

# Maths MPSI

Maillet Nathan

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Complexes et Trigonométrie</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Ensembles</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Equations différentielles</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Continuité</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Suites</b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>Propriétés de <math>\mathbb{R}</math> en tout genre</b>	<b>4</b>
<b>7</b>	<b>Dérivabilité</b>	<b>4</b>
<b>8</b>	<b>Lois de compositions internes</b>	<b>5</b>
<b>9</b>	<b>Arithmétique</b>	<b>5</b>
<b>10</b>	<b>Polynômes</b>	<b>5</b>
<b>11</b>	<b>Intégration</b>	<b>6</b>
<b>12</b>	<b>Développements limités</b>	<b>7</b>
<b>13</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>7</b>
<b>14</b>	<b>Matrices</b>	<b>8</b>
<b>15</b>	<b>Groupes symétriques et déterminants</b>	<b>9</b>
<b>16</b>	<b>Formes linéaires et hyperplans</b>	<b>10</b>
<b>17</b>	<b>Séries</b>	<b>10</b>
<b>18</b>	<b>Espaces euclidiens</b>	<b>11</b>
<b>19</b>	<b>Convexité</b>	<b>13</b>
<b>20</b>	<b>Probabilités</b>	<b>13</b>

# 1 Complexes et Trigonométrie

- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$  et  $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
- $\tan(a + \frac{\pi}{2}) = -\cot(a)$
- $\cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}$
- $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$
- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
- $ch^2 - sh^2 = 1$
- $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos'(x)$
- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- **Propriété** :  $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = (\text{signe de } x) * \frac{\pi}{2}$

# 2 Ensembles

- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- Partition : recouvrement,  $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, A_i \neq \emptyset$
- Relation binaire, réflexive, transitive, symétrique, anti-symétrique, d'équivalence, d'ordre (totale ou partielle)
- **Propriété** : Soit  $A \neq \emptyset, A \subset \mathbb{R}$  majorée, A possède une borne supérieure

# 3 Equations différentielles

## Premier ordre

$$y' + \alpha(x)y = a \implies y = \lambda e^{-\int \alpha(x)dx} + y_0$$

## Deuxième ordre

$$\Delta > 0 : y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

$$\Delta = 0 : y = e^{rx}(\lambda + \mu x)$$

$$\Delta < 0 : y = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \text{ avec } r = \alpha + i\beta$$

## Raccordements :

**Théorème** : Soit  $f$  une fonction continue en  $a$  et  $f' \xrightarrow{a} l$ , alors  $f'(a) = l$  et  $f$  est de classe  $C^1$  en  $a$

## 4 Continuité

**Théorème** Soit  $f$  une fonction continue en  $a$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{+\infty} a$  alors  $f(u_n) \xrightarrow{+\infty} f(a)$

**Théorème** TVI : Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  alors  $f(I)$  est un intervalle

**Théorème** Soit  $I$  un intervalle réel,  $f$  continue et strictement monotone sur  $I$  alors  $f$  réalise une bijection de  $I$  vers  $f(I)$ .  $f^{-1}$  existe et va de  $f(I)$  vers  $I$ , possède la même monotonie et si  $f \in \mathcal{D}(I, f(I))$  et  $0 \notin f'(I)$  alors  $f^{-1} \in \mathcal{D}(f(I), I)$  et  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

- **Propriété** :  $f$  continue sur implique  $f(\text{fermé}) = \text{fermé}$  et  $f(\text{ouvert}) = \text{ouvert}$ . De plus, si  $f$  est strictement monotone,  $f(\text{semi-ouvert}) = \text{semi-ouvert}$
- $f$  est Lipschitzienne de rapport  $k$  si  $\exists k > 0 / \forall (x, x') \in I^2, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$
- Si  $k < 1$ ,  $f$  est dite contractante
- Uniforme continuité :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, x') \in \mathcal{D}_f,$

$$|x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

- **Propriété** : L'uniforme continuité implique la continuité

**Théorème** Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue

## 5 Suites

**Théorème** Suites adjacentes : Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit croissante et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissantes et  $v_n - u_n \xrightarrow{+\infty} 0$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent et ce vers la même limite

**Théorème** Segments emboîtés : Soit  $S_n = [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} \subset S_n, b_n - a_n \xrightarrow{+\infty} 0 \implies \bigcap_{n=1}^{+\infty} S_n = \alpha$

- **Propriété** : Si  $u_n \xrightarrow{+\infty} l$  alors toutes les sous-suites de  $u_n$  aussi.

