Espaces vectoriels normés

Martin ANDRIEUX

Définition

Une *norme* est une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in E,\ \|x\| \geqslant 0$
- $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \implies x = 0$
- $\forall \lambda \in K,\ \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Cauchy Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Équivalence des normes

Deux normes $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ sont dites *équivalentes* si (les propriétés suivantes sont équivalentes) :

- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|_1} x \iff x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\ \|_2} x$
- On a α et β tels que $\alpha \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1$

En dimension finie

- Équivalence des normes. On peut choisir une norme adaptée au problème, ou même ne pas prendre de norme et utiliser des résultats généraux.
- Les compacts sont les fermés bornés.
- Si une application f est linéaire, alors elle est continue.
- Les applications bi-linéraires sont continues.