



IEL – protokol k projektu

Martin Zmitko
xzmitk01

20. prosince 2020

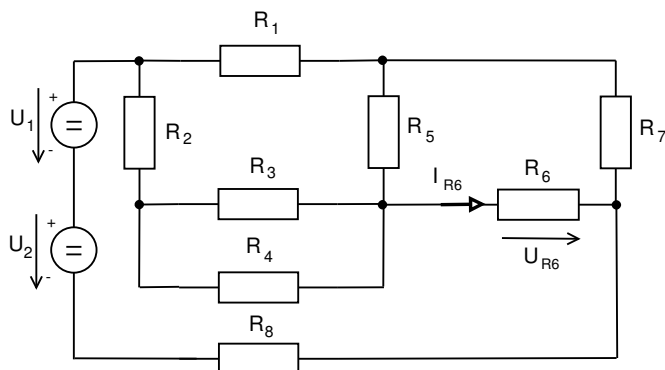
Obsah

1	Příklad 1	2
2	Příklad 2	5
3	Příklad 3	7
4	Příklad 4	9
5	Příklad 5	11
6	Shrnutí výsledků	13

Příklad 1

Stanovte napětí U_{R6} a proud I_{R6} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

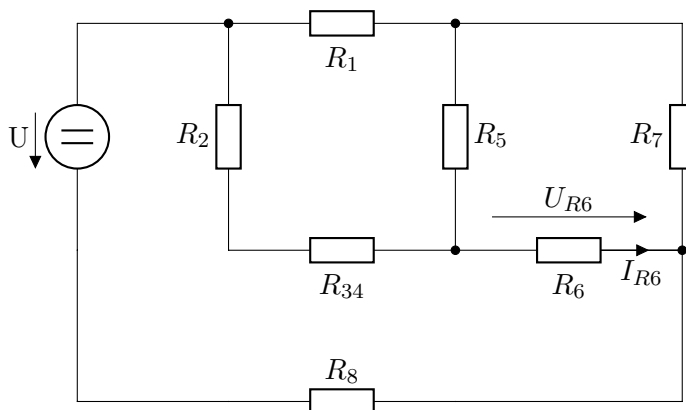
sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
H	135	80	680	600	260	310	575	870	355	265



Krok 1: Vyjádříme odpor R_{34} jako paralelní zapojení odporů R_3 a R_4 , zároveň sečteme sériově zapojené zdroje napětí:

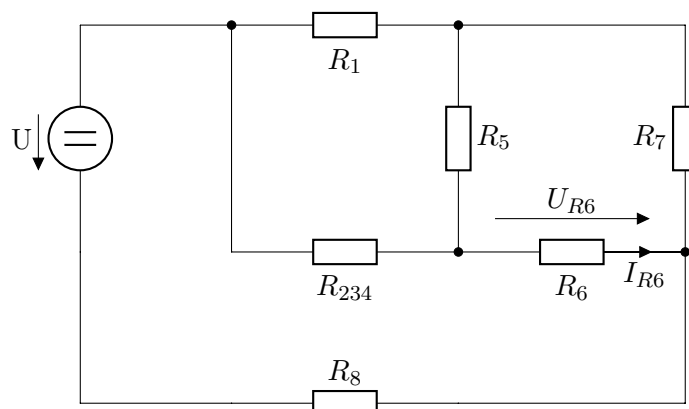
$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{260 \cdot 310}{260 + 310} = 141,4035088\Omega$$

$$U = U_1 + U_2 = 135 + 80 = 215V$$



Krok 2: Vyjádříme odpor R_{234} pomocí sériového zapojení rezistorů R_2 a R_{34} :