**Théorème** Bolzano-Weierstrass : De toute suite de réels bornées on peut extraire une sous-suite convergente

**Théorème** Cesàro :  $u_n \xrightarrow{+\infty} l, l \in \mathbb{R} \implies \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{+\infty} l$

**Théorème** "Cesàro multiplicatif" : Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{+\infty} \lambda$  alors  $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{+\infty} \lambda$

- **Propriété** : Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites dans  $\mathbb{R}^{+*}$ , si  $\exists p / \forall n \geq p, \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$  alors  $\exists \lambda = \frac{a_p}{b_p} > 0 / \forall n \geq p, a_n \leq \lambda b_n$
- $(\frac{n}{n+1})^n \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{e}$
- **Propriété** : Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_{n+1} = f(u_n), u_0 \in I, f(I) \subset I$  et  $f$  soit croissante sur  $I$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et sa monotonie est donnée suivant  $u_1 \geq / \leq u_0$
- **Propriété** : Soit  $I$  un intervalle stable par  $f$ , continue,  $u_{n+1} = f(u_n)$ , et  $u_n \xrightarrow{+\infty} c$  alors  $c$  est tel que  $f(c) = c$
- **Propriété** : Soit  $I$  un intervalle stable par  $f$ , continue décroissante,  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $u_0 \in I$  alors  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont de monotonie opposée

## Suites récurrentes linéaires d'ordres 2

$$\Delta > 0 : u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

$$\Delta = 0 : u_n = r^n(\alpha n + \beta)$$

$$\Delta < 0 : u_n = \rho^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)) \text{ avec } r = \rho e^{i\theta}$$

## 6 Propriétés de $\mathbb{R}$ en tout genre

**Théorème** Cauchy-Schwarz :  $\forall (x_i, y_i) \in (\mathbb{R}^2)^n, \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$

### Topologie

- $A \subset E$  est dense dans  $E$  si et seulement si

$$\forall B(a, r) = \{x \in E / d(x, a) < r\}, \exists \alpha \in A / \alpha \in B(a, r)$$

- $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$
- $A \subset E$  est ouvert si  $\forall a \in A, \exists r > 0 / B(a, r) \subset A$
- Un ensemble est fermé si son complémentaire est ouvert
- **Propriété** : Soit  $O_j$  des ouverts,  $\bigcup_j O_j$  est ouvert
- **Propriété** : Soit  $F_j$  des fermés,  $\bigcap_j F_j$  est fermé
- **Propriété** : Soit  $(O_j)_{j:1 \rightarrow s}$  des ouverts,  $\bigcap_{j=1}^s O_j$  est ouvert
- **Propriété** : Soit  $(F_j)_{j:1 \rightarrow s}$  des fermés,  $\bigcup_{j=1}^s F_j$  est fermé

## 7 Dérivabilité

- Tangente en  $x_0$  :  $T_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Si  $f \in \mathcal{D}(I, f(I))$  et  $G \in \mathcal{D}(J, g(J))$  avec  $f(I) \subset J$  alors  $g \circ f \in \mathcal{D}(I, g(J))$  et  $(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$
- Leibniz :  $\forall (f, g) \in C^n(I, \mathbb{R}), (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
- Taylor-Lagrange ordre 2 :

$$\forall f \in C^1[a, b], f \in \mathcal{D}^2[a, b], \exists c \in ]a, b[ / f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2} f''(c)$$

**Théorème** Rolle :

$$f \in C^0[a, b], f \in \mathcal{D}[a, b], f(a) = f(b) \implies \exists c \in ]a, b[ / f'(c) = 0$$

**Théorème** Accroissements finis :

$$\text{Cas d'égalité : } f \in C^0[a, b], f \in \mathcal{D}[a, b] \implies \exists c \in ]a, b[ / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{Cas d'inégalité : } f \in C^0([a, b], \mathbb{C}), f \in \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{C}) \text{ et} \\ \exists M = \sup(|f'|) \implies f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

