Maths MPSI

Maillet Nathan
MP*

Contents

1 Complexes et Trigonométrie

- $|\mathrm{z}|=\sqrt{z\bar{z}}$
- $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$
- $\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
- $\tan(a+\frac{\pi}{2})=-\cot(a)$
- $\cos^2(a)=\frac{\cos(2a)+1}{2}$
- $\sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$
- $\cos(p)+\cos(q)=2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
- $ch^2-sh^2=1$
- $\forall x\in[-1,1], \cos(\arcsin(x))=\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$
- $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos'(x)$
- $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
- Propriété : $\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})=(\text{signe de x})*\frac{\pi}{2}$

2 Ensembles

- $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$
- Partition : recouvrement, $\forall i\neq j, A_i\cap A_j=\varnothing, \forall i, A_i\neq\varnothing$
- Relation binaire, réflexive, transitive, symétrique, anti-symétrique, d'équivalence, d'ordre (totale ou partielle)
- Propriété : Soit $A\neq\varnothing, A\subset\mathbb{R}$ majorée, A possède une borne supérieur

3 Equations différentielles

Premier ordre

$y'+\alpha(x)y=a \implies y=\lambda e^{-\int\alpha(x)\mathrm{d}x}+y_0$

Deuxième ordre

$\Delta>0$:

$y=\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}$

$\Delta=0$:

$y=e^{rx}(\lambda+\mu x)$

$\Delta < 0$:

$r = \alpha + i\beta, y = e^{\alpha x}(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x))$

Raccordements :

Théorème : Soit f une fonction continue en a et $f' \underset{a}{\to} l$, alors $f'(a) = l$ et f est de classe C^1 en a

4 Continuité

Théorème Soit f une fonction continue en a et $(u_n)_{\mathbb{N}} \underset{\infty}{\to} a$ alors $f(u_n) \underset{\infty}{\to} f(a)$
Théorème TVI : Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle
Théorème Soit I un intervalle réel, f continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$.f^{-1} existe va de $f(I)$ vers I, possède la même monotonie et si $f \in \mathcal{D}(I, f(I))$ et $0 \notin f'(I)$ alors $f^{-1} \in \mathcal{D}(f(I), I)$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

- Propriété : f continue sur [a,b] implique $f([a,b]) = [m, M]$. De plus, si f est strictement monotone, f(fermé) = fermé et f(semi-ouvert) = semi-ouvert
- f est Lipschitzienne de rapport k si $\exists k > 0 / \forall (x, x') \in I^2, |f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'|$
- Si k<1, f est dite contractante
- Uniforme continuité : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, x') \in \mathcal{D}_f$,
$$|x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$
- Propriété : L'uniforme continuité implique la continuité

Théorème Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue

5 Suites

Théorème Suites adjacentes : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissantes et $v_n - u_n \underset{\infty}{\to} 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ce vers la même limite
Théorème Segments emboités : Soit $S_n = [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} \subset S_n, b_n - a_n \underset{\infty}{\to} 0 \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \alpha$

- Propriété : Si $u_n \underset{\infty}{\to} l$ alors toutes les sous-suites de u_n aussi.

Théorème Bolzano-Weierstrass : De toute suite de réels bornées on peut extraire une sous-suite convergente
Théorème Cesaro : $u_n \underset{\infty}{\to} l, l \in \bar{\mathbb{R}} \implies \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{\infty}{\to} l$
Théorème "Cesaro multiplicatif" : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$ telle que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{\infty}{\to} \lambda$ alors $\sqrt[n]{a_n} \underset{\infty}{\to} \lambda$

- Propriété : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathbb{R}^{+*}$, si $\exists p / \forall n \geqslant p, \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ alors $\exists \lambda = \frac{a_p}{b_p} > 0 / \forall n \geqslant p, a_n \leqslant \lambda b_n$

