LTMS.00.062

KÕRGEM MATEMAATIKA I

(alused)

Loengukonspekt

2023/2024 sügissemester

Marek Kolk (2016)
Natalia Saealle (2023)

Sisukord

Peatükk 1

Tähistused. Reaalarvud

1.1 Tähistused

$a \in X$	element a kuulub hulka X
$a \notin X$	a ei kuulu hulka X
$X \subset Y$	hulk X sisaldub hulgas Y
$A \cup B$	hulkade ühend
$A \cap B$	hulkade ühisosa
$X \setminus Y$	hulgast X lahutatakse hulk Y
$\Rightarrow$	järeldub
$\Leftrightarrow$	on samaväärne
$\forall x$	kehtib iga x-i korral
$\exists x$	leidub selline x
$\mathbb{N}$	naturaalarvude hulk
$\mathbb{Z}$	täisarvude hulk
$\mathbb{Q}$	ratsionaalarvude hulk
$\mathbb{I}$	irratsionaalarvude hulk
$\mathbb{R}$	reaalarvude hulk

1.2 Kreeka tähestik

α	alfa
β	beeta
γ	gamma
δ, Δ	delta
ε	epsilon
ζ	dzeeta
η	eeta
θ, Θ	teeta
ι	ioota
κ	kapa
λ	lambda
μ	müü
ν	nüü
ξ	ksii
o	omikron
π	pii
ϱ	roo
σ, Σ	sigma
τ	tau
υ	üpsilon
φ	fii
χ	hii
ψ	psii
ω	oomega

1.3 Reaalarvud

Arvud moodustavad mingis mõttes matemaatika vundamendi. Erinevat tüüpi arvudel võivad olla erinevad omadused ja kasutusvaldkonnad. Enne reaalarvudeni jõudmist peame tutvuma veidi lihtsamate arvudega.

Definitsioon 1.1

Tähistame sümboliga $\mathbb{N}$ kõigi **naturaalarvude hulka**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

ja sümboliga $\mathbb{Z}$ kõigi **täisarvude hulka**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}.$$

Negatiivsete arvude sissetoomisega saab esitada näiteks järgmise anekdoodi: *Füüsik, bioloog ja matemaatik näevad, kuidas tühja majja siseneb kaks inimest. Hiljem väljub sealt aga kolm inimest. Füüsik mõtleb: "Tegemist on mõõtmisveaga." Bioloog arvab, et inimesed vahepeal paljunesid ja matemaatik ütleb: "Praegu on majas miinus üks inimest. Kui nüüd täpselt üks inimene siseneb majja, siis on maja uuesti tühi."*

Definitsioon 1.2

Ratsionaalarvudeks nimetatakse arve, mis on esitatavad kujul $\frac{p}{q}$, kus $p \in \mathbb{Z}$ ja $q \in \mathbb{N}$. Kõigi ratsionaalarvude hulka tähistame sümboliga $\mathbb{Q}$.

Ratsionaalarvudeks on parajasti need arvud, mis on esitatavad lõplike kümnendmurdudena (näiteks 3,895) või lõpmatute perioodiliste kümnendmurdudena (näiteks $15{,}9878787\dots$, mida kirjutatakse lühemalt kujul $15{,}9(87)$).

Definitsioon 1.3

Arve, mis on esitatavad lõpmatute mitteperioodiliste kümnendmurdudena, nimetatakse **irratsionaalarvudeks**. Irratsionaalarvude hulka tähistame sümboliga $\mathbb{I}$.

Näide 1.1. Irratsionaalarvudeks on näiteks

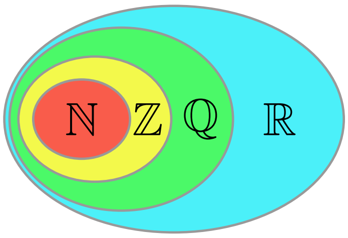
$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\dots, \quad \pi = 3{,}141592653\dots, \quad e = 2{,}718281828\dots$$

jne.

Definitsioon 1.4

Kõik ratsionaal- ja irratsionaalarvud moodustavad reaalarvude hulga. Kõigi reaalarvude hulka tähistame sümboliga $\mathbb{R}$.

Arvuhulkade vahel valitseb seos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.



Joonis 1.1

Siinjuures ∞ ja $-\infty$ ei ole mingid arvud, nendega ei saa sooritada aritmetilisi tehteid ning nad ei asetse kuskil reaalteljel, vaid on matemaatikas abivahendina kaasatud kui „lõpmatuse“ sümbolid, mida kasutatakse reaalarvude ja nende hulkadega seotud omaduste kirjeldamisel. Antud („lõpmatuse“) sümboli kasutuselevõtt pannakse inglise matemaatiku John Wallise (1616-1703) arvele.

Reaalarvude hulga kirjapanekuks kasutatakse kirjutusviisi $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Reaalarve kujutatakse arvsirge punktidena. Igale punktile A arvsirgel vastab parajasti üks reaalarv a. Seetõttu kasutataksegi "reaalarv a" asemel ka väljendit "punkt a".

1.4 Reaalarvu absoluutväärtus

Peame meeles, et iga reaalarvu $a \in \mathbb{R}$ korral

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Näiteks, $\sqrt{25} = 5$ ja mitte -5, kuna juurimine on defineeritud alati üheselt mittenegatiivse arvuna. Seda ei tohi segamini ajada võrrandi lahendamisega. Võrrandil võib olla rohkem kui üks lahend, näiteks $x^2 = 25$ lahenditeks on $x_1 = 5$ ja $x_2 = -5$.

Definitsioon 1.5

Reaalarvu a **absoluutväärtuseks** nimetatakse arvu $|a|$, mis rahuldab tingimust

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases}$$

Vastaku reaalarvule a arvsirge punkt A ja reaalarvule b arvsirge punkt B. Siis arv $|a - b|$ on võrdne punktide A ja B vahelise kaugusega. Erijuhul $b = 0$, saame, et $|a|$ on punkti A kaugus nullpunktist.

Omadus 1.1

Absoluutväärtuse tähtsamad omadused:

1. $|a| \geq 0$,
2. $|-a| = |a|$,
3. $a \leq |a|$,
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$,
5. $|ab| = |a||b|$,
6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$

Peatükk 2

Maatriksid

2.1 Maatriksi mõiste

Maatriks on nii matemaatikas kui arvutite maailmas väga oluliseks objektiks, mis tunduvalt lihtsustab informatsiooni salvestamist, ülekandmist ja mõningaste süsteemide uurimist.

Definitsioon 2.1

Olgu m ja n naturaalarvud.

$m \times n$ **maatriksiks** nimetatakse m reast ja n veerust koosnevat ristkülikukujulist arvude tabelit:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Arve a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n)$ nimetatakse maatriksi elementideks.

Maatriksi sõna tuleb ladina keelest *matrix*, mis tähendab algupäraselt „emakas, allikas, algus“.

Maatriksi ümber olevad sulud on selleks, et eristada maatriksit mõnest teisest matemaatilisest objektist. Sulgude $(\cdot)$ asemel kasutatakse ka kandilisi sulge $[\cdot]$ või siis topeltkriipse $\|\cdot\|$. Küll aga ei tohi kasutada ühekordseid püstkriipse $|\cdot|$, kuna viimane on meil maatriksi determinandi tähistamiseks.

Maatriksi elemendi a_{ij} indeks i näitab rida ja indeks j näitab veergu, milles element asetseb.

Tavaliselt tähistame maatriksit ennast suure tähtega (näiteks A) ning maatriksi elemente tähistame indeksiga varustatud väikse tähega (näiteks a_{ij}). Lühidalt esitatakse sama maatriksit ka kujul $A = (a_{ij})$.

Näide 2.1. Maatriksiteks on näiteks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = (5), \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & \pi & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Siinjuures $a_{12} = 2$, $b_{11} = 5$, $c_{32} = \pi$ ja $d_{21} = 0$.

Definitsioon 2.2

Me nimetame maatriksit **nullmaatriksiks**, kui kõik tema elemendid võrduvad nulliga:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Nullmaatriksit tähistame sümboliga Θ (kreeka suurtäht teeta).

Definitsioon 2.3

Kui maatriksi ridade ja veergude arv on võrdne, $m = n$, siis nimetame maatriksit **ruutmaatriksiks** või ka n**-ndat järku maatriksiks**.

Kui $A = (a_{ij})$ on n-ndat järku ruutmaatriks, siis öeldakse, et elemendid $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ moodustavad maatriksi A **peadiagonaali**.

Definitsioon 2.4

Ruutmaatriksit nimetatakse **ühikmaatriksiks**, kui tema peadiagonaali elemendid võrduvad ühega ja kõik teised elemendid võrduvad nulliga:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ühikmaatriksit tähistame sümboliga E (kasutatakse ka tähist I).

Näide 2.2. Näiteks

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on vastavalt 3×2 nullmaatriks ja kolmandat järku ühikmaatriks.

Definitsioon 2.5

Ruutmaatriksit nimetatakse **kolmnurkseks**, kui tema peadiagonaalist üleval või all on ainult nullid.

Näide 2.3. Maatriks

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

on kolmnurkne, tema peadiagonaal koosneb arvudest $2, 1, 0, 7$.

2.2 Tehted maatriksitega

Definitsioon 2.6

Kui $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$ on mõlemad $m \times n$ maatriksid, siis maatriksite A ja B **summaks** (**vaheks**) nimetatakse $m \times n$ maatriksit $C = (c_{ij})$, mille elementideks on vastavate elementide summad (vahed):

$$C = A \pm B, \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n).$$

Näide 2.4. Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maatrikseid A ja C ning B ja C ei ole võimalik omavahel liita ega lahutada, kuna nende ridade ja veergude arv on erinev. Küll aga saame leida A ja B summa ning vahe:

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 11 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -4 & 13 & -9 \end{pmatrix}.$$

Maatriksite liitmisel on sarnased omadused reaalarvude liitmisega.

Omadus 2.1

Olgu A, B, C ja nullmaatriks Θ samade mõõtmetega maatriksid. Maatriksite liitmisel on järgmised omadused.

1. $A + B = B + A$ (liitmise kommutatiivsus);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (liitmise assotsiatiivsus);
3. $A + \Theta = A$.

Definitsioon 2.7

$m \times n$ maatriksi $A = (a_{ij})$ **korrutiseks skalaariga** (ehk arvuga) λ nimetatakse $m \times n$ maatriksit $C = (c_{ij})$, mille elemendid saadakse maatriksi A kõigi elementide korrutamisel arvuga λ:

$$C = \lambda A,\ c_{ij} = \lambda a_{ij}\ (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n).$$

Näide 2.5. Korrutame eelmise näite maatriksit A arvuga 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 2A = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 16 \\ 4 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sama tulemuse saaksime, kui liidaksime $A + A = 2A$.

Definitsioon 2.8

Maatriksit $(-1)A$ nimetatakse maatriksi A **vastandmaatriksiks** ja tähistatakse $-A$.

Kahe maatriksi vahet saab defineerida kui liitmist vastandmaatriksiga:

$$A - B = A + (-B).$$

Sageli tuleb maatriksi ridades esinevad arvud paigutada hoopis veergudesse.

Definitsioon 2.9

$m \times n$ maatriksi $A = (a_{ij})$ **transponeeritud maatriksiks** nimetatakse $n \times m$ maatriksit $C = (c_{ij})$, mis saadakse maatriksi A ridade ja veergude äravahetamisel:

$$C = A^T,\ c_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m).$$

Üleminekut maatriksilt A maatriksile A^T nimetatakse maatriksi A transponeerimiseks.

Näide 2.6. Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sel juhul

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Omadus 2.2

Olgu maatriksid A ja B samade mõõtmetega maatriksid ning $\lambda \in \mathbb{R}$. Sel juhul transponeeritud maatriksite jaoks kehtivad järgmised omadused:

1. $(A^T)^T = A$,
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Definitsioon 2.10

Olgu $A = (a_{ij})$ $m \times n$ maatriks ja $B = (b_{ij})$ $n \times p$ maatriks. Maatriksite A ja B **korrutiseks** nimetatakse $m \times p$ maatriksit $C = (c_{ij})$, mille elemendi c_{ij} saamiseks korrutatakse maatriksi A i-nda rea elemendid maatriksi B j-nda veeru vastavate elementidega ning saadud korrutised liidetakse:

$$C = AB, \; c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad (i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, p).$$

Niisiis, korrutis AB eksisteerib, kui maatriksi A veergude arv võrdub maatriksi B ridade arvuga. Selleks, et eksisteeriks korrutis BA, on vaja, et maatriksi B veergude arv oleks võrdne maatriksi A ridade arvuga.

Näide 2.7. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Korrutist AB ei ole olemas, sest maatriksis A on kolm veergu, aga maatriksis B on vaid kaks rida. Samal ajal korrutis BA eksisteerib, kuna maatriksis B on kaks veergu ja maatriksis A kaks rida:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 4 + 1 \cdot 7 & 0 \cdot 5 + 1 \cdot 8 & 0 \cdot 6 + 1 \cdot 9 \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 29 & 34 & 39 \end{pmatrix}.$$

Võib juhtuda, et saab leida nii korrutise AB kui ka korrutise BA, kuid tulemuseks saame erinevad maatriksid.

Näide 2.8. Olgu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siis

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 0\cdot 0 & 1\cdot 4 + 0\cdot 0 \\ 2\cdot 3 + 0\cdot 0 & 2\cdot 4 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 4\cdot 2 & 3\cdot 0 + 4\cdot 9 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 2 & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Omadus 2.3

Olgu maatriksid A, B, C, ühikmaatriks E ja nullmaatriks Θ selliste mõõtmetega, et allpool toodud iga üksik tehe on teostatav.

1. $AB \neq BA$ (maatriksite korrutamine pole kommutatiivne).
2. $A(BC) = (AB)C$ (korrutamise assotsiatiivsus).
3. $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ (distributiivsus).
4. $AE = EA = A$.
5. $A\Theta = \Theta A = \Theta$.

2.3 Maatriksi pöördmaatriks

Definitsioon 2.11

Ruutmaatriksi A **pöördmaatriksiks** nimetatakse sellist maatriksit A^{-1}, mille korrutis maatriksiga A võrdub ühikmaatriksiga:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{2.1}$$

Maatriksit nimetatakse **pööratavaks**, kui tal leidub pöördmaatriks.

Osutub, et pöördmaatriksi definitsioonis tingimuse (2.1) saab asendada kas võrdusega $AA^{-1} = E$ või $A^{-1}A = E$.

Näide 2.9. Maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriks on maatriks

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

sest

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Omadus 2.4

1. Kui maatriks A on pööratav, siis ka tema pöördmaatriks A^{-1} on pööratav, kusjuures

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2. Iga ühikmaatriks E on pööratav, kusjuures

$$E^{-1} = E.$$

3. Kui A ja B on sama järku pööratavad maatriksid, siis ka maatriks AB on pööratav, kusjuures

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Tõestus. 1. Kuna maatriks A on pööratav, siis leidub tema pöördmaatriks A^{-1}. Kuna

$$A^{-1}A = E,$$

siis pöördmaatriksi definitsiooni järgi saame väita, et maatriks A on maatriksi A^{-1} pöördmaatriks ehk $A = (A^{-1})^{-1}$.

2. Kuna

$$EE = E,$$

siis pöörmaatriksi definitsiooni järgi maatriks E on maatriksi E pöördmaatriks ehk $E = E^{-1}$.

3. Olgu A ja B sama järku pööratavad maatriksid. Siis leiduvad maatriksid

$$C = AB \quad \text{ja} \quad D = B^{-1}A^{-1}.$$

Kuna

$$CD = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

kus E on ühikmaatriks, siis maatriks D on maatriksi C pöördmaatriks:

$$D = C^{-1}.$$

Oleme näidanud, et

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

□

Mitte kõik ruutmaatriksid on pööratavad. Näiteks nullmaatriksil Θ puudub pöördmaatriks, sest suvalise maatriksi A korral korrutis ΘA on nullmaatriks ja ei või olla ühikmaatriksiks. Piisava ja tarviliku tingimuse selleks, et maatriks oleks pööratav, me anname järgmises peatükis, kui determinandi mõiste on sisse toodud (vt teoreem 3.2).

Vaatleme, kuidas leida maatriksi pöördmaatriksit. Selleks on olemas mitu võimalust. Antud kursuse raames me piirdume Gaussi–Jordani meetodiga, mis põhineb maatriksi ridade elementaarteisendustel.

Definitsioon 2.12

Elementaarteisendused maatriksi ridadega on järgmised teisendused:

1. maatriksi kahe rea äravahetamine;
2. maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga;
3. maatriksi reale mingi arvuga korrutatud mingi teise rea liitmine.

Analoogiliselt defineeritakse **elementaarteisendused maatriksi veergudega**.

Gaussi–Jordani meetod pöördmaatriksi leidmiseks. Kirjutame kõrvuti ühte maatriksisse maatriksid A ja E (paremaks eristamiseks eraldame nad püstrkriipsuga): $(A|E)$. Teeme selle maatriksi ridadega elementaarteisendusi eesmärgiga saada vasakule poole ühikmaatriks, siis paremale poole, ühikmaatriksi kohale, tekib maatriksi A pöördmaatriks:

$$(A|E) \xrightarrow{\text{ridade elementaarteisendused}} (E|A^{-1}).$$

Näide 2.10. Leiame maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriksi A^{-1}. Selleks kirjutame kõrvuti maatriksi A ja ühikmaatriksi E:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Me soovime maatriksit A teisendada ühikmaatriksiks. Alustame esimesest veerust ja viime seda kujule $\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$. Jagame laiendatud maatriksi $(A|E)$ esimese rea läbi arvuga 2:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} :2 \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Järgnevalt püüame teha elemendi a_{21} nulliks. Selleks lahutame teisest reast 5-kordse esimese rea:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 5-5\cdot 1 & 9-5\cdot 2 & 0-5\cdot\frac{1}{2} & 1-5\cdot 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right).$$

Nüüd esimene veerg on nõutud kujul. Tegeleme teise veeruga:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2R_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1-2\cdot 0 & 2-2\cdot 1 & \frac{1}{2}-2\cdot\frac{5}{2} & 0-2\cdot(-1) \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{9}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -1 \end{array}\right).$$

Oleme maatriksi A viinud ridade elementaarteisenduste abil ühikmaatriksiks. Seega A pöördmaatriksiks on püstkriipsust paremal pool olev maatriks:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

On lihtne veenduda, et tõepoolest $AA^{-1} = E$, s.t leitud maatriks on maatriksi A pöördmaatriks.

Näide 2.11. Olgu antud maantriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ja} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lahendame maatriksvõrrandi

$$AX = B.$$

Kõigepealt leiame maatriksi A pöördmaattiks:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -R_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \end{array}$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -3R_2 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Niisiis, maatriks A on pööratav, kusjuures

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Korrutame võrrandi $AX = B$ mõlemat poolt maatriksiga A^{-1}. Kuna maatriksite korrutamine pole kommutatiivne, tuleb otsustada, kas on mõtekam korrutada maatriksiga A^{-1} vasakult

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

või paremalt

$$AXA^{-1} = BA^{-1}.$$

Meie võrrand lihtsustub, kui korrutama maatriksi A pöördmaatriksiga vasakult. Niisiis,

$$\begin{aligned} AX &= B & &\Big| A^{-1} \cdot (\,) \\ A^{-1}AX &= A^{-1} \\ X &= A^{-1}B \\ X &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & &. \\ X &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Peatükk 3

Determinandid

3.1 Determinandi mõiste

Maatriksi determinant on arv, mida teatud reegli järgi saab panna vastavusse suvalisele ruutmaatriksile.

Maatriksi A determinanti tähistame $\det A$ või $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Determinant on induktiivselt defineeritud: esmalt esimest järku maatriksi determinant, selle abil teist järku maatriksi determinant, selle abil kolmandat järku maatriksi determinant jne. Determinandi defineerimiseks on meil vaja elemendile vastava miinori mõistet.

Definitsioon 3.1

Olgu $A = (a_{ij})$ n-ndat järku ruutmaatriks. Jätame välja elementi a_{ij} läbivat rida ja veergu, saame $n-1$ järku ruutmaatriksi. Saadud maatriksi determinanti nimetatakse ruutmaatriksi A **elemendile a_{ij} vastavaks miinoriks**.

Näide 3.1. Olgu antud determinant

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Elementidele a_{11}, a_{12} ja a_{13} vastavad järgmised miinorid:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Toome ära determinandi definitsiooni.

Definitsioon 3.2

Esimest järku ruutmaatriksi $A = (a_{11})$ determinant on $|A| = a_{11}$.

Olgu $A = (a_{ij})$ n-ndat ($n > 1$) järku ruutmaatriks. Fikseerime maatriksi A suvalist rida i. Maatriksi A **determinandiks** nimetatakse summat

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in}, \tag{3.1}$$

kus M_{ij} on elemendile a_{ij} vastav miinor.

Kui valemit (3.1) rakendatakse reale i, siis räägitakse maatriksi A determinandi arendamisest rea i järgi. Determinandi väärtus ei sõltu rea valikust.

Tuletame valemit teist järku maatriksi determinandi leidmiseks arendades seda esimese rea järgi:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\mathbf{a_{11}}|a_{22}| + (-1)^{1+2}\mathbf{a_{12}}|a_{21}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Teist järku maatriksi determinant on leitav valemiga

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Tuletame valemit kolmandat järku maatriksi determinandi leidmiseks arendades seda esimese rea järgi:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}\mathbf{a_{11}}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\mathbf{a_{12}}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\mathbf{a_{13}}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Kolmandat järku maatriksi determinant on leitav valemiga

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Definitsioon 3.3

Ruutmaatriksit A, mille determinant ei võrdu nulliga, nimetatakse **regulaarseks**. Vastasel juhul nimetatakse ruutmaatriksit A **singulaarseks**.

Näide 3.2. Pole raske aimata, et suvalise ühikmaatriksi determinant võrdub ühega. Näiteks, kui tegemist on neljandat järku ühikmaatriksiga, saame

$$|E| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Kuna $|E| = 1$, siis ühikmaatriks on regulaarne.

Kui nullmaatriks Θ on ruutmaatriks, siis $|\Theta| = 0$ ehk see maatriks on singulaarne.

Teoreem 3.1

Kui A ja B on sama järku ruutmaatriksid, siis

$$|AB| = |A||B|.$$

Muuhulgas teoreemist 3.1 järeldub, et singulaarne maatriks pole pööratav, sest pööratavate maatriksite korral peab kehtima

$$|A||A^{-1}| = |E| = 1.$$

Kui $|A| = 0$, siis ei leidu sellist maatriksit A^{-1}, et korrutis $|A||A^{-1}|$ on nullist erinev. Teiselt poolt osutub, et kui maatriks on regulaarne, siis ta on pööratav. Kokkuvõttes kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 3.2

Ruutmaatriks on pööratav parajasti siis, kui ta on regulaarne.

3.2 Determinandi omadused

Omadus 3.3

Kolmnurkse maatriksi determinant võrdub peadiagonaali elementide korrutisega.

Veendume, et omadus 3.3 kehtib 4-järku maatriksi determinandi näitel. Olgu A kolmnurkne maatriks:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Leiame maatriksi determinandi arendades esimese rea järgi:

$$|A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} \mathbf{a_{22}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} (-1)^{1+1} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}.$$

Omadus 3.4

Maatriksi transponeerimisel determinant ei muutu:

$$|A| = |A^T|.$$

Sellest järeldub, et kõik determinantide omadused, mis kehtivad ridade kohta, kehtivad ka veergude kohta. Samas selle omaduse järgi saame arendada determinanti mitte ainult ridade vaid ka veergude järgi.

Näide 3.3. Leiame kolmandat järku maatriksi determinandi

$$|D| = \begin{vmatrix} 4 & \mathbf{0} & 5 \\ 17 & \mathbf{12} & 31 \\ 7 & \mathbf{0} & 9 \end{vmatrix}.$$

Näeme, et teises veerus ainult üks element on nullist erinev. Arendades teise veeru järgi saame

$$|D| = (-1)^{2+2} \cdot 12 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 12.$$

Enne determinandi arendamist on kasulik seda teisendada sobivale kujule. Näiteks, on palju lihtsam leida determinanti arendades seda sellise rea või veeru järgi, kus ainult üks element on nullist erinev. Determinandi teisendamiseks sobivale kujule kasutame järgmisi determinandi omadusi.

Omadus 3.5

1. Kahe rea (või veeru) vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.
2. Mistahes rea (või veeru) elementides esineva ühise kordaja võib tuua kordajaks determinandi sümboli ette, s.t

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. Determinandi väärtus ei muutu, kui ühe rea (või veeru) elementidele liita ühe ja sama teguriga korrutatud teise rea (või veeru) elemendid.

Näide 3.4.

1. Olgu

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 9 \\ 17 & 12 & 31 \end{vmatrix}.$$

Näeme, et maatriks A on saadud maatriksist D näitest 3.3 teise ja kolmanda rea äravahetamise teel, seega omaduse 3.5.1 järgi

$$|A| = -|D| = -12.$$

2. Leiame determinandi

$$|B| = \begin{vmatrix} 80 & 0 & 50 \\ 34 & 12 & 31 \\ 14 & 0 & 9 \end{vmatrix}.$$

Paneme tähele, et kõik esimese veeru elemendid jaguvad kahega ja esimese rea elemendid jaguvad kümnega. Rakendame omadust 3.5.2 kaks korda:

$$|B| = \begin{array}{c} :2 \\ \begin{vmatrix} 80 & 0 & 50 \\ 34 & 12 & 31 \\ 14 & 0 & 9 \end{vmatrix} \end{array} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 40 & 0 & 50 \\ 17 & 12 & 31 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} \begin{array}{l} :10 \\ \\ \\ \end{array} = 2 \cdot 10 \cdot |D| = 20 \cdot 12 = 240.$$

3. Leiame determinandi

$$|C| = \begin{vmatrix} 4 & 50 & 5 \\ 7 & 90 & 9 \\ 17 & 322 & 31 \end{vmatrix}.$$

Selleks lahutame teise veeru elementidest kümnega korrutatud kolmanda veeru elemendid (omadus 3.5.3):

$$|C| = \begin{array}{c} -10V_3 \\ \begin{vmatrix} 4 & 50 & 5 \\ 17 & 322 & 31 \\ 7 & 90 & 9 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 17 & 12 & 31 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} = |D| = 12.$$

Lõpuks toome juurde kaks tunnust, mis aitavad meid järeldada, et maatriksi determinant võrdub nulliga.

Omadus 3.6

1. Kui mingi rea (või veeru) kõik elemendid on nullid, siis determinant võrdub nulliga.
2. Kahe võrdse rea (või veeru) korral on determinandi väärtus null.

3.3 Determinandi arvutamise algoritm

Toome välja algoritmi, mis aitab meil kiiremini leida suvalise järku determinandi.

Determinandi arvutamise algoritm

1. Valida determinandis *juhtrida* või *juhtveerg* (soovitavalt selline, milles leidub element 1 või -1 ja mis sisaldab kõige rohkem nulle).

2. Valida juhtreast või –veerust *juhtelement* (soovitavalt 1 või -1), mille abil teisendatakse kõik ülejäänud juhtrea või –veeru elemendid nullideks;

3. Arendada determinant juhtrea või –veeru järgi.

Näide 3.5. Leiame determinandi

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ -7 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Juhtveeruks valime kolmandat veergu, sest see sisaldab elemente 1 ja 0. Juhtelemendiks olgu $a_{33} = 1$. Teisendame kolmanda veeru elemendid $a_{23} = -2$ ja $a_{43} = 3$ nullideks. Kuna teisendame veeru elemente, siis rakendame omadust 3.5.3 ridadele:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ -7 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +2R_3 \\ \\ -3R_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Nüüd juhtveerus on ainult üks nullist erinev element, arendame selle veeru järgi ja saame kolmandat järku determinandi:

$$|A| = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Nüüd juhtreaks kõige rohkem sobib kolmas rida ja juhtelemendiks -1. Et viimases reas ainult juhtelement oleks nullist erinev, liidame teisele veerule kahega korrutatud kolmanda veeru elemendid:

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{matrix} & +2V_3 & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 17 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Arendades juhtrea järgi saame teist järku determinandi, mida leiame teist järku determinandi arvutamise valemi abil:

$$|A| = (-1)^{3+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 17 \end{vmatrix} = -31.$$

Peatükk 4

Lineaarvõrrandisüsteemide lahendamine

4.1 Lineaarvõrrandisüsteemid

Definitsioon 4.1

Vaatleme võrrandisüsteemi kujul

$$\begin{cases} a_{11}\,\mathbf{x_1} + \ a_{12}\,\mathbf{x_2} + \ldots + \ a_{1n}\,\mathbf{x_n} = b_1 \\ a_{21}\,\mathbf{x_1} + \ a_{22}\,\mathbf{x_2} + \ldots + \ a_{2n}\,\mathbf{x_n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\,\mathbf{x_1} + a_{m2}\,\mathbf{x_2} + \ldots + a_{mn}\,\mathbf{x_n} = b_m \end{cases}, \tag{4.1}$$

milles on m võrrandit ja n tundmatut $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Seda võrrandisüsteemi nimetatakse **lineaarseks**. Etteantud arvud a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ on võrrandisüsteemi **kordajad** ja $b_1, \ldots, b_m$ on võrrandisüsteemi **vabaliikmed**.

