

# Exercices d'algèbre

Martin ANDRIEUX, Nathan MAILLET

## Groupes

### Groupes et ordres

Soient  $G$  et  $H$  deux groupes finis; le produit  $G \times H$  est muni de sa structure de groupe produit. Soient  $x \in G$  et  $y \in H$ , d'ordres respectifs  $n$  et  $m$ . Montrer que  $(x, y)$  est d'ordre  $n \vee m$ . En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que  $G \times H$  soit cyclique.

### Groupe abélien

Soit  $G$  un groupe tel que pour tout  $g$  dans  $G$ ,  $g^2 = 1$ . Montrer que  $G$  est abélien.

### Utilisation du théorème de Lagrange

On admettra le théorème de Lagrange : si  $H$  est un sous-groupe d'un groupe fini  $G$ , le cardinal de  $H$  est un diviseur de celui de  $G$ .

Soit  $G$  un groupe abélien fini. Pour tout  $x$  de  $G$ , nous noterons  $o(x)$  l'ordre de  $x$  dans  $G$ , i.e le plus petit entier  $n \geq 1$  tel que  $x^n = 1$ . On appelle exposant de  $G$  le P.P.C.M. des ordres des éléments de  $G$ . C'est donc l'entier  $r$  défini par  $r = \bigvee_{x \in G} o(x) = \min \{n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in G, x^n = 1\}$ .

- Montrer que si  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $G$  tels que  $o(a) \wedge o(b) = 1$ ,  $ab$  est d'ordre  $o(a)o(b)$ .
- Soit  $r = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$  la décomposition de  $r$  en produit de facteurs premiers. Montrer que pour tout  $i$  compris entre 1 et  $k$ , il existe  $a_i \in G$  tel que  $o(a_i) = p_i^{\alpha_i}$ . En déduire qu'il existe un élément de  $G$  dont l'ordre est l'exposant de  $G$ .
- Soit  $K$  un corps commutatif et  $G$  un sous-groupe  $(K^*, \cdot)$ . Montrer que  $G$  est cyclique (et en particulier,  $K^*$  est cyclique si  $K$  est fini).

## Anneaux

### Système

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + yz + zx = -5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -2 \end{cases}$$

### Polynômes

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $Q = \sum_{k \geq 0} P^{(k)}$ . Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq 0$ .

### Algèbre sur les entiers relatifs

Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  :

$$2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 0 \pmod{21}$$

### Égalité avec une congruence

Soit  $p$  un nombre premier. Montrer :

$$(p-1)! \equiv (-1)^p \pmod{p}$$

## Espaces Vectoriels

### Dimensions d'espaces vectoriels

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

- Soit  $A$  un sous-espace de  $E$ . Montrer que  $\alpha = \{u \in \mathcal{L}(E), A \subset \text{Ker}(u)\}$  et  $\beta = \{u \in \mathcal{L}(E), u(A) \subset A\}$  sont des sous-espaces de  $\mathcal{L}(E)$  et donner leurs dimensions en fonction de celle de  $A$ .
- Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On note  $f, g, h$  les dimensions respectives de  $F, G$  et  $F \cap G$ . Déterminer la dimension de  $\gamma = \{u \in \mathcal{L}(E), u(F) \subset F \text{ et } u(G) \subset G\}$ .

## Calcul matriciel

### Inversibilité des matrices par blocs

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices inversibles de tailles  $n$  et  $m$  et soit  $C$  matrice de taille  $n, m$ . Montrer que la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

### Calculs de déterminants

Calculer le déterminant :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \cos(2x) \\ 1 & \cos(y) & \cos(2y) \\ 1 & \cos(z) & \cos(2z) \end{vmatrix}$$

et

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

### Une histoire de rang

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $A^n$  et  $A^{n+1}$  ont le même rang.