

# Espaces préhilbertiens

Nathan MAILLET

Dans toute la suite,  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  désigne un espace préhilbertien et  $x, y$  deux éléments de  $E$

## Égalités de polarisations

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \\ &= \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}\end{aligned}$$

Égalité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Théorème de Pythagore :

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

est une base *orthonormale* de  $F$ , on a :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

## Définition

Une famille  $(e_i)_{i \in I}$  est *orthonormale totale* si elle est orthonormale et  $\text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$  est dense dans  $E$ .

Si  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille orthonormale totale, on a :

$$\sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

## Définition

$f \in \mathcal{L}(E)$  est dit *symétrique* ( $f \in S(E)$ ) si  $\langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$

## Théorème spectrale

$f \in S(E)$  si et seulement si il existe une base orthonormale qui diagonalise  $f$

Si  $S \in S_n(\mathbb{R})$ ,  $S$  est diagonale dans une base orthonormale

## Définition

Un élément  $f$  de  $\mathcal{L}(E)$  est dit *orthogonal* si  $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ . C'est équivalent à :  $f$  conserve la norme

## Procédé de Gram-Schmidt

Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$  euclidien. Il existe une unique base orthonormale  $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$  telle que  $P_{(e_i)}^{(\varepsilon_i)}$  soit triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. La formule générale pour les  $\varepsilon_i$  est :

$$\varepsilon_{i+1} = \frac{\varepsilon'_{i+1}}{\|\varepsilon'_{i+1}\|} \text{ avec } \varepsilon'_{i+1} = e_{i+1} - \sum_{j=1}^i \langle e_{i+1}, \varepsilon_j \rangle \varepsilon_j$$

## Théorème de projection

Soit  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$  de dimension fini. La projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$  est la projection orthogonale sur  $F$  notée  $P_F$ .  $P_F$  est le seul point en lequel  $d(x, F)$  est atteinte. Si  $(e_i)_1^n$

### Groupe orthogonal

Si  $E$  est de dimension  $n$ ,  $f \in O(E)$  si et seulement si il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

avec  $\forall 1 \leq i \leq k, R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$