Exercice de convexité

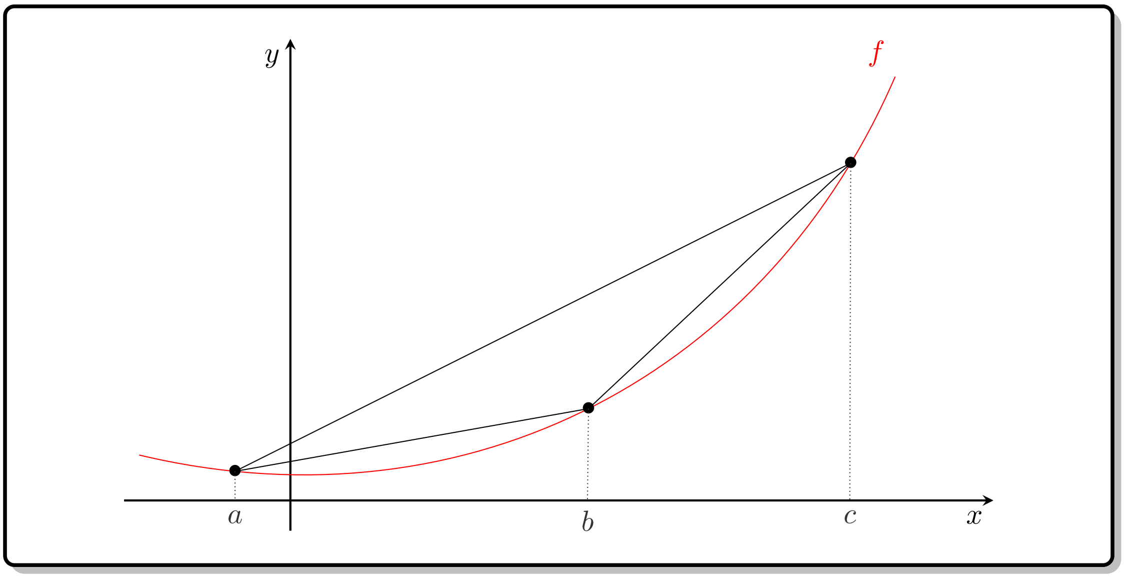
Maillet Nathan
MPSI 1

30 juin 2020

Le but de l'exercice est de démontrer que la convexité de f est équivalente à :

$$\forall\,(a,b,c)\,/\,a<b<c,$$

$$\frac{f\,(b)-f\,(a)}{b-a}\leqslant\frac{f\,(c)-f\,(a)}{c-a}\leqslant\frac{f\,(c)-f\,(b)}{c-b} \qquad (1)$$



Première partie

Dans cette première partie, nous démontrerons que la convexité de f implique les inégalités (1). Par définition :

$$\forall\,(a,c,\lambda)\in\mathcal{D}_f\times\mathcal{D}_f\times[0\,;1]$$

$$f\,(\lambda a+(1-\lambda)\,c)\leqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)\,f(c)$$

En écrivant $b = \lambda a + (1-\lambda)\,c$, on a bien $a < b < c$ et la quantification du λ nous permet de couvrir tous les b entre a et c.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &\leqslant \frac{\lambda f(a)+(1-\lambda)f(c)-f(a)}{b-a} && \text{par définition}\\
&\leqslant \frac{(1-\lambda)\,(f(c)-f(a))}{\lambda a+(1-\lambda)\,c-a}\\
&\leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\frac{f(c)-f(b)}{c-b} &\geqslant \frac{f(c)-\lambda f(a)-(1-\lambda)f(c)}{c-b}\\
&\geqslant \frac{\lambda\,(f(c)-f(a))}{c-\lambda a-(1-\lambda)\,c}\\
&\geqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}
\end{aligned}$$

Donc, pour f convexe et a, b, c tels que $a < b < c$, on a bien :

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}}$$

Deuxième partie

Il ne reste qu'à prouver la seconde implication, c'est à dire que les inégalités (1) impliquent la convexité de f. Nous avons donc f telle que pour tout (a,b,c) vérifiant $a < b < c$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Ici, la première inégalité suffit à démonter la convexité de f. En effet, comme $a < b < c$, il existe λ dans $]0\,;1[$ tel que $b = \lambda a + (1-\lambda)c$. En remplaçant b par sa nouvelle écriture dans l'inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{f(b)-f(a)}{\lambda a+(1-\lambda)c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\\
\Longrightarrow\ &\frac{f(b)-f(a)}{(1-\lambda)(c-a)} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\\
\Longrightarrow\ &f(b) \leqslant (1-\lambda)\,[f(c)-f(a)]+f(a) && \text{car } 1-\lambda>0 \text{ et } c-a>0\\
\Longrightarrow\ &f(\lambda a+(1-\lambda)c) \leqslant \lambda f(a)+(1-\lambda)f(c)
\end{aligned}$$

Ce qui est la définition de la convexité de f.