Théorèmes d'échange de limites

1) Convergence uniforme et limites

Théorème de continuité pour les suites de fonctions.
Pour E et F deux espaces vectoriels normés, on considère une suite d'applications $f_n : A \longrightarrow F$ où A est une partie de E. Si f_n converge uniformément sur A vers une application $f : A \longrightarrow F$ et si les f_n sont toutes continues en un point $a \in U$, f est continue en a.

Théorème de continuité pour les séries de fonctions.
Pour E et F deux espaces vectoriels normés, on considère une suite d'applications $u_n : A \longrightarrow F$ où A est une partie de E. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur A et si les u_n sont toutes continues en un point $a \in U$, la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue en a.

Plus généralement, la limite uniforme d'une suite de fonctions continues (ou la somme uniforme d'une série de fonctions continues) est continue. On peut remarquer également, quand A est un intervalle de $\mathbb{R}$, que la continuité des f_n ou u_n sur A et la convergence uniforme sur tout segment $[a, b] \subset A$ suffit à assurer la continuité de la limite sur A.

Exemple 1 : la fonction Zeta de Riemann, définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, est continue sur $]1, +\infty[$. En effet, si $a > 1$, la série de Riemann converge normalement, donc uniformément, sur $[a, +\infty[$:

$$\forall x \geq a,\ 0 \leq \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a} \text{ et } \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^a} \text{ converge.}$$

Comme les applications $x \longmapsto \frac{1}{n^x}$ sont continues sur $[a, +\infty[$, ζ est continue sur $[a, +\infty[$. Enfin, a étant un réel quelconque > 1, ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Il faut bien remarquer que la continuité de ζ "passe" de $[a, +\infty[$ à $]1, +\infty[$, mais que ce n'est pas le cas de la convergence uniforme. Quand une série de fonction pose un problème en un point (comme ici en 1), il faut en général "s'éloigner du point" pour avoir convergence uniforme.

Ce résultat peut se généraliser :

Théorème de la double limite pour une suite de fonctions.
On suppose que U est une partie d'un espace vectoriel normé E et que les applications f_n sont définies sur U, à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou plus généralement dans un espace vectoriel normé complet). Si a est un point adhérent à U (on pourra aussi choisir $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ si U est une partie non majorée ou non minorée de $\mathbb{R}$) et si :

- la suite (f_n) converge uniformément sur U vers une fonction f ;
- pour tout n, $f_n(x)$ possède une limite ℓ_n quand x tend vers a

alors la suite (ℓ_n) possède une limite ℓ quand n tend vers l'infini et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. On peut donc écrire :

$$\lim_{x\longrightarrow a} \left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\lim_{x\longrightarrow a} f_n(x) \right).$$

Théorème de la double limite pour une série de fonctions.
On suppose que U est une partie d'un espace vectoriel normé E et que les applications u_n sont définies sur U, à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou plus généralement dans un espace vectoriel normé complet). Si a est un point adhérent à U (on pourra aussi choisir $a = +\infty$ ou $a = -\infty$ si U est une partie non majorée ou non minorée de $\mathbb{R}$) et si :

- la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur U ;
- pour tout n, $u_n(x)$ possède une limite α_n quand x tend vers a

alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$. On peut donc écrire :

$$\lim_{x\longrightarrow a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\longrightarrow a} u_n(x)\right).$$

Exemple 2 : la fonction ζ de Riemann tend vers 1 quand x tend vers l'infini. En effet, en posant $U = [2, +\infty[$ et $u_n(x) = 1/n^x$ pour $n \geq 1$ et $x \in U$, la série de terme général $u_n(x)$ converge normalement (et donc uniformément) sur U et $u_n(x)$ tend vers 0 (ou 1 si $n = 1$) quand x tend vers $+\infty$: on en déduit que $\displaystyle\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Le même théorème permet de prouver que la série de Riemann ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$. Dans le cas contraire, comme $u_n(x)$ tend vers $1/n$ quand x tend vers 1, le théorème prouverait la convergence de la série harmonique.