$$R_{234} = R_2 + R_{34} = 141,4035088 + 600 = 741,4035088\Omega$$

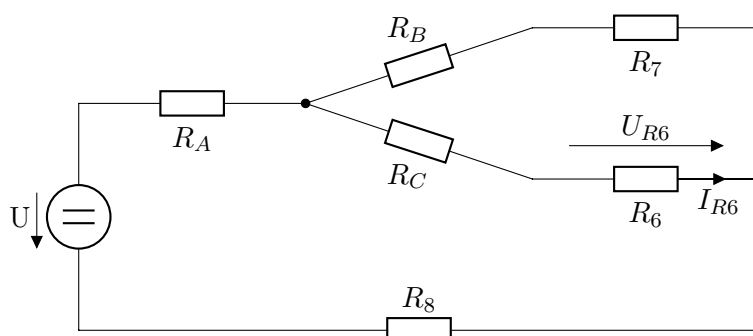


Krok 3: Převědeme zapojení rezistorů R_1 , R_{234} a R_5 z trojúhelníku na hvězdu:

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_{234}}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{680 \cdot 741,4035088}{680 + 741,4035088 + 575} = 252,5313063\Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_5}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{680 \cdot 575}{680 + 741,4035088 + 575} = 195,8521903\Omega$$

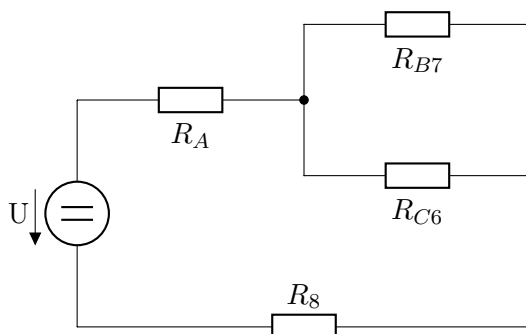
$$R_C = \frac{R_{234} \cdot R_5}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{741,4035088 \cdot 575}{680 + 741,4035088 + 575} = 213,5375017\Omega$$



Krok 4: Vyjádříme odpor R_{B7} jako sériově zapojené rezistory R_B a R_7 , vyjádříme odpor R_{C6} jako sériově zapojené rezistory R_C a R_6 :

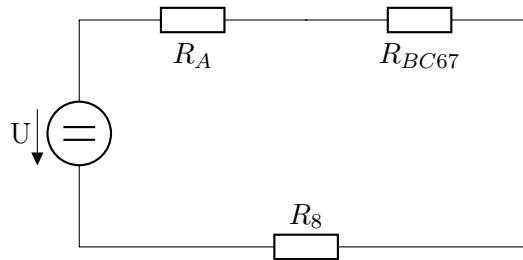
$$R_{B7} = R_B + R_7 = 195,8521903 + 355 = 550,8521903\Omega$$

$$R_{C6} = R_C + R_6 = 213,5375017 + 870 = 1083,5375017\Omega$$



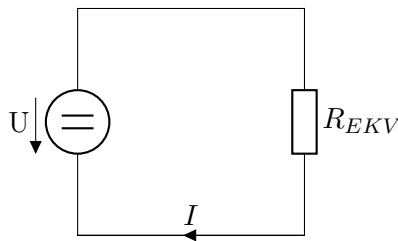
Krok 5: Vyjádříme odpor R_{BC67} jako paralelní zapojení rezistorů R_{B7} a R_{C6} :

$$R_{BC67} = \frac{R_{B7} \cdot R_{C6}}{R_{B7} + R_{C6}} = \frac{550,8521903 \cdot 1083,5375017}{550,8521903 + 1083,5375017} = 365,1938146\Omega$$



Krok 6: Vyjádříme R_{EKV} jako sériové zapojení zbývajících rezistorů:

$$R_{EKV} = R_A + R_{BC67} + R_8 = 252,5313063 + 365,1938146 + 265 = 882,7251209\Omega$$



Krok 7: Pomocí ohmova zákona vypočteme celkový proud procházející obvodem I:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{215}{882,7251209} = 0,2435639A$$

Krok 8: Nyní spočteme napětí na odporu R_{BC67} z kroku 5:

$$U_{BC67} = U \cdot \frac{R_{BC67}}{R_{EKV}} = 215 \cdot \frac{365,1938146}{882,7251209} = 88,94804V$$