## 8 Lois de compositions internes

**Groupe**  $(G, *)$  est un groupe si  $*$  est une loi de composition interne associative avec un neutre et que  $\forall a \in G, \exists a^- \in G / a * a^- = a^- * a = e$

**Théorème** Caractérisation des sous-groupes : Soit  $(G, *)$  un groupe,  $H \subset G, H \neq \emptyset, (H, *)$  est un groupe si  $\forall (a, b) \in H^2, a * b^- \in H$

- Le produit cartésien de 2 groupes est 1 groupe
- $(G, *)$  est un groupe abélien si  $*$  est commutatif et que  $(G, *)$  est un groupe

**Théorème** Les seuls sous groupes de  $\mathbb{Z}$  sont de la forme  $a\mathbb{Z}$

**Anneaux** Soit  $(A, +)$  un groupe abélien, c'est un anneau pour la loi  $*$  si  $*$  est une loi associative avec un neutre et que  $\forall (a, b, c) \in A^3, a * (b + c) = a * b + a * c$  et  $(b + c) * a = b * a + c * a$

**Théorème** Caractérisation des sous-anneaux : Soit  $(A, +, *)$  un anneau,  $B \subset A, B \neq \emptyset, (B, +, *)$  est un anneau si  $\forall (a, b) \in B^2, a + b^- \in B, a * b \in B$  et  $1_A \in B$

- Le centre d'un anneau est l'ensemble des éléments de cet anneau qui commutent avec tous les autres éléments de l'anneau
- Un anneau est dit intègre si il n'a pas de diviseurs de 0 et que  $*$  est commutatif

**Corps** Soit  $(K, +, *)$  un anneau et  $\forall x \in K, x \neq 0$  alors  $\exists x^- \in K / x * x^- = x^- * x = 1$

**Théorème** Caractérisation des sous-corps : Soit  $(K, +, *)$  un corps,  $L \subset K, L \neq \emptyset, (L, +, *)$  est un corps si  $\forall (a, b) \in L^2, a - b \in L, a * b \in L$  et  $\forall a \in L, a \neq 0, \exists a^- \in L / a * a^- = a^- * a = 1$

## 9 Arithmétique

- La division conserve l'intégralité des diviseurs donc aussi le pgcd

Soient  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  :

**Théorème** Bézout :  $a \wedge b = 1 \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$

**Théorème** Si  $a \wedge b = a \wedge c = 1$ , alors  $a \wedge bc = 1$

**Théorème**  $b|a, c|a$  et  $b \wedge c = 1 \implies bc|a$

- **Propriété** :  $a \wedge b_i = 1, 1 \leq i \leq n \implies a \wedge (\prod_{i=1}^n b_i) = 1$

- **Propriété** :  $(ac) \wedge (bc) = |c|(a \wedge b)$

**Théorème** Gauss :  $a \wedge b = 1$  et  $a|bc \implies a|c$

- Relation de Bézout :  $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, ab = (a \wedge b)(a \vee b)$

**Théorème** Petit théorème de Fermat :  $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{P}, a^p \equiv a[p]$  et si  $a \wedge p = 1, a^{p-1} \equiv 1[p]$

## 10 Polynômes

**Théorème** Taylor :  $\forall a, P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$

**Théorème** Bézout :  $\forall A, B \in \mathbb{K}^2[X], A \wedge B = 1 \iff \exists (U, V) \in \mathbb{K}^2[X] / AU + BV = 1$ . De plus,  $\exists!(U_0, V_0) \in \mathbb{K}^2[X] / AU_0 + BV_0 = 1, d^\circ V_0 < d^\circ A$  et  $d^\circ U_0 < d^\circ B$

- Soit  $\alpha_i$  les racines d'un polynôme  $P = \sum_{k=0}^{d^o P} a_k X^k$ . On a :

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ et } \sigma_n = \prod_{i=1}^n \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

- Si  $\frac{A}{B} = \frac{A}{(X-\alpha)C} = \frac{\beta}{X-\alpha} + \dots$  alors  $\beta = \frac{A}{B'}(\alpha)$

