

Maths MPSI

Maillet Nathan
MP*

Contents

1	Complexes et Trigonométrie	2
2	Ensembles	2
3	Equations différentielles	2
4	Continuité	3
5	Suites	3
6	Propriétés de \mathbb{R} en tout genre	4
7	Dérivabilité	5
8	Lois de compositions internes	5
9	Arithmétique	6
10	Polynômes	6
11	Intégration	6
12	Développements limités	7
13	Espaces vectoriels	8
14	Matrices	9
15	Groupes symétriques et déterminants	10
16	Formes linéaires et hyperplans	11
17	Séries	11
18	Espaces euclidiens	12
19	Convexité	13
20	Probabilités	14

1 Complexes et Trigonométrie

- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
- $\tan(a + \frac{\pi}{2}) = -\cot(a)$
- $\cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}$
- $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$
- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
- $ch^2 - sh^2 = 1$
- $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos'(x)$
- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- **Propriété :** $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = (\text{signe de } x) * \frac{\pi}{2}$

2 Ensembles

- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- Partition : recouvrement, $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, A_i \neq \emptyset$
- Relation binaire, réflexive, transitive, symétrique, anti-symétrique, d'équivalence, d'ordre (totale ou partielle)
- **Propriété :** Soit $A \neq \emptyset, A \subset \mathbb{R}$ majorée, A possède une borne supérieure

3 Equations différentielles

Premier ordre

$$y' + \alpha(x)y = a \implies y = \lambda e^{-\int \alpha(x)dx} + y_0$$

Deuxième ordre

$\Delta > 0 :$

$$y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

$\Delta = 0 :$

$$y = e^{rx}(\lambda + \mu x)$$

$\Delta < 0$:

$$r = \alpha + i\beta, y = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$$

Raccordements :

Théorème : Soit f une fonction continue en a et $f' \underset{a}{\rightarrow} l$, alors $f'(a) = l$ et f est de classe C^1 en a

4 Continuité

Théorème Soit f une fonction continue en a et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \underset{\infty}{\rightarrow} a$ alors $f(u_n) \underset{\infty}{\rightarrow} f(a)$

Théorème TVI : Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle

Théorème Soit I un intervalle réel, f continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$. f^{-1} existe va de $f(I)$ vers I , possède la même monotonie et si $f \in \mathcal{D}(I, f(I))$ et $0 \notin f'(I)$ alors $f^{-1} \in \mathcal{D}(f(I), I)$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

- **Propriété** : f continue sur $[a, b]$ implique $f([a, b]) = [m, M]$. De plus, si f est strictement monotone, $f(\text{fermé}) = \text{fermé}$ et $f(\text{semi-ouvert}) = \text{semi-ouvert}$
- f est Lipschitzienne de rapport k si $\exists k > 0 / \forall (x, x') \in I^2, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$
- Si $k < 1$, f est dite contractante
- Uniforme continuité : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, x') \in \mathcal{D}_f,$

$$|x - x'| < \alpha \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

- **Propriété** : L'uniforme continuité implique la continuité

Théorème Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue

5 Suites

Théorème Suites adjacentes : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissantes et $v_n - u_n \underset{\infty}{\rightarrow} 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et ce vers la même limite

Théorème Segments emboîtés : Soit $S_n = [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} \subset S_n, b_n - a_n \underset{\infty}{\rightarrow} 0 \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \alpha$

- **Propriété** : Si $u_n \underset{\infty}{\rightarrow} l$ alors toutes les sous-suites de u_n aussi.

Théorème Bolzano-Weierstrass : De toute suite de réels bornées on peut extraire une sous-suite convergente

Théorème Cesaro : $u_n \underset{\infty}{\rightarrow} l, l \in \overline{\mathbb{R}} \implies \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \underset{\infty}{\rightarrow} l$

Théorème "Cesaro multiplicatif" : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{R} telle que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{\infty}{\rightarrow} \lambda$ alors $\sqrt[n]{a_n} \underset{\infty}{\rightarrow} \lambda$

- **Propriété** : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans \mathbb{R}^{+*} , si $\exists p / \forall n \geq p, \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ alors $\exists \lambda = \frac{a_p}{b_p} > 0 / \forall n \geq p, a_n \leq \lambda b_n$

