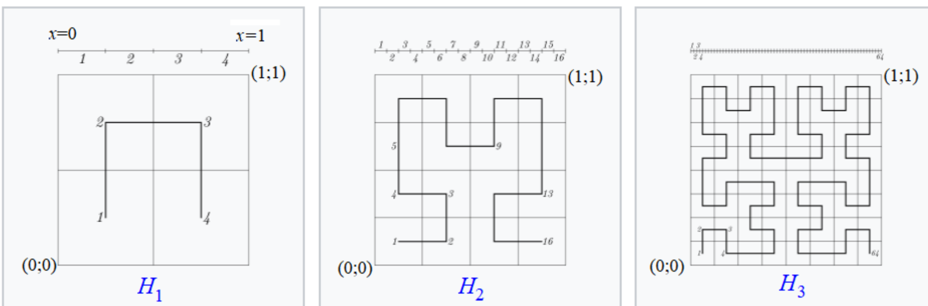
LAUZTAS LĪNIJAS UN ŠAHS

1.1 Hilberta līkne

Definēsim rekursīvi līknes $H_k(t)$.



Attēlā redzamas līknes $H_1(t)$, $H_2(t)$ un $H_3(t)$. Par līkni šeit saukta funkcija, kas definēta skaitļiem $t \in [0;1]$, bet vērtības ir skaitļu pāri (x, y) jeb punkti vienības kvadrātā $[0;1] \times [0;1]$.

Līkni $H_1(t)$ vispirms definējam vērtībām $t \in \left\{0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 1\right\}$. Sadalām kvadrātu $[0;1] \times [0;1]$ četros mazākos kvadrātos un skaitļus $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$ attēlojam uz mazo kvadrātu centriem $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ un $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Visām citām vērtībām $t \in [0;1]$ līkne ar nemainīgu ātrumu pārvietojas starp norādītajiem punktiem. Līknes vienādojumu var uzrakstīt kā sistēmiņu, šķirojot gadījumus:

$$H_1(t) = \begin{cases} (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), & \text{if } z = 0 \\ (\frac{1}{4}, 3 \cdot (\frac{1}{3} - t) \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot (t - 0) \cdot \frac{3}{4}), & \text{if } z \in (0/3; 1/3) \\ (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), & \text{if } z = 1/3 \\ (3 \cdot (\frac{2}{3} - t) \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot (t - \frac{1}{3}) \cdot \frac{3}{4}), & \text{if } z \in (1/3; 2/3) \\ (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}), & \text{if } z = 2/3 \\ (\frac{3}{4}, 3 \cdot (1 - t) \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot (t - \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{4}), & \text{if } z \in (2/3; 1) \\ (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), & \text{if } z = 1 \end{cases}$$

Līknei $H_2(t)$ sadalām nogriezni piecpadsmit vienādās daļās ar 16 punktiem:

$$t \in \left\{0, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \ldots, \frac{14}{15}, 1\right\}$$

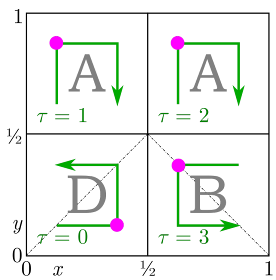
Katru no šiem punktiem attēlojam par kādu no 4×4 mazo kvadrātiņu centriem, kuros sagriežam vērtību apgabalu –

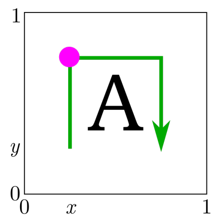
kvadrātu $[0; 1] \times [0; 1]$. Katrā no intervāliem līkni velk kā taisnes nogriezni ar nemainīgu ātrumu.

$$H_2(t) = \begin{cases} (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}), & \text{if } z = 0 \\ (15 \cdot (\frac{1}{15} - t) \cdot \frac{1}{8} + 15 \cdot (t - 0) \cdot \frac{3}{8}, \frac{1}{8}), & \text{if } z \in (0; 1/15) \\ (\frac{3}{8}, \frac{1}{8}), & \text{if } z = 1/15 \\ \ldots & \\ (\frac{7}{8}, \frac{7}{8}), & \text{if } z = 1 \end{cases}$$

Līdzīgi arī citām līknēm H_k – intervālu $[0; 1]$ sadala $2^{2k} - 1$ vienādās daļās. Sadala arī kvadrātu $[0; 1] \times [0; 1]$ mazākos kvadrātiņos: $2^k \times 2^k$ un vienmērīgā ātrumā apstaigā šo kvadrātiņu centrus.

Secība, kādā līkne apstaigā mazos kvadrātiņus, veidojas rekursīvi. Līknei H_1 šī secība ir kā pakavs $(1/4, 1/4), (1/4, 3/4), (3/4, 3/4), (3/4, 1/4)$, bet katru nākamo iegūst no iepriekšējās: Secību līknei H_{k+1} veido no četrām līknes H_k kopijām, kuras visas ir samazinātas ar līdzības koeficientu 0.5 un pagrieztas tā, kā redzams zīmējumā.