- $(\frac{n}{n+1})^n \underset{\infty}{\rightarrow} \frac{1}{e}$
- Propriété : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n), u_o \in I, f(I) \subset I$ et f soit croissante sur I alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie est donnée suivant $u_1 \geqslant / \leqslant u_0$
- Propriété : Soit I un intervalle stable par f, continue, $u_{n+1} = f(u_n)$, et $u_n \underset{\infty}{\rightarrow} c$ alors c est tel que $f(c) = c$
- Propriété : Soit I un intervalle stable par f, continue décroissante, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$ alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont de monotonie opposée

Suites récurentes linéaires d'ordres 2

$\Delta > 0$:

$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$

$\Delta = 0$:

$y = r^n(\alpha n + \beta)$

$\Delta < 0$:

$r = \rho e^{i\theta}, u_n = \rho^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$

6 Propiétés de $\mathbb{R}$ en tout genre

Théorème Cauchy-Schwarz : $\forall (x_i, y_i) \in (\mathbb{R}^2)^n, |\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$

Topologie

- $A \subset E$ est dense dans E si et seulement si
$$\forall B(a, r) = \{x \in E / d(x, a) < r\}, \exists \alpha \in A / \alpha \in B(a, r)$$
- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$
- $A \subset E$ est ouvert si $\forall a \in A, \exists r > 0 / B(a, r) \subset A$
- Un ensemble est fermé si sont complémentaire est ouvert
- Propriété : Soit O_j des ouverts, $\bigcup\limits_{j} O_j$ est ouvert
- Propriété : Soit F_j des fermés, $\bigcap\limits_{j} F_j$ est fermé
- Propriété : Soit $(O_j)_{j:1\rightarrow s}$ des ouverts, $\bigcap\limits_{j=1}^{s} O_j$ est ouvert
- Propriété : Soit $(F_j)_{j:1\rightarrow s}$ des fermés, $\bigcup\limits_{j=1}^{s} F_j$ est fermé

7 Dérivabilité

- Tangente en x_0 : $T_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x)$
- Si $f \in \mathcal{D}(I, f(I))$ et $G \in \mathcal{D}(J, g(J))$ avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathcal{D}(I, g(J))$ et $(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$
- Leibniz : $\forall (f,g) \in C^n(I, \mathbb{R}), (fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
- Taylor-Lagrange ordre 2 :

$$\forall f \in C^1[a,b], f \in \mathcal{D}^2]a,b[, \exists c \in]a,b[/ f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f"(c)$$

Théorème Rolle : $f \in C^0[a,b], f \in \mathcal{D}]a,b[, f(a) = f(b) \implies \exists c \in]a,b[/f'(c) = 0$ Théorème Accroissements finits :

Cas d'égalité : $f \in C^0[a,b], f \in \mathcal{D}]a,b[\implies \exists c \in]a,b[/f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Cas d'inégalité : $f \in C^0([a,b], \mathbb{C}), f \in \mathcal{D}(]a,b[, \mathbb{C})$ et
$\exists M = \sup(|f'|) \implies f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$

8 Lois de compositions internes

Groupe $(G, *)$ est un groupe si $*$ est une lois de composition interne associative avec un neutre et que $\forall a \in G, \exists a^- \in G/a * a^- = a - *a = e$
Théorème Caractérisation des sous-groupes : Soit $(G, *)$ un groupe, $H \subset G, H \neq \varnothing$,
$(H, *)$ est un groupe si $\forall (a,b) \in H^2, a * b^- \in H$

- Le produit cartésien de 2 groupes est 1 groupe
- (G,*) est un groupe abélien si * est commutatif et que (G,*) soit un groupe

Théorème Les seuls sous groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$

Anneaux Soit $(A, +)$ un groupe abélien, c'est un anneau pour la loi $*$ si $*$ est une lci associative avec un neutre et que $\forall (a,b,c) \in A^3, a*(b+c) = a*b+a*c$ et $(b+c)*a = b*a+c*a$
Théorème Caractérisation des sous-anneaux : Soit $(A, +, *)$ un anneau, $B \subset A, B \neq \varnothing$,
$(B+, *)$ est un anneau si $\forall (a,b) \in B^2, a + b^- \in B, a * b \in B$ et $1_A \in B$