## 11 Intégration

- $J_n = \int \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$  : IPP sur  $J_{n-1}$
- $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \Delta < 0$  : forme canonique puis arctan
- Protocole (changements de variables) avec des puissances de sin et cos :

$$x \rightarrow -x \text{ (dx compris) : } u = \cos(x)$$

$$x \rightarrow \pi - x : u = \sin(x)$$

$$\text{Si les deux marchent : } u = \cos(2x)$$

**Théorème** Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée sur ce segment

- $f \in \varepsilon([a, b], \mathbb{R}) \int_a^b f = \sum_{j=0}^{p-1} (c_{j+1} - c_j) \lambda_j$  avec  $\lambda_j$  la valeur de  $f$  sur  $]c_j, c_{j+1}[$
- $F_1 = \left\{ \int_a^b \varphi / \varphi \in \varepsilon([a, b], \mathbb{R}), \varphi \leq f \right\}, F_2 = \left\{ \int_a^b \psi / \psi \in \varepsilon([a, b], \mathbb{R}), \psi \geq f \right\}$

$$\forall f \in C_{pm}^0 \int_a^b f = \sup(F_1) = \inf(F_2)$$

- **Propriété** :  $\forall (f, g) \in (C_{pm}^0[a, b])^2, b > a, f \leq g \implies \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

**Théorème**  $b > a, f \in C^0, \forall t f(t) \geq 0$  et  $\exists c \in [a, b] / f(c) > 0 \implies \int_a^b f(t) dt > 0$

**Théorème**  $\int_a^b f(t) dt = 0, f \in C^0, \forall t f(t) \geq 0 \implies f = 0_{[a, b]}$

**Théorème** Cauchy-Schwarz :  $a < b, (f, g) \in (C_{pm}^0)^2 \implies (\int_a^b (fg)(t) dt)^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \int_a^b g^2(t) dt$

**Théorème** Valeur moyenne :  $f \in C_{pm}^0[a, b], a < b \implies \int_a^b f(t) dt = (b-a)\mu, \mu$  la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$

**Théorème** Théorème fondamental de l'analyse : Soit  $f \in C^0, \forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est continue et dérivable sur  $I$  et  $F' = f$

**Théorème** Somme de Riemann :

$$\forall f \in C^0, \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \xrightarrow{+\infty} \int_a^b f(t) dt$$

**Théorème** Taylor avec reste intégrale :

$$\forall f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{R}), f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

## 12 Développements limités

**Théorème** Taylor-Young :  $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(x-a)^n$

**Théorème**  $\int f = F(0) + P_{n+1}(x) + o(x^{n+1})$

### Développements limités usuels en 0

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + o(x^n)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + o(x^n)$
- $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$
- $\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + o(x^3)$
- $\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$
- $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
- $\text{argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
- $\text{argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

## 13 Espaces vectoriels

Soit  $\mathbb{K}$  un corps,  $(E, +)$  un groupe abélien stable par combinaison linéaire avec la loi  $*$  et tel que  $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 (\alpha + \beta) * x = (\alpha * x) + (\beta * x), \alpha * (x + y) = (\alpha * x) + (\alpha * y), \alpha * (\beta * x) = (\alpha\beta) * x$  et  $1 * x = x$ , alors  $E$  est un espace vectoriel.

**Théorème** Caractérisation des sous espaces vectoriels : Soit  $(E, +, *)$  un espace vectoriel,  $F \subset E, F \neq \emptyset, (F, +, *)$  est un espace vectoriel si  $\forall (\vec{f}_1, \vec{f}_2) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} \lambda \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \in F$

- La somme et l'intersection de 2 sous espaces vectoriel est un sous espace vectoriel
- **Propriété** :  $S = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$  est lié si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres

**Théorème** Base incomplète : Soit une famille libre  $L_0$  et une génératrice  $G$  tels que  $L_0 \subset G$  alors  $\exists (\vec{g}_s, \vec{g}_r, \dots) \in G \setminus L_0 / L_0 \cup \{\vec{g}_s, \vec{g}_r, \dots\}$  soit une base

**Théorème** Échange : Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension finit,  $G$  une famille génératrice et  $L$  libre, alors on peut ajouter des vecteurs de  $G$  a  $L$  pour avoir une base de  $E$

**Théorème** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $E_1$  un sous espace vectoriel de dimension  $p$ , alors  $E_1$  a de supplémentaires de dimension  $n - p$  dans  $E$

