Projekt 2 - Monte Carlo

Marta Gacek

January 2025

1 Wprowadzenie

Projekt dotyczy estymacji opcji finansowych. W tym celu zostanie wykorzystanych kilka różnych estymatorów - Crude Monte Carlo, Stratified, Antithetic oraz Control Variate. Istotną częścią analizy jest tak zwany ruch Browna, wykorzystywany w modelowaniu tego typu zagadnień.

1.1 Definicja ruchu Browna

Ruch Browna $\mathbf{B}$=$(B(t))_{t\leq T}$ jest procesem stochastycznym, charakteryzującym się własnościami

$$B(0) = 0,$$

$$\forall\ (0 \leq t_1 < ... < t_n \leq T)\ ((B(t_1), ..., B(t_n)) \sim N(0, \Sigma)),$$

przy czym $\Sigma(i,j) = Cov(B(t_i), B(t_j)) = min(t_i, t_j), \quad i, j = 1, ..., n.$

Mamy również do czynienia z tak zwanym geometrycznym ruchem Browna, który będzie ważnym elementem projektu. Definiujemy go jako

$$S(t) = S(0)exp\Big(\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)t + \sigma B(t)\Big), \quad 0 \leq t \leq T.$$

W powyższym wzorze $B(t)$ oznacza oczywiście ruch Browna, natomiast parametry r i σ oznaczają odpowiednio stopę procentową oraz zmienność.

1.2 Definicja opcji finansowej

Opcja finansowa jest pewnym instrumentem finansowym. Umożliwia ona kupno lub sprzedaż pewnego aktywa w wyznaczonej przyszłości po określonej z góry cenie (jednak nie narzuca nam obowiązku podjęcia takiej decyzji). Możemy wyróżnić opcje europejskie i amerykańskie. W przypadku tych pierwszych możemy podjąć akcję na samym końcu wyznaczonego przedziału czasowego. Z kolei opcje amerykańskie pozwalają na wykonanie akcji w wybranym dowolnie momencie przed terminem wygaśnięcia. Opiszemy teraz opcję finansową w języku matematycznym. Możemy to zrobić za pomocą wzoru

$$I = e^{-r}E(A_n - K)_+,$$

gdzie $A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(\frac{i}{n})$, przy czym $S(t)$ oznacza geometryczny ruch Browna jak powyżej. K jest ceną wykonania opcji. Wyrażenie $E(A_n - K)$ oznacza wartość oczekiwaną różnicy między średnią ceną bazowego aktywa a ceną wykonania. Znak "+" sygnalizuje, że musimy mieć wartość nieujemną, więc bierzemy $\max(A_n - K, 0)$. Jeśli $n = 1$, to opcja jest typu europejskiego. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z tak zwaną opcją azjatycką, czyli rodzajem opcji egzotycznej dla której wypłata jest uzależniona od średniej ceny instrumentu bazowego w okresie jej ważności (w przeciwieństwie do opcji europejskich i amerykańskich, dla których liczy się cena w momencie wygaśnięcia).

W kontekście opcji europejskiej ($n = 1$) jesteśmy w stanie wyliczyć dokładną wartość $E(A_n - K)_+ = E(S(1) - K)_+$ za pomocą metody Black-Scholes:

$$E(A_n - K)_+ = S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-r}\Phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma}\Big[log\Big(\frac{S(0)}{K}\Big) + r + \frac{\sigma^2}{2}\Big], \quad d_2 = d_1 - \sigma.$$

W efekcie po podstawieniu do wzoru dostajemy także dokładną wartość I:

$$I = e^{-r}(S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-r}\Phi(d_2))$$

1.3 Estymatory

Opiszemy krótko działanie estymatorów, które będziemy wykorzystywać.