2) Convergence uniforme et dérivation

Théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions.
Soit I un intervalle et F un espace vectoriel normé de dimension finie. Si $(f_n)_{n\geq 0}$, f et φ sont des applications définies sur I et à valeurs dans F vérifiant :

- chaque f_n est de classe C^1 sur I ;
- la suite (f_n) converge simplement vers f ;
- la suite (f_n') converge uniformément sur tout $[a, b] \subset I$ vers φ,

alors f est de classe C^1 sur I et $f' = \varphi$: $\displaystyle\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n'$.

Théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions.
Soit I un intervalle et F un espace vectoriel normé de dimension finie. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'applications définies sur I et à valeurs dans F vérifiant :

- chaque u_n est de classe C^1 sur I ;
- la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur I ;
- la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n'$ converge uniformément sur tout $[a, b] \subset I$,

alors la fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur I et $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$.

Exemple 3 : par récurrence, on montre facilement que la fonction ζ de Riemann est de classe C^∞, avec :

$$\forall\, x > 1,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln^k n}{n^x}.$$

Théorèmes d'échange intégrale - limite

1) Convergence uniforme

Attention : ce théorème ne s'applique que sur des intervalles d'intégration bornés.

Théorème pour des suites de fonctions.
Si les applications $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sont continues par morceaux et convergent uniformément, quand n tend vers l'infini, vers une application $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, alors

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème pour des séries de fonctions.
Si les $u_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sont continues et si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarques :

- dans la version "série", on n'a pas de problème d'existence des intégrales car toutes les fonctions sont continues sur le segment $[a, b]$ (la somme infinie est une limite uniforme de fonctions continues) ;
- on peut étendre ce résultat à un intervalle borné mais non fermé : on doit alors s'assurer que les fonctions f_n et f (ou u_n et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$) sont sommables sur l'intervalle.

Exemple 4 : ce théorème est particulièrement bien adapté aux séries entières. Ainsi, il permet d'obtenir, pour $x \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x+x^2) &= \int_0^x \frac{1+2t}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^x \left(\frac{j^2}{1-j^2t} + \frac{j}{1-jt}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}\left(j^2(j^2t)^n + j(jt)^n\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} -\left(j^{2(n+1)} + j^{n+1}\right)t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} -\left(j^{2(n+1)} + j^{n+1}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^{n+1} \text{ avec } \alpha_n = \begin{cases} -2 & \text{si } n \equiv 2[3] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Exemple 5 : on peut également écrire, avec $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ somme d'une série entière de rayon $R > 0$:

$$\begin{aligned}
\forall\, r \in]0, R[,\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= a_k r^k
\end{aligned}$$

2) Théorème de convergence dominée

L'intervalle d'intégration est ici un intervalle quelconque et le théorème s'énonce plus naturellement en terme de suites de fonctions.

Théorème de convergence dominée pour des suites de fonctions.
Soit I un intervalle quelconque. On considère une suite d'applications $f_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et une application $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que :

- les f_n et f sont continues par morceaux sur I ;
- f_n converge simplement vers f sur I ;
- il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et sommable sur I telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq \varphi(x) \qquad \textit{(hypothèse de domination)}$$

Alors les fonctions f_n et f sont sommables sur I et $\displaystyle\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

Théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions.
Soit I un intervalle quelconque. On considère une suite d'applications $u_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- les u_n sont continues par morceaux sur I ;
- la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur I et sa somme S est continue par morceaux ;
- il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et sommable sur I telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \left|\sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| \leq \varphi(x) \qquad \textit{(hypothèse de domination)}$$

Alors les fonctions u_n et S sont sommables sur I, la série de terme général $\displaystyle\int_I u_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 6 : si $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels strictement positifs qui convergent vers l'infini, alors