Definitsioon 4.2

Võrrandisüsteemi (4.1) **lahendiks** nimetatakse sellist tundmatute $x_1, \ldots, x_n$ väärtuste komplekti $d_1, \ldots, d_n$, mille korral

$$a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \ldots + a_{in}d_n = b_i$$

iga $i = 1, 2, \ldots, m$ korral.

Näide 4.1. Lineaarvõrrandisüsteemil

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

on lõpmata palju lahendeid. Näiteks, lahenditeks on $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Definitsioon 4.3

Lineaarvõrrandisüsteemi (4.1) kordajatest moodustatud maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nimetatakse **süsteemi maatriksiks**. Üheveerulisi maatrikseid X ja B

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

nimetatakse vastavalt lineaarvõrrandisüsteemi (4.1) **tundmatute veeruks** ja **vabaliikmete veeruks**.

Lineaarvõrrandisüsteem (4.1) on **maatrikskujul** esitatav võrdusega

$$AX = B.$$

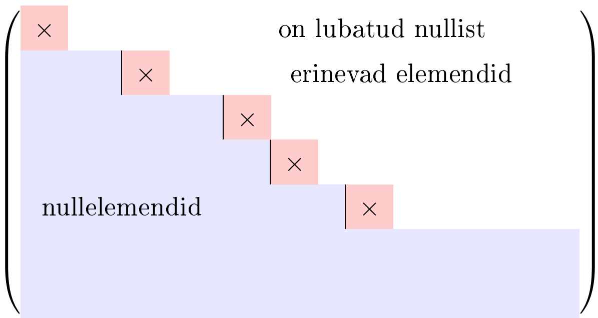
4.2 Gaussi elimineerimise meetod

Definitsioon 4.4

Öeldakse, et maatriks on **astmelisel kujul**, kui

1. nullidest koosnevad read on nullist erinevaid elemente sisaldavatest ridadest allpool;
2. iga i-nda ($i > 1$) rea esimene nullist erinev element on kaugemal (s.t tema veeruindeks on suurem), kui $(i-1)$-se rea esimene nullist erinev element.

Skemaatiliselt astmelises kujus saab esitada nii:



.

Antud juhul maatriksil on 5 astet. Igas reas esimene nullist erinev element on märgitud $\times$-ga.

Näide 4.2. Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainult maatriks A on astmelisel kujul (3 astet). Maatriksil B kolmandas reas esimene nullist erinev element on samas veergus kui ka teise rea esimene nullist erinev element. Maatriks C pole astmelises kujus, sest see ei rahulda definitsiooni esimesele tingimusele: kolmas rida koosneb nullidest, aga neljandas reas leidub nullist erinev eliment.

Gaussi elimineerimise meetod. Olgu meil vaja lahendada lineaarvõrrandisüsteem (4.1).

1. Kirjutame välja laiendatud maatriksi

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

2. Laiendatud maatriks $(A\,|\,B)$ teisendatakse ridade elementaarteisenduste abil (vt definitsioon 2.3) astmelisele kujule.

Laiendatud maatriksi kahe rea vahetamine ei tähenda midagi enamat, kui kahe võrrandi vahetamist. Nullist erineva arvuga korrutamine tähendab tegelikult ühe võrrandi vasaku ja parema poole korrutamist selle sama arvuga. Mõne teise rea otsa liitmine tähendab tegelikult ühele võrrandile teise võrrandi juurde liitmist. Seega sisuliselt me lihtsalt teisendame võrrandisüsteemi, jättes aja kokkuhoiu huvides tundmatud $x_1, \ldots, x_n$ ja tehtemärgid kirjutamata.

Meetodi nimi tuleb saksa matemaatiku **Carl Friedrich Gaussi** (1777-1855) järgi ja see töötati välja 19. sajandi alguses. Sama meetod on lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks kasutusel ka tänapäeva arvutites.

Maali autor:
Christian Albrecht Jensen
(Wikipedia)

Gaussi panus matemaatikasse on väga märkimisväärne. Lisaks tegeles ta astronoomiaga, geodeesiaga, optikaga, statistikaga, magnetismiga jne. See on see sama Gauss, kes esitas algebra põhiteoreemi kohta esimese arvestava tõestuse. Statistikas on siiani tuntud normaaljaotus ja Gaussi kõver.

Näide 4.3. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x+2y-z &= 6 \\ x+4y+3z &= 6 \\ 2x+3y-3z &= 11 \end{cases}.$$

Lahendame süsteemi Gaussi meetodiga. Teisendame laiendatud maatriksi astmelisele kujule alustades esimesest veerust.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -3 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -R_1 \\ -2R_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) : 2$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +R_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Kui maatriks on teisendatud astmelisele kujule, siis püüame seda veel lihtsustada. Tekitame nulle ülalpool peadiagonaali alustades viimasest veerust.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} +R_3 \\ -2R_3 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2R_2 \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Seega

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}.$$

4.3 Lineaarvõrandisüsteemi lahendite arv

Olenevalt võrrandite ja tundmatute arvust ning kordajatest võib lineaarvõrrandisüsteem omada mitte ühtegi lahendit, ühteainsat lahendit või lõpmata palju lahendeid.

Definitsioon 4.5

Süsteemi, millel lahend puudub, nimetatakse **vasturääkivaks**.

Näide 4.4. Võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ x+y &= 2 \end{cases}$$

on vasturääkiv, kuna mõlemad võrrandid ei saa korraga olla tõesed.

Kui viime süsteemi laiendatud maatriksi astmelisele kujule, siis vasturääkiva süsteemi viimane aste asub viimases (vabaliikmete veerus).

Näide 4.5. Olgu mingi lineaarvõrrandisüsteemi laiendatud maatriks $(A|B)$ viidud astmelisele kujule:

$$(A|B) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Viimasele reale vastab võrrand

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2.$$

Sellel võrrandil lahendid puuduvad, seega esialgne süsteem on vasturääkiv.

Olgu võrrandisüsteem pole vasturääkiv, siis süsteemil on kas täpselt üks lahend (sel juhul teisendatud laiendatud maatriksis on sama palju asteid kui tundmatuid) või lõpmata palju lahendeid (sel juhul asteid on vähem kui tundmatuid).

Kui süsteemil on lõpmata palju lahendeid, siis leidub üks või mitu tundmatut (nimetame neid **vabadeks tundmatuteks**) milliste kaudu saame avaldada ülejäänud tundmatud (**sõltuvad tundmatud**). Sõltuvate tundmatute arv on võrdne teisendatud süsteemi maatriksi astmete arvuga.

Näide 4.6. Vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \quad\;\; z = 0 \end{cases}.$$

Vastav laiendatud maatriks on juba astmelisel kujul:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Võrrandisüsteem pole vasturääkiv. Kuna maatriksil on kaks astet, aga muutujaid on kolm, siis süsteemil on üks vaba tundmatu ja kaks sõltuvat tundmatut.

On selge, et z on sõltuv tundmatu, sest sellel on kindel väärtus $z = 0$. Muutujaid x ja y saab avaldada teineteise kaudu: $x = 1 - y$ või $y = 1 - x$, seega mõlemad sobivad vaba tundmatu rolliks. Olgu x vaba tundmatu, siis saame kirjutada

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ z = 0 \end{cases}.$$

Andes x-le erinevaid väärtusi, saame süsteemi erinevad erilahendused. Näiteks, võttes $x = 0$ ja $x = 2$, saame

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Kui süsteemil on lõpmata palju lahendeid, siis selleks, et korraga kirjeldada kõiki võimalikke lahendeid, ümbertähistame vabad tundmatud teiste tähtedega (parameetritega) seejuures mainime, et parameetrid on suvalised arvud reaalarvude hulgast.

Definitsioon 4.6

Lineaarvõrrandisüsteemi **üldlahendiks** nimetatakse niisugust parameetritest sõltuvat lahendit, mille parameetritele arvväärtuste omistamise teel on võimalik saada antud lineaarvõrrandisüsteemi kõik lahendid.

Definitsioon 4.7

Lineaarvõrrandisüsteemi **erilahendiks** nimetatakse niisugust lahendit, mis saadakse üldlahendist parameetritele arvväärtuste omistamise teel.

Näide 4.7. Eelmise näite süsteemi üldlahend on

$$\begin{cases} x = c \\ y = 1 - c \\ z = 0 \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Näide 4.8. Toome näite lineaarvõrrandisüsteemist, kus on kaks vaba tundmatut. Vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} 2x &+& 6y &-& 2z &+& u &=& 3 \\ 4x &+& 15y &-& 4z &+& 2u &=& 7 \\ 4x &+& 12y &-& 4z &+& 2u &=& 6 \end{cases}.$$

Lahendame Gaussi meetodiga:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 15 & -4 & 2 & 7 \\ 4 & 12 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2R_1 \\ -2R_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2R_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Laiendatud maatriksi edasine teisendamine ei anna enam midagi juurde. Maatriksis on kaks astet ja meil oli neli tundmatut, seega vabade tundmatute arv on $4 - 2 = 2$.

Kirjutame välja saadud võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 2x - 2z + u &=& 1 \\ 3y &=& 1 \end{cases}.$$

Esimesest võrrandist on kõige mugavam avaldada u muutujate x ja z kaudu. Seega paneme, et

x ja z on vabad tundmatud. Saame üldlahendi:

$$\begin{cases} x &= c_1 \\ y &= \frac{1}{3} \\ z &= c_2 \\ u &= 1 - 2c_1 + 2c_2 \\ c_1, c_2 &\in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Et leida erilahendid, tuleb anda konstandidele c konkreetsed väärtused. Näiteks, võttes $c_1 = 0$ ja $c_2 = 1$, erilahend

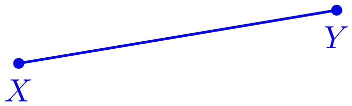
$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= \frac{1}{3} \\ z &= 1 \\ u &= 3 \end{cases}.$$

Peatükk 5

Vektorid

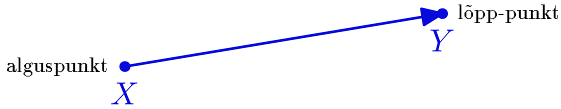
5.1 Seotud vektorid

Olgu XY lõik tasandil või ruumis. Punktid X, Y ei ole järjestatud, seega sama lõigu tähistuseks on kaks võimalust: XY või YX.



Joonis 5.1. Lõik XY

Kui nüüd seda tüüpi tähistuses esimesel kohal olevat tähte interpreteerime lõigu alguspunktina ja teisel kohal olevat tähte lõigu lõpp-punktina, siis lõigul on määratud *suund*, s.t meie lõik muutub suunatud lõiguks.



Joonis 5.2. Vektor $\overline{XY}$

Definitsioon 5.1

Lõiku, millel on fikseeritud alguspunkt, s.t suund, nimetatakse suunatud lõiguks ehk **seotud vektoriks**. Seotud vektorit alguspunktiga X ja lõpp-punktiga Y tähistame edaspidi $\overline{XY}$ abil.

Definitsioon 5.2

Seotud vektori $\overline{XY}$ **pikkuseks** $|\overline{XY}|$ nimetame teda määrava lõigu XY pikkust.

Seotud vektor on üheselt määratud kolme karakteristikuga: alguspunkt, pikkus, suund.

Definitsioon 5.3

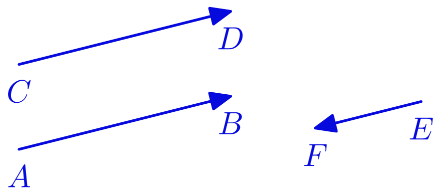
Vektorit $\overline{AB}$ nimetame **kollineaarseks** vektoriga $\overline{CD}$, kui lõik AB on paralleelne lõiguga CD. Öeldut tähistame $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ abil. Kui vektorid ei ole kollineaarsed, siis tähistame seda $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$.

Definitsioon 5.4

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame **samasuunaliseks** (**vastassuunaliseks**) seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui esiteks $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ja teiseks suunad on ühesugused (suunad on vastupidised). Öeldut tähistame esimesel juhul $\overline{AB} \upuparrows \overline{CD}$ ja teisel juhul $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$ abil.

Definitsioon 5.5

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame **ekvivalentseks** seotud vektoriga $\overline{CD}$, tähistame $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ abil, kui $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ ja $\overline{AB} \upuparrows \overline{CD}$.



Joonis 5.3. Kollineaarsed vektorid

Näide 5.1. Joonisel 5.3 vektorid $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ on kollineaarsed ($\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$). Vektorid $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ on samasuunalised ($\overline{AB} \upuparrows \overline{CD}$) ja samal ajal vektorid $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ on ekvivalentsed ($\overline{AB} \sim \overline{CD}$). Vektorid $\overline{AB}$ ja $\overline{EF}$ on vastassuunalised ($\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{EF}$).

5.2 Vabavektorid

Vektori pikkus ja suund iseloomustavad oluliselt vektoriga kirjeldatud suurust. Kuid vektorarvutuse paljudes rakendustes ei ole vektori alguspunktil sellist tähtsust.

Juhul, kui vektori alguspunkti asend loetakse mitteoluliseks – s.t samastatakse kõik vektorid, millel on ühine suund ja pikkus (s.t kõik ekvivalentsed vektorid) – räägitakse **vabavektoritest**.

Definitsioon 5.6

Olgu $\overline{AB}$ seotud vektor. Moodustame seotud vektorite klassi, kuhu kuuluvad kõik seotud vektoriga $\overline{AB}$ ekvivalentsed seotud vektorid. Vastavat klassi nimetatakse seotud vektori $\overline{AB}$ poolt tekitatud **vabavektoriks**. Vabavektorit tähistame $\overrightarrow{AB}$ abil.

Vabavektor on üheselt määratud kahe parameetriga: pikkus ja suund.

Laiendame eelmises peatükis toodud definitsioone vabavektoritele.

Definitsioon 5.7

- Vabavektori $\overrightarrow{AB}$ **pikkuseks** nimetatakse seotud vektori $\overline{AB}$ pikkust.
- Kui seotud vektorid $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ on kollineaarsed, siis ütleme, et vabavektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ on **kollineaarsed** ja kirjutame $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.
- Kui seotud vektorid $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ on samasuunalised, siis ütleme, et vabavektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ on **samasuunalised** ja kirjutame $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.
- Kui seotud vektorid $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ on vastassuunalised, siis ütleme, et vabavektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ on **vastassuunalised** ja kirjutame $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Toome välja veel mõned definitsioonid.

Definitsioon 5.8

Vektoreid, mis asuvad ühel ja samal tasandil või paralleelsetel tasanditel, nimetatakse **komplanaarseteks**.

Komplanaarsete vektorite definitsioonis eeldame, et seotud vektorid on ruumivektorid. See tähendab, et komplanaarsete vektorite definitsiooni ei saa rakendada tasandi vektoritele.

Definitsioon 5.9

Vektorit, mille otspunktid ühtivad, nimetatakse **nullvektoriks**.

Nullvektor koosneb ainult ühest punktist ja tema siht ei ole määratud. Nullvektor on kollinearne (nii samasuunaline kui ka vastassuunaline) mistahes teise vektoriga.

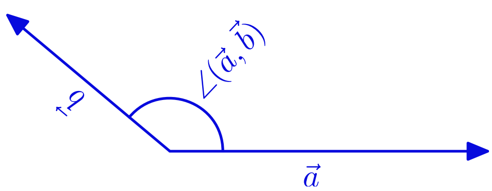
Definitsioon 5.10

Vektorit pikkusega 1 nimetatakse **ühikvektoriks**.

Vektorid, mille alguspunkti ei ole mainitud, märgitakse noolega varustatud ladina tähestiku väikeste tähtedega $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Definitsioon 5.11

Rakendame vektoreid $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ ühest ja samast punktist O ja olgu rakendatud vektorid $\overline{OA}$ ja $\overline{OB}$. Vektorite $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ **vaheliseks nurgaks** $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ nimetatakse nurka $\angle AOB$ $(0 \leq \angle AOB \leq \pi)$.



Joonis 5.4. Nurk vektoorite vahel

Paneme tähele, et $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$ parajasti siis, kui vektorid $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ on samasuunalised ja $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi$ parajasti siis, kui vektorid $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ on vastassuunalised. Kui vektoritest $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vähemalt üks on nullvektor, siis nurgaks $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ loeme ükskõik millist reaalarvu lõigust $[0, \pi]$.

Definitsioon 5.12

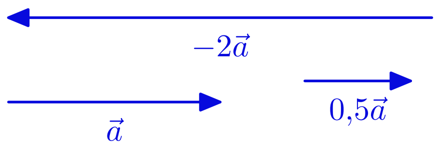
Kui $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\pi}{2}$, nimetatakse vektoreid $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ **ortogonaalseteks** ja tähistatakse $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

Vaatleme erinevaid tehteid vektoridega – korrutamist skalaariga, liitmist ja lahutamist.

Definitsioon 5.13

Vektori $\overrightarrow{a}$ **korrutiseks skalaariga** $\lambda \in \mathbb{R}$ nimetatakse vektorit $\lambda\overrightarrow{a}$, mida määratakse tingimustega

1. $|\lambda\overrightarrow{a}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{a}|$;
2. $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \lambda\overrightarrow{a}$, kui $\lambda > 0$, $\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \lambda\overrightarrow{a}$, kui $\lambda < 0$.

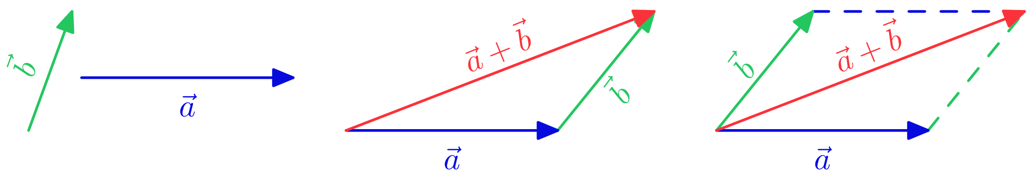


Joonis 5.5. Vektori $\overrightarrow{a}$ korrutamine skalaaridega -2 ja $-0{,}5$

Definitsioon 5.14

Olgu antud kaks vektorit $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$. Fikseerime punkti A ja rakendame esimest vektorit $\overrightarrow{a}$ punktist A, tekib seotud vektor $\overline{AB}$. Nüüd rakendame teist vektorit $\overrightarrow{b}$ punktist B, saame seotud vektori $\overline{BC}$. Vektorit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$ nimetatakse vektorite $\vec{a}$, $\overrightarrow{b}$ **summaks** ja tähistatakse $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Nii defineeritud liitmist nimetatakse **kolmnurga reegliks**.

Tihti on mugav liita kaks mittekollineaarset vabavektorit $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ **rööpküliku** reegli abil. Selleks rakendame mõlemad vektorid ühest ja samast punktist ja moodustame rööpküliku, mille külgedeks on need vektorid. Vektorite summaks on vektor, mis väljub vektorite $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ ühisest alguspunktist, paikneb diagonaalil ja on sama pikk kui diagonaal.



Joonis 5.6. Vektorite liitmine kolmnurga ja rööpküliku reegli järgi

Definitsioon 5.15

Vektorit $-\overrightarrow{a} = -1\overrightarrow{a}$ nimetatakse vektori $\overrightarrow{a}$ **vastandvektoriks**.

Definitsioon 5.16

Vektorite $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ **vaheks** nimetatakse vektorit $\overrightarrow{d}$, mis on võrdne summaga

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b}).$$

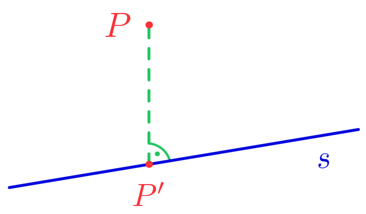
5.3 Vektori projektsioon

Projektsiooni leidmine on eriti kasulik ehituses ja füüsikas kõiksugu valguse ja optika teemades.

Alustame punkti projektsiooni sirgile mõistest.

Definitsioon 5.17

Punktist P sirgele s tõmmatud ristlõigu aluspunkti P' nimetatakse **punkti** P **projekstiooniks** (**ristprojektsiooniks**) **sirgele** s.



Joonis 5.7. Punkt P' on punkti P projektsioon sirgile s

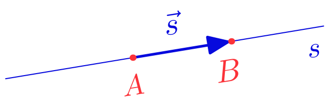
Enne vektori projektsiooni defineerimist toome sisse sirge sihivektori mõiste.

Definitsioon 5.18

Fikseerime sirgel s kaks erinevat punkti A ja B. Vektorit

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{AB}$$

nimetatakse **sirge** s **sihivektoriks**.



Joonis 5.8. Vektor $\overrightarrow{s}$ on sirge s sihivektor

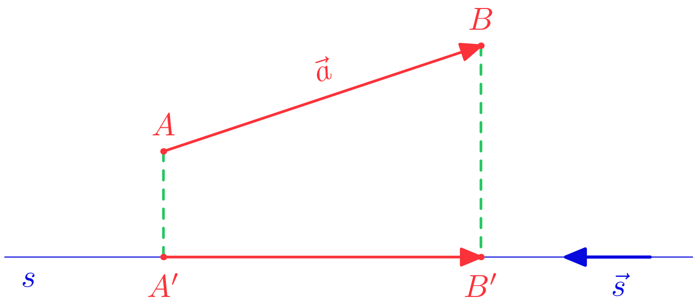
Nagu järeldub definitsioonist, sirge sihivektor ei ole üheselt määratud. Näiteks, kui vektor $\overrightarrow{s}$ on sirge s sihivektor, siis suvaline nullvektorist erinev ja vektoriga $\overrightarrow{s}$ kollineaarne vektor on ka sirge s sihivektoriks.

Teiselt poolt, kui $\overrightarrow{s}$ on mingi sirge s sihivektor, siis see on sihivektoriks ka suvalisele sirgele, mis on paralleelne sirgega $\overrightarrow{s}$.

Definitsioon 5.19

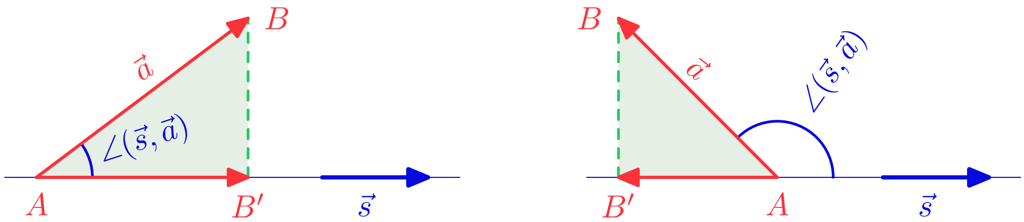
Olgu antud nullvektorist erinev vektor $\overrightarrow{s}$ ja vektor $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$. Olgu s selline sirge, et $\overrightarrow{s}$ tema sihivektoriks ning punktid A' ja B' vastavalt punktide A ja B projektsioonid sirgele s.
Vektori $\overrightarrow{a}$ **projektsiooniks vektori** $\overrightarrow{s}$ **sihile** nimetatakse arvu $\text{pr}_{\overrightarrow{s}}\,\overrightarrow{a}$, kus

$$\text{pr}_{\overrightarrow{s}}\,\overrightarrow{a} = \begin{cases} |\overrightarrow{A'B'}|, & \text{kui } \overrightarrow{A'B'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{s}, \\ -|\overrightarrow{A'B'}|, & \text{kui } \overrightarrow{A'B'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{s} \end{cases}.$$



Joonis 5.9. Kuna $\overrightarrow{A'B'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{s}$, siis $\text{pr}_{\overrightarrow{s}}\,\overrightarrow{a} = -|\overrightarrow{A'B'}|$

Tuletame valemit vektori $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ projektsiooni vektori $\overrightarrow{s}$ sihile leidmiseks. Vaatleme sirget s mille sihivektoriks on vektor $\overrightarrow{s}$ ja mis läbib punkti A. Olgu punkt B' punkti B projektsioon sirgele s. Tekib täisnurkne kolmnurk $BB'A$ (vt joonis 5.10).



Joonis 5.10. Vektori $\overrightarrow{a}$ projektsioon vektori $\overrightarrow{s}$ sihile juhul $\angle(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{a}) < \frac{\pi}{2}$ ja $\angle(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{a}) > \frac{\pi}{2}$

Kui $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) < \frac{\pi}{2}$, siis $\overrightarrow{A'B'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{s}$ ja

$$\text{pr}_{\overrightarrow{s}}\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{a}|\cos\angle(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{a}).$$

Kui $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) > 90^\circ$, siis $\overrightarrow{A'B'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{s}$ ja

$$\text{pr}_{\overrightarrow{s}}\,\overrightarrow{a} = -|\overrightarrow{AB'}| = -|\overrightarrow{a}|\cos\left(180^\circ - \angle(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{a})\right) = |\overrightarrow{a}|\cos\angle(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{a}).$$

Kui $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) = 90^\circ$, siis

$$\text{pr}_{\overrightarrow{s}}\,\overrightarrow{a} = 0 = |\overrightarrow{a}|\cos 90^\circ = |\overrightarrow{a}|\cos\angle(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{a}).$$

Ehk sõltumata vektorite $\overrightarrow{s}$ ja $\overrightarrow{a}$ vahelisest nurgast me saime ühe ja sama valemi projektsiooni väärtuse leidmiseks.

Lause 5.1

Vektori projektsioon teise vektori sihile võrdub projekteeritava vektori pikkuse ja vektorvahelise nurga koosinuse korrutisega:

$$\mathrm{pr}_{\overrightarrow{s}}\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos\angle(\overrightarrow{s},\overrightarrow{a}).$$

5.4 Baas ja vektori koordinaadid

Valime tasandite vektorite hulgast vabalt kaks mittekollineaarset vektorit $\vec{e_1}$ ja $\vec{e_2}$. Iga vektor $\overrightarrow{x}$ on üheselt esitav kujul

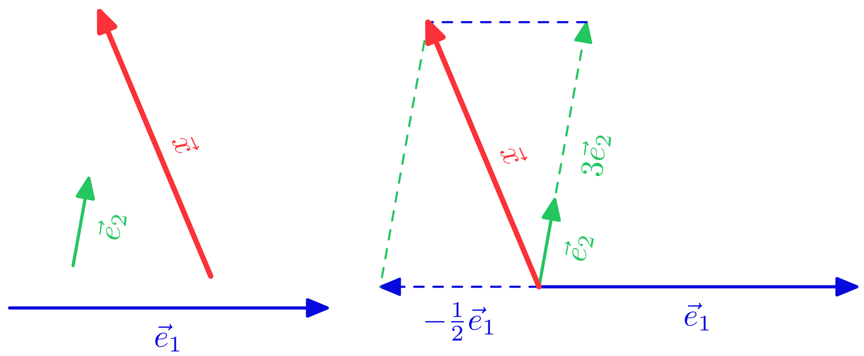
$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2.$$

Definitsioon 5.20

Öeldakse, et mittekollineaarsed vektorid $\overrightarrow{e}_1$ ja $\overrightarrow{e}_2$ moodustavad tasandi vektorite hulga **baasi**. Arve x_1, x_2 avaldises

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2$$

nimetatakse vektori $\overrightarrow{x}$ **koordinaatideks** baasil $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$.



Joonis 5.11. Vektor $\overrightarrow{x}$ on esitatav kujul $\overrightarrow{x} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{e}_1 + 3\overrightarrow{e}_2$, seega $\overrightarrow{x} = \left(-\dfrac{1}{2}, 3\right)$ baasi $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ suhtes

Analoogiliselt defineeritakse baas ja vektori koordinaadid ruumis.

Definitsioon 5.21

Öeldakse, et mittekomplanaarsed vektorid $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$ ja $\overrightarrow{e}_3$ moodustavad ruumivektorite hulga **baasi**. Arve x_1, x_2, x_3 avaldises

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2 + x_3\overrightarrow{e}_3$$

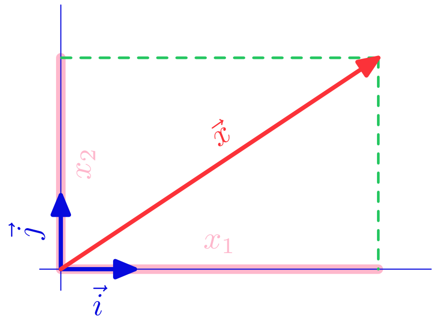
nimetatakse vektori $\overrightarrow{x}$ **koordinaatideks** baasil $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, $\overrightarrow{e}_3$.

Kui vektori $\overrightarrow{x}$ koordinaadid on x_1, x_2, x_3, siis kirjutatakse $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Definitsioon 5.22

Baasi nimetatakse **ristbaasiks**, kui baasivektorid on paarikaupa ortogonaalsed ühikvektorid. Ristbaasi vektorite puhul kasutatakse spetsiaalseid tähistusi $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$. Vektori koordinaate sellise baasi suhtes nimetatakse **ristkoordinaatideks**.

Suvalise vektori koordinaadid ristbaasi suhtes ei ole midagi muud kui tema projektsioonid baasivektorite $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ sihidele (vt joonis 5.12).



Joonis 5.12. Vektori koordinaadid ristbaasi suhtes

Edaspidi me **alati** oletame, et koordinaadid on antud ristbaasi suhtes ja iga kord ei maini, et tegemist on ristkoordinaatidega.

Kui on teada vektori $\overrightarrow{AB}$ alguspunkti koordinaadid $A(a_1, a_2, a_3)$ ja lõpp-punkti koordinaadid $B(b_1, b_2, b_3)$, siis vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaatide leidmiseks lahutatakse lõpp-punkti koordinaatidest vastavad alguspunkti koordinaadid:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Omadus 5.1

Vektorite koordinaatide omadusi.

