

LYCÉE PIERRE CORNEILLE

2019 - 2020

Cours de Physique-chimie

ANDRIEUX Martin

D'après un cours de A.LAVARELO

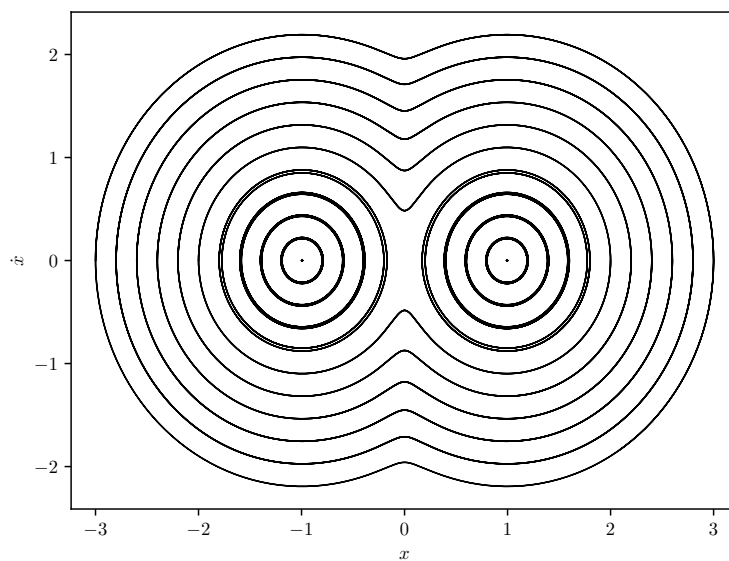
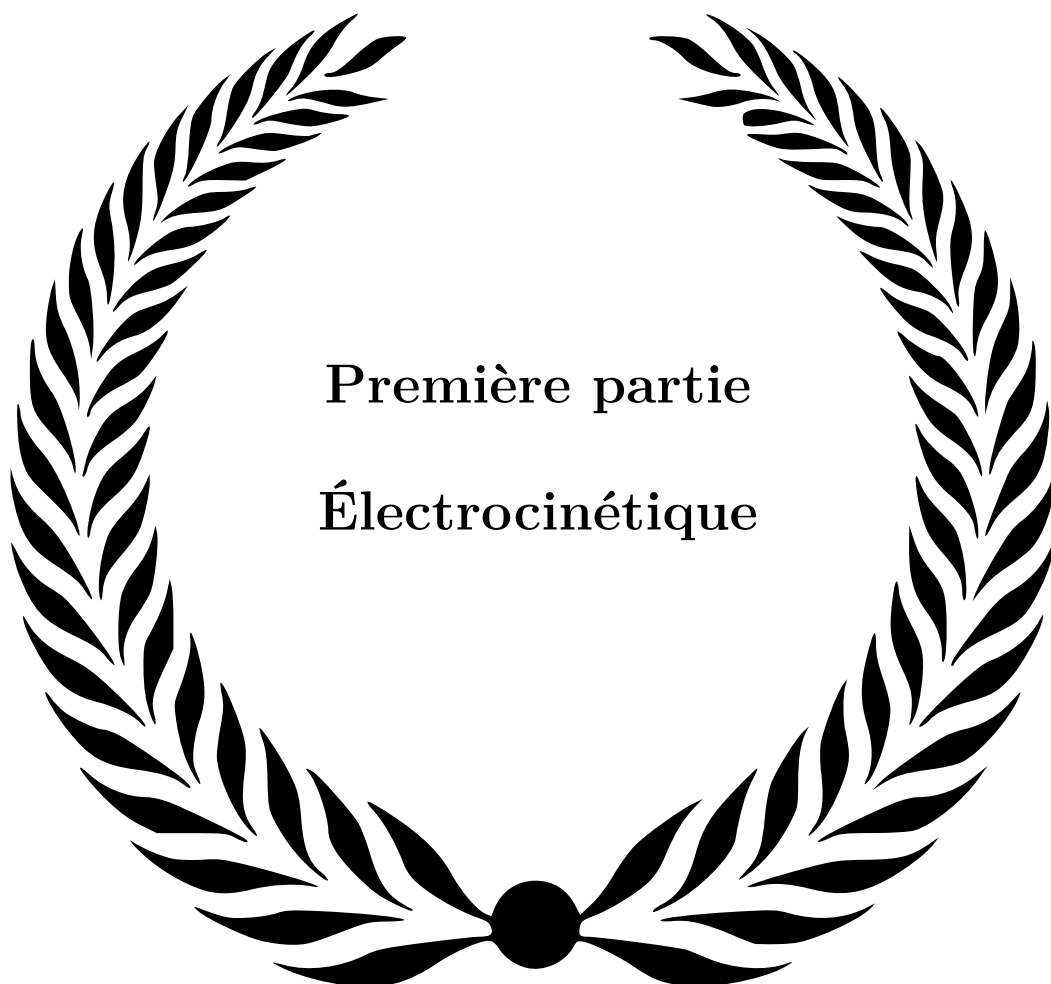


FIGURE 1 – Bifurcation d'un système masse-ressort

Sommaire

I	Électrocinétique	5
1	Circuits électriques dans l'ARQS	8
2	Circuits linéaires du premier ordre	15
3	Régimes sinusoïdaux	21
4	Filtrage linéaire	34
II	Mécanique	38
5	Oscillateurs	41
6	Cinématique	47
7	Dynamique Newtonienne	55
8	Approche énergétique du mouvement	59
9	Mouvement de particules chargées	67
10	Moment cinétique	70
III	Thermodynamique	72
11	Description d'un système à l'équilibre thermodynamique	75
12	Transformations thermodynamiques et bilans d'énergies	80
13	Bilan d'entropie	87
14	Machines thermiques	91
IV	Optique	95
15	Optique géométrique	97
16	Lentilles minces	101
V	Architecture de la matière	105
17	Atomes et éléments chimiques	107
18	Molécules et solvants	110

VI	Transformations chimiques	115
19	Équilibre chimique	118
20	Cinétique chimique	122
21	Réactions acide-base	127
22	Dissolution / précipitation	132
23	Oxydo-réduction	135



Première partie
Électrocinétique

Dans cette partie :

1	Circuits électriques dans l'ARQS	8
I	Courant électrique	8
I.1	Charge	8
I.2	Intensité du courant électrique	8
I.3	Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) . . .	9
I.4	Loi des nœuds	9
II	Tension électrique	9
II.1	Mesure de tensions	9
II.2	Loi d'additivité des tensions	10
III	Dipôles	11
III.1	Conventions	11
III.2	Dipôles passifs	11
III.3	Dipôles actifs	12
IV	Association de résistances	13
IV.1	En série	13
IV.2	En parallèle	14
IV.3	Diviseurs de tension et de courant	14
2	Circuits linéaires du premier ordre	15
I	Nouveaux dipôles	15
I.1	Condensateur	15
I.2	Bobine	16
II	Circuit RC	16
II.1	Décharge d'un condensateur	16
II.2	Résolution d'une équation différentielle du premier ordre . .	17
II.3	Graphes	17
II.4	Durée du régime transitoire	18
II.5	Bilan énergétique	18
III	Circuit RL	18
III.1	Établissement de l'équation différentielle	19
III.2	Résolution d'une équation différentielle avec second membre	19
III.3	Graphes	19
3	Régimes sinusoïdaux	21
I	Circuit RC en régime sinusoïdal forcé	21
I.1	Solution générale	21
I.2	Représentation de Fresnel	22
I.3	Méthode complexe	23
II	Électrocinétique en régime sinusoïdal	23
II.1	Impédance complexe	23

II.2	Association série de deux impédances	24
II.3	Association parallèle de deux impédances	24
III	Circuit <i>RLC</i> en régime sinusoïdal forcé	25
III.1	Résonance en intensité	25
III.2	Résonance en tension	29
IV	Avance et retard de phase	33
4	Filtrage linéaire	34
I	Signaux périodiques	34
I.1	Décomposition en série de Fourier	34
I.2	Valeur moyenne	34
I.3	Valeur efficace	35
II	Filtres linéaires	35
II.1	Fonction de transfert harmonique	35
II.2	Diagrammes de Bode	36
II.3	Pulsation de coupure	37
III	Utilisation de filtres	37
III.1	Moyenueur	37
III.2	Dérivateur	37
III.3	Intégrateur	37

1

Circuits électriques dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires

I Courant électrique

I.1 Charge

La charge est portée par des porteurs de charges, pouvant être :

- Des *électrons*, dans les solides
- Des *ions*, dans des solutions ou électrolytes.

La charge est quantifiée, $q = ke$, où e est la charge élémentaire. $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C

I.2 Intensité du courant électrique

Définition

Intensité électrique : « Débit » de charges :

$$I = \frac{dq}{dt} \text{ A (Ampère = 1 C} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

L'intensité électrique se mesure avec un ampèremètre, branché en série.

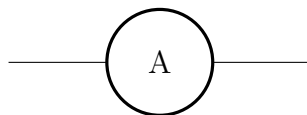


FIGURE 1.1 – Symbole de l'ampèremètre.

I.3 Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

Le courant électrique s'établit instantanément. Dans une branche, il est le même partout.

Prenons un circuit de taille L , le courant s'établit en une durée $\Delta t = \frac{L}{c}$, où c est la célérité de la lumière.

L'ARQS sera validée si : $\Delta t \ll T \implies c\Delta t \ll cT \implies L \ll \lambda$, T est la période de variation du système.

I.4 Loi des nœuds

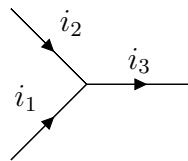


FIGURE 1.2 – Loi des nœuds

La charge est conservée.

Pendant une durée dt :

$$\begin{aligned} dq_1 + dq_2 - dq_3 &= 0 \\ \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} - \frac{dq_3}{dt} &= 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \\ \sum I_n &= 0 \end{aligned}$$

II Tension électrique

II.1 Mesure de tensions

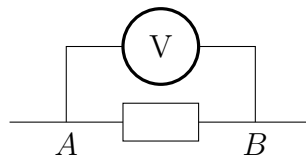


FIGURE 1.3 – Branchement d'un voltmètre

La tension (en volt V) se mesure avec un voltmètre, branché en parallèle.

II.2 Loi d'additivité des tensions

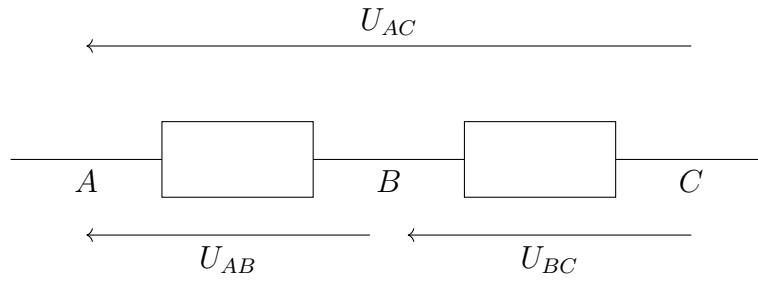


FIGURE 1.4 – Résistances en série

$$U_{AB} + U_{BC} = V_A - V_B + V_B - V_C = U_{AC}$$

a. Loi des mailles

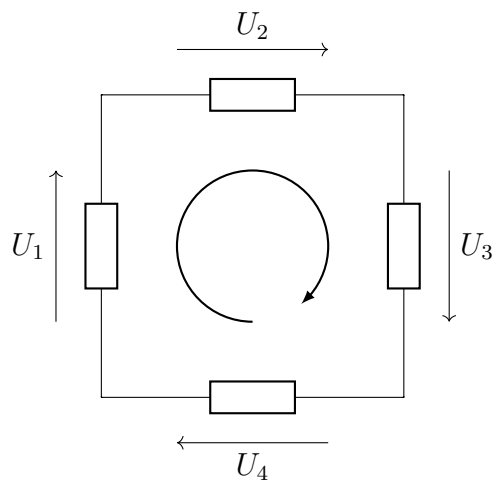


FIGURE 1.5 – Loi des mailles

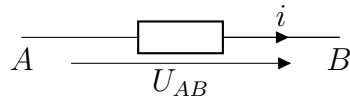
$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0$$

III Dipôles

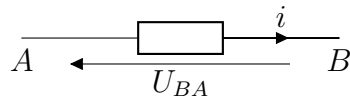
III.1 Conventions

Définition

Convention générateur :



Convention récepteur :



III.2 Dipôles passifs

a. Conducteur ohmique

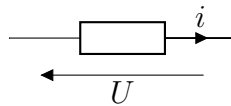


FIGURE 1.6 – Conducteur ohmique

Important

Loi d'Ohm : $U = RI$
avec R en $\Omega(\text{V} \cdot \text{A}^{-1})$ $R \sim 1 \text{ k}\Omega$

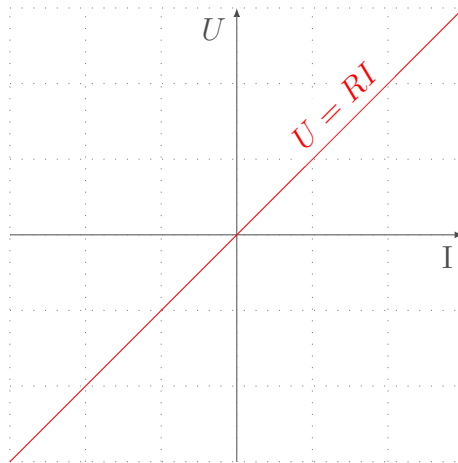


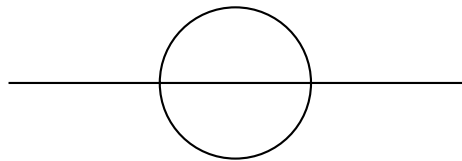
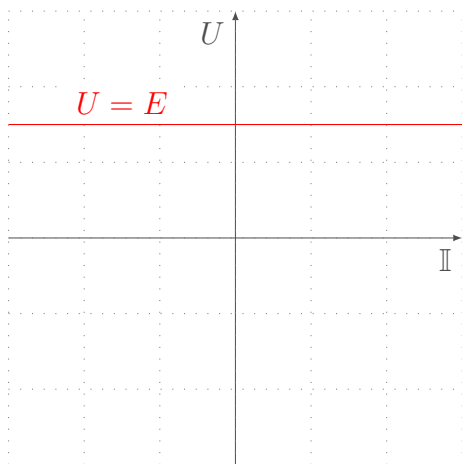
FIGURE 1.7 – Caractéristique d'un dipôle ohmique

b. Résistance d'entrée d'un appareil

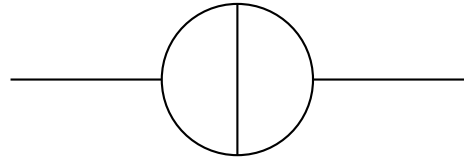
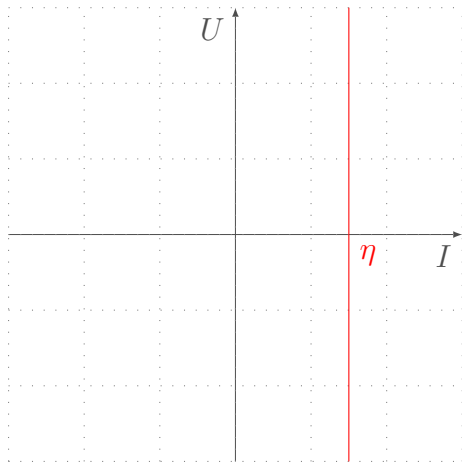
En pratique, chaque appareil possède une résistance d'entrée : $R_e = \frac{U}{I}$
 Notamment, pour un oscilloscope, $R_{\text{oscillo}} \simeq 1 \text{ M}\Omega$

III.3 Dipôles actifs

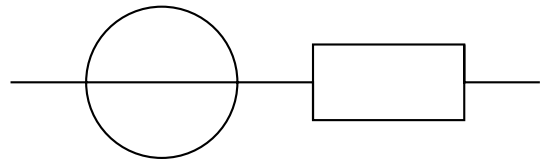
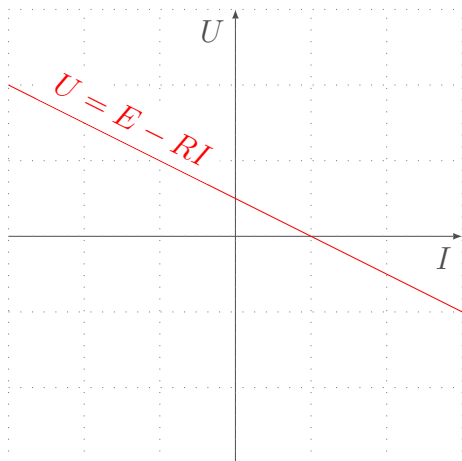
a. Source idéale de tension



b. Source idéale de courant



c. Source non-idéale linéaire



Puissance fournie : $P = UI = EI - R_s I^2$. Nous remarquons la présence des pertes par effet Joule : $P_J = RI^2$

IV Association de résistances

IV.1 En série

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

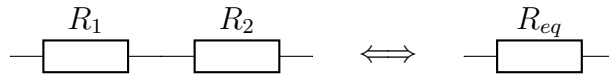


FIGURE 1.8 – Résistances en série

IV.2 En parallèle

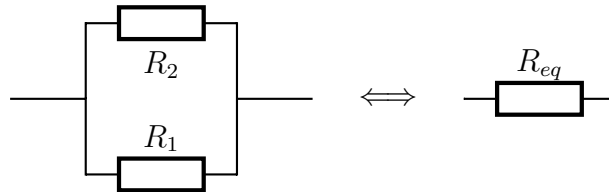


FIGURE 1.9 – Résistances en parallèles

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

IV.3 Diviseurs de tension et de courant

Important

- Pont diviseur de tension :

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- Pont diviseur de courant :

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

2

Circuits linéaires du premier ordre

I Nouveaux dipôles

I.1 Condensateur

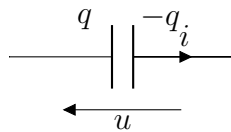


FIGURE 2.1 – Schéma d'un condensateur

Important

- $i = \frac{dq}{dt}$
- $u = \frac{q}{C}$ où C est la capacité en Farad ($F = C \cdot V^{-1}$)
- $i = C \frac{du}{dt}$

- La tension aux bornes d'un condensateur est continue.
- En régime permanent, $u = \text{cste}$, $i = 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
- Puissance reçue : $P = ui = Cu \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right)$, $\frac{1}{2} Cu^2$ est l'énergie électrostatique stockée dans le condensateur.
- $E_{elec} = \frac{1}{2} Cu^2 = \frac{q^2}{2C}$

I.2 Bobine

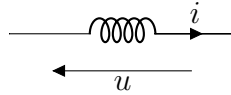


FIGURE 2.2 – Schéma d'une bobine

Important

$$u = L \frac{di}{dt}$$

- Le courant aux bornes d'une bobine est continu.
- En régime permanent, $i = \text{cste}$, $u = 0$, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé.
- Puissance reçue : $P = ui = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$, $\frac{1}{2} Li^2$ est l'énergie magnétique stockée dans la bobine.
- $E_m = \frac{1}{2} Li^2$

II Circuit RC

II.1 Décharge d'un condensateur

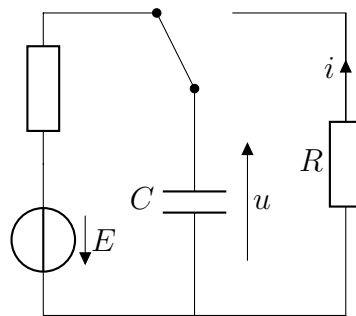


FIGURE 2.3 – Circuit RC

Loi des mailles : $u + RC \frac{du}{dt} = 0$

On pose $\tau = RC$ en $\text{VA}^{-1}\text{AV}^{-1}\text{s}$, donc en s. C'est la constante de temps du circuit.