- Le centre d'un anneau est l'ensemble des éléments de cet anneau qui commutent avec tous les autres éléments de l'anneau
- Un anneau est dit intègre si il n'a pas de diviseurs de 0 et que $*$ est commutatif

Corps Soit $(K, +, *)$ un anneau et $\forall x \in K, x \neq 0$ alors $\exists x^- \in K/x * x^- = x^- * x = 1$
Théorème Caractérisation des sous-corps : Soit $(K, +, *)$ un corps, $L \subset K, L \neq \varnothing$,
$(L, +, *)$ est un corps si $\forall (a,b) \in L^2, a-b \in L, a*b \in L$ et $\forall a \in L, a \neq, \exists a^- \in L/a*a^- = a^-*a = 1$

9 Arithmétique

- La division conserve l'intégralité des diviseurs donc aussi le pgcd

$$\text{Soient} a, b, c \in \mathbb{Z} :$$

Théorème Bézout : $a \wedge b = 1 \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$
Théorème Si $a \wedge b = a \wedge c = 1$, alors $a \wedge bc = 1$
Théorème $b|a, c|a$ et $b \wedge c = 1 \implies bc|a$

- Propriété : $a \wedge b_i = 1, 1 \leqslant i \leqslant n \implies a \wedge (\prod_{i=1}^{n} b_i) = 1$

- Propriété : $(ac) \wedge (bc) = |c|(a \wedge b)$

Théorème Gauss : $a \wedge b = 1$ et $a|bc \implies a|c$

- Relation de Bezout : $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, ab = (a \wedge b)(a \vee b)$

Théorème Petit théorème de Fermat : $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{P}, a^p \equiv a[p]$ et si $a \wedge p = 1, a^{p-1} \equiv 1[p]$

10 Polynômes

Théorème Taylor : $\forall a, P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k$
Théorème Bezout : $\forall A, B \in \mathbb{K}^2[X], A \wedge B = 1 \iff \exists (U, V) \in \mathbb{K}^2[X]/AU + BV = 1$. De plus, $\exists ! (U_0, V_0) \in \mathbb{K}^2[X]/AU_0 + BV_0 = 1, d^\circ V_0 < d^\circ A$ et $d^\circ U_0 < d^\circ B$

- Soit α_i les racines d'un polynome $P = \sum_{k=0}^{d^\circ P} a_k X^k$. On a :

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ et } \sigma_n = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

- Si $\frac{A}{B} = \frac{A}{(X-\alpha)C} = \frac{\beta}{X-\alpha} + \dots$ alors $\beta = \frac{A}{B'}(\alpha)$

11 Intégration

- $J_n = \int \frac{1}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t$: IPP sur J_{n-1}

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}, \Delta < 0$: forme canonique puis arctan

- Protocole (changements de variables) avec des puissances de sin et cos :

$$x \to -x (\mathrm{d}x \text{ compris}) : u = \cos(x)$$
$$x \to \pi - x : u = \sin(x)$$
$$\text{Si les deux marchent : } u = \cos(2x)$$

Théorème Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée sur ce segment

- $f \in \varepsilon([a, b], \mathbb{R}) \int_a^b f = \sum_{j=0}^{p-1} (c_{j+1} - cj)\lambda_j$ avec λ_j la valeur de f sur $]c_j, c_{j+1}[$

- $F_1=\left\{\int_a^b \varphi / \varphi \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R}), \varphi \leqslant f\right\}, F_2=\left\{\int_a^b \psi / \psi \in \varepsilon([a,b],\mathbb{R}), \psi \geqslant f\right\}$
$$\forall f \in C^0_{pm} \int_a^b f = \sup(F_1)=\inf(F_2)$$
- Propriété : $\forall (f,g) \in (C^0_{pm}[a,b])^2, b>a, f \leqslant g \implies \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