1. Kahe vektori summa (vahe) koordinaatideks on nende vektorite vastavate koordinaatide summad (vahed).
2. Vektori korrutamisel arvuga korrutub selle arvuga vektori iga koordinaat.
3. Vektorid on kollineaarsed parajasti siis, kui nende koordinaadid on võrdelised.
4. Vektori pikkus võrdub ruutjuurega koordinaatide ruutude summast.

Näide 5.2. Olgu vektorid $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ antud oma koordinaatidega:

$$\overrightarrow{x} = (1, 2, 3), \quad \overrightarrow{y} = (4, 5, 6).$$

Siis

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (1+4, 2+5, 3+6) = (5, 7, 9)\\
&\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} = (-3, -3, -3)\\
&5\overrightarrow{x} = (5, 10, 15)\\
&|\overrightarrow{x}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14},\ |\overrightarrow{y}| = \sqrt{4^2+5^2+6^2} = \sqrt{77}.
\end{aligned}$$

Vektorid x ja y pole kollineaarsed, sest näiteks $\frac{1}{4} \neq \frac{2}{5}$.

5.5 Skalaarkorrutis

Definitsioon 5.23

Vektorite $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ **skalaarkorrutiseks** $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ nimetatakse reaalarvu, mis võrdub nende vektorite pikkuste ja nendevahelise nurga koosinuse korrutisega:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}).$$

Lähtudest lausest 5.1, kahe vektorite skalaarkorrutise saab avaldada projektisooni kaudu.

Omadus 5.2

Olgu $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ pole nullvektorid, siis

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\,\mathrm{pr}_{\overrightarrow{a}}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|\,\mathrm{pr}_{\overrightarrow{b}}\,\overrightarrow{a}.$$

Vahetult definitsioonist järelduvad järgmised skalaarkorrutise omadused.

Omadus 5.3

1. Skalaarkorrutis on võrdne nulliga parajasti siis, kui vektorid on ortogonaalsed.
2. Suvalise vektori $\overrightarrow{a}$ korral
$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}}\,.$$
3. Kui $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ pole nullvektorid, siis
$$\cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}\,.$$

Omadus 5.4

Skalaarkorrutisel on järgmised tehetega seotud omadused:

1. kommutatiivsus: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$;
2. distributiivsus: $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$;
3. assotsiatiivsus skalaariga korrutamise suhtes: $\overrightarrow{a} \cdot (\lambda \overrightarrow{b}) = (\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral.

Kui on teada vektorite koordinaadid mingi ristbaasi suhtes, siis saame avaldada skalaarkorrutise koordinaatide kaudu.

Teoreem 5.5

Kui $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, siis

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Tõestus. Olgu

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k} \qquad \text{ja} \quad \overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k},$$

kus $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ on ristbaasi vektorid. Kuna $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ on paarikaupa ortogonaalsed ühikvektorid, siis

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1,\\
\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0.
\end{aligned}$$

Kasutades skalaarkorrutise tehetega seotud omadusi (vt omadus 5.4), saame

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =&(a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}) \cdot (b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k})\\
=&a_1b_1(\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i}) + a_1b_2(\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j}) + a_1b_3(\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k})\\
&+ a_2b_1(\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i}) + a_2b_2(\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j}) + a_2b_3(\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k})\\
&+ a_3b_1(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i}) + a_3b_2(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j}) + a_3b_3(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k})\\
=&a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.
\end{aligned}$$

□

Näide 5.3. Olgu vektorid antud oma koordinaatidega:

$$\overrightarrow{a} = (0, 1, 2), \quad \overrightarrow{b} = (3, 4, 5).$$

Siis

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 14.$$

Kuna skalaarkorrutis on positiivne, siis $\cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ on positiivne, mis omakorda tähendab, et nurk kahe vektorite vahel on teravnurk. Leiame selle nurga täpse väärtuse kasutades omadust 5.3.3:

$$\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \arccos\frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \arccos\frac{14}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{50}} = \arccos\frac{7\sqrt{10}}{25}.$$

Leiame vektori $\overrightarrow{b}$ projektsioon vektori $\overrightarrow{a}$ sihile. Omaduse 5.2 järgi

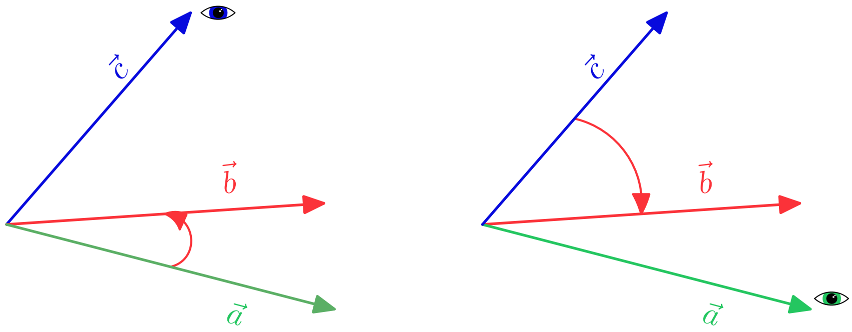
$$\mathrm{pr}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{14}{\sqrt{5}}.$$

5.6 Vektorkorrutis

Vektorkorrutis defineeritakse ainult ruumivektorite jaoks. Kõigepealt toome sisse parema käe kolmiku mõistet.

Definitsioon 5.24

Rakendame mittekomplanaarseid vektoreid $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ ühest ja samast punktist. Vektorisüsteemi $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ nimetatakse **parema käe kolmikuks** (**vasaku käe kolmikuks**), kui vaadelduna vektori $\vec{c}$ lõpp-punktist, toimub vektori $\overrightarrow{a}$ pööre vektorini $\overrightarrow{b}$ lühemat teed pidi vastupäeva (päripäeva).



Joonis 5.13. Kolmik $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ on parema käe kolmik (esimene joonis); kolmik $\{\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\}$ on vasaku käe kolmik (teine joonis)

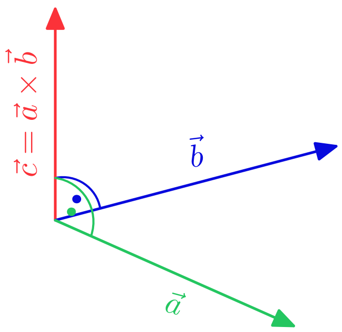
Definitsioon 5.25

Vektorite $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ **vektorkorrutiseks** nimetatakse **vektorit** $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$, mis rahuldab järgmist kolme tingimust:

1. $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$;
2. $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{a} \quad \wedge \quad \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{b}$, s.t. $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ on risti vektoriga $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$;
3. $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\}$ on parema käe kolmik.

Omadus 5.6

Vektorite $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ vektorkorrutis on võrdne nullvektoriga parajasti siis, kui vektorid $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ on kollineaarsed.



Joonis 5.14. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutis

Omadus 5.7

Kui vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ on antud oma koordinaatidega: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, siis

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Näide 5.4. Leiame vektorite

$$\vec{a} = (-1, 0, 1) \text{ ja } \vec{b} = (2, 3, 4)$$

vektorkorrutise koordinaadid:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-3, 6, -3).$$

Vaatame millega võrdub samade vektorite vektorkorrutis, kui korrutada vektorid teises järjekorras:

$$\vec{b} \times \vec{a} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (3, -6, 3).$$

Eelmises näites me veendusime, et üldjuhul $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$. Seega kahe vektorite vektorkorrutamine pole kommutatiivne. Kuid, erinevalt maatriksite korrutamisest, leidub seos $\vec{a} \times \vec{b}$ ja $\vec{b} \times \vec{a}$ vahel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Omadus 5.8

Vektorkorrutisel on järgmised tehetega seotud omadused:

1. antikommutatiivsus: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. distributiivsus: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
3. assotsiatiivsus skalaariga korrutamise suhtes: $(\lambda \vec{a}) \times b = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

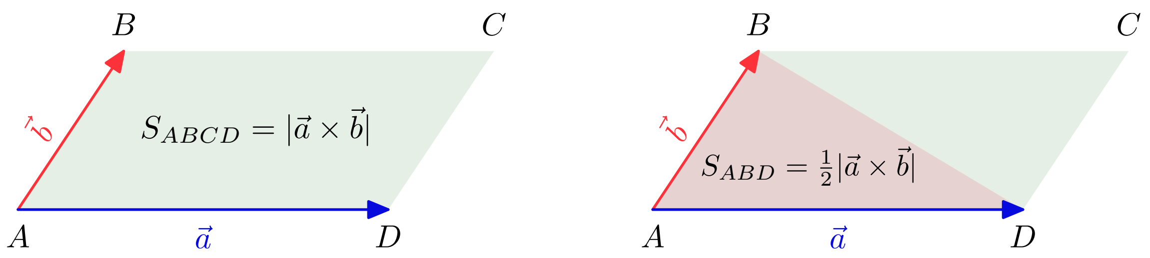
Toome välja vektorkorrutise rakendusi.

Vaatleme rööpküliku $ABCD$. Tähistame $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Rööpküliku pindala avaldub kujul

$$S_{ABCD} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Kuna kolmnurga ABD pindala on rööpküliku peindalast kaks korda väiksem, siis

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|.$$



Joonis 5.15. Rööpküliku ja kolmnurga pindala leidmine vektorkorrutise abil

Omadus 5.9

1. Vektoritele $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ ehitatud rööpküliku pindala
$$S = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|.$$
2. Vektoritele $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ ehitatud kolmnurga pindala
$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|.$$

Näide 5.5. Arvutame vektoritele

$$\overrightarrow{a} = (-1, 0, 1) \text{ ja } \overrightarrow{b} = (2, 3, 4)$$

ehitatud rööküliku pindala. Näites 5.4 me leidsime, et

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (-3, 6, -3).$$

Seega rööpküliku pindala on

$$S = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \text{ (ruutühikut).}$$

Peatükk 6

Sirge ja tasand ruumis

6.1 Tasandi üldvõrrandid

Iga tasand on üheselt määratud tema punktiga ja normaalvektoriga. Kõigepealt toome sisse normaalvektori mõiste.

Definitsioon 6.1

Ütleme, et **vektor** $\overrightarrow{n}$ **on risti tasandiga** π, ja kirjutame

$$\overrightarrow{n} \perp \pi,$$

kui vektor $\overrightarrow{n}$ on ortogonaalne iga tasandi π vektoriga.

Lause 6.1

Vektor $\overrightarrow{n}$ on risti tasandiga π parajasti siis, kui vektor $\overrightarrow{n}$ on ortogonaalne kahe suvalise mittekollineaarse tasandi π vektoriga.

Definitsioon 6.2

Tasandi **normaalvektoriks** nimetatakse nullvektorist erinevat vektorit, mis on risti selle tasandiga.

Tasandi normaalvektor ei ole üheselt määratud. Näiteks, kui vektor $\overrightarrow{n}$ on tasandi π mingi normaalvektor, siis suvaline nullvektorist erinev vektor, mis on kollineaarne vektoriga $\overrightarrow{n}$ sobib tasandi π normaalvektoriks.

Näide 6.1. Tasandi xy normaalvektor on $\overrightarrow{n} = (0, 0, 1)$, tasandi xz normaalvektor on $\overrightarrow{n} = (0, 1, 0)$ ja tasandi yz normaalvektor on $\overrightarrow{n} = (1, 0, 0)$.

Definitsioon 6.3

Olgu $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ tasandi π normaalvektor. Võrrandit

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

nimetatakse tasandi π **üldvõrrandiks**.

See, et tasandi π üldvõrrand on $Ax + By + Cz + D = 0$, tähendab seda, et punkt $P(p_1, p_2, p_3)$ on tasandi π punkt parajasti siis, kui tema koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D = 0.$$

Näide 6.2. Olgu antud tasand $\pi:\ 2x - 3y - 4z = 0$. Sellest informatsioonist saame teada, et tasandi normaalvektor on $\overrightarrow{n} = (2, -3, -4)$ ja konstant $D = 0$. Viimane tähendab, et tasand läbib koordinaatide alguspunkti $O(0, 0, 0)$, kuna see punkt rahuldab tasandi võrrandit: $2{\cdot}0 - 3{\cdot}0 - 4{\cdot}0 = 0$.

Näide 6.3. Leiame tasandi võrrandi, kui on teada punkt tasandil $P(-1, 5, 7)$ ja normaalvektor $\overrightarrow{n} = (2, 3, 4)$. Kirjutame tasandi üldvõrrandist $\overrightarrow{n} = (A, B, C) = (2, 3, 4)$ abil

$$\pi:\ 2x + 3y + 4z + D = 0.$$

Arvu D leiame tasandil asuva punkti P järgi. Kuna $P(-1, 5, 7)$ on tasandi punkt, siis peab kehtima võrdus

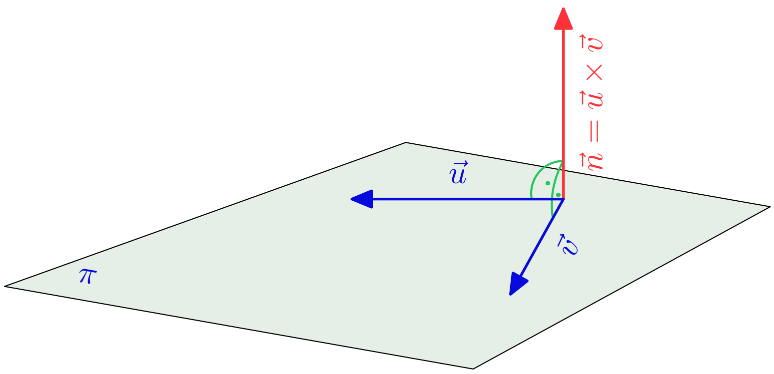
$$2(-1) + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + D = 0,$$

kust saame, et $D = -41$. Seega tasandi üldvõrrandiks on

$$\pi:\ 2x + 3y + 4z - 41 = 0.$$

Kui $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ on kaks tasandi π mittekolineaarset vektorit, siis tasandi normaalvektoriks sobib

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}.$$



Joonis 6.1. Tasandi π normaalvektor $\vec{n}$

Näide 6.4. Olgu tasandil antud kolm punkti $P(1, 1, 0)$, $Q(0, 2, 1)$ ja $R(3, 2, -1)$. Leiame neid punkte läbiva tasandi π võrrandi. Selleks leiame kaks tasandi vektorit:

$$\overline{PQ} = (-1, 1, 1), \quad \overline{PR} = (2, 1, -1).$$

Siit saame

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2, 1, -3).$$

Tasandi üldvõrrandist saame, et

$$-2x + y - 3z + D = 0.$$

Sellest, et punk $P(1,1,0)$ asub tasandil π, saame

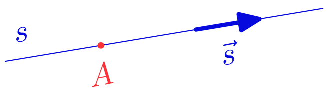
$$-2 \cdot 1 + 1 - 3 \cdot 0 + D = 0$$

ehk $D = 1$. Kokkuvõttes saime tasandi võrrandiks

$$\pi: \ -2x + y - 3z + 1 = 0.$$

6.2 Sirge võrrandid

Sirget s saab määrata tema sihivektori $\overrightarrow{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ja sirgel asuva punkti $A(a_1, a_2, a_3)$ abil.



Joonis 6.2. Sirge s ja tema sihivektor $\overrightarrow{s}$

Olgu $P = (x, y, z)$ sirge suvaline punkt. Uurime millest tingimust peavad rahuldama punkti P koordinaadid. Kuna vektorid $\overrightarrow{s}$ ja $\overrightarrow{AP}$ on kollineaarsed, siis leidub selline arv $\lambda \neq 0$, et

$$\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{s}.$$

Koordinaatkujul see tähendab, et

$$(x - a_1, y - a_2, z - a_3) = (\lambda s_1, \lambda s_2, \lambda s_3)$$

ehk

$$\begin{cases} x - a_1 = \lambda s_1 \\ y - a_2 = \lambda s_2 \\ z - a_3 = \lambda s_3. \end{cases} \tag{6.1}$$

Kui oletada, et sihivektori ükski koordinat ei võrdu nulliga, siis saame

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{x - a_1}{s_1} \\ \lambda = \dfrac{y - a_2}{s_2} \\ \lambda = \dfrac{z - a_3}{s_3}, \end{cases}$$

mis omakorda tähendab, et

$$\frac{x-a_1}{s_1}=\frac{y-a_2}{s_2}=\frac{z-a_3}{s_3}.$$

Kui aga sihivektori mõni koordinaatidest võrdub nulliga, siis tingimuse (6.1) järgi see tähendab järgmist:

a) kui $s_1=0$, siis $x=a_1$;, b) kui $s_2=0$, siis $y=a_2$;, c) kui $s_3=0$, siis $z=a_3$.

Definitsioon 6.4

Olgu $\overrightarrow{s}=(s_1,s_2,s_3)$ sirge s sihivektor ja $A=(a_1,a_2,a_3)$ punkt sirgel s. Võrrandeid

$$\frac{x-a_1}{s_1}=\frac{y-a_2}{s_2}=\frac{z-a_3}{s_3}$$

nimetatakse sirge s **kanoonilisteks** võrranditeks.

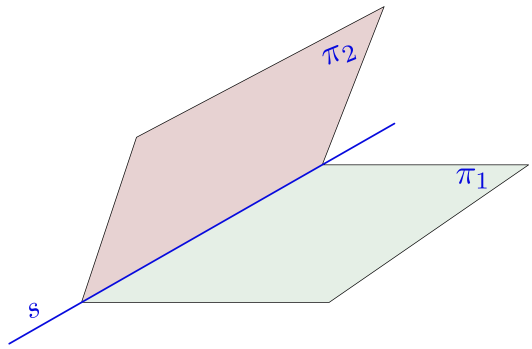
Kui mõni sihivektori $\overrightarrow{s}$ koordinaatidest võrdub nulliga, siis võrdsustame nulliga ka vastava murru lugeja, nt, juhul, kui $s_1=0$, siis saame sirge võrranditeks

$$x=a_1,\ \frac{y-a_2}{s_2}=\frac{z-a_3}{s_3}.$$

Kui sihivektori kaks koordinaati võrduvad nulliga, näiteks $s_1=0$ ja $s_3=0$, siis jääb kogu võrduste ahelast järgi süsteem

$$x=a_1,\ y\in\mathbb{R},\ z=a_3.$$

Sirge võrrandit ruumis saab anda ka läbi kahe mitteparalleelse tasandi lõikesirge.



Joonis 6.3. Sirge s on tasandite π_1 ja π_2 lõikesirge

Definitsioon 6.5

Sirge **üldvõrrandiks** nimetatakse võrrandite süsteemi

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}.$$

Näide 6.5. Leiame tasandite

$$\pi_1:\ x+y-z=0 \quad \text{ja} \quad \pi_2:\ y+2z=6$$

lõikesirge kanoonilised võrrandid. Kuna sirge s asub nii tasandil π_1 kui ka tasandil π_2, siis tema sihivektor $\overrightarrow{s}$ peab olema risti tasandite normaalvektoritega $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, -1)$ ja $\overrightarrow{n_2} = (0, 1, 2)$. Seega sihivektori saab leida nii:

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3, -2, 1).$$

Esialgu oleme jõudnud punkti, kus sirge s kanoonilised võrrandid on kujul

$$\frac{x - a_1}{3} = \frac{y - a_2}{-2} = \frac{z - a_3}{1}.$$

Jääb üle leida üks suvaline punkt lõikesirge peal. Selleks tuleb lahendada süsteem

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ \quad y + 2z = 6 \end{cases}.$$

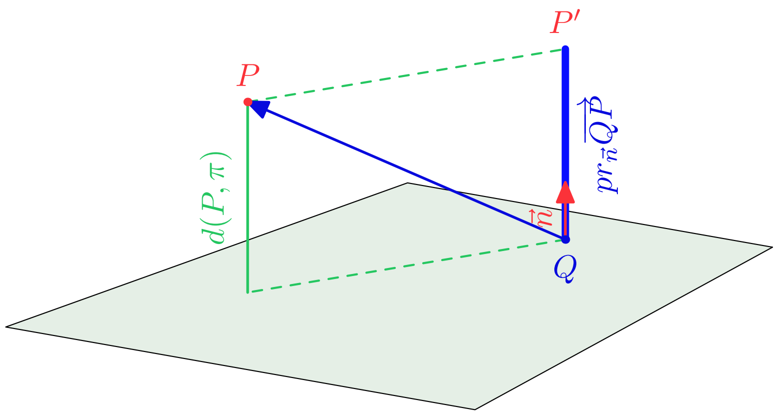
Kuna meil on kolm tundmatut ja kaks võrrandit, siis võiks loota, et saame ühe tundmatu vabalt ette anda. Olgu $z = 0$, siis $y = 6$ ja $x = -6$. Seega punkt $A(-6, 6, 0)$ asub lõikesirgel ja sirge s kanoonilised võrrandid näeksid välja järgmiselt:

$$s: \ \frac{x + 6}{3} = \frac{y - 6}{-2} = z.$$

6.3 Punkti kaugus tasandist

Definitsioon 6.6

Punkti P kauguseks tasandist π nimetatakse sellest punktist tasandini tõmmatud ristlõigu pikkust, mida tähistame $d(P, \pi)$ abil.



Joonis 6.4. Punkti P kaugus taasandist π

Omadus 6.1

Punkti $P(p_1, p_2, p_3)$ kaugus tasandist $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$ arvutatakse valemiga

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Tõestus. Olgu vaja leida punkti $P(p_1, p_2, p_3)$ kaugust tasandist $\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$. Leiame suvalise punkti $Q(q_1, q_2, q_3)$, mis asub tasandil π. Punkti P kaugus tasandist on vektori $\overrightarrow{PQ}$ projektsiooni absoluutväärtus normaalvektori $\overrightarrow{n}$ sihile:

$$d(P, \pi) = \left| pr_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{QP} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{n} \right|}{|\overrightarrow{n}|}. \tag{6.2}$$

Leiame skalaarkorrutise $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{n}$:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{n} = (p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3) \cdot (A, B, C) = (Ap_1 + Bp_2 + Cp_3) - (Aq_1 + Bq_2 + Cq_3).$$

Punkt Q asetseb tasandil π, seega tema koordinaadid rahuldavad tasandi võrrandit, s.t

$$Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D = 0,$$

kust järeldub, et $Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 = -D$. Niisiis,

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{n} = Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D.$$

Nüüd, valemist (6.2) saame

$$d(P, \pi) = \frac{\left| \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{n} \right|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

□

Näide 6.6. Leiame paralleelsete tasandite

$$\pi_1: \ 6x - 2y + 4z - 12 = 0, \quad \pi_2: \ 3x - y + 2z + 2 = 0$$

vahelise kauguse. Selleks võtame ühe punkti tasandil π_1, näiteks $P(0, 0, 3)$, ja ühe punkti tasandil π_2, näiteks $Q(0, 0, -1)$. Leiame punkti P kauguse tasandist π_2. Tasandi π_2 normaalvektor on $\overrightarrow{n}_2 = (3, -1, 2)$. Saame

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{\overrightarrow{n_2}} = \frac{|(0, 0, 4) \cdot (3, -1, 2)|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{7}.$$

6.4 Punkti kaugus sirgest

Definitsioon 6.7

Punkti P **kauguseks** sirgest s nimetame sellest punktist sirgeni tõmmatud ristlõigu pikkust ja tähistame seda $d(P,s)$ abil.

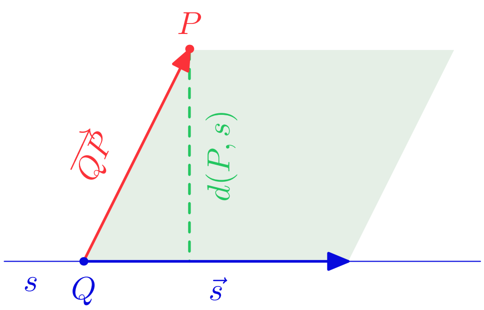
Omadus 6.2

Punkti P kaugus sirgest s esitub valemiga

$$d(P,s)=\frac{|\overrightarrow{QP}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|},$$

kus Q on suvaline punkt sirgel s ja $\vec{s}$ on sirge sihivektor.

Tõestus. Olgu ruumis antud punkt P ja sirge s sihivektor $\vec{s}$. Võtame sirgel suvalise punkti Q. Rakendame vektori $\vec{s}$ punktile Q ja ehitame vektoritele $\overrightarrow{QP}$ ja $\vec{s}$ rööpküliku (vt joonis 6.5).



Joonis 6.5. Punkti P kaugus sirgeni $\vec{s}$

Rööpküliku pindala on võrdne vektorite $\overrightarrow{QP}$ ja $\vec{s}$ vektorkorrutise pikkusega (vt omadus 5.9):

$$S=|\overrightarrow{QP}\times\vec{s}|.$$

Teisalt, rööpküliku pindala saab arvutada kui aluse $|\vec{s}|$ ja kõrguse $d(P,s)$ korrutist, seega

$$S=d(P,s)|\vec{s}|=|\overrightarrow{QP}\times\vec{s}|.$$

Viimasest võrrandist saame valemit punkti kauguse sirgeni leidmiseks:

$$d(P,s)=\frac{|\overrightarrow{QP}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

□

Näide 6.7. Leiame punkti $P(3,-1,4)$ kauguse sirgest

$$s:\ \frac{x+2}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{4}.$$

Sirge s läbib punkti $Q(-2, 0, 1)$, seega

$$d(P, s) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{s}\right|}{|\overrightarrow{s}|} = \frac{|(5, -1, 3) \times (3, -2, 4)|}{\sqrt{9 + 4 + 16}}.$$

Leiame

$$(5, -1, 3) \times (3, -2, 4) = \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (2, -11, -7).$$

Saame

$$d(P, s) = \frac{|(2, -11, -7)|}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6}.$$

6.5 Kahe sirge vastastikused asendid

Definitsioon 6.8

Kaks sirget võivad ruumis paikneda neljal erineval viisil.

1. Kui kahel sirgel leidub täpselt üks ühine punkt, siis ütleme, et sirged **lõikuvad**.
2. Me ütleme, et sirged **ühtivad**, kui kõik nende punktid on ühised.
3. Me ütleme, et kaks sirget on **paralleelsed**, kui nad asuvad ühel tasandil ja nendel ei ole ühiseid punkte.
4. Sirgeid, mis ei asetse ühel ja samal tasandil nimetame **kiivsirgeteks**.

Kahe sirge vahelise nurga defineerime nende sihivektorite vahelise nurga kaudu.

Definitsioon 6.9

Sirgete s_1 ja s_2 vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka

$$\angle(s_1, s_2) = \min\{\angle(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}), \pi - \angle(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})\},$$

kus $\overrightarrow{s_1}$ on sirge s_1 ja $\overrightarrow{s_2}$ on sirge s_2 sihivektor.

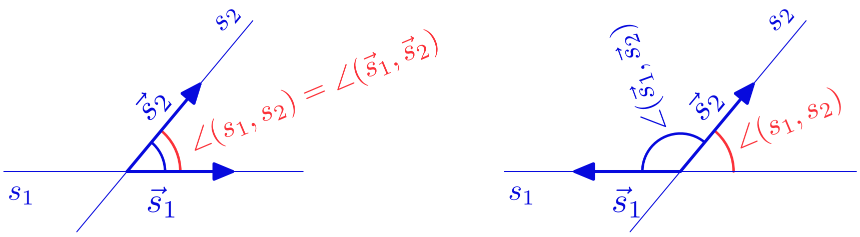
Definitsioonist järeldub, et iga kahe sirge korral nende vaheline nurk ei ole suurem, kui $90°$.

Kui nurk sihivetorite vahel on terav- või täisnurk, siis see võrdub nurgaga vastavate sirgete vahel. Sel juhul saame kirjutada

$$\cos\angle(s_1, s_2) = \cos\angle(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}) = \left|\cos\angle(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})\right|.$$

Kui nurk sirgete sihivektorite vahel on nürinurk, siis

$$\angle(s_1, s_2) = 180° - \angle(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})$$



Joonis 6.6. Esimesel joonisel $\angle(s_1, s_2) = \angle(\vec{s_1}, \vec{s_2})$, teisel joonisel $\angle(s_1, s_2) = 180° - \angle(\vec{s_1}, \vec{s_2})$

ja seega

$$\cos\angle(s_1, s_2) = \cos\left(180° - \angle(\vec{s_1}, \vec{s_2})\right) = -\cos\angle(\vec{s_1}, \vec{s_2}) = \left|\cos\angle(\vec{s_1}, \vec{s_2})\right|.$$

Kokkuvõttes, sõltumata sellest, kas tegemist on terav- või nürinurgaga, me saame

$$\cos\angle(s_1, s_2) = \left|\cos\angle(\vec{s_1}, \vec{s_2})\right| = \frac{|\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}.$$

Omadus 6.3

Sirgete s_1 ja s_2 vaheline nurk leitakse valemiga

$$\angle(s_1, s_2) = \arccos\frac{|\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|},$$

kus $\vec{s_1}$ ja $\vec{s_2}$ on vastavalt sirgete s_1 ja s_2 sihivektorid.

