

Électromagnétisme

Martin ANDRIEUX

1 Analyse vectorielle

Circulation

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{M}$$

$$\mathcal{C} = \oint \vec{E}(M) \cdot d\vec{M}$$

Flux

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

Théorème de Gauss

Dans un champ électrique :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Énergie

Pour n charges ponctuelles :

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i v_i$$

Pour une distribution continue :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \epsilon_0 \vec{E}^2(M) d\tau$$

Théorème d'Ostrogradski

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div}(\vec{E}) d\tau$$

Équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

En l'absence de charges :

$$\Delta V = 0$$

Théorème de Stokes

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Équivalence

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \iff \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \iff \text{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

2 Dipôle électrostatique

Moment dipolaire

$$\vec{p} = q \overrightarrow{NP}$$

Potentiel loin d'un dipôle

$$V(M) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

D'où :

$$E_r = \frac{2p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ et } E_\theta = \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Force exercée sur un dipôle

Force :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{E}(M) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{E}$$

Moment pour un champ variant peu :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{p} \wedge \vec{E}(M)$$

Énergie Potentielle

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

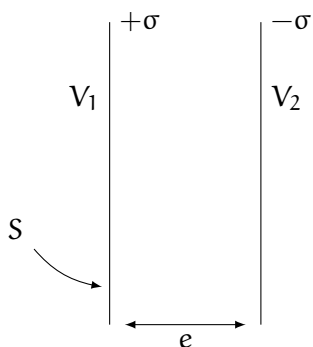
3 Conducteurs

Équilibre

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ donc } V = 0$$

Or, $\text{div } \vec{E} = 0$ donc $\rho = 0$. La densité volumique de charge est nulle dans tout le volume du conducteur : la charge se localise uniquement sur la surface. D'où :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$



Capacité

La capacité C est telle que :

$$Q = C \cdot (V1 - V2)$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Densité volumique de courant

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m \vec{v}$$

Dans les métaux :

$$\vec{j} = -ne\vec{v}$$

$$i = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Conservation de la charge

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La démonstration de ce résultat est à connaître, en voici les grandes lignes :

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$q(t) = \iiint_{(V)} \rho(M, t) d\tau$$

Ensuite, dériver q, permuter la dérivation et la sommation, appliquer Ostrogradski. L'égalité des intégrales entraîne l'égalité des grandeurs sommées.

Loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Avec σ la *conductivité* du milieu, aussi notée γ .

Loi de Joule locale

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Résistance d'un conducteur cylindrique

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

Cette expression se retrouve rapidement avec un raisonnement purement intuitif du type « Plus le fil est long plus la résistance est grande ».

4 Magnétostatique

Force de Lorentz

$$\vec{f} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

\vec{B} est à flux conservatif

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Or d'après le théorème d'Ostrogradski,

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{B} d\tau = 0$$

D'où :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Théorème d'Ampère

$$\oint_{(C)} \vec{B}(\mathcal{M}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Discontinuité

La discontinuité d'un champ de part et d'autre d'une surface est en $\mu_0 \vec{j}_s$. Cela est à rapprocher du $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ en électrostatique.

Champ dans un solénoïde

$$B_{\text{int}} = \mu_0 n I \cdot \vec{u}_z$$

5 Dipôle magnétique

Moment dipolaire magnétique

$$\vec{\mathcal{M}} = I S \vec{n}$$

Champ créé par un dipôle

$$\vec{B}(\mathcal{M}) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$$

Cette expression est totalement analogue à celle obtenue pour le dipôle électrostatique, il suffit en effet de remplacer p par \mathcal{M} et $\frac{1}{\epsilon_0}$ par μ_0 .

Moment des forces de Laplace

$$\vec{\Gamma}(\mathcal{M}) = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}(\mathcal{M})$$

Énergie Potentielle

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

Flux du champ magnétique

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = L_1 i_1 + M_{12} i_2$$

Avec L les coefficients d'*auto-induction* et M les coefficients d'*induction mutuelle*. L est bien sûr positif. On peut montrer que $M_{ij} = M_{ji}$.

Inductance propre

Lorsque que l'on connaît \vec{B} , il est possible de calculer le flux du champ, et donc l'inductance propre du circuit avec $\Phi = \Lambda i$.

Énergie magnétique

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \frac{1}{2} M_{12} i_1 i_2$$

$$U_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$