

Strange Stars and Gravitational Waves

Αστέρες με Παραδοξότητα και Βαρυτικά Κύματα

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Τμήμα Φυσικής



Επιβλέπων καθηγητής: Μουστακίδης Χαράλαμπος

Παπαδοπούλου Μάρθα

AEM: 14732

Ιούλιος 2023

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Χαράλαμπο Μουστακίδη, καθηγητή του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, για επίβλεψη της εργασίας. Είμαι ευγνώμων για την υπομονή και την καθοδήγησή τους καθ' όλη της διάρκεια εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Περιεχόμενα

Περίληψη	4
Abstract	5
1 Συμπαγή Αστέρια	6
1.1 Κλασσική υδροστατική ισορροπία για σφαίρες	6
1.2 Σχετικιστική σχέση υδροστατικής ισορροπίας	6
1.3 Αρχικές συνθήκες για εξισώσεις TOV	7
1.4 Διαβαθμιζόμενες λύσεις TOV για συμπαγή αστέρια	8
1.5 Ελεύθερο αέριο Fermi	10
1.6 Καταστατική εξίσωση σχετικιστικού αερίου Fermi υπό όρους κενού	11
2 Κουάρκ Αστέρες	13
2.1 Κβαντική χρωμοδυναμική	13
2.2 MIT bag μοντέλο	13
2.3 Ασυμπτωτική ελευθερία	14
2.4 Δεδομένα πλέγματος QCD και pQCD για υψηλές θερμοκρασίες	15
2.5 Ελεύθερη strange κουάρκ ύλη	16
2.6 Κουάρκ ύλη με αλληλεπιδράσεις	18
2.7 Σχέση μάζας - ακτίνας για κουάρκ αστέρες	19
3 Strange Αστέρες	21
3.1 Υπόθεση για strange κουάρκ ύλη	21
3.2 Bag μοντέλο με αλληλεπιδράσεις strange κουάρκ και QCD	22
3.3 Γραμμική προσέγγιση της καταστατική εξίσωσης strange ύλης	23
3.4 Φαινομενική ακτίνα για strange αστέρες	24
3.5 Μετατροπή αστέρων νετρονίων σε strange αστέρες	24
3.6 Μετατροπή κατά διάφορα στάδια εξέλιξης των αστέρων νετρονίων	25
4 Βαρυτικά κύματα	27
4.1 Συγχώνευση αστέρων νετρονίων	27
4.2 Παλιρροιακή Παραμορφωσιμότητα	28
4.3 Συγχώνευση strange αστέρων με προσομοίωση	30

5	Υπολογισμός TOV εξισώσεων με Python	35
5.1	Διαβάθμιση TOV εξισώσεων	35
5.2	Μέθοδος Runge - Kutta	36
5.3	Σχεδίαση Διαγραμμάτων	37
	Συμπεράσματα	40
	Παράρτημα: Code Listing	41
	Αναφορές	43

Περίληψη

Αυτή η εργασία πραγματεύεται τους strange αστέρες και πως η πιθανή εύρεσή τους μπορεί να συσχετίζεται με τα βαρυτικά κύματα. Αναφέρεται στην μορφή που παίρνουν οι εξισώσεις TOV γενικά για συμπαγείς αστέρες και στα ζεύγη μάζας - ακτίνας που είναι επιτρεπτά. Επιπλέον, εμβαθύνει στην κουάρκ ύλη, και πιο συγκεκριμένα στην κουάρκ ύλη που περιέχει το strange κουάρκ, και διερευνά ποια καταστατική εξίσωση μπορεί να την περιγράψει καλύτερα. Αναλύει πως μπορεί να σχηματιστεί strange ύλη από βαρυονική ύλη στο εσωτερικό αστέρων νετρονίων και έπειτα, πως μετατρέπεται το αστέρι σε strange αστέρα. Επίσης, αναφέρεται σε κάποιες βασικές πληροφορίες για τα βαρυτικά κύματα. Συγκεκριμένα πως ανιχνεύονται μέσω συγχώνευσης δυαδικών αστρικών συστημάτων και πως μπορούν να εξαχθούν πληροφορίες για την δομή των αστέρων που συγκρούονται και του τελικού αστρικού αντικειμένου, μέσω της παλιρροιακής παραμορφωσιμότητας τους. Στο τέλος αυτής της εργασίας υπάρχει ένα υπολογιστικό κομμάτι με κώδικα στην Python, το οποίο υπολογίζει, μέσω των εξισώσεων TOV και μίας καταστατικής εξίσωσης strange αστέρα, το ζεύγος μάζας - ακτίνας του αστέρα.

Abstract

This thesis explores strange stars and their potential discovery through gravitational waves. It focuses on the TOV equations for compact stars and their implications for the mass - radius relations. In addition, it delves into quark matter, especially quark matter that contains strange quarks and investigates which equation of state can best describe it. The study examines the conversion of baryonic matter to strange matter and analyzes the process of a neutron star transforming into a strange star. Furthermore, it provides an overview of gravitational waves, including their detection through binary star system mergers and the extraction of information about the structure of the binary system and the resulting stellar object, through tidal deformability. Lastly, it includes a Python code that calculates the mass and radius relation of a star using the TOV equations and the equations of state of a quark star.

1 Συμπαγή Αστέρια

Με τον όρο συμπαγή αστέρια αναφερόμαστε σε αστρικά σώματα όπως τους λευκούς νάνους, τους αστέρες νετρονίων και τις μαύρες τρύπες, δηλαδή τα πιθανά τελικά στάδια της αστρικής εξέλιξης. Όπως καταλαβαίνουμε και από τον όρο «συμπαγή» αναφερόμαστε σε σώματα που έχουν πολλή μάζα σε σχέση με την ακτίνα τους, συνεπώς έχουν πολύ μεγάλη πυκνότητα.

1.1 Κλασσική υδροστατική ισορροπία για σφαίρες

Θεωρούμε ότι τα συμπαγή αστέρια είναι συμμετρικές ομογενείς σφαίρες με πυκνότητα μάζας $\rho(r)$ και ολική μάζα M σε ακτίνα R . Για να βρούμε την έκφραση διατήρησης μάζας ολοκληρώνουμε την πυκνότητα μάζας μίας σφαίρας με ακτίνα r :

$$m_r(r) = \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') \quad (1)$$

Η παραπάνω εξίσωση διατήρησης της μάζας μπορεί να πάρει την διαφορική μορφή:

$$\frac{dm_r(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2)$$

Από το διαφορικό της βαρυτικής δύναμης και το διαφορικό της μάζας σφαίρας r , καταλήγουμε ότι η εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας για την Νευτώνεια περίπτωση είναι:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G \frac{m_r(r) \rho(r)}{r^2} \quad (3)$$

1.2 Σχετικιστική σχέση υδροστατικής ισορροπίας

Ο χώρος που μελετάμε, όμως, δεν είναι Νευτώνειος, αλλά καμπύλος και λαμβάνουν χώρα μέσα σε αυτόν σχετικιστικά φαινόμενα που δεν μπορούν να αγνοηθούν. Για αυτόν τον λόγο, συμπεριλαμβάνουμε διορθωτικούς παράγοντες για τα m_r , r και ρ στην εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας.

Η πρώτη διόρθωση είναι για την πυκνότητα μάζας, καθώς στην γενική σχετικότητα η βαρύτητα συσχετίζεται με την συνολική ενεργειακή πυκνότητα. Οπότε η πυκνότητα μάζας γίνεται:

$$\rho(r) = \frac{\varepsilon(r)}{c^2} \quad (4)$$

Η επόμενη διόρθωση αφορά την πυκνότητα μάζας ρ και την μάζα m σφαίρας με ακτίνα r , λόγω του γεγονότος ότι η βαρύτητα πέρα από την πυκνότητα ενέργειας, συσχετίζεται και με τον τανυστή ενέργειας - ορμής, και επομένως, πρέπει να προσθέσουμε και την πίεση. Η τελευταία διόρθωση εισάγεται

από τον μετρικό τανυστή, λόγω της καμπύλωσης του χωροχρόνου. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, που έχουμε σφαιρική συμμετρία, χρησιμοποιούμε το μετρικό σύστημα Schwarzschild και εισάγουμε τον διορθωτικό παράγοντα Schwarzschild. Αυτό το μετρικό σύστημα είναι προσεγγιστικό και για να το χρησιμοποιήσουμε θεωρούμε ότι η γωνιακή ορμή και τα μαγνητικά πεδία, της μάζας που μελετούμε, μπορούν να αγνοηθούν. Αν συμπεριλάβουμε όλες τις παραπάνω διορθώσεις, η υδροστατική ισορροπία, για θερμοκρασία $T = 0$, καταλήγει να δίνεται από την εξίσωση Tolman - Oppenheimer - Volkoff (TOV):

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{m_r(r)\varepsilon(r)}{c^2 r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{c^2 \rho(r)} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{c^2 m_r(r)} \right) \left(1 - \frac{2Gm_r(r)}{c^2 r} \right)^{-1} \quad (5)$$

Εάν συγκρίνουμε τις εξισώσεις (3) και (5) παρατηρούμε ότι προστέθηκαν τρεις διορθωτικοί παράγοντες για την πυκνότητα ενέργειας ε , την μάζα m_r και την ακτίνα r , και από την (4) εισήγαμε ότι η πυκνότητα μάζας συνδέεται, πλέον, με την πυκνότητα ενέργειας. Για να γυρίσουμε στην Νευτώνεια εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας (3) αρκεί να θέσουμε $\varepsilon \rightarrow \rho$, $P = 0$ και να αγνοήσουμε τον παράγοντα Schwarzschild. Από αυτούς τους τρεις διορθωτικούς παράγοντες αυξάνεται η επίδραση της βαρύτητας και συνεπώς, χρειάζεται μεγαλύτερη πίεση για να εξασφαλιστεί η υδροστατική ισορροπία, σε σχέση με την Νευτώνεια εξίσωση.

Η εξίσωσης διατήρησης της μάζας, μετά από διορθώσεις λόγω της γενικής σχετικότητας, γίνεται:

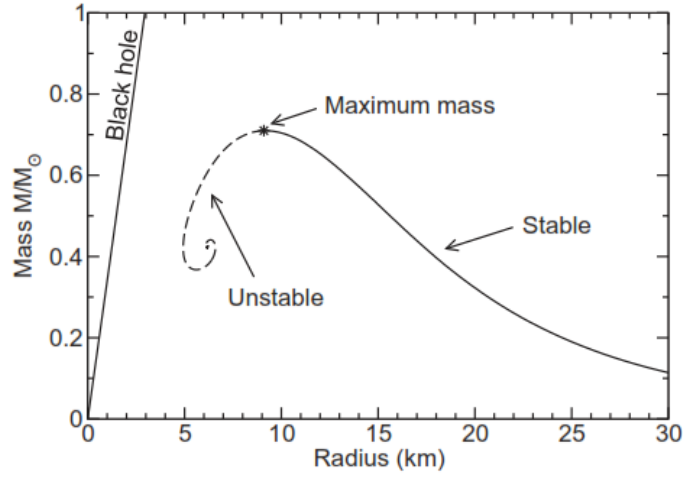
$$\frac{dm_r}{dr} = 4\pi r^2 \frac{\varepsilon(r)}{c^2} \quad (6)$$

Όπως καταλαβαίνουμε χρειαζόμαστε μόνο την αντικατάσταση της σχέσης (4) για να μεταβούμε από την Νευτώνεια έκφραση στην σχετικιστική. Επίσης, παρατηρούμε ότι σε αυτήν την σχέση δεν υπάρχει ο παράγοντας Schwarzschild, ο οποίος περιμένουμε ότι πρόκειται να εισαχθεί μέσω του ολοκληρώματος της διατήρησης μάζας σε καμπύλο χωροχρόνο, όμως αυτό δεν συμβαίνει, λόγω της πρόσθετης ενέργειας δέσμευσης όταν υπάρχει βαρυτικό πεδίο. Έτσι τελικά, η μάζα που αντιλαμβάνεται ένας εξωτερικός παρατηρητής είναι μικρότερη σε σχέση με την μάζα που θα αντιλαμβανόταν σε επίπεδο χώρο.

1.3 Αρχικές συνθήκες για εξισώσεις TOV

Αν θέλουμε να λύσουμε αριθμητικά τις εξισώσεις TOV (5), (6), πρέπει να ολοκληρώσουμε το σύστημα για r από μηδέν μέχρι R και να δώσουμε ορισμένες αρχικές συνθήκες. Για $P = P(\rho)$, έχουμε αρχικές συνθήκες $m(r=0) = 0$ και κεντρική πυκνότητα $\rho(r=0) = \rho_c$, οπότε η κεντρική πίεση $P(r=0) = P_c$, μέχρι η πίεση $P(r)$ να μηδενίζεται σε ακτίνα R , όπου τελειώνει η έκταση του αστεριού. Με M συμβολίζουμε την βαρυτική μάζα του αστερά, η οποία είναι το ολοκλήρωμα της μάζας για ακτίνα R . Για κάθε πιθανή καταστατική εξίσωση, λαμβάνουμε μία ακολουθία αστρικών μοντέλων για την μάζα, παραμετροποιημένη για κεντρική πυκνότητα $M = M(\rho_c)$.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η ακτίνα r πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη $r > 2Gm_r(r)$, η οποία δηλώνει ότι ο αστéρας ακτίνας r δεν θα καταρρεύσει για να σχηματίσει μαύρη τρύπα Schwarzschild. Επομένως, όταν στην παραπάνω συνθήκη ισχύει η ισότητα ο παράγοντας Schwarzschild αλλάζει. Επίσης, παρατηρούμε από την εξίσωση (5) ότι η κλίση της πίεσης συναρτίζεται της ακτίνα πρέπει να είναι πάντα αρνητική, για να είναι θετική η πυκνότητα ενέργειας ε και η πίεση P . Από



Σχήμα 1: Βαρυτική μάζα συναρτήσει της ακτίνας για συμπαγή αστέρα που αποτελείται από ελεύθερα νετρόνια. Εικόνα από [1] (σελ. 66)

την αρνητική κλίση καταλαβαίνουμε ότι η πίεση συνεχώς μειώνεται όσο αυξάνεται η ακτίνα r και δεν υπάρχει κάποια απότομη αυξομείωση. Εάν υπάρξει εύρος τιμών στην καταστατική εξίσωση, για το οποίο η πίεση δεν αλλάζει με την πυκνότητα ενέργειας, τότε από την υδροστατική ισορροπία απαιτείται η μάζα που αντιστοιχεί σε αυτό το εύρος τιμών να μηδενίζεται. Έτσι, η πυκνότητα ενέργειας σε συνάρτηση με την ακτίνα r , μπορεί να έχει απότομη αυξομείωση, ενώ η αντίστοιχη πίεση σε εκείνο το σημείο παραμένει ίδια.