Näide 6.8. Leiame sirgete

$$s_1 : \ z = -5, \ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1}, \qquad s_2 : \ \frac{x}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$$

vahelise nurga. Sirgete sihivektorid on $\vec{s_1} = (2, -1, 0)$ ja $\vec{s_2} = (5, 2, 3)$. Arvutame

$$\cos\angle(s_1, s_2) = \frac{|2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3|}{\sqrt{4+1+0} \cdot \sqrt{25+4+9}} = \frac{8}{\sqrt{190}}.$$

Siit $\angle(s, u) = \arccos(8/\sqrt{190})$.

6.6 Kahe tasandi vastastikused asendid

Definitsioon 6.10

Kaks tasandit võivad ruumis paikneda kolmel erineval viisil.

1. Me ütleme, et tasandid **ühtivad**, kui kõik nende punktid on ühised.
2. Kui kahel mitteühtival tasandil leiduvad ühised punkt, siis ütleme, et tasandid **lõikuvad**. Tasandite ühised punktid moodustavad sirge – tasandite **lõikesirge**.
3. Me ütleme, et kaks tasandit on **paralleelsed**, kui nendel ei ole ühiseid punkte.

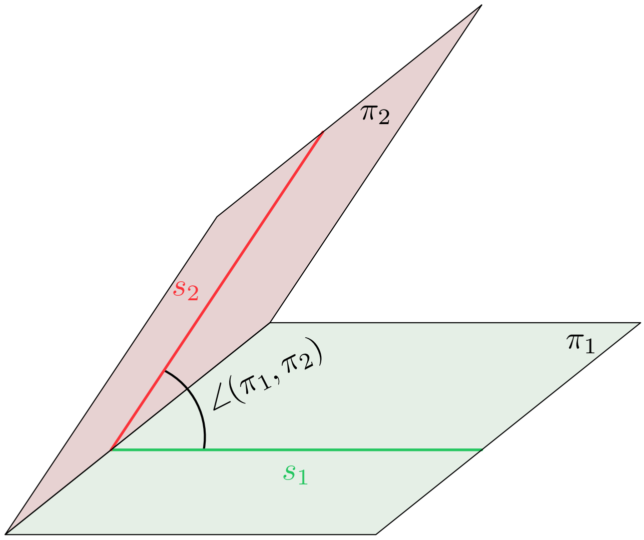
Definitsioon 6.11

Olgu π_1 ja π_2 kaks lõikuvat tasandit. Olgu s_1 ja s_2 sirged vastavalt tasandil π_1 ja π_2, mis on risti tasandite lõikesirgega.

Nurgaks tasandite π_1 ja π_2 vahel nimetatakse nurka sirgete s_1 ja s_2 vahel:

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \angle(s_1, s_2).$$

Kui tasandid ei lõiku, siis ütleme, et nurk tasandite vahel võrdub nulliga.



Joonis 6.7. Nurk kahe tasandi vahel

Olgu n_1 ja n_2 sellised sirged, et tasandite π_1 ja π_2 normaalvektorid $\overrightarrow{n_1}$ ja $\overrightarrow{n_2}$ oleksid nende sirgete sihivektoriteks. Kuna sirge n_1 on risti sirgega s_1 ja sirge n_2 on risti sirgega s_2, siis nende sirgete vahelised nurgad on võrdsed:

$$\angle(s_1, s_2) = \angle(n_1, n_2).$$

Omadus 6.4

Tasandite π_1 ja π_2 vahelist nurka leitakse valemiga

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n}_1||\overrightarrow{n}_2|},$$

kus $\overrightarrow{n}_1$ ja $\overrightarrow{n}_2$ on vastavalt tasandite π_1 ja π_2 normaalvektorid.

Näide 6.9. Leiame tasandite

$$\pi_1 : x - 2y + z = 0, \quad \pi_2 : 2x + 3y - 2z = 0$$

vahelise nurga. Tasandite normaalvektorid on $\overrightarrow{n}_1 = (1, -2, 1)$ ja $\overrightarrow{n}_2 = (2, 3, -2)$. Arvutame

$$\cos(\angle(\pi_1, \pi_2)) = \frac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{4+9+4}} = \frac{6}{\sqrt{102}}.$$

Siit $\angle(\pi_1, \pi_2) = \arccos(6/\sqrt{102})$.

6.7 Sirge ja tasandi vastastikused asendid

Definitsioon 6.12

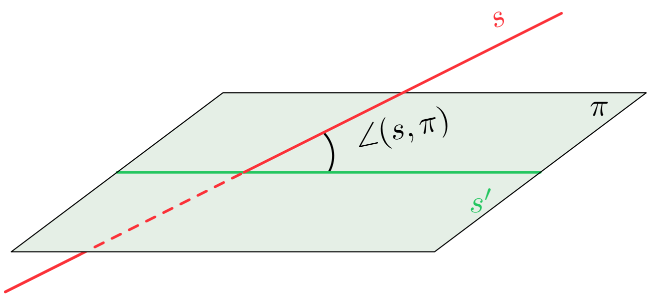
Sirgel ja tasandil võib olla kolm erinevat vastastikust asendit.

1. Me ütleme, et sirge **asub tasandil**, kui kõik sirge punktid asuvad tasandil.
2. Me ütleme, et sirge ja tasand **lõikuvad**, kui nendel leidub täpselt üks ühine punkt.
3. Me ütleme, et sirge ja tasand on **paralleelsed**, kui nendel ei ole ühiseid punkte.

Olgu antud sirge s ja tasand π. Olgu sirge sihivektor $\overrightarrow{s}$ ja tasandi normaalvektor $\overrightarrow{n}$. Projekteerime sirge s tasandi peale ja tähistame tasandil olevat sirget s'.

Definitsioon 6.13

Sirge s ja tasandi π vaheliseks nurgaks nimetatakse sirge s ja tasandile projekteeritud sirge s' vahelist nurka ning seda tähistatakse $\angle(s, \pi)$ abil.
Kui sirge ja tasand ei lõiku, siis ütleme, et nurk sirge ja tasandi vahel võrdub nulliga.



Joonis 6.8. Sirge s ja tasandi π vaheline nurk

Sirgete s ja s' vahelise nurga võib leida vektorite $\overrightarrow{n}$ ja $\overrightarrow{s}$ vahelise nurga abil:

$$\angle(s, s') = \frac{\pi}{2} - \angle(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{n}).$$

Seega

$$\sin \angle(s, \pi) = \sin \angle(s, s') = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{n})\right) = \cos(\angle(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{n})) = \frac{|\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{s}||\overrightarrow{n}|}.$$

Omadus 6.5

Sirge s ja tasandi π vahelist nurka leitakse valemiga

$$\angle(s, \pi) = \arcsin \frac{|\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{s}||\overrightarrow{n}|},$$

kus $\overrightarrow{s}$ on sirge s sihivektor ja $\overrightarrow{n}$ on tasandi π normaalvektor.

Näide 6.10. Leiame sirge s ja tasandi π vastastikuse asendi, kui

$$s : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{6}, \quad \pi : 2x + 3y + 5 = 0.$$

Leiame

$$\overrightarrow{s} = (4, 2, 6) = 2(2, 1, 3), \quad \overrightarrow{n} = (2, 3, 0)$$

ja

$$\sin(\angle(s, \pi)) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0|}{\sqrt{4+1+9} \cdot \sqrt{4+9+0}} = \frac{7}{\sqrt{14 \cdot 13}} = \frac{7}{\sqrt{182}}.$$

Seega $\angle(s, \pi) = \arcsin(7/\sqrt{182})$.

Peatükk 7

Funktsioonid

7.1 Funktsiooni mõiste

7.1.1 Funktsiooni mõiste

Definitsioon 7.1

Olgu X mittetühi reaalarvude hulk. Kui x tähistab hulga X suvalist elementi, siis öeldakse, et x on **muutuv suurus** ehk lihtsalt **muutuja.** Hulga X elemente nimetatakse **muutuja** x **väärtusteks.**

Definitsioon 7.2

Olgu X mittetühi reaalarvude hulk. Kui igale arvule $x \in X$ on mingi eeskirja f järgi seatud vastavusse täpselt üks reaalarv $y \in \mathbb{R}$, siis öeldakse, et hulgas X on defineeritud **funktsioon** f, mida märgitakse

$$y = f(x).$$

Muutujat x nimetatakse **sõltumatuks muutujaks** või **funktsiooni argumendiks** ja muutujat y **sõltuvaks muutujaks** või **funktsiooni väärtuseks**.

Oma olemuselt on funktsioon mingi reegel (reeglite kogu, algoritm, protsess), mis igale sisendväärtusele leiab mingi väljundväärtuse.

Näide 7.1. Seos $y = x \pm 1$ ei kujuta endast funktsiooni, kuna argumendile x on vastavusse seatud rohkem kui üks väärtus. Näiteks, kui $x = 2$, siis y-i väärtusteks on 0 ja 3. Küll aga on funktsiooniks $y = x - 1$.

Näide 7.2. Valem

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

kujutab endast funktsiooni, mille väärtuseks on raadiusega r kera ruumala V. Viimane sõltub kera raadiusest r ja seda sõltuvust märgitakse $V = V(r)$.

Definitsioon 7.3

Funktsiooni argumendi kõikide väärtuste hulka nimetakse funktsiooni **määramispiirkonnaks**.
Funktsiooni kõikide väärtuste hulka nimetatakse funktsiooni **muutumispiirkonnaks**.

Tavaliselt tähistatakse funktsiooni f määramispiirkonda tähega X ja muutumispiirkonda tähega Y. Kasutatakse ka kirjutist $f\colon X \to D$, kus D on suvaline hulk, mis sisaldab funktsiooni f muutumispiirkonda, näiteks $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Kui funktsiooni f korral on antud vaid teda määrav eeskiri, määramispiirkond X pole aga fikseeritud, siis loetakse määramispiirkonnaks kõikide nende argumendi väärtuste hulk, mille korral funktsiooni määrav eeskiri omab mõtet (nn **loomulik määramispiirkond**). Funktsiooni f saab defineerida suvalisel mittetühjal määramispiirkonna alamhulgal. Sellisel juhul on oluline seda mainida.

Näide 7.3. Funktsiooni

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

(loomulikuks) määrmispiirkonnaks on lõik $[-1, 1]$, kuna kõikide teiste reaalarvude puhul muutuks ruutjuure märgi all olev avaldis negatiivseks ja viimane viiks meid kompleksarvude maailma. Funktsiooni f muutumispiirkonnaks on lõik $[0, 1]$.

Definitsioon 7.4

Öeldakse, et funktsioonid f ja g on võrdsed, kui

1. funktsioonide f ja g määramispiirkonnad on samad;
2. $f(x) = g(x)$ iga punkti $x \in X$ korral, kus X tähistab funktsioonide f ja g määramispiirkonda.

Definitsioon 7.5

Funktsiooni f **graafikuks** nimetatakse xy-tasandi punktide hulka

$$G(f) = \{(x, y) \,|\, y = f(x),\, x \in X\},$$

kus hulk X on funktsiooni f määramispiirkond.

7.1.2 Aritmeetilised tehted funktsioonidega. Liitfunktsioon

Definitsioon 7.6

Olgu antud funktsioonid $f\colon X_1 \to \mathbb{R}$ ja $g\colon X_2 \to \mathbb{R}$. Olgu $X = X_1 \cap X_2$.

1. Funktsioonide f ja g **summaks** nimetatakse funktsiooni $f + g\colon X \to \mathbb{R}$, mis defineeritakse võrdusega
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$
2. Funktsioonide f ja g **vaheks** nimetatakse funktsiooni $f - g\colon X \to \mathbb{R}$, mis defineeritakse võrdusega
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$
3. Funktsioonide f ja g **korrutiseks** nimetatakse funktsiooni $fg\colon X \to \mathbb{R}$, mis defineeritakse võrdusega
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$
4. Funktsioonide f ja g **jagatiseks** nimetatakse funktsiooni $\dfrac{f}{g}\colon X \setminus \{x\colon g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, mis defineeritakse võrdusega
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{iga } x \in X \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \text{ korral.}$$

Definitsioon 7.7

Olgu antud funktsioonid $f\colon X \to \mathbb{R}$ ja $g\colon Y \to \mathbb{R}$, kus hulk Y on funktsiooni f muutumispiirkond. Funktsioonide f ja g **liitfunktsiooniks** nimetatakse funktsiooni $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$, mis defineeritakse võrdusega
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Näide 7.4. Vaatleme funktsioone $f(x) = x + 1$ ja $g(x) = x^2$. Saame moodustada järgmiseid liitfunktsioone
$$u(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + 1$$
ja
$$v(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

7.2 Funktsioonide liigid

7.2.1 Paaris- ja paaritud funktsioonid

Definitsioon 7.8

Olgu funktsiooni f määramispiirkond X on sümmeetriline nullpunkti suhtes, s.t kui $x \in X$, siis ka $-x \in X$. Funktsiooni f nimetatake **paarisfunktsiooniks**, kui

$$f(-x) = f(x)$$

iga $x \in X$ korral. Funktsiooni f nimetatake **paarituks funktsiooniks**, kui

$$f(-x) = -f(x)$$

iga $x \in X$ korral.

Omadus 7.1

- Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes.
- Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline nullpunkti suhtes.

Uurime, kas leidub funktsioon, mis on korraga nii paaris kui ka paaritu. Oletame, et funktsioon f on paaris ja paaritu, siis iga määramispiirkonna elemendi x korral

$$f(x) = f(-x) = -f(-x) = -f(x).$$

Võrdus $f(x) = -f(x)$ tähendab, et $f(x) = 0$.

Omadus 7.2

Olgu antud funktsioon f määramispiirkonnaga X, kusjuures kui $x \in X$, siis ka $-x \in X$. Funktsioon f on korraga paaris ja paaritu siis ja ainult siis, kui $f(x) = 0$ iga $x \in X$ korral.

Näide 7.5.

- Funktsioon $f(x) = x^2$ on paaris, sest $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
- Funktsioon $f(x) = \frac{1}{x}$ on paaritu, sest $-f(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} = f(x)$.
- Funktsioon $f(x) = \sin x + \cos x$ ei ole paaris ega paaritu.

  1. Näitame, et funktsioon f pole paaritu. Selleks leiame punkti $a \in \mathbb{R}$ mille korral seos $f(a) = -f(-a)$ ei kehti. Olgu $a = \pi$, siis

  $$f(\pi) = \sin \pi + \cos \pi = 0 - 1 = -1.$$

  Teiselt poolt

  $$-f(-\pi) = -(\sin(-\pi) + \cos(-\pi)) = -(0 - 1) = 1.$$

Kuna $-1 \neq 1$, siis f pole paaritu funktsioon.

2. Veendume, et funktsioon f pole paaris. Leiame punkti $b \in \mathbb{R}$ nii, et $f(b) \neq f(-b)$. Eelpool me leidsime, et $f(\pi) = f(-\pi) = -1$, seega punktis π tingimus $f(x) = f(-x)$ pole rikutud ja seekord see punkt meile ei sobi. Paneme $b = \frac{\pi}{2}$, siis

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1.$$

Teiselt poolt

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1.$$

Kuna $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, siis funktsioon f pole ka paaris.

7.2.2 Perioodilised funktsioonid

Definitsioon 7.9

Funktiooni f nimetatakse **perioodiliseks**, kui leidub selline nullist erinev reaalarv T mille korral kehtib kaks järgmist tingimust:

1. kui punkt x kuulub funktsiooni määramispiirkonda X, siis ka $x - T \in X$ ja $x + T \in X$;

2. iga $x \in X$ korral

$$f(x) = f(x \pm T).$$

Arvu T nimetarakse funktsiooni f **perioodiks**.

Definitsioonist järeldub, et kui arv T on funktsiooni f periood, siis ka suvalise täisarvu $k \neq 0$ korral arv kT on funktsiooni f perioodiks. Seega perioodilisel funktsioonil on lõpmata palju perioode.

Definitsioon 7.10

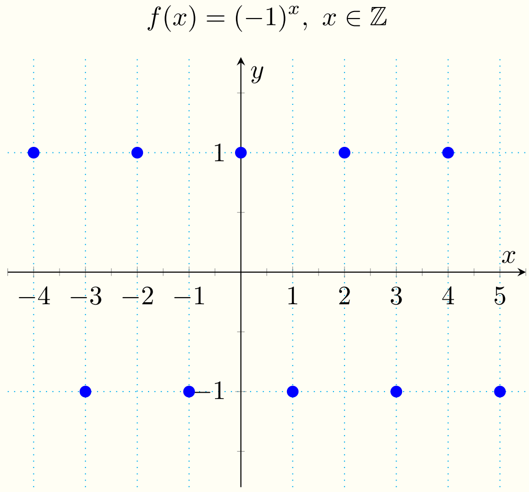
Kui perioodilise funktsiooni f positiivsete perioodide hulgas leidub vähim element, siis seda perioodi nimetatakse funktsiooni f **põhiperioodiks**:

$$T_0 = \min\{T > 0 : T \text{ on funktsiooni } f \text{ periood}\}$$

Näide 7.6.

1. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = (-1)^x, \ x \in \mathbb{Z}.$$



Olgu $T \neq 0$. Tingimus

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

on samaväärne võrdusega

$$(-1)^{x-T} = (-1)^x = (-1)^{x+T}$$

ehk

$$(-1)^x(-1)^{-T} = (-1)^x = (-1)^x(-1)^T,$$

kust saame

$$(-1)^{-T} = 1 = (-1)^T.$$

Viimane tingimus kehtib parajasti siis kui T on paarisarv. Seega funktsioon on perioodiline ja tema põhiperiood on vähim positiivne paarisarv:

$$T_0 = 2.$$

2. Konstantne funktsioon $f(x) = 5$ on perioodiline. Suvaline reaalarv $T \neq 0$ on selle perioodiks:

$$f(x - T) = f(x + T) = f(x) = 5$$

iga reaalarvu x korral. Kuid põhiperioodi konstantsel funktsioonil ei ole, kuna hulgas $(0, \infty)$ pole minimaalset elementi.

3. Funktsioon $f(x) = x^2$ pole perioodiline. Tõepoolest, kui oletame, et arv T on funktsiooni periood, siis suvalise reaalarvu x korral peab kehtima

$$x^2 = (x + T)^2.$$

Võttes $x = T$ saame

$$T^2 = (T + T)^2$$

ehk

$$T^2 = 4T^2.$$

Viimane võrdus on võimaik ainult $T = 0$ korral. Kuna definitsiooni järgi funktsiooni periood on nullist erinev arv, siis funktsioon $f(x) = x^2$ pole perioodiline.

7.2.3 Tõkestatud funktsioonid

Definitsioon 7.11

Olgu hulk D funktsiooni f määramispiirkonna alamhulk.

1. Öeldakse, et funktsioon f on **ülalt tõkestatud** hulgas D, kui leidub arv $M \in \mathbb{R}$ nii, et
$$f(x) \leq M \quad \text{iga } x \in D \text{ korral.}$$
2. Öeldakse, et funktsioon f on **alt tõkestatud** hulgas D, kui leiduvad arvud $m \in \mathbb{R}$ nii, et
$$m \leq f(x) \quad \text{iga } x \in D \text{ korral.}$$
3. Öeldakse, et funktsioon f on **tõkestatud** hulgas D, kui leiduvad arvud $m, M \in \mathbb{R}$ nii, et
$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{iga } x \in D \text{ korral.}$$

Kui on öeldud, et funktsioon on tõkestatud ja pole mainitud millisel hulgal, siis on mõeldud, et funktsioon on tõkestatud oma määramispiirkonnas.

Näide 7.7.

- Funktsioon $f(x) = 2x$ pole tõkestatud. Tõepoolest, kui oletame, et leidub selline arv M, et iga $x \in \mathbb{R}$ korral
$$2x \leq M,$$
siis viimane võrratus peab kehtima ka $x = \dfrac{M+1}{2}$ korral. Kuna
$$2 \cdot \frac{M+1}{2} = M + 1 > M,$$
siis meie oletus oli eksitav.
- Funktsioon $f(x) = 2x,\ x \in [0, 10)$ on tõkestatud, sest iga $x \in [0, 10)$ korral
$$0 \leq 2x \leq 20.$$

7.2.4 Üksühesed funktsioonid

Definitsioon 7.12

Funktsiooni f nimetatakse **üksüheseks funktsiooniks** (**injektiivseks funktsiooniks**), kui määramispiirkonna X iga kahe elemendi $x_1 \neq x_2$ korral ka funktsiooni väärtused erinevad, s.t
$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Funktsiooni üksühesus tähendab veel seda, et kui $f(x_1) = f(x_2)$ siis peab kehtima elementide võrdus $x_1 = x_2$.

Märkus 7.1

Kui iga x-teljega paralleelne sirge lõikab funktsiooni f graafikut ülimalt ühes punktis, siis on funktsioon f üksühene.

Näide 7.8.

- Funktsioon $f(x) = x^2$ ei ole üksühene, sest näiteks $f(-2) = f(2) = 4$.
- Kui nüüd võtame sama valemiga antud funktsiooni $g(x) = x^2$, aga määramispiirkonnaks valime $X = [0, \infty)$, siis funktsioon g on juba üksühene funktsioon, sest iga mittenegatiivsete x_1, x_2 korral võrdusest
$$x_1^2 = x_2^2$$
järeldub võrdus
$$x_1 = x_2.$$

7.2.5 Pööratavad funktsioonid

Definitsioon 7.13

Olgu funktsiooni f määramispiirkond X ja muutumispiirkond Y.
Kui leidub funktsioon f^{-1} määramispiirkonnaga Y selline, et
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{iga } x \in X \text{ korral},$$
siis öeldakse, et funktsioon f on **pööratav**. Funktsiooni f^{-1} nimetatakse funktsiooni f **pöördfunktsiooniks**.

Omadus 7.3

Funktsiooni f ja tema pöördfunktsiooni f^{-1} graafikud on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes.

Teoreem 7.4

Funktsioon f on pööratav parajasti siis, kui ta on üksühene.

Märkime, et tavaliselt eelpool toodud teoreemi sõnastatakse teistmoodi: „Funktsioon f on pööratav parajasti siis, kui ta on üksühene pealekujutus“. Kuna selles kursuses me defineerime pöördfuniktsiooni lähtuva funktsiooni muutumispiirkonnas, siis pealekujutuse nõuet me jääme vahele.

Funktsiooni f pöördfunktsiooni f^{-1} leidmiseks tuleb

1. avaldada võrrandist $y = f(x)$ muutuja x muutuja y kaudu;
2. vahetada tähised x ja y;
3. kirjutada välja pöördfunktsioon f^{-1}.

Näide 7.9. Seame Celsiuse kraadidele vastavusse Fahrenheiti kraadid

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32.$$

Selle järgi et teisendada näiteks $30°C$ Fahrenheiti kraadideks leiame $f(30) = \frac{9}{5} \cdot 30 + 32 = 86$, s.t $30°C = 86°F$.

Leiame funktsiooni f pöördfunktsiooni. Paneme kirja

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

ja avaldame x-i y-i kaudu:

$$x = \frac{5}{9}(y - 32).$$

Vahetades tähised x ja y, saame

$$y = \frac{5}{9}(x - 32)$$

ehk

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32).$$

Pöördfunktsiooni abil saame leida temperatuuri Celsiuse kraadides, kui see on antud Fahrenheiti kraadides. Näiteks, $f^{-1}(122) = \frac{5}{9}(122 - 32) = 50$, s.t $122°F = 50°C$.

7.3 Põhilised elementaarfunktsioonid

Definitsioon 7.14

Põhiliste elementaarfunktsioonide all mõistetakse järgmisi funktsioone:

1. konstantne funktsioon $f(x) = c$;
2. astmefunktsioon $f(x) = x^a$;
3. eksponentfunktsioon $f(x) = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$;
4. logaritmfunktsioon $f(x) = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$;
5. trigonomeetrilised funktsioonid $f(x) = \sin x,\ f(x) = \cos x,\ f(x) = \tan x,\ f(x) = \cot x$;
6. arkusfunktsioonid $f(x) = \arcsin x,\ f(x) = \arccos x,\ f(x) = \arctan x,\ f(x) = \operatorname{arccot} x$.

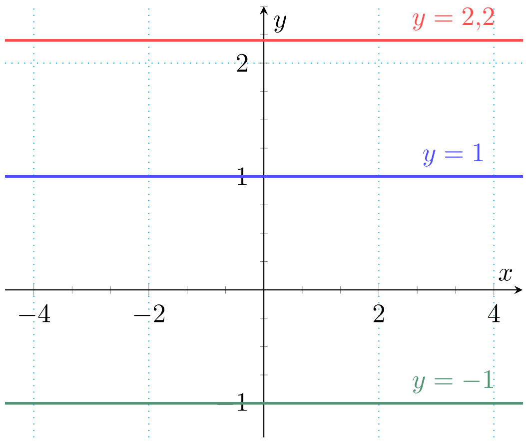
Toome välja põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud ja põhiomadused. Tähistame X-i kaudu funktsiooni määramispiirkonda ja Y-i kaudu muutumispiirkonda.

7.3.1 Konstantsed funktsioonid

$f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$.

- $X = \mathbb{R}$, $Y = \{c\}$
- paaris
- kui $c = 0$, siis ka paaritu
- perioodiline, põhiperioodi ei ole
- tõkestatud

Konstantne funktsioon $y = c$



7.3.2 Astmefunktsioonid

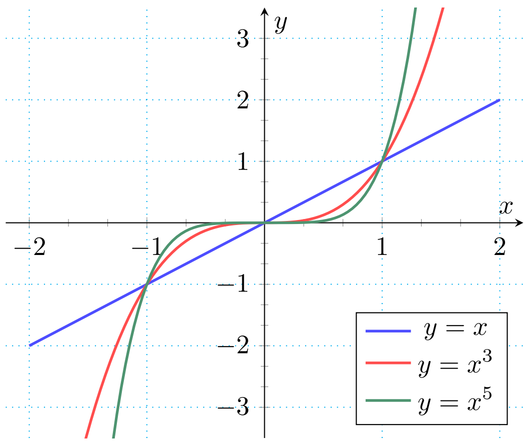
Astmefunktsiooni $f(x) = x^a$ määramispiirkond, muutumispiirkond ja graafik sõltuvad astmest a.

1. Kui $a \in \mathbb{N}$, siis funktsioon $f(x) = x^a$ on määratud kogu reaalteljel.

$f(x) = x^a$, kui $a > 0$ on paaritu.

- $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$
- paaritu
- üksühene
- pöördfunktsioon: $f^{-1}(x) = x^{1/a}$

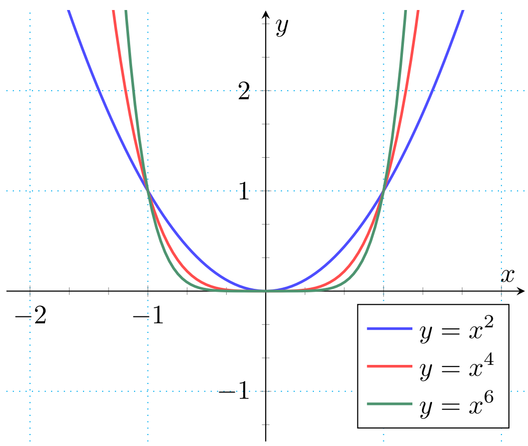
Astmefunktsioon $y = x^a$, kus $a > 0$ on paaritu



$f(x) = x^a$, kui $a > 0$ on paarisarv

- $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, \infty)$
- paaris

Astmefunktsioon $y = x^a$, kus $a > 0$ on paaris

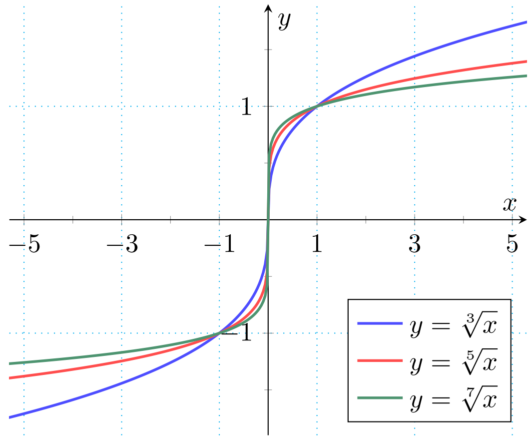


2. Kui $a = \dfrac{n}{m}$, kus $n, m \in \mathbb{N}$, siis $f(x) = a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$. Kui m on paaritu arv, siis $X = \mathbb{R}$. Kui m on paarisarv, siis $X = [0, \infty)$.

   $f(x) = \sqrt[m]{x}$, m on positiivne paaritu.

   - $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$
   - paaritu
   - üksühene
   - pöördfunktsioon $f^{-1}(x) = x^m$

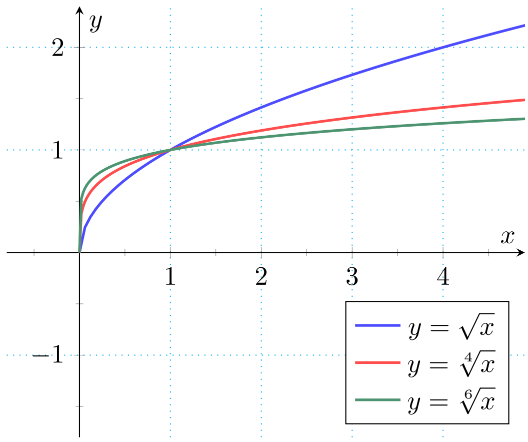
   Astmefunktsioon $y = \sqrt[m]{x}$, m on paaritu



   $f(x) = \sqrt[m]{x}$, m on paaris positiivne arv.