Théorème $b>a, f\in C^0, \forall t f(t) \geqslant 0$ et $\exists c \in [a,b]/f(c)>0 \implies \int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0$
Théorème $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0, f\in C^0, \forall t f(t)\geqslant 0 \implies f=0_{[a,b]}$
Théorème Chauchy-Swarz : $a<b, (f,g)\in (C^0_{pm})^2 \implies (\int_a^b (fg)(t)\mathrm{d}t)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t$
Théorème Valeur moyenne : $f\in C^0_{pm}[a,b], a<b \implies \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = (b-a)\mu, \mu$ la valeur moyenne de f sur $[a,b]$
Théorème Théorème fondamental de l'analyse : Soit $f \in C^0, \forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est continue et dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$
Théorème Somme de Riemann : $\forall f\in C^0$, $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{k(b-a)}{n}) \underset{\infty}{\to} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$
Théorème Taylor avec reste intégrale :
$$\forall f \in C^{n+1}([a,b],\mathbb{R}), f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

12 Développements limités

Théorème Taylor-Young : $\forall f \in C^0([a,b],\mathbb{R}) f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o(x-a)^n$
Théorème $\int f = F(0)+P_{n+1}(x)+o(x^{n+1})$

Développements limités usuels en 0

- $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$
- $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\cdots+o(x^n)$
- $\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots+o(x^n)$
- $\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{120}+\cdots+o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1(x^n)}{n!}x^n+o(x^n)$
- $\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$
- $\cot(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+o(x^3)$
- $\ln(1+x)=0+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$
- $\mathrm{sh}(x)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$
- $\mathrm{ch}(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$
- $\mathrm{argsh}(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$
- $\mathrm{argth}(x)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

13 Espaces vectoriels

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $(E,+)$ un groupe abélien stable par combinaison linéaire avec la loi $*$ et tel que $\forall(x,y,z)\in E^3, \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2\ (\alpha+\beta)*x=(\alpha*x)+(\beta*x), \alpha*(x+y)=(\alpha*x)+(\alpha*y), \alpha*(\beta*x)=(\alpha\beta)*x$ et $1*x=x$, alors E est un espace vectoriel.

Théorème Caractérisation des sous espaces vectoriels : Soit $(E,+,*)$ un espace vectoriel, $F\subset E, F\neq\varnothing$, $(F,+,*)$ est un espace vectoriel si $\forall(\vec{f_1},\vec{f_2})\in F^2, \forall\lambda\in\mathbb{K}\,\lambda\vec{f_1}+\vec{f_2}\in F$

- La somme et l'intersection de 2 sous espaces vectoriel est un sous espace vectoriel
- Propriété : $S=\{\vec{x_1},\cdots,\vec{x_p}\}$ est lié si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres

Théorème Base incomplète : Soit une famille libre L_0 et une génératrice G tels que $L_0\subset G$ alors $\exists(\vec{g_s},\vec{g_r},\cdots)\in G\setminus L_0\,/L_0\cup\{\vec{g_s},\vec{g_r},\cdots\}$ soit une base

Théorème Echange : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finit, G une famille génératrice et L libre, alors on peut ajouter des vecteurs de G a L pour avoir une base de E

Théorème Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, E_1 un sous espace vectorielde dimension p, alors E_1 a de supplémentaires de dimension $n-p$ dans E

Théorème Formule de Grassmann : $\dim(A+B)=\dim A+\dim B-\dim(A\cap B)$

Théorème On ne change pas le rang d'un système de vecteur en remplaçant les dits vecteurs par une combinaison des autres avec un coefficient non nul

- Structure d'Algèbre : E est un algèbre si $(E,+,*_e)$ est un espace vectoriel, $(E,+,*_i)$ un anneau et si $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall(\vec{u},\vec{v})\in E, \lambda(\vec{u}\vec{v})=(\lambda\vec{u})\vec{v}=\vec{u}(\lambda\vec{v})$
- $\forall f\in L(E,F), \forall A$ sous espace vectoriel de $E, f(A)$ est un sous espace vectoriel de F

