Probabilités

Nathan Maillet
Martin Andrieux

1 Théorie

Définition

Soit Ω un ensemble. Une tribu sur Ω est une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ telle que :

- $\varnothing \in \mathcal{T}$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\mathcal{T}), A \in \mathcal{T} \implies A^c \in \mathcal{T}$
- $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}$

Quand Ω est finit ou dénombrable, on choisira $\mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu.
Les tribus sont stables par intersection.

Définition

Une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $P : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^+$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $A_i \bigcap A_j = \varnothing$,

$$\sum_{i\geqslant 0} P(A_i) \text{ converge et } \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i) = P\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)$$

Continuité croissante et décroissante

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ est croissante,

$$P(A_n) \xrightarrow[+\infty]{} P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ est décroissante,

$$P(A_n) \xrightarrow[+\infty]{} P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$$

Définition

On dit que $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$ sont mutuellement indépendants si $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i_1, \dots, i_n$ éléments distincts de I, $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_n})$

Définition

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, c'est un système complet d'évènements si :

- Les A_i sont deux à deux disjoints
- $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1$
- $\forall i, P(A_i) \neq 0$

Formule des probabilités totales

Soit (A_i) un système complet d'évènements, on a :

$$\forall B, P(B) = \sum_i P(A_i) P_{A_i}(B)$$

Définition

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble fini ou dénombrable. Une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathcal{X}$ est une application

$$X : \Omega \to \mathcal{X} / \forall A \subset \mathcal{X}, X^{-1}(A) \in \mathcal{T}$$

- Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire
- Les composantes d'une variable aléatoire sont des variables aléatoires
- Si X est une variable aléatoire, $f \circ X$ en est une
- On retrouve la même définition d'indépendance mutuelle avec les variables aléatoires

Lemme des coalitions

Soit $X_1 \dots X_n$ des variables aléatoires indépendantes, $\forall k \leqslant n-1, (X_1, \dots, X_k), (X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes

Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire de Ω dans $\mathcal{X}$ et $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. $f(X)$ a une espérance si et seulement si la famille $(f(x_i)P(X = x_i))_{i\in I}$ est sommable. Si $f(X)$ a une espérance, alors :

$$E(f(X)) = \sum_{i\in I} f(x_i)P(X = x_i)$$

Espérance

L'espérance est linéraires et si X, Y possèdent un moment d'ordre 1 et sont indépendantes,

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle *positive* qui possède un moment d'ordre 1 :

$$\forall a > 0, P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(|X|)}{a}$$

Définition

Soient (X, Y) deux variables aléatoires discrètes qui possèdent un moment d'ordre 2, on a :

- $X - E(X)$ possède un moment d'ordre 2 appelé variance de X
- $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$
- On appel écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
- On appel covariance de (X, Y) :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[(X - E(x))(Y - E(Y))\right]$$

— $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

— $\forall \alpha \in \mathbb{R}, V(X + \alpha) = V(X)$ et $V(\alpha X) = \alpha^2 V(x)$

— La variable aléatoire $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est dite centrée réduite

— $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$ et si X, Y sont indépendants, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

— $\sqrt{V(X + Y)} \leqslant \sqrt{V(X)} + \sqrt{V(Y)}$

— Définition : $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient (X, Y) deux variables aléatoires discrètes qui possèdent un moment d'ordre 2, on a :

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle possédant un moment d'ordre 2, on a :

$$\forall a > 0, P\left(|X - E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

2 Séries génératrices

Définition

Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire.
La série génératrice de X est la série entière

$$G_X(z) = \sum_{n\geqslant 0} P(X = n)z^n$$

Son rayon est au moins 1 et il y a convergence normale pour z dans $\mathbb{C}$, $|z| \leqslant 1$.

Application des série génératrice

X possède une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1^-, avec :

$$E(X) = G'_X(1)$$

— En dérivant G_X on retrouve facilement que X possède un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est 2 fois dérivable en 1 et $V(X) = G''X(1) + G'_x(1) - (G'_X(1))^2$

— Soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire indépendate de X. On a : $G_{X+Y} = G_X G_Y$