

Exercices de probabilités

Martin ANDRIEUX, Nathan MAILLET

Pile ou face

Soit $p \in]0;1[$ et $r \in \mathbb{N}, r \geq 2$. On effectue une suite infinie de tirages à pile ou face. Les tirages sont indépendants et la probabilité de tirer face, à chaque tirage, vaut p . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note F_n l'évènement "face sort au n ème tirage" et P_n l'évènement "pile sort au n -ième tirage". Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'évènement "au n -ième tirage, on obtient r faces consécutives pour la première fois".

1. (a) Déterminer $E_1 \cdots E_{r-1}$ et E_r
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$E_{n+r+1} = \left(\bigcap_{i=n+2}^{n+r+1} F_i \right) \cap P_{n+1} \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \overline{E_i} \right)$$

- (c) En déduire que chaque E_n est un évènement.
2. On pose $p_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(E_n)$. Montrer que $\sum p_n$ converge.
3. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+r+1} = p^r(1-p) \left(1 - \sum_{i=1}^n p_i \right)$$

- (b) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, p_{n+r+1} en fonction de p , r , p_n , p et $q = 1-p$
4. Soit

$$G : [-1;1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k$$

- (a) Montrer que G est bien définie et qu'elle est continue
- (b) Montrer que

$$\forall x \in]-1;1[, \frac{G(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n p_k \right) x^k$$

- (c) Exprimer $G(x)$

Variable aléatoire

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) à

valeurs dans $\{-1; 1\}$, telles que, pour $n \geq 1$:

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. (a) Démontrer que, pour tout n dans \mathbb{N} , $\frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{2^n n!}$.
 (b) Calculer, pour n dans \mathbb{N} et t réel $E(e^{tX_n})$; en déduire $E(e^{tS_n}) \leq e^{t^2/2}$.
2. Soit a un nombre réel strictement positif.
 (a) Montrer que pour tout réel t positif : $P(S_n \geq a) \leq e^{-ta} E(e^{tS_n})$.
 (b) En déduire que $P(S_n \geq a) \leq e^{-a^2/2n}$.
 (c) En déduire un majorant de $P(|S_n| \geq a)$.

Inégalités - 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note G_X sa série génératrice.

1. Montrer que $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$; en déduire l'inégalité $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.
2. Montrer que, pour tout t dans $]1; +\infty[$ et pour tout a réel positif non nul, $P(X \geq a) \geq \frac{G_X(t)}{t^a}$.
3. Déterminer le minimum sur $[1; +\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto \frac{e^{t-1}}{t^2}$.
4. Calculer $G_X(t)$; en déduire $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$.
5. Montrer que cette inégalité est meilleure que la première dès que λ prend des valeurs assez grandes.

Inégalités - 2

1. Pour $t \in \mathbb{R}, x \in [-1; 1]$, montrer que $e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^t$
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-1; 1]$ et d'espérance nulle. Montrer que e^X est d'espérance finie et que $E(e^{tX}) \leq \cosh(t) \leq e^{t^2/2}$
3. Soient $X_1 \dots X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que, pour tout i , $|X_i| \leq a_i$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Montrer que

$$E(e^{tS_n}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

(b) Soit $\epsilon > 0, t > 0$. Montrer que

$$P(S_n > \epsilon) \leq \exp\left(-t\epsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$$

(c) En choisissant une bonne valeur de t , montrer que

$$P(S_n > \epsilon) \leq \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2 \sum_{i=1}^n a_i^2}\right)$$

Stage militaire à l'X

Le jeune polytechnicien Guillaume s'est perdu dans la forêt. Il cherche à retrouver le reste de l'équipe. À chaque pas de temps, Guillaume et l'équipe changent de camp avec probabilité uniforme en suivant les chemins si contre. Au bout de combien de temps Guillaume peut-il espérer retrouver ses camarades ? Au départ, Guillaume est à l'ouest, l'équipe est au sud.