**Théorème** Formule de Grassmann :  $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$

**Théorème** On ne change pas le rang d'un système de vecteur en remplaçant les dits vecteurs par une combinaison des autres avec un coefficient non nul

- Structure d'algèbre :  $E$  est un algèbre si  $(E, +, *_e)$  est un espace vectoriel,  $(E, +, *_i)$  un anneau et si  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E, \lambda(\vec{u} \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \vec{v} = \vec{u}(\lambda \vec{v})$

- $\forall f \in L(E, F), \forall A$  sous espace vectoriel de  $E, f(A)$  est un sous espace vectoriel de  $F$

**Théorème** L'image d'une famille génératrice par une application linéaire est génératrice de l'image

**Théorème** Pour tout  $f \in L(E, F)$  injective, alors l'image d'une famille libre est libre

**Théorème** Pour définir une application linéaire il suffit de définir l'image d'une base

**Théorème** Un espace  $E$  est de dimension finie  $n$  si et seulement si il existe un isomorphisme d'espace vectoriel de  $E$  vers  $\mathbb{K}^n$

- Les isomorphismes conservent les dimensions

**Théorème** En dimension finie, tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image

**Théorème** Théorème du rang : Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n, f \in L(E, F)$  alors  $Im(f) = f(E)$  et  $\dim Im(f) = rg(f)$ . De plus,  $rg(f) + \dim Ker(f) = n$

Conséquences :

- $f$  est injective si et seulement si  $rg(f) = n$
- SI  $\dim E = \dim F$  alors :

$$rg(f) = n \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

**Projecteurs et symétries**  $p \in L(E)$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ p = p$   
 $p$  projette sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  :  $p$  se comporte comme l'identité sur  $E_1$  et est nul sur  $E_2$

**Théorème** Si  $p$  est un projecteur, alors  $E = Ker(p) + Im(p)$

- Si la somme de projecteurs forme l'identité et que leur composition est nulle, les projecteurs sont dits associés

$s \in L(E)$  est une symétrie si et seulement si  $s \circ s = Id$ .

$s$  est une symétrie vectorielle par rapport à  $E_1$  parallèlement à  $E_2$  :  $s$  se comporte comme l'identité sur  $E_1$  et - l'identité sur  $E_2$

- **Propriété** :  $s = 2p - Id$

## 14 Matrices

- Produit matriciel :

$$A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}), A \in M_{m,n}, B \in M_{n,q} \implies AB = (\gamma_{i,j}) \text{ avec } \gamma_{i,j} = \sum_{l=1}^n a_{i,l} b_{l,j}$$

- **Propriété** :  $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), B \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$
- **Propriété** :  $\forall (A, B) \in M_n^2(\mathbb{R}), \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $E_{i,j} E_{k,l} = \delta_j^k E_{i,l}$
- Soit :

$$\begin{aligned} \Phi : L(E, F) &\rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto Mat(f, (\vec{e}_j)_1^m, (\vec{b}_i)_1^n) \end{aligned}$$

$\Phi$  est un isomorphisme d'espace vectoriel et  $\dim_{\mathbb{R}}(M_{m,n}(\mathbb{R})) = m * n$  donc :

$$\dim_{\mathbb{R}} L(E, F) = \dim_{\mathbb{R}} E \dim_{\mathbb{R}} F$$



**Théorème**  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est inversible si et seulement si  $f$  est un automorphisme

- **Propriété** :  $[P_{B \rightarrow B'}]^{-1} = P_{B' \rightarrow B}$

**Théorème** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,

$$\forall f \in L(E), \text{tr}(\text{Mat}(f, \vec{a}_j)) = \text{tr}(\text{Mat}(f, \vec{a}_j))$$

- **Propriété** : La trace d'un projecteur est son rang
- $B$  est équivalente à  $A$  si et seulement si  $\exists (R, S) \in GL_m \times GL_n / B = RAS$
- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire (elles ont donc le même rang)
- **Propriété** :  $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$
- $B$  est semblable à  $A$  si et seulement si  $\exists P \in GL_n / A = P^{-1}BP$

**Valeurs propres**

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \lambda \vec{x}, \vec{x} \neq \vec{0} \\ \iff AX - \lambda X &= O_n \\ \iff \vec{x} &\in \text{Ker}(f - \lambda Id) \\ \iff f - \lambda Id &\text{est non injective} \\ \iff \det(A - \lambda I_n) &= 0 \end{aligned}$$

**Théorème** Si une matrice est de rang  $r$  alors il existe au moins une matrice extraite de taille  $r \times r$  inversible. Réciproquement, si on a une matrice  $r \times r$  inversible et pas de matrice  $(r+1) \times (r+1)$  alors la matrice globale est de rang  $r$ .

