

# Exercices Réduction

Nathan MAILLET

## Diagonalisation

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Diagonaliser  $B = \begin{pmatrix} A & A & A \\ A & A & A \\ A & A & A \end{pmatrix}$  et prévoir ses valeurs propres sans calcul.

## Valeurs propres

Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  et  $\varphi$  l'endomorphisme de  $M_n(\mathbb{C})$  défini par :

$$\forall X \in M_n(\mathbb{C}), \varphi(X) = AX - XB.$$

- a) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme si et seulement si  $A$  et  $B$  n'ont pas de valeurs propres communes.
- b) Donner les expressions des valeurs propres de  $\varphi$  en fonction de celles de  $A$  et  $B$ .

## Calcul de commutant

Calculer le commutant de  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

## Diagonalisation simultanée

Soient  $f, g$  deux endomorphismes diagonalisables tels que  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont simultanément diagonalisables (i.e qu'il existe une base tel que  $f$  et  $g$  soient tous deux diagonale).