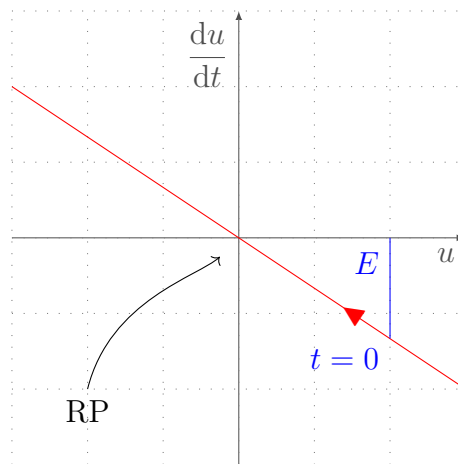


FIGURE 2.4 – Portrait de phase

II.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre

Solution générale : $u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

A dépend des conditions initiales, ici, $A = u(0) = E$

II.3 Graphes

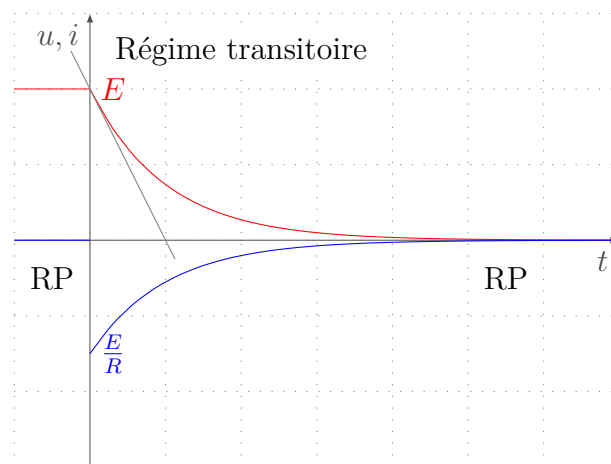


FIGURE 2.5 – Graphes de u et i

II.4 Durée du régime transitoire

Temps de réponse à 5% :

$$u(t_{5\%}) = 5\%(u(0)) = 0.05E$$

$$Ee^{-\frac{t_{5\%}}{\tau}} = 0.05E \implies -\frac{t_{5\%}}{\tau} = \ln(0.05) \implies t_{5\%} = \tau \ln\left(\frac{1}{0.05}\right) \approx 3\tau$$

II.5 Bilan énergétique

$$u + Ri = 0$$

$$ui + Ri^2 = 0$$

$$\int_0^{+\infty} Cu \frac{du}{dt} dt + \int_0^{+\infty} Ri^2 dt = 0$$

$$\int_{u(0)}^{u(\infty)} Cu du + \int_0^{+\infty} Ri^2 dt = 0$$

$$\left[\frac{1}{2}Cu^2\right]_E^0 + \int_0^{+\infty} Ri^2 dt = 0$$

$$\int_0^{+\infty} Ri^2 dt = \frac{1}{2}CE^2$$

$\int_0^{+\infty} Ri^2 dt$ est l'énergie dissipée par effet joule, et $\frac{1}{2}CE^2$ est l'énergie stockée dans le condensateur à $t = 0$.

III Circuit RL

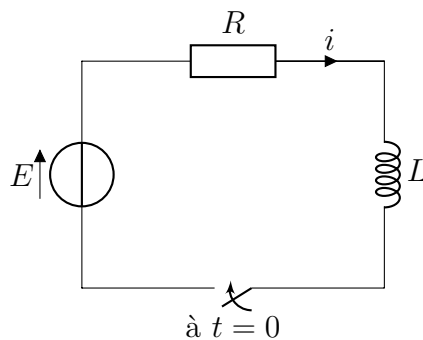


FIGURE 2.6 – Circuit RL

III.1 Établissement de l'équation différentielle

$$\frac{di}{dt} = \frac{E - Ri}{L}$$

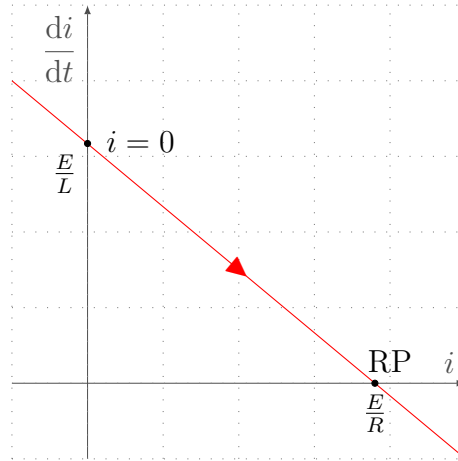


FIGURE 2.7 – Portait de phase

On pose $\tau = \frac{L}{R}$, en $\text{H}\Omega^{-1}$, donc en s.

III.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Solution générale : $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$

A dépend des conditions initiales, ici, $A + \frac{E}{R} = i(0) = 0$, donc $i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

III.3 Graphes

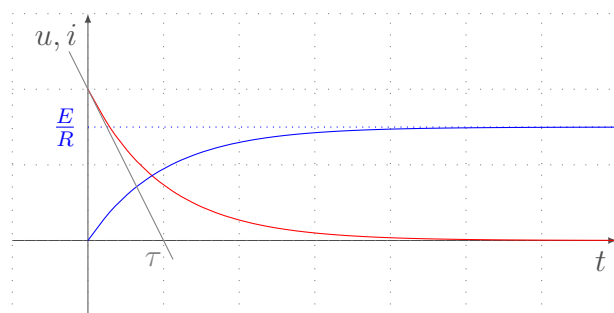


FIGURE 2.8 – Graphes de u et i

3

Régimes sinusoïaux

I Circuit RC en régime sinusoïdal forcé

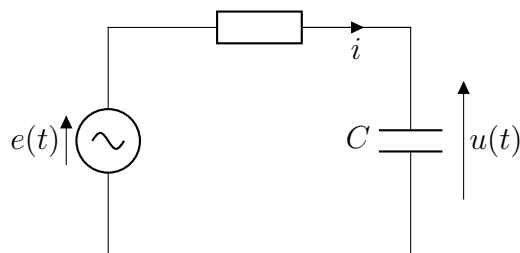


FIGURE 3.1 – Circuit RC

Avec $e(t) = E \cos(\omega t)$.

En appliquant la loi des mailles, on obtient :

$$\begin{aligned} e &= u + Ri = u + RC\dot{u} \\ \frac{e}{\tau} &= \dot{u} + \frac{u}{\tau} \end{aligned}$$

I.1 Solution générale

$$u(t) = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + u_p(t)$$

Ainsi, $\lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$ correspond au régime transitoire. Ce terme s'annule très vite, il sera par conséquent négligé lors d'une étude du régime permanent sinusoïdal $u_p(t)$.

Nous cherchons donc une solution de la forme :

$$u(t) = u_p(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

I.2 Représentation de Fresnel

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= -\omega U \sin(\omega t + \varphi) \\ &= \omega U \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Or u est solution si et seulement si $u + \tau \dot{u} = e$, soit :

$$u = U \cos(\omega t + \varphi) + \tau \omega U \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

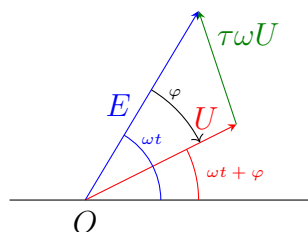


FIGURE 3.2 – Représentation de Fresnel

Le triangle formé par les trois vecteurs est identique quel que soit le temps écoulé t . Nous pouvons donc choisir librement une référence pour l'horizontale.

- À une fonction $x(t) = X \cos(\omega t + \psi)$, on associe un vecteur \vec{X} tel que $\|\vec{X}\| = X$ et formant un angle ψ par rapport à l'horizontale.
- Dérivée : $\dot{x}(t) = \omega X \cos\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)$. Le vecteur est multiplié par ω et subit une rotation de $\frac{\pi}{2}$.
- Primitive : $\int x(t) dt = \frac{X}{\omega} \cos\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right)$. Le vecteur est divisé par ω et subit une rotation de $-\frac{\pi}{2}$.

Appliquons donc cette méthode à notre problème. Pour plus de commodité, nous prendrons \vec{U} comme référence.

$$\text{D'après le théorème de Pythagore, } U^2 + (\tau \omega U)^2 = E^2 \implies U = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}.$$

De plus, $\varphi = -\arctan(\omega \tau)$.

On obtient finalement :

$$u(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega \tau))$$

I.3 Méthode complexe

- À une fonction $x(t) = X \cos(\omega t + \psi)$, on associe $\underline{x}(t) = X e^{j(\omega t + \psi)}$.

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= X e^{j\omega t} e^{\psi} \\ &= \underline{X} e^{j\omega t} \\ \implies |\underline{X}| &= X \\ \arg(\underline{X}) &= \psi\end{aligned}$$

Nous appellerons \underline{x} la *représentation complexe* de x , et \underline{X} l'*amplitude complexe* de x .

- Dérivée : $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{X} j\omega e^{j\omega t} = j\omega \underline{x}(t)$
- Primitive : $\int \underline{x}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{X} e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} \underline{x}(t)$

Nous cherchons u telle que $u + \tau \dot{u} = e$.

$$\begin{aligned}\underline{u} + \tau \dot{\underline{u}} &= \underline{e} = E e^{j\omega t} \\ \iff \underline{U} e^{j\omega t} + j\omega \tau \underline{U} e^{j\omega t} &= E e^{j\omega t} \\ \iff \underline{U} (1 + j\omega \tau) &= E \\ \iff \underline{U} &= \frac{E}{1 + j\omega \tau}\end{aligned}$$

Donc $U = \left| \frac{E}{1 + j\omega \tau} \right| = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}$ et $\varphi = \arg(\underline{U}) = -\arctan(\omega \tau)$

On obtient finalement :

$$u(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega \tau))$$

II Électrocinétique en régime sinusoïdal

II.1 Impédance complexe

Le but est de généraliser la loi d'Ohm aux représentations complexes : $\underline{u} = Z \dot{\underline{i}}$. Où Z est l'impédance complexe. Nous pouvons également définir l'admittance $Y = \frac{1}{Z}$. Étudions donc les impédance de nos dipôles.

a. Résistance

$$u = Ri \implies \underline{u} = R\underline{i}$$

$$\boxed{Z_R = R}$$

b. Condensateur

$$i = C \frac{du}{dt} \implies \underline{i} = C \frac{d\underline{u}}{dt} = jC\omega \underline{u}$$

$$\boxed{Z_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}}$$

c. Bobine

$$u = L \frac{di}{dt} \implies \underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt} = jL\omega \underline{i}$$

$$\boxed{Z_L = jL\omega}$$

II.2 Association série de deux impédances

Important

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2$$

Nous pourrions donc appliquer le pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_1 = \underline{u} \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

II.3 Association parallèle de deux impédances

Important

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} \iff Y_{eq} = Y_1 + Y_2$$

Pont diviseur de courant :

$$\underline{i}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \underline{i} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \cdot \underline{i}$$

III Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé

III.1 Résonance en intensité

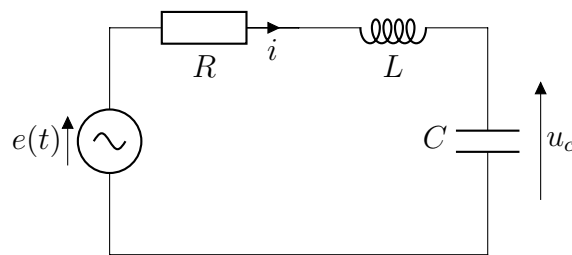


FIGURE 3.3 – Circuit RLC

Nous cherchons une solution particulière de la forme suivante :

$$i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$$

a. Première méthode : Représentation de Fresnel

Commençons par écrire la loi des mailles :

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} + u_c \iff e = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} (RI)^2 + \left(\frac{I}{C\omega} - L\omega I \right)^2 &= E^2 \\ I^2 \left(R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2 \right) &= E^2 \\ I &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2}} \end{aligned}$$

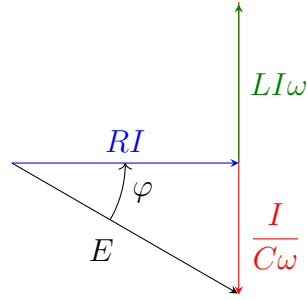


FIGURE 3.4 – Représentation de Fresnel

Déterminons l'angle φ

$$\tan(\varphi) = \frac{\frac{I}{C\omega} - L\omega I}{RI} = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{RC\omega} - \frac{L}{R}\omega\right)$$

b. Seconde méthode : méthode des complexes

Nous cherchons désormais une expression de l'intensité sous la forme $\underline{i} = \underline{I}e^{j\omega t}$, avec $\underline{I} = Ie^{j\varphi}$. Nous partons comme toujours de la loi des mailles :

$$\begin{aligned}\underline{e} &= Z_r \underline{i} + Z_L \underline{i} + Z_C \underline{i} \\ &= \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) \underline{i} \\ Ee^{j\omega t} &= \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) \underline{I}e^{j\omega t} \\ E &= \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) \underline{I} \\ \Rightarrow \underline{I} &= \frac{E}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}\end{aligned}$$

Important

Nous chercherons à mettre \underline{I} sous la forme canonique suivante :

$$\underline{I} = \frac{I_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\underline{I} = \frac{\frac{E}{R}}{1 + j \left(\frac{L\omega}{R} + \frac{1}{RC\omega} \right)}$$

Il ne nous reste plus qu'à identifier les paramètres.

$$\begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \\ Q\omega_0 = \frac{1}{RC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q^2 = \frac{L}{RC} \implies Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \implies \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \end{cases}$$

$$I = |\underline{I}| = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

$$\varphi = \arg(\underline{I}) = -\arg \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

$$= -\arctan \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

c. Graphes

$$\underline{I} = \frac{I_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{I_0}{-jQ \frac{\omega_0}{\omega}} = j \frac{I_0 \omega}{Q \omega_0} \rightarrow 0$$

$$\underline{I} \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{I_0}{j \omega \frac{\omega}{\omega_0}} = -j \frac{I_0 \omega_0}{Q \omega} \rightarrow 0$$

$$\underline{I}(\omega_0) = I_0$$

d. Résonance

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 f \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}}$$

Avec $f : x \mapsto \left(x - \frac{1}{x} \right)^2$ et $f'(x) = 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$

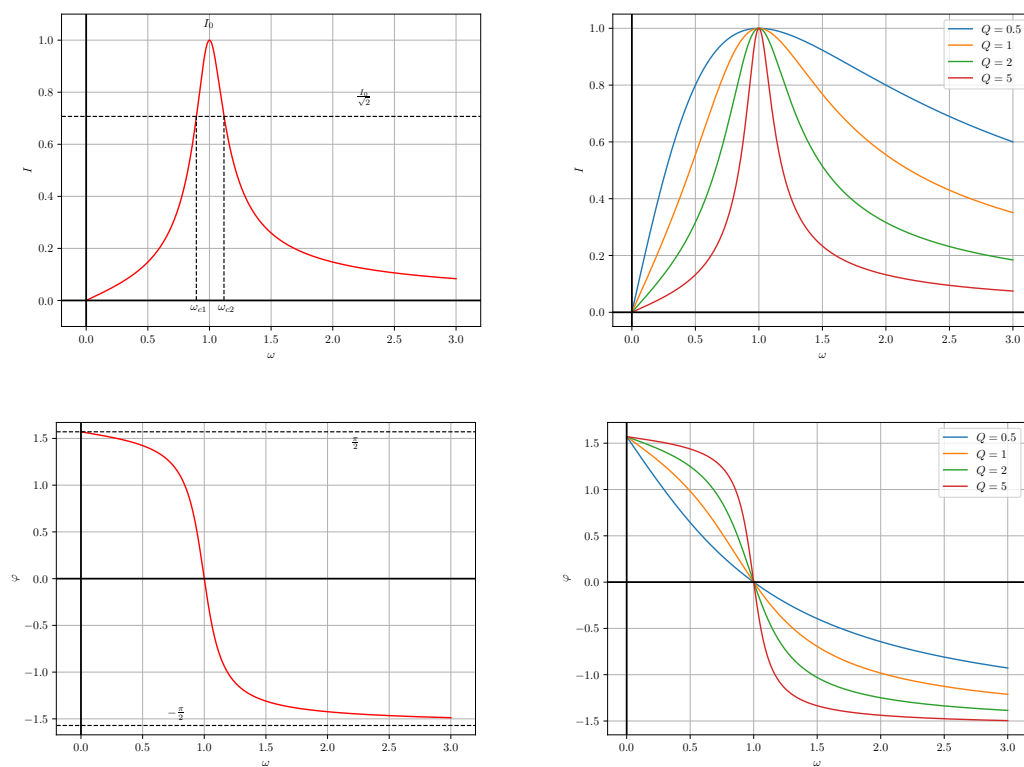


FIGURE 3.5 – Graphes de I et φ

ω	0	ω_0	$+\infty$
x	1		
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	<div> <div></div> <div></div> </div>		
I	<div> <div></div> <div></div> </div>		

e. Pulsation de coupure

Définition

Les pulsations de coupure sont telles que $I(\omega_c) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. Elle sont représentées sur le graphe de I page précédente.

$$\begin{aligned}
 \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right)^2}} &= \frac{I_0}{\sqrt{2}} \\
 \implies Q^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right)^2 &= 1 \\
 \implies Q \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right) &= \pm 1 \\
 \implies \frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} &= \pm \frac{1}{Q} \\
 \implies \omega_c^2 \pm \frac{\omega_c \omega_0}{Q} - \omega_0^2 &= 0 \\
 \Delta &= \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} + 4 \right) \\
 \omega_{c1,2} &= \pm \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 + 4Q^2} \\
 \omega_c > 0 \implies \omega_c &= \pm \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 + 4Q^2} \\
 &\implies |\omega_{c2} - \omega_{c1}| = \frac{\omega_0}{Q}
 \end{aligned}$$

Important

$|\omega_{c2} - \omega_{c1}|$ est la bande-passante. Nous pouvons définir l'acuité de la résonance : $\frac{\omega_0}{|\omega_{c2} - \omega_{c1}|} = Q$. Plus Q est grand, plus la résonance est forte, plus le pic est fin.

III.2 Résonance en tension

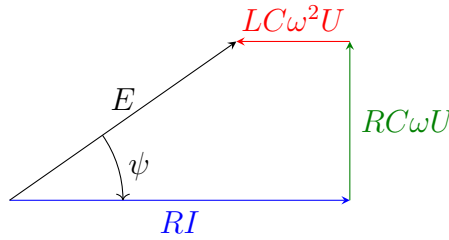
Nous cherchons désormais une solution de la forme :

$$u_c(t) = U \cos(\omega t + \psi)$$

a. Première méthode : Représentation de Fresnel

Loi des mailles :

$$e = Ri + l \frac{di}{dt} + u_c \iff e = RC \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c$$



D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} E^2 &= (RC\omega U)^2 + (U - LC\omega^2 U)^2 \\ &= U^2 \left[(RC\omega)^2 + (1 - LC\omega^2)^2 \right] \\ \implies U &= \frac{E}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (1 - LC\omega^2)^2}} \end{aligned}$$

Déterminons l'angle ψ

$$\begin{aligned} \psi &\in [-\pi; 0] \\ \cos(-\psi) &= \frac{U - LC\omega^2 U}{E} = \frac{1 - LC\omega^2}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (1 - LC\omega^2)^2}} \\ \psi &= -\arccos \left(\frac{1 - LC\omega^2}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (1 - LC\omega^2)^2}} \right) \end{aligned}$$

b. Seconde méthode : méthode des complexes

\underline{u}_c s'obtient aisément en appliquant le schéma du pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \underline{e} \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \underline{e} \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Important

Nous mettrons \underline{U} sous la forme canonique suivante :

$$\underline{U} = \frac{E}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Ainsi, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{1}{Q\omega_0} = RC \implies Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Donc :

$$U = |\underline{U}| = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

$$\psi = \arg(\underline{U}) = -\arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

c. Graphes

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ \psi(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} U \xrightarrow{+\infty} 0 \\ \psi \xrightarrow{+\infty} -\pi \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi(\omega_0) = \frac{\pi}{2}$$

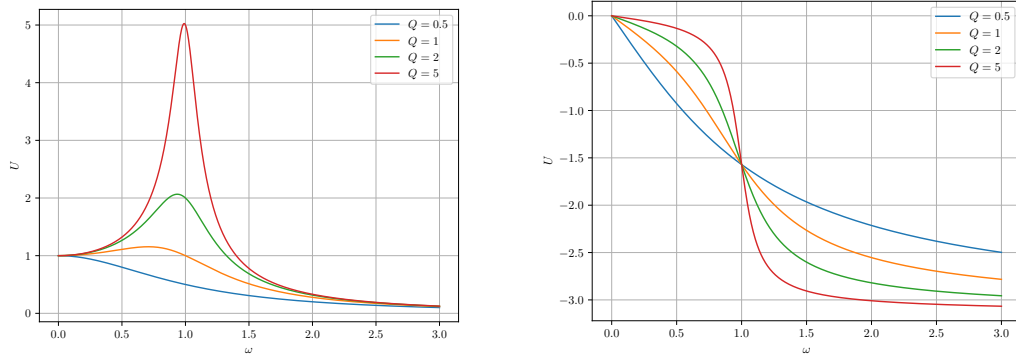


FIGURE 3.6 – Graphes de U et ψ

d. Résonance

$$|\underline{U}| = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} = \frac{E}{\sqrt{f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$



Avec $f : x \mapsto (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2} \\ &= 4x\left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right) \end{aligned}$$

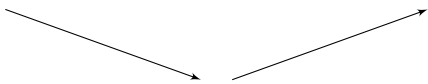
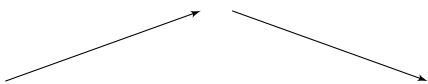
$$f'(x) > 0 \iff x^2 > 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Premier cas

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2Q^2} \leq 0 &\implies \frac{1}{2Q^2} \geq 1 \\ \implies Q^2 \leq \frac{1}{2} &\implies Q \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7 \end{aligned}$$

ω	0	$+\infty$
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		
U		

Ce cas de figure correspond à la courbe bleue de la figure 3.6 page précédente, la fonction est effectivement toujours décroissante.

