Réduction

Martin Andrieux

1 Éléments propres

Définition

Soit f dans $\mathcal{L}(E)$, x est un *vecteur propre* pour f si $x \neq 0$ et si $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Si x est un vecteur propre pour f, il existe un unique λ dans K tel que $f(x) = \lambda x$.
On note $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f, appelé *spectre* de f.

Définition

On pose $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - f)$. χ_f est appelé *polynôme caractéristique* de f. Avec A la matrice de f, χ_A est de la forme suivante :

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^n - \mathrm{tr}(A) \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$$

Sous-espaces propres

On pose $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ le sous-espace propre associé à λ_i.

$$E = \bigoplus_{i=0}^{k} E_i$$

Les dimensions des sous-espaces propres sont inférieures aux ordre de multiplicité des λ_i en tant que racines de χ_f.

Première CNS de diagonalisabilité

f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et si pour chaque λ dans $\mathrm{Sp}(f)$, E_λ est de dimension l'ordre de multiplicité de λ dans χ_f.

Trigonalisabilité

f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé.

Sur $\mathbb{C}$, toute matrice est trigonalisable.