- $(\frac{n}{n+1})^n \xrightarrow{\infty} \frac{1}{e}$
- **Propriété** : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 \in I$, $f(I) \subset I$ et f soit croissante sur I alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie est donnée suivant $u_1 \geq / \leq u_0$
- **Propriété** : Soit I un intervalle stable par f , continue, $u_{n+1} = f(u_n)$, et $u_n \xrightarrow{\infty} c$ alors c est tel que $f(c) = c$
- **Propriété** : Soit I un intervalle stable par f , continue décroissante, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$ alors $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont de monotonie opposée

Suites récurrentes linéaires d'ordres 2

$\Delta > 0$:

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

$\Delta = 0$:

$$y = r^n(\alpha n + \beta)$$

$\Delta < 0$:

$$r = \rho e^{i\theta}, u_n = \rho^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$$

6 Propriétés de \mathbb{R} en tout genre

Théorème Cauchy-Schwarz : $\forall (x_i, y_i) \in (\mathbb{R}^2)^n, \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$

Topologie

- $A \subset E$ est dense dans E si et seulement si

$$\forall B(a, r) = \{x \in E / d(x, a) < r\}, \exists \alpha \in A / \alpha \in B(a, r)$$

- \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R}
- $A \subset E$ est ouvert si $\forall a \in A, \exists r > 0 / B(a, r) \subset A$
- Un ensemble est fermé si son complémentaire est ouvert
- **Propriété** : Soit O_j des ouverts, $\bigcup_j O_j$ est ouvert
- **Propriété** : Soit F_j des fermés, $\bigcap_j F_j$ est fermé
- **Propriété** : Soit $(O_j)_{j:1 \rightarrow s}$ des ouverts, $\bigcap_{j=1}^s O_j$ est ouvert
- **Propriété** : Soit $(F_j)_{j:1 \rightarrow s}$ des fermés, $\bigcup_{j=1}^s F_j$ est fermé

7 Dérivabilité

- Tangente en x_0 : $T_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- Si $f \in \mathcal{D}(I, f(I))$ et $G \in \mathcal{D}(J, g(J))$ avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathcal{D}(I, g(J))$ et $(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$
- Leibniz : $\forall (f, g) \in C^n(I, \mathbb{R}), (fg)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$
- Taylor-Lagrange ordre 2 :

$$\forall f \in C^1[a, b], f \in \mathcal{D}^2[a, b], \exists c \in]a, b[/ f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$$

Théorème Rolle :

$$f \in C^0[a, b], f \in \mathcal{D}[a, b], f(a) = f(b) \implies \exists c \in]a, b[/ f'(c) = 0$$

Théorème Accroissements finis :

$$\text{Cas d'égalité : } f \in C^0[a, b], f \in \mathcal{D}[a, b] \implies \exists c \in]a, b[/ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{Cas d'inégalité : } f \in C^0([a, b], \mathbb{C}), f \in \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{C}) \text{ et } \exists M = \sup(|f'|) \implies f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

8 Loïs de compositions internes

Groupe $(G, *)$ est un groupe si $*$ est une loi de composition interne associative avec un neutre et que $\forall a \in G, \exists a^- \in G / a * a^- = a^- * a = e$

Théorème Caractérisation des sous-groupes : Soit $(G, *)$ un groupe, $H \subset G, H \neq \emptyset$, $(H, *)$ est un groupe si $\forall (a, b) \in H^2, a * b^- \in H$

- Le produit cartésien de 2 groupes est 1 groupe
- $(G, *)$ est un groupe abélien si $*$ est commutatif et que $(G, *)$ soit un groupe

Théorème Les seuls sous groupes de \mathbb{Z} sont de la forme $a\mathbb{Z}$

Anneaux Soit $(A, +)$ un groupe abélien, c'est un anneau pour la loi $*$ si $*$ est une loi associative avec un neutre et que $\forall (a, b, c) \in A^3, a * (b + c) = a * b + a * c$ et $(b + c) * a = b * a + c * a$

Théorème Caractérisation des sous-anneaux : Soit $(A, +, *)$ un anneau, $B \subset A, B \neq \emptyset$, $(B, +, *)$ est un anneau si $\forall (a, b) \in B^2, a + b^- \in B, a * b \in B$ et $1_A \in B$

- Le centre d'un anneau est l'ensemble des éléments de cet anneau qui commutent avec tous les autres éléments de l'anneau
- Un anneau est dit intègre si il n'a pas de diviseurs de 0 et que $*$ est commutatif

Corps Soit $(K, +, *)$ un anneau et $\forall x \in K, x \neq 0$ alors $\exists x^- \in K / x * x^- = x^- * x = 1$