ω	0	ω_r	$+\infty$
x	0	$\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			
I			

Second cas

$$Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pulsation de résonance : $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. L'acuité de la résonance est proportionnelle à Q .

IV Avance et retard de phase

Selon la valeur du déphasage φ , les signaux seront dits :

- En *phase*, $\varphi = 0$
- En *opposition de phase*, $\varphi = \pm\pi$
- En *quadrature*, $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

4

Filtrage linéaire

I Signaux périodiques

I.1 Décomposition en série de Fourier

Tous signal périodique de pulsation ω peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales de pulsations multiples de ω .

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

I.2 Valeur moyenne

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

Exemple : Signal sinusoïdal

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$
$$\langle s \rangle = \frac{A}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{A}{T} \left[\frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\omega} \right]_0^T = 0$$

I.3 Valeur efficace

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

Exemple : Signal sinusoïdal

$$\begin{aligned} s(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \\ \langle s^2 \rangle &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{A^2}{2T} \left(\int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi) dt \right) = \frac{A^2}{2} \\ \implies s_{\text{eff}} &= \frac{A}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

II Filtres linéaires

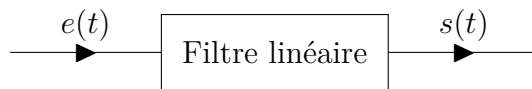


FIGURE 4.1 – Filtre linéaire

Le filtre est dit linéaire si l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

$$a = \lambda e_1 + \mu e_2 \longrightarrow s = \lambda s_1 + \mu s_2$$

II.1 Fonction de transfert harmonique

$$e(t) = E \cos(\omega t + \varphi_e) \xrightarrow{\text{filtre}} s(t) = S \cos(\omega t + \varphi_s)$$

$$H(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \implies \underline{s} = H(j\omega) \underline{e}$$

$$S = |H(j\omega)| E$$

$$\varphi_s = \varphi_e + \arg(H(j\omega))$$

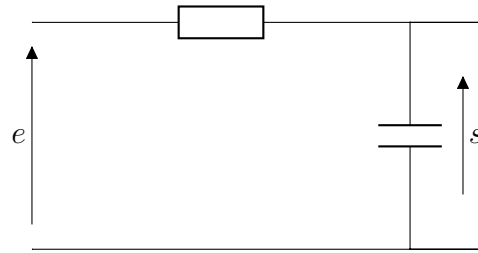


FIGURE 4.2 – Filtre RC

Exemple : Filtre RC

$$\frac{s}{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\text{Donc : } H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

II.2 Diagrammes de Bode

Important

Gain en décibels (dB) :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |H(j\omega)|$$

$$|H(j\omega)| = 10^{\frac{G_{\text{dB}}}{20}}$$

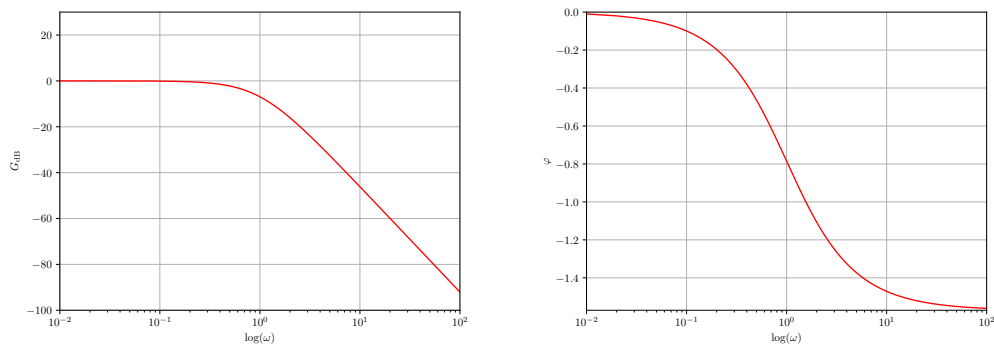


FIGURE 4.3 – Diagramme de Bode d'un filtre RC

L'étude des limites en 0 et $+\infty$ donnent deux asymptotes. Ces deux droites se

coupent en $\omega = \omega_0$.

II.3 Pulsation de coupure

Définition

La pulsation de coupure ω_c est telle que $|H(j\omega_c)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$

Ainsi :

$$G_{\text{dB}}(\omega_c) = 20 \log \left(\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \right) = 20 \log(H_{\max}) - 20 \log(\sqrt{2})$$

III Utilisation de filtres

III.1 Moyenneur

Soit un signal de pulsation ω :

$$e(t) = E_0 + \sum_0^{+\infty} E_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Il est possible de ne garder que le terme constant $\langle e \rangle = E_0$ avec un filtre passe-bas et $\omega_c \ll \omega$.

III.2 Dérivateur

$$s = k \frac{de}{dt} \implies \underline{s} = k j \omega \underline{e} \implies H(j\omega) = k j \omega$$

III.3 Intégrateur

$$s = k \int e dt \implies H(j\omega) \frac{k}{j\omega}$$



Dans cette partie :

5	Oscillateurs	41
I	Oscillateurs harmoniques	41
I.1	Système masse-ressort	41
I.2	Analyse dimensionnelle	42
I.3	Établissement de l'équation différentielle	42
I.4	Résolution de l'équation différentielle	43
I.5	Graphes	43
I.6	Portrait de phase	43
I.7	Bilan énergétique	44
II	Oscillateur harmonique amorti	44
II.1	Système masse-ressort avec frottement fluide	44
II.2	Résolution de l'équation différentielle	45
II.3	Durée du régime transitoire	46
II.4	Bilan de puissance	46
6	Cinématique	47
I	Description du mouvement d'un point M	47
II	Systèmes de coordonnées	47
II.1	Coordonnées cartésiennes (x, y, z)	47
II.2	Mouvements avec accélération constante	48
II.3	Coordonnées polaires (r, θ)	50
II.4	Mouvement circulaire	51
II.5	Coordonnées cylindriques (r, θ, z)	52
II.6	Coordonnées sphériques (r, θ, φ)	53
III	Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers . .	53
III.1	Mouvement de translation	54
III.2	Rotation autour d'un axe fixe	54
7	Dynamique Newtonienne	55
I	Lois de Newton	55
I.1	Première loi de Newton : principe d'inertie	55
I.2	Quantité de mouvement	55
I.3	Principe fondamental de la dynamique (PFD)	56
I.4	Principe des actions réciproques	56
II	Modélisation des actions mécaniques	57
II.1	Interactions à distance	57
II.2	Actions de contact	57
III	Pendule simple	58

8	Approche énergétique du mouvement	59
I	Puissance et travail d'une force	59
I.1	Puissance d'une force	59
I.2	Travail élémentaire d'une force	59
I.3	Travail au cours d'un déplacement	60
II	Énergie cinétique	60
II.1	Théorème de la puissance cinétique	60
II.2	Théorème de l'énergie cinétique	61
III	Énergie potentielle	61
III.1	Forces conservatives	61
III.2	Énergie potentielle de pesanteur	62
III.3	Énergie potentielle élastique d'un ressort	62
III.4	Énergie potentielle gravitationnelle	63
IV	Énergie mécanique	63
IV.1	Théorème de l'énergie mécanique	63
IV.2	Théorème de la puissance mécanique	64
V	Mouvement conservatif à une dimension	64
V.1	Profil de l'énergie potentielle et portrait de phase	64
V.2	Position d'équilibre et stabilité	65
V.3	Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable	66
9	Mouvement de particules chargées	67
I	Produit vectoriel	67
II	Force de Lorentz	67
II.1	Ordre de grandeur	68
II.2	Puissance de la force de Lorentz	68
II.3	Énergie potentielle électrique	68
III	Mouvement circulaire dans un champ magnétique uniforme	69
10	Moment cinétique	70
I	Théorème du moment cinétique pour un point matériel	70
I.1	Moment cinétique d'un point	70
I.2	Théorème du moment cinétique	70
I.3	Moment d'une force par rapport à un point A	71
II	Solide en rotation autour d'un axe fixe	71
II.1	Notion de couple	71
II.2	Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe orienté	71

5

Oscillateurs

I Oscillateurs harmoniques

I.1 Système masse-ressort

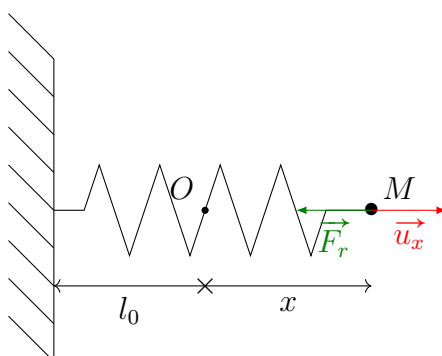


FIGURE 5.1 – Oscillateur harmonique

\vec{F}_r est la force de rappel.

\vec{u}_x est un vecteur unitaire orienté vers l'extérieur du ressort.

Important

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= -k(l - l_0) \cdot \vec{u}_x \\ &= -kx \cdot \vec{u}_x\end{aligned}$$

k est la constante de raideur du ressort, en Nm^{-1} .

I.2 Analyse dimensionnelle

Le système international comporte sept unités :

- La longueur, L , en mètres (m)
- La masse, M , en kilogrammes (kg)
- Le temps, T , en secondes (s)
- L'intensité électrique, I , en ampères (A)
- La quantité de matière, N , en moles (mol)
- La température, Θ , en kelvin (K)

Pourrions trouver la période d'oscillation de l'oscillateur par analyse dimensionnelle ?

$$\begin{aligned}[m] &= M \\ [l_0] &= L \\ [k] &= [F] L^{-1} = MT^{-2}\end{aligned}$$

Notons \mathcal{T} la période

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \alpha \cdot m^a \cdot l_0^b \cdot k^c \\ T &= M^a L^b (MT^{-2})^c = M^{a+c} L^b T^{-2c} \\ \begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \\ -2c = 1 \end{cases} &\implies \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \mathcal{T} &= \alpha \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot k^{-\frac{1}{2}} = \alpha \sqrt{\frac{m}{k}}\end{aligned}$$

Où α est une constante sans dimension, $\alpha = 2\pi$. Voir I.5 page suivante.

I.3 Établissement de l'équation différentielle

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x &= 0 \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} : \text{pulsation propre}\end{aligned}$$

I.4 Résolution de l'équation différentielle

Important

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

I.5 Graphes

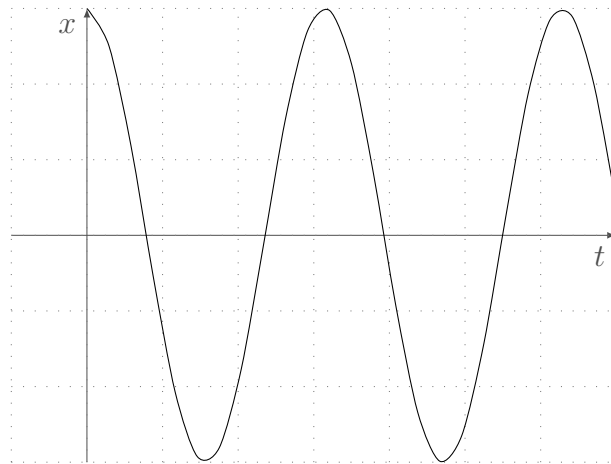


FIGURE 5.2 – $x(t)$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

I.6 Portrait de phase

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega_0 t) \\ \frac{dx}{dt}(t) = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t) \end{cases} \implies \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{\omega_0^2 a^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1$$

C'est l'équation d'une ellipse.

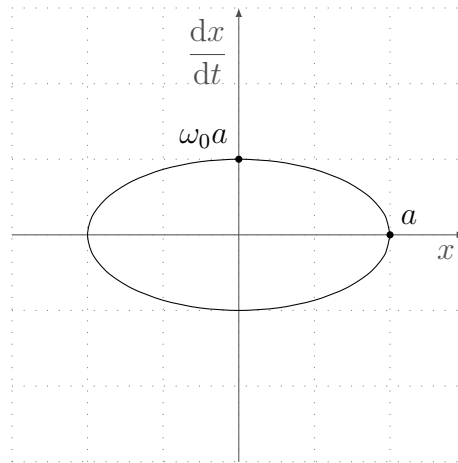


FIGURE 5.3 – Portrait de phase

I.7 Bilan énergétique

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx \\
 \Leftrightarrow m \frac{dv_x}{dt} &= -kx \\
 \Leftrightarrow m \frac{dv_x}{dt} v_x &= -kx \frac{dx}{dt} \\
 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (E_c + E_{pe}) &= 0
 \end{aligned}$$

E_{pe} est l'énergie potentielle élastique du ressort.

II Oscillateur harmonique amorti

II.1 Système masse-ressort avec frottement fluide

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x &= 0 \\
 \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Leftrightarrow Q = \frac{\omega_0 m}{\alpha} &= \frac{\sqrt{\frac{k}{m}} m}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{mk}
 \end{aligned}$$

Q est appelé *facteur de qualité*.

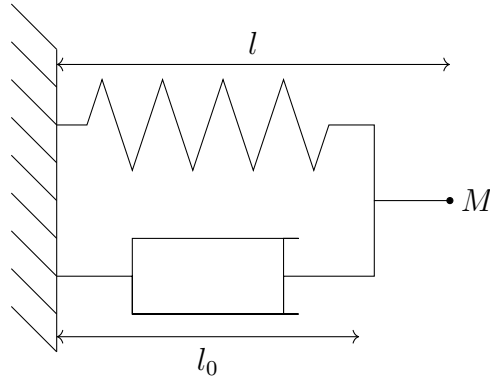


FIGURE 5.4 – Oscillateur harmonique amorti

II.2 Résolution de l'équation différentielle

Important

Trois cas sont possibles :

1. Régime apériodique :

$Q < \frac{1}{2} \implies \Delta > 0$, les solutions sont de la forme :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(\alpha \operatorname{ch} \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} t \right) + \beta \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} t \right) \right)$$

2. Régime critique :

$Q = \frac{1}{2} \implies \Delta = 0$, les solutions sont de la forme :

$$x(t) = e^{-\omega_0 t} (At + B)$$

3. Régime pseudo-périodique :

$Q > \frac{1}{2} \implies \Delta < 0$, les solutions sont de la forme :

$$x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t \right) \right)$$

II.3 Durée du régime transitoire

- Temps caractéristique : $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.
- Temps de réponse à 5% : $t_5 \approx 3\tau$
- Nombre d'oscillations visibles :

$$\frac{3\tau}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = Q \times \frac{\pi}{3} \approx Q$$

II.4 Bilan de puissance

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right] = -\alpha v_x^2 < 0$$

6

Cinématique

I Description du mouvement d'un point M

Définition

- *Référentiel* : solide par rapport auquel on décrit le mouvement, accompagné d'un horloge pour la dimension de temps.
- *Vecteur position* : \overrightarrow{OM}
- *Vecteur vitesse* : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$
- *Vecteur accélération* : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

II Systèmes de coordonnées

II.1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

Voir 6.1 page suivante

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \\ \vec{v} &= \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \\ \vec{a} &= \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z\end{aligned}$$

Voir 6.2 page suivante

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

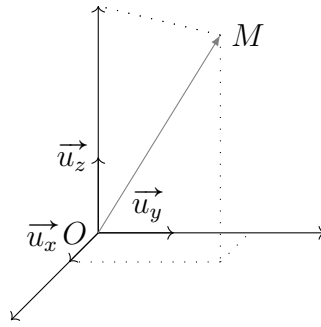


FIGURE 6.1 – Repère cartésien

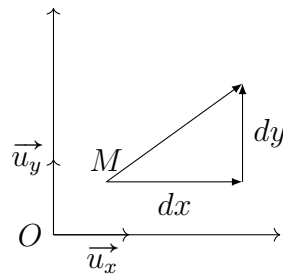


FIGURE 6.2 – Déplacement élémentaire

II.2 Mouvements avec accélération constante

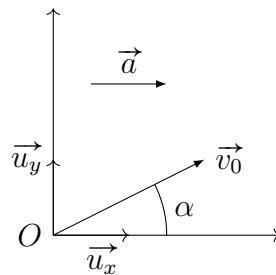


FIGURE 6.3 – Principe général

Le but est de trouver les équations horaires du mouvement : $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, ainsi que l'équation de la trajectoire : $x(y)$.

a. Méthode 1

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z = a\vec{u}_x \\
 \begin{cases} \ddot{x} = a \\ \ddot{y} = b \\ \ddot{z} = c \end{cases} &\implies \begin{cases} \dot{x} = at + A \\ \dot{y} = B \\ \dot{z} = C \end{cases} \quad \text{or, d'après les conditions initiales,} \begin{cases} A = \dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha) \\ B = \dot{y}(0) = v_0 \sin(\alpha) \\ C = \dot{z}(0) = 0 \end{cases} \\
 \implies \begin{cases} \dot{x} = at + v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{y} = v_0 \sin(\alpha) \\ \dot{z} = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 \cos(\alpha)t + D \\ y = v_0 \sin(\alpha)t + E \\ z = F \end{cases} \quad \text{or} \begin{cases} D = x(0) = 0 \\ E = y(0) = 0 \\ F = z(0) = 0 \end{cases} \\
 \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 \cos(\alpha)t \\ y = v_0 \sin(\alpha)t \\ z = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

b. Méthode 2

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \implies \int_0^t \vec{a} \, dt = \int_0^t \frac{d\vec{v}}{dt} \, dt \implies \vec{a}(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 \\
 \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a}(t) \implies \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \implies \int_0^t \frac{d\vec{OM}}{dt} \, dt = \int_0^t \vec{v}_0 \, dt + \vec{a} \int_0^t t \, dt \\
 \vec{OM} &= \frac{1}{2}at^2 + \vec{v}_0 t
 \end{aligned}$$

c. Équation de la trajectoire

- Si $\alpha = 0[\pi]$: Mouvement *rectiligne*

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- Si $\alpha \neq 0[\pi]$: Mouvement *parabolique*

$$t = \frac{y}{v_0 \sin(\alpha)} \implies \begin{cases} x = \frac{a}{2v_0^2 \sin^2(\alpha)} y^2 + \cotan(\alpha)y \\ z = 0 \end{cases}$$