## 15 Groupes symétriques et déterminants

**Groupes symétriques**

- Groupe symétrique  $S_n$  : ensemble des bijections de  $n$  éléments de  $E$  vers  $E$
- $\forall f \in S_n, f = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_s$  avec  $(t_i)$  des transpositions
- cycle : permutation avec une seule orbite, les autres éléments étant inchangés
- $\forall f \in S, f$  peut se décomposer comme cycle de support disjoint
- Soit  $m$  le nombre d'orbites,  $\sigma(f) = (-1)^{n-m}$
- $\forall f \in S, f = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_r \implies \sigma(f) = (-1)^r$

**Déterminants**

- Une application  $n$ -linéaire est symétrique si l'ordre des vecteurs ne change pas le résultat :  $\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi(\vec{b}, \vec{a})$
- Une application  $n$ -linéaire est anti-symétrique si l'ordre des vecteurs change le signe du résultat :  $\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = -\varphi(\vec{b}, \vec{a})$
- Soit  $\varphi$  une application  $n$ -linéaire anti-symétrique,  $p$  permutations des variables donne :  $\varphi(\vec{x}_{p(1)}, \dots, \vec{x}_{p(n)}) = \sigma(p)\varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$

- Une application est dite n-linéaire alternée si et seulement si elle est n-linéaire et

$$\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n / \exists i \neq j, \vec{x}_i = \vec{x}_j \implies \varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = 0$$

**Théorème** Une fonction est alternée si et seulement si elle est antisymétrique

- Soit  $\vec{x}_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} \vec{e}_i$ ,

$$g : E^n \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \mapsto \sum_{p \in S_n} \sigma(p) \alpha_{p(1),1} \cdots \alpha_{p(n),n}$$

$$\text{on appelle } g = \det(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) \alpha_{p(1),1} \cdots \alpha_{p(n),n}$$

- $g$  est une forme n-linéaire anti-symétrique (donc alternée) :

$$(\vec{x}_i)_1^n \text{ sont liés} \iff \det(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = 0$$

- $\det(A) = \det({}^t A)$
- **Propriété** :  $\forall (A, B) \in M_n^2(\mathbb{R}) \det(AB) = \det(A) \det(B)$  donc  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\forall A \in GL_n, A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t B$  avec  $B$  la matrice des cofacteurs

## 16 Formes linéaires et hyperplans

**Théorème**  $H$  est un hyperplan  $\iff \exists f \neq \omega \in E^* / \text{Ker}(f) = H$

- **Propriété** :  $(u, v) \in (E^*)^2, H = \text{Ker}(u), H' = \text{Ker}(v) \implies H = H' \iff u = \lambda v$
- **Propriété** :  $\dim_{\mathbb{K}}(\cap_{i=1}^m H_i) \geq n - m$

**Théorème**  $H$  est un hyperplan de  $E, \dim_{\mathbb{K}} E = n$  si et seulement si

$$\exists (a_j)_1^n \neq (0)_1^n / \vec{x} \in H \iff \sum_{j=1}^N a_j x_j = 0$$

## 17 Séries

- $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x)$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$
- $\sum u_k \rightarrow l \implies \lim u_k = 0$
- Si  $u_k$  ne tend pas vers 0 alors on dira que la série est grossièrement divergente
- **Propriété** : Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{K}$ . La suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et la série  $\sum (u_{k+1} - u_k)$  sont de même nature

- **Propriété** : Soit  $\sum u_k, \sum v_k$  2 suites positives, alors si  $u_k \underset{+\infty}{\sim} v_k$ , les séries sont de même nature
- Comparaison série-intégrale

**Théorème** Séries de Riemann : La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$

**Théorème** Règle d'Alembert : Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une série de  $\mathbb{R}_*^+$  telle que  $\lim \frac{u_{k+1}}{u_k} = \alpha$  alors si  $0 \leq \alpha < 1$  la série  $\sum u_k$  converge, si  $\alpha = 1$  on ne peut rien dire et si  $\alpha > 1$  la série est grossièrement divergente.