Nyní můžeme vypočíst proud I_{R6} :

$$I_{R6} = \frac{U_{BC67}}{R_{BC67}} = \frac{88,94804}{1083,5375017} = 0,0820904A$$

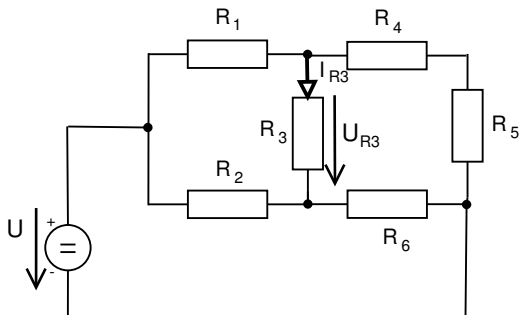
Krok 9: Ve všech větvích paralelně zapojeného obvodu je napětí stejné, tedy napětí spodní větve obvodu z kroku 3 je rovno U_{BC67} . Stačí tedy spočítat napětí na odporu R_6 :

$$U_{R6} = U_{BC67} \cdot \frac{R_6}{R_C + R_6} = 88,94804 \cdot \frac{870}{213,5375017 + 870} = 71,41865849V$$

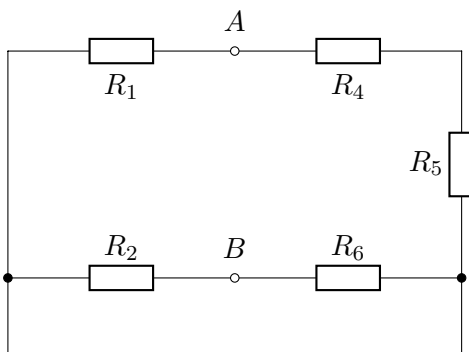
Příklad 2

Stanovte napětí U_{R_3} a proud I_{R_3} . Použijte metodu Théveninovy věty.

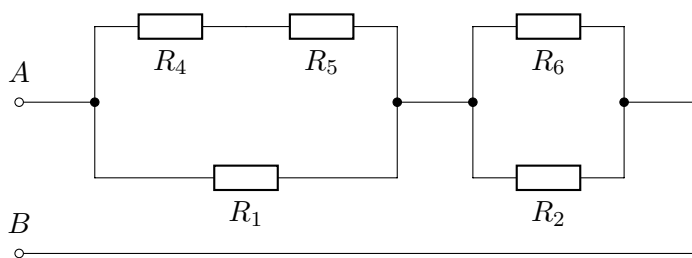
sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]
B	100	50	310	610	220	570	200



Krok 1: Zkratujeme zdroj a odstraníme rezistor R_3 , určíme odpor zbytku obvodu vzhledem ke svorkám odstraněného rezistoru R_3 .



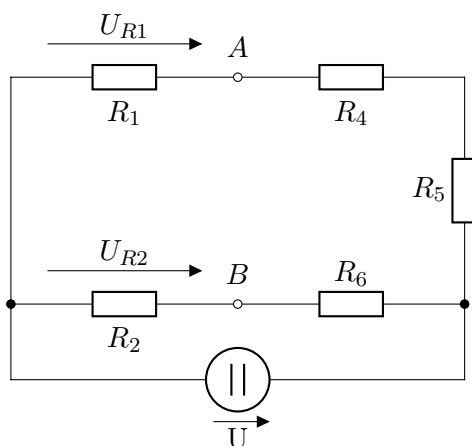
Překreslíme obvod aby se snáz určoval odpor:



Určíme R_i pomocí vzorců pro paralelní a sériové zapojení rezistorů:

$$R_i = \frac{(R_4 + R_5) \cdot R_1}{R_1 + R_4 + R_5} + \frac{R_2 \cdot R_6}{R_2 + R_6} = \frac{(220 + 570) \cdot 50}{50 + 220 + 570} + \frac{310 \cdot 200}{310 + 200} = 168,592437\Omega$$

Krok 2: Nyní určíme napětí U_i mezi svorkami A a B:



