

Analyse

Martin ANDRIEUX, Nathan MAILLET

1 Continuité et Dérivabilité

Définition

f est dite *convexe* si et seulement si pour a et b dans I et pour t dans $[0; 1]$:

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Taylor avec reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Taylor-Young

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

Prolongement \mathcal{C}^1

f continue de I dans \mathbb{R} , a dans I , f dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si f' a une limite l en a , alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Théorème fondamental

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

F est continue et dérivable avec $F' = f$.
Si f est continue, alors f possède des primitives.

2 Intégrale à paramètre

Théorème de continuité

- $f : U \times I \rightarrow \mathbb{C}$
- $\forall x \in U, t \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}_{pm}^0
- $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}^0
- Il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{C}_{pm}^0 et sommable telle que

$$\forall x \in U, \forall t \in I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors F est définie et \mathcal{C}^0 sur U , avec

$$F(x) = \int_I f(x, t) dt$$

Théorème de dérivabilité

- $f : U \times I \rightarrow \mathbb{C}$
- $\forall x \in U, t \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}_{pm}^0 et sommable
- $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}^1
- $\forall x \in U, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est \mathcal{C}_{pm}^0
- Il existe $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{C}_{pm}^0 et sommable telle que

$$\forall x \in U, \forall t \in I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors F est définie et \mathcal{C}^1 sur U , avec

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

fonction Γ

On définit la fonction Γ comme suit :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

On a alors $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(n+1) = n!$ pour n dans \mathbb{N} . $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

3 Suites et séries de fonctions

Définition

On dit qu'une suite de fonctions f_n converge *simple-ment* vers f si :

$$\forall x \quad f_{n(x)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

La limite simple conserve les propriétés portant sur un nombre fini de points, comme la positivité, la croissance et la convexité.

Définition

On dit qu'une suite de fonctions f_n converge *uniformément* vers f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_\varepsilon \\ \forall x, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

La convergence uniforme de (f_n) est la convergence pour $\|\cdot\|_\infty$

La convergence uniforme d'une série est équivalente à la convergence uniforme du reste vers 0.

La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Définition

On dit qu'une série converge *normalement* si la série des normes infinies converge. La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Théorèmes pour la convergence uniforme

La convergence uniforme conserve :

- la continuité
- la limite
- la sommabilité avec égalité des intégrales
- la dérivabilité et la continuité de la dérivée, avec égalité des dérivées. (Dans ce cas, la convergence simple des f_n suffit, avec convergence uniforme des f'_n)

Convergence dominée

- Pour tout n , f_n est \mathcal{C}_{pm}^0
- f est \mathcal{C}_{pm}^0
- (f_n) converge simplement vers f
- Il existe φ continue par morceaux et sommable telle que $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$

Alors les f_n et f sont sommables sur I est

$$\int_I f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(x) dx$$

Sommation terme à terme

- Pour tout n , u_n est \mathcal{C}_{pm}^0
- La série des u_n converge simplement
- Les sommes partielles sont \mathcal{C}_{pm}^0
- Les u_n sont sommables et $\sum_{n \geq 0} \int_I |u_n(x)| dx$ converge

Alors les $\sum_0^{+\infty} u_n$ est sommable sur I et

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n(x) dx \right)$$

Théorème d'approximation de Weierstrass

Toute fonction continue sur un segment à valeurs dans \mathbb{C} est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.