**Théorème** Critère spécial des séries alternées : Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de limite nulle, alors la série  $\sum (-1)^n u_n$  est convergente

## 18 Espaces euclidiens

**Vocabulaire** Soient  $E$  un espace vectoriel euclidien et  $f$  une forme bilinéaire symétrique

- On appelle forme quadratique de  $f : q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$
- $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont dit orthogonaux par rapport à  $f$  si  $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$
- $f$  est dite positive si et seulement si  $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$
- $f$  sera dite définie si et seulement si  $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}_E$
- Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel et  $f$  une forme bilinéaire symétrique positive et définie, on parlera alors de produit scalaire.
- $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$  est la norme euclidienne
- $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$  est la distance euclidienne
- $\vec{x} \perp \vec{y}$  dans le cas où  $\vec{x}/\vec{y} = \vec{0}$
- $A, B \subset E, A, B \neq \emptyset$  alors  $A \perp B \iff (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0 \forall (\vec{a}, \vec{b}) \in A \times B$
- $F, G$  2 sous espace vectoriel de  $E$  alors  $F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$
- $F, G$  2 sous espace vectoriel de  $E$  sont dits perpendiculaires si  $F^\perp \subset G \iff G^\perp \subset F$
- Une base  $(\vec{e}_i)_1^n$  est dite orthogonale si  $\forall i \neq j, (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = 0$
- Une base  $(\vec{b}_i)_1^n$  est dite orthonormale si  $\forall i \neq j, (\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j) = \delta_i^j$
- $f \in L(E, F)$  est une isométrie si et seulement si  $f$  conserve la norme
- $A \in M_n(\mathbb{R})$  est orthogonale quand  $A^t A = I_n$

**Théorème** Inégalité de Cauchy-Swartz :  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$ ,

$$|< \vec{x}, \vec{y} >| \leq \|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\|$$

**Théorème** Pythagore :  $\vec{x} \perp \vec{y} \iff \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

**Théorème**  $\dim E = n, (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E^p$  tel que aucun vecteur ne soit nul et qu'ils soient tous orthogonaux 2 à 2 alors c'est une famille libre.

**Théorème** Procédé de Gram-Schmidt : Dans tous espace vectoriel euclidien il existe des bases orthonormales

**Théorème** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension finie,  $F$  sous espace vectoriel de  $E$  alors  $E = F \oplus F^\perp$  et  $(F^\perp)^\perp = F$

**Théorème** Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$  et  $\vec{a} \in E$ ,  $d(\vec{a}, F) = \inf_{\vec{y} \in F} \|\vec{a} - \vec{y}\|$  alors

$$d(\vec{a}, F) = \|\vec{a} - \vec{x}\| \iff \vec{a} - \vec{x} \in F^\perp \text{ et } \vec{x} = P_F(\vec{a})$$

**Théorème** L'isométrie entraîne l'injectivité

**Théorème**  $f$  est une isométrie si et seulement si  $f$  conserve le produit scalaire

**Théorème** Soit  $E, F$  2 espace vectoriel euclidien de même dimension alors :

$f$  isométrie de  $E$  vers  $F$

$\iff$  il existe une base orthonormale de  $E$  et une de  $F$  telle que  $M(f, (\vec{e}_j)_1^n, (\vec{f}_i)_1^n)$  soit orthogonale

$\iff$  il existe une base orthonormale de  $E$  dont l'image par  $f$  est une base orthonormale de  $F$