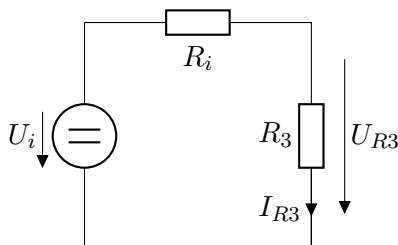
U_i můžeme vypočíst jako rozdíl napětí U_{R1} a U_{R2} :

$$U_{R1} = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_4 + R_5} = 100 \cdot \frac{50}{50 + 220 + 570} = 5,952381V$$

$$U_{R2} = U \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_6} = 100 \cdot \frac{310}{310 + 200} = 60,784314V$$

$$U_i = U_{R2} - U_{R1} = 60,784314 - 5,952381 = 54,831933V$$

Krok 3: Sestavíme náhradní obvod a dopočteme U_{R3} a I_{R3} :



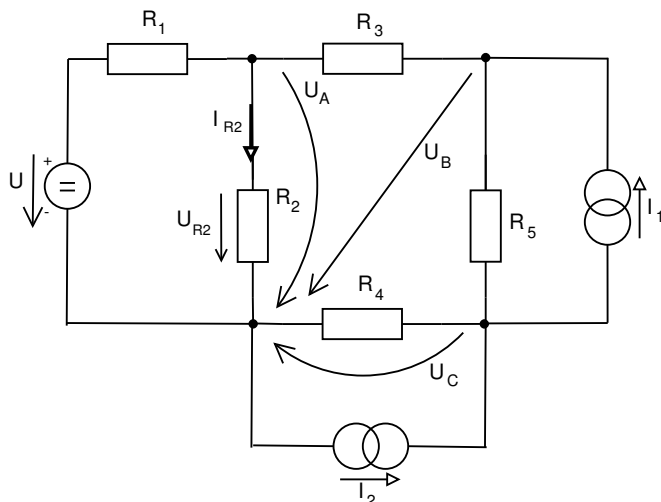
$$I_{R3} = \frac{U_i}{R_i + R_3} = \frac{54,831933}{168,592437 + 610} = 0,070424436A$$

$$U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3 = 0,070424436 \cdot 610 = 42,958906V$$

Příklad 3

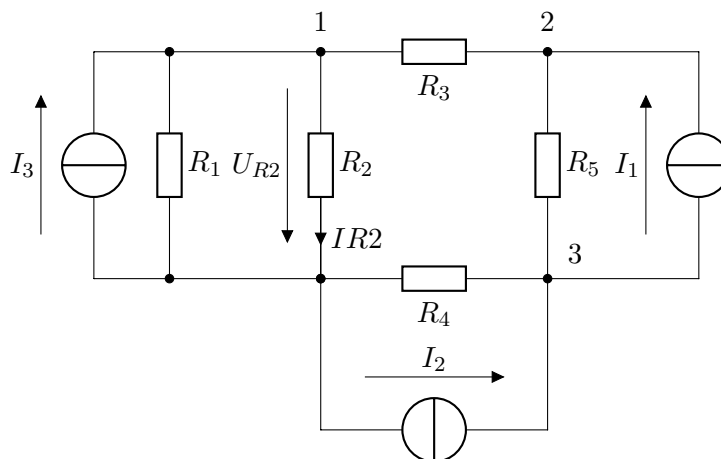
Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
C	110	0.85	0.75	44	31	56	20	30



Krok 1: Převedeme napěťový zdroj U na proudový zdroj I_3 a označíme uzly 1, 2 a 3, které budeme zkoumat.