1.3.1 Crude Monte Carlo Estimator

Niech $E(Y) = I$. W celu estymacji wartości I generujemy ciąg R niezależnych zmiennych losowych (Y_i), $i = 1, ..., R$, o jednakowym rozkładzie. Mamy $E(Y_i) = I$ dla każdego i, a wariancja jest równa σ_Y^2. Estymator jest wówczas postaci $\hat{Y}_R^{CMC} = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} Y_i$. Korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego otrzymujemy przedział ufności postaci

$$\Big[\hat{Y}_R^{CMC} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_Y}{\sqrt{R}},\ \hat{Y}_R^{CMC} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma_Y}{\sqrt{R}}\Big],$$

gdzie $z_{1-\alpha/2}$ jest kwantylem rozkładu normalnego (np. dla $\alpha = 0.05$ mamy $z_{1-\alpha/2} = 1.96$).

1.3.2 Stratified Estimator

....

1.3.3 Antithetic Estimator

Rozważamy pary zmiennych losowych postaci (Y_{2i-1}, Y_{2i}) dla $i = 1, ..., \frac{R}{2}$, gdzie R oznacza (parzystą) liczbę replikacji. Pary są niezależne o jednakowym rozkładzie. Zgodnie z wykładem estymator I ma postać $\hat{Y}_R = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R} Y_i$, a jego wariancja wynosi $Var(\hat{Y}_R) = Var(\hat{Y}_R^{CMC})(1 + Corr(Y_1, Y_2))$. Wariancja jest więc zredukowana, jeśli korelacja $Corr(Y_1, Y_2)$ jest ujemna.

Będziemy analizować pary postaci (Z_{2i-1}, Z_{2i}), gdzie $Z_{2i-1} = -Z_{2i}$. Zmienne $Z_{2i-1},\ i = 1, ..., R/2$, są niezależne o rozkładzie $N(0, 1)$.

(....przedział ufności?...)

1.3.4 Control Variate Estimator

Rozważamy pary zmiennych losowych postaci $(Y_i, X_i),\ i = 1, ..., R$. Wartość $E(X)$ jest nam znana. Definiujemy estymator postaci

$$\hat{Y}_R^{CV} = \hat{Y}_R^{CMC} + c(\hat{X}_R - E(X)),$$

przy czym $\hat{X}_R = \sum_{i=1}^{R} \frac{X_i}{R}$. Okazuje się, że $E(\hat{Y}_R^{CV}) = I$, a wariancja ma postać

$$Var(Y_R^{\hat{C}V}) = \frac{1}{R}Var(Y + cX) = \frac{1}{R}(Var(Y) + c^2 Var(X) + 2cCov(Y, X)).$$

Gdy potraktujemy ten wzór jak funkcję kwadratową od c, otrzymamy w rezultacie minimum dla $c = \frac{-Cov(Y,X)}{Var(X)}$. Po podstawieniu tej wartości współczynnika do wzoru uzyskujemy

$$Var(Y_R^{\hat{C}V}) = Var(\hat{Y}_R^{CMC})(1 - \rho^2),$$

gdzie $\rho = Corr(Y, X)$. Przy mocnej korelacji par wariancja będzie wyraźnie zredukowana. W praktyce nie znamy wartości $Cov(Y, X)$ ani $Cov(X)$, więc należy je przybliżyć. Możemy wykorzystać do tego wzór

$$\hat{c} = \frac{-S_{Y,X}^{\hat{2}}}{S_X^{\hat{2}}},$$

w którym $S_X^{\hat{2}} = \frac{1}{R-1}\sum_{i=1}^{R}(X_i - \hat{X}_R)^2$ oraz
$S_{Y,X}^{\hat{2}} = \frac{1}{R-1}\sum_{i=1}^{R}(Y_i - \hat{Y}_R^{CMC})(X_i - \hat{X}_R)$. Inaczej: dzielimy estymator próbkowej kowariancji przez estymator wariancji. Zmienną kontrolną, której użyjemy, będzie $B(1)$, która zgodnie z definicją ruchu Browna ma rozkład standardowy normalny.

2 Symulacje

W celu zaestymowania opcji finansowej napiszemy w języku Python odpowiednie algorytmy.

2.1 Założenia

Na potrzeby projektu będziemy przyjmować, że $T = 1$, więc mamy też wybrane rozłożone w równomierny sposób punkty $(t_1, ..., t_n) = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., 1)$.

Poza tym przyjmujemy parametry $r = 0.05$, $\sigma = 0.25$, $S(0) = 100$ oraz $K = 100$.