Από το Σχήμα 1 βλέπουμε ότι η οικογένεια λύσεων ξεκινάει από δεξιά για μικρές μάζες και μεγάλες ακτίνες. Σε αυτήν την περιοχή, η κεντρική πυκνότητα ενέργειας είναι μικρή και η μάζα είναι αντιστρόφως ανάλογη με την ακτίνα εις τον κύβο, $M \cdot R^3 = \text{constant}$. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η μάζα και αντίστοιχα μειώνεται η ακτίνα, φτάνουμε σε μία μέγιστη μάζα $M_{\max} = 0,71M_{\odot}$ με ακτίνα $R = 9,1 \text{ km}$. Έπειτα από αυτό το σημείο, η καμπύλη της συνάρτησης αποκτά σπειροειδή μορφή μέχρι να φτάσει σε ένα οριακό σημείο για ασυμπτωτικά μεγάλη κεντρική πυκνότητα ενέργειας. Οι λύσεις από δεξιά μέχρι την μέγιστη μάζα είναι σταθερές και συμβολίζονται με συνεχή γραμμή, ενώ οι λύσεις μετά από αυτήν είναι ασταθείς και συμβολίζονται με διακεκομμένη γραμμή, με ορισμένες εξαιρέσεις. Στα αριστερά του διαγράμματος, βλέπουμε μία γραμμή για μαύρες τρύπες που αντιστοιχεί σε αστέρες με ακτίνες Schwarzschild.

1.4 Διαβαθμιζόμενες λύσεις TOV για συμπαγή αστέρια

Παρατηρούμε από τις εξισώσεις TOV ότι περιέχονται τρία μεγέθη που έχουν διαστάσεις, η ακτίνα r , η μάζα m και η βαρυτική σταθερά G . Επιδιώκουμε να τροποποιήσουμε την TOV έτσι ώστε να έχουμε μία αδιάστατη εξίσωση TOV. Αυτή η αδιάστατη μορφή διευκολύνει τους υπολογισμούς των διαφορικών εξισώσεων και επίσης, η διαβαθμιζόμενη εξίσωση χρειάζεται να λυθεί μόνο μία φορά. Αφού βρεθεί η γενική λύση αυτής της εξίσωσης, μπορούμε να την διαβαθμίσουμε πάλι με διαστατικά μεγέθη.

Για να αρχίσουμε να εισαγάγουμε αδιάστατες ποσότητες στην καταστατική, ορίζουμε τα παρακάτω μεγέθη:

$$P = \varepsilon_0 \cdot P' \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon' \quad (7)$$

Όπου το ε_0 είναι σταθερά με διάσταση πυκνότητας ενέργειας, η οποία είναι σε μονάδες ισοδύναμη με διάσταση πίεσης. Ως προς αυτήν την σταθερά ε_0 , επιδιώκουμε να λυθεί η εξίσωση TOV. Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, πρέπει να διαβαθμίσουμε τα μεγέθη της TOV που έχουν διαστάσεις, δηλαδή την ακτίνα r και την μάζα m :

$$r = a \cdot r' \quad m_r = b \cdot m'_r \quad (8)$$

Όπου οι συντελεστές a , b έχουν διαστάσεις και πρέπει να προσδιοριστούν. Εάν αντικαταστήσουμε τα παραπάνω στην εξίσωση TOV, θα πάρει την μορφή:

$$\frac{\varepsilon_0 \cdot dP}{a \cdot dr} = -G \frac{b m'_r \varepsilon_0 \varepsilon'}{a^2 \cdot r'^2} \left(1 + \frac{\varepsilon_0 \cdot P'}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon'} \right) \left(1 + \frac{4\pi a^3 \cdot r'^3 \varepsilon_0 P'}{b \cdot m'_r} \right) \left(1 - \frac{2G b \cdot m'_r}{a \cdot r'} \right)^{-1} \quad (9)$$

Στην παραπάνω εξίσωση παρατηρούμε ότι έχουμε πάλι τρεις παράγοντες που έχουν διαστάσεις: τα a , b και G . Για να καταλήξουμε σε αδιάστατη εξίσωση TOV, ορίζουμε τα a , b ως:

$$a = (G \cdot \varepsilon_0)^{-1/2} \quad b = (G^3 \cdot \varepsilon_0)^{-1/2} \quad (10)$$

Από τις σχέσεις (9) και (10) καταλήγουμε στην αδιάστατη μορφή της εξίσωσης TOV:

$$\frac{dP'}{dr'} = -\frac{m'_r \varepsilon'}{r'^2} \left(1 + \frac{P'}{\varepsilon'} \right) \left(1 + \frac{4\pi r'^3 P'}{m'_r} \right) \left(1 - \frac{2m'_r}{r'} \right)^{-1} \quad (11)$$

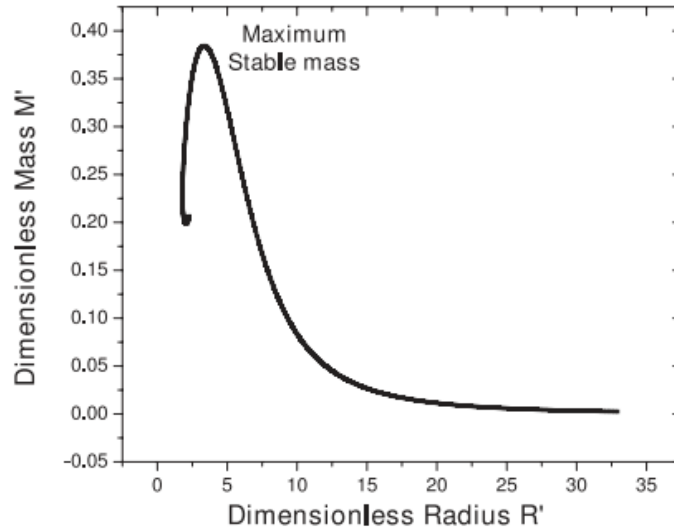
Όπως παρατηρούμε από την παραπάνω σχέση καταφέραμε να φτάσουμε σε μορφή που δεν έχει κανένα μέγεθος με διαστάσεις.

Ανάλογα, μπορούμε να διαβαθμίσουμε με τον ίδιο τρόπο της εξίσωση διατήρησης μάζας με αντικατάσταση των συντελεστών a , b στην (8):

$$r = \frac{r'}{(G \cdot \varepsilon_0)^{1/2}} \quad m_r = \frac{m'_r}{(G^3 \cdot \varepsilon_0)^{1/2}} \quad (12)$$

Έτσι καταλήγουμε στην αδιάστατη μορφή της διατήρησης μάζας:

$$\frac{dm'_r}{dr'} = 4\pi r'^2 \varepsilon' \quad (13)$$



Σχήμα 2: Σχέση μάζας - ακτίνας σε μονάδες Landau για τιμές αδιάστατης κεντρικής πυκνότητας ρ' από 10^{-8} μέχρι 10. Η καμπύλη δεν εξαρτάται από την μάζα των φερμιονίων. Εικόνα από [2] (σελ. 6)

1.5 Ελεύθερο αέριο Fermi

Στο αέριο Fermi τα φερμιόνια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και υπακούουν στην στατιστική Fermi - Dirac, κατά την οποία μόνο ένα σωματίδιο μπορεί να βρίσκεται σε μία κατάσταση. Για την καταστατική εξίσωση ελεύθερου αερίου Fermi, διαβαθμίζουμε την εξίσωση ως προς την μάζα των φερμιονίων m_f . Συγκεκριμένα, θέτουμε $P' = P/m_f^4$ και $\varepsilon' = \varepsilon/m_f^4$. Συγκρίνοντας τα δύο τελευταία με τις σχέσεις (7), παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση η σταθερά ε_0 είναι $\varepsilon_0 = m_f^4$. Η μέγιστη μάζα και η αντίστοιχη ακτίνα εκφράζονται με βάση των σχέσεων (8) και (10), οπότε ισχύει:

$$\begin{aligned} M_{max} &= M' \cdot (G^3 \cdot m_f^4)^{-1/2} = M' \cdot \frac{m_p^3}{m_f^2} \\ R_{crit} &= R' \cdot (G \cdot m_f^4)^{-1/2} = R' \cdot \frac{m_p}{m_f^2} \end{aligned} \quad (14)$$

Όπου η σταθερά m_p είναι η μάζα Planck και M_{max} , R_{crit} η Landau μάζα και Landau ακτίνα. Γενικά η Landau μάζα και ακτίνα είναι λύσεις τόσο για το κλασσικό όριο, όσο και για τις εξισώσεις TOV για συμπαγή αστέρια. Οι συντελεστές M' και R' είναι αδιάστατοι και μπορούμε να τους υπολογίσουμε με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι να λύσουμε τις αδιάστατες εξισώσεις TOV για ελεύθερο αέριο Fermi και ο δεύτερος είναι να κάνουμε παραμετροποίηση χρησιμοποιώντας γνωστές αριθμητικές τιμές για ελεύθερο αέριο νετρονίων.

Εάν υπολογίσουμε τα M' και R' για διάφορες τιμές της αδιάστατης κεντρικής πυκνότητας ρ' καταλήγουμε στο παρακάτω διάγραμμα στο Σχήμα 2. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές αδιάστατης μάζας έχουμε μεγάλες τιμές αδιάστατης ακτίνας, το οποίο συμβαίνει προφανώς για χαμηλή αδιάστατη κεντρική πυκνότητα. Με την αύξηση της αδιάστατης κεντρικής πυκνότητας, έχουμε αύξηση μάζας και

μείωση της ακτίνας, λόγω των ισχυρότερων βαρυτικών δυνάμεων. Η μάζα καταλήγει σε ένα μέγιστο έπειτα από το οποίο αρχίζει πάλι να μειώνεται. Οι αστέρες που αντιστοιχούν σε τιμές δεξιά του μεγίστου στο διάγραμμα είναι σταθεροί, ενώ οι αστέρες στις αριστερές τιμές είναι ασταθείς και καταρρέουν. Το μέγιστο αυτό είναι λογικό να υπάρχει λόγω του γεγονότος ότι η βαρυτική έλξη από την πυκνότητα ενέργειας πρέπει να αντισταθμίζεται από την φερμιονική πίεση, έτσι ώστε ο αστέρας να μην καταρρεύσει. Στο μέγιστο αυτό οι τιμές της αδιάστατης μάζας και της αδιάστατης ακτίνας είναι αντίστοιχα $M' = 0,384$ και $R' = 3,367$.

Είναι χρήσιμο να εισάγουμε τον παράγοντα C (compactness) ο οποίος εκφράζει πόσο συμπαγές είναι ένα αστέρι, και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$C = \frac{GM}{R} \quad (15)$$

Ο παράγοντας C εξαρτάται από την μάζα των φερμιονίων και είναι αδιάστατος. Αποσκοπεί στην σύγκριση της ακτίνας ενός αστέρα με την ακτίνα μαύρης τρύπας ίδιας μάζας. Προκύπτει από την γενική σχετικότητα και υποδηλώνει ότι δεν γίνεται να υπάρχουν αστέρια με αυθαίρετο ζεύγος ακτίνας - μάζας.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση που μελετάμε, για αστέρα από ελεύθερα φερμιόνια, και σύμφωνα με τα μέγιστα M' και R' που αναφέραμε παραπάνω, ο παράγοντας C έχει μέγιστο

$$C_{max} = \frac{M'}{R'} = 0,11 \quad (16)$$

Το οποίο εξαρτάται από την μάζα των φερμιονίων.

