Espaces vectoriels normés

Martin Andrieux, Nathan Maillet

Définition

Une *norme* $\|\cdot\|$ est une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in E,\ \|x\| \geqslant 0$
- $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \implies x = 0$
- $\forall \lambda \in K,\ \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\forall x, y \in E,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Cauchy Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Caractérisations séquentielles

$A \subset E$

- A est ouvert si et seulement si : $\forall a \in A, \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}, x_n \underset{\infty}{\to} a \implies \exists n_0 / \forall n \geq n_0, x_n \in A$
- A est fermé si et seulement si A est stable par limite : $\forall a \in E, \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, x_n \underset{\infty}{\to} a \implies a \in A$
- $\forall x \in E$,

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\iff \forall r \geq 0, B(x,r) \cap A \neq 0 \\ &\iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} / x_n \underset{\infty}{\to} x \end{aligned}$$

Continuité et topolgie

- f est continue si et seulement si $\forall A$ fermé de $E, f^{-1}(A)$ est un fermé de E (idem avec les ouverts)

Applications linéaires et topologie

Soient E, F deux K espaces vectoriels, $f \in L(E, f)$. Il y a équivalence entre :

- $f \in L_c$
- f continue en un point
- f continue en 0
- f bornée sur $B(0,1)$
- $\exists K \in \mathbb{R}^+, x \in E, \|f(x)\| \leq K\|x\|$
- f est lipchitzienne

Équivalence des normes

Deux normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ sont dites *équivalentes* si (les propriétés suivantes sont équivalentes) :

- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|_1} x \iff x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|_2} x$
- On a α et β tels que $\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1$

En dimension finie

- Le théorème d'équivalence des normes permet de choisir une norme adaptée au problème s'il y a besoin de norme
- Les compacts sont les fermés bornés
- $f \in L(E) \implies f \in L_c$
- Les applications bi-linéraires sont continues
- Tout sous espace vectoriel est fermé

Définition

Une partie K d'un espace vectoriel normé E est dite cmpacte si toute suite d'élement de K possède une valeur d'adhérence dans K

Compacité et topologie

- Tout compact est fermé borné (réciproque fausse en dimension infinie !)
- Les compacts de K^n sont les fermés bornés
- Soit K un compact de E et $A \subset K$, A est compacte si et seulement si A est fermée
- Soient E, F deux espaces vectoriels normés, K, L deux compactes de E et F, $K \times L$ est un compact de $E \times F$

Compacité et continuité

- Si $f : K \to F$ est continue avec K compact de E, E, F deux espaces vectoriels normés. alors f est uniformément continue et $f(K)$ est compact
- Soient K un compact non vide et $f : K \to \mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes

Absolue convergence

$$\sum_{n\geq 0} \|u_n\| \text{ converge } \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge}$$

Définition

La norme subordonnée est définie par : $|||f||| = \sup_{x\in E0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$

On a alors : $|||g \circ f||| \leq |||g||| \times |||f|||$