1 Donats els nombres complexos $\bar{z_1} = 5+3i$, $\bar{z_2} = -2-5i$, calculeu:

a) $\bar{z_1} + \bar{z_2} = (5+3i)+(-2-5i) = \boxed{3-2i}$

b) $\bar{z_1} - \bar{z_2} = (5+3i)-(-2-5i) = \boxed{7+8i}$

Per sumar o restar complexos, hem de sumar o bé restar la part real de la real i la part imaginària amb la imaginària.

c) $\bar{z_1} \cdot \bar{z_2} = (5+3i)\cdot(-2-5i) \overset{\text{distributiva}}{=} -10 -6i -15i^2 -25i \overset{i^2=-1}{=} \boxed{5-31i}$

d) $\dfrac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}} = \dfrac{(5+3i)}{(-2-5i)}$

Busquem $\bar{z_3}$ tq $\bar{z_3} = a+bi$ on volem $\dfrac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}} = \bar{z_3}$ o també podríem simplificar $\dfrac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$ multiplicant el numerador i el denominador pel conjugat complet de $\bar{z_2}$ $(\bar{z_2^*})$ i obtindríem la mateixa resposta

Tenim: $\bar{z_1} = \bar{z_2}\cdot\bar{z_3}$ i $\bar{z_3} = a+bi$

$\Leftrightarrow (5+3i) = (-2-5i)\cdot(a+bi)$

$\Leftrightarrow (5+3i) = (-2a+5b)+(-5a-2b)i$

Tindrem:
$$\begin{cases} 5 = -2a+5b \\ 3 = -5a-2b \end{cases} \qquad b = \frac{5+2a}{5} \Rightarrow 3 = -5a - 2\cdot\left(\frac{5+2a}{5}\right) \Leftrightarrow 3 = -5a - \frac{4a+10}{5}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{-25}{29} \qquad b = \frac{19}{29}$$

Igualem la part $\mathbb{R}$ amb la $\mathbb{R}$ i la imaginària amb la imaginària

Per tant: $\bar{z_3} = a+bi = \dfrac{-25}{29} + \dfrac{19}{29}i$

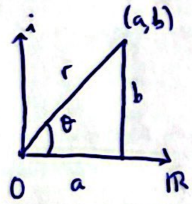
O el que és el mateix que $\dfrac{(5+3i)}{(-2-5i)} = \boxed{\dfrac{-25}{29} + \dfrac{19}{29}i}$

e) $\begin{cases} \bar{z_1} + \bar{z_2^*} = (5+3i)+(-2+5i) = \boxed{3+8i} \\ \bar{z_2^*} = -2+5i \end{cases}$

f) Notem el complex conjugat de z_2^* és z_2.

$$\frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2^*}} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2^*}}\cdot\frac{\bar{z_2}}{\bar{z_2}} \overset{(c)}{=} \frac{5-31i}{\bar{z_2^*}\cdot\bar{z_2}} = \frac{5-31i}{(-2+5i)\cdot(-2-5i)} = \frac{5-31i}{4-10i-25i^2+10i} = \boxed{\frac{5-31i}{29}}$$

Els resultats anteriors han estat expressats en forma cartesiana, fem-ho ara però amb forma polar.



$r^2 = a^2+b^2 = |z|$

Ús regles trigonomètriques: $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$ $\Rightarrow \bar{z} = a+bi = r\cdot\cos\theta + (r\cdot\sin\theta)i = r\cdot(\cos\theta + \sin\theta\cdot i)$

Notem: $\theta = tg^{-1}\dfrac{b}{a}$ per $a>0$

$\theta = tg^{-1}\dfrac{b}{a} + \pi$ per $a<0$

a) $r = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$
$\theta = tg^{-1}\left(\dfrac{-2}{3}\right) \approx -0.588$ rad
$\Rightarrow 3-2i = \boxed{\sqrt{13}\cdot(\cos(-0.588) + i\cdot\sin(-0.588))}$ $\boxed{\sqrt{13}\ |\ \cancel{80.81}\ 33.69^\circ}$