Théorème L'image d'une famille génératrice par une application linéaire est génératrice de l'image

Théorème Pour tout $f\in L(E,F)$ injective, alors l'image d'une famille libre est libre

Théorème Pour définir une application linéaire il suffit de définir l'image d'une base

Théorème Un espace E est de dimension finie n si et seulement si il existe un isomorphisme d'espace vectorielde E vers $\mathbb{K}^n$

- Les isomorphismes conservent les dimensions

Théorème En dimension finie, tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image

Théorème Théorème du rang : Soit E un espace vectoriel de dimension n, $f\in L(E,F)$ alors $Im(f)=f(E)$ et $\dim Im(f)=rg(f)$. De plus, $rg(f)+\dim Ker(f)=n$

Conséquences :

- f est injective si et seulement si $rg(f)=n$
- SI $\dim E=\dim F$ alors :

$$rg(f)=n \iff f\text{est injective} \iff \text{f est surjective} \iff \text{f est bijective}$$

Projecteurs et symétries

$p\in L(E)$ est un projecteur si et seulement si $p\circ p=p$

p projette sur E_1 parrallèlement à E_2 : p se comporte comme l'identité sur E_1 et est nul sur E_2

Théorème Si p est un projecteur, alors $E=Ker(p)+Im(p)$

- Si la somme de projecteurs forme l'indentité et que leur composition est nulle, les projecteurs sont dits associés

$s \in L(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id$
s est une symétrie vectorielle par rapport à E_1 parrallèlement à E_2 : s se comporte comme l'identité sur E_1 et - l'identité sur E_2

- Propriété : $s = 2p - Id$

14 Matrices

- Produit matriciel :

$$A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}), A \in M_{m,n}, B \in M_{n,q} \implies AB = (\gamma_{i,j}) \text{ avec } \gamma_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} b_{l,j}$$

- Propriété : $\forall A \in M_{m,n}, B \in M_{n,p}\ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$
- Propriété : $\forall (A, B) \in M_n^2(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
- $E_{i,j} E_{k,l} = \delta_j^k E_{i,l}$
- Soit :

$$\begin{aligned} \Phi : L(E, F) &\to M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto Mat(f, (\vec{e_j})_1^m, (\vec{b_i})_1^m) \end{aligned}$$

  Φ est un isomorphisme d'espace vectoriel et $\dim_{\mathbb{R}}(M_{m,n}(\mathbb{R})) = m * n$ donc :

$$\dim_{\mathbb{R}} L(E, F) = \dim_{\mathbb{R}} E \dim_{\mathbb{R}} F$$

Théorème $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si f est un automorphisme

- Propriété : $[P_{B \to B'}]^{-1} = P_{B' \to B}$

Théorème Soit E un espace vectoriel de dimension n,

$$\forall f \in L(E), \mathrm{tr}(Mat(f, \vec{a_j})) = \mathrm{tr}(Mat(f, \vec{a'_j}))$$

- Propriété : La trace d'un projecteur est son rang
- B est équivalente à A si et seulement si $\exists (R, S) \in GL_m \times GL_n / B = RAS$
- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire (elles ont donc le même rang)
- Propriété : $rg(A) = rg({}^tA)$
- B est semblable à A si et seulement si $\exists P \in GL_n / A = P^{-1}BP$

Valeurs propres

$$\begin{aligned} & f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}, \vec{x} \neq \vec{0} \\ \iff & AX - \lambda X = O_n \\ \iff & \vec{x} \in Ker(f - \lambda Id) \\ \iff & f - \lambda Id \text{ est non injective} \\ \iff & \det(A - \lambda I_n) = 0 \end{aligned}$$

Théorème Si une matrice est de rang r alors il existe au moins une matrice extraite de taille $r * r$ inversible. Réciproquement, si on a une matrice $r * r$ inversible et pas de matrice $(r+1) * (r+1)$ alors la matrice globale est de rang r.

