

Électromagnétisme

Martin ANDRIEUX
Nathan MAILLET

1 Analyse vectorielle

Circulation

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{M}$$
$$\mathcal{C} = \oint \vec{E}(M) \cdot d\vec{M}$$

Flux

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$
$$\Phi = \oint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$

Théorème de Gauss

Dans un champ électrique :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Énergie

Pour n charges ponctuelles :

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i v_i$$

Pour une distribution continue :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \epsilon_0 E^2(M) d\tau$$

Théorème d'Ostrogradski

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div}(\vec{E}) d\tau$$

Équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

En l'absence de charges :

$$\Delta V = 0$$

Théorème de Stokes

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Équivalence

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \iff \oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \iff \text{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

2 Dipôle électrostatique

Moment dipolaire

$$\vec{p} = q \overrightarrow{NP}$$

Potentiel loin d'un dipôle

$$V(M) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

D'où :

$$E_r = \frac{2p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ et } E_\theta = \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Force exercée sur un dipôle

Force :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}(M) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{E}$$

Moment pour un champ variant peu :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{p} \wedge \vec{E}(M)$$

Énergie Potentielle

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Capacité

La capacité C est telle que :

$$Q = C \cdot (V_1 - V_2)$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Densité volumique de courant

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m \vec{v}$$

Dans les métaux :

$$\vec{j} = -ne\vec{v}$$

$$i = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

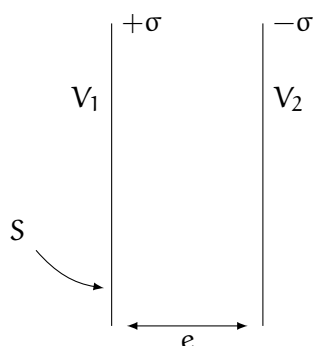
3 Conducteurs

Équilibre

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ donc } V = 0$$

Or, $\text{div } \vec{E} = 0$ donc $\rho = 0$. La densité volumique de charge est nulle dans tout le volume du conducteur : la charge se localise uniquement sur la surface. D'où :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$



Conservation de la charge

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La démonstration de ce résultat est à connaître, en voici les grandes lignes :

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$q(t) = \iiint_{(V)} \rho(M, t) d\tau$$

Ensuite, dériver q, permuter la dérivation et la sommation, appliquer Ostrogradski. L'égalité des intégrales entraîne l'égalité des grandeurs sommées.

Loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Avec σ la *conductivité* du milieu, aussi notée γ .

Loi de Joule locale

$$\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ en électrostatique.

Résistance d'un conducteur cylindrique

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

Cette expression se retrouve rapidement avec un raisonnement purement intuitif du type « Plus le fil est long plus la résistance est grande ».

Champ dans un solénoïde

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \cdot \vec{u}_z$$

4 Magnétostatique

Force de Lorentz

$$\vec{f} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Moment dipolaire magnétique

$$\vec{\mathcal{M}} = I S \vec{n}$$

\vec{B} est à flux conservatif

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Or d'après le théorème d'Ostrogradski,

$$\oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{B} d\tau = 0$$

D'où :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Champ créé par un dipôle

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$$

Cette expression est totalement analogue à celle obtenue pour le dipôle électrostatique, il suffit en effet de remplacer p par \mathcal{M} et $\frac{1}{\epsilon_0}$ par μ_0 .

Moment des forces de Laplace

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}(M)$$

Théorème d'Ampère

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

Pour le théorème d'Ampère local, on a :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Énergie Potentielle

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

Discontinuité

La discontinuité d'un champ de part et d'autre d'une surface est en $\mu_0 \vec{j}_s$. Cela est à rapprocher du

Flux du champ magnétique

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = L_1 i_1 (+M_{12} i_2)$$

Avec L les coefficients d'*auto-induction* et M les coefficients d'*induction mutuelle*. L est bien sûr positif. On peut montrer que $M_{ij} = M_{ji}$.

Inductance propre

Lorsque que l'on connaît \vec{B} , il est possible de calculer le flux du champ, et donc l'inductance propre du circuit avec $\Phi = \Lambda i$.

Énergie magnétique

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \frac{1}{2} M_{12} i_1 i_2$$

$$U_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

6 Équations de Maxwell

Égalité

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

Maxwell-Gauss

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Cette équation est la forme locale du théorème de Gauss.

Flux magnétique

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Cette équation signifie que \vec{B} est à flux conservatif.

Maxwell-Faraday

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

L'équation de Maxwell-Faraday traduit, au niveau local, la *loi de Faraday de l'induction électromagnétique*.

Maxwell-Ampère

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ce résultat constitue le *théorème d'Ampère généralisé*.

Vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le vecteur de Poynting correspond à un flux surfacique d'énergie, ou encore à une puissance surfacique. Il s'exprime en W m^{-2} . Les calculs de puissances et d'énergies se font impérativement en réel.

Équation de Poynting

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

Cette équation traduit localement la conservation de l'énergie.

Énergie d'un photon

$$E = h\nu$$

$$E = pc$$

Quantité de mouvement volumique

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0 \cdot c^2} = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$$

7 Induction

Loi de Faraday

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Loi de Lenz

« La f.é.m. induite tend par ses effets à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance. »

Puissances pour l'induction de Lorentz

En notant :

- \mathcal{P}_l la puissance des forces de Laplace
- \mathcal{P}_e la puissance de la f.é.m. induite

$$\mathcal{P}_l + \mathcal{P}_e = 0$$

Effet de peau

Les courants sont presque entièrement concentrés dans une couche dont l'épaisseur δ est de l'ordre de :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

8 Ondes électromagnétique

Équations de propagation

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Vecteur d'onde

\vec{u} est la direction du mouvement.

$$\vec{k} = \frac{n\lambda\omega}{c} \vec{u}$$

Opérateurs d'analyse vectorielle

Ces règles ne valent que pour des OPPM.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= j\omega \vec{E} & \text{div } \vec{E} &= -j\vec{k} \cdot \vec{E} \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -j\vec{k} \wedge \vec{E} & \Delta \vec{E} &= -k^2 \vec{E} \end{aligned}$$

Relation de structure

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Il faut savoir retrouver cette relation, avec la loi de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

Loi de Malus

Si l'angle entre les directions d'un analyseur et d'un polariseur est α , l'intensité de l'onde après l'analyseur est $I_0 \cos^2(\alpha)$.

9 Dispersion

Vitesse de phase

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

Si v_ϕ est indépendante de ω , le milieu est *non-dispersif*. Dans le cas contraire, le milieu est *dispersif*. Le vide est le seul milieu rigoureusement non dispersif.

Relation spectre-signal

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 2\pi$$

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \sim 1$$

Vitesse de groupe

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_0}$$

Relation de Klein-Gordon

C'est une relation de dispersion de la forme :

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_c^2$$

Rencontrée notamment dans l'étude des plasmas.

10 Rayonnement dipolaire électrique

Dipôle oscillant

Nous appellerons dipôle oscillant une distribution telle que :

$$\vec{p} = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Hypothèses

- $a \ll r$ permet d'utiliser les formules relatives aux dipôles,
- $a \ll \lambda$ peut être appelée *approximation non relativiste*,
- $\lambda \ll r$ n'a pas de signification physique, mais simplifie les expressions.