b) $r = \sqrt{7^2+8^2} = \sqrt{113}$
$\theta = tg^{-1}\left(\dfrac{8}{7}\right) \approx 0.851$ rad
$\Rightarrow 7+8i = \boxed{\sqrt{113}\cdot(\cos(0.851) + i\cdot\sin(0.851))}$ $\boxed{\sqrt{113}\ |\ 48.81^\circ}$

c) $r = \sqrt{5^2+(-31)^2} = \sqrt{986}$
$\theta = tg^{-1}\left(\dfrac{-31}{5}\right) \approx -1.41$ rad
$\Rightarrow 5-31i = \boxed{\sqrt{986}\cdot(\cos(-1.41) + i\cdot\sin(-1.41))}$ $\boxed{\sqrt{986}\ |\ 80.83^\circ}$

d) $r = \sqrt{\left(\dfrac{-25}{29}\right)^2 + \left(\dfrac{19}{29}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{986}}{29}$; $\theta = tg^{-1}\left(\dfrac{\frac{19}{29}}{\frac{-25}{29}}\right) = tg^{-1}\left(\dfrac{-19}{25}\right) \overset{a<0 \Rightarrow \theta = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)+\pi}{\approx} 2.491$ rad $\Rightarrow \dfrac{-25+19i}{29} = \boxed{\dfrac{\sqrt{986}}{29}\cdot\left(\cos(2.491) + i\sin(2.491)\right)}$ $\boxed{\dfrac{\sqrt{986}}{29}\ |\ 142.765^\circ}$

e) $r=\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{73}$

$\theta = tg^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) \approx 1.212 \text{ rad}$

$\Rightarrow 3+8i = \boxed{\sqrt{73}\cdot(\cos(1.212)+\sin(1.212)\cdot i)}$ $\qquad \boxed{\sqrt{73}\,\boxed{69.44^\circ}}$

f) $r=\sqrt{\left(\frac{5}{29}\right)^2+\left(\frac{-31}{29}\right)^2}=\frac{\sqrt{986}}{29}$

$\theta = tg^{-1}\left(\frac{-31}{5}\right) \approx -1.41 \text{ rad}$

$\Rightarrow \frac{5-31i}{29} = \boxed{\frac{\sqrt{986}}{29}\cdot(\cos(-1.41)+\sin(-1.41)\cdot i)}$ $\qquad \boxed{\frac{\sqrt{986}}{29}\,\boxed{80.837^\circ}}$

2. Considerem la funció complexa $\bar{f}(x,t)=Ae^{ik(x-vt)}$, calculeu $\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}, \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x^2}, \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2}$ i comproveu si es verifica o no una equació d'ones

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

Sabem que molts fenòmens ondulatoris en els diversos es regeixen per l'equació diferencial de segon ordre en l'espai i en el temps que anomenem equació d'ones. (1) descriu una ona unidimensional, que és no dispersiva, viatjant per l'eix x amb velocitat constant v

Començarem calculant la derivada de $\bar{f}$ respecte a x $\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\right)$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(Ae^{ik(x-vt)}\right)=A\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{ik(x-vt)}\right)=Aik\cdot e^{ik(x-vt)}=ik\bar{F}$$

Derivada parcial de $\bar{f}$ respecte de t $\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial t}\right)$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(Ae^{ik(x-vt)}\right)=A\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{ik(x-vt)}\right)=-Aikv\,e^{ik(x-vt)}=-ikv\bar{F}\overset{\omega=kv}{=}-i\omega\bar{f}$$

Derivada parcial segona de $\bar{f}$ respecte de x $\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x^2}\right)$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(ik\bar{F})=ik\frac{\partial}{\partial x}(\bar{f})\overset{\text{res } \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \wedge i^2=-1}{=}ik\cdot ik\bar{f}=-k^2\bar{F}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(-ikv\bar{F})=-ikv\frac{\partial}{\partial t}(\bar{f})\overset{\text{res } \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}}{=}-ikv\cdot(-ikv\bar{f})=-k^2v^2\bar{f}\overset{\omega=kv}{=}-\omega^2\bar{f}$$

Tenint en compte la fórmula $(\omega=kv)$, l'equació d'ona es verifica, ja que

$$\frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x^2}=-k^2\bar{f};\ \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2}=-\omega^2\bar{f}$$