1.6 Καταστατική εξίσωση σχετικιστικού αερίου Fermi υπό όρους κενού

Γνωρίζουμε ότι η καταστατική εξίσωση για σχετικιστικά σωματίδια είναι:

$$P = \frac{1}{3}\epsilon \quad (17)$$

Η οποία, όμως, δεν είναι ευνοϊκή γιατί δημιουργεί αστάθειες στην Νευτώνεια περίπτωση και γιατί δεν συμπεριλαμβάνει καμία ποσότητα με διαστάσεις. Συνεπώς, δεν μπορούμε να ορίσουμε κάποιο ϵ_0 . Για αυτούς τους λόγους την μετατρέπουμε προσθέτοντας μία μεταβλητή με διαστάσεις:

$$P = \frac{1}{3}(\epsilon - \epsilon_0) \quad (18)$$

Με το ϵ_0 να αντισταθμίζει την ενεργειακή πυκνότητα. Έτσι καταλήγουμε σε σταθερές λύσεις για τις εξισώσεις TOV. Παρατηρούμε ότι τώρα για μηδενική πίεση έχουμε μη - μηδενική πυκνότητα ενέργειας. Για αέρια φερμιονίων ή ύλη νετρονίων η πίεση μηδενίζεται όταν μηδενίζεται και η πυκνότητα ενέργειας, ακόμα και για φερμιόνια που αλληλεπιδρούν. Εάν προσθέσουμε στην παραπάνω εξίσωση την bag σταθερά B του MIT bag μοντέλου, το οποίο θα αναλύσουμε αργότερα, τότε καταλήγουμε στην παρακάτω καταστατική εξίσωση:

$$P = \frac{1}{3}(\varepsilon - 4B) \quad (19)$$

Οπότε όπως καταλαβαίνουμε $\varepsilon_0 = 4B$. Αυτή η κατηγορία καταστατικών εξισώσεων που έχουν μηδενική πίεση για μη - μηδενική πυκνότητα ενέργειας είναι ειδική και αντιστοιχεί στους αυτοδεσμευμένους αστέρες. Οι αυτοδεσμευμένοι αστέρες, λόγω των ιδιοτήτων της ύλης τους δεν χρειάζονται την βαρύτητα για να διατηρηθούν. Σε αυτήν την περίπτωση, βρίσκουμε την μέγιστη μάζα και την αντίστοιχη ακτίνα μέσω της σταθεράς B , όμοια με την εξίσωση (14):

$$\begin{aligned} M_{max} &= M' \cdot (G^3 \cdot \varepsilon_0)^{-1/2} = 2,01 M_{\odot} \cdot \frac{(145 MeV)^2}{\sqrt{B}} \\ R_{crit} &= R' \cdot (G \cdot \varepsilon_0)^{-1/2} = 10,9 km \cdot \frac{(145 MeV)^2}{\sqrt{B}} \end{aligned} \quad (20)$$

Όπου $B^{\frac{1}{4}} = 145 MeV$. Το ε_0 δίνει την κλίμακα για την οποία η βαρυτική ενέργεια αποσταθεροποιεί το αστέρι, όταν φτάσουμε στην μέγιστη μάζα. Μέσω των παραπάνω υπολογίζουμε ότι ο μέγιστος παράγοντας compactness είναι:

$$C_{max} = \frac{G M_{max}}{R_{crit}} = \frac{M'}{R'} = 0,271 \quad (21)$$

Όπως βλέπουμε, ο παράγοντας C είναι ανεξάρτητος του B και συνεπώς και του ε_0 . Εάν συγκρίνουμε αυτήν την τιμή του παράγοντα C με την τιμή της εξίσωσης (16), παρατηρούμε ότι τα αυτοδεσμευμένα αστέρια είναι πολύ πιο συμπαγή από τα αστέρια που αποτελούνται από ελεύθερα φερμιόνια.

2 Κουάρκ Αστέρες

Οι κουάρκ αστέρες είναι αστέρες που ενώ εξωτερικά μοιάζουν με αστέρες νετρονίων, στο εσωτερικό τους τα νουκλεόνια διασπώνται σχηματίζοντας μία «σούπα» από κουάρκ - γκλουόν ύλη. Αυτή η θεώρηση είναι υποθετική και πιστεύουμε ότι μπορεί να συμβεί όταν στο πυρήνα του αστέρα αναπτύσσονται υπερβολικά μεγάλες θερμοκρασίες και πιέσεις. Οι πρώτοι που ανέφεραν την πιθανή ύπαρξη κουάρκ αστέρα ήταν οι Ivanenko και Kurdgelaidze το 1965, ενώ το 1970 ο Itoh έκανε μία πρώτη περιγραφή των ιδιοτήτων ενός τέτοιου αστέρα. Η κβαντική χρωμοδυναμική αναπτύχθηκε λίγο αργότερα, στα μέσα της δεκαετίας του 70.

2.1 Κβαντική χρωμοδυναμική

Η κβαντική χρωμοδυναμική (QCD) είναι η θεωρία που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ κουάρκ και γκλουονίων, κατά την οποία τα τελευταία κουβαλάνε φορτίο χρώματος. Τα φορτία χρώματος είναι τρία red (R), blue (B), green (G), ο συνδυασμός των οποίων μας δίνει ουδέτερο φορτίο.

Τα γκλουόνια είναι τα σωματίδια αλληλεπίδρασης των κουάρκ, έχουν μηδενική μάζα και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με μεταφορά φορτίου χρώματος. Τα κουάρκ έχουν μάζα, η οποία διαφέρει ανάλογα με το είδος: τα up και down κουάρκ είναι τα ελαφρύτερα με μάζα μερικά MeV και το αμέσως επόμενο βαρύτερο κουάρκ είναι το strange με μάζα περίπου $100MeV$. Αυτά τα τρία κουάρκ θεωρούνται τα ελαφρύτερα γιατί οι μάζες τους είναι κάτω από $200MeV$.

Τα κουάρκ δεν υπάρχουν ελεύθερα στην φύση γιατί αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με ισχυρές δυνάμεις, οι οποίες έχουν άπειρη εμβέλεια, καθώς το δυναμικό τους αυξάνει συναρτήσει της απόστασης. Συνεπώς, τα βρίσκουμε μόνο συνδεδεμένα μεταξύ τους σε αδρόνια, μέσα στα οποία το φορτίο χρώματός τους ακυρώνεται. Για αυτόν τον λόγο, η QCD είναι αλληλεπίδραση μικρής εμβέλειας, περίπου $1 fm$. Τα αδρόνια μπορούν να αποτελούνται από τρία κουάρκ (βαρυόνια), από ζεύγος κουάρκ-αντικουάρκ (μεσόνια), αλλά γίνεται να αποτελούνται και από τέσσερα και πέντε κουάρκ (συνδυασμοί βαρυονίων - μεσονίων), ή να αποτελούνται μόνο από γκλουόνια. Τα αδρόνια παίρνουν τις ιδιότητές τους από τα κουάρκ, για παράδειγμα τον κβαντικό και βαρυονικό αριθμό, το φορτίο ή ισοσπίν, την γέυση, το σπιν και την πάριτυ.

2.2 MIT bag μοντέλο

Μια θεωρία για το πως μένουν τα κουάρκ και τα γκλουόνια συνδεδεμένα μέσα στα αδρόνια, είναι ότι τόσο τα κουάρκ όσο και τα γκλουόνια βρίσκονται μέσα σε σφαίρα, το τέλος της οποίας είναι η επιφάνεια του αδρονίου. Το χρωματικό φορτίο μέσα στο αδρόνιο είναι ουδέτερο και διατηρούνται το ηλεκτρικό φορτίο και ο βαρυονικός αριθμός. Προσεγγιστικά θεωρούμε ότι τα κουάρκ είναι σωματίδια χωρίς μάζα και ο χώρος εντός της σφαίρας είναι πεπερασμένων διαστάσεων, ενώ εκτός της σφαίρας είναι απείρως μεγάλος.

Τα κουάρκ έχουν κάποια κινητική ενέργεια, συνεπώς θα υπάρχει εσωτερική πίεση. Οπότε, για να μείνουν περιορισμένα σε αυτήν την περιοχή, χρειάζεται μία εξωτερική πίεση στην επιφάνεια, την οποία ονομάζουμε παράμετρο bag B . Αυτό το μοντέλο ονομάζεται MIT bag μοντέλο και λαμβάνει υπόψη τις αλληλεπιδράσεις χωρίς διαταραχές της QCD.

Η πίεση του MIT bag μοντέλου, θα είναι αρνητική και θα αντιστοιχεί στην αρνητική πίεση του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής:

$$\varepsilon = -P + T \cdot s + \mu \cdot n \quad (22)$$

Εάν, τώρα, θεωρήσουμε ότι η θερμοκρασία T και ο αριθμός πυκνότητας n είναι μηδέν, δηλαδή βρισκόμαστε σε κενό χώρο, καταλήγουμε ότι:

$$\varepsilon_{vac} = -P_{vac} = B \quad (23)$$

Καταλαβαίνουμε ότι η παράμετρος B σχετίζεται με την πυκνότητα ενέργειας του συμπυκνώματος. Τα συμπυκνώματα κουάρκ και γκλουονίων τίκονται σε κρίσιμες θερμοκρασίες, όπως γνωρίζουμε ότι κάνουν γενικά τα συμπυκνώματα. Από δέσιμες καταστάσεις αδρονίων με την τήξη μεταβαίνουμε σε μη - δέσιμες καταστάσεις κουάρκ και γκλουονίων, δηλαδή καταλήγουμε σε ένα κουάρκ - γκλούον πλάσμα. Υπολογίζουμε από την λύση της QCD Lagrangian ότι η κρίσιμη θερμοκρασία, στην οποία θα έχουμε τήξη, είναι $T_c \approx 150 \text{ MeV}$.

2.3 Ασυμπτωτική ελευθερία

Με την αύξηση της θερμοκρασίας, πυκνότητας ή ενέργειας, η σύνδεση των κουάρκ και των γκλουονίων αρχίζει να εξασθενεί. Για απείρως υψηλές ενέργειες η σταθερά σύζευξης μηδενίζεται και τα κουάρκ δεν αλληλεπιδρούν πλέον μεταξύ τους, δηλαδή θεωρούνται ασυμπτωτικά ελεύθερα. Η ασυμπτωτική ελευθερία είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό της QCD και χρησιμοποιείται για την περιγραφή της καταστατικής εξίσωσης του κουάρκ - γκλούον πλάσμα σε υψηλές θερμοκρασίες.

Γενικά, η συνάρτηση κατανομής φερμιονίων δίνεται από την κατανομή Fermi - Dirac, ενώ για τα μποζόνια δίνεται από την Bose - Einstein. Σε μεγάλες πυκνότητες, λόγω της ασυμπτωτικής ελευθερίας, τα κουάρκ φέρονται αρκετά σαν ελεύθερα φερμιόνια. Τα γκλουόνια, όμως, είναι μποζόνια με μηδενική μάζα.

Τα γκλουόνια έχουν σπιν $s = 1$ και μπορούν να έχουν δύο είδη πόλωσης, όμοια με τα φωτόνια. Συνεπώς, οι βαθμοί ελευθερίας χρώματος θα είναι $N_c^2 - 1$, όπου N_c ο αριθμός των χρωμάτων. Από την στιγμή που στην QCD έχουμε τρία διαφορετικά χρώματα, καταλήγουμε με οκτώ γκλουόνια διαφορετικού φορτίου χρώματος. Έτσι, από την πόλωση και τον αριθμό των γκλουονίων μπορούμε να υπολογίσουμε ότι ο παράγοντας εκφυλισμού για τα γκλουόνια είναι:

$$\gamma_{gluon} = 2(N_c^2 - 1) = 2 \cdot 8 = 16 \quad (24)$$

Στα κουάρκ η εύρεση του παράγοντα εκφυλισμού είναι λίγο πιο περίπλοκη, γιατί εκτός από τα φορτία χρώματος, έχουμε και τις διαφορετικές γεύσεις κουάρκ. Τα κουάρκ έχουν σπιν $s = 1/2$ και, όπως προαναφέραμε, μπορούν να πάρουν 3 φορτία χρώματος, τα οποία διπλασιάζονται λόγω των φορτίων χρωμάτων των αντικουάρκ. Παρόλο που υπάρχουν έξι γεύσεις κουάρκ (up, down, strange, charm, top, bottom), δεν τις λαμβάνουμε όλες υπόψιν μας στις μετρήσεις. Αυτό συμβαίνει γιατί γενικά στην πίεση η συμβολή των βαρέων σωματιδίων μειώνεται εκθετικά, οπότε η κύρια συμβολή προέρχεται από σωματίδια με μικρή ή μηδενική μάζα στο όριο $m \ll T$. Επομένως, έτσι και τα

κουάρκ συνεισφέρουν στην πίεση ανάλογα με την θερμοκρασία. Για θερμοκρασίες κοντά στο $T = T_c$, τα up και down κουάρκ πληρούν την παραπάνω προϋπόθεση και συνεισφέρουν στην πίεση. Το strange κουάρκ δεν είναι αρκετά μικρότερο του T_c και τα υπόλοιπα κουάρκ είναι πολύ μεγαλύτερα του, $m \gg T$, οπότε η συνεισφορά τους μπορεί να αγνοηθεί. Ο παράγοντας εκφυλισμού των κουάρκ μπορεί να γραφτεί δύο φορές ανάλογα με το αν θα λάβουμε υπόψιν την συνεισφορά από το strange κουάρκ:

$$\gamma_{quark} = 2(2s+1) \cdot N_c \cdot N_f = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot N_f = 24 \text{ ή } 36 \quad \text{για } N_f = 2 \text{ ή } N_f = 3 \quad (25)$$

Στο όριο $m \ll T$ το όριο Stefan - Boltzmann δίνεται από το άθροισμα των πιέσεων των σωματιδίων:

$$P_{SB} = \frac{\pi^2}{90} T^4 \left(\sum_{bosons} \gamma_{i,bosons} + \frac{7}{8} \sum_{fermions} \gamma_{i,fermions} \right) \quad (26)$$

Επομένως στην περίπτωση μας, για θερμοκρασίες κοντά στην T_c , για το κουάρκ - γκλούον πλάσμα, η πίεση στο όριο Stefan - Boltzmann υπολογίζεται:

$$P_{BS} = \frac{\pi^2}{90} T^4 (16 + 10,5 \cdot N_f) = \frac{\pi^2}{90} T^4 37 \text{ ή } \frac{\pi^2}{90} T^4 47,5 \quad \text{για } N_f = 2 \text{ ή } N_f = 3 \quad (27)$$

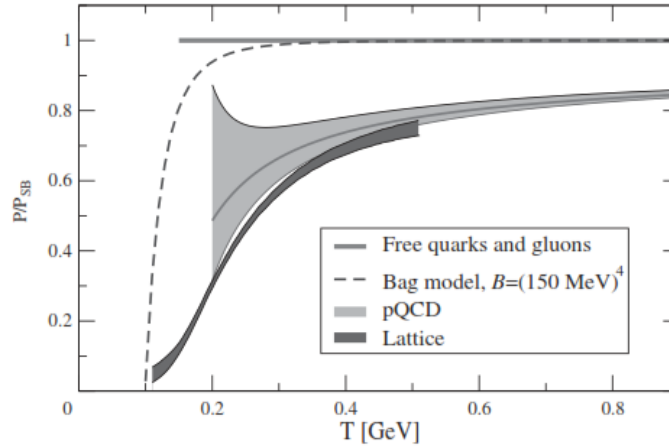
Σε θερμοκρασίες $T > \frac{m_s}{3} \approx 30 MeV$ η συνεισφορά του strange κουάρκ γίνεται σημαντική και η πίεση του κουάρκ - γκλούον πλάσμα δίνεται από τον παραπάνω τύπο για τρεις γεύσεις κουάρκ $N_f = 3$, κοντά στην T_c . Η συνεισφορά στην πίεση από το επόμενο βαρύτερο κουάρκ, το charm, θα είναι για θερμοκρασίες $T > \frac{m_c}{3} \approx 400 MeV$.