Théorème Caractérisation des sous-corps : Soit $(K, +, *)$ un corps, $L \subset K, L \neq \emptyset$, $(L, +, *)$ est un corps si $\forall (a, b) \in L^2, a - b \in L, a * b \in L$ et $\forall a \in L, a \neq 0, \exists a^- \in L / a * a^- = a^- * a = 1$

9 Arithmétique

- La division conserve l'intégralité des diviseurs donc aussi le pgcd

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

Théorème Bézout : $a \wedge b = 1 \iff \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$

Théorème Si $a \wedge b = a \wedge c = 1$, alors $a \wedge bc = 1$

Théorème $b|a, c|a$ et $b \wedge c = 1 \implies bc|a$

- **Propriété** : $a \wedge b_i = 1, 1 \leq i \leq n \implies a \wedge (\prod_{i=1}^n b_i) = 1$
- **Propriété** : $(ac) \wedge (bc) = |c|(a \wedge b)$

Théorème Gauss : $a \wedge b = 1$ et $a|bc \implies a|c$

- Relation de Bezout : $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, ab = (a \wedge b)(a \vee b)$

Théorème Petit théorème de Fermat : $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{P}, a^p \equiv a[p]$ et si $a \wedge p = 1, a^{p-1} \equiv 1[p]$

10 Polynômes

Théorème Taylor : $\forall a, P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$

Théorème Bezout : $\forall A, B \in \mathbb{K}^2[X], A \wedge B = 1 \iff \exists (U, V) \in \mathbb{K}^2[X] / AU + BV = 1$. De plus, $\exists!(U_0, V_0) \in \mathbb{K}^2[X] / AU_0 + BV_0 = 1, d^\circ V_0 < d^\circ A$ et $d^\circ U_0 < d^\circ B$

- Soit α_i les racines d'un polynome $P = \sum_{k=0}^{d^\circ P} a_k X^k$. On a :

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ et } \sigma_n = \prod_{i=1}^n \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

- Si $\frac{A}{B} = \frac{A}{(X-\alpha)C} = \frac{\beta}{X-\alpha} + \dots$ alors $\beta = \frac{A}{B'}(\alpha)$

11 Intégration

- $J_n = \int \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$: IPP sur J_{n-1}
- $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \Delta < 0$: forme canonique puis arctan
- Protocole (changements de variables) avec des puissances de sin et cos :

$$x \rightarrow -x (dx \text{ compris}) : u = \cos(x)$$

$$x \rightarrow \pi - x : u = \sin(x)$$

$$\text{Si les deux marchent : } u = \cos(2x)$$

Théorème Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée sur ce segment

- $f \in \varepsilon([a, b], \mathbb{R}) \int_a^b f = \sum_{j=0}^{p-1} (c_{j+1} - c_j) \lambda_j$ avec λ_j la valeur de f sur $]c_j, c_{j+1}[$

$$\bullet F_1 = \left\{ \int_a^b \varphi / \varphi \in \varepsilon([a, b], \mathbb{R}), \varphi \leq f \right\}, F_2 = \left\{ \int_a^b \psi / \psi \in \varepsilon([a, b], \mathbb{R}), \psi \geq f \right\}$$

$$\forall f \in C_{pm}^0 \int_a^b f = \sup(F_1) = \inf(F_2)$$

$$\bullet \text{ Propriété : } \forall (f, g) \in (C_{pm}^0[a, b])^2, b > a, f \leq g \implies \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

Théorème $b > a, f \in C^0, \forall t f(t) \geq 0$ et $\exists c \in [a, b] / f(c) > 0 \implies \int_a^b f(t)dt > 0$

Théorème $\int_a^b f(t)dt = 0, f \in C^0, \forall t f(t) \geq 0 \implies f = 0_{[a, b]}$

Théorème Cauchy-Swarz : $a < b, (f, g) \in (C_{pm}^0)^2 \implies (\int_a^b (fg)(t)dt)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$

Théorème Valeur moyenne : $f \in C_{pm}^0[a, b], a < b \implies \int_a^b f(t)dt = (b-a)\mu, \mu$ la valeur moyenne de f sur $[a, b]$

Théorème Théorème fondamental de l'analyse : Soit $f \in C^0, \forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est continue et dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$

Théorème Somme de Riemann : $\forall f \in C^0, \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{k(b-a)}{n}) \xrightarrow{\infty} \int_a^b f(t)dt$

