Algèbre

Martin Andrieux, Nathan Maillet

1 Groupes

Définition

Soit $\mathsf{H} \subset \mathsf{G}$, H est un *sous-groupe* de G si :

- $\mathsf{H} \neq \emptyset$
- H est stable par $\cdot$
- $1 \in \mathsf{H}$
- $\forall a \in \mathsf{H},\ a^{-1} \in \mathsf{H}$

Théorèmes

- Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$
- Tout groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$
- L'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe

Définition

Pour $\mathsf{A} \subset \mathsf{G}$, il existe un plus petit sous-groupe de G contenant A, c'est le sous-groupe *engendré* par A, noté $\langle \mathsf{A} \rangle$.

Théorème de Lagrange

Le cardinal de tout sous-groupe divise le cardinal du groupe.

En particulier, pour x dans G, le cardinal de $\langle x \rangle$, aussi appelé *ordre* de x, divise le cardinal de G.

2 Anneaux

Définition

Soit $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$, B est un *sous-anneau* de A si :

- $\mathsf{B} \neq \emptyset$
- B est stable par $\cdot$ et $+$
- $1 \in \mathsf{B}$

Définition

Un *corps* est un anneau dans lequel tous les éléments non nuls sont inversibles.
Soit A un anneau, on note A^* l'ensemble des éléments inversibles de A. A^* est un groupe pour la loi $\cdot$.

Définition

Soit A un anneau, on dit que x et y sont des *diviseurs de* 0 si $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $xy = 0$.
Si A ne possède pas de diviseur de 0, il est dit *intègre*.

3 Arithmétique

Définition

Soit $I \subset \mathsf{A}$ avec A un anneau. On dit que I est un *idéal à gauche* (resp *à droite*), si I est un groupe non vide et pour tout x de I et pour tout a de A, $ax \in I$ (resp $xa \in I$). Si I est un idéal à gauche et à droite, on dit qu'il est *bilatère*.

Définition

Soit A un anneau. Il est dit *principal* si ses idéaux sont de la forme aA avec $a \in A$. Ces idéaux sont appelés *idéaux principaux*

Lemme chinois

Si $a \wedge b = 1$, alors

$$\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/ab\mathbb{Z}$$

Lemme de Gauss

Si $a, b, c \in A$, on a :

$$\begin{cases} a|bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \implies a|c$$

4 Espaces vectoriels

Somme directe de sous-espaces

Une somme de sous-espaces $(F_i)_1^k$ est directe si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 0 \implies \forall i,\ x_i = 0$$

Dualité

L'ensemble des formes linéaires sur E, noté $\mathcal{L}(E, K)$ ou E^* est l'*espace dual* de E.
On note e_i^* l'application qui à un vecteur x de E associe sa i-ième coordonnée dans la base $(e_i)_1^n$
Ainsi, pour tout x de E :

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i$$

5 Déterminants

Matrice de Vandermonde

Le déterminant d'une matrice de Vandermonde est de la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Il est égal à $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i)$.

Formule de Cramer

On s'interesse aux solution de l'équation $AX = B$ avec A dans $GL_n(\mathbb{R})$. Les solutions sont de la forme $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec :

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\det A}$$