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x}\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n}$$

Pour obtenir ce résultat, on note $I =]\,0, +\infty[$ et $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-\lambda_n k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. On a alors :

- la suite f_n converge simplement vers une limite f car, pour $x > 0$, $e^{\lambda_n x}$ décroît vers 0 quand n tend vers l'infini (théorème des séries alternées) ;
- les f_n sont clairement continues sur I ;
- pour $a > 0$, la convergence des f_n est uniforme sur $[a, +\infty[$:

$$\forall x \geq a,\ \forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-\lambda_k x}\right| \leq e^{-\lambda_{n+1} x} \leq e^{-\lambda_{n+1} a}$$

  et ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 quand n tend vers l'infini ; on en déduit que f est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc que f est continue sur I ;
- enfin, on a une domination évidente :

$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq e^{-\lambda_0 x} = \varphi(x)$$

  où φ est continue et sommable sur I.

Ceci prouve l'égalité demandée. On remarquera en passant que le théorème prouve aussi que les expressions utilisées dans cette formules ont bien un sens : la fontion f est sommable sur I, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n,}{\lambda_n}$ est convergente et l'intégrale de f sur I est égale à la somme de la série.

Exemple 7 : soit $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon non nul R. On montre facilement que la série entière $F(z) = \displaystyle\sum_{n=a}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\, z^n$ est de rayon infini. On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$:

$$\int_0^{+\infty} F(zx)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = f(z).$$

En effet, fixons un réel ρ compris strictement entre $|z|$ et R. Comme $\rho < R$, la série de terme général $a_n \rho^n$ est convergente, donc il existe $M \geq 0$ tel que $|a_n \rho^n| \leq M$ pour tout n. On a alors, en posant $I = [0, +\infty[$ et $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\, (zx)^k\, e^{-x}$:

- la suite g_n converge simplement vers la fonction $g :\ x \longmapsto F(zx)e^{-x}$ pour $x \geq 0$;
- les g_n et g sont clairement continues sur I ;
- on a une nouvelle fois une domination évidente, pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$|g_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{k!}\, (|z|x)^k\, e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M}{k!} \left(\frac{|z|x}{\rho}\right)^k e^{-x} = M\, e^{-x\left(1 - \frac{|z|}{\rho}\right)} = \varphi(x)$$

  où φ est continue et sommable sur I car $1 - \dfrac{|z|}{\rho} > 0$.

3) Théorème de sommation terme à terme

L'intervalle d'intégration est une nouvelle fois quelconque mais le théorème s'énonce uniquement en terme de séries de fonctions.

Théorème de sommation terme à terme.
Soit I un intervalle quelconque et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que :

- les u_n sont continues par morceaux et sommables sur I ;
- la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur I et sa somme S est continue par morceaux sur I ;
- la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_I |u_n(x)|\, \mathrm{d}x$ est convergente.

Alors la fonction S est sommable sur I et $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(x)\, \mathrm{d}x.$

Exemple 8 : on peut reprendre l'exercice précédent. On fixe z tel que $|z| < R$ et on pose $u_n(x) = \dfrac{a_n}{n!}\, (zx)^n\, e^{-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$. Les u_n sont clairement continues et sommables sur $I = [0, +\infty[$ et la somme de la série est l'application $x \longmapsto F(zx)$, qui est continue sur I. Comme

$$\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\, \mathrm{d}x = |a_n\, z^n|$$

est le terme général d'une série convergente, le théorème de sommation terme à terme s'applique et on retrouve l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(zx)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = f(z).$

4) Intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème de continuité.
Soit A un partie d'un evn de dimension finie, I un intervalle quelconque et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ tels que :

- pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- il existe une application $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et sommable sur I telle que

$$\forall\,(x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $F :\ x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A :

$$\forall a \in A,\ \lim_{x \longrightarrow a}\left(\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_I \left(\lim_{x \longrightarrow a} f(x,t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 9 : la fonction $F :\ (x,y) \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx+t^2y)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème de dérivabilité.
Soient A et I deux intervalles quelconques et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ tels que :

- pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et sommable sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une application $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et sommable sur I telle que

$$\forall\,(x,t) \in A \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$$

Alors la fonction $F :\ x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe C^1 sur A avec :

$$\forall a \in A,\ F'(a) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 10 : la fonction $\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. En effet, notons

$$\begin{cases} f(x,t) = e^{-t}t^{x-1} & \text{pour } t>0 \text{ et } x>0, \\ \Gamma_1(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t & \text{pour tout } x>0 \\ \Gamma_2(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t & \text{pour tout } x>0 \end{cases}$$

Pour $A = [a,+\infty[\subset]0,+\infty[$ et $I =]0,1]$, le théorème s'applique avec la domination :

$$\forall t \in]0,1],\ \forall x \geq a,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq |\ln t|\,t^{a-1}e^{-t}.$$

On en déduit que Γ_1 est de classe C^1 sur chaque $[a,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$, avec

$$\forall x>0,\ \Gamma_1'(x) = \int_0^1 \ln t\, e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

De même, le théorème s'applique pour $A =]0, b] \subset]0, +\infty[$ et $I = [1, +\infty[$ avec la domination :

$$\forall t \geq 1,\ \forall x \in]0, b],\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq |\ln t|\, t^{b-1} e^{-t}.$$

et Γ_2 est de classe C^1 sur chaque $]0, b]$, donc sur $]0, +\infty[$, avec

$$\forall x > 0,\ \Gamma_2'(x) = \int_1^{+\infty} \ln t\, e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t.$$

La fonction Γ est ainsi de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, avec

$$\forall x > 0,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln t\, e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t.$$

En utilisant les dominations

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0, 1],\ \forall x \geq a,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq |\ln t|^k\, t^{a-1} e^{-t}$$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \geq 1,\ \forall x \in]0, b],\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq |\ln t|^k\, t^{b-1} e^{-t}$$

une récurrence élémentaire montre ensuite que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ avec

$$\forall\, k \geq 0,\ \forall x > 0,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\ e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t.$$

Théorèmes d'échange de sommes infinies (Fubini discret)

Si $(u_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ est une famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}^2$ telle que :

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q\geq 0} u_{p,q}$ est absolument convergente ;
- la série $\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\right)$ est convergente ;

alors $\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)$, toutes les séries intervenant dans cette égalité étant absolument convergentes.

Exemple 11 : soit $f:\ z \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$. Fixons z_0 complexe tel que $|z_0| < R$. On a alors, pour h complexe tel que $|h| < R - |z_0|$:

$$f(z_0+h) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p (z_0+h)^p = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{p} a_p \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} z_0^{p-q}h^q\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\alpha_{p,q}\right)$$

où nous avons posé $\alpha_{p,q} = a_p \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} z_0^{p-q}h^q$ si $0 \leq q \leq p$ et $\alpha_{p,q} = 0$ sinon. Le théorème de Fubini s'applique alors facilement :

- pour $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q\geq 0}\alpha_{p,q}$ est absolument convergente (c'est en fait une somme finie) ;
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{q=0}^{+\infty}|\alpha_{p,q}| = \sum_{q=0}^{p}|a_p| \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} |z_0|^{p-q}|h|^q = |a_p|\left(|z_0|+|h|\right)^p$ et ceci est le terme général d'une série convergente, puisque $|z_0|+|h| < R$.

