Maths MPSI

Maillet Nathan
MP*

Equations différentielles

- Résoudre $x^2y' + (2x-1)y = 0$ sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. Cette équation a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, les préciser.

Continuité

- Résoudre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue / $\forall(x, y), f(x+y) = f(x)f(y)$
- f continue sur $\mathbb{R}$ / $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty \implies f$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$
- $f \in C^1([a, b])$, justifier l'existence de $M_1 = \sup_{[a,b]}(|f'|)$

Suites

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}$. Justifier que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{\sqrt{2}-1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$
- $b > a > 0, a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$. Calculer la limite de a_n et b_n
- $f(t) = ln(1+t), u_0 > 0, u_{n+1} = f(u_n)$ Limite de u_n ?

Propiétés de $\mathbb{R}$ en tout genre

- Montrer la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Dérivabilité

- Taylor-Lagrange ordre 2 : Soit $f \in C^1([a, b]), f \in \mathcal{D}^2(]a, b[)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[/ f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f"(c)$
- Dérivée n-ième de $e^x \cos(x)$
- $f(x) = \frac{1}{2+x}, u_0 = 1, u_{n+1} = f(u_n)$. Limite de u_n ?

Lois de compositions internes

- Soit $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ Quelle structure a-t-on ?

Arithmétique

- Résoudre $\begin{cases} x \equiv 2[7] \\ x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[9] \end{cases}$

- Prouver que $374935 = 401 * 17 * 11 * 5$ divise $3^{400} - 1$ et donner le reste de la division euclidienne de $(100^{200})^{300}$ par 23

- $a \wedge b = 1$, prouver que $(a+b) \wedge ab = 1$

- Quelle condition est nécessaire et suffisante sur n pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps ?

Polynômes

- Déterminer $P/(X+3)P(x) = XP(X+1)$ et $P/P(X^2) = P(X)P(X-1)$ sur $\mathbb{C}[X]$

- Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles $X^2 + X + 1$ divise $(X+1)^n - X^n - 1$

- Décomposer en facteur irréductibles de $\mathbb{R}[X] X^8 + X^4 + 1$, $\frac{x^3}{(x+1)^4(x+2)^2}$ et calculer $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4+k^3+1}$

Intégration

- Convergence, calcul et équivalent de $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$

- Soit $f \in C^1, I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$. Montrer que $\lim\limits_{\infty} I_n = 0$

- Ensemble de définition et dérivée de $\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{ln(t)}$

- $\lim\limits_{\infty} n^3 \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^4+k^2n^2+k^4}$

Développements limités

- Décrire le graphe au voisinage de $x = 1$ de $f(x) = \frac{\ln(3-2x)}{x}$

- Donner le comportement graphique en + et - ∞ de $g(x) = (x-3)e^{\frac{1}{1+2x}}$

Espaces vectoriels

- Soit des réels $(\lambda_k)_1^n$ 2 à 2 distincts. Montrer que la famille de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto e^{\lambda_k x}$ est une famille libre.
- Soit $f \in L(E)/f^2 - 7f + 12Id = \omega$. Montrer que $Ker(f-3Id) \oplus Ker(f-4Id) = E$

Applications linéaires

- Soit $(f,h) \in L(E,F) \times L(F,H)$ Montrer que $h \circ f = \omega \iff Im(f) \subset Ker(h)$
- $(u,v) \in L(E)$ prouver $(u \circ v = u, v \circ u = v) \iff (u, v$ projecteurs et $Ker(u) = Ker(v))$
- Soit $E = C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), T : E \to E/T(f) = F, F(0) = f(0), F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ T est-il un endomorphisme ? Quels sont ses valeurs et vecteurs propres ?
- Soit $A = \{\varphi \in L(E)/\varphi = u \circ f \circ v, f \in L(E)\}$ A : espace vectoriel ? $Ker(\varphi), Im(\varphi)$? (dim$(A)$?)

Matrices

- Calculer A^n dans chacun des cas : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (rec), $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (binôme), $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (polynôme)
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Déterminants

- Soit $M = (sup(i,j))$, calculer $\det(M)$
- Calcul de : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
- Calcul du déterminant de Van der Monde : $\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & (\alpha_1)^2 & \cdots & (\alpha_1)^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & (\alpha_2)^2 & \cdots & (\alpha_2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & (\alpha_n)^2 & \cdots & (\alpha_n)^{n-1} \end{vmatrix}$

Systèmes linéaires et espaces affines

- Résoudre : $\begin{cases} x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$

- Décrire l'intersection des ensembles $\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 3 + 4\alpha \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = -2\alpha - 3 \\ z = -1 + 4\alpha - \beta \end{cases}$

Séries

- Nature des séries : $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{0.8}\ln(k)}$, $\sum\limits_{k=2}^{N} \frac{1}{k\ln^2(k)}$ et $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{\ln^5(k)}{k^{1.1}}$

- Soit $G_n = \frac{1}{(2n)!2^{2n}} \prod\limits_{k=1}^{2n} (2k-1)$. Donner la nature de la série des G_n

- Montrer que la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ converge et déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})^{-1}$

Espaces euclidiens

- Résoudre $\vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ dans $\mathbb{R}^3$

- Caractériser géométriquement $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

- Soit $G = \left\{\vec{x} \in R^4 / x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\right\}$ et $\vec{u} = (1, -1, 0, 1)$. Donner la matrice de P_G et de $P_{G^\perp}$. $d(\vec{u}, G) = ?$

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(a,b) = \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$ minima sur $\mathbb{R}^2$?

Convexité

- Montrer l'inégalité de Hölder : Soit $p, q > 0 / \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (a_i), (b_i) > 0 \implies \sum a_i b_i \leqslant (\sum (a_i)^p)^{\frac{1}{p}} (\sum (b_i)^p)^{\frac{1}{p}}$

- Montrer l'inégalité de Minkowski : Soit $p, q > 0 / \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, (a_i), (b_i) > 0 \implies (\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum (a_i)^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum (b_i)^p)^{\frac{1}{p}}$

- Montrer que la convexité de f est équivalente à :

$$\forall\,(a,b,c)\,/\,a<b<c,$$

$$\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\leqslant\frac{f\left(c\right)-f\left(a\right)}{c-a}\leqslant\frac{f\left(c\right)-f\left(b\right)}{c-b} \tag{1}$$

Probabilités

- Combien y a-t-il de surjections d'un ensemble de cardinal $n+2$ vers un ensemble de cardinal n ?

- n personnes passent le permis avec chacun une probabilité p de l'avoir. Les recalés repassent dans exactement les même conditions. Soient les variables aléatoires X : obtention du permis après 1 passage et Y : obtention du permis après 2 passages et $Z = X + Y.P(Z = l) =?$

- Soit un avion avec 400 places : en moyenne, 8% des passagés ayant réservés sont absents. La compagnie enregistre 420 réservations. Majorer la probabilité qu'il n'y ait pas assez de place.

- Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $1, 2, \cdots, k$ soit proportionnelle à k^2.

- On considère N coffres avec une probabilité p un trésor a été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans rien trouver. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

- Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ n évènements indépendants. Montrer que $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1-(1-P(A_1))\cdots(1-P(A_n))$. Une personne atteint le centre d'une cible au tire avec une probabilité de 0.04. Combien doit-elle faire d'essais pour l'atteindre avec une probabilité supérieure à 0.95 ?