   - $X = [0, \infty)$, $Y = [0, \infty)]$
   - üksühene
   - pöördfunktsioon $f^{-1}(x) = x^n, \; x \in [0, \infty)$

   Astmefunktsioon $y = \sqrt[m]{x}$, m on paaris

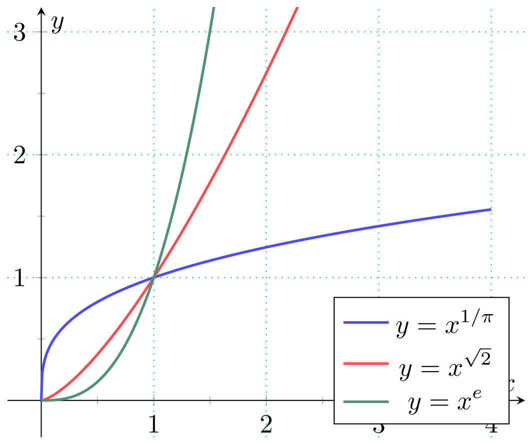


3. Kui a on positiivne irratsionaalarv, siis funktsiooni $f(x) = x^a$ määramispiirkond on $X = [0, \infty)$

   $f(x) = x^a$, kus a on positiivne irratsionaalarv.

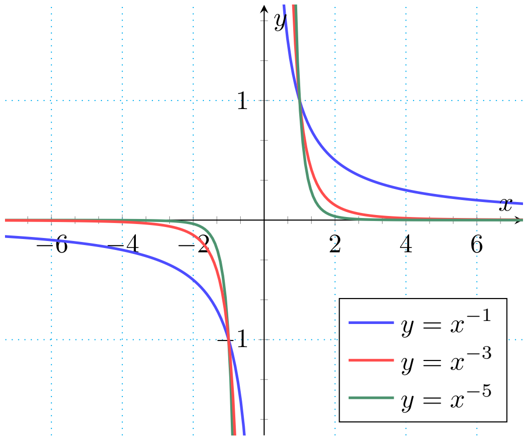
   - $X = [0, \infty)$, $Y = [0, \infty)$
   - üksühene
   - pöördfunktsioon $f^{-1}(x) = x^{1/a}$

   Astmefunktsioon $y = x^a$, $a > 0$ on irratsionaalarv



4. Kui $a < 0$ siis funktsioon defineeritakse positiivse astmega funktsiooni kaudu: $f(x) = x^a = \dfrac{1}{x^{-a}}$ ja seega pole määratud kohal $x = 0$.

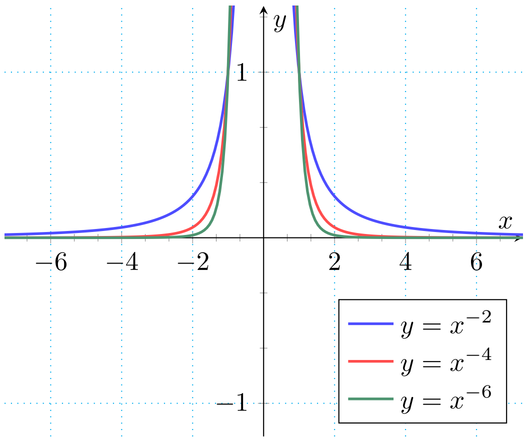
Astmefunktsioon $y = x^a$, kus $a < 0$ paaritu



$f(x) = x^a$, kui $a < 0$ on paaritu.

- $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- paaritu
- üksühene
- pöördfunktsioon: $f^{-1}(x) = x^{1/a}$

Astmefunktsioon $y = x^a$, kus $a < 0$ paaris



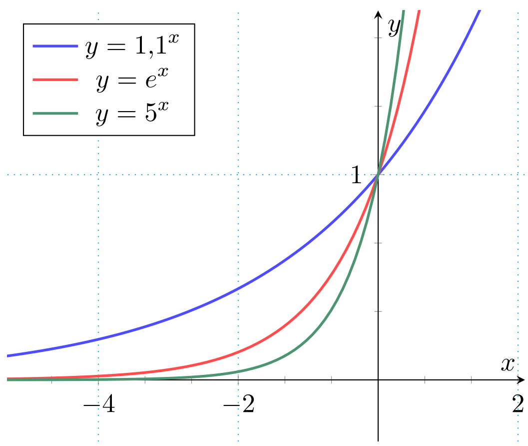
$f(x) = x^a$, kui $a < 0$ on paarisarv.

- $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y = (0, \infty)$
- paaris

7.3.3 Eksponentfunktsioonid

Kõige populaarsem eksponentfunktsioon on $y = e^x$, kus e on Euleri arv ($e \approx 2{,}71828$). Eksponentfunktsiooni $y = e^x$ kirjutatakse ka kujul $y = \exp(x)$. Eksponentfunktsioonid $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ on olulisel kohal loodusprotsesside kirjeldamisel (näiteks rahvastiku (populatsiooni) eksponentsiaalne kasv või kahanemine), intresside arvutamisel finantsmatemaatikas jne.

Eksponentfunktsioon $y = a^x$, $a > 1$



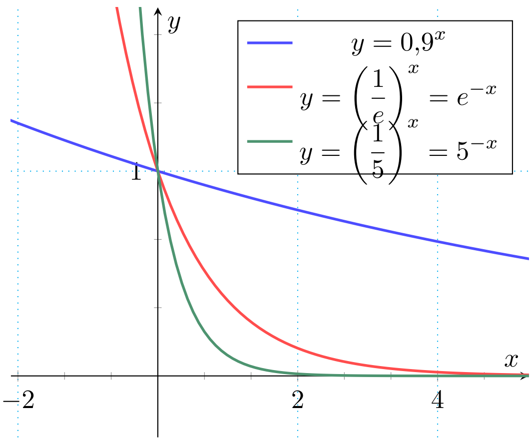
$f(x) = a^x$, kui $a > 1$.

- $X = \mathbb{R}$, $Y = (0, \infty)$
- üksühene
- pöördfunktsioon: $f^{-1}(x) = \log_a x$

$f(x) = a^x$, kui $0 < a < 1$.

- $X = \mathbb{R}$, $Y = (0, \infty)$
- üksühene
- pöördfunktsioon: $f^{-1}(x) = \log_a x$

Eksponentfunktsioon $y = a^x$, $0 < a < 1$



Omadus 7.5

Eksponentfunktsioonil on järgmised omadused:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ $(a \neq 0)$
3. $a^{xy} = (a^x)^y$
4. $(ab)^x = a^x b^x$
5. $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$
6. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$

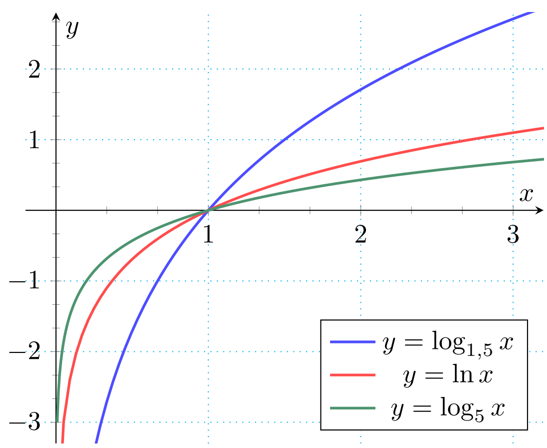
7.3.4 Logaritmfunktsioonid

Logaritmfunktsioon $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Kõige populaarsem nendest on naturaallogaritm $\ln x = \log_e x$.

Logaritmfunktsioon $y = \log_a x$, $a > 1$

$f(x) = \log_a x$, kui $a > 1$.

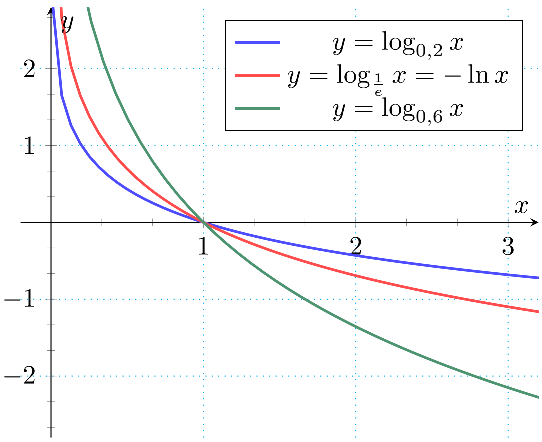
- $X = (0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$
- üksühene
- pöördfunktsioon: $f^{-1}(x) = a^x$



Eksponentfunktsioon $y = x^a$, $0 < a < 1$

$f(x) = \log_a x$, kui $0 < a < 1$.

- $X = (0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$
- üksühene
- pöördfunktsioon: $f^{-1}(x) = a^x$



Omadus 7.6

Logaritmfunktsioonil on järgmised omadused:

1. $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$
3. $\log_a x^c = c \log |x|$ $(c \in \mathbb{R})$
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
5. $x = a^{\log_a x}$ $(x > 0)$
6. $\log_a 1 = 0$
7. $\log_a a = 1$

7.3.5 Trigonomeetrilised funktsioonid

Kõik trigonomeetrilised funktsioonid on perioodilised ja seega pole üksühesed ja pööratavad. Kuid vaadelduna mingis intervallis, kus ta on üksühene, trigonomeetriline funktsioon on pööratav ja tema pöördfunktsiooniks on vastav arkusfunktsioon.

Siinusfunktsioon $f(x) = \sin x$.

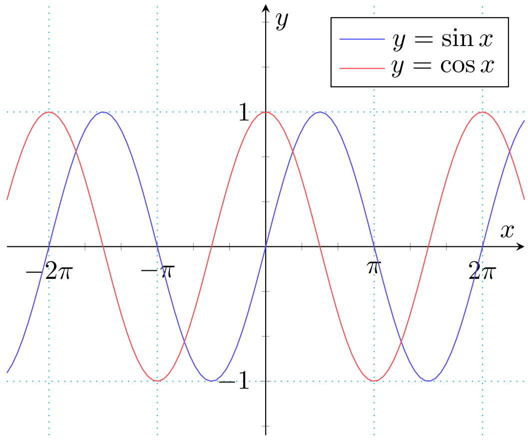
- $X = \mathbb{R}$, $Y = [-1, 1]$
- paaritu
- perioodiline, põhiperiood $T_0 = 2\pi$
- tõkestatud

Koosinusfunktsioon $f(x) = \cos x$.

- $X = \mathbb{R}$, $Y = [-1, 1]$
- paaris
- perioodiline, põhiperiood $T_0 = 2\pi$
- tõkestatud

Trigonomeetrilised funktsioonid

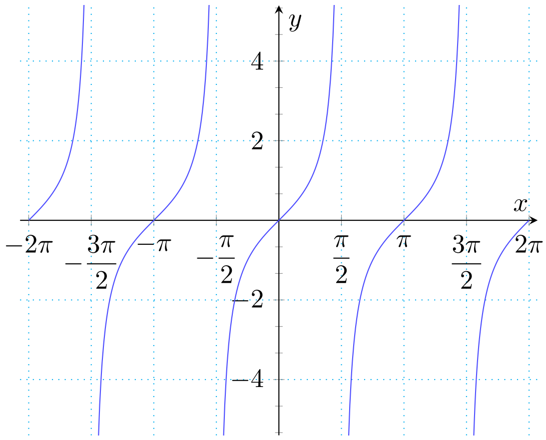
$y = \sin x$ ja $y = \cos x$



Tangensfunktsioon $f(x) = \tan x$.
Tangensi saab alati tuletada siinuse ja koosinuse kaudu: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

- $X = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$, $Y = \mathbb{R}$
- perioodiline, põhiperiood $T_0 = \pi$
- paaritu

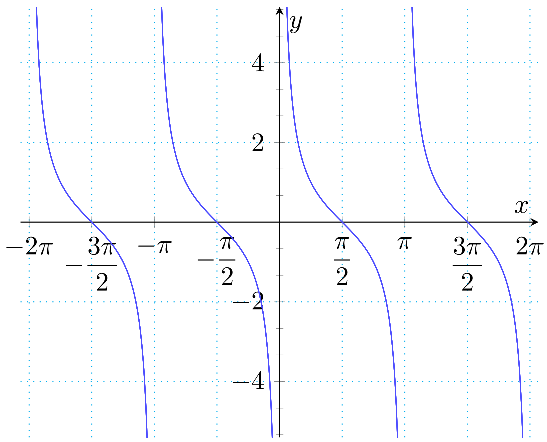
Tangensfunktsioon $y = \tan x$



Kootangensfunktsioon $f(x) = \cot x$.
Kootangensi saab alati tuletada tangensist või siinuse ja koosinuse kaudu: $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

- $X = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$, $Y = \mathbb{R}$
- perioodiline, põhiperiood $T_0 = \pi$
- paaritu

Kootangensfunktsioon $y = \cot x$



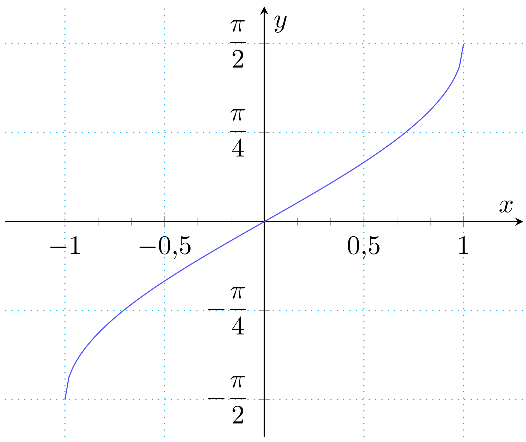
7.3.6 Arkusfunktsioonid

Arkusfunktsioonid on vastavate trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid sobivas piirkonnas.

Arkussiinus $f(x) = \arcsin x$.

- $X = [-1, 1]$, $Y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- paaritu
- tõkestatud
- üksühene
- $f^{-1}(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

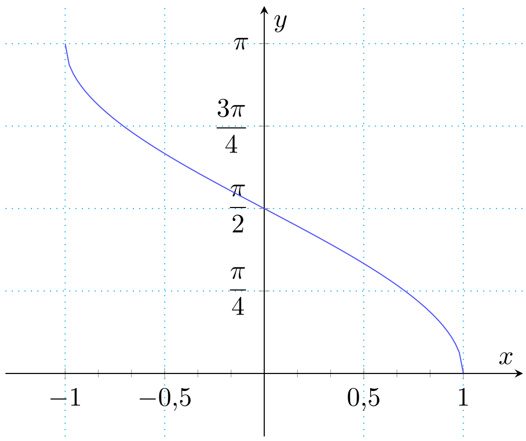
Arkussiinus: $y = \arcsin x$



Arkuskoosinus: $f(x) = \arccos x$.

- $X = [-1, 1]$, $Y = [0, \pi]$
- tõkestatud
- üksühene
- $f^{-1}(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$

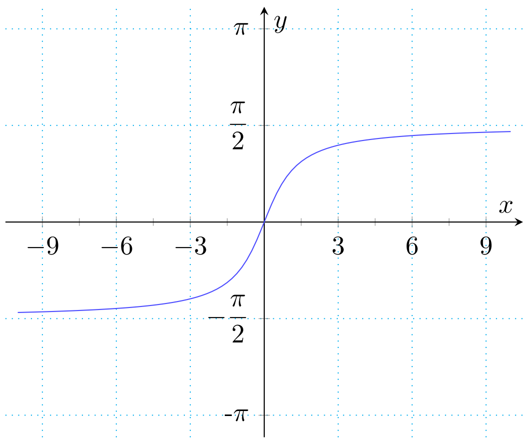
Arkuskoosinus: $y = \arccos x$



Arkustangens: $f(x) = \arctan x$.

- $X = \mathbb{R}$, $Y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- paaritu
- tõkestatud
- üksühene
- $f^{-1}(x) = \tan x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

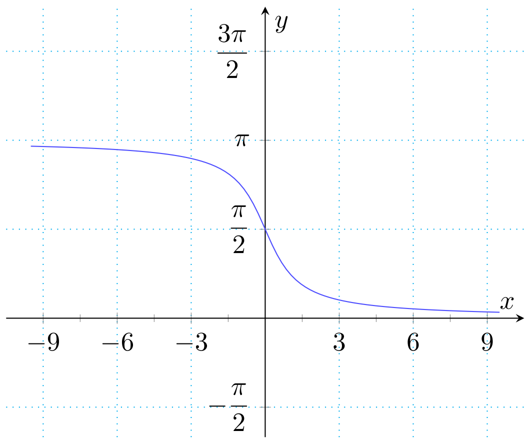
Arkustangens: $y = \arctan x$



Arkuskootangens $f(x) = \operatorname{arccot} x$**.**

- $X = \mathbb{R}$, $Y = (0, \pi)$
- üksühene
- $f^{-1}(x) = \cot x$, $x \in [0, \pi]$

Arkuskootangens: $y = \operatorname{arccot} x$



7.4 Elementaarfunktsioonid

Definitsioon 7.15

Elementaarfunktsioonideks nimetatakse funktsioone, mis on saadavad põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel.

Näide 7.10.

- Funktsioon

$$f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x^2+1}}$$

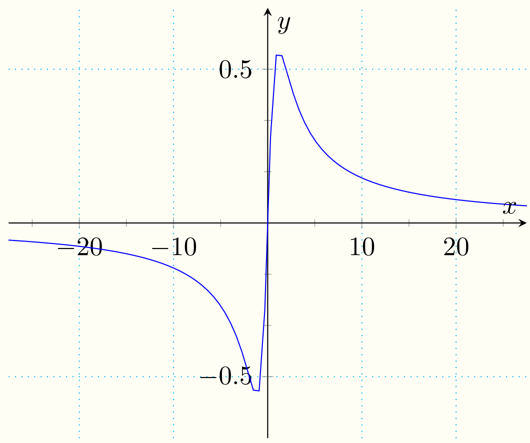
on elementaarfunktsioon, sest see on saadav põhilistest elementaarfunktsioonidest

- $f_1(x) = \arctan x$,
- $f_2(x) = \sqrt{x}$,
- $f_3(x) = x^2$,
- $f_4(x) = 1$.

Nimelt

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(f_3(x) + f_4(x))}.$$

$$f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x^2+1}}$$



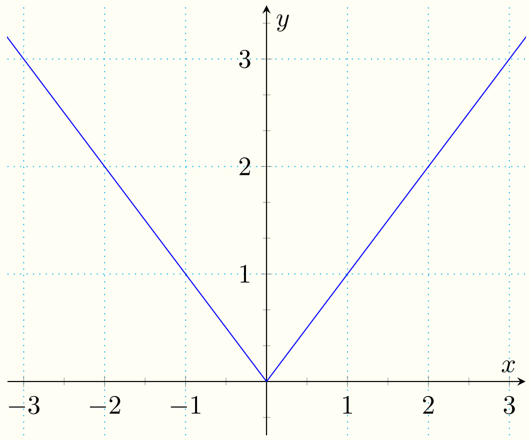
- Funktsioon

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

on elementaarfunktsioon, sest on esitatav elementaarfunktsioonide kaudu:

$$f(x) = |x| = \sqrt{x^2}.$$

$f(x) = |x|$

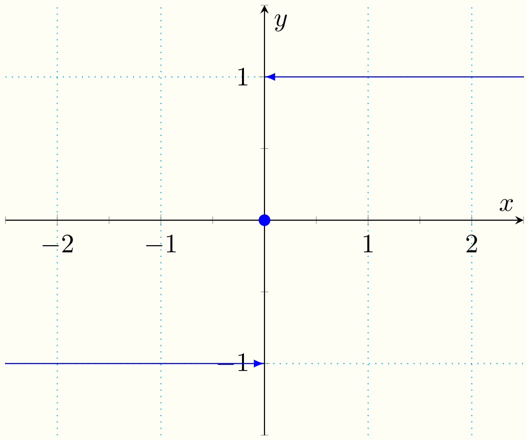


- Signumfunktsioon

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ei ole elementaarfunktsioon.

$f(x) = \operatorname{sgn} x$



Peatükk 8

Funktsiooni piirväärtus ja pidevus

8.1 Funktsiooni piirväärtuse mõiste

Paljud loodusteaduse ja tehnika küsimused seavad meid vajaduse ette uurida funktsiooni käitumist argumendi lähenemisel mõnele kindlale väärtusele. Näiteks võib meid huvitada küsimus, kuidas käitub vedeliku ruumala temperatuuri lähenemisel keemispunktile; kuidas käitub terasvarda venivus koormuse lähenemisel elastsuspiirile jne.

Piirväärtuse mõiste on matemaatilise analüüsi üks alustalasid. Sellele mõistele baseeruvad enamus meie järgmistes loengutes vaadeldavad mõisted, nagu funktsiooni pidevus, tuletis, määratud ja päratud integraalid.

Enne seda, kui anname funktsiooni piirväärtuse formaalse definitsiooni, vaatleme näidet, mis aitab meid intuitiivselt aru saada piirväärtuse mõistet.

Näide 8.1. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Kuna nulliga ei tohi jagada, siis see funktsioon pole määratud $x = 1$ korral. Uurime funktsiooni väärtuste käitumist, kui argumendi väärtused lähenevad arvule 1:

x	0,9	0,99	0,999	...	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	...	2,001	2,01	2,1

Võib täheldada, et argumendi x lähenedes arvule 1, funktsiooni väärtused lähenevad arvule kaks. Hiljem me selle kohta ütleme, et funktsiooni piirväärtus kohal $x = 1$ on kaks ja kirjutame

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Funktsiooni piirväärtuse defineerimisel kasutame kaht (väikest) positiivset suurust, mida me tähistame väikeste kreeka tähtedega ε (epsilon) ja δ (delta).

Definitsioon 8.1

Olgu hulk X funktsiooni f määramispiirkond.

Arvu A nimetatakse funktsiooni f **piirväärtuseks punktis** a, kui iga positiivse arvu ε jaoks leidub niisugune positiivne arv δ, et

$$\text{kui } x \in X \text{ ja } x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\ , \ \text{siis } f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

ja märgime seda

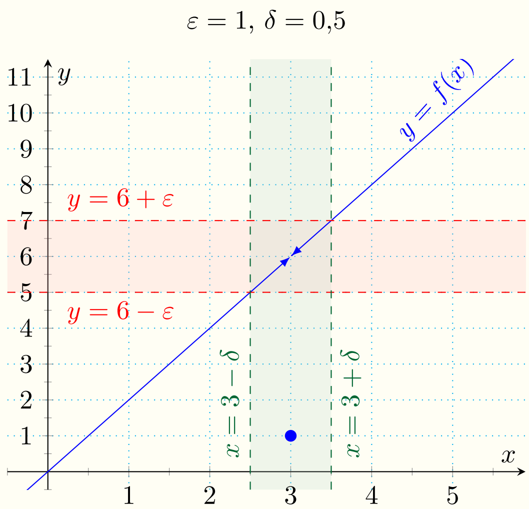
$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Teisiti öeldes $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ tähendab, et kui argumendi x väärtused on võetud a-le piisavalt lähedalt (lähemalt kui δ) siis funktsiooni väärtused $f(x)$ on arvule A lähedal (lähemal kui ε).

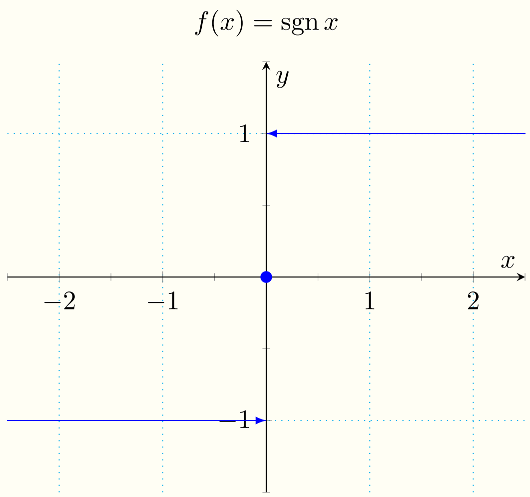
Nagu on näha definitsioonist, meid huvitavad funktsiooni f väärtusi ainult kohal $x \in (a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$, seega see, mis toimub funktsiooniga kohal a piirväärtuse väärtusele ei mõju. Tihti punkt a üldse ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda. Teiselt poolt me alati eeldame, et lähenemine punktile a on teostatav, et iga positiivse arvu δ korral hulgas $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ leidub lõpmata palju hulga X elemente.

Näide 8.2.

- Olgu
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \neq 3, \\ 1, & x = 3, \end{cases}$$
siis $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$. Tõepoolest, antud funktsiooni puhul iga $\varepsilon > 0$ korral sobib $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Näiteks, kui $\varepsilon = 1$ ehk nõutakse, et funktsiooni väärtused oleksid arvule 6 lähemal kui 1, s.t $f(x) \in (4,6)$, siis x peab olema arvule 3 lähemal kui 0,5: $x \in (2{,}5,\ 3{,}5)$, seejuures $x \neq 3$.

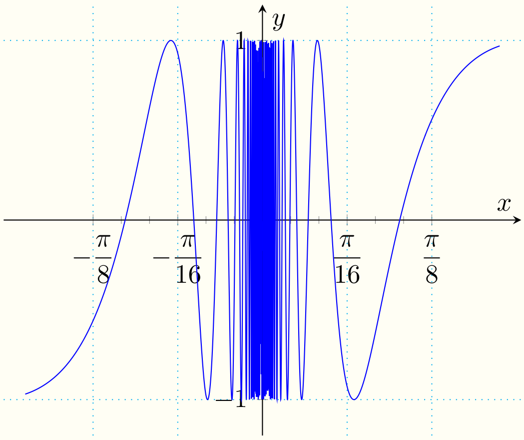


- Signumfunktsioonil
$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$
ei leidu piirväärtust kohal 0, kuid $f(0) = 0$. Tõepoolest, iga $\delta > 0$ korral funktsiooni väärtused kohal $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ on kas -1 või 1. Oletame, et piirväärtus ikka leidub ja see võrdub arvuga A. Paneme näiteks $\varepsilon = 0{,}1$. Siis kui -1, kui ka 1 peavad kuuluma vahemikku $(A-0{,}1, A+0{,}1)$, mis pole võimalik.



- Funktsioonil
$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$
puudub piirväärtus, protsessis $x \to 0$, kuna igas vahemikus $(-\delta, \delta)$ leidub neid x väärtusi, mille korral $f(x) = 1$ või $f(x) = -1$. Funktsiooni väärtused ei lähene mingile konkreetsele arvule, vaid „pendeldavad" väärtuste 1 ja -1 vahel.

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$



Definitsioon 8.2

Olgu hulk X funktsiooni f määramispiirkond.

Öeldakse, et **punktis a funktsiooni f piirväärtus on ∞ $(-\infty)$**, kui iga positiivse arvu E jaoks leidub niisugune positiivne arv δ, et

$$\text{kui } x \in X \text{ ja } x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}, \text{ siis } f(x) > E \ (f(x) < -E).$$

Sel juhul kirjutatakse

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad (\text{või siis } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty).$$

Näide 8.3.

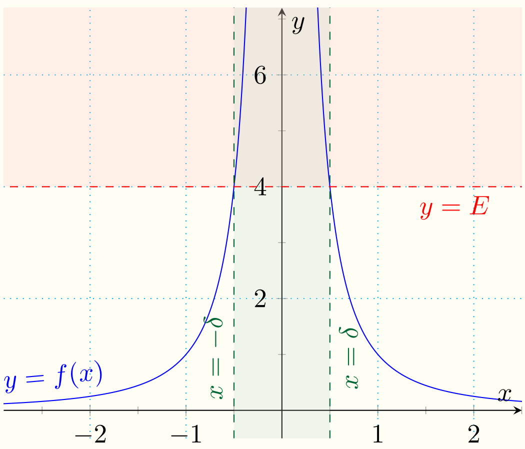
Kehtib võrdus

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty.$$

Selle piirprotsessi puhul iga $E > 0$ korral sobib $\delta = \frac{1}{\sqrt{E}}$.

Näiteks, et oleks täidetud tingimus $f(x) > 4$, tuleb võtta nullist erineva x, mis on punktile 0 lähedam kui $\frac{1}{\sqrt{4}} = 0{,}5$: $x \in (-0{,}5,\ 0{,}5) \setminus \{0\}$.

$E = 4,\ \delta = 0{,}5$



8.2 Ühepoolsed piirväärtused

Vaatleme ühepoolseid piirväärtusi, ehk piirväärtusi, kus x läheneb piirpunktile ainult ühelt poolt.

Definitsioon 8.3

Olgu hulk X funktsiooni f määramispiirkond.

- Arvu A nimetatakse funktsiooni f **parempoolseks piirväärtuseks** punktis a, kui iga positiivse arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub positiivne arv δ selliselt, et

  $$\text{kui } x \in X \text{ ja } x \in (a, a+\delta), \text{ siis } f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

  ja tähistatakse

  $$\lim_{x\to a+} f(x) = A.$$

- Arvu A nimetatakse funktsiooni f **vasakpoolseks piirväärtuseks** punktis a, kui iga positiivse arvu ε korral leidub positiivne arv δ selliselt, et

  $$\text{kui } x \in X \text{ ja } x \in (a-\delta, a), \text{ siis } f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$$

  ja tähistatakse

  $$\lim_{x\to a-} f(x) = A.$$

Vaatleme seost funktsiooni piirväärtuse ja vastavate ühepoolsete piirväärtuste vahel.