II.3 Coordonnées polaires (r, θ)

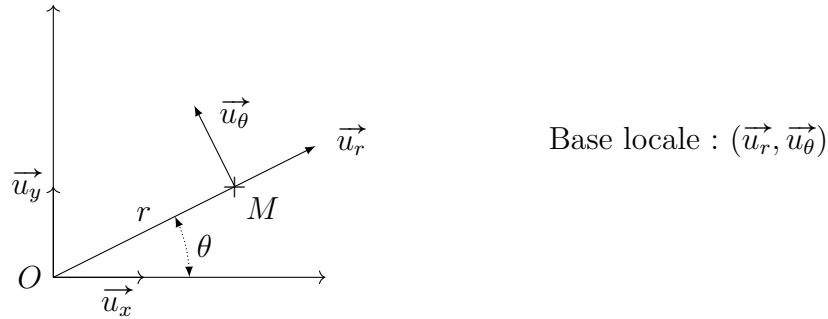


FIGURE 6.4 – Coordonnées polaires

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= \cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta &= -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y\end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} &= -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y = \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} &= -\vec{u}_r\end{aligned}$$

a. Établissement de l'expression du vecteur accélération

D'après la figure 6.4 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{u}_r \\ \vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ \vec{v} &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} \\ &= \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \\ &= \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta\end{aligned}$$

Important

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r \cdot \vec{u}_r \\ \vec{v} &= \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cdot \vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \cdot \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

b. Déplacement élémentaire

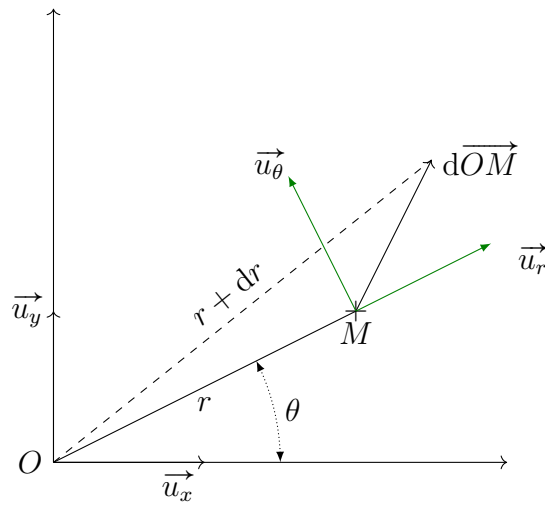
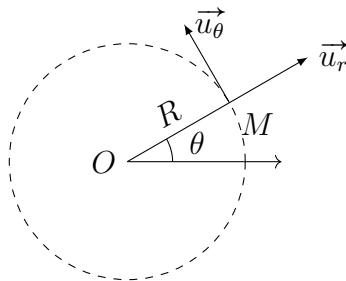


FIGURE 6.5 – Déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{OM} = dr \cdot \vec{u}_r + r d\theta \cdot \vec{u}_\theta$$

II.4 Mouvement circulaire



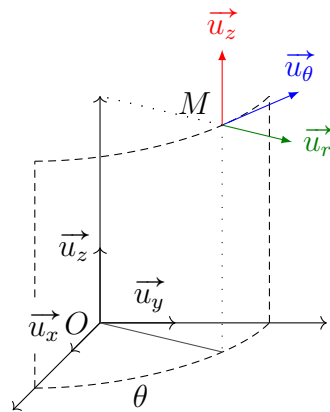
$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OM} &= R\vec{u}_r \\
 \vec{v} &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \implies v_\theta = R\dot{\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{R} \\
 \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_r \\
 \vec{a} &= \dot{v}_\theta \cdot \vec{u}_\theta - \frac{v_\theta^2}{R} \cdot \vec{u}_r
 \end{aligned}$$

Important

$$\vec{a} = \dot{v}_\theta \cdot \vec{u}_\theta - \frac{v_\theta^2}{R} \cdot \vec{u}_r$$

- $\dot{v}_\theta \cdot \vec{u}_\theta$ est l'accélération tangentielle, correspondant à la variation de la vitesse.
- $-\frac{v_\theta^2}{R} \cdot \vec{u}_r$ est l'accélération normale, correspondant à la courbure de la trajectoire.

II.5 Coordonnées cylindriques (r, θ, z)



Trièdre local : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

FIGURE 6.6 – Coordonnées cylindriques

Important

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cdot \vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \cdot \vec{u}_\theta + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

$$\text{Déplacement élémentaire : } d\overrightarrow{OM} = dr \cdot \vec{u}_r + r d\theta \cdot \vec{u}_\theta + dz \cdot \vec{u}_z$$

II.6 Coordonnées sphériques (r, θ, φ)

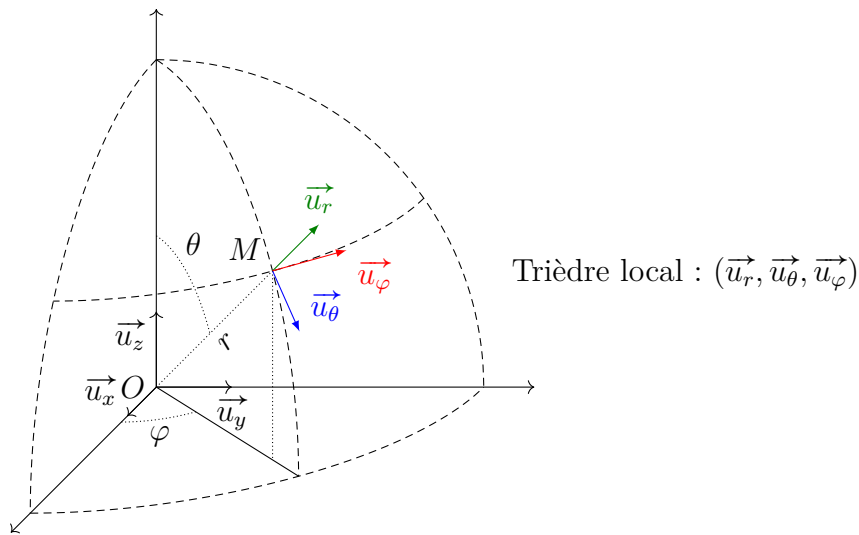


FIGURE 6.7 – Coordonnées sphériques

Important

$$\text{Déplacement élémentaire : } d\overrightarrow{OM} = dr \cdot \vec{u}_r + r d\theta \cdot \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \cdot \vec{u}_\varphi$$

III Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers

*

Définition

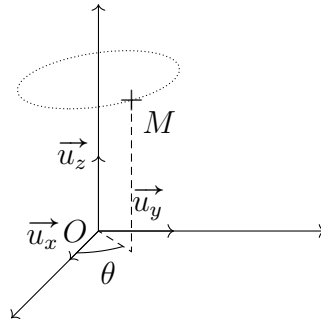
Un solide est un système indéformable.

III.1 Mouvement de translation

Définition

Dans un mouvement de translation, tous les points du solide ont la même trajectoire et la même vitesse : $\vec{v} = \vec{v}_G$

III.2 Rotation autour d'un axe fixe



$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \text{ avec } r \text{ et } z \text{ constants.}$$

$$\vec{v}_M = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\dot{\theta} = \omega : \text{vitesse de rotation du solide.}$$

$$v_\theta(M) = r\omega$$

7

Dynamique Newtonienne

I Lois de Newton

I.1 Première loi de Newton : principe d'inertie

Définition

Dans un référentiel galiléen, un corps est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme si et seulement si les forces qui s'exercent sur ce corps se compensent.

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel s'applique le principe d'inertie, les référentiels galiléens sont en mouvement de translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Nous utiliserons couramment trois référentiels :

- Le référentiel *héliocentrique*, centré sur le soleil.
- Le référentiel *géocentrique*, centré sur la terre.
- Le référentiel *terrestre*, qui tourne avec la terre.

I.2 Quantité de mouvement

a. Centre de gravité

Définition

Le centre de gravité, ou centre d'inertie, est le barycentre G des points M_i affectés des masses m_i .

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OG} &= \frac{\sum_i (m_i \cdot \overrightarrow{OM_i})}{\sum_i (m_i)} \\
 \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} &= \frac{\sum_i [m_i (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_i})]}{\sum_i (m_i)} \\
 &= \overrightarrow{OA} + \frac{\sum_i (\overrightarrow{AM_i})}{\sum_i (m_i)} \\
 \Rightarrow \overrightarrow{AG} &= \frac{\sum_i (\overrightarrow{AM_i})}{\sum_i (m_i)}
 \end{aligned}$$

Définition

$$\begin{aligned}
 \vec{p} &= \sum_i (m_i \vec{v}_i) \\
 &= \sum_i \left(m_i \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \overrightarrow{OG} \right) = \sum_i (m_i) \vec{v}_g
 \end{aligned}$$

Pour un solide, $\vec{p} = m\vec{v}_g$

I.3 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$.

Pour un seul point, $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$

I.4 Principe des actions réciproques

Si A exerce sur B une force $\overrightarrow{F_{A/B}}$, alors B exerce sur A une force $\overrightarrow{F_{B/A}} = -\overrightarrow{F_{A/B}}$

II Modélisation des actions mécaniques

II.1 Interactions à distance

- Interaction gravitationnelle

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}} = -G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{d^2} \cdot \overrightarrow{u_{AB}}$$

- Interaction électrostatique

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_A \cdot q_B}{d^2} \cdot \overrightarrow{u_{AB}}$$

Où ϵ_0 est la permittivité du vide.

Cas particulier, la force exercée par la Terre dans le référentiel terrestre est appelée *poids*.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

II.2 Actions de contact

a. Force de rappel, force de tension

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= -k(l - l_0) \cdot \overrightarrow{u_{ext}} \\ \vec{T} &= -T \cdot \overrightarrow{u_{ext}}\end{aligned}$$

b. Réaction d'un support

$$\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$$

c. Poussée d'Archimède

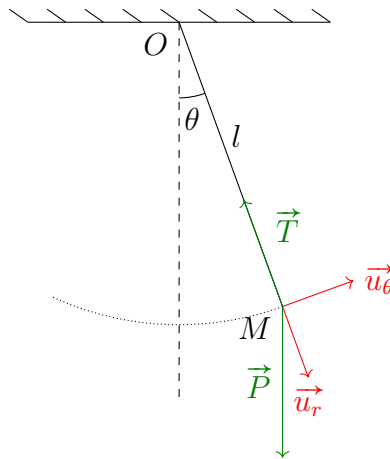
Important

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergé}} \vec{g}$$

La poussée d'Archimède s'applique au centre du volume immergé.

d. Traînée : force de frottement fluide

- Dans un liquide : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$
- Dans un gaz : $\vec{f} = -\lambda v \vec{v}$

III Pendule simple**Important**

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\Longleftrightarrow \ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta\dot{\theta} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int \frac{d\dot{\theta}}{dt}\dot{\theta} + \int \frac{g}{l}\theta \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\theta^2 = \text{cste}$$

$$\Longleftrightarrow \theta^2 + \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 = \text{cste}$$

8

Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

I Puissance et travail d'une force

I.1 Puissance d'une force

Important

$$\mathcal{P}_{(\vec{F})} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Notons que comme la vitesse dépend du référentiel, la puissance en dépend également.

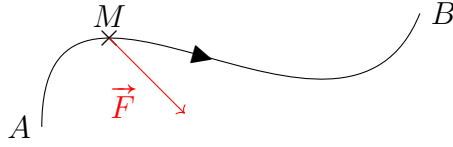
- Si $\mathcal{P}_{(\vec{F})} > 0$, la force est dite motrice.
- Si $\mathcal{P}_{(\vec{F})} = 0$, la force ne travaille pas.
- Si $\mathcal{P}_{(\vec{F})} < 0$, la force est dite résistante.

I.2 Travail élémentaire d'une force

Important

$$\delta W_{(\vec{F})} = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \mathcal{P}_{(\vec{F})} dt$$

On utilise la lettre δ car le travail n'est pas nécessairement une fonction.


 FIGURE 8.1 – Déplacement quelconque entre A et B

I.3 Travail au cours d'un déplacement

$$W_{AB(\vec{F})} = \int_A^B \delta W_{(\vec{F})}$$

Cas d'une force constante :

$$W_{AB(\vec{F})} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Cas d'une force de frottement de norme constante

$$W_{AB(\vec{F})} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{OM} = \int_A^B -f dl = -f \int_A^B dl = -f l_{AB}$$

Où l_{AB} est la longueur de la trajectoire de M du point A au point B .

II Énergie cinétique

II.1 Théorème de la puissance cinétique

D'après le Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \sum \vec{F} \\ m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} &= \sum \vec{F} \cdot \vec{v} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) &= \sum \mathcal{P}_{(\vec{F})} \end{aligned}$$

Important

Dans un référentiel galiléen, la dérivée de l'énergie cinétique est la somme des puissances des forces.

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}_{(\vec{F})}$$

II.2 Théorème de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} dE_c &= \sum \mathcal{P}_{(\vec{F})} dt \\ &= \sum \vec{F} \cdot d\vec{OM} \\ &= \sum \delta W_{(\vec{F})} \\ \Rightarrow \int_A^B dE_c &= \sum \int_A^B \delta W_{(\vec{F})} \\ E_{c_B} - E_{c_A} &= \sum W_{AB}(\vec{F}) \end{aligned}$$

Important

Dans un référentiel galiléen, la différence d'énergie cinétique est la somme des travaux des forces.

$$\Delta E_c = \sum W_{(\vec{F})}$$

III Énergie potentielle

III.1 Forces conservatives

Définition

Une force conservative dérive d'une énergie potentielle, c'est-à-dire :

$$\exists E_p / dE_p = \delta W_{(\vec{F})} = -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Ainsi, en reprenant l'exemple de la figure 8.1 page précédente :

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{F}) &= \int_A^B \delta W_{(\vec{F})} \\ &= \int_A^B dE_p = E_{p_A} - E_{p_B} \end{aligned}$$

Important

Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi, et est égal à la différence des énergies potentielles.

$$W_{(\vec{F})} = -\Delta E_p$$

III.2 Énergie potentielle de pesanteur

Nous raisonnons par analyse-synthèse en nous demandant si le poids est une force conservative. Nous ne réaliserons que l'analyse.

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$$

$$\delta W_{(\vec{P})} = \vec{P} \cdot d\vec{OM}$$

$$\text{Or, } d\vec{OM} = dx \cdot \vec{u}_x + dy \cdot \vec{u}_y + dz \cdot \vec{u}_z$$

$$\delta W_{(\vec{P})} = -mgdz = -dE_{pp}?$$

$$\implies \frac{dE_{pp}}{dz} = mg$$

$$\implies E_{pp}(z) = mgz + \text{cste}$$

On choisit généralement $E_{pp}(0) = 0$.

Important

$$E_{pp} = mgz$$

III.3 Énergie potentielle élastique d'un ressort

$$\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{u}_x = -kx\vec{u}_x$$

$$d\vec{OM} = dx \cdot \vec{u}_x + dy \cdot \vec{u}_y + dz \cdot \vec{u}_z$$

$$\delta W_{(\vec{F}_r)} = -kx dx = -dE_{pe}$$

$$\implies \frac{dE_{pe}}{dx} = kx$$

$$\implies E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cste}$$

On choisit $E_{pe}(0) = 0$.

Important

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

III.4 Énergie potentielle gravitationnelle

Nous considérerons un champ gravitationnel créé par un astre ponctuel.

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{u}_r \\ d\vec{OM} &= dx \cdot \vec{u}_x + dy \cdot \vec{u}_y + dz \cdot \vec{u}_z \\ \delta W_{(\vec{F}_g)} &= \vec{F}_g \cdot d\vec{OM} = -G \frac{m_0 m}{r^2} dr \\ &= -G \frac{m_0 m}{r^2} dr = -dE_{pg} \\ \Rightarrow G \frac{m_0 m}{r^2} &= \frac{dE_{pg}}{dr} \\ \Rightarrow E_{pg} &= -G \frac{m_0 m}{r} + \text{cste}\end{aligned}$$

On choisit $\lim_{r \rightarrow \infty} E_{pg} = 0$.

Important

$$E_{pg} = -G \frac{m_0 m}{r}$$

IV Énergie mécanique

IV.1 Théorème de l'énergie mécanique

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}\Delta E_c &= \sum W_{(\vec{F})} \\ &= \sum W_{(\vec{F}_c)} + \sum W_{(\vec{F}_{nc})} \\ &= -\Delta E_p + \sum W_{(\vec{F}_{nc})} \\ \Delta E_c + \Delta E_p &= \sum W_{(\vec{F}_{nc})} \\ \text{Or : } E_m &= E_c + \sum E_p\end{aligned}$$

Important

Dans un référentiel galiléen, la différence d'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservatives.

$$\Delta E_m = \sum W_{(\vec{F}_{nc})}$$

IV.2 Théorème de la puissance mécanique

$$\begin{aligned} dE_m &= \sum \delta W_{(\vec{F}_{nc})} \\ \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} &= \sum \left(\frac{\delta W_{(\vec{F}_{nc})}}{dt} \right) \\ &= \sum \mathcal{P}_{(\vec{F}_{nc})} \end{aligned}$$

Important

Dans un référentiel galiléen, la dérivée de l'énergie mécanique est égale à la somme des puissances des forces non-conservatives.

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}_{(\vec{F}_{nc})}$$

V Mouvement conservatif à une dimension

Nous étudierons un système soumis uniquement :

- à des forces qui ne travaillent pas,
- à des forces conservatives.

Ainsi, $\Delta E_m = \sum W_{(\vec{F}_{nc})} = 0$: l'énergie mécanique est constante.

V.1 Profil de l'énergie potentielle et portrait de phase

Sur la figure 8.2 page suivante, nous avons tracé un profil d'énergie potentiel quelconque. L'énergie mécanique étant constante, nous pouvons étudier le système pour une énergie donnée.

Nous observons alors deux cas :

- Le système a une trajectoire bornée : il est en quelque sorte piégé dans le puits de potentiel. Nous observons un mouvement oscillatoire.

- Le système a une trajectoire non-bornée.

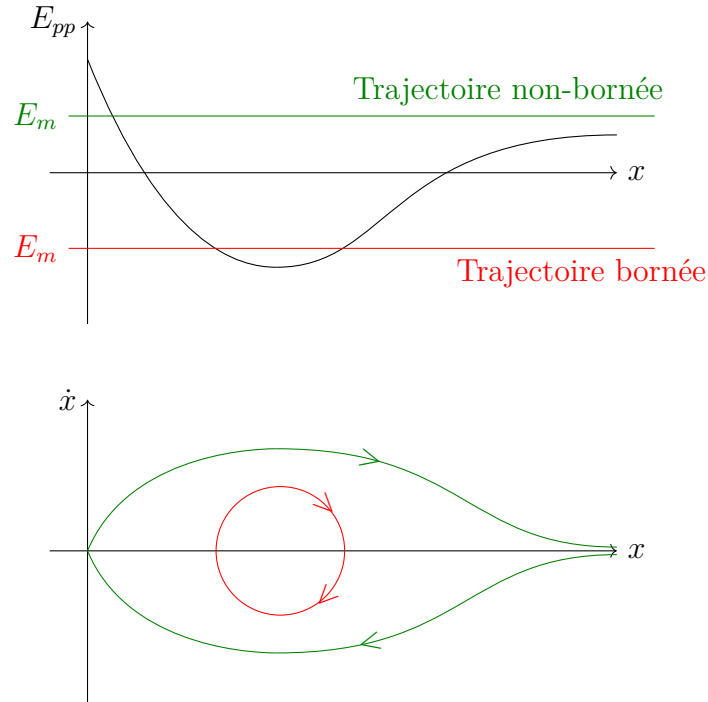


FIGURE 8.2 – Profil de l'énergie potentielle et portrait de phase

V.2 Position d'équilibre et stabilité

Le système étant unidimensionnel, nous pouvons modéliser les forces par leur résultante selon \vec{u}_x :

$$\vec{F} = F_{(x)}\vec{u}_x$$

Et comme toutes les forces sont conservatives :

$$\frac{dE_p}{dx} = -F$$

Nous nous intéressons aux éventuelles positions d'équilibre x_{eq} telles que $F_{(x_{eq})} = 0$, c'est-à-dire aux extremum de la fonction, car :

$$\frac{dE_p}{dx}(x_{eq}) = 0$$

Stabilité d'une position d'équilibre

- Si E_p est un maximum, alors x_{eq} est instable.
- Si E_p est un minimum, alors x_{eq} est stable.
- Si E_p admet une tangente horizontale sans changer de monotonie, x_{eq} n'est stable que d'un seul côté.

