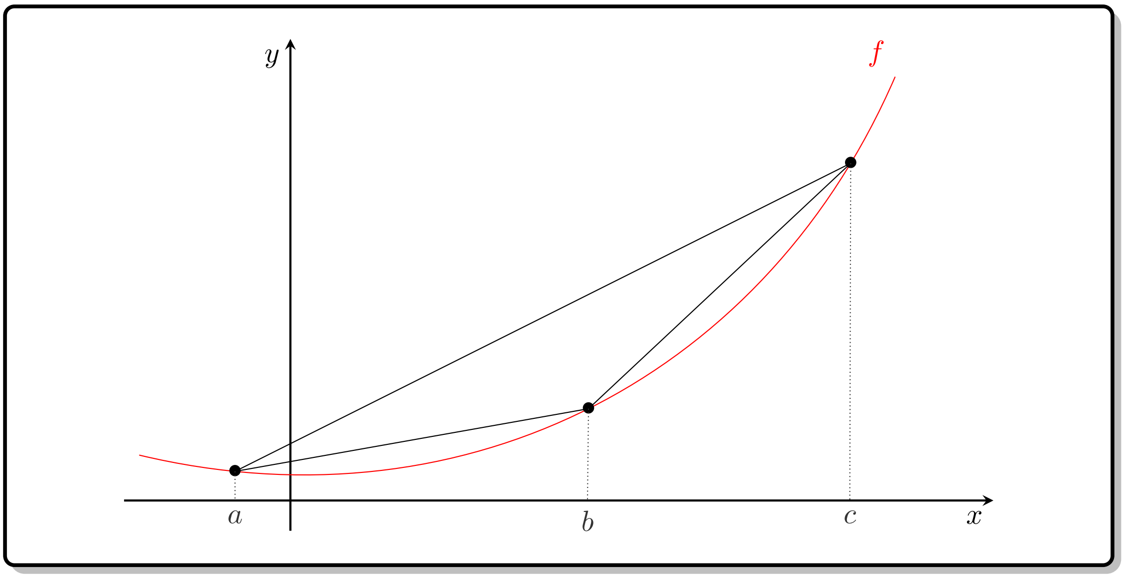
Exercice de convexité

Martin Andrieux, Nathan Maillet

Le but de l'exercice est de démontrer que la convexité de f est équivalente à :

$$\forall (a,b,c)\,/\,a<b<c,$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \tag{1}$$



Première partie

Dans cette première partie, nous démontrerons que la convexité de f implique les inégalités (1). Par définition :

$$\forall (a,c,\lambda) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_f \times [0\,;1]$$

$$f(\lambda a + (1-\lambda)c) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$$

En écrivant $b = \lambda a + (1-\lambda)c$, on a bien $a<b<c$ et la quantification du λ nous permet de couvrir tous les b entre a et c.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &\leqslant \frac{\lambda f(a)+(1-\lambda)f(c)-f(a)}{b-a} && \text{par définition}\\ &\leqslant \frac{(1-\lambda)\left(f(c)-f(a)\right)}{\lambda a+(1-\lambda)c-a}\\ &\leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\frac{f(c)-f(b)}{c-b} &\geqslant \frac{f(c)-\lambda f(a)-(1-\lambda)f(c)}{c-b}\\ &\geqslant \frac{\lambda\left(f(c)-f(a)\right)}{c-\lambda a-(1-\lambda)c}\\ &\geqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\end{aligned}$$

Donc, pour f convexe et a, b, c tels que $a<b<c$, on a bien :

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}}$$

Deuxième partie

Il ne reste qu'à prouver la seconde implication, c'est à dire que les inégalités (1) impliquent la convexité de f. Nous avons donc f telle que pour tout (a,b,c) vérifiant $a<b<c$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Ici, la première inégalité suffit à démonter la convexité de f. En effet, comme $a < b < c$, il existe λ dans $]0\,;1[$ tel que $b=\lambda a+(1-\lambda)c$. En remplaçant b par sa nouvelle écriture dans l'inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{f(b)-f(a)}{\lambda a+(1-\lambda)c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\\ \Longrightarrow\ &\frac{f(b)-f(a)}{(1-\lambda)(c-a)} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\\ \Longrightarrow\ &f(b) \leqslant (1-\lambda)\left[f(c)-f(a)\right]+f(a) && \text{car } 1-\lambda>0 \text{ et } c-a>0\\ \Longrightarrow\ &f(\lambda a+(1-\lambda)c) \leqslant \lambda f(a)+(1-\lambda)f(c)\end{aligned}$$

Ce qui est la définition de la convexité de f.