Teoreem 8.1

Olgu eksisteerivad (lõplikud või lõpmatud) ühepoolsed piirväärtused $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$. Piirväärtus $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ eksisteerib parajasti siis, kui ühepoolsed piirväärtused on võrdsed. Seejuures

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x).$$

Näide 8.4.

Funktsioonil

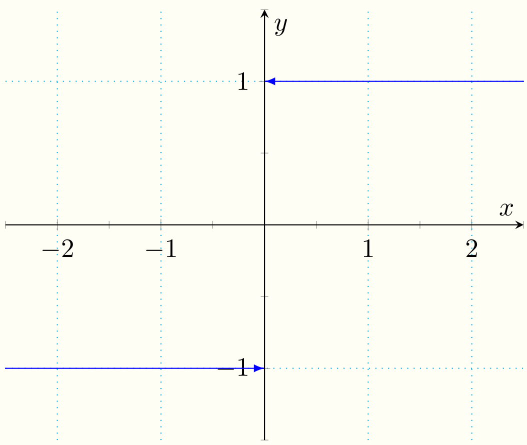
$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

puudub piirväärtus protsessis $x \to 0$, kuna

- $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-x}{x} = -1,$
- $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{x}{x} = 1.$

Kuna $-1 \neq 1$, siis teoreemi 8.1 järgi piirväärtust $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ ei leidu.

Funktsiooni $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ graafik



Definreerime funktsiooni piirväärtusi lõpmatuspunktides.

Definitsioon 8.4

Olgu hulk X funktsiooni f määramispiirkond.

Arvu A nimetatakse funktsiooni f **piirväärtuseks protsessis** $x \to \infty$ ($x \to -\infty$), kui iga positiivse arvu ε korral leidub positiivne arv D selliselt, et

$$\text{kui } x \in X \text{ ja } x > D \ (x < -D), \text{ siis } f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

ja tähistame

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = A).$$

Näide 8.5.

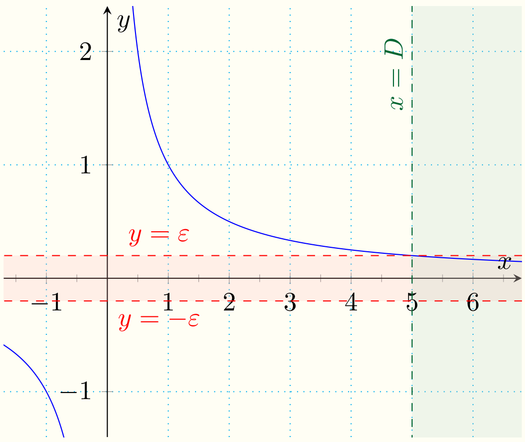
Kehtib võrdus

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Siin iga $\varepsilon > 0$ korral sobib $D = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Näiteks, et $f(x) \in (-0{,}2,\ 0{,}2)$, saame võtta $x > \dfrac{1}{0{,}2} = 5$.

$\varepsilon = 0{,}2,\ D = 5$



8.3 Pidevad funktsioonid

Definitsioon 8.5

Funktsiooni f nimetatakse **pidevaks** punktis a, kui

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Näide 8.6. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{juhul } x \neq 2 \\ 4 & \text{juhul } x = 2 \end{cases}.$$

Võib leida, et protsessis $x \to 2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

Seega eksisteerib piirväärtus protsessis $x \to 2$. Samuti eksisteerib funktsiooni väärtus $f(2) = 4$. Kuna $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$, siis see funktsioon on pidev punktis 2.

Kui funktsioon f oleks defineeritud nii, et tal oleks punktis 2 mingi teine väärtus, siis tingimus $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ei kehtiks ja funktsioon oleks katkev punktis 2.

Teoreem 8.2

Olgu funktsioonid f ja g pidevad punktis $x = a$. Siis ka funktsioonid

$$f \pm g, \qquad fg, \qquad \frac{f}{g}\ (g(a) \neq 0)$$

on pidevad punktis $x = a$.

Definitsioon 8.6

Me ütleme, et funktsioon f on pidev hulgal X, kui f on pidev selle hulga igas punktis.

Kui on öeldud, et funktsioon on pidev ja pole mainitud millisel hulgal, siis on mõeldud, et funktsioon on pidev oma määramispiirkonnas.

Teoreem 8.3

Kõik elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Näide 8.7. Funktsioon $f(x) = \frac{1}{x}$ on pidev, sest see on põhielementaarfunktsioon. Samal ajal see funktsioon pole pidev hulgal $\mathbb{R}$.

Teoreem 8.4

Weierstrassi teoreem lõigus pideva funktsiooni tõkestatusest. Lõigus pidev funktsioon on selles lõigus tõkestatud

Vahemikus pidev funktsioon ei pea olema tõkestatud selles vahemikus.

Näide 8.8. Funktsioon $f(x) = \frac{1}{x}$ on pidev vahemikus $(0,1)$, kuid pole tõkestatud selles vahemikus, sest kui oletada, et ikka leidub selline arv $D > 0$, et

$$\frac{1}{x} < D \tag{8.1}$$

iga $x \in (0,1)$ korral, siis, võttes $x = \frac{1}{D+1} \in (0,1)$, saame, et võrratus (8.1) juba ei kehti.

8.4 Funktsiooni piirväärtuse omadused

Kõigepealt toome välja piirväärtuse omadused, mis on seotud aritmeetiliste tehetega.

Omadus 8.5

Kui leiduvad lõplikud piirväärtused $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ja $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, siis kehtivad järgmised tehetega seotud omadused:

1. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;
2. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cA, \quad c \in \mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$;
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, \quad B \neq 0.$

Omadused jäävad kehtima ka juhul kui piirprotsessiks on $x \to a-$, $x \to a+$, $x \to -\infty$ või $x \to \infty$.

Paneme tähele, et eeltoodud omaduse 8.5 eeldust lõplike piirväärtuste leidumise kohta, ei saa ära jätta.

Näide 8.9. Olgu vaja leida piirväärtus

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{|x|}{x} \cdot \frac{|x|}{x} \right).$$

Nagu oleme tõestanud näites 8.4, piirväärtust $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ ei leidu, seega piirväärtuse $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{|x|}{x} \cdot \dfrac{|x|}{x} \right)$ ei saa esitada piirväärtuste $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ korrutisena. Seejuures otsitav piirväärtus eksisteerib:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{|x|}{x} \cdot \frac{|x|}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Omadus 8.6

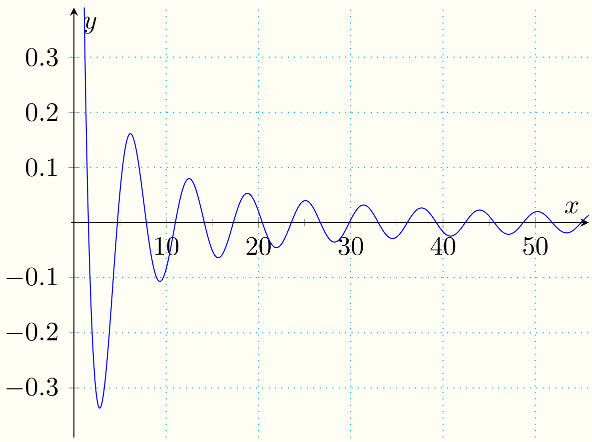
1. Kui $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ja $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, siis
$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \infty,\ \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \infty,\ \lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \infty.$$
2. Kui $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ ja $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, siis
$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \infty.$$
3. Kui $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ (seejuures $f(x) \neq 0$, kui $x \neq a$), siis
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = \infty.$$
4. Kui $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$, siis
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$
5. Kui funktsioon f on tõkestatud ja $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, siis
$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0.$$

Omadused jäävad kehtima ka juhul kui piirprotsessiks on $x \to a-$, $x \to a+$, $x \to -\infty$ või $x \to \infty$.

Näide 8.10.

Leiame piirväärtuse
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cos x.$$
Siin $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Samas piirväärtust $\lim_{x\to\infty} \cos x$ ei leidu. Kuna aga koosinus on tõkestatud funktsioon, siis omaduse 8.6.5 järgi
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cos x = 0.$$

Funktsiooni $f(x) = \dfrac{1}{x}\cos x$ graafik



8.5 Funktsiooni piirväärtuse leidmine

Kui punkt a kuulub elementaarfunktsiooni f määramispiirkonda, siis teoreemi 8.3 põhjal f on pidev punktis a ja piirvärtuse $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ leidmiseks piisab leida funktsiooni f väärtust kohal a.

Näide 8.11. Kuna elementaarfunktsioon $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$ on määratud punktis 4, siis

$$\lim_{x\to 4}\cos\frac{\pi}{x} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vaatleme nüüd protsessi $x \to \infty$. Seekord kasutame funktiooni $g(x) = \cos x$ pidevust:

$$\lim_{x\to\infty}\cos\frac{\pi}{x} = \cos\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{x} = \cos 0 = 1.$$

Kui punkt a ei kuulu funktsiooni f määramispiirkonda, siis kas rakendame omadusi 8.6 või, juhul kui tegemist on määramatusega, teisendame sobivalt funktsiooni, et määramatus kõrvaldada.

Piirväärtuse arvutamisel võivad tekkida määramatused tüüpi

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad 0^0,\quad 1^\infty,\quad \infty^0.$$

Näiteks, määramatuse tüüp $0\cdot\infty$ tähendab, et tegemist on piirväärtusega $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, kus $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ja $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$.

Määramatus $\dfrac{0}{0}$

Olgu vaja leida piirväärtus

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},$$

kus f ja g on sellised polünoomid, et $f(a) = 0$ ja $g(a) = 0$. Kuna a on polünoomide nullkoht, siis neid mõlemaid saab lahutada teguriteks nii, et esineks tegur $(x-a)$ ja taandada murd.

Polünoomide korral on kasulik meelde tuletada järgmised teisendused:

$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$ $\qquad$ $a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$

Näide 8.12. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x^2+3x+9) = 27.$$

Kui funktsioon sisaldab irratsionaalavaldisi (s.t juuri sisaldavaid avaldisi), siis vahepeal aitab sobiv muutujavahetus, Kuid enamikul juhtudel on otstarbekohane viia irratsionaalsus üle lugejast nimetajasse või vastupidi, nimetajast lugejasse. Näiteks, kui lugejas või nimetajas on ruutjuur, siis tüüpiline võte selleks on kasutada ära ruutude vahe valemit.

Näide 8.13.

- Leiame piirväärtuse
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}.$$
Siin on tegemist määramatusega tüüpi $\dfrac{0}{0}$. Teeme muutujavahetuse $t=\sqrt[6]{x+1}$. Kui x lähenb nullile, siis t läheneb ühele. Seega saame
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{1-\sqrt{x+1}} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 1}\frac{1-t^2}{1-t^3} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 1}\frac{(1-t)(1+t)}{(1-t)(1+t+t^2)} = \lim_{t\to 1}\frac{1+t}{1+t+t^2} = \frac{2}{3}.$$

- Leiame piirväärtuse
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-2} &\underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-2}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{(\sqrt{4+x})^2-2^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{4+x}+2)}{4+x-4} = \lim_{x\to 0}(\sqrt{4+x}+2) = 4.\end{aligned}$$

Määramatus $\frac{\infty}{\infty}$

Kui on vaja leida kahe polünoomide jagatise piirväärtust, kui $x\to\infty$ või $x\to-\infty$, siis tuleb lugejas ja nimetajas tuua sulgude ette x kõrgemas astmes koos tema kordajaga. Sama võtet kasutatakse ka irratsionaalavaldisi sisaldavate murdude korral.

Näide 8.14.

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+1}{1-2x^3} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^3}\right)}{-2x^3\left(-\frac{1}{2x^3}+1\right)} = \frac{4\cdot 1}{-2\cdot 1} = -2.$

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\cos x}{\sqrt{x^2+1}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{3x\left(1+\frac{\cos x}{3x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x\left(1+\frac{\cos x}{3x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot 1}{1} = 3.$

Määramatused $\infty-\infty$

Määramatust $\infty-\infty$ me püüame viia kas määramatuse tüübile $\dfrac{\infty}{\infty}$ või $\dfrac{0}{0}$.

Näide 8.15.

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x) \underset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

$$\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = -\frac{1}{2}.$$

.

Määramatused $0\cdot\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0

Ülejäänud määramatused me ka püüame viia kas määramatuse tüübile $\frac{\infty}{\infty}$ või $\frac{0}{0}$. Peale seda tavaliselt oleme sunnitud kasutama L'Hospitali reeglit, millest tuleb juttu järgmises peatükis.

Peatükk 9

Funktsiooni tuletis

9.1 Tuletise definitsioon

Funktsiooni tuletis näitab selle funktsiooni väärtuse muutumise kiirust funktsiooni argumendi muutumisel.

Olgu hulk X funktsiooni f määramispiirkond.
Anname **argumendile** x_0 **muudu** Δx (loetakse delta x), siis argumendi uueks väärtuseks on $x_0 + \Delta x$. Argumendi muuduks Δx valime sellist positiivset või negatiivset arvu, et lõik $[x_0, x_0 + \Delta x]$ (kui $\Delta x > 0$) või lõik $[x_0 + \Delta x, x_0]$ (kui $\Delta x_0 < 0$) sisalduks funktsiooni määramispiirkonnas. Vaastav **funktsiooni** $y = f(x)$ **muut** avaldub kujul

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

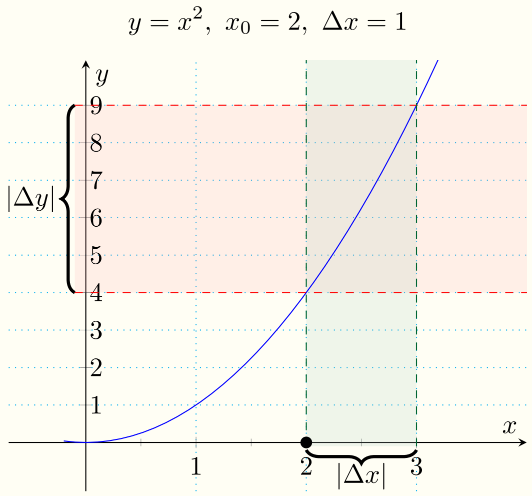
Funktsiooni muut Δy võib olla samuti positiivne ja negatiivne aga ka null.

Näide 9.1.

Vaatleme funktsiooni $y = x^2$ ja punkti $x_0 = 2$.

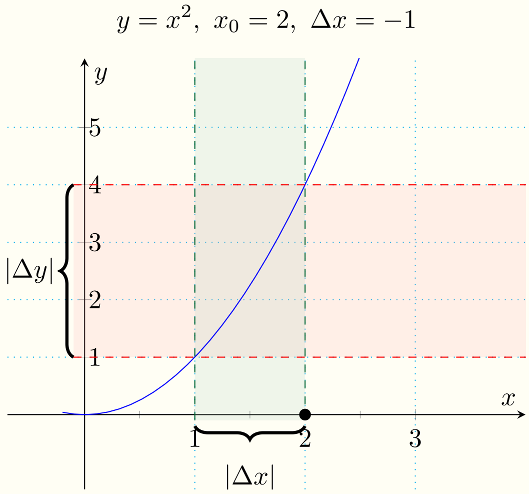
- Argumendi muudule $\Delta x = 1$ vastab funktsiooni muut

$$\Delta y = f(2 + 1) - f(2) = 3^2 - 2^2 = 5.$$



- Argumendi muudule $\Delta x = -1$ vastab funktsiooni muut

$$\Delta y = f(2-1) - f(2) = 1^2 - 2^2 = -3.$$



Funktsiooni tuletis on funktsiooni muudu ja argumendi muudu suhte piirväärtus argumendi muudu lähenemisel nullile.

Definitsioon 9.1

Funktsiooni f **tuletiseks** punktis x_0 nimetatakse piirväärtust

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{9.1}$$

Funktsiooni tuletise leidmist nimetatakse funktsiooni **diferentseerimiseks**.

Valemi (9.1) piirväärtused on samaväärsed (teine on saadud esimesest muutujavahetuse $x = x_0 + \Delta x$ teel). Sõltuvalt ülesandest, valime ise kumma piirväärtuse abil tuletise leiame.

Näide 9.2. Leiame funktsiooni

$$f(x) = x^2$$

tuletise kohal x_0.

- Leiame valemi (9.1) esimese piirväärtuse:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0.$$

  Paneme tähele, et argumendi ruudu kirjapanekul sulud saab ära jätta:

$$(\Delta x)^2 = \Delta x^2.$$

- Sama tulemuse saame valemi (9.1) teise piirväärtuse abil:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2x_0.$$

Näiteks, juhul $x_0 = 3$, saame

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Kuna funktsiooni tuletis on teatud piirväärtus, siis on võimalik olukord, et mingis punktis mõni funktsiooni tuletis ei eksisteeri või ei ole lõplik.

Näide 9.3. Leiame signum funktsiooni

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

tuletise kohal $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn} x}{x}.$$

Kuna ühepoolsed piirväärtused on võrdsed:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{\operatorname{sgn} x}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-1}{x} = \infty,$$

siis teoreemi 8.1 järgi $f'(0) = \infty$.

Definitsioon 9.2

Öeldakse, et funktsioon f on **diferentseeruv** punktis x_0, kui leidub lõplik tuletis $f'(x_0)$.

Teoreem 9.1

Iga punktis x_0 diferentseeruv funktsioon on pidev selles punktis.

Tõestus. Näitame, et funktsioon f on pidev punktis x_0 ehk $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Kui $x \neq x_0$, siis kehtib

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Seega

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \right) \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} (x - x_0) + \lim_{x\to x_0} f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

□

Nagu demonstreerib järgmine näide, pidev funktsioon ei pea olema diferentseeruv.

Näide 9.4.

Funktsioon $f(x) = |x|$ on pidev, aga pole diferentseeruv punktis 0. Siin vasakpoolne piirväärtus on

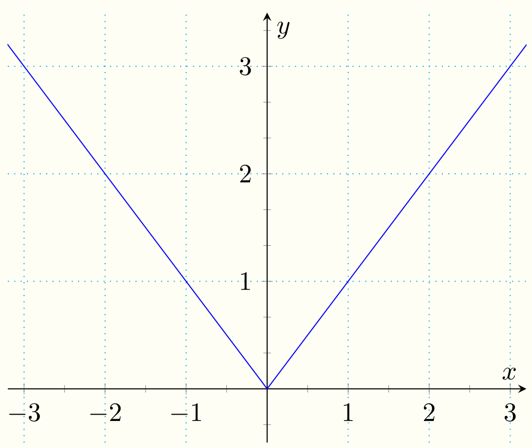
$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1,$$

aga parempoolne piirväärtus

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1.$$

Seega ei leidu piirväärtust $\lim_{x\to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}$ ja järelikult ka tuletist $f'(0)$.

$f(x) = |x|$



9.2 Kõrgemat järku tuletised

Kui funktsioon f on diferentseeruv oma määramispiirkonna alamhulgas hulgas X_1, siis võime rääkida funktsiooni f **tuletisfunktsioonist** f' määramispiirkonnaga X_1, kus

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Definitsioon 9.3

Funktsiooni f teist järku tuletiseks kohal x_0 nimetatakse tema tuletisfunktsiooni f' tuletist kohal x_0 ja tähistatakse $f''(x_0)$. Seega

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Niisiis, funktsiooni f teist järku tuletisfunktsioon on tuletisfunktsiooni f' tuletisfunktsioon:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Analoogiliselt jätkates saame kolmandat järku tuletise

$$f'''(x) = (f''(x))'.$$

Neljandat järku tuletisfunktsiooni tähistatakse kas f'''' või $f^{(4)}$:

$$f^{(4)}(x) = (f'''(x))'.$$

Kokkuvõttes n-järku tuletisfunktsioon

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Näide 9.5. Vaatleme jälle funktsiooni

$$f(x) = x^2.$$

Näites 9.2 me leidsime, et $f'(x_0) = 2x_0$, seega võime kirjutada, et

$$f'(x) = 2x.$$

Leiame $f''(x_0)$:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{2x - 2x_0}{x - x_0} = 2.$$

Seega

$$f''(x) = 2.$$

Leiame kolmandat järku tuletise:

$$f'''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{2 - 2}{x - x_0} = 0.$$

Niisiis,

$$f'''(x) = 0.$$

Pole raske aimata, et suvalise naturaalarvu $n > 2$ korral

$$f^{(n)}(x) = 0.$$

9.3 Funktsiooni tuletise leidmine

Tuletame meelde, et suvaline elementaarfunktsioon saadakse põhilistest elementaarfunktsioonidest aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel. Niisiis, et leida suvalise elementaarfunktsiooni tuletise on piisav teada põhiliste elementaarfunktsioonide tuletisi ning liitfunktsiooni ja aritmeetiliste tehetega seotud diferentseerimise regleid.

Omadus 9.2

Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

1. Konstantse funktsiooni tuletis on alati null:

$$(\mathrm{const})' = 0.$$

2. Astmefunktsiooni tuletis.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad \alpha \neq 0.$$

Toome eraldi välja juhtumid, kus $\alpha = 1$, $\alpha = -1$, $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$x' = 1, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. Eksponentfunktsioonid ja logaritmfunktsioonid.

$$(e^x)' = e^x, \qquad (a^x)' = a^x \ln a, \qquad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

4. Trigonomeetrilised funktsioonid.

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x, \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

5. Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid.

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}, & (\mathrm{arccot}\, x)' &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Teoreem 9.3

Kui funktsioonid f ja g on diferentseeruvad punktis x_0, siis ka funktsioonid $f+g$, $f-g$, cf (kus $c = \text{const}$), fg ja $\dfrac{f}{g}$ (kui $g(x_0) \neq 0$) on diferentseeruvad punktis x_0, kusjuures

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$,
2. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$,
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Tõestus. 1. Tõestame valemi funktsioonide vahe korral:

$$\begin{aligned}
(f-g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(f-g)(x) - (f-g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - g(x) - f(x_0) + g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0) - g'(x_0)
\end{aligned}$$

2. Tõestame skalaariga korrutatud funktsiooni tuletise valemi:

$$(cf)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(cf)(x) - (cf)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = cf'(x_0).$$

3. Kõigepealt paneme tähele, et funktsioon g on diferentseeruv kohal x_0, seega ka pidev, s.t $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. Tõestame korrutise tuletise valemi:

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))\, g(x) + f(x_0)\,(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{(f(x) - f(x_0))\, g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)\,(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} g(x) + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} f(x_0) \\
&\overset{g \text{ on pidev kohal } x_0}{=} f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).
\end{aligned}$$

4. Tõestame jagatise tuletise valemi:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0)-f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}\lim_{x\to x_0} g(x_0)-\lim_{x\to x_0}\frac{(g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0} f(x_0)\right)\\
&\overset{g \text{ on pidev kohal } x_0}{=} \frac{1}{g^2(x_0)}\left(f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)\right)\\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{aligned}
$$

□

Paremaks meelde jäämiseks kirjutatakse teoreemi 9.3 valemid tihti lühedalt järgmisel kujul:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(cu)' = cu'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Näide 9.6. Leiame funktsiooni $f(x) = x\ln x$ tuletise kasutades korrutise tuletise valemit:

$$(x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

9.4 Liitfunktsiooni tuletis

Teoreem 9.4

Kui funktsioon g on diferentseeruv punktis x_0 ja funktsioon f on diferentseeruv punktis $g(x_0)$, siis liitfunktsioon $f\circ g$ on diferentseeruv kohal x_0, kusjuures

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\,g'(x_0).$$

Näide 9.7.

- Leiame $f'(x)$, kui $f(x) = (2x+3)^2$. Võime võtta $f(u) = u^2$, kus $u(x) = 2x + 3$. Seega

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = 2u \cdot 2 = 4(2x+3).$$

- Leiame funktsiooni $f(x) = x^x$ tuletise. Kuna kui astme alus kui ka astendaja sisaldavad muutujat x, siis astme- ega eksponentfunktsiooni tuletise valemit kasutada ei saa. Seepärast kõigepealt kirjutame meie funktsiooni ümber, kasutades logaritm- ja eksponentfunktsiooni omadusi:

$$f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}.$$

  Nüüd funktsiooni f saab esitada kujul $f(u) = e^u$, kus $u = x \ln x$. Seega

$$(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = (e^u)' \, u' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Peatükk 10

Tuletise rakendused

10.1 L'Hospitali reegel piirväärtuse arvutamiseks

L'Hospitali reegel võimaldab tihti leida piirväärtust

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

juhtudel, kus tekib määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$ või $\frac{\infty}{\infty}$.

Teoreem 10.1

L'Hospitali reegel. Kui mingis protsessis

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \quad \text{või} \quad \lim |f(x)| = \lim |g(x)| = \infty$$

ja eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

siis selles protsessis kehtib võrdus

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Näide 10.1.

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

L'Hospitali reeglist on kasu ka määramatuste $0\cdot\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 juhul, aga eelnevalt on vaja sobivalt teisendada funktsiooni, et tekkiks määramatus tüüpi $\frac{0}{0}$ või $\frac{\infty}{\infty}$.

Näide 10.2.

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x \underset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0.$$

Määramatuste 0^0, 1^∞ ja ∞^0 puhul kõigepealt kasutame eksponent- ja logaritmfunktsioonide omadusi:

$$\lim_{x\to a}(g(x))^{f(x)} = \lim_{x\to a} e^{\ln(g(x))^{f(x)}} = \lim_{x\to a} e^{f(x)\ln(g(x))} = \lim_{x\to a} e^{f(x)\ln(g(x))}.$$

Nüüd piisab leida astendaja piirväärtus.

Näide 10.3. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 0+} x^x.$$

Kuna

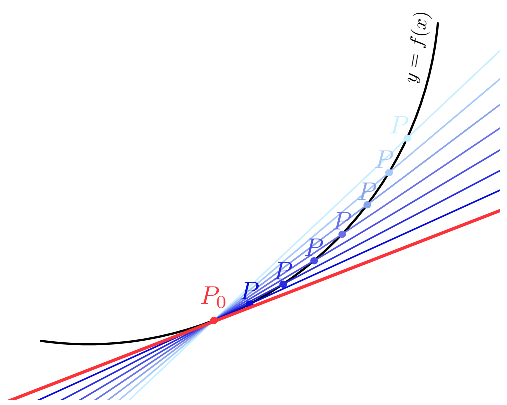
$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x},$$

siis saame

$$\lim_{x\to 0+} x^x \underset{0^0}{=} \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} \underset{\text{vt näide 10.2}}{=} e^0 = 1.$$

10.2 Funktsiooni graafiku puutuja

Toome välja diferentseeruvuse mõiste geomeetrilist sisu. Näitame, et kui funktsioon on diferentseeruv punktis x_0, siis funktsiooni tuletis kohal x_0 võrdub tema graafiku puutuja tõusunurga tangensiga (ehk **tõusuga**).



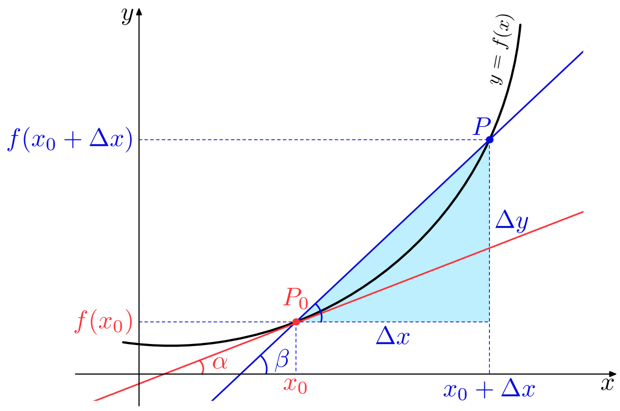
Joonis 10.1. Funktsiooni f graafiku puutuja punktis P_0

Definitsioon 10.1

Olgu P_0 ja P funktsiooni f graafiku punktid. Joone **puutujaks** punktis P_0 nimetatakse sirget, mis on lõikaja P_0P piirseisuks, kui punkt P läheneb punktile P_0 mööda joont $y = f(x)$.

Olgu $P_0(x_0, f(x_0))$ ja $P(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ funktsiooni f graafiku punktid. Lõikaja P_0P tõus avaldub täisnurkse kolmnurga seostest valemiga $\tan\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Kui funktsioon f on diferentseeruv punktis x_0, siis see on ka pidev selles punktis, seega protsessis $\Delta x \to 0$ graafiku punkt P läheneb punktile P_0 ning lõikaja tõus $\tan\alpha$ läheneb puutuja tõusule:

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$



Joonis 10.2. Funktsiooni f graafiku puutuja punktis P_0

Graafiku puutuja võrrandit on lihtne tuletada lõikaja P_0P võrrandist. Lõikaja sihivektoriks on vektor $\overrightarrow{P_0P} = (\Delta x, \Delta y)$ ja lõikaja võrrandiks on

$$\frac{y - f(x_0)}{\Delta y} = \frac{x - x_0}{\Delta x}.$$

Avaldades y-t, saame

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0).$$

Protsessis $\Delta x \to 0$ saamegi puutuja võrrandi.