V.3 Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

Nous pouvons approximer l'énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre par son développement limité. Ainsi :

$$\begin{aligned} E_p(x) &= E_p(x_{eq}) + \frac{dE_p}{dx}(x_{eq})(x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq})(x - x_{eq})^2 + o((x - x_{eq})^2) \\ &= E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq})(x - x_{eq})^2 + o((x - x_{eq})^2) \end{aligned}$$

Le système est équivalent à un ressort au voisinage de la position d'équilibre. La constante de raideur du ressort est ainsi égale à $k = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq})$. Nous sommes donc en mesure d'exprimer l'équation du mouvement.

D'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= 0 \\ E_m &\approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2} k (x - x_{eq})^2 \\ m \dot{x} \ddot{x} + k \dot{x} (x - x_{eq}) &= 0 \end{aligned}$$

Important

$$\dot{x} + \frac{k}{m} (x - x_{eq}) = 0$$

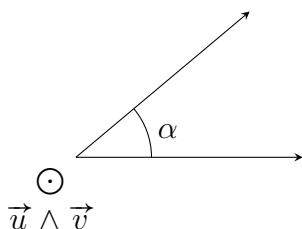
Le mouvement est analogue à celui d'un oscillateur harmonique.

9

Mouvement de particules chargées

I Produit vectoriel

Définition



La notation $\vec{u} \wedge \vec{v}$ désigne un vecteur

- de direction orthogonale à \vec{u} et \vec{v} ,
- de sens tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit une base directe,
- de norme $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = uv |\sin(\alpha)|$.

II Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle

Important

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

- q : Charge (C)

- \vec{E} : Champ électrique ($\text{N} \cdot \text{C}^{-1} = \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$)
- \vec{B} : Champ magnétique mesuré en tesla ($\text{T} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$)

II.1 Ordre de grandeur

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Proton : <ul style="list-style-type: none"> ◦ Masse : $m \sim 10^{-27} \text{ kg}$ ◦ Charge : $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ • Force électrique : <ul style="list-style-type: none"> ◦ $E \sim \frac{1 \text{ V}}{1 \text{ cm}} \approx 100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ◦ $F_e = eE \sim 10^{-17} \text{ N}$ • Poids : <ul style="list-style-type: none"> ◦ $P = mg \sim 10^{-26} \text{ N}$ | <ul style="list-style-type: none"> • Force magnétique : <ul style="list-style-type: none"> ◦ $E_c \sim 1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \frac{1}{2}mv^2$ ◦ $v = 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ◦ Champ magnétique terrestre : $B \sim 10^{-4} \text{ T}$ ◦ $F_m = evB = 10^{-19} \text{ N} \gg P$ |
|--|---|

II.2 Puissance de la force de Lorentz

$$\mathcal{P}_{(\vec{F})} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

En effet, par définition du produit vectoriel, $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonal à \vec{v} , ce qui annule le produit scalaire. Donc \vec{F}_m ne travaille pas. Ainsi, un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule chargée alors qu'un champ magnétique ne peut que courber sa trajectoire.

II.3 Énergie potentielle électrique

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

$$\delta W_{(\vec{F}_e)} = \vec{F}_e \cdot d\vec{OM} = q\vec{E} \cdot d\vec{OM}$$

Or \vec{E} dérive du potentiel électrique (admis), défini par :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM}$$

Donc :

$$W_{(\vec{F}_e)} = -q dV = -d(qV)$$

Ainsi, qV est l'énergie potentielle électrique E_{pe} .

III Mouvement circulaire dans un champ magnétique uniforme

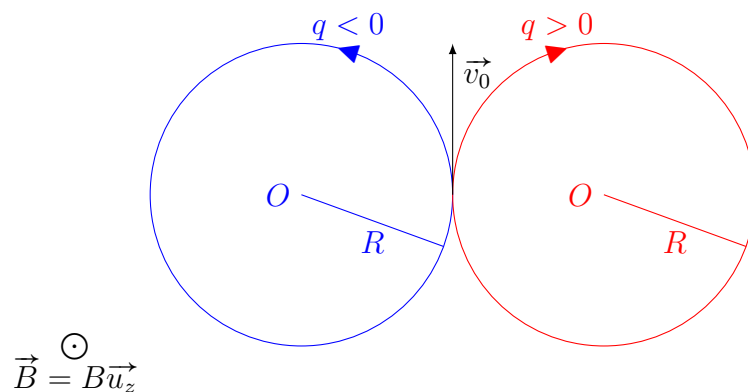


FIGURE 9.1 – Mouvement d’une particule selon sa charge

La force magnétique est orthogonale au champ magnétique : le mouvement est donc dans le plan. Nous supposons le mouvement circulaire et vérifions que cela ne nous mène pas à une absurdité.

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r \\ \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R(\dot{\theta})^2\vec{u}_r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_m &= q\vec{v} \wedge \vec{B} = qR\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta \wedge B \cdot \vec{u}_z \\ &= qR\dot{\theta}B \cdot \vec{u}_r \end{aligned}$$

D’après le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\vec{a} = \vec{F}_m &\implies \begin{cases} mR\ddot{\theta} = 0 \\ -mR(\dot{\theta})^2 = qR\dot{\theta}B \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} \dot{\theta} = \text{cste} = \omega \\ \dot{\theta} = -\frac{qB}{m} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc obtenir la valeur du rayon R . En effet, $v = R|\dot{\theta}|$, donc :

$$R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

10

Moment cinétique

I Théorème du moment cinétique pour un point matériel

I.1 Moment cinétique d'un point

Définition

Le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point fixe A se note \vec{L}_A , et

$$\vec{L}_A = \vec{AM} \wedge \vec{p} = m \cdot \vec{AM} \wedge \vec{v}$$

I.2 Théorème du moment cinétique

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \frac{d\vec{AM}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{AM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \vec{AM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{AM} \wedge \left(\sum \vec{F} \right) = \sum \left(\vec{AM} \wedge \vec{F} \right) \\ &= \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) \end{aligned}$$

Important

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$$

I.3 Moment d'une force par rapport à un point A

Définition

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_A(\vec{F}) &= \|\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{F})\| = AM \cdot F \cdot \sin(\alpha) \\ &= Fd \end{aligned}$$

Avec $d = AM \sin(\alpha)$. d est appelé bras de levier de la force F par rapport au point A .

II Solide en rotation autour d'un axe fixe

II.1 Notion de couple

Définition

Un *couple* est un ensemble de forces dont la résultante est nulle mais dont la somme des moments est non-nulle. Le moment d'un couple ne dépend pas du point choisi.

II.2 Moment cinétique d'un solide par rapport à un axe orienté

Définition

Le moment cinétique d'un point par rapport à un axe orienté Δ est noté L_Δ , et

$$L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta$$

Avec A un point quelconque de Δ . L_Δ ne dépend pas du point A .

Définition

Le moment cinétique d'un solide \mathcal{S} en rotation autour d'un axe fixe O_z est noté L_{O_z} , et

$$L_{O_z} = \int_{M \in \mathcal{S}} dL_{O_z}(M) = J_{O_z} \omega$$

Où $J_{O_z} = \int r^2 dm$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe O_z .



Troisième partie
Thermodynamique

Dans cette partie :

11	Description d'un système à l'équilibre thermodynamique	75
I	Système macroscopique	75
I.1	Échelles microscopique et macroscopique	75
I.2	Variables d'état	76
I.3	Équilibre thermique	76
II	Équation d'état	76
II.1	Modèle du gaz parfait	76
II.2	Modèle de la PCII	77
III	Équilibre d'un corps pur diphasé	78
III.1	Diagramme de phase (P, T)	78
III.2	Cas de l'équilibre liquide-gaz	78
12	Transformations thermodynamiques et bilans d'énergies	80
I	Énergie interne	80
I.1	Premier principe de la Thermodynamique	80
I.2	Gaz parfait	81
I.3	Phase condensée incompressible et indilatable	81
I.4	Capacité thermique à volume constant	81
II	Énergie échangée par un système macroscopique	82
II.1	Conservation de l'énergie (premier principe)	82
II.2	Travail des forces de pression	82
III	Enthalpie	83
III.1	Premier principe pour une transformation isobare, ou monobare avec un équilibre mécanique à l'état final et initial	83
III.2	Enthalpie d'un gaz parfait	84
III.3	Enthalpie d'une PCII	84
III.4	Capacité thermique à pression constante	85
III.5	Enthalpie de changement d'état	86
13	Bilan d'entropie	87
I	Deuxième principe de la thermodynamique	87
I.1	Irréversibilité	87
I.2	Deuxième principe	88
II	Variation d'entropie d'un système fermé	88
II.1	Phase condensée incompressible et indilatable	88
II.2	Gaz parfait	89
II.3	Lois de Laplace	89
II.4	Entropie de changement d'état	90

14	Machines thermiques	91
I	Machines cycliques dithermes	91
I.1	Modèle	91
I.2	Cycle thermodynamique	91
I.3	Application des principes	92
II	Efficacité et rendement d'une machine ditherme	93
II.1	Moteur	93
II.2	Machine frigorifique	93
II.3	Pompe à chaleur	93
II.4	Théorème de Carnot	93
III	Premier principe pour un fluide en écoulement stationnaire	93

11

Description d'un système à l'équilibre thermodynamique

I Système macroscopique

I.1 Échelles microscopique et macroscopique

Un système peut être décrit de manière microscopique ou macroscopique. À notre échelle, une étude microscopique nécessiterait de connaître la position et la vitesse de 10^{23} particules. Ce qui est bien sûr impossible. Pour étudier ces systèmes, nous nous contenterons donc d'un nombre limité de variables comme :

- la quantité de matière n ,
- le volume V ,
- la température T
- la pression P etc ...

Définition

- Un système est dit *ouvert* s'il peut échanger de la matière avec l'extérieur.
- Un système est dit *fermé* s'il n'échange pas de matière avec l'extérieur (mais il peut échanger de l'énergie).
- Un système est dit *isolé* s'il n'échange ni matière ni énergie avec l'extérieur.

I.2 Variables d'état

a. Grandeurs extensives

Les grandeurs extensives sont proportionnelles à la taille du système. Elles réagissent additivement lors de l'union de deux systèmes : $X_{(S_1 \cup S_2)} = X_{(S_1)} + X_{(S_2)}$.

Parmi ces grandeurs, on trouve n , V , m , etc ...

b. Grandeurs intensives

Les grandeurs intensives sont définies localement (à l'échelle mésoscopique). Nous utiliserons T , P , $[X] = \frac{n_x}{V}$, $\rho = \frac{m}{V}$, le volume massique $v = \frac{V}{m}$ et le volume molaire $V_m = \frac{V}{n}$.

I.3 Équilibre thermique

Deux systèmes sont à l'équilibre thermique si les grandeurs intensives sont les mêmes dans les deux systèmes. Nous pouvons ainsi distinguer l'équilibre mécanique $P_1 = P_2$ et l'équilibre thermique $T_1 = T_2$. L'équilibre mécanique est atteint beaucoup plus rapidement que l'équilibre thermique.

II Équation d'état

Nous établirons ici des relations entre les variables d'état, de la forme $f(n, V, P, T, \dots) = 0$

II.1 Modèle du gaz parfait

Définition

Le modèle du gaz parfait considère des gaz sans interactions. Ce modèle est valable à faible pression.

Important

Loi des gaz parfaits :

$$PV = nRT$$

Suivent deux diagrammes représentant les grandeurs liées aux isothermes d'un gaz parfait ($T = \text{cste}$).

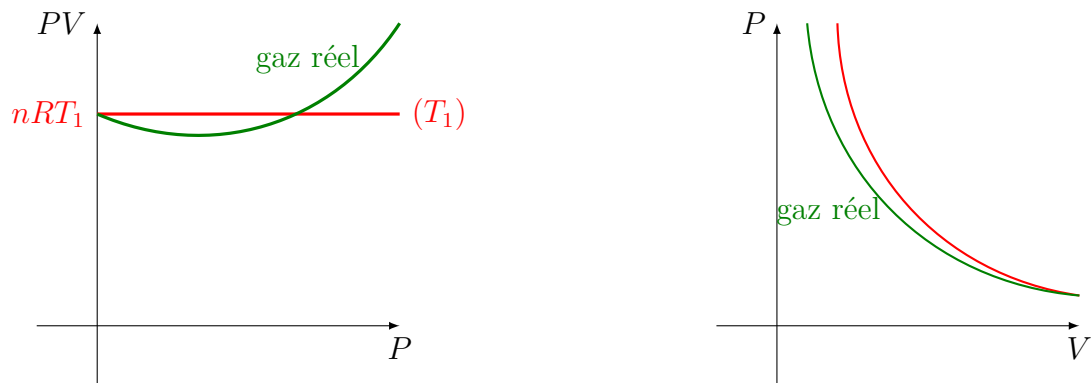


FIGURE 11.1 – Diagrammes d'Amagat et de Clapeyron

II.2 Modèle de la phase condensée incompressible et indilatable

Une phase condensée désigne un solide ou un liquide.

Important

Équation d'état d'une PCII :

$$\frac{V}{n} = \text{cste}$$

III Équilibre d'un corps pur diphasé

III.1 Diagramme de phase (P, T)

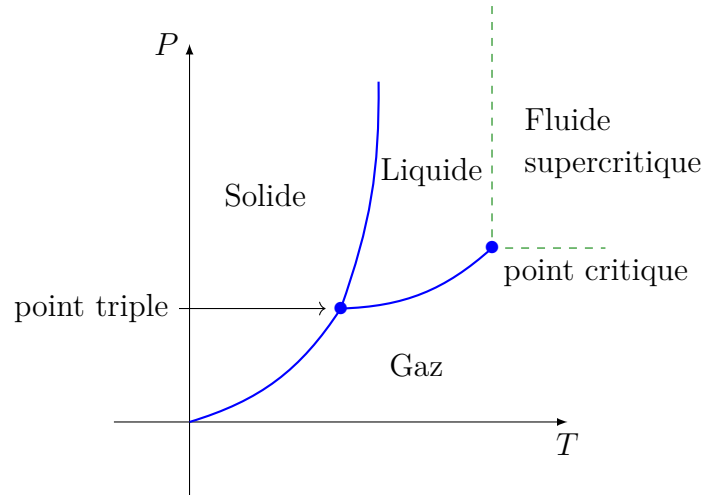
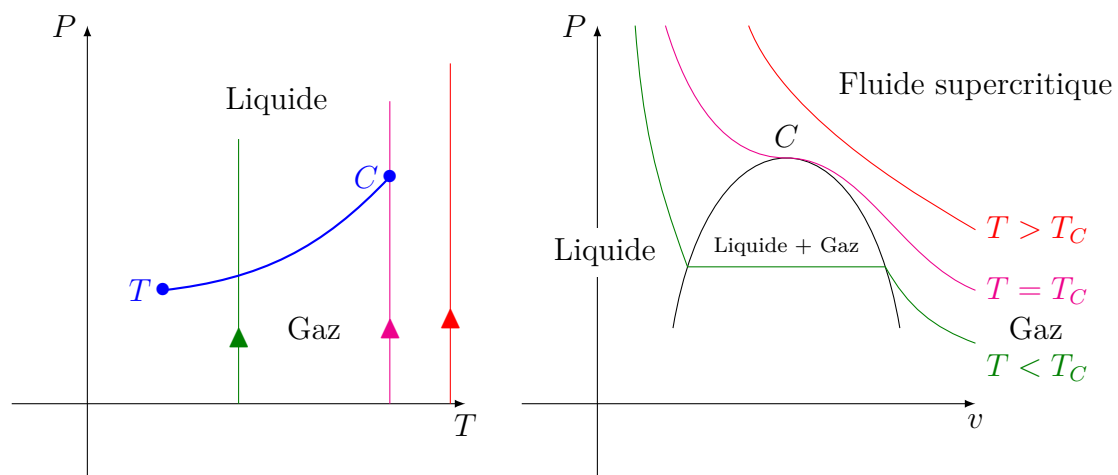


FIGURE 11.2 – Diagramme de phase (P, T)

Entre le point triple et le point critique se trouve la courbe de vaporisation. $P_s(t)$ est la pression de vapeur saturante. Si $P < P_s$, l'espèce est gazeuse, si $P > P_s$, elle est liquide.

III.2 Cas de l'équilibre liquide-gaz



Titre en vapeur

$$x = \frac{n_G}{n} = \frac{m_G}{m}$$

$$\begin{cases} m_G = xm \\ m_L + m_G = m \end{cases} \implies m_L = (1 - x)m$$

Nous pouvons exprimer x en fonction de v :

$$\begin{aligned} V &= m_L v_L + m_G v_G \\ &= (1 - x)m \cdot v_L + xm \cdot v_G \\ v &= \frac{V}{m} = (1 - x)v_L + x \cdot v_G \\ v - v_L &= x(v_G - v_L) \\ x &= \frac{v - v_l}{v_G - v_L} \end{aligned}$$

Important

Théorème des moments :

$$x = \frac{v - v_l}{v_G - v_L}$$

12

Transformations thermodynamiques et bilans d'énergies

I Énergie interne

Définition

Énergie d'un système macroscopique :

$$E = \sum_{i=1}^N E_{c_{\text{micro}}}(i) + \sum_{i < j} E_{p_{\text{interaction}}}(i, j) + E_{c_{\text{macro}}}$$

Les deux premiers termes sont l'énergie interne du système : U .

I.1 Premier principe de la Thermodynamique

Important

U est une fonction d'état extensive.

- Fonction d'état : $U = f(n, T, V \text{ ou } P)$
- Extensive : $U = n \cdot U_m(T, V_m \text{ ou } P)$

U_m est l'énergie molaire.

I.2 Gaz parfait

Important

Première loi de Joule :

L'énergie molaire ne dépend que de la température.

Gaz parfait monoatomique		Gaz diatomique
$U = \frac{3}{2}nRT$		$U = \frac{5}{2}nRT$

3 et 5 correspondent aux degrés de libertés : trois de translation, un d'extension et un de rotation.

I.3 Phase condensée incompressible et indilatable

Important

L'énergie molaire ne dépend que de la température.

I.4 Capacité thermique à volume constant

Définition

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V$$

Pour un gaz parfait ou une PCII, U en dépend que de la température donc :

$$C_V = \frac{dU}{dT}$$

Exemple : Gaz parfait monoatomique

$$C_V = \frac{d}{dT} \left(\frac{3}{2}nRT \right) = \frac{3}{2}nR$$

Définition

Nous pouvons également définir la capacité thermique molaire :

$$C_{V_m} = \frac{C_v}{n} \text{ en J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Ainsi que la capacité thermique massique :

$$c_V = \frac{C_V}{m} = \frac{C_{V_m}}{M}$$

II Énergie échangée par un système macroscopique

II.1 Conservation de l'énergie (premier principe)

Important

U est une fonction d'état extensive,

$$\Delta U + \Delta E_c = W + Q$$

Q est le transfert thermique.