Pašu Hilberta līkni (tās vērtību argumentam $t \in [0; 1]$) definē ar robežu:

$$H(t) = \lim_{n \to \infty} H_n(t).$$

Var pamatot, ka visu funkciju $H_k(t)$ virkne konverģē vienmērīgi visā intervālā.

Aplūkojam funkciju $x = H_x(t)$, kura atrod x-koordināti līknei $H(t)$.

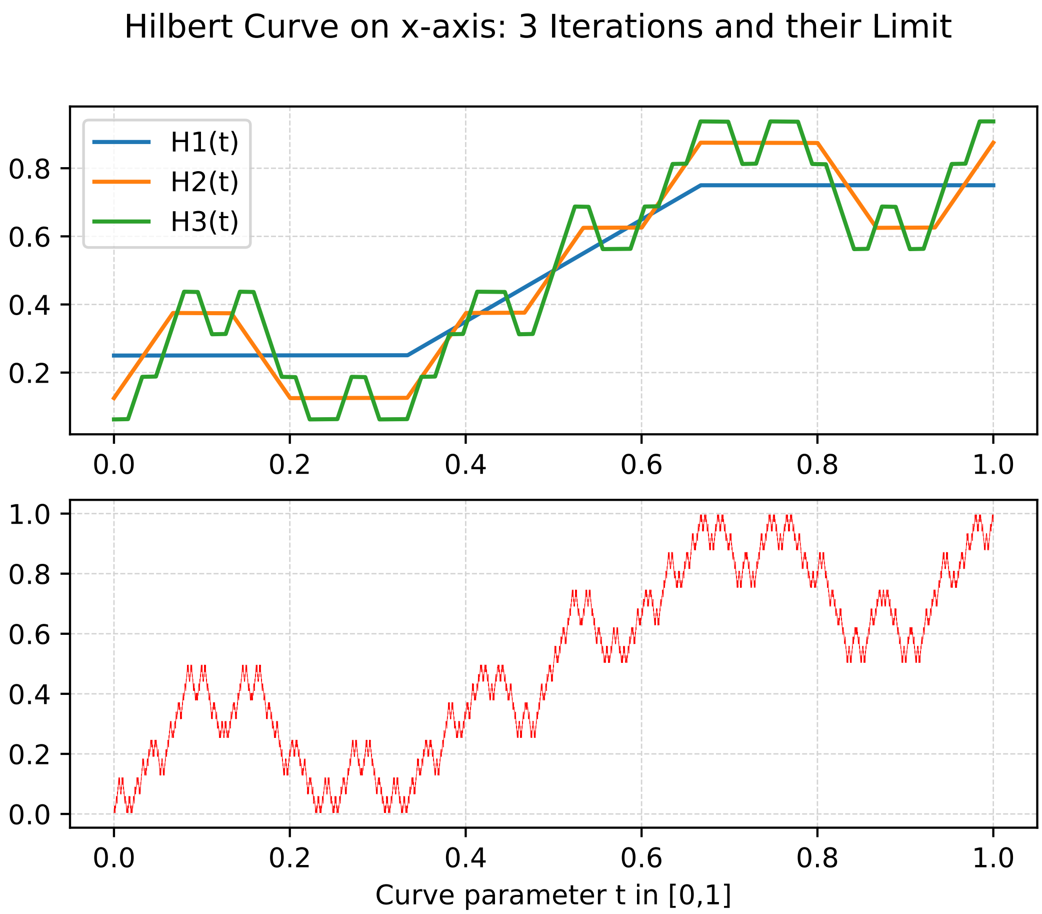
- Uzzīmēt grafiku funkcijai $x = H_x(t)$ ar Python Matplotlib vai līdzīgu rīku.
- Parādīt, ka $t \mapsto H_x(t)$ ir nepārtraukta funkcija.
- Parādīt, ka $t \mapsto H_x(t)$ ir vienmērīgi nepārtraukta funkcija un noteikt, kā dotajam $\varepsilon > 0$ var atrast $\delta > 0$ tā, lai argumentiem t_1, t_2, kam $|t_1 - t_2| < \delta$ izpildās $|H_x(t_1) - H_x(t_2)| < \varepsilon$.

Atbilde:

Vispirms uzzīmējam koordinātes Hilberta līknes tuvinājumiem $H_1(t)$, $H_2(t)$, $H_3(t)$. Pēc tam (pa labi) attēlojam grafiku pašas Hilberta līknes projekcijai uz x ass.

1.2 Šaha dāmu novietošana

Dots 12×12 šaha galdiņš. Kā izvietot tajā 12 šaha dāmas tā, lai tās neapdraudētu viena otru (neatrastos uz tās pašas horizontāles, vertikāles vai diagonāles).


Hilbert Curve on x-axis: 3 Iterations and their Limit
H1(t)
H2(t)
H3(t)
0.2
0.4
0.6
0.8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Curve parameter t in [0,1]