15 Groupes symétriques et déterminants

Groupes symétriques

- Groupe symétrique S_n : ensemble des bijections de n élements de E vers E
- $\forall f \in S_n, f = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_s$ avec (t_i) des transpositions
- cycle : permutation avec une seule orbite, les autres éléments étant inchangés
- $\forall f \in S$, f peut se décomposer comme cycle de support disjoint
- Soit m le nombre d'orbites, $\sigma(f) = (-1)^{n-m}$
- $\forall f \in S, f = t_1 \circ t_2 \circ \cdots \circ t_r \implies \sigma(f) = (-1)^r$

Déterminants

- Une application n-linéaire est symétrique si l'ordre des vecteurs ne change pas le résultat : $\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi(\vec{b}, \vec{a})$
- Une application n-linéaire est anti-symétrique si l'ordre des vecteurs change le signe du résultat :$\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = -\varphi(\vec{b}, \vec{a})$
- Soit φ une applciation n-linéaire anti-symétrique, p permmutations des variables donne : $\varphi(\vec{x_{p(1)}}, \cdots, \vec{x_{p(n)}}) = \sigma(p)\varphi(\vec{x_1}, \cdots, \vec{x_n})$
- Une application est dite n-linéaire alternée si et seulement si elle est n-linéaire et $\forall(\vec{x_1}, \cdots, \vec{x_n}) \in E^n / \exists i \neq j, \vec{x_i} = \vec{x_j} \implies \varphi(\vec{x_1}, \cdots, \vec{x_n}) = 0$

Théorème Une fonction est alternée si et seulement si elle est antisymétrique

- Soit $\vec{x_k} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i,k}\vec{e_i}$,

$$\begin{aligned} & g : E^n \to \mathbb{K} \\ & (\vec{x_1}, \cdots, \vec{x_n}) \mapsto \sum_{p \in S_n} \sigma(p)\alpha_{p(1),1} \cdots \alpha_{p(n),n} \end{aligned}$$

  on appelle $g = \det(\vec{x_1}, \cdots, \vec{x_n}) = \sum\limits_{p \in S_n} \sigma(p)\alpha_{p(1),1} \cdots \alpha_{p(n),n}$

- g est une forme n-linéaire anti-symétrique (donc alternée) :

$$(\vec{x_i})_1^n \text{ sont liés } \iff \det(\vec{x_1}, \cdots, \vec{x_n}) = 0$$

- $\det(A) = \det({}^tA)$
- Propriété : $\forall (A,B) \in M_n^2(\mathbb{R}) \det(AB) = \det(A)\det(B)$ donc $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\forall A \in GL_n, A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^tB$ avec B la matrice des cofacteurs

16 Formes linéaires et hyperplans

Théorème H est un hyperplan $\iff \exists f \neq \omega \in E^*/Ker(f) = H$

- Propriété : $(u,v) \in (E^*)^2, H = Ker(u), H' = Ker(v) \implies H = H' \iff u = \lambda v$
- Propriété : $\dim_{\mathbb{K}}(\cap_i^m H_i) \geqslant n - m$

Théorème H est un hyperplan de $E, \dim_{\mathbb{K}} E = n$ si et seulement si

$$\exists (a_j)_1^n \neq (0)_1^n / \vec{x} \in H \iff \sum_{j=1}^{N} a_j x_j = 0$$

17 Séries

- $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x)$ et $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$
- $\sum u_k \to l \implies \lim u_k = 0$
- Si u_k ne tend pas vers 0 alors on dira que la série est grossièrement divergente
- Propriété : Soit $(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum(u_{k+1} - u_k)$ sont de même nature
- Propriété : Soit $\sum u_k, \sum v_k$ 2 suites positives, alors si $u_k \underset{\infty}{\sim} v_k$, les séries sont de même nature
- Comparaison série-intégrale

Théorème Séries de Riemann : La séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Théorème Règle d'Alembert : Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une série de $\mathbb{R}_*^+$ telle que $\lim \frac{u_{k+1}}{u_k} = \alpha$ alors si $0 \leqslant \alpha < 1$ la série $\sum u_k$ converge, si $\alpha = 1$ on ne peut rien dire et si $\alpha > 1$ la série est grossièrement divergente.
Théorème Critère spécial des séries alternées : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle, alors la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente

18 Espaces euclidiens

Vocabulaire

- Soit f une forme bilinéaire symétrique, on appelle forme quadratique $q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$
- Soit f une forme bilinéaire symétrique, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont dit orthogonaux par rapport à f si $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$
- Soit f une forme bilinéaire symétrique, elle sera dit positive si et seulement si $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$
- Soit f une forme bilinéaire symétrique, elle sera dit définie si et seulement si $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0_E}$
- Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et f une forme bilinéaire symétrique positive et définie, on parlera alors de produit scalaire.
- $||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ est la norme euclidienne
- $d(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}||$ est la distance euclidienne
- $\vec{x} \perp \vec{y}$ dans le cas où $\vec{x}/\vec{y} = \vec{0}$
- $A, B \subset E, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, E$ espace vectoriel euclidien alors $A \perp B \iff \forall (\vec{a}, \vec{b}) \in A \times B, (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$
- F, G 2 sous espace vectoriel de E alors $F \perp G \iff F \subset G^{\perp} \iff G \subset F^{\perp}$
- F, G 2 sous espace vectoriel de E sont dits perpendiculaires si $F^{\perp} \subset G \iff G^{\perp} \subset F$
- Une base $(\vec{e_i})_1^n$ est dite orthogonale si $\forall i \neq j, (\vec{e_i} \cdot \vec{e_j}) = 0$
- Une base $(\vec{b_i})_1^n$ est dite orthonormale si $\forall i \neq j, (\vec{b_i} \cdot \vec{b_j}) = \delta_i^j$
- $f \in L(E, F)$ est une isométrie si et seulement si f conserve la norme
- $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale quand $A\,{}^tA = I_n$

Théorème Inégalité de Cauchy-Swartz : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, ||\vec{x} \cdot \vec{y}|| \leqslant ||\vec{x}|| \times ||\vec{y}||$
Théorème Pythagore : Soit E un espace vectoriel euclidien, $\vec{x} \perp \vec{y} \iff ||\vec{x} + \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2$
Théorème Soit E un espace vectoriel euclidien, $\dim E = n, (\vec{x_1}, \cdots, \vec{x_p}) \in E^p$ tel que aucun vecteur ne soit nul et qu'ils soient tous orthogonaux 2 à 2 alors c'est une famille libre.
Théorème Procédé de Gram-Schmidt : Dans tous espace vectoriel euclidien il existe des bases orthonormales
Théorème Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie, F sous espace vectoriel de E alors $E = F \oplus F^{\perp}$ et $(F^{\perp})^{\perp} = F$
Théorème Soit F un sous espace vectoriel de E et $\vec{a} \in E$, $d(\vec{a}, F) = \inf\limits_{\vec{y} \in F} ||\vec{a} - \vec{y}||$ alors

$$d(\vec{a}, F) = ||\vec{a} - \vec{x}|| \iff \vec{a} - \vec{x} \in F^{\perp} \text{ et } \vec{x} = P_F(\vec{a})$$

Théorème L'isométrie entraine l'injectivité
Théorème f est une isométrie si et seulement si f conserve le produit scalaire
Théorème Soit E, F 2 espace vectoriel euclidien de même dimension alors :

f isométrie de E vers F

$\iff$ il existe une base orthonormale de E et une de F telle que $M(f, (\vec{e_j})_1^n, (\vec{f_i})_1^n)$ soit orthogonale
$\iff$ il existe une base orthonormale de E dont l'image par f est une base orthonormale de F