II.2 Travail des forces de pression

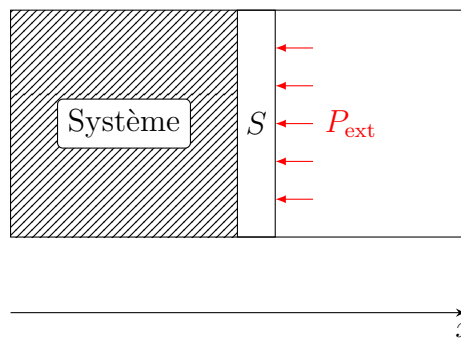


FIGURE 12.1 – Système et piston

$$\begin{aligned}\vec{F}_p &= -P_{\text{ext}} S \cdot \vec{u}_x \\ \delta W_P &= \vec{F}_p \cdot d\vec{OM} && \text{avec } d\vec{OM} = dx \cdot \vec{u}_x \\ &= -P_{\text{ext}} S \cdot dx && S dx = dV \text{ (variation de volume)} \\ \delta W_P &= -P_{\text{ext}} \cdot dV\end{aligned}$$

a. Transformation isochore (à volume constant)

$$dV = 0 \quad \delta W_P = 0 \quad W_P = 0$$

b. Transformation monobare (à pression constante)

$$W_P = -P_{\text{ext}} \int_i^f dV = -P_{\text{ext}} \Delta V$$

c. Transformation quasi-statique (succession d'états d'équilibres)

$$P = P_{\text{ext}}$$

$$W_P = - \int_i^f P dV$$

d. Transformation isotherme d'un gaz parfait

Définition

isotherme : Transformation quasi-statique à température constante

$$\begin{aligned} W_P &= - \int_i^f P dV \\ &= - \int_i^f \frac{nRT}{V} dV = -nRT \int_i^f \frac{dV}{V} \\ &= -nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = nRT \ln \left(\frac{V_i}{V_f} \right) \end{aligned}$$

III Enthalpie

III.1 Premier principe pour une transformation isobare, ou monobare avec un équilibre mécanique à l'état final et initial

La transformation étant monobare, $P_{\text{ext}} = \text{cste}$ et les équilibres mécaniques donnent $P_i = P_f = p_{\text{ext}}$

$$\begin{aligned}
 W_P &= - \int_i^f P_{\text{ext}} dV = -P_{\text{ext}} \int_i^f dV = -P_{\text{ext}} (V_f - V_i) \\
 &= P_{\text{ext}}(V_i) - P_{\text{ext}}(V_f) \\
 &= P_i V_i - P_f V_f
 \end{aligned}$$

Important

Premier principe : $\Delta U = W_P + Q + W'$

$$U_f - U_i = P_i V_i - P_f V_f + Q + W'$$

$$U_f + P_f V_f - (U_i + P_i V_i) = Q + W'$$

$$H_f - H_i = Q + W'$$

$H = U + PV$ est l'enthalpie, l'enthalpie est une fonction d'état extensive.

$$\Delta H = Q + W'$$

III.2 Enthalpie d'un gaz parfait

$$H = U + PV = U + nRT$$

$$H_m = \frac{H}{n} = U_m + RT$$

Important

Deuxième loi de Joule :

Pour un gaz parfait, l'enthalpie molaire ne dépend que de la température.

III.3 Enthalpie d'une PCII

$$H_m \approx H_m(T)$$

III.4 Capacité thermique à pression constante

Important

$$C_P = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_P$$

Pour un gaz parfait ou une PCII :

$$C_P = \frac{dH}{dT} \qquad \Delta H = C_P \Delta T$$

$$C_{P_m} = \frac{C_P}{n} \qquad c_P = \frac{C_P}{m}$$

a. Pour un gaz parfait

$$H = U + PV = U + nRT$$

Relation de Mayer :

$$C_P = \frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + nR = C_V + nR$$

Afin d'exprimer plus aisément les capacités thermiques à volume constant et à pression constantes, nous poserons

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

γ est appelé coefficient de Laplace (ou indice adiabatique). Ainsi :

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \qquad C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

b. Pour une PCII

$$H = U + PV$$

$$C_P = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_P = \frac{dU}{dT} + P \frac{dV}{dT}$$

Or, $\frac{dV}{dT} = 0$ car une PCII est indillatable,

$$\boxed{C_P = C_V}$$

Pour l'eau liquide, $c \approx 4000 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

III.5 Enthalpie de changement d'état

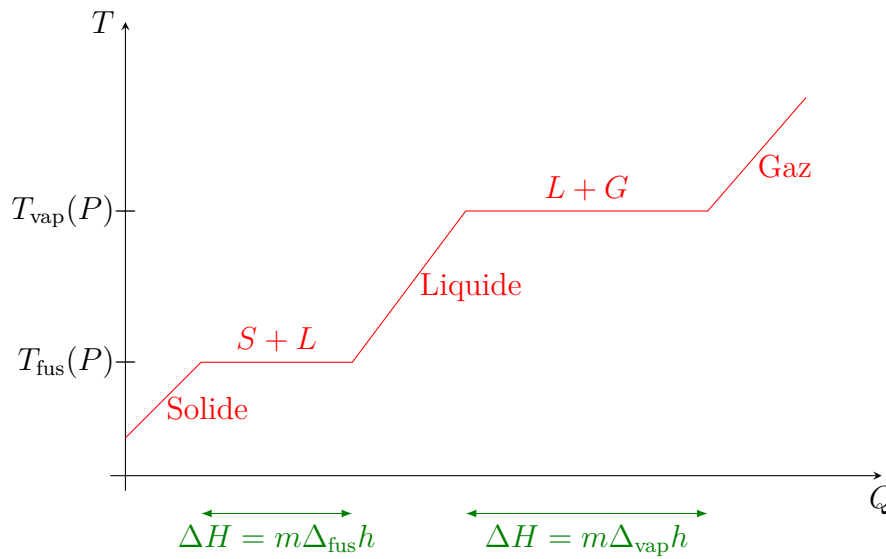


FIGURE 12.2 – Chauffage isobare d'un corps pur

$\Delta_{\text{chgt}} h$ est l'entropie massique de changement d'état.

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{fus}} h &= h_L - h_S > 0 & \Delta_{\text{vap}} h &= h_G - h_L > 0 \\ &= -\Delta_{\text{sol}} h & &= -\Delta_{\text{liq}} h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{sub}} h &= h_G - h_S = -\Delta_{\text{cond}} h \\ &= \Delta_{\text{fus}} h + \Delta_{\text{vap}} h \end{aligned}$$

13

Bilan d'entropie

I Deuxième principe de la thermodynamique

I.1 Irréversibilité

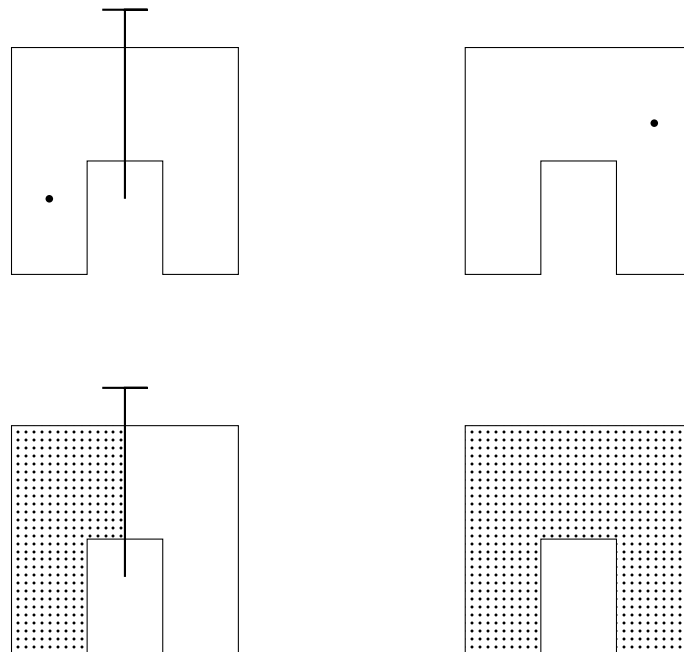


FIGURE 13.1 – Détente de Joule-Gay-Lussac

La première expérience est microscopique, de plus il est possible que l'état initial soit de nouveau atteint : elle est dite *réversible*. Dans la seconde, ce n'est pas

une particule mais un gaz qui se trouve dans l'enceinte ($\sim 10^{23}$ molécules) : l'expérience est macroscopique. Il paraît très improbable que le système revienne à la position initiale après ouverture du robinet, la transformation est dite *irréversible*.

L'irréversibilité peut être due à l'inhomogénéité d'une variable d'état intensive ou à un phénomène dissipatif (frottements, effet Joule).

I.2 Deuxième principe

Important

Il existe une fonction d'état extensive S (entropie en JK^{-1}) telle que

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créé}}$$

Avec

$$S_{\text{éch}} = \sum_k \frac{Q_k}{T_k} \qquad S_{\text{créé}} \geq 0$$

Une transformation est réversible si et seulement si $S_{\text{créé}} = 0$.

Q_k : transfert thermique échangé avec un thermostat à la température T_k .

II Variation d'entropie d'un système fermé

II.1 Phase condensée incompressible et indilatable

L'entropie étant une fonction d'état, ΔS ne dépend pas du chemin suivi. Nous pouvons donc calculer ΔS pour une transformation réversible : $T_{\text{ext}} = T$

Deuxième principe :

$$\Delta S = \frac{Q}{T_{\text{ext}}} + S_{\text{créé}} = \frac{Q}{T}$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Premier principe :

$$dU = \delta Q - P_{\text{ext}} dV$$

Or pour une PCII, V est constant donc $dV = 0$

$$dU = C dT = \delta Q$$

$$dS = C \frac{dT}{T}$$

$$\int_i^f dS = C \int_i^f \frac{dT}{T}$$

$$\Delta S = C \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right)$$

II.2 Gaz parfait

On peut calculer ΔS pour une transformation réversible

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_{\text{créé}} = \frac{\delta Q}{T}$$

$$dU = \delta Q - P_{\text{ext}} dV = \delta Q - P dV$$

$$\delta Q = dU + P dV = C_V dT + P dV$$

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV = C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

$$\int_i^f dS = C_V \int_i^f \frac{dT}{T} + nR \int_i^f \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = C_V \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

Il est également possible d'exprimer la différence d'entropie en fonction de la pression. Il suffit pour cela d'exprimer la loi des gaz parfaits. Des simplifications opèrent, sachant que $C_V + nR = C_P$

II.3 Lois de Laplace

Pour une transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait, $\Delta S = 0$.

$$\Delta S = C_V \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) + C_P \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

$$\ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) + \frac{C_P}{C_V} \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = 0$$

$$\ln \left(\frac{P_f V_f^\gamma}{P_i V_i^\gamma} \right) = 0$$

$$P_f V_f^\gamma = P_i V_i^\gamma$$

Important

$$PV^\gamma = \text{cste} \qquad TV^{(\gamma-1)} = \text{cste} \qquad T^\gamma P^{(\gamma-1)} = \text{cste}$$

La transformation sera alors qualifié d'*isentropique*.

II.4 Entropie de changement d'état

Nous nous plaçons dans le cas d'un changement isobare.

$$\Delta S = \frac{Q}{T_{\text{ext}}} + S_{\text{créé}}$$

L'entropie ne dépend pas du chemin suivi, nous en choisissons un réversible.

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = m \frac{\Delta_{\text{chg}} h}{T}$$

$$\Delta_{\text{chg}} s(T) = \frac{\Delta_{\text{chg}} h}{T}$$

14

Machines thermiques

I Machines cycliques dithermes

I.1 Modèle

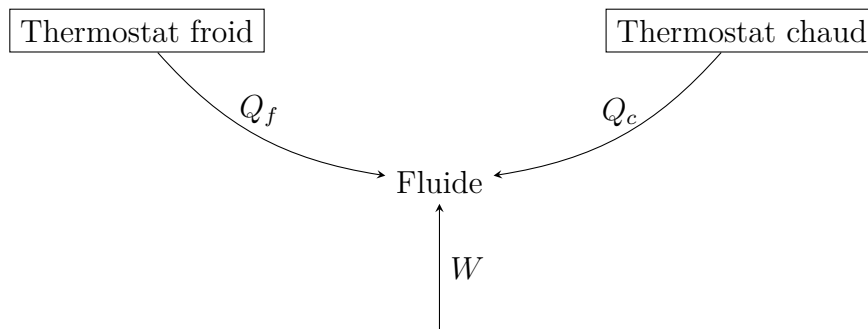


FIGURE 14.1 – Modèle d'une machine thermique ditherme

I.2 Cycle thermodynamique

Nous nous plaçons dans le cas d'une transformation isobare ($P = P_{\text{ext}}$)

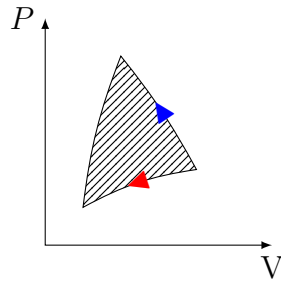


FIGURE 14.2 – Diagramme de Watt

Suivant le sens du cycle, celui-ci peut être moteur ou récepteur.

$$W = \pm \mathcal{A}_{\text{cycle}}$$

Si $W < 0$ la machine fournit du travail, le cycle est *moteur*. Dans le cas inverse, le cycle est *récepteur*.

I.3 Application des principes

U et S sont des fonctions d'état, donc pour un cycle :

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \\ \Delta S = 0 \end{cases}$$

Premier principe :

$$\begin{aligned} \Delta U &= W + Q_f + Q_c = 0 \\ \Delta S &= \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_{\text{créé}} = 0 \end{aligned}$$

Important

Inégalité de Clausius :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$

II Efficacité et rendement d'une machine ditherme

Définition

Le rendement η d'une machine thermique est le rapport de l'énergie utile sur l'énergie apportée.

II.1 Moteur

$$\eta = -\frac{W}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

II.2 Machine frigorifique

Pour une machine frigorifique ou une pompe à chaleur, nous parlerons d'efficacité plutôt que de rendement.

$$\eta = \frac{Q_f}{W} \leq \frac{1}{\frac{T_c}{T_f} - 1}$$

II.3 Pompe à chaleur

$$\eta = -\frac{Q_c}{W} \leq \frac{1}{1 + \frac{T_f}{T_c}}$$

II.4 Théorème de Carnot

Le rendement ou l'efficacité maximal d'une machine thermique ditherme est obtenu pour un cycle réversible. Ce cycle est appelé cycle de Carnot.

III Premier principe pour un fluide en écoulement stationnaire

En vert, le système \mathcal{S} à l'instant t , en rouge, le même système à l'instant $t + \Delta t$.

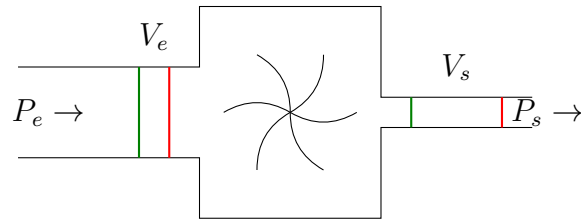


FIGURE 14.3 – Fluide en écoulement stationnaire

Premier principe

$$\begin{aligned}\Delta U + \Delta E_c &= W_p + W_u + Q \\ mu_s - mu_e &= -P_e(-V_e) - P_s V_s + W_u + Q \\ u_s - u_e &= P_e v_e - P_s v_s + w_u + q \\ u_s + P_s v_s - (u_e + P_e v_e) &= w_u + q \\ \Delta h &= w_u + q\end{aligned}$$



Quatrième partie

Optique

Dans cette partie :

15	Optique géométrique	97
I	De l'optique ondulatoire à l'optique géométrique	97
I.1	Spectre visible	97
I.2	Indice d'un milieu transparent	97
I.3	Longueur d'onde dans un milieu	98
I.4	Diffraction	98
I.5	Approximation de l'optique géométrique	98
II	Lois de Descartes	98
II.1	Lois de la réflexion	98
II.2	Lois de la réfraction	99
II.3	Réflexion totale	99
III	Stigmatisme	100
III.1	Miroir plan	100
III.2	Systèmes centrés	100
16	Lentilles minces	101
I	Caractéristiques et propriétés des lentilles	101
I.1	Types de lentilles	101
I.2	Centre optique	101
I.3	Foyer objet F	101
I.4	Foyer image F'	102
I.5	Vergence	102
I.6	Foyer secondaire objet	102
I.7	Foyer secondaire image	102
II	Relation de grandissement et de conjugaison	103
II.1	Relation de grandissement	103
II.2	Relation de conjugaison	103
II.3	Condition pour former une image réelle d'un objet réel . . .	103
III	L'œil	104

15

Optique géométrique

I De l'optique ondulatoire à l'optique géométrique

I.1 Spectre visible

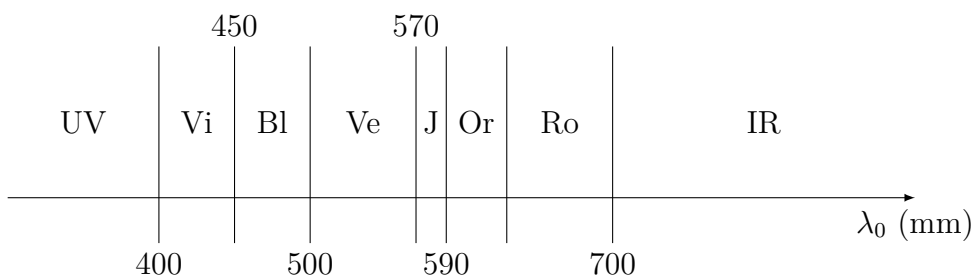


FIGURE 15.1 – Spectre de la lumière visible

I.2 Indice d'un milieu transparent

Important

$$n(\lambda) = \frac{c}{v}$$

c est la vitesse de la lumière dans le vide, $c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. v est la vitesse de la lumière dans le milieu.

Quelques valeurs :

- *Air* : $n \simeq 1$
- *Eau* : $n \simeq 1.33$

- Verre : $n \simeq 1.5$

I.3 Longueur d'onde dans un milieu

Important

$$\lambda = vT = \frac{c}{n}T = \frac{\lambda_0}{n}$$

I.4 Diffraction

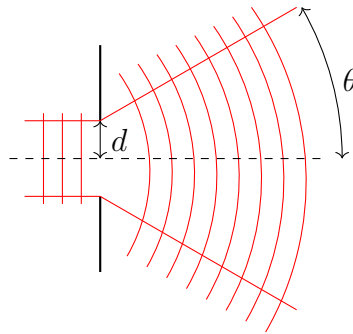


FIGURE 15.2 – Schéma de diffraction

Important

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{d}$$

I.5 Approximation de l'optique géométrique

Hypothèse : $\lambda \ll d$, la diffraction est négligeable. Ainsi, la lumière peut être décrite comme un rayon lumineux.

II Lois de Descartes

II.1 Lois de la réflexion

- Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence.

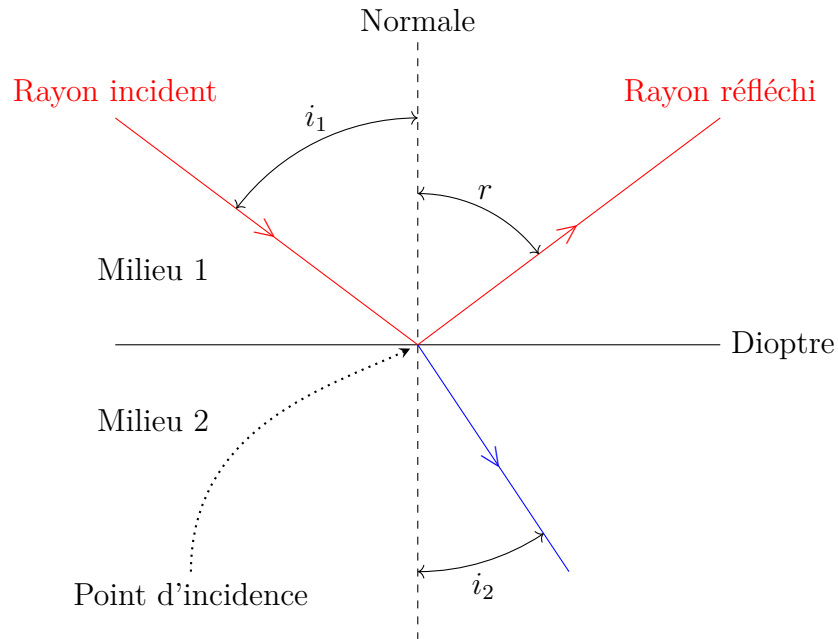


FIGURE 15.3 – Diffraction des rayons lumineux

- $r = -i_1$

II.2 Lois de la réfraction

- Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence.