$$I_3 = \frac{U}{R_1} = \frac{110}{44} = 2.5A$$



Krok 2: Převedeme odpory na rezistivity, vytvoříme a spočteme soustavu rovnic pro uzly:

$$G = \frac{1}{R}$$

$$\begin{cases} I_3 - I_{R1} - I_{R2} + I_{R3} = 0 \\ I_1 - I_{R5} - I_{R3} = 0 \\ I_2 - I_1 + I_{R5} - I_{R4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -G_1 U_A - G_2 U_A + G_3 (U_B - U_A) = -I_3 \\ -G_5 (U_B - U_C) - G_3 (U_B - U_A) = -I_1 \\ G_5 (U_B - U_C) - G_4 U_C = I_1 - I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_A (G_1 + G_2 + G_3) + U_B (-G_3) = I_3 \\ U_A (G_3) + U_B (-G_3 - G_5) + U_C (G_5) = -I_1 \\ U_B (G_5) + U_C (-G_4 - G_5) = I_1 - I_2 \end{cases}$$

Přepíšeme do matic:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & 0 \\ G_3 & -G_3 - G_5 & G_5 \\ 0 & G_5 & -G_4 - G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 \\ -I_1 \\ I_1 - I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{44} + \frac{1}{31} + \frac{1}{56} & -\frac{1}{56} & 0 \\ \frac{1}{56} & -\frac{1}{56} - \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{30} & -\frac{1}{20} - \frac{1}{30} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ -0,85 \\ 0,85 - 0,75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1391}{19096} & -\frac{1}{56} & 0 \\ \frac{1}{56} & -\frac{43}{840} & \frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{30} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ -0,85 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

Sarrusovým pravidlem spočítáme determinanty:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1391}{19096} & -\frac{1}{56} & 0 \\ \frac{1}{56} & -\frac{43}{840} & \frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{30} & -\frac{1}{12} \end{vmatrix} = \left(\frac{1391}{19096} \cdot -\frac{43}{840} \cdot -\frac{1}{12} \right) - \left(\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1391}{19096} \right) - \left(-\frac{1}{12} \cdot -\frac{1}{56} \cdot \frac{1}{56} \right) = \frac{4657}{22915200}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2,5 & -\frac{1}{56} & 0 \\ -0,85 & -\frac{43}{840} & \frac{1}{30} \\ 0,1 & \frac{1}{30} & -\frac{1}{12} \end{vmatrix} = \left(2,5 \cdot -\frac{43}{840} \cdot -\frac{1}{12} \right) + \left(0,1 \cdot -\frac{1}{56} \cdot \frac{1}{30} \right) - \left(\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{30} \cdot 2,5 \right) -$$

$$- \left(-\frac{1}{12} \cdot -\frac{1}{56} \cdot -0,85 \right) = \frac{611}{67200}$$

Použitím Cramerova pravidla vypočítáme U_A , které se rovná U_{R2} :

$$U_{R2} = U_A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{611}{67200}}{\frac{4657}{22915200}} = 44,7393V$$

Vypočítáme I_{R2} :

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{44,7393}{31} = 1,4432A$$

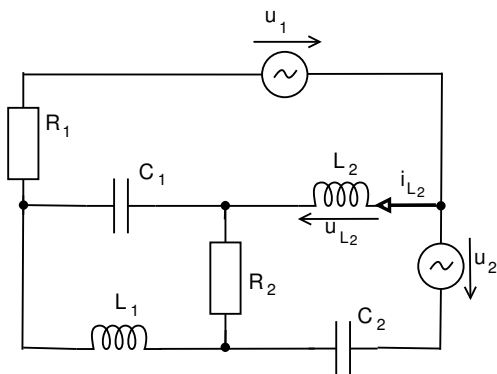
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
H	65	60	10	10	160	75	155	70	95



Krok 1: Vypočítáme úhlovou rychlost, impedance cívek a kondenzátorů:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 95 = 190\pi$$

