Physique quantique

Martin Andrieux

Relation de Planck-Einstein

$$E = h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda}$$

Quantité de mouvement

$$E = pc$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

D'où la relation de de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Domaine de la mécanique quantique

Pour un milieu de dimension caractéristique l, si $\lambda = \frac{h}{p} \ll l$, la mécanique classique peut suffire. Sinon, la mécanique quantique est nécessaire.

Fonction d'onde

Une particule est caractérisée par sa fonction d'onde $\Psi(x, y, z, t)$. Lorsque Ψ est de carré sommable, il est possible de la normaliser pour avoir

$$\iiint_{\text{espace}} |\Psi|^2 d\tau = 1$$

Équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

$$\widehat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

États stationnaires

$$\Psi(x, t) = \psi(x)f(t)$$

Dans le cas d'une particule à un seul degré de liberté (x) et dont l'énergie potentielle $V(x)$ ne dépend pas du temps, l'équation de Schrödinger indépendante du temps est simplement :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\psi(x)}{\psi(x)} + V(x) = i\hbar\frac{f'(t)}{f(t)} = E$$

E est l'énergie de la fonction d'onde.

Onde de de Broglie

Dans le cas d'une particule libre (ne subissant aucune force), l'énergie potentielle étant choisie nulle, on peut écrire :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}(x) = E\psi(x)$$

On pose $k = \frac{\sqrt{2me}}{\hbar}$, les solutions sont alors de la forme :

$$\psi(x) = Ae^{-ikx} + Be^{-ikx}$$

f est de la forme suivante :

$$f(t) = Ce^{-i\frac{Et}{\hbar}} = Ce^{-i\omega t}$$

D'où une solution générale de la forme :

$$\Psi(x, t) = \alpha e^{i(kx-\omega t)} + \beta e^{i(-kx-\omega t)}$$

$$\Psi(x, t) = \alpha e^{-i(\omega t-kx)} + \beta e^{-i(\omega t+kx)}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

$$E = \frac{k^2\hbar^2}{2m} = \hbar\omega \qquad \omega = \frac{k^2\hbar}{2m}$$

Principe d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta E \cdot \Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

Densité de courant de probabilité

Pour une particule en mouvement à la vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{J} = |\Psi|^2 \cdot \vec{v} = |\Psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = 0$$