Théorème Taylor avec reste intégrale :

$$\forall f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{R}), f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

12 Développements limités

Théorème Taylor-Young : $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(x-a)^n$

Théorème $\int f = F(0) + P_{n+1}(x) + o(x^{n+1})$

Développements limités usuels en 0

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + o(x^n)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + o(x^n)$
- $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$
- $\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + o(x^3)$
- $\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$
- $\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$
- $\text{argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
- $\text{argth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

13 Espaces vectoriels

Soit \mathbb{K} un corps, $(E, +)$ un groupe abélien stable par combinaison linéaire avec la loi $*$ et tel que $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ $(\alpha + \beta) * x = (\alpha * x) + (\beta * x), \alpha * (x + y) = (\alpha * x) + (\alpha * y), \alpha * (\beta * x) = (\alpha\beta) * x$ et $1 * x = x$, alors E est un espace vectoriel.

Théorème Caractérisation des sous espaces vectoriels : Soit $(E, +, *)$ un espace vectoriel, $F \subset E, F \neq \emptyset$, $(F, +, *)$ est un espace vectoriel si $\forall (\vec{f}_1, \vec{f}_2) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} \lambda \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \in F$

- La somme et l'intersection de 2 sous espaces vectoriel est un sous espace vectoriel
- **Propriété** : $S = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ est lié si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres

Théorème Base incomplète : Soit une famille libre L_0 et une génératrice G tels que $L_0 \subset G$ alors $\exists (\vec{g}_s, \vec{g}_r, \dots) \in G \setminus L_0 / L_0 \cup \{\vec{g}_s, \vec{g}_r, \dots\}$ soit une base

Théorème Echange : Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finit, G une famille génératrice et L libre, alors on peut ajouter des vecteurs de G a L pour avoir une base de E

Théorème Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension n , E_1 un sous espace vectoriel de dimension p , alors E_1 a de supplémentaires de dimension $n - p$ dans E

Théorème Formule de Grassmann : $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$

Théorème On ne change pas le rang d'un système de vecteur en remplaçant les dits vecteurs par une combinaison des autres avec un coefficient non nul

- Structure d'Algèbre : E est un algèbre si $(E, +, *_e)$ est un espace vectoriel, $(E, +, *_i)$ un anneau et si $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E, \lambda(\vec{u} \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \vec{v} = \vec{u}(\lambda \vec{v})$
- $\forall f \in L(E, F), \forall A$ sous espace vectoriel de $E, f(A)$ est un sous espace vectoriel de F

Théorème L'image d'une famille génératrice par une application linéaire est génératrice de l'image

Théorème Pour tout $f \in L(E, F)$ injective, alors l'image d'une famille libre est libre

Théorème Pour définir une application linéaire il suffit de définir l'image d'une base

Théorème Un espace E est de dimension finie n si et seulement si il existe un isomorphisme d'espace vectoriel de E vers \mathbb{K}^n

- Les isomorphismes conservent les dimensions

Théorème En dimension finie, tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image

Théorème Théorème du rang : Soit E un espace vectoriel de dimension n , $f \in L(E, F)$ alors $Im(f) = f(E)$ et $\dim Im(f) = rg(f)$. De plus, $rg(f) + \dim Ker(f) = n$

Conséquences :

- f est injective si et seulement si $rg(f) = n$
- SI $\dim E = \dim F$ alors :

$$rg(f) = n \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

Projecteurs et symétries

$p \in L(E)$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$

p projette sur E_1 parallèlement à E_2 : p se comporte comme l'identité sur E_1 et est nul sur E_2

Théorème Si p est un projecteur, alors $E = Ker(p) + Im(p)$

- Si la somme de projecteurs forme l'identité et que leur composition est nulle, les projecteurs sont dits associés

$s \in L(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id$.

s est une symétrie vectorielle par rapport à E_1 parallèlement à E_2 : s se comporte comme l'identité sur E_1 et - l'identité sur E_2

- **Propriété :** $s = 2p - Id$

14 Matrices

- Produit matriciel :

$$A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}), A \in M_{m,n}, B \in M_{n,q} \implies AB = (\gamma_{i,j}) \text{ avec } \gamma_{i,j} = \sum_{l=1}^n a_{i,l} b_{l,j}$$