2.4 Δεδομένα πλέγματος QCD και pQCD για υψηλές θερμοκρασίες

Οι υπολογισμοί των δεδομένων πλέγματος της QCD έρχονται σε αντιπαράθεση με την παραπάνω υπόθεση. Σύμφωνα με αυτούς, η ασυμπτωτική ελευθερία δεν επιτυγχάνεται, ακόμα και για θερμοκρασίες πολύ μεγαλύτερες από την κρίσιμη, στην οποία, όπως προαναφέρθηκε τα συμπτκνώματα λιώνουν. Αντιλαμβανόμαστε, λοιπόν, ότι για το κουάρκ - γκλούον πλάσμα υπάρχει κάποια υπολειπόμενη αντίδραση που δεν έχουμε λάβει υπόψιν. Αυτήν την απόκλιση από το όριο Stefan - Boltzmann μπορούμε να την περιγράψουμε μέσω της perturbative QCD (pQCD).

Η pQCD περιγράφει την QCD, λαμβάνοντας υπόψιν ότι η σταθερά ισχυρής σύζευξης είναι μικρή όταν μελετάμε αλληλεπιδράσεις υψηλής ενέργειας ή μικρής απόστασης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μπορούμε να εφαρμόσουμε τεχνικές θεωρίας διαταραχών. Η QCD δεν είναι αρκετά αξιόπιστη, λόγω των άπειρων πιθανών αλληλεπιδράσεων. Εάν περιορίσουμε το εύρος σε μικρές αποστάσεις, η σταθερά σύζευξης γίνεται αρκετά μικρή έτσι ώστε από άπειρους όρους να καταλήξουμε σε πεπερασμένο αριθμό. Με αυτόν τον τρόπο καταφέρνουμε να έχουμε καλύτερη ακρίβεια.

Επομένως, εάν περιοριστούμε στις μεμονωμένες συνεισφορές της pQCD, βλέπουμε ότι η διαταραχή συγκλίνει όταν έχουμε θερμοκρασίες πολύ μεγαλύτερες από την T_c . Η περιγραφή των δεδομένων πλέγματος για θερμοκρασίες κοντά στην T_c μπορεί να βελτιωθεί, εάν επαναλάβουμε τον υπολογισμό της συνεισφοράς των γκλουονίων χαμηλής ροπής χωρίς διαταραχές.



Σχήμα 3: Η πίεση της κουάρκ-γκλούον ύλης συναρτίζεται της θερμοκρασίας για υπολογισμούς πλέγματος QCD, pQCD και MIT bag μοντέλο σε σύγκριση με το όριο Stefan - Boltzmann. Εικόνα από [1] (σελ. 219)

Στο Σχήμα 3 φαίνεται η πίεση σε σχέση με το όριο Stefan - Boltzmann, συναρτίζεται της θερμοκρασίας, για τους διάφορους υπολογισμούς που προαναφέραμε. Οι υπολογισμοί πλέγματος QCD είναι για τρεις γεύσεις κουάρκ. Παρατηρούμε ότι η πίεση, σε αυτήν την περίπτωση, αυξάνεται απότομα για $T = 100 - 300 \text{ MeV}$. Αυτό συμβαίνει γιατί στην QCD η κρίσιμη θερμοκρασία υπολογίζεται ότι είναι $T_c \approx 150 \text{ MeV}$. Σε αυτήν την περιοχή απεικονίζεται η μετάβαση από αδρόνια σε κουάρκ - γκλούον πλάσμα. Βλέπουμε ότι οι υπολογισμοί από pQCD είναι αρκετά κοντά σε αυτούς του πλέγματος. Η καμπύλη της pQCD ξεκινάει για $T = 200 \text{ MeV}$ με μεγάλο πλάτος, το οποίο μειώνεται όσο αυξάνεται η θερμοκρασία. Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις παρατηρούμε ότι η πίεση είναι πολύ χαμηλότερη από το όριο Stefan - Boltzmann για την ελεύθερη ύλη κουάρκ - γκλούον. Άρα, υπάρχει επιπλέον συμβολή από αλληλεπιδράσεις που δεν έχει ληφθεί υπόψιν. Σε αντίθεση, το μοντέλο MIT bag πλησιάζει πολύ καλύτερα το όριο Stefan - Boltzmann. Η καμπύλη του αυξάνει απότομα και συμφωνεί ικανοποιητικά με το όριο Stefan - Boltzmann ακόμα και σε θερμοκρασίες κοντά στην κρίσιμη T_c . Σε αυτό το μοντέλο έχουμε θεωρήσει ότι έχουμε μη - αλληλεπιδρών αέριο από κουάρκ και γκλουόνια σε κενό χώρο. Οπότε, συμπεραίνουμε ότι για την σωστή περιγραφή της καταστατικής εξίσωσης του κουάρκ - γκλούον πλάσμα, είναι σημαντικό να λάβουμε υπόψιν τις θεωρήσεις για τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων και για τον χώρο.

2.5 Ελεύθερη strange κουάρκ ύλη

Όπως αναφέραμε και πιο πάνω, τα κουάρκ φέρονται σαν ελεύθερα σωματίδια για ασυμπτωτικά υψηλές ενέργειες. Τα κουάρκ μπορούν να βρεθούν σε υψηλές ενέργειες λόγω κάποιας ενέργειας σύγκρουσης, αλλά και λόγω υψηλών τιμών πυκνότητας ή χημικού δυναμικού των βαρυονίων. Τα down και strange κουάρκ έχουν τον ίδιο βαρυονικό αριθμό και ίδιο φορτίο, οπότε έχουν και ίδιο χημικό δυναμικό. Για την κουάρκ ύλη του αστέρα η παραδοξότητα δεν διατηρείται, γεγονός που συνδέεται με την ασθενής ισορροπία, κατά την οποία όλες οι ασθενές αλληλεπιδράσεις βρίσκονται σε ισορροπία.

Για σωματίδια χωρίς μάζα σε μηδενική θερμοκρασία, η πίεση δίνεται από τον τύπο:

$$P_i = \frac{\gamma}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k = \frac{\gamma}{24\pi^2} k_{F,i}^4 \quad (28)$$

Όπου $i = u, d, s$. Γνωρίζουμε ότι για μηδενική θερμοκρασία το χημικό δυναμικό των φερμιονίων είναι ίδιο με την ενέργεια ή την ορμή Fermi $\mu_i = E_{F,i}(k_{F,i}) = k_{F,i}$. Επίσης, λόγω της μηδενικής θερμοκρασίας δεν υπάρχουν αντικουάρκ, άρα πρέπει να αφαιρέσουμε την συμβολή τους από τον παράγοντα εκφυλισμού των κουάρκ. Οπότε, ο παράγοντας εκφυλισμού θα είναι ίδιος για όλες τις γεύσεις και ίσος με $\gamma_i = (2s+1) \cdot N_c = 2 \cdot 3 = 6$.

Συνεπώς, καταλήγουμε ότι η ολική πίεση για κουάρκ χωρίς μάζα είναι:

$$P = P_u + P_d + P_s = \frac{1}{4\pi^2} \sum_i k_{F,i}^4 = \frac{1}{4\pi^2} (\mu_u^4 + \mu_d^4 + \mu_s^4) \quad (29)$$

Για κάθε γεύσης κουάρκ, υπολογίζεται ότι ο αριθμός κουάρκ ανά μονάδα όγκου, δηλαδή ο αριθμός πυκνότητας είναι:

$$n_i = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_{F,i}^3 = \frac{1}{\pi^2} \mu_i^3 \quad (30)$$

Αποδεικνύεται ότι η ενεργειακή πυκνότητα είναι ίση με την ενεργειακή πυκνότητα ενός σχετικιστικού ελεύθερου αερίου σωματιδίων.

$$\varepsilon = 3P \quad \text{ή} \quad P = \frac{1}{3} \varepsilon \quad (31)$$

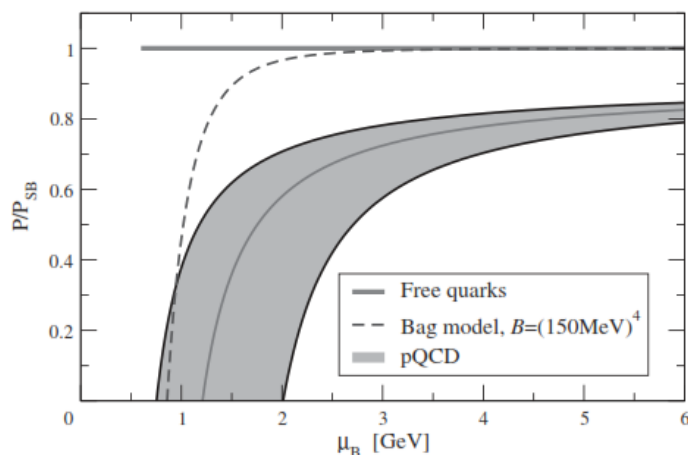
Εφόσον οι αριθμοί πυκνότητας για τα up, down και strange κουάρκ είναι ίσοι, το ολικό φορτίο είναι ουδέτερο. Σε αυτήν την περίπτωση, για όλες τις γεύσεις κουάρκ η ορμή Fermi και, συνεπώς, το χημικό δυναμικό θα είναι ίσα, για την ασθενή ισορροπία. Καταλήγουμε ότι ο συνολικός βαρυονικός αριθμός πυκνότητας ως συνάρτηση του χημικού δυναμικού των κουάρκ είναι:

$$n_B = \frac{1}{\pi^2} \mu_q^3 = 0,36 \text{ fm}^{-3} \cdot \left(\frac{\mu_q}{300 \text{ MeV}} \right)^3 \quad (32)$$

Οι αντίστοιχες ενεργειακές πυκνότητες είναι:

$$\varepsilon = 3P = \sum_i \frac{\gamma_i}{8\pi^2} \mu_i^4 = \frac{9}{4\pi^2} \mu_q^4 = 240 \text{ MeV fm}^{-3} \cdot \left(\frac{\mu_q}{300 \text{ MeV}} \right)^4 \quad (33)$$

Η πυκνότητα ενέργειας αυξάνεται με τον αριθμό πυκνότητας σε αναλογία $\varepsilon \propto n_B^{4/3}$.



Σχήμα 4: Πίεση των κουάρκ και γκλουονίων σχετικά με το όριο Stefan - Boltzmann συναρτήσει με τον βαρυονικό χημικό δυναμικό για pQCD και MIT bag μοντέλο. Εικόνα από [1] (σελ. 231)

2.6 Κουάρκ ύλη με αλληλεπιδράσεις

Στα παρακάτω αναφερόμαστε για ύλη με $N_f = 3$ με τα κουάρκ να μην έχουν μάζα. Η pQCD για μη μηδενικό χημικό δυναμικό εξαρτάται από την σταθερά δομής της QCD, την a_s . Αυτή η περίπτωση που μελετάμε είναι διαφορετική από την περίπτωση της πεπερασμένης θερμοκρασίας, κατά την οποία η διαταραχή εξαρτάται από την σταθερά ισχυρής σύζευξης.

Στο Σχήμα 4 το διάγραμμα παρουσιάζει την πίεση της κουάρκ ύλης προς το όριο Stefan - Boltzmann για μηδενική θερμοκρασία σε συνάρτηση με το βαρυονικό χημικό δυναμικό. Το πλάτος της pQCD γραμμής είναι πολύ μεγάλο για μικρό βαρυονικό χημικό δυναμικό, ενώ όσο πλησιάζουμε τα $\mu_B = 6 \text{ GeV}$ μειώνεται σημαντικά. Παρατηρούμε από το παραπάνω διάγραμμα ότι ακόμα και για χημικό δυναμικό $\mu_B = 6 \text{ GeV}$, η πίεση της pQCD δεν φτάνει το όριο Stefan - Boltzmann, με απόκλιση περίπου 20%. Όσο πηγαίνουμε σε χαμηλότερες τιμές χημικού δυναμικού η πίεση πέφτει απότομα και καταλήγει να μηδενίζεται πριν μηδενιστεί και το χημικό δυναμικό. Η κουάρκ ύλη είναι σταθερή όταν η πίεση μηδενίζεται για τιμή χημικού δυναμικού μικρότερη από $\mu_{B,c} = 930 \text{ MeV}$. Από το πλάτος της γραμμής της pQCD καταλαβαίνουμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα της για τιμές $\mu_B = 3 \text{ GeV}$ και πάνω. Συνεπώς, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την περιοχή που μας ενδιαφέρει για συμπαγείς αστέρες στην περιοχή $\mu_B = 1 - 1.5 \text{ GeV}$. Έτσι, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε αν υπάρχει σταθερή strange κουάρκ ύλη από τα δεδομένα της pQCD. Συνεπώς, για να χρησιμοποιήσουμε την καταστατική εξίσωση για την περιγραφή της κουάρκ ύλης στα κουάρκ αστέρια, πρέπει να μην την συνδιάσουμε με την pQCD.