Important

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

II.3 Réflexion totale

a. Dans un milieu plus réfringent ($n_2 > n_1$)

$$\frac{n_2}{n_1} > 1 \implies \frac{\sin(i_1)}{\sin(i_2)} > 1 \implies i_1 > i_2$$

b. Dans un milieu moins réfringent ($n_1 > n_2$)

Il existe un angle limite tel que $n_1 \sin(i_{lim}) = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Si $i_1 > i_{lim}$, il y a réflexion totale.

III Stigmatisme

III.1 Miroir plan

L'image d'un point par un miroir plan est un point, on parle de *stigmatisme rigoureux*. De plus, l'image d'un plan est un plan, on parle d'*aplanétisme*.

III.2 Systèmes centrés

Définition

- Conditions de Gauss :
Le système est utilisé avec des rayons paraxiaux, c'est à dire proches de l'axe optique et peu inclinés par rapport à ce dernier.
- Stigmatisme approché :
Il y a stigmatisme approché tant que l'image d'un point est plus petite qu'une cellule élémentaire.

16

Lentilles minces

I Caractéristiques et propriétés des lentilles

I.1 Types de lentilles

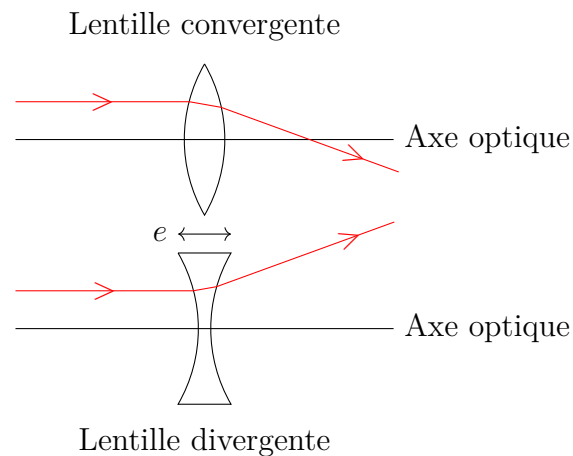


FIGURE 16.1 – Lentilles convergente et divergente

I.2 Centre optique

Tout rayon passant par le centre optique O n'est pas dévié.

I.3 Foyer objet F

Tout rayon passant par le foyer objet ressort parallèle à l'axe optique.

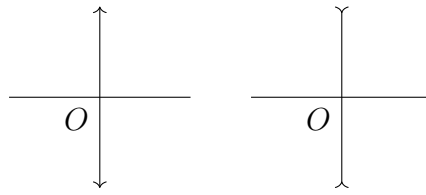


FIGURE 16.2 – Schéma de lentilles

Nous noterons f la distance focale objet $f = \overline{OF}$.

I.4 Foyer image F'

Distance focale : $f' = \overline{OF'} = -f$.

I.5 Vergence

Important

$$V = \frac{1}{f'}$$

Pour une lentille convergente, $V > 0$. Pour une lentille divergente, $V < 0$.
 $V : \text{m}^{-1} = \delta$ (dioptrie).

I.6 Foyer secondaire objet

Un objet sur le plan focal objet forme une image à l'infini.

I.7 Foyer secondaire image

Un objet à l'infini forme une image sur le plan focal image.

II Relation de grandissement et de conjugaison

II.1 Relation de grandissement

Important

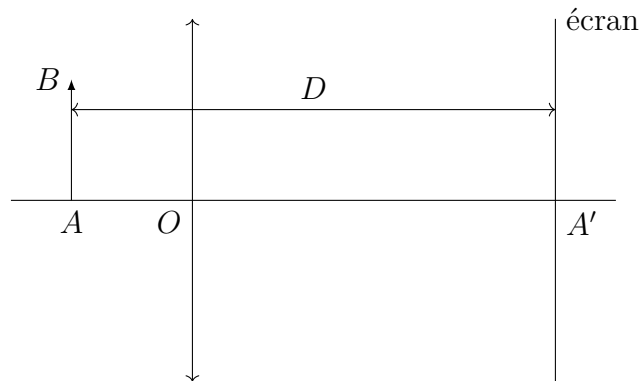
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{f'}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{f}$$

II.2 Relation de conjugaison

Important

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

II.3 Condition pour former une image réelle d'un objet réel par une lentille



$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Comme l'objet et l'image sont réels, $\overline{OA} < 0$ et $\overline{OA'} > 0 \implies f' > 0$, la lentille est convergente.

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= -x \text{ et } \overline{OA'} = D - x \\ \implies \frac{1}{D - x} + \frac{1}{x} &= \frac{1}{f'} \\ \implies D &= x(D - x) \frac{1}{f'} \\ \implies \frac{x^2}{f'} - \frac{Dx}{f'} + D &= 0 \\ \implies x^2 - Dx + Df' &= 0 \\ \Delta &= D^2 - 4Df' = D(D - 4f') \\ \implies D &\geq 4f'\end{aligned}$$

III L'œil

L'œil peut être assimilé à un système optique comportant :

- Un *diaphragme*, symbolisant l'*iris*.
- Une *lentille convergente*, symbolisant le *cristallin*.
- Un *écran*, symbolisant la *rétine*.

On peut définir le *punctum proximum* et le *punctum remotum*, qui représentent respectivement le point le plus proche et le plus lointain que peut voir un œil. Pour un œil emmétrope (sans défauts), le *punctum remotum* est à l'infini.

Nous parlerons aussi du pouvoir de résolution (ou pouvoir séparateur) de l'œil : le plus petit angle entre deux rayons formant de point sur notre rétine. $\epsilon \approx 1'$ (1 minute d'arc).



Cinquième partie
Architecture de la matière

Dans cette partie :

17	Atomes et éléments chimiques	107
I	Configuration électrique	107
I.1	Nombres quantiques	107
I.2	Règle de Klechkowski	107
I.3	Principe d'exclusion de Pauli	107
I.4	Gaz nobles	107
I.5	Électrons de cœur et électrons de valence	108
I.6	Règle de Hund	108
I.7	Ions atomiques	108
II	Classification périodique (Mendeleïev)	108
II.1	Architecture	108
II.2	Famille des halogènes	109
II.3	Caractères oxydants ou réducteurs des corps simples	109
II.4	Électronégativité	109
18	Molécules et solvants	110
I	Règle de l'octet	110
I.1	Règle du duet	110
I.2	Règle de l'octet	110
I.3	Liaison covalente	110
I.4	Lacune électronique	110
I.5	Hypervalence	110
II	Modèle de Lewis	111
II.1	Représentation de quelques molécules	111
II.2	Charges formelles	112
II.3	Écarts à la règle de l'octet	112
III	Interactions entre molécules	112
III.1	Polarité	112
III.2	Polarisabilité	113
III.3	Interactions de Van der Waals	113
III.4	Liaison hydrogènes	113
IV	Solvants moléculaires	113
IV.1	Miscibilité	113
IV.2	Mise en solution d'une espèce chimique	114
IV.3	Solvant protique	114

17

Atomes et éléments chimiques

I Configuration électrique

I.1 Nombres quantiques

L'état d'un électron autour d'un noyau est caractérisé par quatre nombres quantiques : n , l , m_p , m_s . Les nombres n , l et m_p caractérisent l'orbitale atomique.

- n : Nombre quantique principal ; $n \in \mathbb{N}$
- l : Nombre quantique azimutal ; $0 \leq l < n$
- m_p : Nombre quantique magnétique ; $-l \leq m_p \leq l$
- m_s : Nombre quantique de spin ; $m_s = \pm \frac{1}{2}$

I.2 Règle de Klechkowski

L'ensemble des orbitales atomiques croît par valeurs de $n + l$ croissant, puis par n croissant.

I.3 Principe d'exclusion de Pauli

Deux électrons ne peuvent pas être dans le même état quantique et donc avoir les mêmes nombres quantiques.

I.4 Gaz nobles

Les gaz nobles ont une configuration électronique en ns^2np^6 , sauf l'hélium qui est en $1s^2$.

- Ne : $1s^2 2s^2 2p^6$
- Ar : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$
- Kr : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6$
- Xe : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6$
- Rn : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^6$

I.5 Électrons de cœur et électrons de valence

- Cl : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$, 7 électrons de valence et 10 de cœur.
- Ge : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^2$, 4 et 28.
- Fe : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6$, 8 et 18.

Définition

Les électrons de valence sont les électrons de la couche externe et ceux de l'éventuelle sous-couche non remplie.

I.6 Règle de Hund

Pour une configuration électronique donnée, l'état de plus faible énergie est celui qui maximise le spin total.

I.7 Ions atomiques

Les configurations électroniques des gaz nobles sont extrêmement stables. Les sous-couches pleines ou à moitié pleines ont une stabilité particulière.

- Mn \longrightarrow Mn²⁺.
- F \longrightarrow F⁻
- Al \longrightarrow Al³⁺

Pour former les cations, on retire les électrons de la dernière couche.

II Classification périodique (Mendeleïev)

II.1 Architecture

- Ions alcalins : X⁺
- Ions halogénure : X⁻

II.2 Famille des halogènes

- F : $1s^2 2s^2 2p^5$
- Cl : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$
- Br : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^5$
- I : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^5$

II.3 Caractères oxydants ou réducteurs des corps simples

Définition

- Corps simple :
Espèce chimique constituée d'un seul élément chimique.
Exemples : He(g), O₂(g), Cu(s).
- Oxydant :
Espèce chimique capable de capter des électrons.
- Réducteur :
Espèce chimique capable de céder des électrons.

II.4 Électronégativité

Notée χ , sans unité, elle représente la capacité d'un élément à attirer vers lui les électrons dans une liaison.

18

Molécules et solvants

I Règle de l'octet

I.1 Règle du duet

Les atomes de $Z \leq 5$ tendent à acquérir la configuration électronique de l'hélium ($1s^1$).

I.2 Règle de l'octet

Les atomes de $Z \geq 6$ tendent à acquérir la configuration électronique du gaz noble le plus proche, c'est à dire à avoir 8 électrons sur la couche externe.

I.3 Liaison covalente

Pour vérifier les règles du duet ou de l'octet, les atomes peuvent former des ions ou former des liaisons covalentes.

I.4 Lacune électronique

Les atomes de $Z \geq 6$ peuvent parfois avoir moins de 8 électrons sur leur couche externe.

I.5 Hypervalence

À partir de la troisième période, les atomes possèdent des orbitales d accessibles. Il y a bien une stabilité particulière lorsque l'atome est entouré de 8 électrons, mais l'atome peut s'entourer de plus de 8 électrons.

II Modèle de Lewis

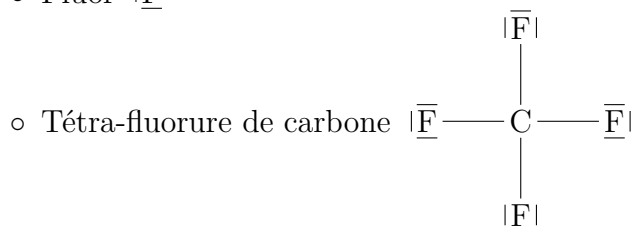
Important

Méthode pour établir un schéma de Lewis

1. Dénombrer les électrons de valence de l'édifice. Pour un ion, il faut prendre en compte les électrons gagnés ou perdus.
2. Représenter le squelette de l'édifice et compléter l'octet pour chaque atome de $Z \geq 6$ avec des doublets non-liants (en commençant par les atomes les plus électronégatifs).
 - S'il manque des électrons, basculer si possible des doublets non-liants en liaisons multiples.
 - S'il y a trop d'électrons, ajouter des électrons sur les atomes pouvant être hypervalents.
3. Attribuer les charges formelles aux atomes n'ayant pas leur nombre d'électrons de valence d'origine.
 - Réduire si possible les charges formelles en basculant des doublets non-liants en liaisons multiples avec les atomes pouvant être hypervalents.
 - S'il y a plusieurs possibilités, la configuration la plus probable est celle pour laquelle les charges négatives sont portées par les atomes les plus électronégatifs et les charges positives par les atomes les moins électronégatifs.

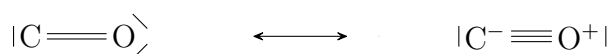
II.1 Représentation de quelques molécules

- Hydrogène $\text{H}\cdot$
- Carbone $\cdot\dot{\text{C}}\cdot$
- Azote $\cdot\ddot{\text{N}}\cdot$
- Oxygène $\cdot\ddot{\text{O}}\cdot$
- Fluor $\cdot\ddot{\text{F}}\cdot$



- Diazote $|\bar{\text{N}} \equiv \bar{\text{N}}|$
- Dioxyde de carbone $\langle \text{O} = \text{C} = \text{O} \rangle$
- Fluorure $|\bar{\text{F}}^-|$
- Hydroxyde $\text{H} - \bar{\text{O}}^-|$
- Oxonium $\begin{array}{c} \text{H} - \bar{\text{O}}^+ - \text{H} \\ | \\ \text{H} \end{array}$

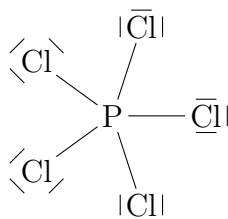
II.2 Charges formelles



II.3 Écarts à la règle de l'octet

- Borane $\begin{array}{c} \text{H} - \bar{\text{B}} - \text{H} \\ | \\ \text{H} \end{array}$

- Pentachlorure de phosphore



III Interactions entre molécules

III.1 Polarité

Lorsque la différence d'électronégativité entre deux atomes d'une liaison est négative ($\gtrsim 0.4$ sur l'échelle de Pauling), la liaison est polarisée : l'atome le plus électronégatif porte une charge partielle δ^- , tandis que l'autre atome porte une charge partielle δ^+ . Lorsque la différence d'électronégativité est très grande ($\gtrsim 1.7$), la liaison est plus ionique que covalente : les électrons de la liaison sont pratiquement gagnés par l'atome le plus électronégatif. La différence d'électronégativité entre le carbone et l'hydrogène étant faible (< 0.4), la liaison C-H n'est pas polarisée.

La polarité d'une liaison est caractérisée par son moment dipolaire \vec{p} (en Debye D), orienté de la charge δ^- vers la charge δ^+ . Le moment dipolaire d'une molécule est la somme des moments dipolaires de ses liaisons ; il est orienté du barycentre des charges δ^- vers le barycentre des charges δ^+ . Une molécule possédant un moment dipolaire $\vec{p} \neq \vec{0}$ est dite polaire.

III.2 Polarisabilité

Le nuage électronique d'une molécule peut se déformer (sous l'effet d'un champ électrique). Une molécule apolaire peut alors acquérir un moment dipolaire induit. Une molécule est d'autant plus polarisable qu'elle est volumineuse

La permittivité relative ε_r (ou constante diélectrique) d'un matériau est une grandeur sans unité qui caractérise la polarisabilité des molécules/atomes qui le composent.

III.3 Interactions de Van der Waals

Les interactions de Van der Waals sont les interactions (attractives) entre dipôles permanents et/ou induits. Les interactions de Van der Waals entre molécules sont d'autant plus fortes que celles-ci sont polaires et polarisables.

Plus les interactions intermoléculaires sont fortes, plus une espèce chimique a des températures de changement d'état élevées.

III.4 Liaison hydrogènes

Une liaison hydrogène est une liaison électrostatique entre un atome d'hydrogènes lié à un atome plus électronégatif et un autre atome électronégatif. La force d'une liaison hydrogène est intermédiaire entre celle d'une liaison covalente et celle des interactions de Van der Waals.

La possibilité, pour une espèce chimique, de former des liaisons hydrogènes intermoléculaires conduit à des températures de changement d'état élevées.

IV Solvants moléculaires

« Qui se ressemble, s'assemble. »

IV.1 Miscibilité

Les solvants polaires sont généralement miscibles entre eux, de même pour les solvants apolaires. Par contre, un solvant polaire et un solvant apolaire ne sont généralement pas miscibles.

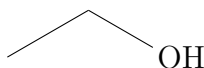
IV.2 Mise en solution d'une espèce chimique

	Soluté ionique	Soluté moléculaire polaire	Soluté moléculaire apolaire
Solvant polaire	Soluble	Soluble	Peu soluble
Solvant apolaire	Insoluble	Peu soluble	Très soluble

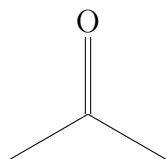
IV.3 Solvant protique

Un solvant protique (ou protogène) est susceptible de libérer un ion H^+ , c'est-à-dire qu'il possède un atome d'hydrogène $\delta-$, lié à un atome plus électronégatif. On distingue les solvants :

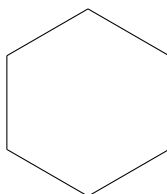
- protiques (et nécessairement polaires), comme l'eau ou l'éthanol



- polaires aprotiques, comme l'acétone



- apolaire (et nécessairement aprotiques), comme le cyclohexane





Dans cette partie :

19	Équilibre chimique	118
I	Système chimique en phase gazeuse	118
I.1	Équation d'état d'un gaz parfait	118
I.2	Mélange de gaz parfaits	118
II	Réaction chimique	119
II.1	Équation de réaction	119
II.2	Avancement	119
II.3	Réactif limitant	120
III	Évolution vers un état final	120
III.1	Activité d'une espèce chimique A_k	120
III.2	Quotient réactionnel	120
III.3	Loi d'action de masse	121
III.4	Sens d'évolution	121
III.5	Équilibres chimiques, réactions totales	121
20	Cinétique chimique	122
I	Vitesse de réaction	122
II	Temps de demie réaction	122
III	Lois de vitesse	123
III.1	Ordre de réaction	123
III.2	Dégénérescence de l'ordre	123
III.3	Mélange stœchiométrique	123
IV	Intégration de la loi de vitesse	124
IV.1	Ordre 0	124
IV.2	Ordre 1	124
IV.3	Ordre 2	125
V	Méthode de détermination de l'ordre	125
V.1	Méthode différentielle	125
V.2	Méthode intégrale	126
V.3	Méthode des temps de demie-réaction	126
VI	Influence de la température	126
21	Réactions acide-base	127
I	Potentiel hydrogène	127
II	Couples acide/base	127
II.1	Constante d'acidité	128
II.2	Produit ionique de l'eau	128
II.3	Diagramme de prédominance	128
III	Réactions acido-basiques	129
III.1	Acide dans l'eau	129

III.2	Base dans l'eau	130
III.3	Mélange acide-base	131
22	Dissolution / précipitation	132
I	Produit de solubilité K_s	132
II	Solubilité	132
II.1	Solubilité dans l'eau pure	132
II.2	Effet d'ion commun	133
III	Diagramme d'existence	133
III.1	Diagramme d'existence du chlorure de plomb	133
III.2	Solubilité de PbCl_2 en fonction de $[\text{Cl}^-]$	134
23	Oxydo-réduction	135
I	Nombre d'oxydation	135
II	Couples oxydant/réducteur	135
II.1	Demie-équation électronique	135
II.2	Formule de Nernst	135

19

Équilibre chimique

I Système chimique en phase gazeuse

I.1 Équation d'état d'un gaz parfait

Définition

Un gaz parfait est un gaz sans interactions.

Important

$$PV = nRT$$

- P : pression en Pascal ($\text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$)
- V : volume (m^3)
- n : quantité de matière (mol)
- R : constante des gaz parfaits ($R = 8.3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
- T : température absolue, en kelvin (K)

I.2 Mélange de gaz parfaits

Définition

Pression partielle P_i du gaz i : pression du gaz s'il était seul, à même volume et même température.

$$P_i V = n_i R T$$

Important

Loi de Dalton :

$$\sum_i P_i = P$$

Définition

Fraction molaire du gaz i :

$$x_i = \frac{n_i}{n_{gaz}}$$

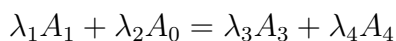
$$\sum_i x_i = \frac{\sum_i n_i}{n_{gaz}} = \frac{n_{gaz}}{n_{gaz}} = 1$$

Important

$$P_i = \frac{n_i RT}{V} = x_i n_{gaz} \frac{RT}{V} = x_i P$$

II Réaction chimique

II.1 Équation de réaction



Important

$$\sum_i \nu_k A_k = 0$$

ν est le coefficient stœchiométrique algébrique (négatif pour les réactifs, positif pour les produits).