Olgu funktsioon f diferentseeruv punktis x_0. Funktsiooni f graafiku puutuja võrrand punktis $P_0 = (x_0, f(x_0))$ avaldub järgmiselt:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Näide 10.4. Leiame parabooli $y = x^2$ puutuja võrrandi punktis x_0:

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0\, x - x_0^2.$$

10.3 Funktsiooni diferentsiaal

Definitsioon 10.2

Sõltumatu **argumendi** x **diferentsiaaliks** dx nimetatakse argumendi muutu:

$$dx = \Delta x.$$

Definitsioon 10.3

Olgu funktsioon $y = f(x)$ diferentseeruv punktis x. Anname argumendile x muudu Δx. Korrutist

$$f'(x)\Delta x \tag{10.1}$$

nimetatakse **funktsiooni** f **diferentsiaaliks** punktis x. Funktsiooni diferentsiaali tähistame kas dy või $df(x)$, seega

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)\,dx. \tag{10.2}$$

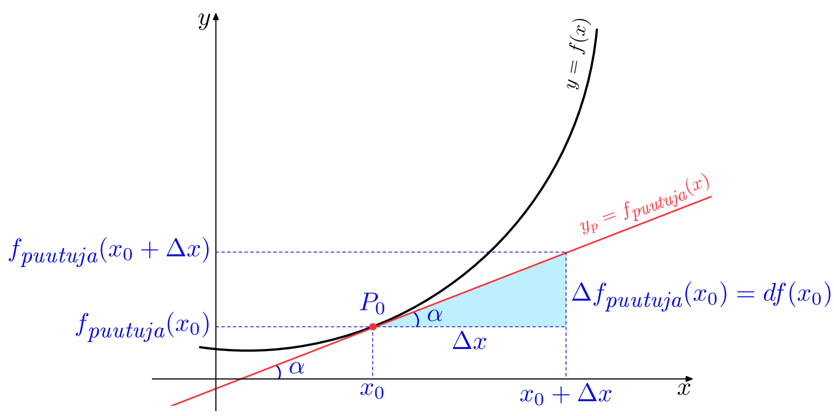
Näide 10.5. Leiame funktsiooni $f(x) = 3\,x^2 + 4\,x$ diferentsiaali:

$$df(x) = f'(x) \cdot dx = (6\,x + 4)dx.$$

Leiame funktsiooni f diferentsiaali väärtuse punktis $x = 2$ argumendi muudu $\Delta x = 0{,}1$ korral:

$$df(2) = (12 + 4) \cdot 0{,}1 = 1{,}6.$$

Vaatleme diferentsiaali geomeetrilist tähendust. Olgu funktsioon f diferentseeruv punktis x_0. Tõmbame punktist $P_0 = (x_0, f(x_0))$ funktsiooni f graafikule puutuja $f_{\text{puutuja}}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.



Joonis 10.3. Diferentsiaali geomeetriline tähendus

Funktsiooni f_{puutuja} muut punktis x_0 avaldub täisnurkse kolmnurga seosest valemiga

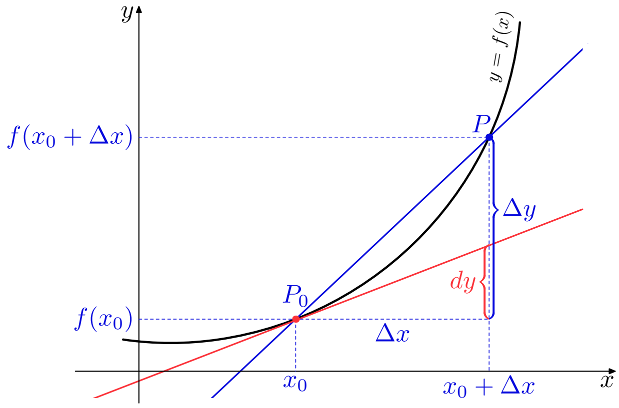
$$\Delta f_{\text{puutuja}}(x_0) = \tan\alpha \cdot \Delta x = f'(x_0)\Delta x,$$

kus $\tan\alpha$ on puutuja tõus. Seega funktsiooni f diferentsiaal punktis x_0 võrdub puutuja ordinaadi muuduga

$$df(x_0) = \Delta f_{\text{puutuja}}(x_0).$$

10.4 Ligikaudne arvutamine

Jooniselt võib tähele panna, et mida väiksem on argumendi muut Δx, seda lähedasemad on funktsiooni muudu Δy ja diferentsiaali dy väärtused.



Joonis 10.4. Kui argumendi muut Δx on piisavalt väike, siis $\Delta y \approx dy$

Omadus 10.2

Kui Δx on küllalt väike, võime funktsiooni $y = f(x)$ muudu Δy asemel leida funktsiooni f diferentsiaali dy,

$$\Delta y \approx dy. \tag{10.3}$$

Näide 10.6. Ringi raadiust r suurendatakse 10 ühikult 10,15 ühikule. Umbes kui palju suureneb ringi pindala $S = S(r)$? Loomulikult saab siin arvutada täpselt:

$$\Delta S(10) = \pi \cdot 10{,}15^2 - \pi \cdot 10^2 = 103{,}023\pi - 100\pi = 3{,}023\pi \approx 9{,}497.$$

Teisalt, kasutades diferentsiaali

$$dS(r) = (\pi \cdot r^2)' dr = 2\pi r \Delta r,$$

saame

$$\Delta S(10) \approx dS(10) = 2\pi \cdot 10 \cdot 0{,}15 = 3\pi \approx 9{,}425.$$

Viga on ainult 0,072 ruutühikut, kusjuures diferentsiaali leidmine oli oluliselt lihtsam.

Omadus 10.3

Olgu f punktis x_0 diferentseeruv funktsioon. Valemit (10.3) võime kirjutada kujul

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

ehk

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{10.4}$$

Paneme tähele, et võrduse (10.4) paremal pool asub tegelikult funktsiooni f puutuja võrrand punktis $x = x_0$.

Valem (10.4) võimaldab ligikaudu arvutada $f(x_0 + \Delta x)$ väärtuse, kui x_0 on selline, et väärtused $f(x_0)$ ja $f'(x_0)$ on teada ja Δx on küllalt väike.

Näide 10.7. Arvutame ligikaudu $\sqrt[3]{8{,}5}$. Antud juhul võime võtta

$$f(x) = x^{1/3}, \quad x_0 = 8, \quad \Delta x = 0{,}5.$$

Siis $f(x_0) = 2$ ja

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} x_0^{-2/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

ja valemi (10.4) põhjal

$$\sqrt[3]{8{,}5} \approx f(8) + f'(8) \cdot 0{,}5 = 2 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{24} \approx 2{,}04166\ldots.$$

Arvutiga leitud väärtus on $\sqrt[3]{8{,}5} \approx 2{,}04082755$.

10.5 Funktsiooni kasvamine ja kahanemine

Definitsioon 10.4

Funktsiooni f nimetatakse hulgas X

1. **kasvavaks**, kui võrratusest $x_1 < x_2$ hulgas X järeldub võrratus $f(x_1) \le f(x_2)$,
2. **kahanevaks**, kui võrratusest $x_1 < x_2$ hulgas X järeldub võrratus $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Näide 10.8.

- Funktsioon $f(x) = x^2$ kahaneb hulgas $(-\infty, 0]$ ja kasvab hulgas $[0, \infty)$.
- Konstante funktsioon $f(x) = 1$ samal ajal kahaneb ja kasvab kogu reaalteljel.

Teoreem 10.4

Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikus (a, b).

1. Funktsioon f kasvab vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $f'(x) \ge 0$ iga $x \in (a, b)$ korral.
2. Funktsioon f kahaneb vahemikus (a, b) parajasti siis, kui $f'(x) \le 0$ iga $x \in (a, b)$ korral.

Geomeetriliselt tähendab tingimus $f'(x) > 0$ (funktsioon kasvab) seda, et joone $y = f(x)$ puutuja moodustab x-telje positiivse suunaga teravnurga ja tingimus $f'(x) < 0$ (funktsioon kahaneb) seda, et joone $y = f(x)$ puutuja moodustab x-telje positiivse suunaga nürinurga.

10.6 Funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

Definitsioon 10.5

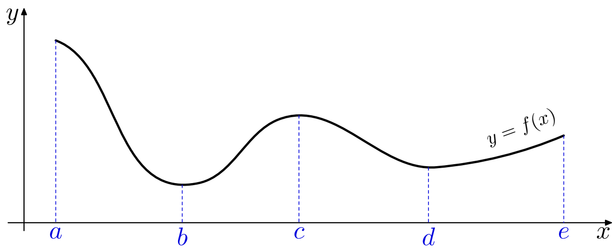
Ütleme, et funktsioonil f on punktis c **lokaalne maksimum**, kui leidub selline arv $\delta > 0$, et

$$f(x) \leq f(c), \qquad \text{iga } x \in (c-\delta, c+\delta) \text{ korral.}$$

Ütleme, et funktsioonil f on punktis c **lokaalne miinimum**, kui leidub selline arv $\delta > 0$ ümbrus, et

$$f(x) \geq f(c), \qquad \text{iga } x \in (c-\delta, c+\delta) \text{ korral.}$$

Lokaalse maksimumi ja lokaalse miinimumi ühine nimetus on **lokaalne ekstreemum**.



Joonis 10.5. Funktsiooni f lokaalsed miinimumid on $f(b)$ ja $f(d)$, lokaalne maksimum on $f(c)$.

Teoreem 10.5

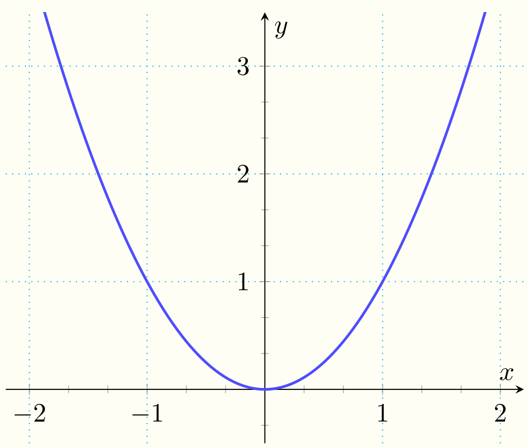
Fermat' teoreem. Olgu funktsioon f diferentseeruv punktis c ning olgu tal selles punktis lokaalne ekstreemum, siis

$$f'(c) = 0.$$

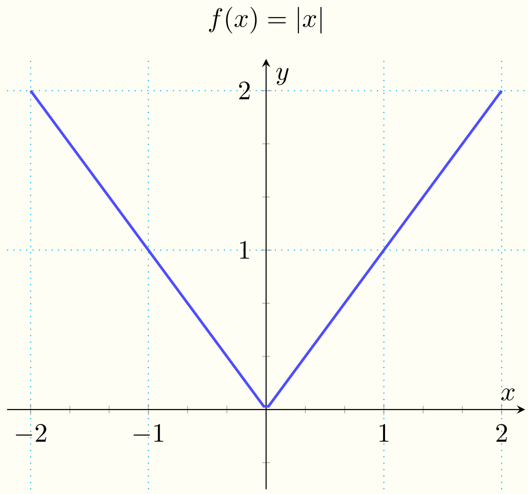
Näide 10.9.

$f(x) = x^2$

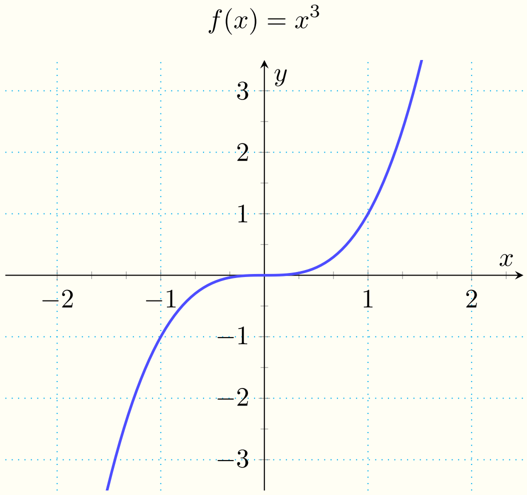
- Funktsioonil $f(x) = x^2$ lokaalne miinimum punktis $x = 0$. Tuletis kohal $x = 0$ võrdub nulliga: $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$, mis on kooskõlas Fermat' teoreemiga.



- Kui funktsioon ei ole diferentseeruv mingis punktis, siis selles punktis ikka võib lokaalne ekstreemum leiduda. Näiteks, funktsioonil $f(x) = |x|$ on lokaalne miinimum kohal $x = 0$, kuid funktsioon pole diferentseeruv punktis $x = 0$. Funktsioonil $f(x) = x^2$ lokaalne ekstreemum on punktis $x = 0$.



- Teiselt poolt sellest, et funktsioonil mingis punktis tuletis võrdub nulliga, veel ei tähenda, et selles punktis funktsioonil on lokaalne ekstreemum. Näiteks, funktsiooni $f(x) = x^3$ lokaalseid ekstreemumeid ei ole, kuid kohal $x = 0$, sest $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.



Definitsioon 10.6

Määramispiirkonna punkte, kus $f'(x) = 0$ ja punkte, kus funktsioon f ei ole diferentseeruv, nimetatakse funktsiooni f **kriitilisteks punktideks**.

Järeldus 10.6

Lokaalne ekstreemum võib funktsioonil olla vaid tema kriitilises punktis

Fermat' teoreemi järelduse 10.6 põhjal tuleb funktsiooni lokaalsete ekstreemumite leidmiseks kõigepealt leida funktsiooni kriitilised punktid. Selleks, et selgitada, millistes kriitilistes punktides on ja millistes ei ole lokaalset ekstreemumit, kasutatakse järgmiseid tunnuseid.

Olgu funktsioon f pidev kriitilises punktis c. Siis kehtivad väited:

1. Kui punkti c läbimisel (positiivses suunas) funktsiooni f märk muutub positiivselt negatiivseks, siis on funktsioonil f punktis c lokaalne maksimum (funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemiseks);

2. Kui punkti c läbimisel funktsiooni f märk muutub negatiivselt positiivseks, siis on funktsioonil f punktis a lokaalne miinimum (funktsiooni kahanemine läheb üle kasvamiseks);

3. Kui punkti a läbimisel $f'(x)$ märk ei muutu, siis punktis a ekstreemumit ei ole.

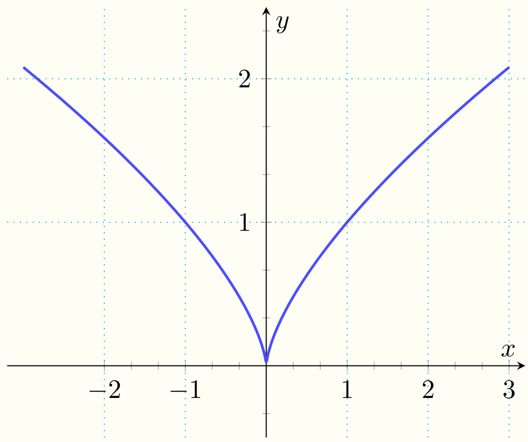
Näide 10.10.

Leiame pideva funktsiooni $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ tuletise:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Funktsioon ei ole diferentseeruv punktis $x = 0$, s.t 0 on funktsiooni kriitiline punkt. Samas, $f'(x) < 0$, kui $x < 0$ ja $f'(x) > 0$, kui $x > 0$. Funktsioon kahaneb ja kasvab, seega punktis $x = 0$ on funktsiooni f lokaalne miinimum.

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$



Järgmine lause näitab veel ühte võtet, mille abil saab leida punktid, kus funktsioon saavutab lokaalset ekstreemumit.

Lause 10.1

Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv kriitilises punktis c. Kui $f''(c) < 0$, siis punktis c on lokaalne maksimum. Kui $f''(c) > 0$, siis punktis c on lokaalne miinimum.

Kui funktsiooni f kriitilises punktis c funktsiooni teine tuletis võrdub nulliga, siis teise tuletise abil ei saa otsustada, kas punktis c on lokaalne ekstreemum või ei ole.

Näide 10.11. Vaatleme funktsioone $f(x) = x^2$ ja $g(x) = x^3$ ja $h(x) = x^4$. Punkt $x = 0$ on funktsioonide f, g ja h kriitiline punkt.

Kuna $f''(0) = 2 > 0$, siis lause 10.1 $f(0) = 0$ on funktsiooni f lokaalne miinimum.

Funktsioonide g ja h teine tuletis kohal $x = 0$ võrdub nulliga

$$g''(0) = 6 \cdot 0 = 0, \qquad h''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0,$$

seega lauset 10.1 ei saa rakendada.

Kuna funktsioon $g'(x) = 3x^2$ on alati mittenegatiivne, siis funktsioonil g lokaalseid ekstreemumeid ei ole.

Kuna funktsioon $h'(x) = 4x^3$ on negatiivne, kui $x < 0$ ja positiivne, kui $x > 0$, siis funktsioonil h on punktis $x = 0$ lokaalne miinimum.

10.7 Funktsiooni globaalsed ekstreemumid

Definitsioon 10.7

Olgu funktsioon f määratud hulgal D.

Ütleme, et funktsioonil f on punktis $c \in D$ **suurim väärtus** ehk **globaalne maksimum**, kui iga $x \in D$ korral kehtib võrratus

$$f(x) \leq f(c).$$

Analoogiliselt ütleme, et funktsioonil f on punktis c **vähim väärtus** ehk **globaalne miinimum** hulgal D, kui iga $x \in D$ korral

$$f(x) \geq f(c).$$

Globaalse maksimumi ja globaalse miinimumi ühine nimetus on **globaalne ekstreemum**.

Näide 10.12. Olgu vaja leida parabooli $y = x^2$ ja sirge $s: \ y = 1 - x$ vähim kaugus, s.t vähim kaugus suvaliste parabooli ja sirge punktide vahel.

Olgu $P(x, x^2, 0)$ punkt paraboolil. Kuna punktid $A(1, 0, 0)$ ja $A'(0, -1, 0)$ asuvad sirgel s, siis sirge sihivektoriks sobib $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{A'A} = (1, 1, 0)$. Omaduse 6.2 järgi punkti P kaugus sirgest s arvutatakse valemiga

$$d(x) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{s}|}{|\overrightarrow{s}|} = \frac{|(x-1, x^2-0, 0-0) \times (1,1,0)|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|(0, 0, x-1-x^2)|}{\sqrt{2}}.$$

Paneme tähele, et iga x-i korral $x - 1 - x^2 < 0$, seega $|x - 1 - x^2| = x^2 - x + 1$ ning

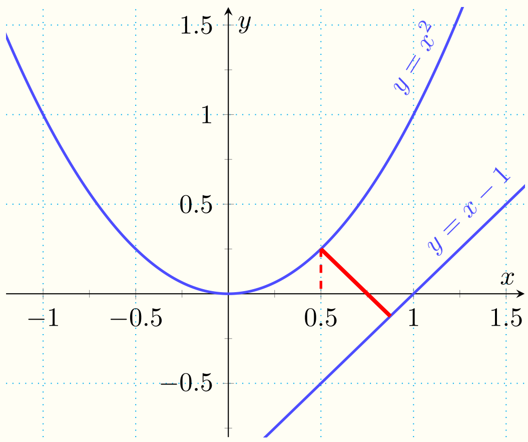
$$d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - x + 1).$$

Kuna funktsiooni d tuletisfunktsioon

$$d'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x - 1),$$

on negatiivne iga $x < \frac{1}{2}$ korral ja positiivne iga $x > \frac{1}{2}$ korral, siis funktsioon d kahaneb hulgas $(-\infty, 1/2]$ ja kasvab hulgas $[1/2, \infty)$. See tähendab, et kriitilises punktis $x = \frac{1}{2}$ funktsioon d saavutab oma vähima väärtuse. Niisiis, parabooli ja sirge vähim kaugus on

$$d\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$



Vaatleme funktsioone, mille määramispiirkonnaks on lõik.

Teoreem 10.7

Weierstrassi teoreem. Lõigus pidev funktsioon saavutab oma maksimaalse ja minimaalse väärtuse.

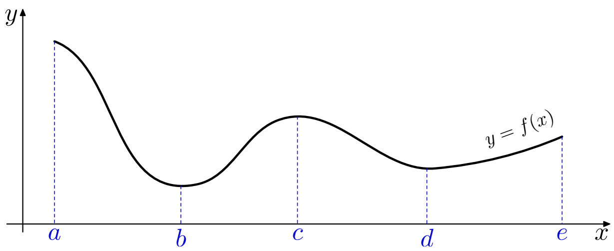
Paneme tähele, et vahemikus pidev funktsioon ei pruugi saavutada maksimaalset ja minimaalset väärtust.

Näide 10.13. Funktsioon $f(x) = x$ ei saavuta maksimaalset väärtust vahemikus $(0,1)$. Kui oletada, et $c = f(c)$ on funktsiooni f maksimum, siis punktis $d = \dfrac{c+1}{2} \in (0,1)$ funktsiooni väärtus oleks suurem kui punktis c:

$$f(d) = d = \frac{c+1}{2} > c = f(c),$$

mis on vastuolus sellega, et $f(c)$ on funktsiooni f suurim väärtus.

Paneme tähele, et lõigus defineeritud pidev funktsioon saavutab oma maksimaalse ja minimaalse väärtuse kas lõigu otspunktides või oma kriitilistes punktides.



Joonis 10.6. Funktsiooni f globaalne miinimum on $f(b)$ ja globaalne maksimum on $f(a)$.

Lõigus $[a, b]$ pideva funktsiooni f globaalsete ekstreemumite leidmiseks tuleb

1. leida funktsiooni f kriitilised punktid,
2. arvutada funktsiooni f väärtused kriitilistes punktides ja lõigu otspunktides a ja b,
3. saadud väärtustest valida välja suurim ja vähim, mis ongi vastavalt funktsiooni f suurim ja vähim väärtus lõigus $[a, b]$.

Peatükk 11

Määramata integraal

11.1 Algfunktsioon ja määramata integraal

Definitsioon 11.1

Olgu funktsioon f defineeritud hulgas X.

Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f **algfunktsiooniks** hulgas X, kui iga $x \in X$ korral kehtib võrdus

$$F'(x) = f(x).$$

Näide 11.1. Funktsiooni

$$f(x) = x^2$$

algfunktsioonideks on näiteks

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \qquad G(x) = \frac{x^3+6}{3}, \qquad H(x) = \frac{x^3-1}{3}.$$

Teoreem 11.1

Teoreem algfunktsiooni üldkujust. Olgu funktsioon F funktsiooni f algfunktsioon.

1. Suvalise konstandi $C \in \mathbb{R}$ korral funktsioon $G(x) = F(x) + C$ on funktsiooni f algfunktsioon.
2. Kui funktsioon H on funktsiooni f algfunktsioon, siis leidub selline konstant $C_0 \in \mathbb{R}$ nii, et $H(x) = F(x) + C_0$.

Tõestus. 1. Tõepoolest, kui F on mõne funktsiooni f algfunktsioon, siis seda ka $G(x) = F(x) + C$ iga konstandi C jaoks:

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

2. Olgu nüüd funktsioon H suvaline funktsiooni f algfunktsioon. Vaatleme funktsiooni $E(x) = H(x) - F(x)$. Kuna

$$E'(x) = (H(x) - F(x))' = H'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

siis funktsioon E on konstantne: $E(x) = C_0$. Seega

$$H(x) = F(x) + E(x) = F(x) + C_0.$$

□

Teoreemist 11.1 järeldub, et avaldis $F(x) + C$ on funktsiooni f algfunktsiooni üldkuju.

Näide 11.2. Näites 11.1 vaadeldud funktsiooni $f(x) = x^2$ algfunktsiooni üldkuju on $\frac{x^3}{3} + C$, seejuures

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 0, \qquad G(x) = \frac{x^3}{3} + 2, \qquad H(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}.$$

Definitsioon 11.2

Olgu F funktsiooni f mingi algfunktsioon ja $C \in \mathbb{R}$ on suvaline konstant.

Funktsiooni f kõikide algfunktsioonide üldavaldist $F(x)+C$ nimetatakse funktsiooni f **määramata integraaliks**. Tähistatakse

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Funktsiooni määramata integraali leidmist nimetatakse selle funktsiooni **integreerimiseks**.

Näide 11.3. Nagu oli näidatud näites 11.2,

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Teoreem 11.2

Igal vahemikus (a, b) pideval funktsioonil on olemas määramata integraal selles vahemikus.

11.2 Määramata integraali leidmine

Kasutades põhiliste elementaarfunktsioonide tuletiste tabelit, liitfunktsiooni ja aritmeetiliste tehetega seotud diferentseerimisi regleid, me saime leida suvalise elementaarfunktsiooni tuletise. Selles mõttes integreerimisega olukord on keerulisem. Kõikidel elementaarfunktsioonidel ei pruugi leiduda algfunktsiooni elemetaarfunktsioonide kujul (selliste algfunktsioonide väärtusi saab arvutada ainult ligikaudsete meetoditega). Näiteks järgmisi integraale ei saa esitada elementaarfunktsioonide abil:

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \cos x^2\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Omadus 11.3

Integraalid põhilistest elementaarfunktsioonidest

1. **Nullfunktsioon**
$$\int 0 dx = C.$$
2. **Astmefunktsioonid**
$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \ \alpha \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C.$$
Erijuhtuna saame
$$\int dx = \int x^0 dx = x + C.$$
3. **Eksponentfunktsioonid**
$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$
Juhul $a = e$ saame
$$\int e^x \, dx = e^x + C.$$
4. **Trigonomeetrilised funktsioonid**
$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C,$$
$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C.$$
5. **Arkusfunktsioonid**
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C, \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\arccos x + C, \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = -\operatorname{arccot} x + C.$$

Teoreem 11.4

Tehetega seotud integreerimisreeglid.

1. Kui on olemas integraal $\int f(x) \, dx$, siis suvalise reaalarvu $\alpha \neq 0$ korral on olemas integraal $\int \alpha f(x) \, dx$, kusjuures
$$\int \alpha f(x) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx.$$
2. Kui on olemas integraalid $\int f(x) \, dx$ ja $\int g(x) \, dx$, siis on olemas integraal $\int (f(x) \pm g(x)) \, dx$, kusjuures
$$\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx.$$

Tõestus. 1. Olgu
$$\int f(x) \, dx = F(x) + C_1.$$

Siis

$$\alpha \int f(x)\,dx = \alpha F(x) + \alpha C_1 = \alpha F(x) + C,$$

kus $C = \alpha C_1$ on suuvaline konstant. Teoreemi esimese väide tõestamiseks on piisav näidata, et funktsioon αF on funktsiooni αf algfunktsioon. Selleks leiame tuletise

$$(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$$

Viimane ütlebki, et αF on funktsiooni αf algfunktsiooniks.

2. Tõestame väidet ainult liitmise kohta. Lahutamise korral tõestus on analoogiline. Olgu

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C1 \qquad \text{ja} \qquad \int g(x)\,dx = G(x) + C2.$$

Siis

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + C1 + G(x) + C2 = F(x) + G(x) + C,$$

kus $C = C_1 + C_2$ on suvaline konstant. Kuna

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x),$$

siis funktsioon $F + G$ on funktsiooni $f + g$ algfunktsiooniks ja seega

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = F(x) + G(x) + C = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

□

Näide 11.4. Leiame määramata integraali

$$\begin{aligned}\int \left(x^5 + 10\sin x - \frac{2}{x}\right) dx &= \int x^5\,dx + 10\int \sin x\,dx - 2\int \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^6}{6} - 10\cos x - 2\ln|x| + C.\end{aligned}$$

11.3 Muutujavahetus

Tuletise leidmisel kasutasime korrutamise ja jagamise reegleid, liitfunktsiooni leidmise reeglit jne. Integraali leidmisel selliseid universaalseid reegleid eriti palju ei ole. Seoses sellega on integreerimise jaoks välja töötatud palju erivõtteid (mõnikord ainult kindlat tüüpi funktsioonide jaoks), millest tutvustame siinkohal ainult kahte kõige olulisemat: muutujavahetus ja ositi integreerimine.

Olgu vaja leida integraal $\int f(x)\,dx$. Teeme muutujavahetuse $x = u(x)$ (või $t = u^{-1}(x)$). Kuna

$$dx = u'(t)dt,$$

siis

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt.$$

Teoreem 11.5

Olgu funktsioon f pidev hulgas X. Olgu u diferentseeruv üksühene funktsioon muutumispiirkonnaga X ja tema tuletisfunktsioon u' pidev. Kehtib muutujavahetuse valem

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt. \tag{11.1}$$

Näide 11.5. Leiame integraali

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Teeme muutuujavahetuse

$$t = \ln x \qquad \text{ehk} \qquad x = e^t.$$

Siis

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{t}{e^t}\,(e^t)'\,dt = \int t\,dt = t^2 + C = \ln^2 x + C.$$

Tihiti valemit (11.1) on mugav kasutada mitte vasakult paremale vaid paremalt vasakule, esitades integraali aluse valemi sobival kujul. Sel juhul räägitakse **diferentsiaali märgi alla viimise võtest**.

Näide 11.6. Leiame integraali

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

diferentsiaali märgi alla viimise teel:

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int \ln x \cdot (\ln x)'dx = \int \ln x\,d\ln x.$$

Tähistades $t = \ln x$, saame

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int t\,dt = t^2 + C = \ln^2 x + C.$$

Kasutades seost

$$f'(x)\,dx = df(x),$$

pole raske tuletada järgmised valemid, millised on mugav kasutada diferentsiaali märgi alla viimise võttes.

Omadus 11.6

Olgu $a, b, n \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \neq -1$.