- **Propriété :** $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), B \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$
- **Propriété :** $\forall (A, B) \in M_n^2(\mathbb{R}), \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$
- $E_{i,j} E_{k,l} = \delta_j^k E_{i,l}$
- Soit :

$$\begin{aligned} \Phi : L(E, F) &\rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \text{Mat}(f, (\vec{e}_j)_1^m, (\vec{b}_i)_1^m) \end{aligned}$$

Φ est un isomorphisme d'espace vectoriel et $\dim_{\mathbb{R}}(M_{m,n}(\mathbb{R})) = m * n$ donc :

$$\dim_{\mathbb{R}} L(E, F) = \dim_{\mathbb{R}} E \dim_{\mathbb{R}} F$$

Théorème $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si f est un automorphisme

- **Propriété :** $[P_{B \rightarrow B'}]^{-1} = P_{B' \rightarrow B}$

Théorème Soit E un espace vectoriel de dimension n ,

$$\forall f \in L(E), \text{tr}(\text{Mat}(f, \vec{a}_j)) = \text{tr}(\text{Mat}(f, \vec{a}_j))$$

- **Propriété :** La trace d'un projecteur est son rang
- B est équivalente à A si et seulement si $\exists (R, S) \in GL_m \times GL_n / B = RAS$
- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire (elles ont donc le même rang)
- **Propriété :** $rg(A) = rg({}^tA)$
- B est semblable à A si et seulement si $\exists P \in GL_n / A = P^{-1}BP$

Valeurs propres

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x}) &= \lambda \vec{x}, \vec{x} \neq \vec{0} \\
 \iff AX - \lambda X &= O_n \\
 \iff \vec{x} &\in \text{Ker}(f - \lambda Id) \\
 \iff f - \lambda Id &\text{ est non injective} \\
 \iff \det(A - \lambda I_n) &= 0
 \end{aligned}$$

Théorème Si une matrice est de rang r alors il existe au moins une matrice extraite de taille $r * r$ inversible. Réciproquement, si on a une matrice $r * r$ inversible et pas de matrice $(r + 1) * (r + 1)$ alors la matrice globale est de rang r .

15 Groupes symétriques et déterminants

Groupes symétriques

- Groupe symétrique S_n : ensemble des bijections de n éléments de E vers E
- $\forall f \in S_n, f = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_s$ avec (t_i) des transpositions
- cycle : permutation avec une seule orbite, les autres éléments étant inchangés
- $\forall f \in S, f$ peut se décomposer comme cycle de support disjoint
- Soit m le nombre d'orbites, $\sigma(f) = (-1)^{n-m}$
- $\forall f \in S, f = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_r \implies \sigma(f) = (-1)^r$

Déterminants

- Une application n -linéaire est symétrique si l'ordre des vecteurs ne change pas le résultat : $\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi(\vec{b}, \vec{a})$
- Une application n -linéaire est anti-symétrique si l'ordre des vecteurs change le signe du résultat : $\varphi(\vec{a}, \vec{b}) = -\varphi(\vec{b}, \vec{a})$
- Soit φ une application n -linéaire anti-symétrique, p permutations des variables donne : $\varphi(\vec{x}_{p(1)}, \dots, \vec{x}_{p(n)}) = \sigma(p)\varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$
- Une application est dite n -linéaire alternée si et seulement si elle est n -linéaire et

$$\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n / \exists i \neq j, \vec{x}_i = \vec{x}_j \implies \varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = 0$$

Théorème Une fonction est alternée si et seulement si elle est antisymétrique

- Soit $\vec{x}_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} \vec{e}_i$,

$$g : E^n \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \mapsto \sum_{p \in S_n} \sigma(p) \alpha_{p(1),1} \dots \alpha_{p(n),n}$$

$$\text{on appelle } g = \det(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{p \in S_n} \sigma(p) \alpha_{p(1),1} \dots \alpha_{p(n),n}$$

- g est une forme n -linéaire anti-symétrique (donc alternée) :

$$(\vec{x}_i)_1^n \text{ sont liés} \iff \det(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = 0$$

- $\det(A) = \det({}^t A)$
- **Propriété** : $\forall (A, B) \in M_n^2(\mathbb{R}) \quad \det(AB) = \det(A) \det(B)$ donc $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\forall A \in GL_n, A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t B$ avec B la matrice des cofacteurs

