Électromagnétisme

Martin Andrieux
Nathan Maillet

1 Analyse vectorielle

Circulation

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dM}$$

$$\mathcal{C} = \oint \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dM}$$

Flux

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS}$$

Théorème de Gauss

Dans un champ électrique :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Énergie

Pour n charges ponctuelles :

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i v_i$$

Pour une distributuion continue :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \varepsilon_0 E^2(M) d\tau$$

Théorème d'Ostrogradski

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{(\mathcal{V})} \operatorname{div}\left(\vec{E}\right) d\tau$$

Équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

En l'absence de charges :

$$\Delta V = 0$$

Théorème de Stokes

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Équivalence

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \iff \oint_{(C)} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \iff \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$$

2 Dipôle électrostatique

Moment dipolaire

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$

Potentiel loin d'un dipôle

$$V(M) = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

D'où :

$$E_r = \frac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \text{ et } E_\theta = \frac{p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Force exercée sur un dipôle

Force :

$$\vec{F} = \left(\vec{p}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{E}(M) = \left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\cdot\vec{E}$$

Moment pour un champ variant peu :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{p}\wedge\vec{E}(M)$$

Énergie Potentielle

$$E_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

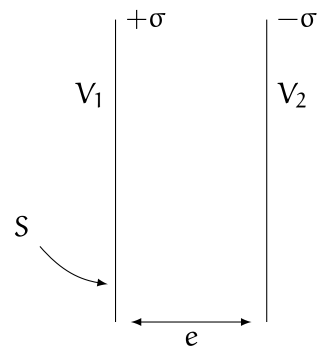
3 Conducteurs

Équilibre

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ donc } V = 0$$

Or, $\text{div}\,\vec{E} = 0$ donc $\rho = 0$. La densité volumique de charge est nulle dans tout le volume du conducteur : la charge se localise uniquement sur la surface. D'où :

$$\overrightarrow{E_{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$



Capacité

La capacité C est telle que :

$$Q = C\cdot(V1 - V2)$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Densité volumique de courant

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho_m\vec{v}$$

Dans les métaux :

$$\vec{j} = -ne\vec{v}$$

$$i = \iint_{(S)} \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}$$

Conservation de la charge

$$\text{div}\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

La démonstration de ce résultat est à connaître, en voici les grandes lignes :

$$-\frac{dq}{dt} = \oiint_{(S)} \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}$$

$$q(t) = \iiint_{(V)} \rho(M,t)d\tau$$

Ensuite, dériver q, permuter la dérivation et la sommation, appliquer Ostrogradski. L'égalité des intégrales entraîne l'égalité des grandeurs sommées.

Loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

Avec σ la *conductivité* du milieu, aussi notée γ.

Loi de Joule locale

$$\mathcal{P} = \vec{\jmath} \cdot \vec{E}$$

Résistance d'un conducteur cylindrique

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

Cette expression se retrouve rapidement avec un raisonnement purement intuitif du type « Plus le fil est long plus la résistance est grande ».

4 Magnétostatique

Force de Lorentz

$$\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

$\vec{B}$ est à flux conservatif

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

Or d'après le théorème d'Ostrogradski,

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{B} \, d\tau = 0$$

D'où :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Théorème d'Ampère

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M) \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{int}$$

Pour le théorème d'Ampère local, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath}$$

Discontinuité

La discontinuité d'un champ de part et d'autre d'une surface est en $\mu_0 \vec{\jmath_s}$. Cela est à raprocher du $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ en électrostatique.

Champ dans un solénoïde

$$\overrightarrow{B_{int}} = \mu_0 n I \cdot \vec{u_z}$$

5 Dipôle magnétique

Moment dipolaire magnétique

$$\vec{\mathcal{M}} = IS\vec{n}$$

Champ créé par un dipôle

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}\left(2\cos(\theta)\vec{u_r} + \sin(\theta)\vec{u_\theta}\right)$$

Cette expression est totalement analogue à celle obtenue pour le dipôle électrostatique, il suffit en effet de remplacer p par $\mathcal{M}$ et $\frac{1}{\varepsilon_0}$ par μ_0.

