Espaces vectoriels normés

Martin Andrieux, Nathan Maillet

Dans toute la suite, E et F désignent deux K espaces vectoriels normés.

Définition -

Une $norme \|\cdot\|$ est une application de E dans $\mathbb R$ telle que :

- $\forall x \in E, ||x|| \geqslant 0$
- $\forall x \in E, ||x|| = 0 \implies x = 0$
- $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\forall x, y \in E, ||x + y|| \le ||x|| + ||y||$

Cauchy Schwarz -

$$|\langle x, y \rangle| \le ||x|| \cdot ||y||$$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Caractérisations séquentielles

Avec $A \subset E$:

- A est ouvert si et seulement si pour toute suite x_n de E tendant vers a dans A, x_n est dans A pour n assez grand.
- A est fermé si et seulement si A est stable par limite.
- Pour x dans E:

$$x \in \bar{A} \iff \forall r \ge 0, B(x,r) \cap A \ne 0$$
$$\iff \exists (x_n)_{n \in N} \in A^{\mathbb{N}}/x_n \underset{\infty}{\to} x$$

Continuité et topolgie

 f est continue si et seulement si pour A fermé de E, f⁻¹(A) est un fermé de E (de même avec les ouverts).

Applications linéaires et topologie

Avec f linéaire de E dans F, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- $\bullet \ f \in \mathcal{L}_c$
- f continue en un point
- f continue en 0
- f bornée sur B(0,1)
- $\exists K \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in E, ||f(x)|| \le K ||x||$
- f est lipchitzienne

Équivalence des normes

Deux normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sont dites équivalentes si (les propriétés suivantes sont équivalentes) :

- $\bullet \ x_n \xrightarrow[n \to \infty]{\parallel \parallel_1} x \iff x_n \xrightarrow[n \to \infty]{\parallel \parallel_2} x$
- On a α et β tels que $\alpha \, \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \, \|x\|_1$

En dimension finie

- Le théorème d'équivalence des normes permet de choisir une norme adaptée au problème s'il y a besoin de norme
- Les compacts sont les fermés bornés
- $f \in L(E) \implies f \in \mathcal{L}_c$

- Les applications bi-linéraires sont continues
- Tout sous espace vectoriel est fermé

Définition -

Une partie K de E est dite *compacte* si toute suite d'élement de K possède une valeur d'adhérence dans K.

Compacité et topologie -

- Tout compact est fermé borné (la réciproque est fausse en dimension infinie)
- Une partie A d'un compacte est compacte si et seulement si elle est fermée.
- Le produit de deux compactes est compacte

Compacité et continuité

- Si $f: K \to F$ est continue, alors f est uniformément continue et f(K) est compact.
- Soient K un compact non vide et $f: K \to \mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Connexité par arcs -

A est dite connexe par arcs si et seulement si $\forall a,b \in A, \exists \gamma: [0,1] \to A$ continue telle que $\gamma(0)=a$ et $\gamma(1)=b$

Absolue convergence

$$\sum_{n\geq 0}\|u_n\|\operatorname{converge} \implies \sum_{n\geq 0}u_n\operatorname{converge}$$

Définition -

La norme subordonnée est définie par :

$$|||f||| = \sup_{x \in E} \left(\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \right)$$

On a alors : $|||g\circ f|||\leq |||g|||\times |||f|||$