16 Formes linéaires et hyperplans

Théorème H est un hyperplan $\iff \exists f \neq 0 \in E^* / \text{Ker}(f) = H$

- **Propriété** : $(u, v) \in (E^*)^2, H = \text{Ker}(u), H' = \text{Ker}(v) \implies H = H' \iff u = \lambda v$
- **Propriété** : $\dim_{\mathbb{K}}(\cap_{i=1}^m H_i) \geq n - m$

Théorème H est un hyperplan de $E, \dim_{\mathbb{K}} E = n$ si et seulement si

$$\exists (a_j)_1^n \neq (0)_1^n / \vec{x} \in H \iff \sum_{j=1}^N a_j x_j = 0$$

17 Séries

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x)$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$
- $\sum u_k \rightarrow l \implies \lim u_k = 0$
- Si u_k ne tend pas vers 0 alors on dira que la série est grossièrement divergente
- **Propriété** : Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{K} . La suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum (u_{k+1} - u_k)$ sont de même nature
- **Propriété** : Soit $\sum u_k, \sum v_k$ 2 suites positives, alors si $u_k \sim_{\infty} v_k$, les séries sont de même nature
- Comparaison série-intégrale

Théorème Séries de Riemann : La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Théorème Règle d'Alembert : Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une série de \mathbb{R}_*^+ telle que $\lim \frac{u_{k+1}}{u_k} = \alpha$ alors si $0 \leq \alpha < 1$ la série $\sum u_k$ converge, si $\alpha = 1$ on ne peut rien dire et si $\alpha > 1$ la série est grossièrement divergente.

Théorème Critère spécial des séries alternées : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle, alors la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente

18 Espaces euclidiens

Vocabulaire Soient E un espace vectoriel euclidien et f une forme bilinéaire symétrique

- On appelle forme quadratique de $f : q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$
- \vec{x} et \vec{y} sont dit orthogonaux par rapport à f si $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$
- f est dite positive si et seulement si $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$
- f sera dite définie si et seulement si $\forall \vec{x} \in E, f(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}_E$
- Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel et f une forme bilinéaire symétrique positive et définie, on parlera alors de produit scalaire.
- $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ est la norme euclidienne
- $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ est la distance euclidienne
- $\vec{x} \perp \vec{y}$ dans le cas où $\vec{x}/\vec{y} = \vec{0}$
- $A, B \subset E, A, B \neq \emptyset$ alors $A \perp B \iff (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0 \forall (\vec{a}, \vec{b}) \in A \times B$
- F, G 2 sous espace vectoriel de E alors $F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$
- F, G 2 sous espace vectoriel de E sont dits perpendiculaires si $F^\perp \subset G \iff G^\perp \subset F$
- Une base $(\vec{e}_i)_1^n$ est dite orthogonale si $\forall i \neq j, (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = 0$
- Une base $(\vec{b}_i)_1^n$ est dite orthonormale si $\forall i \neq j, (\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j) = \delta_i^j$
- $f \in L(E, F)$ est une isométrie si et seulement si f conserve la norme
- $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale quand $A^t A = I_n$

Théorème Inégalité de Cauchy-Swartz : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$,

$$\|\vec{x} \cdot \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\|$$

Théorème Pythagore : $\vec{x} \perp \vec{y} \iff \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

Théorème $\dim E = n, (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E^p$ tel que aucun vecteur ne soit nul et qu'ils soient tous orthogonaux 2 à 2 alors c'est une famille libre.

Théorème Procédé de Gram-Schmidt : Dans tous espace vectoriel euclidien il existe des bases orthonormales

Théorème Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie, F sous espace vectoriel de E alors $E = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$

Théorème Soit F un sous espace vectoriel de E et $\vec{a} \in E, d(\vec{a}, F) = \inf_{\vec{y} \in F} \|\vec{a} - \vec{y}\|$ alors

$$d(\vec{a}, F) = \|\vec{a} - \vec{x}\| \iff \vec{a} - \vec{x} \in F^\perp \text{ et } \vec{x} = P_F(\vec{a})$$

Théorème L'isométrie entraîne l'injectivité

Théorème f est une isométrie si et seulement si f conserve le produit scalaire

Théorème Soit E, F 2 espace vectoriel euclidien de même dimension alors :

f isométrie de E vers F

\iff il existe une base orthonormale de E et une de F telle que $M(f, (\vec{e}_j)_1^n, (\vec{f}_i)_1^n)$ soit orthogonale

\iff il existe une base orthonormale de E dont l'image par f est une base orthonormale de F