Nous pouvons donc écrire :

$$f(z_0+h) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\alpha_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=q}^{+\infty} a_p \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} z_0^{p-q}h^q\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\Bigg(\underbrace{\sum_{p=q}^{+\infty} a_p \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} z_0^{p-q}}_{b_q}\Bigg)h^q$$

ce qui prouve que f est développable en série entière au voisinage de z_0, et que le développement obtenu est valide sur le disque de centre z_0 et de rayon $R-|z_0|$ (qui est le rayon maximal permettant au disque de rester contenu dans le disque de définition de f). On remarquera que l'on retrouve la série de Taylor (formelle) de f en z_0, puisque :

$$\forall q \in \mathbb{N},\ b_q = \frac{f^{(q)}(z_0)}{q!}.$$

Exemple 12 : soit $f:\ z \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$. L'application $g:\ z \longmapsto f(z+z^2)$ est alors définie et développable en série entière au voisinage de 0. En effet, notons r la racine strictement positive de l'équation $X + X^2 = R$ (par convention $r = +\infty$ si $R = +\infty$). Fixons alors z tel que $|z| < r$. Nous avons :

$$g(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p (1+z)^p = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{p} a_p \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} z^{p+n}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=p}^{2p} a_p \begin{pmatrix} p \\ q-p \end{pmatrix} z^q\right)$$

Comme dans l'exemple précédent, nous avons :

- pour $p \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_{q=p}^{2p} \left| a_p \binom{p}{q-p} z^q \right|$ est convergente (c'est une somme finie) ;
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{q=p}^{2p} \left| a_p \binom{p}{q-p} z^q \right| = |a_p|\,|z|^p\,(1+|z|)^p$. Comme $|z|(1+|z|) < r(1+r) = R$, cette quantité est le terme général d'une série convergente.

Nous pouvons donc écrire, en notant $\lceil\ \rceil$ la fonction "partie entière supérieure" :

$$g(z) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ p\le q\le 2p}} a_p \binom{p}{q-p} \right) z^q = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=\lceil q/2\rceil}^{q} a_p \binom{p}{q-p} \right) z^q$$

Théorèmes d'échange intégrale - intégrale (Fubini continu)

1) Intégrale d'une fonction continue sur un pavé

Si $f:\ [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, alors :

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$

et cette valeur commune est, par définition, l'intégrale double de f sur $[a,b]\times[c,d]$, notée $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2) Intégrale d'une fonction continue sur un produit d'intervalles

Soient I et J deux intervalles et $f:\ I\times J \longrightarrow \mathbb{C}$ continue.

- si f est à valeurs réelles positives, on dit que f est sommable sur $I\times J$ s'il existe un réel M tel que :

$$\forall [a,b]\times[c,d] \subset I\times J,\ \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq M$$

  Si f est sommable sur $I\times J$, on définit alors :

$$\iint_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sup_{\substack{[a,b]\subset I\\ [c,d]\subset J}} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- si f est à valeurs réelles, on dit que f est sommable sur $I\times J$ si f^+ et f^- le sont et on pose alors :

$$\iint_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{I\times J} f^+(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{I\times J} f^-(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- si f est à valeurs complexes, on dit que f est sommable sur $I\times J$ si $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont, ce qui revient à dire que $|f|$ est sommable sur $I\times J$, et on pose alors :

$$\iint_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{I\times J} Re(f(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint_{I\times J} Im(f(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Soient I et J deux intervalles et $f:\ I\times J \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et sommable sur $I\times J$. Si l'on a :

- pour tout $x\in I$, la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est sommable sur J ;
- la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y$ est continue par morceaux et sommable sur I ;

alors $\displaystyle\int_I \left(\int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \iint_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3) Théorème de Fubini

Soient I et J deux intervalles et $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Si l'on a :

- f est continue et sommable sur $I \times J$;
- pour tout $x \in I$, la fonction $y \longmapsto f(x,y)$ est sommable sur J ;
- la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y$ est continue par morceaux et sommable sur I ;
- pour tout $y \in J$, la fonction $x \longmapsto f(x,y)$ est sommable sur I ;
- la fonction $y \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x$ est continue par morceaux et sommable sur J ;

alors $\displaystyle\int_I \left(\int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_J \left(\int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y.$