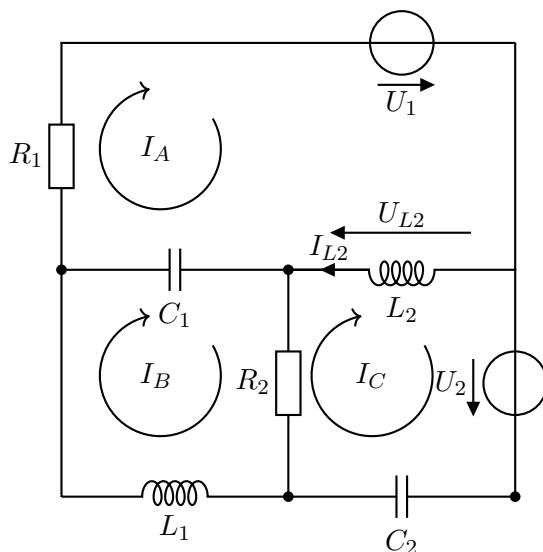
$$Z_{C1} = -\frac{1}{j\omega C_1} = -\frac{1}{j190\pi 155 \cdot 10^{-6}} = -j10,8084851\Omega$$

$$Z_{C2} = -\frac{1}{j\omega C_2} = -\frac{1}{j190\pi 70 \cdot 10^{-6}} = -j23,93307415\Omega$$

$$Z_{L1} = j\omega L_1 = j190 \cdot \pi \cdot 0,16 = j95,504417\Omega$$

$$Z_{L2} = j\omega L_2 = j190 \cdot \pi \cdot 0,075 = j44,767695\Omega$$

Krok 2: Sestavíme rovnice pro smyčky A, B a C:



$$\begin{cases} I_A(R_1 + Z_{L2} + Z_{C1}) + I_B(-Z_{C1}) + I_C(-Z_{L2}) = -U_1 \\ I_B(Z_{C1} + R_2 + Z_{L1}) + I_A(-Z_{C1}) + I_C(-R_2) = 0 \\ I_C(Z_{L2} + Z_{C2} + R_2) + I_A(-Z_{L2}) + I_B(-R_2) = -U_2 \end{cases}$$

Přepíšeme rovnice do matice a Sarrusovým pravidlem spočítáme determinanty:

$$\begin{bmatrix} R_1 + Z_{L2} + Z_{C1} & -Z_{C1} & -Z_{L2} \\ -Z_{C1} & Z_{C1} + R_2 + Z_{L1} & -R_2 \\ -Z_{L2} & -R_2 & Z_{L2} + Z_{C2} + R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_1 \\ 0 \\ -U_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 + 33,9592099j & j10,8084851 & -j44,767695 \\ j10,8084851 & 10 + 84,6959319j & -10 \\ -j44,767695 & -10 & 10 + 20,83462085j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -65 \\ 0 \\ -60 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 + 33,9592099j & j10,8084851 & -j44,767695 \\ j10,8084851 & 10 + 84,6959319j & -10 \\ -j44,767695 & -10 & 10 + 20,83462085j \end{vmatrix} = -41951,13883 + 122805,40143j$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -65 & j10,8084851 & -j44,767695 \\ 0 & 10 + 84,6959319j & -10 \\ -60 & -10 & 10 + 20,83462085j \end{vmatrix} = 342197,99468 - 88970,38522j$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 10 + 33,9592099j & j10,8084851 & -65 \\ j10,8084851 & 10 + 84,6959319j & 0 \\ -j44,767695 & -10 & -60 \end{vmatrix} = 406019,72179 - 93266,57151j$$

Cramerovým pravidlem spočteme proudy I_A a I_C :

$$I_A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{342197,99468 - 88970,38522j}{-41951,13883 + 122805,40143j} = -1,50119 - 2,27368jA$$

$$I_C = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{406019,72179 - 93266,57151j}{-41951,13883 + 122805,40143j} = -1,69149 - 2,72837jA$$

Spočteme proud procházející cívkou I_{L2} :

$$I_{L2} = I_C - I_A = (-1,69149 - 2,72837j) - (-1,50119 - 2,27368j) = -0,1903 - 0,45469jA$$

Pomocí ohmova zákona spočítáme napětí U_{L2} :

$$U_{L2} = I_{L2} \cdot Z_{L2} = (-0,1903 - 0,45469j) \cdot 44,767695j = 20,35542 - 8,51929jV$$