- **Propriété :** $\dim_{\mathbb{R}} E = n, (\vec{e}_i)_1^n, (\vec{e}'_i)_1^n$ 2 bases orthonormales alors $P_{(\vec{e}'_i) \rightarrow (\vec{e}_i)} \in O_n(\mathbb{R})$: $P^{-1} = {}^tP$
- Pour $A \in O_n(\mathbb{R})$, si $\det(A) = 1$, f est une isométrie positive et si $\det(A) = -1$, f est une isométrie négative
- $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}$
- $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- Toute isométrie positive (rotation) peut se décomposer en produit de 2 isométries négatives (symétries) dont l'une est choisie arbitrairement
- Soient 2 vecteurs normés de E , alors il existe une unique rotation qui envoie le 1^{er} sur le 2^e (idem avec symétries)
- En dimension 3 : là où ça change rien : rotation ou symétrie d'axe orienté suivant l'axe où ça change rien

Produit mixte, vectoriel, application antisymétrique

- On appelle produit mixte l'application trilinéaire alternée qui à 3 vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ associe $\det_B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$
- Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \exists! \vec{w} \in E / \forall \vec{x} \in E, [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = \vec{w} \cdot \vec{x}$. Ce vecteur sera appelé produit vectoriel de \vec{u}, \vec{v} dans cet ordre noté $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$
- **Propriété :** $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{z}$
- **Propriété :** Le produit vectoriel est anti-commutatif : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- **Propriété :** $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à \vec{u} et \vec{v}
- **Propriété :** Si (\vec{u}, \vec{v}) est libre, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe
- **Propriété :** $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$
- **Propriété :** Le double produit vectoriel n'est PAS associatif : $\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3, \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$
- Soit $f \in L(E)$, elle sera dite antisymétrique si $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, (f(\vec{x}) \cdot \vec{y}) = -(\vec{x} \cdot f(\vec{y}))$
- **Propriété :** f est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice de f dans une base orthonormale directe est antisymétrique

19 Convexité

f est convexe si et seulement si $\forall \lambda \in [0, 1] f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \iff 0 \leq \alpha_i \leq$

$$1, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

Théorème Si $f \in \mathcal{D}^1$, la croissance de f' sur I est équivalente à la convexité de f sur I

Théorème f est convexe sur I si et seulement si f est toujours au dessus de ses tangentes

Théorème $\prod_{i=1}^n t_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i$ (prendre $f(x) = e^x$ pour la démo)

20 Probabilités

- P est une probabilité sur un ensemble fini Ω si $P : P(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, $P(\Omega) = 1$ et $\forall A, B \in P(\Omega)/A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Théorème Probabilités composées : Soit (Ω, P) un espace probabilisé et (A_1, \dots, A_n) des événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) * P_{A_1}(A_2) * P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots$$

Théorème Formule des probabilités totales : Soit (A_i) un système complet d'événements avec aucun événement impossible alors $\forall B, P(B) = \sum_i P(A_i)P_{A_i}(B)$

Théorème Formule de Bayes : Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Si $P(A)P(B) > 0$, $P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)}P_A(B)$

- 2 événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Pour X une lois de probabilité, $P_X(A) = P(X \in A)$
- **Propriété** : Formule de Van der Monde : $\sum_{k=0}^r \left[\binom{n}{k} * \binom{m}{r-k} \right] = \binom{n+m}{r}$
- $E(X) = \sum_i x_i P(X = X_i)$. Si $E(X) = 0$, X est dite centrée
- L'espérance est linéaire
- Lois binomiale : $E(X) = np$

Théorème Inégalité de Markov : Soit X une variable aléatoire réelle, :

$$\forall a > 0, P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

Théorème Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

- $V(x) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
- **Propriété** : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, V(aX + B) = a^2 V(X)$

Théorème Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Pour X variable aléatoire réelle et $E(X) = m$,

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

- $cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$
- **Propriété** : La covariance est bilinéaire symétrique

- **Propriété :** $\forall X, Y, V(X + Y) = V(X) + V(Y) - 2cov(X, Y)$
- **Propriété :** Si X et Y sont indépendants, $cov(X, Y) = 0$
- Soient X, Y deux variables aléatoires réelles, le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est : $\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

Théorème Soient X, Y deux variables aléatoires réelles de variances non nulles, alors :

$$|\rho(X, Y)| \leq 1$$

et si $|\rho(X, Y)| = 1$ alors :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / P(Y = aX + b) = 1$$