Exercices-types : Mathématiques

Deschasaux Guillaume

Table des matières

1 Réduction des endomorphismes

1) Quelles sont les matrices carrées qui ne sont semblables qu'à elles-mêmes ?

2 Nombres complexes

1) **(Oral X)** Montrer la surjectivité de l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = ze^z$.
Indication : On pourra raisonner module/argument.

2) Calculer, en discutant selon les valeurs de θ, la somme $\sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)cos^k(\theta)$

3 Corps des nombres réels

1) **(Mines 2016)** a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall t \in]0, \pi/2[, P_n(cotan^2(t)) = \frac{sin(2n+1)t}{sin^{2n+1}(t)} \tag{1}$$

b) Trouver toutes les racines de P_n et calculer leur somme.

c) Montrer que, pour tout $t \in]0, \pi/2[, cotan^2(t) \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + cotan^2(t)$

d) En déduire la valeur de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Correction :

a) Pour t $\in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
sin(2n+1)t &= Im(cos(t)+isin(t))^{2n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (isin(t))^k (cos(t))^{2n+1-k} \\
&= sin^{2n+1}t \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^{k+1} (cotan^2 t))^{n-k}
\end{aligned}$$

donc $P_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^{k+1} X^{n-k}$ convient. Son unicité est évidente puisqu'on le connaît en une infinité de points.

b) $sin(2n+1)t = 0 \iff t = 0 \left[\frac{\pi}{2n+1}\right]$. On en déduit que les $cotan^2(\frac{k\pi}{2n+1})$ pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sont n racines de P_n. Ces racines sont distinctes par injectivité de $cotan^2$ sur l'intervalle $]0, \pi/2[$. En repartant de l'expression de P_n trouvée en a), on a :

$$\sum_{k=1}^{n} cotan^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = -\frac{\binom{2n+1}{2k+1}}{(-1)(2n+1)} = \frac{(n+1)(2n+1)}{3} \tag{2}$$

c) Soit $t \in]0, \pi/2[$, on a : $tan(t) \geq t \implies tan^2(t) \geq t^2 \implies cotan^2(t) \leq \frac{1}{t^2}$.
De même, on a : $sin(t) \leq t \implies sin^2(t) \leq t^2 \implies \frac{1}{t^2} \leq 1 + cotan^2(t)$

d) On applique l'inégalité précédente pour $t = \frac{k\pi}{2n+1}$, et on somme :

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2} \leq n + \frac{(n+1)(2n+1)}{3} \tag{3}$$

$$\frac{n+1}{3(2n+1)}\pi^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{n}{(2n+1)^2}\pi^2 + \frac{n+1}{3(2n+1)}\pi^2 \tag{4}$$

Puis, par passage à la limite, on obtient $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$