Substituint aquestes derivades a l'equació d'ona obtenim: $\omega=kv \Leftrightarrow \frac{\omega}{v}=k$

$$-k^2\bar{f}-\frac{1}{v^2}\cdot\left(-\omega^2\bar{f}\right)=-k^2\bar{f}+\frac{\omega^2}{v^2}\bar{f}=-k^2\bar{f}+k^2\bar{f}=0,$$ que verifica l'equació d'ona. ■

3. Fem les següents operacions i expressem el resultat en forma cartesiana: (Usarem la fórmula d'Euler per convertir de nombres complexos de forma polar a cartesiana.

$e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\cdot\sin(\theta)$

1. $e^{-i\pi}\cdot 5e^{-i\frac{\pi}{4}}=-1\cdot 5\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\boxed{\frac{-5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i}$

$e^{-i\pi}=\cos(-\pi)+i\cdot\sin(-\pi)=-1$

$e^{-i\pi/4}=\cos(-\pi/4)+i\cdot\sin(-\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

2. $e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot\left[2e^{i\frac{\pi}{2}}+3e^{-i\frac{\pi}{2}}\right]=-i\cdot\left[2i+3\cdot(-i)\right]=\cancel{-2i+3i=\boxed{i}}\ -2i^2+3i^2\overset{i^2=-1}{=}+2-3=\boxed{-1}$

$e^{-i\pi/2}=\cos(-\pi/2)+i\cdot\sin(-\pi/2)=-i$

$e^{i\pi/2}=-(e^{-i\pi/2})=i$

3. $\frac{1}{e^{i\frac{3\pi}{2}}}\cdot\left[4e^{-i\frac{\pi}{2}}-2e^{i\pi}\right]=\frac{-1}{i}\cdot\left[4\cdot(-i)-2\cdot-1\right]=\frac{-(-i)}{1}\cdot\left[4\cdot(-i)+2\right]=-4i^2+2i\overset{i^2=-1}{=}\boxed{4+2i}$

$e^{i\frac{3\pi}{2}}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-i$; $e^{i\pi}=\cos(\pi)+i\cdot\sin(\pi)=-1$

...t és el desenvolupament en sèrie de Taylor d'una funció $f(x)$, per punts propers a $x=0$,

$$f(x) = f(0) + x\left.\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right|_{x=0} + \frac{1}{2!}x^2\left.\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} + \frac{1}{3!}x^3\left.\frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^3}\right|_{x=0} + \dots \quad (1)$$

calcular el desenvolupament de les funcions $\cos(x)$, $\sin(x)$, prop de $x=0$.

Per trobar l'expansió de la sèrie de Taylor de $\cos(x)$ i $\sin(x)$ prop de $x=0$, hem de calcular les seves derivades a $x=0$ i avaluar la sèrie. La sèrie de Taylor d'una funció $f(x)$ centrada en $x=a$ ve donada per

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$ on $f^{(n)}(a)$ indica l'n-èssima derivada de $f(x)$ avaluada en $x=a$. (2)

En el nostre cas, $a=0$.

Comencem calculant el valor en el punt $x=0$ de la funció $\sin(x)$ i les successives derivades:

$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f(0) = \sin(0) = 0 \quad f^{(4)}(x) = f(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = f(0) = \sin(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = \cos(0) = 1 \quad f^{(5)}(x) = f'(x)$

$f''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f''(0) = -\sin(0) = 0 \quad f^{(6)}(x) = f''(x)$

$f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f'''(0) = -\cos(0) = -1$

$\vdots$

A continuació, si apliquem el desenvolupament en sèrie de Taylor d'una funció $f(x)$ (1) a $x=0$ a la funció $\sin(x)$ obtenim:

$$\sin(x) \approx 0 + x + \cancel{\frac{0\cdot x^2}{2!}} - \frac{1\cdot x^3}{3!} + \cancel{\frac{0\cdot x^4}{4!}} + \frac{x^5}{5!} + \cancel{\frac{0\cdot x^6}{6!}} - \frac{1x^7}{7!} + \dots$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$, per $n \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ o de forma compacta: $\boxed{\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$

Notem que la funció $f(x) = \sin(x)$ és una funció imparella tq $-\sin(x) = \sin(-x)$. El polinomi corresponent de Taylor només té potències imparells de x.