Για την γραμμή του bag μοντέλου παρατηρούμε ότι αρχικά αυξάνεται απότομα και πολύ σύντομα πλησιάζει το όριο Stefan - Boltzmann. Βλέπουμε ότι για μεγάλες τιμές χημικού δυναμικού δεν έχουμε συμφωνία των αποτελεσμάτων για bag μοντέλο και pQCD, επειδή το bag μοντέλο σε εκείνη την περιοχή ταυτίζεται με αυτήν του ελεύθερου αερίου κουάρκ. Για αυτό δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτούσιο το bag μοντέλο για τις υψηλές τιμές χημικού δυναμικού και θα χρειαστεί να το μετασχηματίσουμε έτσι ώστε να συμφωνεί με την pQCD, έστω για το διάστημα που θέλουμε να μελετήσουμε.

Για να πέσει η τιμή της πίεσης από το όριο Stefan - Boltzmann εισάγουμε έναν συντελεστή διόρ-

θωσης το a_{eff} για τους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας. Έτσι καταλήγουμε σε μία σχέση της πίεσης συναρτήσει του χημικού δυναμικού των κουάρκ.

$$P(\mu_q) = \frac{N_f}{4\pi^2} a_{eff} \cdot \mu^4 - B_{eff} \quad (34)$$

Όπου οι ενεργές παράμετροι είναι οι a_{eff} και B_{eff} . Οι τιμές αυτών των παραμέτρων είναι $a_{eff} = 0,63$ και $B_{eff} = 200 \text{ MeV}$, έτσι ώστε η πίεση να φτάνει περίπου στα αποτελέσματα της pQCD. Θέλουμε να καταλήξουμε σε σχέση της πίεσης σε συνάρτηση με την πυκνότητα ενέργειας, οπότε χρησιμοποιούμε και τις παρακάτω θερμοδυναμικές σχέσεις για τον υπολογισμό της καταστατικής εξίσωσης των κουάρκ αστέρων.

$$n = \frac{\partial P}{\partial \mu_q} \quad \text{και} \quad \varepsilon = -P + n \cdot \mu_q \quad (35)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να καταλήξουμε στην σχέση:

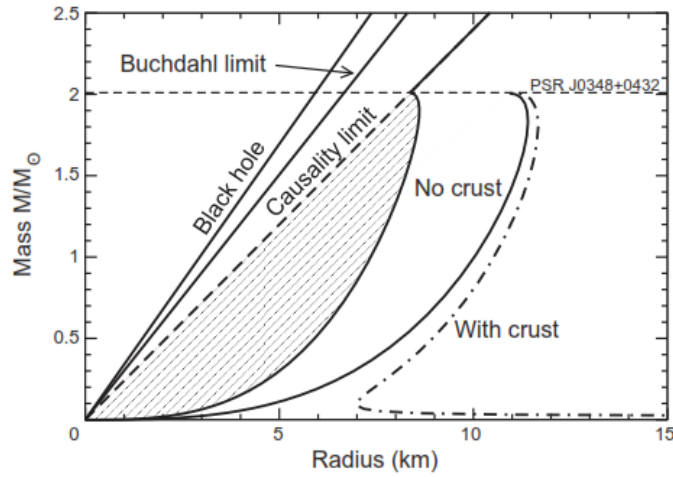
$$P = \frac{1}{3}(\varepsilon - 4B_{eff}) \quad (36)$$

Αυτή η τελική σχέση αποτελεί μία προσέγγιση της καταστατικής εξίσωσης των κουάρκ αστέρων για pQCD και παρατηρούμε ότι δεν εξαρτάται από την παράμετρο a_{eff} , άρα ούτε και από τους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας. Όσο η παράμετρος a_s δεν εξαρτάται πολύ από το χημικό δυναμικό, τόσο οι διορθώσεις της pQCD είναι μικρές. Άρα, καταλαβαίνουμε ότι ενώ στην μορφή $P = P(\mu)$ έχουμε διαφορές για την pQCD και για το bag μοντέλο, μπορούμε να καταλήξουμε σε μία έκφραση για την καταστατική εξίσωση $P = P(\varepsilon)$, η οποία είναι παρόμοια και για τις δύο περιπτώσεις.

Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ακόμα και για διαφορετικές μορφές της εξίσωσης της πίεσης σε συνάρτηση με το χημικό δυναμικό, μπορεί να καταλήξουμε σε παρόμοια σχέση μάζας - ακτίνας για έναν συμπαγή αστέρα. Το παραπάνω συμπέρασμα μας επιβεβαιώνει την αρχή της ισχυρής ισοδυναμίας, δηλαδή ότι η βαρύτητα είναι ανεξάρτητη της σύνθεσης της ύλης.

2.7 Σχέση μάζας - ακτίνας για κουάρκ αστέρες

Η απεικόνιση της σχέσης μάζας - ακτίνας χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση (36) φαίνεται στο Σχήμα 5. Το διάγραμμα είναι για τιμή της παραμέτρου $B_{eff} = 145 \text{ MeV}$ και βλέπουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση η μέγιστη μάζα φτάνει τα $2M_\odot$. Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι η καμπύλη μάζας - ακτίνας ξεκινάει από τα αριστερά προς τα δεξιά και φτάνει σε ένα μέγιστο της μάζας, στο οποίο η βαρύτητα αποκτά την ίδια σημασία με την πίεση Fermi των κουάρκ. Η σχέση που ακολουθεί η καμπύλη είναι για $M/R^3 = \text{constant}$, η οποία είναι χαρακτηριστική των αυτοδεσμευμένων αστέρων. Επίσης, από την καταστατική εξίσωση (36) φαίνεται ότι για μηδενική πίεση η πυκνότητα ενέργειας είναι μη - μηδενική και ίση με $\varepsilon = 4B_{eff}$, οπότε καταλαβαίνουμε ότι οι κουάρκ αστέρες είναι αυτοδεσμευμένοι, δηλαδή δεν χρειάζονται την βαρύτητα για να επιτευχθεί η υδροστατική ισορροπία. Στην περίπτωση ενός αστέρα νετρονίων η δέσμευση γίνεται αποκλειστικά από την βαρύτητα, επομένως χωρίς αυτήν ο αστέρας δεν θα μπορεί να διατηρηθεί και θα εκραγεί. Ενώ, σε έναν κουάρκ αστέρα η βαρύτητα απλώς ασκεί μία επιπλέον πίεση στον αστέρα.



Σχήμα 5: Μάζα συναρτήσει της ακτίνας των κουάρκ αστέρων με και χωρίς εξωτερικό φλοιό. Για τα όρια Black hole, Buchdahl, Causality ο παράγοντας compactness C είναι αντίστοιχα $1/2$, $4/9$ και $0,354$. Εικόνα από [1] (σελ. 233)

Για κουάρκ αστέρες με εξωτερικό φλοιό η καμπύλη μάζας - ακτίνας είναι διαφορετική για μικρές τιμές μάζας. Η καμπύλη ξεκινάει από τα δεξιά προς τα αριστερά, οπότε για πολύ μικρές μάζες έχουμε μεγάλες τιμές ακτίνας. Σε αυτήν την περίπτωση ο φλοιός δέχεται λιγότερη πίεση από την βαρυτική έλξη, σε σχέση με τον πυρήνα. Η σχέση που ακολουθεί σε αυτήν την περιοχή είναι για $M \propto R^{-3}$. Έπειτα, αλλάζει απότομα κατεύθυνση και ακολουθεί όμοια πορεία με την καμπύλη της περίπτωσης χωρίς φλοιό, ελαφρώς μετατοπισμένη προς τα δεξιά, έχοντας πάλι μέγιστη μάζα τα $2M_{\odot}$.

Εάν συγκρίνουμε το Σχήμα 1 με το Σχήμα 5 παρατηρούμε ότι υπάρχουν διαφορές, αλλά και ομοιότητες στα διαγράμματα για συμπαγείς αστέρες και για κουάρκ αστέρες. Για τους συμπαγείς αστέρες για μικρή μάζα έχουμε μεγάλη ακτίνα με ελάχιστο $M_{min} \approx 0,1 M_{\odot}$ με $R \approx 200 km$ και όσο αυξάνεται η μάζα, μειώνεται η ακτίνα. Αντίθετα, οι κουάρκ αστέρες έχουν μικρές ακτίνες για μικρές μάζες, χωρίς να έχουν κάποιο ελάχιστο. Παρόλα αυτά, και οι δύο περιπτώσεις έχουν μία μέγιστη μάζα, πέρα από την οποία δεν μπορεί να υπάρξει σταθερός αστέρας.

3 Strange Αστέρες

Οι strange αστέρες είναι μία ειδική κατηγορία κουάρκ αστέρων που εμπεριέχουν και strange ύλη. Όπως και με τους κουάρκ αστέρες, οι εξωτερικοί φλοιοί των strange αστέρων είναι όμοιοι με αυτούς των αστέρων νετρονίων, στο εσωτερικό τους όμως έχει σχηματιστεί σταθερή strange ύλη, λόγω ακόμα μεγαλύτερων πιέσεων. Όπως είπαμε και για τους κουάρκ αστέρες, δεν γνωρίζουμε εάν υπάρχουν όντως και η μελέτη τους είναι υποθετική.

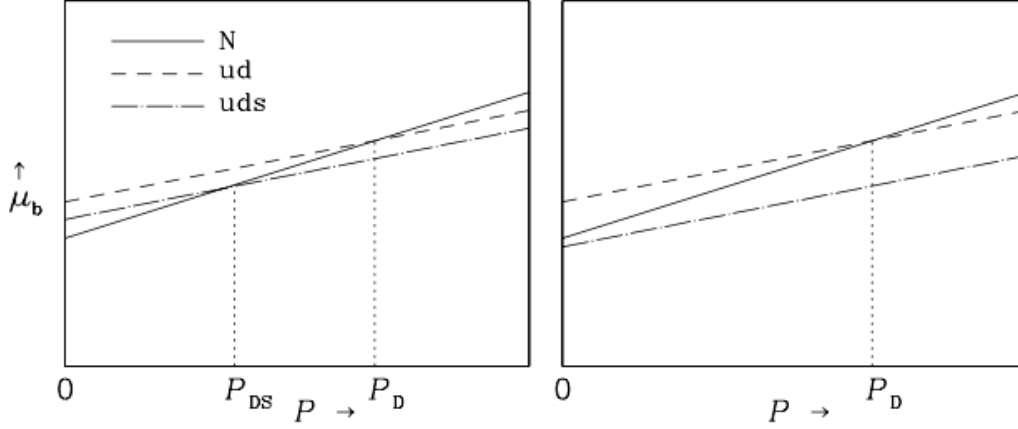
3.1 Υπόθεση για strange κουάρκ ύλη

Η μόνη πηγή μελέτης strange ύλης στην Γη είναι από τα αδρόνια με παραδοξότητα. Αυτά παρόλο που έχουν μεγαλύτερο χρόνο ζωής από τον αναμενόμενο, είναι ασταθή και κάποια στιγμή διασπώνται. Αυτό συμβαίνει επειδή η πυκνότητα ενέργειας στην γη είναι πολύ μικρή. Εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει strange ύλη στο εσωτερικό των αστέρων νετρονίων, τότε εκεί που η πυκνότητα ενέργειας είναι εξαιρετικά μεγάλη, η strange ύλη θεωρείται η πιο σταθερή μορφή ύλης.

Όταν η ύλη βρίσκεται σε τόσο μεγάλες πυκνότητες ενέργειας και θερμοκρασίες, γίνεται εκφυλισμένη. Για σταθερή ύλη, το βαρυονικό χημικό δυναμικό παίρνει την μικρότερη τιμή που μπορεί: $\mu_b = (\epsilon + P)/n_b$. Για πίεση ίση με P_D βρισκόμαστε στο κατώφλι, όπου τα u , d κουάρκ από δέσμες καταστάσεις, μεταβαίνουν σε μη - δέσμες για πιέσεις πάνω από P_D , καθώς τα βαρυόνια είναι πλέον ασταθή. Αυτή η μετάβαση των καταστάσεων, από βαρυόνια σε κουάρκ πλάσμα γίνεται μέσω ισχυρών αλληλεπιδράσεων. Όμως, το χημικό δυναμικό μ_D μπορεί να πάρει ακόμα μικρότερη τιμή, εάν περίπου τα μισά d μετατραπούν σε s κουάρκ, μέσω ασθενούς αλληλεπιδράσης. Με αυτήν την αλλαγή μπορούμε να καταλήξουμε σε μία πίεση P_{DS} , μικρότερη της P_D , η οποία είναι το κατώφλι στο οποίο η ύλη uds γίνεται πιο σταθερή από την βαρυονική της μορφή. Έτσι, η strange ύλη αποτελείται από περίπου ίσο αριθμό u , d και s κουάρκ και ένα μικρό αριθμό ηλεκτρονίων για να επιτευχθεί η ουδετερότητα του ηλεκτρικού φορτίου.