Moment des forces de Laplace

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}(M)$$

Énergie Potentielle

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

Flux du champ magnétique

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

$$\Phi = L_1 i_1 (+M_{12} i_2)$$

Avec L les coefficients d'*auto-induction* et M les coefficients d'*induction mutelle*. L est bien sûr positif. On peut montrer que $M_{ij} = M_{ji}$.

Inductance propre

Lorsque que l'on connait $\vec{B}$, il est possible de calculer le flux du champ, et donc l'inductance propre du circuit avec $\Phi = \Lambda i$.

Énergie magnétique

$$U_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + \frac{1}{2}M_{12} i_1 i_2$$

$$U_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

6 Équations de Maxwell

Égalité

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

Maxwell-Gauss

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cette équation est la forme locale du théorème de Gauss.

Flux magnétique

$$\text{div}\,\vec{B} = 0$$

Cette équation signifie que $\vec{B}$ est à flux conservatif.

Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

L'équation de Maxwell-Faraday traduit, au niveau local, la *loi de Faraday de l'induction électromagnétique.*

Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{\jmath} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ce résultat constitue le *théorème d'Ampère généralisé.*

Vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le vecteur de Poynting correspond à un flux surfacique d'énergie, ou encore à une puissance surfacique. Il s'exprime en $\mathrm{W\,m^{-2}}$. Les calculs de puissances et d'énergies se font impérativement en réel.

Équation de Poynting

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div}\,\vec{\Pi} + \vec{\jmath} \cdot \vec{E} = 0$$

Cette équation traduit localement la conservation de l'énergie.

Énergie d'un photon

$$E = h\nu$$

$$E = pc$$

Quantité de mouvement volumique

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0 \cdot c^2} = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$$

7 Induction

Loi de Faraday

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Loi de Lenz

« La f.é.m. induite tend par ses effets à s'opposer à la cause qui lui a donné naissance. »

Puissances pour l'induction de Lorentz

En notant :

- $\mathcal{P}_l$ la puissance des forces de Laplace
- $\mathcal{P}_e$ la puissance de la f.é.m. induite

$$\mathcal{P}_l + \mathcal{P}_e = 0$$

Effet de peau

Les courants sont presque entièrement concentrés dans une couche dont l'épaisseur δ est de l'ordre de :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

8 Ondes électromagnétique

Équations de propagation

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Vecteur d'onde

$\vec{u}$ est la direction du mouvement.

$$\vec{k} = \frac{n_\lambda \omega}{c}\vec{u}$$

Opérateurs d'analyse vectorielle

Ces règles ne valent que pour des OPPM.

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega\vec{E} \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = -j\vec{k}\cdot\vec{E}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -j\vec{k}\wedge\vec{E} \qquad \vec{\Delta}\vec{E} = -k^2\vec{E}$$

Relation de structure

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$$

Il faut savoir retrouver cette relation, avec la loi de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\vec{k}\wedge\vec{E} = -j\omega\vec{B}$$

Loi de Malus

Si l'angle entre les directions d'un analyseur et d'un polariseur est α, l'intensité de l'onde après l'analyseur est $I_0\cos^2(\alpha)$.

9 Dispersion

Vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Si v_φ est indépendante de ω, le milieu est *non-dispersif*. Dans le cas contraire, le milieu est *dispersif*. Le vide est le seul milieu rigoureusement non dispersif.

Relation spectre-signal

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 2\pi$$

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \sim 1$$

Vitesse de groupe

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}$$

Relation de Klein-Gordon

C'est une relation de dispertion de la forme :

$$k^2c^2 = \omega^2 - \omega_c^2$$

Rencontrée notamment dans l'étude des plasmas.

10 Rayonnement dipolaire électrique

Dipôle oscillant

Nous appellerons dipôle oscillant une distribution telle que :

$$\vec{p} = p_0 \cos(\omega t)\vec{u_z}$$

Hypothèses

- $a \ll r$ permet d'utiliser les formules relatives aux dipôles,
- $a \ll \lambda$ peut être appelée *approximation non relativiste*,
- $\lambda \ll r$ n'a pas de signification physique, mais simplifie les expressions.