Seguim calculant el valor en el punt $x=0$ de la funció $\cos(x)$ i les successives derivades:

$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f(0) = \cos(0) = 1 \quad f^{(4)}(x) = f(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = f(0) = \cos(0) = 1$

$f'(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'(0) = -\sin(0) = 0 \quad f^{(5)}(0) = f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f''(0) = -\cos(0) = -1 \quad f^{(6)}(0) = f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin(x) \Rightarrow f'''(0) = \sin(0) = 0$

$\vdots$

A continuació, si apliquem el desenvolupament en sèrie de Taylor d'una funció $f(x)$ (1) a $x=0$ a la funció $\cos(x)$ obtenim:

$$\cos(x) \approx 1 + \frac{0x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{0\cdot x^3}{3!} + \frac{1\cdot x^4}{4!} + \frac{0\cdot x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{0\cdot x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$, per $n \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ o de forma compacta: $\boxed{\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}$

Notem que la funció $f(x) = \cos(x)$ és una funció parella tq $\cos(x) = \cos(-x)$. El polinomi de Taylor corresponent només té potències parells de x.

5. Calcular el desenvolupament en sèrie de Taylor de la funció e^{ix} prop de $x=0$ i comprovar que es verifica la igualtat:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\cdot\sin(x)$$

Anàlogament a l'exercici anterior, per trobar l'expressió de la sèrie de Taylor de e^{ix} prop de $x=0$, hem de calcular les seves derivades a $x=0$ i avaluar la sèrie. Si recordem l'expressió (2) de l'exercici 4, el desenvolupament de la sèrie de Taylor de la funció $f(x)=e^{ix}$ al voltant de $x=0$ és:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(ix)^n \overset{\text{aplicat notació de sèries geomètriques a cada terme de la sèrie}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\cdot x^n$$

on $f^{(n)}(0)$ denota l'n-èssima derivada de f a $x=0$. Calculem les derivades de f, fent:

$$f(x) = e^{ix} \Rightarrow f(0) = e^{i\cdot 0} = 1 \qquad f^{(4)}(0) = e^{i\cdot 0} = 1$$
$$f'(x) = ie^{ix} \Rightarrow f'(0) = ie^{i\cdot 0} = i$$
$$f''(x) = -e^{ix} \Rightarrow f''(0) = -e^{i\cdot 0} = -1$$
$$f'''(x) = -i\cdot e^{ix} \Rightarrow f'''(0) = -i\cdot e^{i\cdot 0} = -i$$

Veiem doncs que el desenvolupament en sèrie de Taylor de $f(x)=e^{ix}$ al voltant de $x=0$ és

$$f(x) \approx 1 + i\cdot x - \frac{x^2}{2!} - i\cdot\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{o el mateix: } e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\cdot x^n \approx 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Observem que per simplificar la sèrie anterior, podem agrupar els termes parells i imparells, recordem l'exercici 4 per exemple. Precisament, la sèrie que hem obtingut és la suma de dues sèries de potències, una pel cosinus i una pel sinus.

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + i\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right) \qquad (3)$$

Això es deu ja que la definició del cosinus i sinus en termes de potències és:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad i \quad \sin(x) = \sum^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Per tant, podem escriure (3) com: $\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\cdot\sin(x)}$

Hem obtingut per tant la fórmula d'Euler. Ara però, em queda verificar la igualtat. Ho farem per $x=\pi$. Substituïm $x=\pi$ a la fórmula:

$$e^{i\pi} \underset{}{\overset{\cos(\pi)=-1;\ \sin(\pi)=0}{=}} \cos(\pi) + i\cdot\sin(\pi) = -1 \quad \text{(identitat d'euler)}$$

Veiem que aquesta igualtat és certa per $x=\pi$ (que és un cert valor específic de x) i veiem que podem estar segurs que la fórmula és certa $\forall$ valor de x.