- Propriété : Soit E un espace vectoriel euclidien, $\dim_{\mathbb{R}} E = n, (\vec{e_i})_1^n, (\vec{e_i'})_1^n$ 2 bases orthonormales alors $P_{(\vec{e_i})\to(\vec{e_i'})} \in O_n(\mathbb{R}) : P^{-1} = {}^tP$
- Pour $A \in O_n(\mathbb{R})$, si $\det(A) = 1, f$ est une isométrie positive et si $\det(A) = -1, f$ est une isométrie négative
- $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$
- $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- Toute isométrie positive (rotation) peut se décomposer en produit de 2 isométries négatives (symétries) dont l'une est choisie arbitrairement
- Soient 2 vecteurs normés de E, alors il existe une unique rotation qui envoi le 1er sur le 2è (idem avec symétries)
- En dimension 3 : là où sa change rien : rotation ou symétrie d'axe orienté suivant l'axe où sa change rien

Produit mixte, vectoriel, application antisymétrique

- On appelle produit mixte l'application trilinéaire alternée qui a 3 vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ associe $\det_B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$
- Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \exists! \vec{w} \in E / \forall \vec{x} \in E, [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x}$. Ce vecteur sera appelé produit vectoriel de $\vec{u}, \vec{v}$ dans cet ordre noté $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$
- Propriété : $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{z}$
- Propriété : Le produit vectoriel est anti-commutatif : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- Propriété : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- Propriété : Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe
- Propriété : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + ||\vec{u} \wedge \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2$
- Propriété : Le double produit vectoriel n'est PAS associatif : $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3$,
$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$
- Soit $f \in L(E)$, elle sera dite antisymétrique si $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, (f(\vec{x}) \cdot \vec{y}) = -(\vec{x} \cdot f(\vec{y}))$
- Propriété : f est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice de f dans une base orthonormale directe est antisymétrique

19 Convexité

f est convexe si et seulement si $\forall \lambda \in [0,1] f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \iff 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$
Théorème Si $f \in \mathcal{D}^1$, la croissance de f' sur I est équivalente à la convexité de f sur I
Théorème f est convexe sur I si et seulement si f est toujours au dessus de ses tangentes
Théorème $\prod_{i=1}^n t_i^{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i$ (prendre $f(x) = e^x$ pour la démo)

20 Probabilités

- P est une probabilité sur un ensemble fini Ω si $P : P(\Omega) \to [0,1], P(\Omega) = 1$ et $\forall (A,B) \in P^2(\Omega)/A \cap B = \varnothing, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P_B(a) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Théorème Formule des probabilitées composées : Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $(A_1, \cdots, A_n)/P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0 : P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) * P_{A_1}(A_2) * P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots$
Théorème Formule des probabilités totales : Soit (A_i) un système complet d'évènements avec aucun évènement impossible alors $\forall B, P(B) = \sum\limits_i P(A_i) P_{A_i}(B)$

Théorème Formule de Bayes : Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Si $P(A)P(B) > 0, P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} P_A(B)$

- 2 évènements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Pour X une lois de probabilité, $P_X(A) = P(X \in A)$
- Propriété : Formule de Van der Monde : $\sum\limits_{k=0}^{r} \binom{n}{k} * \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$
- $E(X) = \sum\limits_i x_i P(X = X_i)$. Si $E(X) = 0$, X est dite centrée
- L'espérance est linéaire
- Lois binomiale : $E(X) = np$

Théorème Inégalité de Markov : Soit X une variable aléatoire réelle, alors $\forall a > 0, P(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(|X|)}{a}$
Théorème Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

- $V(x) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
- Propriété : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, V(aX + B) = a^2 V(X)$

Théorème Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Soit X une variable aléatoire réelle, $E(X) = m, \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

- $cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$
- Propriété : La covariance est bilinéaire symétrique
- Propriété : $\forall X, Y, V(X+Y) = V(X) + V(Y) - 2cov(X,Y)$
- Propriété : Si X et Y sont indépendants, $cov(X,Y) = 0$
- Soient X, Y deux variables aléatoires réelles, le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est : $\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

Théorème Soient X, Y deux variables aléatoires réelles de variances non nulles, alors : $|\rho(X,Y)| \leqslant 1$ et si $|\rho(X,Y)| = 1$ alors $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 / P(Y = aX + b) = 1$