoire

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P) à valeurs dans $\{-1; 1\}$, telles que, pour $n \geqslant 1$:

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. (a) Démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(2n)!} \leqslant \dfrac{1}{2^n n!}$.

   (b) Calculer, pour n dans $\mathbb{N}$ et t réel $E\left(e^{tX_n}\right)$; en déduire $E(e^{tX_n}) \leqslant e^{t^2/2}$.

2. Soit a un nombre réel strictement positif.

   (a) Montrer que pour tout réel t positif : $P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ta}E(e^{tS_n})$.

   (b) En déduire que $P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-a^2/2n}$.

   (c) En déduire un majorant de $P(|S_n| \geqslant a)$.

Inégalités

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note G_X sa série génératrice.

1. Montrer que $P(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$; en déduire l'inégalité $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.
2. Montrer que, pour tout t dans $]1\,;+\infty[$ et pour tout a réel positif non nul, $P(X \geqslant a) \geqslant \dfrac{G_x(t)}{t^a}$.
3. Déterminer le minimum sur $[1\,;+\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{t-1}}{t^2}$.
4. Calculer $G_x(t)$; en déduire $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.
5. Montrer que cette inégalité est meilleure que la première dès que λ prend des valeurs assez grandes.