Analyse

Martin Andrieux, Nathan Maillet

1 Continuité et Dérivabilité

Définition

f est dite *convexe* si et seulement si pour a et b dans I et pour t dans $[0;1]$:

$$f((1-t)a+tb) \leqslant (1-t)f(a)+tf(b)$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty$$

Taylor avec reste intégrale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Taylor-Young

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right)$$

Prolongement $\mathcal{C}^1$

Soit f continue de I dans $\mathbb{R}$, a dans I, f dérivable sur $I \backslash \{a\}$.
Si f' a une limite l en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Théorème fondamental de l'analyse

$$\text{Soit } F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

F est continue et dérivable avec $F' = f$.
Si f est continue, alors f possède des primitives.

2 Intégrale à paramètre

Théorème de continuité

- $f : U \times I \to \mathbb{C}$
- $\forall x \in U$, $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ sur I
- $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur U
- Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ et sommable sur I telle que
$$\forall x \in U, \forall t \in I \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors F est définie et $\mathcal{C}^0$ sur U, avec

$$F(x) = \int_I f(x,t)dt$$

Théorème de dérivabilité

- $f : U \times I \to \mathbb{C}$
- $\forall x \in U$, $t \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ et sommable sur I
- $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur U
- $\forall x \in U$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ sur I
- Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ et sommable sur I telle que
$$\forall x \in U, \forall t \in I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors F est définie et $\mathcal{C}^1$ sur U, avec

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

Fonction Γ

On défnit la fonction Γ comme suit :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

On a alors $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(n+1) = n!$ pour n dans $\mathbb{N}$. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

3 Suites et séries de fonctions

Définition

On dit qu'une suite de fonctions f_n converge *simplement* vers f si :

$$\forall x \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

La limite simple conserve les propriétés portant sur un nombre fini de points, comme la positivité, la croissance et la convexité.

Définition

On dit qu'une suite de fonctions f_n converge *uniformément* vers f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant n_\varepsilon$$
$$\forall x, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

La convergence uniforme de (f_n) est la convergence pour $\| \|_\infty$.
La convergence uniforme d'une série est équivalente à la convergence uniforme du reste vers 0.
La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Définition

On dit qu'une série converge *normalement* si la série des normes infinies converge. La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Théorème d'approximation de Weierstrass

Toute fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Théorèmes pour la convergence uniforme

La convergence uniforme conserve :

- la limite
- la continuité
- la sommabilité
- la dérivabilité et la continuité de la dérivée, avec égalité des dérivées dans le cas où il y a convergence simple des f_n, avec convergenence uniforme des f_n'.

Échanges sur un intervalle borné

Sur un intervalle d'intégration borné $[a, b]$, la convergence uniforme des f_n suffit pour avoir :

$$\int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)dx$$

et

$$\int_a^b \sum_0^{+\infty} u_n(x)dx = \sum_0^{+\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

Convergence dominée

- Les f_n et f sont $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ sur I
- (f_n) converge simplement vers f sur I
- Il existe φ continue par morceaux et sommable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$$

Alors les f_n et f sont sommables sur I et

$$\int_I f_n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(x)dx$$

Sommation terme à terme

- Pour tout n, u_n est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$ sur I
- La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur I et sa somme y est $\mathcal{C}^0_{\text{pm}}$
- La série $\sum_{n\geqslant 0} \int_I |u_{n(x)}|dx$ converge

Alors les $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est sommable sur I et

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n(x) dx \right)$$

Fubini discret

Si $(u_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ est une famille de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}^2$ telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{p\geq 0} u_{p,q} \text{ converge absolument}$$

$$\text{La série} \sum_{p\geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right) \text{ est convergente}$$

Alors,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right)$$