Από το Σχήμα 6 βλέπουμε πως συμπεριφέρεται το βαρυονικό χημικό δυναμικό για πιέσεις που πλησιάζουν το μηδέν $P \rightarrow 0$, για βαρυονική, ud και strange uds ύλη. Στο αριστερό διάγραμμα παρουσιάζεται η προκαθορισμένη περίπτωση, κατά την οποία για πιέσεις που είναι πολύ κοντά στο μηδέν, η ύλη είναι βαρυονική και δεν περιέχει το s κουάρκ. Αυτό το μοντέλο αποτυπώνεται στην βασική κατάσταση του κρυστάλλου ^{56}Fe . Στα δεξιά παρουσιάζεται η υπόθεση για την strange ύλη, κατά την οποία η ύλη uds είναι πιο σταθερή από την βαρυονική ακόμα και για μηδενική πίεση. Σύμφωνα με αυτήν την υπόθεση η uds ύλη σχηματίζει βαριές «σταγόνες», τα παραδοξόνια, τα οποία για μηδενική πίεση έχουν μικρότερη ενέργεια ανά βαρυόνιο από τον Fe . Συνεπώς, συμπεραίνουμε από αυτό το σχήμα, καθώς και από πειραματικά δεδομένα ότι για χαμηλές πιέσεις η ud ύλη είναι ασταθής στην μετατροπή της σε νουκλεόνια. Αυτό συμβαίνει γιατί η διαδικασία αυτή γίνεται μέσω ισχυρών αλληλεπιδράσεων, όπως προείπαμε, μέσα σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα περίπου 10^{-22} , ενώ ο χρόνος ζωής των παραδοξονίων είναι λίγο μεγαλύτερος από 10^{-4} .

Η strange ύλη, τόσο για ένα μικρό της κομμάτι, όσο και για έναν strange αστέρα, είναι αυτοδεσμευμένη λόγω των QCD αλληλεπιδράσεων και την καύση των συστατικών που δεν την ευνοούν ενεργειακά. Καθώς πηγαίνουμε προς την επιφάνεια του strange αστέρα και η πίεση τείνει να μηδενιστεί, η ύλη δεν μπορεί να διαλυθεί αυθαίρετα. Άρα, για την δέσμευση ενός strange αστέρα η βαρύτητα δεν είναι απαραίτητη, σε αντίθεση με έναν συνηθισμένο αστέρα νετρονίων. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η strange κουάρκ ύλη υδροδυναμικά συμπεριφέρεται ως ένα υγρό με επιφανειακή τάση.



Σχήμα 6: Γραφική παράσταση του χημικού βαρυονικού δυναμικού συναρτήσει της πίεσης βαρυονικής ύλης N. Αριστερά η βασική κατάσταση του ^{56}Fe για μηδενική πίεση. Δεξιά η βασική κατάσταση δέσμιας uds ύλης για μηδενική πίεση. Εικόνα από [3] (σελ.409)

3.2 Bag μοντέλο με αλληλεπιδράσεις strange κουάρκ και QCD

Το θερμοδυναμικό δυναμικό ανά μονάδα όγκου είναι:

$$\Omega_Q = \Omega_q + B \quad (37)$$

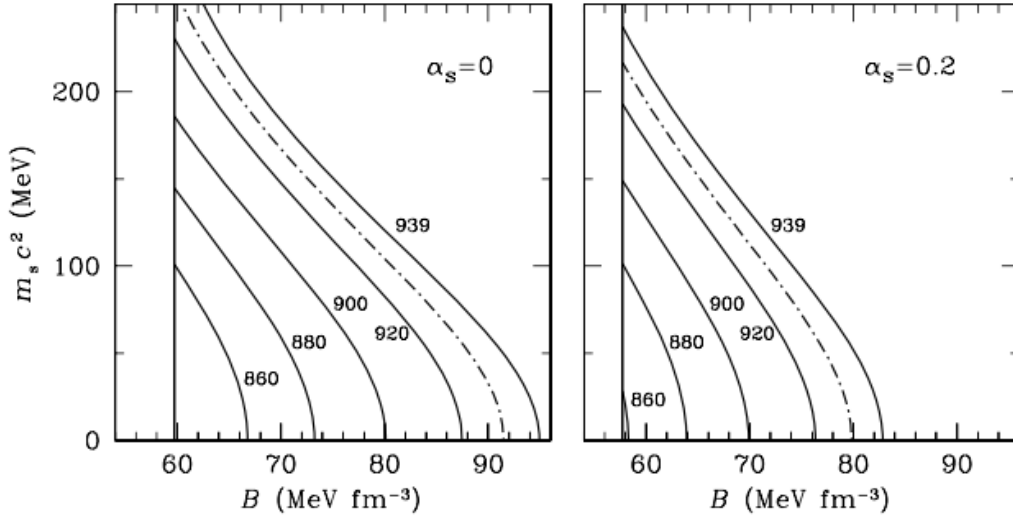
Όπου Ω_q είναι η συνεισφορά από τα κουάρκ και το B η συνεισφορά από ενέργεια κενού. Μπορούμε να υπολογίσουμε το Ω_q από επανακανονικοποίηση της σταθεράς σύζευξης a_s για pQCD, σε μεγάλες πυκνότητες. Η τιμή της επανακανονικοποιημένης a_s μειώνεται, όσο αυξάνεται ο μέσος όρος των ενεργειών των κουάρκ. Συνεπώς, περιοριζόμαστε σε αρκετά μικρές τιμές της a_s . Παρόλα αυτά, για προσέγγιση χαμηλής τάξης η a_s δεν χρειάζεται να επανακανονικοποιηθεί και η τιμή της είναι $a_s = 0, 2$.

Τα u και d κουάρκ θεωρούνται ότι έχουν μηδενική μάζα. Όμως η μάζα του s κουάρκ χρειάζεται επανακανονικοποίηση. Η μάζα του s κουάρκ είναι $m_s c^2 = 100 \text{ MeV}$ και μέσω αυτής καταλήγουμε στην επανακανονικοποιημένη $m_s \approx 200 \text{ MeV}/c^2$.

Στο Σχήμα 7 απεικονίζονται οι ταυτόχρονες συσχετίσεις των a_s , m_s , και B σε διάγραμμα. Οι διακεκομμένες γραμμές αναφέρονται σε κρύσταλλο ^{56}Fe (930, 4 MeV). Η περιοχή ανάμεσα στην κάθετη γραμμή, αριστερά του σχήματος, μέχρι την διακεκομμένη γραμμή, απεικονίζει την σταθερή strange κουάρκ ύλη. Δεξιά της διακεκομμένης γραμμής απεικονίζεται η uds ύλη, η οποία είναι ασταθής και διασπάται. Όπως καταλαβαίνουμε, για κάθε τιμή της m_s έχουμε ένα διάστημα τιμών του B (B_{min} έως B_{max}) για το οποίο η strange ύλη είναι σταθερή. Η περιοχή αριστερά της κάθετης γραμμής που αντιστοιχεί στο B_{min} , δεν έχει strange κουάρκ και η προτιμότερη μορφή ύλης είναι η ud ύλη, και όχι τα κανονικά νουκλεόνια.

Παρατηρούμε από τα διαγράμματα πως επηρεάζονται μεταξύ τους τα a_s , m_s και B . Με την αύξηση της τιμής του m_s , το εύρος τιμών του B στενεύει σημαντικά. Η αλλαγή τιμής της a_s από μηδέν σε 0, 2, στο αριστερό και στο δεξί διάγραμμα αντίστοιχα, επίσης στενεύει το εύρος τιμών του B και επιπλέον μειώνει τις τιμές των B_{min} και B_{max} .

Συνεπώς, το bag μοντέλο είναι ικανό να προβλέψει το εύρος τιμών των B και m_s για strange ύλη, η



Σχήμα 7: Διαγράμματα για μη αλληλοεπιδρώντα κουάρκ (αριστερά) και για αλληλοεπιδρώντα κουάρκ με $a_s = 0, 2$ (δεξιά). Οι γραμμές απεικονίζουν την ενέργεια ανά μονάδα βαρυονικού αριθμού για strange κουάρκ ύλη σε μηδενική πίεση. Εικόνα από [3] (σελ. 415)

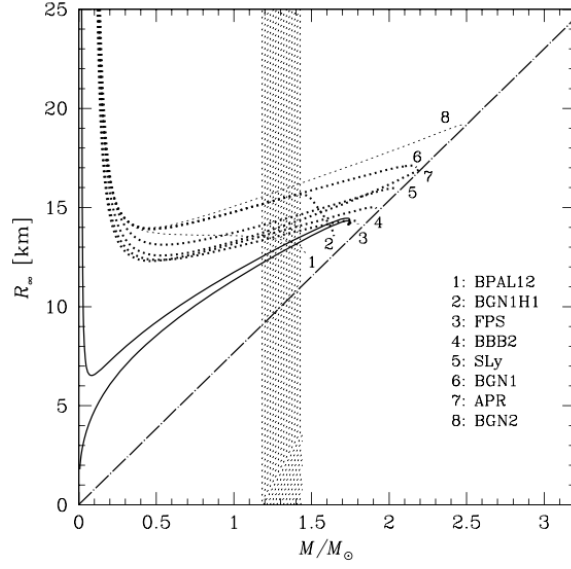
οποία θεωρείται η πραγματική βασική κατάσταση της ψυχρής, πυκνής ύλης σε μηδενική πίεση.

3.3 Γραμμική προσέγγιση της καταστατικής εξίσωσης strange ύλης

Η γραμμική προσέγγιση περιγράφει αρκετά καλά διάφορα μοντέλα strange ύλης, όμως έχει εξαιρετική ακρίβεια συγκεκριμένα για το MIT bag μοντέλο. Στην καταστατική εξίσωση strange κουάρκ ύλης, έχουμε μηδενική πίεση για $\rho < \rho_s$, όπου $\rho_s = 4B/c^2$. Για πυκνότητες λίγο μεγαλύτερες από ρ_s , η καταστατική εξίσωση έχει γραμμική μορφή και συγκεκριμένα για MIT bag μοντέλο ισχύει ότι:

$$P \approx ac^2(\rho - \rho_s) \quad (38)$$

Όπου τα a , ρ_s είναι σταθερές που προσδιορίζουμε ανάλογα με την καταστατική εξίσωση. Όπως παρατηρούμε και από την παραπάνω εξίσωση, αυτές οι δύο παράμετροι είναι οι καθοριστικοί παράγοντες για την γραμμική εξάρτηση των P , ρ . Για συγκεκριμένη καταστατική εξίσωση το ρ_s έχει λίγο διαφορετική τιμή από την πυκνότητα επιφάνειας ρ για μηδενική πίεση. Για κουάρκ με μηδενική μάζα η μορφή της γραμμικής προσέγγισης είναι ακριβής και το $a = 1/3$. Όταν, όμως, αναφερόμαστε για πυκνότητες σταθερών strange αστερών, για $m_s c^2 \leq 300 \text{ MeV}$, η γραμμική προσέγγιση περιγράφει μόνο κατά ένα ποσοστό την ακριβή καταστατική εξίσωση. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε μοντέλα strange αστερών, με μάζες $M \leq 0,3 M_\odot$, που οι παράμετροί τους συμπίπτουν καλύτερα κατά 1% σε σύγκριση με άλλα μοντέλα που χρησιμοποιούν την ακριβή καταστατική εξίσωση.



Σχήμα 8: Φαινομενική ακτίνα συναρτήσει της βαρυτικής μάζας M . Η πάνω κανονική γραμμή αναφέρεται σε strange αστέρες με φλοιό και η κάτω κανονική γραμμή σε strange αστέρες χωρίς φλοιό. Οι διακεκομμένες γραμμές αναφέρονται σε μοντέλα αστέρων νετρονίων. Η ευθεία με τελεία και παύλα παρουσιάζει το χαμηλότερο όριο της φαινομενικής ακτίνας για δεδομένη βαρυτική μάζα M . Εικόνα από [3] (σελ. 436)

3.4 Φαινομενική ακτίνα για strange αστέρες

Όπως για τους αστέρες νετρονίων έτσι και για τους strange αστέρες, η φαινομενική ακτίνα έχει διαφορά από την περιφερειακή ακτίνα, η οποία αυξάνεται με την αύξηση της βαρυτικής μάζας M . Μεταξύ των φαινομενικών ακτίνων των αστέρων νετρονίων και των strange αστέρων υπάρχουν σημαντικές διαφορές, από τις οποίες θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε εάν ο αστέρας που παρατηρούμε πρόκειται για strange αστέρα. Για τους αστέρες νετρονίων η φαινομενική ακτίνα έχει πάντα ελάχιστο στα 12 km . Για τους strange αστέρες χωρίς φλοιό, όμως, δεν υπάρχει ελάχιστο: φτάνουν και χαμηλότερα των 12 km , όπως φαίνεται και στο διάγραμμα στο Σχήμα 8.

Οι καμπύλες των φαινομενικών ακτίνων των strange αστέρων έχουν υπολογιστεί από το MIT bag μοντέλο και των αστέρων νετρονίων από διάφορες καταστατικές εξισώσεις, οι οποίες αναγράφονται πάνω στο διάγραμμα. Παρατηρούμε, όπως προείπαμε, ότι η φαινομενική ακτίνα ενός strange αστέρα αυξάνεται με την αύξηση της μάζας M , εκτός από ένα μικρό διάστημα κοντά στο M_{max} , στο οποίο αρχίζει και μειώνεται ελαφρώς μέχρι να σταματήσει. Το διάγραμμα για τους strange αστέρες είναι ίδιο με αυτό του Σχήματος 5, γεγονός που περιμέναμε αφού το Σχήμα 5 αναφερόταν σε κουάρκ αστέρες.

3.5 Μετατροπή αστέρων νετρονίων σε strange αστέρες

Η strange κουάρκ ύλη μπορεί να σχηματιστεί σε ένα αστέρα νετρονίων υπό διάφορες συνθήκες και να τον μετατρέψει σε strange αστέρα. Ένας μόνο «σπόρος» strange ύλης είναι αρκετός για να μετατρέψει τον αστέρα. Η βαρυονική ύλη μετατρέπεται σε strange κουάρκ ύλη μέσω εξώθερμης καύσης, επομένως, καταλαβαίνουμε ότι μεταβαίνουμε σε σύστημα χαμηλότερης ενέργειας.

