Espaces vectoriels normés

Martin Andrieux, Nathan Maillet

Dans toute la suite, E et F désignent deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels normés.

Définition

Une *norme* $\|\cdot\|$ est une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x \in E,\ \|x\| \geqslant 0$
- $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \implies x = 0$
- $\forall \lambda \in K,\ \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\forall x, y \in E,\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Cauchy Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Caractérisations séquentielles

Avec $A \subset E$:

- A est ouvert si et seulement si pour toute suite x_n de E tendant vers a dans A, x_n est dans A pour n assez grand.
- A est fermé si et seulement si A est stable par limite.
- Pour x dans E :

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\iff \forall r \geq 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset \\ &\iff \exists (x_n)_{n \in N} \in A^{\mathbb{N}} / x_n \underset{\infty}{\to} x \end{aligned}$$

Continuité et topolgie

- f est continue si et seulement si pour A fermé de E, $f^{-1}(A)$ est un fermé de E (de même avec les ouverts).

Applications linéaires et topologie

Avec f linéaire de E dans F, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- $f \in \mathcal{L}_c$
- f continue en un point
- f continue en 0
- f bornée sur $B(0, 1)$
- $\exists K \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in E, \|f(x)\| \leq K \|x\|$
- f est lipchitzienne

Équivalence des normes

Deux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont dites *équivalentes* si (les propriétés suivantes sont équivalentes) :

- $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{\| \ \|_1} x \iff x_n \xrightarrow[n \to \infty]{\| \ \|_2} x$
- On a α et β tels que $\alpha \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1$

En dimension finie

- Le théorème d'équivalence des normes permet de choisir une norme adaptée au problème s'il y a besoin de norme
- Les compacts sont les fermés bornés
- $f \in L(E) \implies f \in \mathcal{L}_c$

- Les applications bi-linéraires sont continues
- Tout sous espace vectoriel est fermé

Définition

Une partie K de E est dite *compacte* si toute suite d'élement de K possède une valeur d'adhérence dans K.

Compacité et topologie

- Tout compact est fermé borné (la réciproque est fausse en dimension infinie)
- Une partie A d'un compacte est compacte si et seulement si elle est fermée.
- Le produit de deux compactes est compacte

Compacité et continuité

- Si $f : K \to F$ est continue, alors f est uniformément continue et $f(K)$ est compact.
- Soient K un compact non vide et $f : K \to \mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Connexité par arcs

A est dite connexe par arcs si et seulement si $\forall a, b \in A, \exists \gamma : [0, 1] \to A$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$

Absolue convergence

$$\sum_{n\geq 0} \|u_n\| \text{ converge} \implies \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge}$$

Définition

La norme subordonnée est définie par :

$$|||f||| = \sup_{x\in E} \left(\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \right)$$

On a alors : $|||g \circ f||| \leq |||g||| \times |||f|||$