Dopočítáme $|U_{L2}|$ a φ_{L2} :

$$|U_{L2}| = \sqrt{20,35542^2 + (-8,51929)^2} = 22,0663V$$

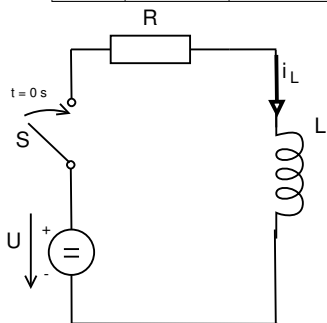
$$\omega_{L2} = \arctan \frac{-8,51929}{20,35542} = -0,396375rad$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0[\text{s}]$ sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
C	35	5	30	14



Krok 1: Sestavíme diferenciální rovnici pro cívku a dosadíme do ní hodnoty:

$$i'_L = \frac{U_L}{L}$$

Z II. Kirchhoffova zákona vyjádříme napětí na cívce:

$$U_R + U_L - U = 0$$

$$U_L = U - U_R$$

Dosadíme napětí do diferenciální rovnice:

$$i'_L = \frac{U - U_R}{L}$$

$$i'_L = \frac{U - Ri_L}{L}$$

$$Li'_L + Ri_L = U$$

$$5 \cdot i'_L + 30 \cdot i_L = 35$$

Krok 2: Vypočteme charakteristickou rovnici, zjistíme očekávaný tvar rovnice a ten dosadíme do původní diferenciální rovnice:

$$5\lambda + 30 = 0$$

$$\lambda = -\frac{30}{5} = -6$$

Očekávaný tvar rovnice:

$$i_L(t) = C(t) \cdot e^{\lambda t}$$

$$i_L(t) = C(t) \cdot e^{-6t}$$

Zderivujeme:

$$i_L(t)' = C(t)' \cdot e^{-6t} - 6C(t) \cdot e^{-6t}$$

Dosadíme do původní rovnice a vyjádříme $C(t)$:

$$5(C(t)' \cdot e^{-6t} - 6C(t) \cdot e^{-6t}) + 30(C(t) \cdot e^{-6t}) = 35$$

$$5C(t)' \cdot e^{-6t} - 30C(t) \cdot e^{-6t} + 30C(t) \cdot e^{-6t} = 35$$

$$5C(t)' \cdot e^{-6t} = 35$$

$$C(t)' = \frac{7}{e^{-6t}}$$

$$C(t) = \int \frac{7}{e^{-6t}} dt = \frac{7e^{-6t}}{6} + K$$

Dosadíme do očekávané rovnice:

$$i_L(t) = e^{-6t} \cdot \left(\frac{7e^{-6t}}{6} + K \right)$$

Krok 3: Vypočítáme K pomocí počáteční podmínky $i_L(0) = 14A$ a vypočteme i_L :

$$14 = e^{-6 \cdot 0} \cdot \left(\frac{7e^{-6 \cdot 0}}{6} + K \right)$$

$$14 = \frac{7}{6} + K$$

$$K = \frac{77}{6}$$

Dosazením K do očekávané rovnice dostaneme výslednou rovnici pro $i_L(t)$:

$$i_L(t) = e^{-6t} \cdot \frac{7e^{-6t} + 77}{6} = \frac{7 + 77e^{6t}}{6e^{12t}}$$

Krok 4: Provedeme kontrolu výpočtu dosazením nulového času do výsledné rovnice:

$$i_L(0) = \frac{7 + 77e^{6 \cdot 0}}{6e^{12 \cdot 0}} = \frac{84}{6} = 14A$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	H	$U_{R6} = 71,4187V$ $I_{R6} = 82,0904mA$
2	B	$U_{R3} = 42,9589V$ $I_{R3} = 70,4244mA$
3	C	$U_{R2} = 44,7393V$ $I_{R2} = 1,4432A$
4	H	$ U_{L2} = 22,0663V$ $\varphi_{L2} = -0,3963rad$
5	C	$i_L(t) = \frac{7+77e^{\frac{6t}{12}}}{6e^{12t}}$