Υπάρχουν αρκετοί μηχανισμοί οι οποίοι προκαλούν αυτήν την μετατροπή. Η μετατροπή μπορεί να γίνει αν στο εσωτερικό του αστέρα νετρονίων εμφανιστεί παραδοξόνιο από τις κοσμικές ακτίνες. Διαφορετικά, μπορεί να δημιουργηθεί, λόγω μεγάλης συμπίεσης της ύλης, στο κέντρο αστέρων νετρονίων με δίσκο συσώρευσης ή πάλσαρ που περιστρέφονται. Επιπλέον, μπορεί να δημιουργηθεί λόγω των μεγάλων θερμοκρασιών και πυκνοτήτων, αλλά και των μεγάλων θερμικών διακυμάνσεων που υπάρχουν στον πυρήνα ενός καινούργιου αστέρα νετρονίων. Συνεπώς, καταλαβαίνουμε ότι μεμονωμένα νουκλεόνια δεν μετατρέπονται αυθόρμητα σε σταθερή strange κουάρκ ύλη, γιατί είναι κατάσταση υψηλότερης ενέργειας για χαμηλό βαρυονικό αριθμό.

Αφού εμφανιστεί το πρώτο παραδοξόνιο μέσα σε έναν αστέρα νετρονίων, είναι ικανό να μετατρέψει όλη την βαρυονική ύλη, που έχει πυκνότητα μεγαλύτερη από αυτήν των σταγόνων νετρονίων, περίπου δηλαδή $4 \cdot 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$. Η πυρηνική ύλη που έχει μικρότερη πυκνότητα από την προαναφερθείσα δεν μπορεί να διεισδύσει στην περιοχή που έχει αρχίσει να δημιουργείται η strange ύλη, λόγω του φράγματος του Κουλόμπ. Μια σταγόνα νετρονίων δημιουργείται όταν τα νετρόνια προτιμούν ενεργειακά να βγουν από τον πυρήνα τους και να είναι πλέον ελεύθερα. Με αυτόν τον τρόπο το εξωτερικό στρώμα του φλοιού ενός αστέρα νετρονίων δεν μπορεί να μετατραπεί σε strange ύλη, επειδή έχει πυκνότητες κάτω από αυτήν των σταγόνων νετρονίων.

Η ταχύτητα με την οποία γίνεται αυτή η μετατροπή μπορεί να υπολογιστεί και βρίσκεται ως συνάρτηση της θερμοκρασίας του αστέρα και της ελάχιστης παραδοξότητας που χρειάζεται για την διασφάλιση της σταθερότητας της παραδοξότητας. Η ταχύτητα αυτή καθορίζει εάν το τελικό strange αστέρι θα έχει έναν λεπτό φλοιό ή αν θα έχει μία επιφάνεια strange ύλης χωρίς φλοιό. Ο χρόνος μετατροπής τ_{conv} προσδιορίζεται από τον ρυθμό ασθενής αλληλεπίδρασης, ο οποίος κυρίως αποτελείται από την ασθενή αλληλεπίδραση μετατροπής του down κουάρκ σε strange:

$$u + d \rightarrow u + s$$

Ο χρόνος τ_{conv} έχει μεγάλο εύρος τιμών οι οποίες ξεκινάνε από 0,1 s μέχρι και μερικά λεπτά. Η τιμή αυτή εξαρτάται από διάφορους παραμέτρους, όπως η θερμοκρασία του αστέρα, η καταστατική εξίσωση της βαρυονικής ύλης και άλλες παραμέτρους της strange κουάρκ ύλης. Παρόλα αυτά, υπάρχει και η θεώρηση ότι σε ένα καινούργιο αστέρι νετρονίων, όπου η περιοχή καύσης είναι ασταθής υδροδυναμικά εξαιτίας των αναταράξεων, ο ρυθμός μετατροπής επιταχύνεται σημαντικά και ο χρόνος μετατροπής φτάνει περίπου $\tau_{conv} \sim 0,1 \text{ ms}$. Σε αυτήν την περίπτωση, λόγω των γρήγορων εκρήξεων, τα εξωτερικά στρώματα εκτινάσσονται και μένει μόνο ένας strange αστέρας χωρίς φλοιό. Μια πιο πρόσφατη θεωρία έρχεται σε σύγκρουση με την προηγούμενη και αναφέρει ότι ο χρόνος μετατροπής ενός αστέρα νετρονίων σε strange αστέρα είναι $\tau_{conv} \sim 10 \text{ ms}$. Αιτιολογεί ότι η καύση της αδρονικής ύλης σε strange κουάρκ ύλη είναι ισχυρή διαδικασία αποφλοιώσης, οπότε παρόλο που η περιοχή καύσης είναι ασταθής, μεταβαίνει γρήγορα στον πυρήνα του βαρυονίου.

Θεωρητικά μπορούμε να ανιχνεύσουμε αυτήν την μετατροπή παρατηρώντας κάποια απελευθέρωση ενέργειας περίπου 1058 MeV . Στους αστέρες φαίνεται ως διαφορετικές φωτεινότητες για διαφορετικά στάδια της ζωής του αστέρα, ενώ στους πάλσαρ ως μεγάλο σφάλμα στις συχνότητες που λαμβάνουμε.

3.6 Μετατροπή κατά διάφορα στάδια εξέλιξης των αστέρων νετρονίων

Όπως προαναφέρθηκε, υπάρχουν διάφοροι μηχανισμοί μετατροπής αστέρων νετρονίων σε strange αστέρες, όμως έχουμε και ποιοτικές διαφορές ανάλογα σε ποιο στάδιο αστρικής εξέλιξης βρίσκεται

ο αστέρας νετρονίων. Παρακάτω αναφέρονται οι μετατροπές για σουπερνόβα, για ζεστούς αστέρες νετρονίων και για κρύους αστέρες νετρονίων.

Σουπερνόβα είναι οι εκρήξεις που συμβαίνουν στο τελικό στάδιο της ζωής ενός αστέρα, οι οποίες εκτοξεύουν τα εξωτερικά στρώματα του αστέρα στο διάστημα, αφήνοντας πίσω έναν πυρήνα που έχει καταρρεύσει, ο οποίος στην συνέχεια θα σχηματίσει έναν αστέρα νετρονίων ή μία μαύρη τρύπα. Η κατάρρευση αυτή γίνεται σε χρόνο περίπου $4ms$, ο οποίος είναι αρκετά πιο γρήγορος από τον χρόνο μετατροπής. Η θερμοκρασία ενός σουπερνόβα μπορεί να φτάσει μέχρι και ένα δισεκατομμύριο Kelvin, ενώ αμέσως μετά την κατάρρευση η θερμοκρασία του αστέρα πέφτει. Η μετατροπή της ύλης σε strange μπορεί να ξεκινήσει σε μία μικρή περιοχή του πυρήνα του αστέρα και μέσα σε ένα λεπτό έως μία μέρα να φτάσει ως ακτίνα $10km$, μετατρέποντας όλον τον αστέρα νετρονίων. Από την μετατροπή αυτή απελευθερώνεται ενέργεια, η οποία ακτινοβολείται ως φωτόνια, ζεύγος $e^+ e^-$, και νεutrino, όμως σε αυτό το στάδιο μόνο τα τελευταία καταφέρνουν να ξεφύγουν. Υπάρχει πιθανότητα λόγω των μεγάλων πυκνοτήτων του πυρήνα σε αυτήν την κατάσταση, η ύλη να περάσει από μία μεταβατική φάση ύλης κουάρκ δύο γεύσεων. Τότε, η μετατροπή γίνεται σε χρονικό διάστημα της κλίμακας των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Η ενέργεια που απελευθερώνεται προστίθεται στην έκρηξη.

Οι αστέρες νετρονίων μόλις σχηματίζονται έχουν υπερβολικά υψηλές θερμοκρασίες, οι οποίες μειώνονται αργά. Για ζεστούς αστέρες νετρονίων, αναφερόμαστε σε αστέρες που δεν έχει περάσει αρκετός καιρός από την στιγμή δημιουργίας τους. Οι θερμοκρασίες των επιφανειών τους έχουν εύρος περίπου από 10^5 έως $10^6 K$, ενώ στο εσωτερικό τους μπορούν να έχουν θερμοκρασίες μέχρι και περίπου $10^8 K$. Σε αυτήν την περίπτωση η ταχύτητα μετατροπής μπορεί να είναι από $20 km/s$ έως $5 m/s$. Η ταχύτητα αυτή είναι πολύ αργή σε σχέση με την ταχύτητα του ήχου, επομένως η μετατροπή ενός ζεστού αστέρα νετρονίων σε strange αστέρα γίνεται πολύ αργά. Έτσι, ο αστέρας προλαβαίνει να προσαρμοστεί στην αλλαγή της πυκνότητας. Οι περιοχές με μικρότερη πυκνότητα από αυτήν των σταγόνων νετρονίων δεν μετατρέπονται σε strange ύλη και ο τελικός strange αστέρας έχει έναν λεπτό φλοιό.

Μια πιο συγκεκριμένη περίπτωση είναι οι πάλσαρ, οι οποίοι είναι αστέρες νετρονίων με μεγάλη ταχύτητα περιστροφής και ισχυρό μαγνητικό πεδίο. Οι πάλσαρ εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία σε μορφή περιοδικών παλμών, που μπορούμε να παρατηρήσουμε. Η μετατροπή τέτοιων αστέρων μπορεί να παρατηρηθεί ως κάποιο σφάλμα στην περίοδό τους. Το σφάλμα αυτό είναι διαφορετικό από τα υπόλοιπα σφάλματα που μπορεί να παρατηρήσουμε για διάφορους λόγους και συμβαίνει μόνο μία φορά, σε αντίθεση με τα άλλα που επαναλαμβάνονται. Μέσω αυτού το σφάλματος μπορούμε να προσδιορίσουμε την καταστατική εξίσωση του αστέρα πριν την μετατροπή και συγχρόνως να καταλάβουμε ότι στο εσωτερικό του έχει αρχίσει να σχηματίζεται strange ύλη. Αφού ολοκληρωθεί η μετατροπή, αλλάζει η περίοδος περιστροφής του αστέρα, αλλά και η ροπή αδράνειάς του, η οποία μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί ανάλογα με το τι καταστατική εξίσωση έχει ο αστέρας. Ο χρόνος που χρειάζεται για αυτήν μπορεί να πάρει από $0,5s$ έως $30 min$.

Οι κρύοι αστέρες νετρονίων είναι αστέρες νετρονίων οι οποίοι με το πέρασμα των χρόνων έχουν χάσει μεγάλο μέρος της αρχικής τους θερμοκρασίας. Σε αυτό το στάδιο φτάνουν αστέρες μεγαλύτεροι από 10^7 χρόνια και η θερμοκρασία τους είναι πλέον μικρότερη από $10^5 K$. Οι ακτινοβολία τους από νεutrino αλλάζει και γίνεται φωτόνια, καθώς πλέον είναι πιο ευνοϊκή ενεργειακά. Για την μετατροπή ενός κρύου αστέρα νετρονίων σε strange οι ταχύτητες κυμαίνονται από $5 km/s$ έως $2 \cdot 10^4 km/s$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε αυτήν την μεταβολή από έκρηξη ακτίνων γάμμα.

Στην ηλικία των κρύων αστέρων νετρονίων οι πάλσαρ θεωρούμε ότι έχουν «σβήσει». Είναι δύσκολο να τα εντοπίσουμε, αφού η ενέργειά τους έχει χαθεί στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με αποτέλεσμα την επιβράδυνση τους.

4 Βαρυτικά κύματα

Κάθε σώμα στο σύμπαν παραμορφώνει τον χωροχρόνο, λόγω της μάζα του. Όμως, κάθε μάζα στο σύμπαν επιταχύνεται, οπότε η διαταραχή δεν φτάνει σε όλα τα σημεία του χώρου ταυτόχρονα. Για αυτό δημιουργούνται βαρυτικά κύματα, τα οποία διαδίδονται στον χωροχρόνο αντίστοιχα με τον τρόπο που διαδίδονται οι ρυτιδώσεις στην επιφάνεια ήρεμης θάλασσας, όταν πλεύσει ένα σκάφος. Δηλαδή, οι κυματισμοί του χωροχρόνου διαδίδονται από την πηγή, που τους προκαλεί, προς τα έξω. Η διάδοση αυτή γίνεται με την ταχύτητα του φωτός.

Η ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων είναι αρκετά δύσκολη, καθώς έχουν μικρό εύρος και ο θόρυβος του σήματος μπορεί να το επικαλύψει. Αυτό συμβαίνει γιατί η απόσταση της πηγής τους από την Γη είναι υπερβολικά μεγάλη. Οι συχνότητες του φάσματος των βαρυτικών κυμάτων εκτείνονται από 10^{-7} έως 10^{11} Hz. Από την στιγμή που τα βαρυτικά κύματα είναι τόσο ασθενή και εύκολα επικαλύπτονται, μπορούμε να τα ανιχνεύσουμε μόνο από φαινόμενα που σχετίζονται με ουράνια σώματα πολύ μεγάλων μαζών. Πηγές ανιχνεύσιμων βαρυτικών κυμάτων αποτελούν τα δυαδικά αστρικά συστήματα λευκών νάνων, αστέρων νετρονίων και μαύρων τρυπών.