II.2 Avancement

Définition

L'avancement molaire sera noté ξ , en mol.

Important

$$\nu_k = \frac{dn_k}{d\xi}$$

Pour une réaction en solution, on utilise plutôt l'avancement volumique :

$$x = \frac{\xi}{V} \implies [A_k] = \frac{n_k}{V} = [A_k]_i + \nu_k$$

II.3 Réactif limitant

Si A_k est réactif limitant, alors :

$$n_{ki} - \lambda_k \xi_{\max} = 0$$

III Évolution vers un état final**III.1 Activité d'une espèce chimique A_k** **Définition**

L'activité d'une espèce chimique sera notée a_k (sans dimension).

- Pour un solvant : $a_k = 1$
- Pour un soluté : $a_k = \frac{[A_k]}{C^0}$, $C^0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
- Pour un solide : $a_k = 1$
- Pour un gaz parfait : $a_k = \frac{P_k}{P^0}$, $P^0 = 1 \text{ bar}$.

III.2 Quotient réactionnel**Important**

$$Q = \prod_k a_k^{\nu_k} = \frac{a_3^{\lambda_3} \cdot a_4^{\lambda_4}}{a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2}}$$

III.3 Loi d'action de masse

Important

À l'équilibre chimique :

$$\prod_k a_{k_{eq}}^{\nu_k} = K(T)$$

K est la constante d'équilibre de la réaction.

III.4 Sens d'évolution

Important

- Si $Q < K$ alors Q augmente, la réaction a lieu dans le sens direct.
- Si $Q > K$ alors Q diminue, la réaction a lieu dans le sens indirect.

III.5 Équilibres chimiques, réactions totales

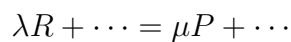
En pratique, on compare ξ_{eq} et ξ_{mzx} , le plus petit des deux détermine si la réaction est totale ou si elle amène à un équilibre chimique.

20

Cinétique chimique

I Vitesse de réaction

Soit une réaction :



- Vitesse d'apparition d'un produit : $\frac{dn_P}{dt} = \mu \frac{d\xi}{dt}$
- Vitesse volumique de disparition de R : $-\frac{d[R]}{dt} = \lambda \frac{dx}{dt}$
- Vitesse volumique d'apparition de P : $\frac{d[P]}{dt} = \mu \frac{dx}{dt}$

Important

Cas général :

$$\sum \nu_k A_k : \frac{d[A_k]}{dt} = \nu_k v$$

II Temps de demie réaction

$t_{1/2}$ est tel que $\xi(t_{1/2}) = \frac{\xi_f}{2}$ ou $x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$.

III Lois de vitesse

III.1 Ordre de réaction

$$\sum_i \lambda_i R_i = \sum_j \mu_j P_j$$

Si la réaction admet un ordre :

$$v = k \prod_i [R_i]^{p_i}$$

Où k est la constante cinétique de réaction et où p_i est l'ordre partiel du réactif i . Nous pouvons définir l'ordre global comme $p = \sum_i p_i$. Il existe des réactions sans ordre.

III.2 Dégénérescence de l'ordre

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = \dots$$

$$v = k [R_1]^{p_1} [R_2]^{p_2}$$

Si $[R_1] \gg [R_2]$, R_2 est réactif limitant et $x_{\max} \ll [R_1]_i$. Donc $[R_1] \approx [R_1]_i$.

$$v = k [R_1]_i^{p_1} [R_2]^{p_2}$$

Ainsi, $k [R_1]_i^{p_1}$ est la constante de vitesse apparente k_{ap} , et p_2 est l'ordre global de la réaction.

III.3 Mélange stœchiométrique

$$[R_1] = \lambda_1 (c - x)$$

$$[R_2] = \lambda_2 (c - x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} [R_1]$$

$$\begin{aligned} v &= k [R_1]^{p_1} [R_2]^{p_2} \\ &= k [R_1]^{p_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} [R_1] \right)^{p_2} \\ &= k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{p_2} [R_1]^{p_1 + p_2} \end{aligned}$$

Ainsi, $k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{p_2}$ est la constante de vitesse apparente k_{ap} , et $p_1 + p_2$ est l'ordre global de la réaction.

IV Intégration de la loi de vitesse

IV.1 Ordre 0

$$v = k \text{ (mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

Or, $v = \frac{dx}{dt}$ donc $x = kt$.

$$[R] = [R]_i - \lambda x = [R]_i - \lambda kt$$

Temps de demie-réaction :

$$\begin{aligned} [R](t_{1/2}) &= \frac{1}{2} [R]_i \\ [R]_i - \lambda kt_{1/2} &= \frac{[R]_i}{2} \implies \boxed{t_{1/2} = \frac{[R]_i}{2\lambda k}} \end{aligned}$$

IV.2 Ordre 1

$$v = k [R] \text{ (} k : \text{s}^{-1}\text{)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d[R]}{dt} &= -\lambda v \\ \implies \frac{d[R]}{dt} &= -\lambda k [R] \\ \implies \int_{[R]_i}^{[R]} \frac{d[R]}{[R]} &= \int_0^t -\lambda k dt \\ \implies [\ln([R])]_{[R]_i}^{[R]} &= -\lambda kt \\ \implies \ln \left(\frac{[R]}{[R]_i} \right) &= -\lambda kt \\ \implies [R] &= [R]_i e^{-\lambda kt} \end{aligned}$$

Temps de demie-réaction :

$$\begin{aligned} [R](t_{1/2}) &= \frac{1}{2} [R]_i \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -\lambda k t_{1/2} \implies \boxed{t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda k}} \end{aligned}$$

IV.3 Ordre 2

$$v = k [R]^2 \quad (k : \text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[R]}{dt} &= -\lambda v \\ \implies \frac{d[R]}{dt} &= -\lambda k [R]^2 \\ \implies \int_{[R]_i}^{[R]} \frac{d[R]}{[R]^2} &= \int_0^t -\lambda k dt \\ \implies \left[-\frac{1}{[R]} \right]_{[R]_i}^{[R]} &= -\lambda k t \\ \implies \frac{1}{[R]} &= \lambda k t + \frac{1}{[R]_i} \\ \implies [R] &= \frac{[R]_i}{1 + \lambda k [R]_i t} \end{aligned}$$

Temps de demie-réaction :

$$\begin{aligned} [R](t_{1/2}) &= \frac{1}{2} [R]_i \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{1 + \lambda k [R]_i t_{1/2}} \implies \boxed{t_{1/2} = \frac{1}{[R]_i \lambda k}} \end{aligned}$$

V Méthode de détermination de l'ordre

V.1 Méthode différentielle

$$\begin{aligned} v &= k [R]^p \\ \ln(v) &= \ln(k) + p \ln([R]) \end{aligned}$$

En traçant cette courbe, on obtient une droite ayant pour coefficient directeur p . Mais cette méthode nécessite un nombre important de point pour être précise et ne permet généralement que d'estimer l'ordre.

V.2 Méthode intégrale

On trace :

- $[R]_{(t)}$ pour un ordre 0.
- $\ln([R]_{(t)})$ pour un ordre 1.
- $\frac{1}{[R]_{(t)}}$ pour un ordre 2.

Le graphe donnant une droite donne l'ordre de la réaction.

V.3 Méthode des temps de demie-réaction

Ordre	0	1	2
$t_{1/2}$	$\frac{[R]_i}{2\lambda k}$	$\frac{\ln(2)}{\lambda k}$	$\frac{1}{[R]_i \lambda k}$

Si $t_{1/2}$ ne dépend pas de $[R]_i$, la réaction est d'ordre 1, si $t_{1/2}$ augmente ou diminue avec $[R]_i$, la réaction est d'ordre plus petit ou plus grand que 1.

VI Influence de la température

Important

Loi empirique d'Arrhenius :

$$\frac{d}{dT} [\ln(k)] = \frac{E_a}{RT^2}$$

- T : Température en K
- k : Constante de vitesse
- E_a : Énergie d'activation en $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$
- R : Constante des gaz parfaits, $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

En intégrant, nous arrivons à une autre forme de la loi d'Arrhenius :

$$k = \lambda e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

21

Réactions acide-base

I Potentiel hydrogène

Définition

$$\text{pH} = -\log(a_{\text{H}_3\text{O}^+}) = -\log\left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^0}\right)$$
$$\Leftrightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = C^0 \cdot 10^{-\text{pH}}$$

II Couples acide/base

Définition

- Acide : espèce chimique capable de *céder* un électron.
- Base : espèce chimique capable de *capter* un électron.

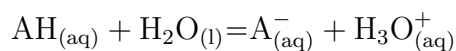
Par exemple, les couples suivants sont des couples acide/base :

- $\text{H}_2\text{O}/\text{HO}^-$: $\text{H}_2\text{O} = \text{HO}^- + \text{H}^+$
- $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$: $\text{H}_3\text{O}^+ = \text{H}_2\text{O} + \text{H}^+$

Nous dirons que l'eau est une espèce *amphotère*, ou que l'eau est un *ampholyte*.

II.1 Constante d'acidité

Soit le couple acide/base AH/A^- .



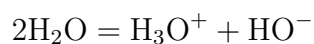
Définition

$$K_a = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]}$$

K_a est la constante d'acidité, $\text{p}K_a = -\log(K_a)$

II.2 Produit ionique de l'eau

Considérons le couple $\text{H}_2\text{O}/\text{HO}^-$:



Important

$$K_e = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-]}{(C^0)^2} = 10^{-14}$$

$$\text{p}K_e = -\log(K_e) = 14$$

II.3 Diagramme de prédominance

$$K_a = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]}$$

$$\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} = \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-\text{p}K_a}}{10^{-\text{pH}}} = 10^{\text{pH}-\text{p}K_a}$$

$$[\text{A}^-] > [\text{AH}] \iff \text{pH} > \text{p}K_a$$

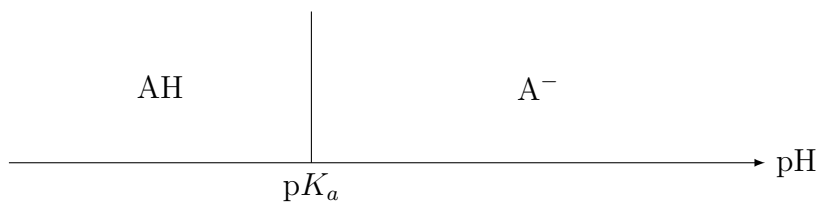


FIGURE 21.1 – Diagramme de prédominance du couple AH/A⁻

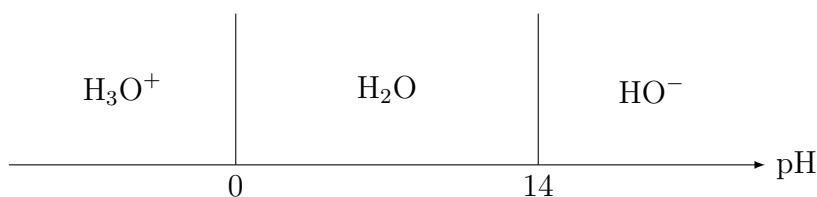


FIGURE 21.2 – Diagramme de prédominance de l'eau

III Réactions acido-basiques

III.1 Acide dans l'eau

Nous noterons c la concentration en acide apporté.

$$\text{AH} + \text{H}_2\text{O} = \text{A}^- + \text{H}_3\text{O}^+$$

$$K_a = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]} = \frac{x^2}{c - x}$$

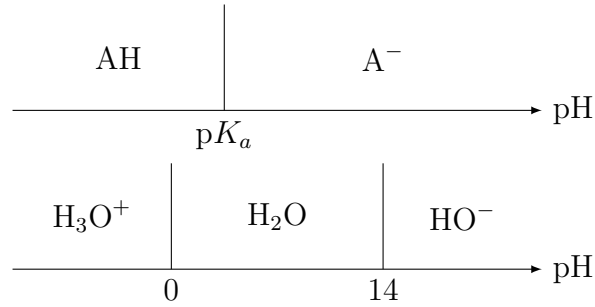
a. Acide fort

$$pK_a < 0 \iff K_a \gg 1$$

Nous pouvons approximer une réaction quasi-totale : $x \approx c$

$$[\text{AH}] = \frac{c^2}{K_a}$$

Dans l'eau, un acide fort réagit comme l'ion H_3O^+ , c'est l'effet nivelant de l'eau.



b. Acide faible

$$pK_a > 0 \iff K_a \ll 1$$

Nous pouvons approximer une réaction limitée : $x \ll c$

$$x = \sqrt{K_a c}$$

III.2 Base dans l'eau

$$K_b = \frac{[AH][HO^-]}{[A^-]} \cdot \frac{[H_3O^+]}{[H_3O^+]} = \frac{K_e}{K_a} = 10^{pK_a - 14}$$

a. Base forte

$$pK_a > 14 \iff K_b \gg 1$$

Nous pouvons approximer une réaction quasi-totale : $x \approx c$

$$[HO^-] \approx c$$

$$K_e = [H_3O^+][HO^-] \implies [H_3O^+] \approx \frac{K_e}{c}$$

Dans l'eau, une base forte réagit comme l'ion HO^- , c'est l'effet nivelant de l'eau.

b. Base faible

$$pK_a < 14 \iff K_b \gg 1$$

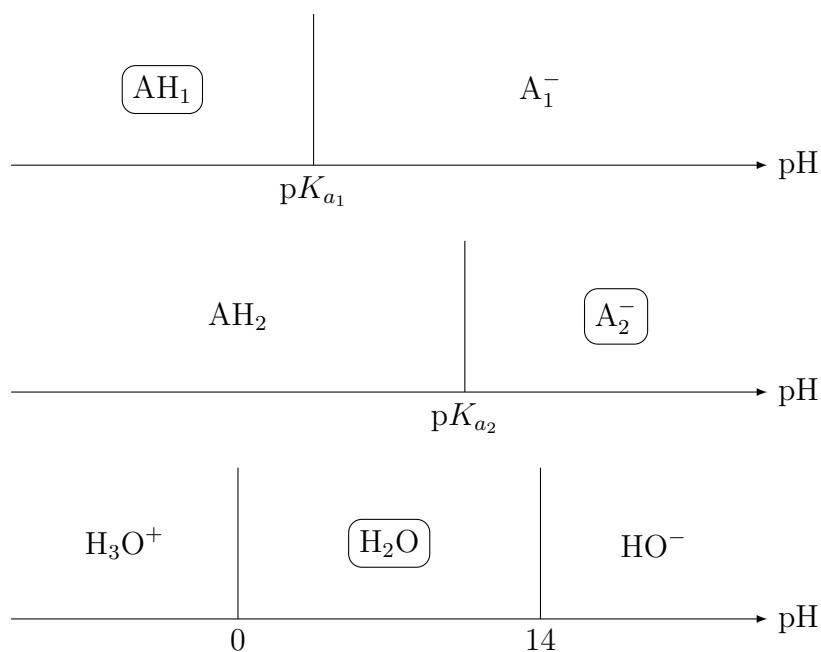
Nous pouvons approximer une réaction limitée : $x \ll c$

$$x = \sqrt{K_b c}$$

$$K_e = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-] \implies [\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{\frac{K_e K_a}{c}}$$

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_e + \text{p}K_a - \text{p}c)$$

III.3 Mélange acide-base



Listons les réactions possibles :

- $2\text{H}_2\text{O} = \text{H}_3\text{O}^+ + \text{HO}^-$
- $\text{AH}_1 + \text{H}_2\text{O} = \text{A}_1^- + \text{H}_3\text{O}^+$
- $\text{A}_2^- + \text{H}_2\text{O} = \text{AH}_2 + \text{HO}^-$
- $\text{AH}_1 + \text{A}_2^- = \text{A}_1^- + \text{AH}_2$

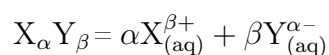
La réaction prédominante sera toujours celle entre l'acide le plus fort et la base la plus forte.

22

Dissolution / précipitation

I Produit de solubilité K_s

Considérons l'équation de dissolution d'un solide ionique quelconque.



$$K_s = [X^{\beta+}]^\alpha \cdot [Y^{\alpha-}]^\beta$$

Pour de petites valeurs de K_s , on utilisera $pK_s = -\log(K_s)$.

II Solubilité

Nous étudierons l'exemple du chlorure de plomb(II).

II.1 Solubilité dans l'eau pure

Définition

La solubilité est la quantité maximale de solide que l'on peut dissoudre par unité de volume.

$PbCl_2$	Pb^{2+}	$+ 2 Cl^-$
∞	0	0
$\infty - \xi$	ξ	2ξ

Important

$$s = \frac{\xi_{\text{eq}}}{V}$$

À l'équilibre,

$$K_s = [\text{Pb}^{2+}] [\text{Cl}^-]^2 = s (2s)^2 = 4s^3$$

$$s = \sqrt[3]{\frac{K_s}{4}} C^0$$

II.2 Effet d'ion commun

La solubilité n'est pas la même si un ion est déjà présent dans la solution. Dans ce cas, il faut faire le tableau d'avancement et, s'il y a lieu, une hypothèse simplificatrice.

III Diagramme d'existence

III.1 Diagramme d'existence du chlorure de plomb



On note c la concentration apporté en Pb^{2+} . Ainsi, $[\text{Pb}^{2+}] \leq c$. On ajoute également des ions chlorure.

Étudions la potentielle existence de PbCl_2 :

Si le solide existe :

$$[\text{Pb}^{2+}] < c \implies K_s < c [\text{Cl}^-]^2$$

$$[\text{Cl}^-] > \sqrt{\frac{K_s}{c}}$$

$$\text{pCl} < \frac{1}{2} (\text{p}K_s - \text{pc})$$

Si le solide n'existe pas :

$$\begin{aligned} [\text{Pb}^{2+}] &> c \implies K_s > c [\text{Cl}^-]^2 \\ [\text{Cl}^-] &< \sqrt{\frac{K_s}{c}} \\ \text{pCl} &> \frac{1}{2} (\text{p}K_s - \text{pc}) \end{aligned}$$

III.2 Solubilité de PbCl_2 en fonction de $[\text{Cl}^-]$

PbCl_2	Pb^{2+}	$+ 2 \text{Cl}^-$
∞	0	var
$\infty - \xi$	ξ	

$$s = \frac{\xi}{V} = [\text{Pb}^{2+}] = \frac{K_s}{[\text{Cl}^-]_{\text{eq}}^2}$$

23

Oxydo-réduction

I Nombre d'oxydation

Définition

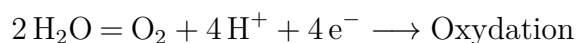
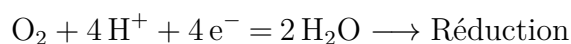
Le *nombre d'oxydation* est la charge que porterait un atome dans un édifice chimique si les électrons de chaque liaison étaient attribués à l'atome lié le plus électronégatif. Il est généralement noté avec un nombre romain.

Par exemple, dans la molécule d'eau H_2O , $\text{no}(\text{H}) = +\text{I}$ et $\text{no}(\text{O}) = \text{II}$.

II Couples oxydant/réducteur

II.1 Demi-équation électronique

Considérons le couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$:



II.2 Formule de Nernst

Important

Soit une demi-équation électronique de la forme :

$$\alpha\text{Réd} = \beta\text{Ox} + n\text{e}^- + m\text{H}^+$$

Alors le potentiel d'une électrode en présence du couple est :

$$E = E^\circ + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \cdot \ln \left(\frac{(a_{\text{Ox}})^\beta h^m}{(a_{\text{Réd}})^\alpha} \right)$$

Avec :

- E° le potentiel standard du couple
- \mathcal{F} la constante de Faraday, $\mathcal{F} = \mathcal{N}_A e \approx 10^5 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$