Exercices de probabilités

Martin Andrieux, Nathan Maillet

Pile ou face

Soit $p \in]0;1[$ et $r \in \mathbb{N}, r \geq 2$. On effectue une suite infinie de tirages à pile ou face. Les tirages sont indépendants et la probabilité de tirer face à chaque tirage, vaut p. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note F_n l'évènement « face sort au $n$ièième tirage » et P_n l'événement « pile sort au n-ième tirage ». Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement « au n-ième tirage, on obtient r faces consécutives pour la première fois ».

1. (a) Déterminer $E_1 \cdots E_{r-1}$ et E_r
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
   $$E_{n+r+1} = \left(\bigcap_{i=n+2}^{n+r+1} F_i\right) \bigcap P_{n+1} \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i}\right)$$
   (c) En déduire que chaque E_n est un événement.
2. On pose $p_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}, p_n = P(E_n)$. Montrer que $\sum p_n$ converge.
3. (a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+r+1} = p^r(1-p)\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)$$
   (b) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, p_{n+r+1} en fonction de $p, + r$, p_n, p et $q = 1 - p$
4. Soit
   $$\begin{aligned} G : [-1;1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k \end{aligned}$$
   (a) Montrer que G est bien définie et qu'elle est continue
   (b) Montrer que
   $$\forall x \in]-1;1[, \frac{G(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right) x^k$$
   (c) Exprimer $G(x)$

Variable aléatoire

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P) à valeurs dans $\{-1;1\}$, telles que, pour $n \geqslant 1$:

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. (a) Démontrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(2n)!} \leqslant \dfrac{1}{2^n n!}$.
   (b) Calculer, pour n dans $\mathbb{N}$ et t réel $E\left(e^{tX_n}\right)$; en déduire $E(e^{tX_n}) \leqslant e^{t^2/2}$.
2. Soit a un nombre réel strictement positif.
   (a) Montrer que pour tout réel t positif : $P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-ta}E(e^{tS_n})$.
   (b) En déduire que $P(S_n \geqslant a) \leqslant e^{-a^2/2n}$.
   (c) En déduire un majorant de $P(|S_n| \geqslant a)$.

Inégalités - 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note G_X sa série génératrice.

1. Montrer que $P(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$; en déduire l'inégalité $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.
2. Montrer que, pour tout t dans $]1\,;+\infty[$ et pour tout a réel positif non nul, $P(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{G_X(t)}{t^a}$.
3. Déterminer le minimum sur $[1\,;+\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^{t-1}}{t^2}$.
4. Calculer $G_X(t)$; en déduire $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.
5. Montrer que cette inégalité est meilleure que la première dès que λ prend des valeurs assez grandes.

Inégalités - 2

1. Pour $t \in \mathbb{R}, x \in [-1\,;1]$, montrer que $e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^{t}$
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-1\,;1]$ et d'espérance nulle. Montrer que e^X est d'espérance finie et que $E(e^{tX}) \leq \operatorname{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$
3. Soient $X_1 \cdots X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que, pour tout $i, |X_i| \leq a_i$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) Montrer que
   $$E(e^{tS_n}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$
   (b) Soit $\epsilon > 0, t > 0$. Montrer que
   $$P(S_n > \epsilon) \leq \exp\left(-t\epsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$$
   (c) En choisissant une bonne valeur de t, montrer que
   $$P(S_n > \epsilon) \leq \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)$$

Stage militaire à l'X

Le jeune polytechnicien Guillaume s'est perdu dans la fôret. Il cherche à retrouver le reste de l'équipe. À chaque pas de temps, Guillaume et l'équipe changent de camp avec probabilité uniforme en suivant les chemins si contre. Au bout de combien de temps Guillaume peut-il espérer retrouver ses camarades ? Au départ, Guillaume est à l'ouest, l'équipe est au sud.