- **Propriété** :  $\dim_{\mathbb{R}} E = n$ ,  $(\vec{e}_i)_1^n, (\vec{e}'_i)_1^n$  2 bases orthonormales alors  $P_{(\vec{e}_i) \rightarrow (\vec{e}'_i)} \in O_n(\mathbb{R}) : P^{-1} = {}^t P$
- Pour  $A \in O_n(\mathbb{R})$ , si  $\det(A) = 1$ ,  $f$  est une isométrie positive et si  $\det(A) = -1$ ,  $f$  est une isométrie négative
- $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$
- $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- Toute isométrie positive (rotation) peut se décomposer en produit de 2 isométries négatives (symétries) dont l'une est choisie arbitrairement
- Soient 2 vecteurs normés de  $E$ , alors il existe une unique rotation qui envoie le 1<sup>er</sup> sur le 2<sup>e</sup> (idem avec symétries)
- En dimension 3 : là où ça change rien : rotation ou symétrie d'axe orienté suivant l'axe où ça change rien

### Produit mixte, vectoriel, application antisymétrique

- On appelle produit mixte l'application trilinéaire alternée qui a 3 vecteurs  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  associe  $\det_B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$
- Soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \exists! \vec{w} \in E / \forall \vec{x} \in E, [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x}$ . Ce vecteur sera appelé produit vectoriel de  $\vec{u}, \vec{v}$  dans cet ordre noté  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$
- **Propriété** :  $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{z}$
- **Propriété** : Le produit vectoriel est anti-commutatif :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- **Propriété** :  $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \vec{u} \wedge \vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$
- **Propriété** : Si  $(\vec{u}, \vec{v})$  est libre,  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base directe
- **Propriété** :  $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$
- **Propriété** : Le double produit vectoriel n'est PAS associatif :  $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3,$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$$

- Soit  $f \in L(E)$ , elle sera dite antisymétrique si  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, (f(\vec{x}) \cdot \vec{y}) = -(\vec{x} \cdot f(\vec{y}))$
- **Propriété** :  $f$  est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice de  $f$  dans une base orthonormale directe est antisymétrique

## 19 Convexité

$f$  est convexe si et seulement si  $\forall \lambda \in [0, 1] f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \iff$   
 $0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$

**Théorème** Si  $f \in \mathcal{D}^1$ , la croissance de  $f'$  sur  $I$  est équivalente à la convexité de  $f$  sur  $I$

**Théorème**  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $f$  est toujours au dessus de ses tangentes

**Théorème**  $\prod_{i=1}^n t_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i$  (prendre  $f(x) = e^x$  pour la démo)

## 20 Probabilités

•  $P$  est une probabilité sur un ensemble fini  $\Omega$  si  $P : P(\Omega) \rightarrow [0, 1], P(\Omega) = 1$  et  $\forall A, B \in P(\Omega)/A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

•  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

**Théorème** Probabilités composées : Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et  $(A_1, \dots, A_n)$  des événements tels que  $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$  :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) * P_{A_1}(A_2) * P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots$$

**Théorème** Formule des probabilités totales : Soit  $(A_i)$  un système complet d'événements avec aucun événement impossible alors  $\forall B, P(B) = \sum_i P(A_i)P_{A_i}(B)$

**Théorème** Formule de Bayes : Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé. Si  $P(A)P(B) > 0, P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} P_A(B)$

• 2 événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

• Pour  $X$  une loi de probabilité,  $P_X(A) = P(X \in A)$

• **Propriété** : Formule de Van der Monde :  $\sum_{k=0}^r \left[ \binom{n}{k} * \binom{m}{r-k} \right] = \binom{n+m}{r}$

•  $E(X) = \sum_i X_i P(X = X_i)$ . Si  $E(X) = 0, X$  est dite centrée

• L'espérance est linéaire

• Lois binomiales :  $E(X) = np$

**Théorème** Inégalité de Markov : Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, :

$$\forall a > 0, P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

**Théorème** Si  $X, Y$  sont deux variables aléatoires réelles, alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$

•  $V(x) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$

•  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

• **Propriété** :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, V(aX + b) = a^2 V(X)$

**Théorème** Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Pour  $X$  variable aléatoire réelle et  $E(X) = m$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

- $cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$
- **Propriété** : La covariance est bilinéaire symétrique
- **Propriété** :  $\forall X, Y, V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X, Y)$
- **Propriété** : Si  $X$  et  $Y$  sont indépendants,  $cov(X, Y) = 0$
- Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires réelles, le coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$  est :  $\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

**Théorème** Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires réelles de variances non nulles, alors :

$$|\rho(X, Y)| \leq 1$$

et si  $|\rho(X, Y)| = 1$  alors :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / P(Y = aX + b) = 1$$