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b) \qquad\qquad x^n\,dx = \frac{1}{n+1}dx^{n+1}.$$

Näide 11.7.

$$\int \cos(3x-4)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x-4)\,d(3x-4) = \frac{1}{3}\sin(3x-4) + C.$$

11.4 Ositi integreerimine

Teoreem 11.7

Ositi integreerimise valem. Olgu u ja v mingis intervallis X diferentseeruvad funktsioonid ja samas intervallis eksisteerigu integraal

$$\int v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Siis intervallis X eksisteerib integraal

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx$$

ja kehtib seos

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Tõestus. Olgu intevallis X eksisteerib integraal $\int v(x)u'(x)\,dx$, siis leidub selline funktsioon G, et iga arvu $x \in X$ korral

$$G'(x) = v(x)u'(x).$$

Vaatleme funktsiooni

$$F(x) = u(x)v(x) - G(x).$$

Iga arvu $x \in X$ korral

$$F'(x) = (u(x)v(x) - G(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - v(x)u'(x) = u(x)v'(x).$$

Seega intervallis X funktsioon F on funktiooni uv' algfunktsioon ning

$$\int u(x)v'(x)\,dx = F(x) + C = u(x)v(x) - (G(x) - C) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Väide on tõestatud. □

Kuna $u'(x)\,dx = du$ ja $v'(x)\,dx = dv$, siis esitatakse seos sageli kujul

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

ja nimetatakse seda **ositi integreerimise valemiks**.

Näide 11.8. Leiame integraali

$$\int \underbrace{x}_{\mathbf{u}} \underbrace{e^x\,dx}_{\mathbf{dv}} = \underbrace{x}_{\mathbf{u}} \underbrace{e^x}_{\mathbf{v}} - \int \underbrace{e^x}_{\mathbf{v}} \underbrace{1\,dx}_{\mathbf{du}} = x\,e^x - e^x + C.$$

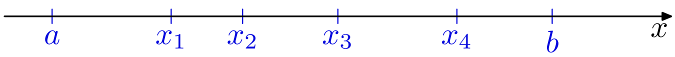
Peatükk 12

Määratud integraal

12.1 Määratud (Riemanni) integraali mõiste

Olgu lõigus $[a, b]$ antud funktsioon f. Jagame lõigu $[a, b]$ suvalisel viisil n osaks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$



Joonis 12.1. Lõigu $[a, b]$ alajaotus

Niisugust jaotust nimetame edaspidi lõigu $[a, b]$ alajaotuseks ja tähistame $T[x_0, \ldots, x_n]$ või lühidalt T. Ta jaotab lõigu $[a, b]$ osalõikudeks

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

Tähistame iga osalõigu pikkuse

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Rõhutame, et jaotus ei pea olema ühtlane, s.t osalõikude pikkused võivad üksteisest erineda.

Definitsioon 12.1

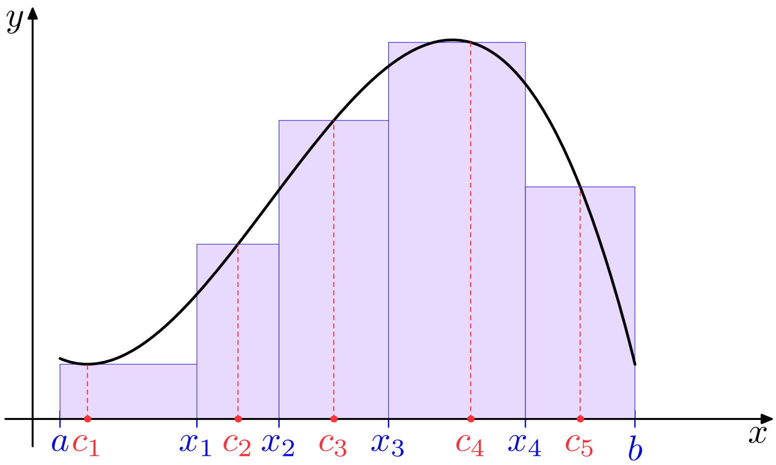
Alajaotuse $T[x_0, \ldots, x_n]$ **diameetriks** $d(T)$ nimetatakse suurimat osalõigu pikkust Δx_i:

$$d(T) = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i.$$

Järgnevalt valime igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ suvaliselt ühe punkti

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Punktide c_i järjendist tähistame $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Nüüd saame igas osalõigus moodustada ristküliku, mille aluseks on osalõik $[x_{i-1}, x_i]$ ja kõrguseks on $f(c_i)$.



Joonis 12.2. Funktsiooni f Riemanni summa lõigus $[a, b]$

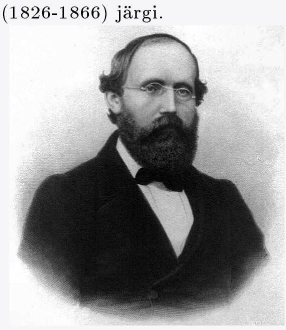
Definitsioon 12.2

Olgu funktsioon f määratud lõigus $[a, b]$. Olgu $T[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ lõigu $[a, b]$ mingi alajaotus ja $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ punktide $c_i \in [x_i - 1, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ järjend. Summat

$$\sigma(f, T, c) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$$

nimetatakse funktsiooni f **Riemanni summaks** lõigus $[a, b]$.

Riemann'i integraali nimi tuleb saksa matemaatiku Georg Friedrich Bernhard Riemann'i (1826-1866) järgi.



Allikas: Wikipedia

Juhul $f(c_i) \geq 0$, kujutub korrutis $f(c_i)\Delta x_i$ endast ristküliku pindala. Kui $f(c_i) < 0$, siis korrutis $f(c_i)\Delta x_i$ võrdub ristküliku pindalaga, võetud miinus märgiga. Liites kõikide ristkülikute pindalad, saame tulemuseks funktsiooni f graafiku ja x-telje vahele jääva kujundi pindala ligikaudse väärtuse.

Meid huvitab Riemanni summade piirväärtus, kui alajaotuse diameeter läheneb nullile:

$$I = \lim_{d(T) \to 0} \sigma(f, T, c). \tag{12.1}$$

Tegemist ei ole eelnevates peatükkides vaadeldud funktsiooni piirväärtusega. Võrdus (12.1) tähendab, et iga $\varepsilon > 0$ puhul saab leida sellise $\delta > 0$, et kui lõigu $[a, b]$ alajaotus T rahuldab tingimust $d(T) < \delta$, siis

$$|I - \sigma(f, T, c)| < \varepsilon$$

iga punktide $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ valiku korral.

Definitsioon 12.3

Olgu funktsioon f määratud lõigus $[a, b]$.

Piirväärtust

$$\lim_{d(T)\to 0} \sigma(f, T, c)$$

nimetatakse funktsiooni f **määratud (Riemanni) integraaliks** lõigus $[a, b]$ ja tähistatakse

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Kui see piirväärtus eksisteerib, siis öeldakse, et funktsioon f on **integreeruv** lõigus $[a, b]$ (Riemanni mõttes).

Näide 12.1. Näitame definitsiooni põhjal, et konstantne funktsioon $f(x) = 10$, on suvalises osalõigus $[a, b]$ integreeruv Riemann'i mõttes.

Olgu $f(x) = 10$ iga $x \in [a, b]$ korral. Vaatleme lõigu $[a, b]$ suvalist alajaotust $T[x_0, \ldots, x_n]$. Sõltumata lõigu jaotusviisist ja punktide c_i valikust osalõikudes $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, saame

$$\sigma(f, T, c) = 10\Delta x_1 + 10\Delta x_2 + \ldots + 10\Delta x_n.$$

Siit saame, et

$$\sigma(f, T, c) = 10(x_1 - a + x_2 - x_1 + \cdots + b - x_{n-1}) = 10(b - a).$$

Seega

$$\int\limits_a^b 10\,dx = \lim_{d(T)\to 0} 10(b - a) = 10(b - a).$$

Omadus 12.1

Lepime kokku, et

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx \quad \text{ja} \quad \int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Lause 12.1

Iga lõigus $[a, b]$ integreeruv funktsioon f on selles lõigus tõkestatud.

Teoreem 12.2

Olgu funktsioon f tõkestatud lõigus $[a, b]$. Kui lõigus $[a.b]$ leidub vaid lõplik arv punkte, kus funktsioon f pole pidev, siis funktsioon f on integreeruv lõigus $[a, b]$.

Näide 12.2. Vaatleme funktsioone

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{ja} \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

lõigus $[-1, 1]$. Mõlemad pole pidevad punktis $x = 0$, kuid funktsioon f on tõkestatud lõigus $[-1, 1]$, seega ka integreeruv (teoreem 12.2). Funktsioon g pole tõkestatud lõigus $[-1, 1]$, seega pole integreeruv selles lõigus (lause 12.1).

Kui funktsioon on pidev terve lõigus, siis Weierstrassi teoreemi (teoreem 8.4) järgi see on ka tõkestatud ja seega ka integreeruv.

Järeldus 12.3

Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis ta on integreeruv selles lõigus.

12.2 Newtoni-Leibnizi valem. Määratud integraali omadused.

Järgmine teoreem annab meile valemi Riemanni integraali arvutamiseks ilma definitsiooni kasutamata.

Teoreem 12.4

Newtoni-Leibnizi valem. Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis kehtib Newtoni-Leibnizi valem

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_b^a,$$

kus F on funktsiooni f algfunktsioon.

Näide 12.3. Leiame

$$\int\limits_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 4.$$

Teoreem 12.5

Lineaarsuse omadus.

1. Kui funktsioon f on integreeruv lõigus $[a, b]$, siis suvalise reaalarvu $\alpha \neq 0$ korral funktsioon αf on integreeruv lõigus $[a, b]$, kusjuures

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Kui funktsioonid f ja g integreeruvad lõigus $[a, b]$, siis ka funktsioon $f \pm g$ on integreeruv lõigus $[a, b]$, kusjuures

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Teoreem 12.6

Aditiivsuse omadus.

Olgu $c \in [a, b]$. Kui funktsioon f on integreeruv lõikudes $[a, c]$ ja $[c, b]$, siis funktsioon f on integreeruv ka lõigus $[a, b]$, kusjuures

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Näide 12.4. Leiame

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{2} |x|\,dx = -\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}.$$

Kui rajad on sümmeetrilised, s.t integreeritakse lõigus $[-a, a]$, siis paaris- ja paaritute funktsioonide integreerimine lihtsustub oluliselt.

Omadus 12.7

Sümmeetriliste rajadega integraal

Olgu funktsioon f integreeruv lõigus $[-a, a]$. Siis

1. kui f on paarisfunktsioon, siis
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx;$$
2. kui f on paaritu funktsioon, siis
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Näide 12.5. Kuna $f(x) = \sin^{2023} x$ on paaritu funktsioon, siis

$$\int_{-5}^{5} \sin^{2023} x = 0.$$

Paarisfunktsioonide korral nii lihtsasti ei saa, kuid natukene lihtsam on ikka (tavaliselt on nullpunktis funktsiooni lihtsam arvutada, kui punktis $-a$). Näiteks

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2.$$

12.3 Muutujavahetus ja ositi integreerimine

Määratud integraali võib arvutada nii, et esiteks leitakse algfunktsioon määramata integraalist ja siis kasutatakse Newtoni-Leibnizi valemit. Saab kasutada nii asendusvõtet kui ositi integreerimist. Viimaste korral on aga oluline, kuidas käituvad seejuures rajad a ja b.

Teoreem 12.8

Olgu funktsioon f integreeruv lõigus $[a, b]$. Olgu funktsioon $x = u(t)$ diferentseeruv üksühene funktsioon määramispiirkonnaga $[\alpha, \beta]$ ja muutumispiirkonnaga $[a, b]$ ning pideva tuletisfunktsiooniga u'. Siis

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,dt.$$

Näide 12.6. Arvutame integraali

$$I = \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx$$

diferentsiaali märgi alla viimise teel ja muutujavahetuse abil.

- Kasutame seost $dx = \frac{1}{2}d2x$. Kuna integreerimisrajad näitavad kuidas muuutub x ja peale teisendust muutujaks jääbki x, siis integreerimisrajad ei muutu:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, d2x = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\Big(\sin 2\cdot\frac{\pi}{4} - \sin 2\cdot 0\Big) = 2.$$

- Teeme muutujavahetust $t = 2x$. Uued rajad on $2 \cdot 0 = 0$ ja $2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Kuna $dx = \frac{1}{2}dt$, saame

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\Big(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\Big) = 2.$$

Teoreem 12.9

Ositi integreerimise valem. Olgu funktsioonide u ja v tuletised pidevad lõigus $[a, b]$. Siis

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx. \tag{12.2}$$

Omadus 12.10

Ositi integreerimise valem. Valem (12.2) kompaktsemal kujul:

$$\int\limits_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

Näide 12.7. Arvutame

$$\int_0^4 \underbrace{x}_{\mathbf{u}} \underbrace{e^{-x}\,dx}_{\mathbf{dv}} = \underbrace{x}_{\mathbf{u}} (\underbrace{-e^{-x}}_{\mathbf{v}})\Big|_0^4 - \int_0^4 \underbrace{-e^{-x}}_{\mathbf{v}} \underbrace{dx}_{\mathbf{du}}$$

$$= -4e^{-4} - e^{-x}\Big|_0^4 = 1 - 5e^{-4}.$$

Peatükk 13

Määratud integraali rakendusi

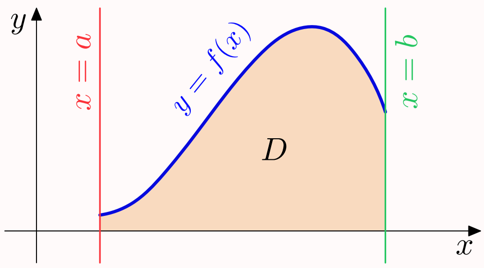
13.1 Kujundi pindala

Teoreem 13.1

Olgu funktsioon f integreeruv lõigus $[a,b]$. Olgu kujund D piiratud funktsiooni f graafikuga, x-teljega ning püstsirgetega $x=a$ ja $x=b$

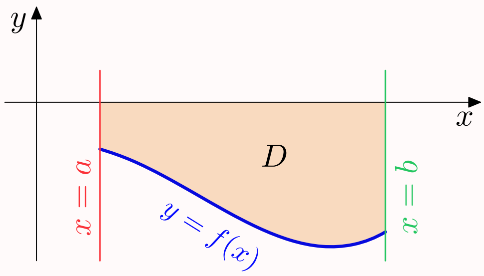
- Kui $f(x) \geq 0$ iga $x \in [a,b]$ korral, siis kujundi D pindala avaldub kujul

$$S_D = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$



- Kui $f(x) \leq 0$ iga $x \in [a,b]$ korral, siis kujundi D pindala avaldub kujul

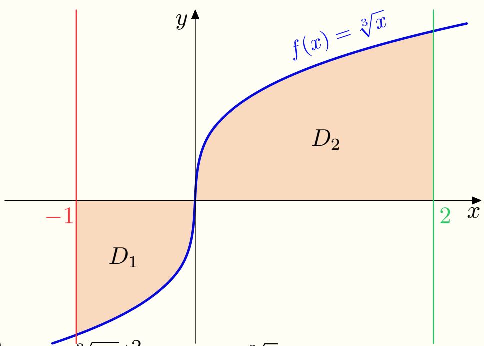
$$S_D = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$



Näide 13.1.

Leiame kujundi D pindala, kui see on piiratud funktsiooni $f(x)=\sqrt[3]{x}$ graafikuga, x-teljega ning sirgetega $x=-1$ ja $x=2$.

Kujund D koosneb kujundist D_1 ($x \in [-1,0]$), mis asub allpool x teljest, ja kujundist D_2 ($x \in [0,2]$), mis asub ülalpool x-teljest. Seega



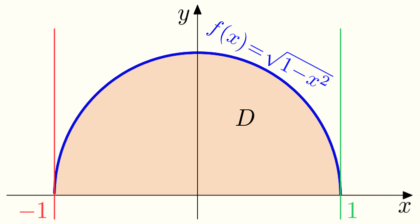
$$S_D = S_{D_1} + S_{D_2} = -\int_{-1}^{0} \sqrt[3]{x}\,dx + \int_0^2 \sqrt[3]{x}\,dx = -\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}\bigg|_{-1}^{0} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}\bigg|_0^2 = \frac{3+6\sqrt[3]{2}}{4} \text{ (ruutühikut).}$$

Näide 13.2.
Leiame integraali

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

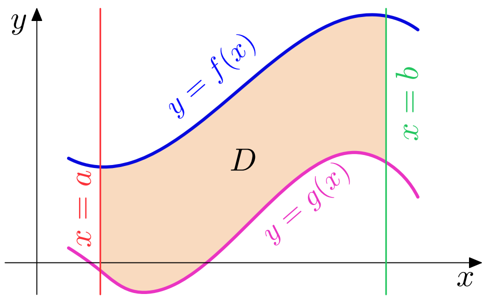
väärtuse. Seda integraali on üpris raske leida, kui üritaksime seda teha analüütiliste vahenditega. Tehes joonise, näeme aga, et tegelikult peame leidma pool ühikringi pindalast:

$$I = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{2}.$$



Järeldus 13.2
Kui funktsioonid f ja g integreeruvad lõigus $[a,b]$, $g(x) \leq f(x)$ $(x \in [a,b])$, siis f ja g graafikutega ning siretega $x=a$ ja $x=b$ piiratud kujundi D pindala avaldub kujul

$$S_D = \int\limits_a^b (f(x)-g(x))\, dx.$$



13.2 Keha ruumala

Vaatleme keha, mille korral on igas punktis x teada tema ristlõikepindala $S(x)$.

Lause 13.1
Olgu keha piiratud tasanditega, mis on risti x-teljega punktides $x=a$ ja $x=b$. Kui keha ristlõikepindala igas punktis $x \in [a,b]$ on $S(x)$ ja S on pidev funktsioon lõigus $[a,b]$, siis keha ruumala avaldub valemiga

$$V = \int\limits_a^b S(x)\, dx.$$

Näide 13.3. Leiame ruudukujulise alusega püramiidi ruumala, kui aluse külg on b ja püramiidi kõrgus on h.

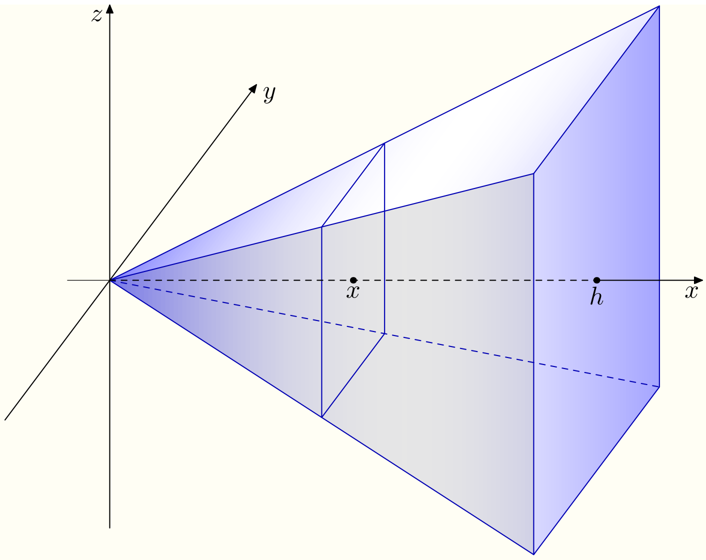
Asetame püramiidi tippu koordinaatide alguspunkti ja püramiidi aluse keskpunkti x-teljele. Lõikame püramiidi tasanditega, mis on risti x-teljega. Iga saadud ristlõige on ruut, mis on põhiservaks antud püramiidi sarnasele püramiidile.

Vaatleme ristlõiket, mida me saame keha lõikamisel tasandiga, mis läbib punkti $(x, 0, 0)$. Sarnaste püramiidide võrdetegur on

$$k = \frac{x}{h},$$

seega ristlõike pindala avaldub kujul

$$S(x) = (kb)^2 = \frac{x^2 b^2}{h^2}.$$

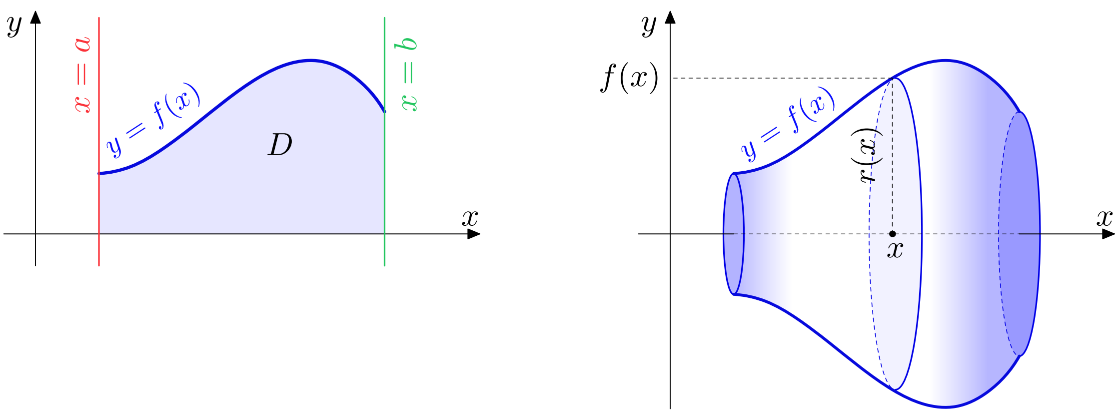


Kogu ruumala leiame valemist

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \frac{b^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{b^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{h\,b^2}{3}.$$

Olgu kujund D piiratud funktsiooni f graafikuga, x-teljega ning püstsirgetega $x = a$ ja $x = b$. Kujundi D pöörlemisel ümber x-telje tekib keha, mida nimetatakse **pöördkehaks**. Pöördkehadeks on näiteks koonus, silinder ja kera. Pöördkeha ristlõikeks mistahes kohal on ring, kusjuures ringi raadius r võrdub funktsiooni väärtusega vastavas punktis. Seega kohal x võetud ristlõike pindala on

$$S(x) = \pi r^2(x) = \pi f^2(x).$$



Joonis 13.1. Pöördkeha, mis on saadud kujundi D pöörlemisel ümber x-telje

Järeldus 13.3

Olgu f pidev mittenegatiivne funktsioon lõigus $[a, b]$. Olgu kujund D piiratud funktsiooni f graafikuga, x-teljega ning püstsirgetega $x = a$ ja $x = b$. Kujundi D pöörlemisel ümber x-telje tekkiva pöördkeha ruumala avaldub järgmiselt:

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx.$$

Näide 13.4. Kujund, mis on piiratud joonega

$$y = \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4,$$

ja x-teljega, pöörleb ümber x-telje. Leiame tekkiva pöördkeha ruumala.

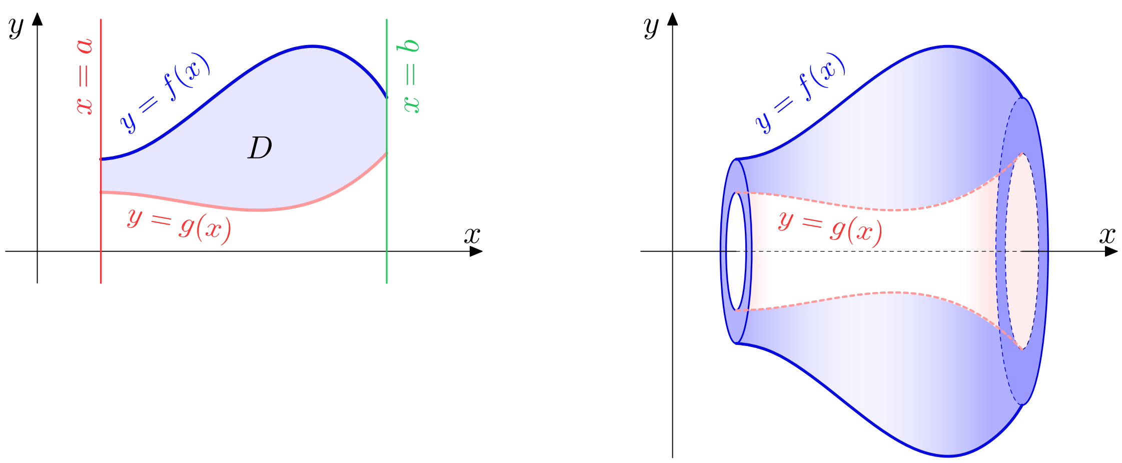
Ruumala on

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^4 x\, dx = \pi \frac{x^2}{2}\bigg|_0^4 = \pi \frac{4^2}{2} = 8\pi.$$

Kui aga ümber x-telje pöörleb kujund, mida piiravad jooned $y = f(x)$, $y = g(x)$ ($f(x) \ge g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral), siis tekkinud kahe pinna vahelise pöördkeha ruumala on võrdne kahe ruumala vahega:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx - \pi \int_a^b g^2(x)\, dx = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\, dx.$$



Joonis 13.2. Pöördkeha, mis on saadud kujundi D pöörlemisel ümber x-telje

Järeldus 13.4

Olgu f ja g lõigus $[a,b]$ pidevad funktsioonid, kusjuures $0 \leq f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral. Olgu kujund D piiratud funktsioonide f ja g graafikutega ning püstsirgetega $x = a$ ja $x = b$. Kujundi D pöörlemisel ümber x-telje tekiva pöördkeha ruumala avaldub järgmiselt:

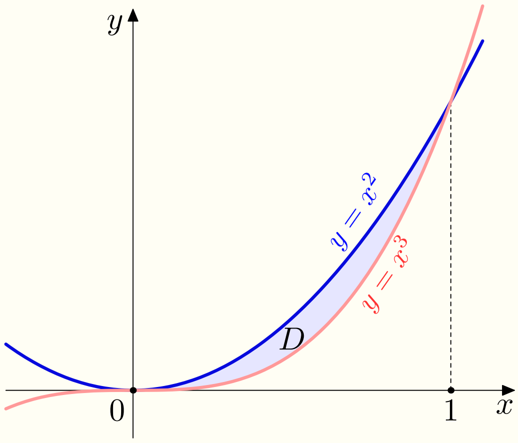
$$V = \pi \int\limits_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\, dx. \tag{13.1}$$

Näide 13.5. Olgu kujund D, mis on piiratud joontega $y = x^2$ ja $y = x^3$ pöörleb ümber x telje. Leidke tekkinud pöördkeha E ruumala.
Leiame joonte lõikepunktid:

$$x^2 = x^3 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 1.$$

Niisiis kujund D on piiratud vasakult sirgega $x = 0$, paremalt sirgega $x = 1$, alt joonega $y = x^3$ ja ülalt parabooliga $y = x^2$. Valemi (13.1) järgi

$$\begin{aligned} V_E &= \pi \int_0^1 \left((x^2)^2 - (x^3)^2\right)\, dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{2\pi}{35}. \end{aligned}$$



Peatükk 14

Lõpmatute rajadega integraal

14.1 Lõpmatute rajadega integraalid

Riemanni integraali $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ defineerimisel eeldasime, et integreerimislõik $[a,b]$ on lõplik. Selles peatükkis üldistame Riemanni integraali mõistet. Vaatleme integraale, mille vähemalt üks integreerimisrajadest pole lõplik.

Definitsioon 14.1

Lõpmatute rajadega päratu integraalideks (esimest liiki päratu integraalideks) nimetatakse integraale

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

mis on defineeritud järgmiselt.

1. Olgu funktsioon f määratud intervallis $[a,\infty)$ ja integreeruv igas lõigus $[a,b]$, siis
$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$
2. Olgu funktsioon f määratud intervallis $(-\infty,b]$ ja integreeruv igas lõigus $[a,b]$, siis
$$\int_{-\infty}^{b} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$
3. Olgu c suvaline reaalarv ja integraalid $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ koonduvad, siis
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Kui päratu integraal eksisteerib ja on lõplik, siis öeldakse, et päratu integraal on **koonduv**. Mitte-koonduvaid päratuid integraale nimetatakse **hajuvateks**.

Omadus 14.1

Olgu funktsioon F funktsiooni f algfunktsioon. Päratud integraalid saab arvutada kasutades üldistatud Newtoni-Leibnizi valemit. (Siin oletame, et kõik vajalikud piirväärtused eksisteerivad ja on lõplikud. Kui mingi piirväärtus ei eksisteeri või ei ole lõplik, siis vastav integraal hajub.)

1. $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^\infty = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a).$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^b = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^\infty = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$

Näide 14.1.

1. Leiame päratu integraali
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 0 + 1 = 1.$$
2. Leiame päratu integraali
$$\int_{-\infty}^0 \sin(2x+3)\,dx.$$
Kasutame diferentsiaali märgi alla viimise võtet:
$$\int_{-\infty}^0 \cos(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \cos(2x+3)\,d2x = \sin(2x+3)\Big|_{-\infty}^0.$$
Kuna piirväärtust $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin(2x+3)$ ei eksisteeri, siis integraal hajub.
3. Leiame päratu integraali
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx.$$
Kirjutame
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-\infty}^\infty.$$
Kuna
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2} = \infty$$
siis lähtuv integraal hajub.
4. Leiame päratu integraali
$$\int_{-\infty}^\infty xe^{-x}\,dx.$$
Et leida algfunktsiooni, integreerime vastava määramata integraali ositi, võttes $u = x$ ja $dv = e^{-x}\,dx$:
$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -\frac{x+1}{e^x} + C.$$

Seega
$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x}\,dx = -\frac{x+1}{e^x}\bigg|_{-\infty}^{\infty}.$$
Kasutades l'Hospitali reeglit, näeme, et
$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x+1}{e^x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x+1}{e^x}\right) = 0.$$
Seega
$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x}\,dx = 0 - 0 = 0.$$