4.1 Συγχώνευση αστέρων νετρονίων

Τα αποτελέσματα μίας τέτοιας συγχώνευσης κατέγραψαν τα παρατηρητήρια βαρυτικών κυμάτων LIGO και Virgo το 2017. Εντόπισαν έναν παλμό βαρυτικών κυμάτων και μία σύντομη έκρηξη γάμμα ακτινοβολίας, τα οποία συσχέτισαν με την συγχώνευση δύο αστέρων νετρονίων. Τον Οκτώβριο του 2015 εντοπίστηκε έκρηξη γάμμα ακτινοβολίας από τους ανιχνευτές LIGO, η οποία αργότερα συσχέτιστηκε με την συγχώνευση αστέρων νετρονίων που ανιχνεύθηκε το 2017. Τα βαρυτικά κύματα από το τελικό σώμα μετά την συγχώνευση των αστέρων νετρονίων δεν μπορούν να ανιχνευτούν, ωστόσο μπορούμε να συλλέξουμε πληροφορίες από την σπειροειδή τροχιά τους πριν την συγχώνευση. Από αυτές τις πληροφορίες υπολογίζουμε την καταστατική εξίσωση που είναι πιο πιθανή να εξηγήσει το σήμα που λαμβάνουμε. Έτσι, κατάφεραν να προβλέψουν ότι το σήμα που λήφθηκε το 2017 έχει τελικό αποτέλεσμα μαύρη τρύπα ή έναν πολύ μαγνητισμένο αστερά νετρονίων. Στην περίπτωση της μαύρης τρύπας μπορούμε να βρούμε τα όρια για την μέγιστη δυνατή μάζα, για οποιουδήποτε αστερές νετρονίων. Τα όρια αυτά είναι ανεξάρτητα και συμπληρωματικά ως προς τα υπάρχοντα αστρονομικά όρια.

Η πρώτη ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων ήταν τον Σεπτέμβριο του 2015, από τους LIGO. Αυτά τα βαρυτικά κύματα ήταν από συγχώνευση δύο μαύρων τρυπών και από το μοτίβο των κυμάτων οι ερευνητές μπόρεσαν να προσδιορίσουν τις μάζες των μαύρων τρυπών πριν την συγχώνευση, την μάζα της τελικής μαύρης τρύπας, καθώς και την απόσταση της. Αυτό ήταν το πρώτο φαινόμενο που παρατηρήθηκε σε τόσο μεγάλη ενεργειακή κλίμακα. Παρόλα αυτά, οι ρυτιδώσεις του χωροχρόνου που προκλήθηκαν από αυτά τα βαρυτικά κύματα, ανιχνεύθηκαν μόνο από τους εξαιρετικά ευαίσθητους ανιχνευτές.

Τα περισσότερα περιστατικά που καταγράφονται από τους ανιχνευτές είναι από συγχωνεύσεις μαύρων τρυπών. Ξεχωρίζουμε εάν πρόκειται για συγχώνευση μαύρων τρυπών ή αστέρων νετρονίων από τις αστρονομικές παρατηρήσεις που συνοδεύουν τα βαρυτικά κύματα. Στην συγχώνευση αστέρων νετρονίων, σε αντίθεση με τις μαύρες τρύπες, πέρα από τα βαρυτικά κύματα λαμβάνουμε και ακτινοβολία σε όλα τα μήκη κύματος, από ακτίνες γάμμα έως ραδιοκύματα.

Από τη μελέτη των γεγονότων ύστερα από μία κλονόβα επιβεβαιώνεται η παραγωγή βαρέων στοιχείων μέσω r - διαδικασίας, δηλαδή από ταχεία λήψη νετρονίων. Αυτό συμβαίνει λόγω της συγχώνευσης των αστέρων που εμπλουτίζει το γύρω περιβάλλον του με νετρόνια. Τα βαριά στοιχεία που δημιουργούνται είναι ασταθή και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα διασπώνται, τροφοδοτώντας έτσι την κλονόβα. Θεωρούμε ότι αυτός ο τρόπος δημιουργίας βαρέων στοιχείων είναι ο κυρίαρχος, ακόμα και για αυτά που βρίσκουμε στην Γη.

4.2 Παλιρροιακή Παραμορφωσιμότητα

Οι αστέρες νετρονίων δεν είναι σημειακά αντικείμενα, αλλά έχουν πεπερασμένες διαστάσεις που επηρεάζουν την μορφή του βαρυτικού κύματος, πριν ακόμα γίνει η συγχώνευση. Τα βαρυτικά κύματα αλλάζουν μοτίβο, λόγω των παραμορφώσεων που δέχονται οι αστέρες νετρονίων όταν βρίσκονται στην φάση που έλκονται σπειροειδώς. Για αυτόν τον λόγο χρειάζεται να εισάγουμε μία παράμετρο, την παλιρροιακή παραμορφωσιμότητα (tidal deformability), η οποία συνδέεται και με την καταστατική εξίσωση των αστέρων νετρονίων. Ονοματίζουμε έτσι αυτήν την παράμετρο γιατί δύο σώματα μεγάλης μάζας που περιστρέφονται το ένα γύρω από το άλλο παραμορφώνονται από τις παλιρροϊκές δυνάμεις. Για παράδειγμα, η Γη με την Σελήνη ασκούν η μία στην άλλη τέτοιες δυνάμεις με αποτέλεσμα να προκαλούνται οι παλίρροιες στον ωκεανό. Από την στιγμή που τα βαρυτικά κύματα ανιχνεύονται με δυσκολία, λόγω του «θορύβου» που συνοδεύει το σήμα τους, είναι επίσης δύσκολο να μετρήσουμε την παλιρροιακή παραμορφωσιμότητα.

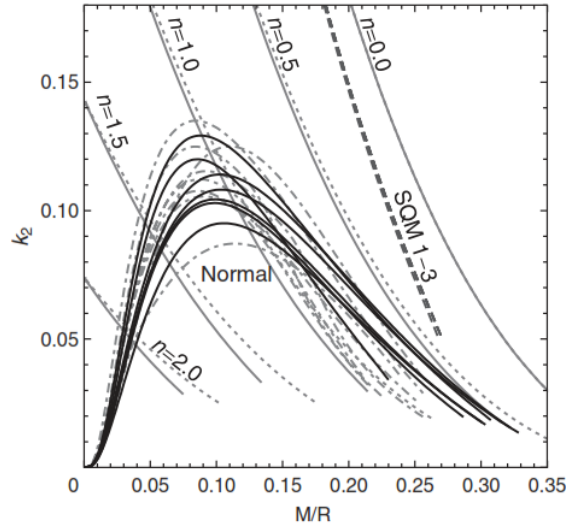
Η παλιρροιακή παραμορφωσιμότητα συμβολίζεται ως λ και δηλώνει πόσο εύκολα παραμορφώνεται το ουράνιο αντικείμενο όταν δέχεται παλιρροϊκές δυνάμεις. Για μεγάλη τιμή της λ έχουμε ένα μεγαλύτερο, λιγότερο συμπαγές αστέρι που παραμορφώνεται εύκολα, ενώ για μικρή τιμή της λ έχουμε ένα μικρότερο, πιο συμπαγές αστέρι που παραμορφώνεται με δυσκολία. Ορίζουμε την παλιρροιακή παραμορφωσιμότητα ως το πηλίκο της επαγόμενης τετραπολικής ροπής Q_{ij} προς το εξωτερικό τετραπολικό παλιρροϊκό πεδίου ε_{ij} , που προκαλεί την διαταραχή.

$$\lambda = -\frac{Q_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \quad (39)$$

Από τις διαστάσεις των παραπάνω μεγεθών και την εξίσωση που τα συνδέει με το λ , καταλήγουμε ότι το λ έχει μεγάλη εξάρτηση από την ακτίνα R του αστερά νετρονίων. Πιο συγκεκριμένα περιμένουμε το λ να είναι ανάλογο του R^5 . Επίσης, το λ συνδέεται με τον βαρυτικό αριθμό k_2 του Love για την παλιρροϊκή τετραπολική ροπή.

$$\lambda = \frac{2}{3G} k_2 R^5 \quad (40)$$

Για διάφορες καταστατικές εξισώσεις ο αριθμός k_2 έχει εύρος τιμών $0,2 - 0,3$ και δεν έχει διαστάσεις. Επομένως, ο αριθμός του Love k_2 και η ακτίνα του αστερά R εισάγουν στην παλιρροιακή παραμορφωσιμότητα λ την εσωτερική δομή του αστερά νετρονίων. Οπότε, το λ περιέχει πληροφορίες που μπορούν να προστεθούν στις μετρήσεις της ακτίνας ως μια συμπληρωματική διερεύνηση της δομής του αστερά νετρονίων. Η παλιρροιακή παραμορφωσιμότητα λ και συνεπώς και ο αριθμός Love k_2 μπορούν να προσδιοριστούν από το σήμα βαρυτικού κύματος που λαμβάνουμε κατά την φάση συγχώνευσης των αστέρων νετρονίων. Για την συνολική αλλαγή της παλιρροιακής φάσης, προσθέτουμε γραμμικά την παλιρροιακή παραμορφωσιμότητα και των δύο αστέρων νετρονίων, λ_1, λ_2 .



Σχήμα 9: Γραφική παράσταση του αριθμού Love k_2 συναρτήσει του συντελεστή compactness C για διάφορες καταστατικές εξισώσεις. Οι κανονικές γραμμές αντιστοιχούν σε πολύτροπα με πολυτροπικό δείκτη n , οι μικρές διακεκομμένες γραμμές στον νόμο ενεργειακής πυκνότητας $\rho \propto \varepsilon^{1+1/n}$, οι έντονες διακεκομμένες σε κουάρκ αστέρες με διαφορετικούς όρους στο κενό, οι έντονες γραμμές σε αστέρες νετρονίων που αποτελούνται μόνο από νουκλεόνια και λεπτόνια, οι γραμμές με τελεία και παύλα σε αστέρες νετρονίων με εξωτικά μέρη όπως υπερνόνια και κουάρκ. Εικόνα από [1] (σελ. 290)

Εάν θέλουμε την αδιάστατη μορφή της παλιρροιακής παραμορφωσιμότητας, πρέπει να διαιρέσουμε με την μάζα του αστέρα M^5 .

$$\Lambda = \frac{G \lambda}{(GM)^5} = \frac{2}{3} k_2 \frac{R^5}{(GM)^5} = \frac{2}{3} k_2 C^{-5} \quad (41)$$

Όπου $C = GM/R$, όμως θεωρούμε ότι $G = 1$ για να χρησιμοποιήσουμε βαρυτικές μονάδες και γνωρίζουμε ότι $k_2 = k_2(C)$, δηλαδή ο αριθμός Love εξαρτάται από τον παράγοντα C . Από τις παραπάνω πράξεις καταλήγουμε ότι η αδιάστατη παλιρροιακή παραμορφωσιμότητα συνδέεται με τον παράγοντα C , που εκφράζει πόσο συμπαγής είναι ένας αστέρας. Για παράδειγμα, για $C = 1/2$ το k_2 μηδενίζεται και αυτό το ζεύγος τιμών αντιστοιχεί σε μαύρη τρύπα.

Αν μελετάμε ασυμπίεστο ρευστό, ο αριθμός Love αντιστοιχεί στο ανώτερο όριο του k_2 . Αυτό σημαίνει ότι το ασυμπίεστο υγρό είναι όσο πιο άκαμπτο μπορεί να γίνει και δεν μπορεί να συμπιεστεί, παρά μόνο να ρέει λόγω του εξωτερικού τετραπολικού δυναμικού που δέχεται. Στην αντίθετη περίπτωση που το υγρό μπορεί να συμπιεστεί, σχηματίζεται ένας πυρήνας με υψηλή πυκνότητα και τριγύρω ένα εξωτερικό στρώμα χαμηλής πυκνότητας. Έτσι από τον αριθμό Love μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για πόσο ικανό είναι να συμπιεστεί ένα υγρό, δηλαδή για την ευκαμψία ή όχι της καταστατικής του εξίσωσης. Συνεπώς, από τον αριθμό Love μπορούμε να εξάγουμε λεπτομέρειες για την εσωτερική δομή των σφαιρών των υγρών που μελετάμε.

Στο Σχήμα 9 το διάγραμμα απεικονίζει πως επηρεάζεται ο αριθμός Love k_2 από τον παράγοντα C για διάφορες καταστατικές εξισώσεις. Στα πολύτροπα της μορφής $\rho \propto \varepsilon^{1+1/n}$ και στο νόμο ισχύος της ενεργειακής πυκνότητας, όπου $\rho \propto \varepsilon^{1+1/n}$, παρατηρούμε ότι ο αριθμός Love μειώνεται απότομα

με την αύξηση του παράγοντα C . Οι γραμμές των κουάρκ αστέρων και των πολύτροπων με $n = 0$, δηλαδή των ασυμπίεστων ρευστών, είναι πολύ κοντά. Όταν το C τείνει προς το μηδέν, οι τιμές του k_2 για ένα αυτοδεσμευμένο αστέρι και ένα ασυμπίεστο ρευστό συμπίπτουν. Γνωρίζουμε ότι η ύλη στους αυτοδεσμευμένους αστέρες φτάνει σε μηδενική πίεση για μη - μηδενική ενεργειακή πυκνότητα. Ένα αυτοδεσμευμένο αστέρι έχει σταθερή ενεργειακή πυκνότητα και συμπεριφέρεται όπως μία σφαίρα ασυμπίεστου ρευστού, χωρίς να χρειαστεί να προσθέσουμε διορθώσεις από την γενική σχετικότητα.

Οι γραμμές που αντιστοιχούν σε αστέρες νετρονίων, όμως, έχουν διαφορετική μορφή. Αρχικά για πολύ μικρές τιμές του C , ο αριθμός Love είναι μηδενικός. Στην συνέχεια αυξάνεται με την αύξηση του παράγοντα C , μέχρι περίπου $C = 0,1$, και έπειτα αρχίζει να μειώνεται σχεδόν αντιστρόφως ανάλογα με τον C . Για το διάστημα τιμών $C = 0,1$ έως $0,3$, ο αριθμός Love παίρνει τιμές $k_2 = 0,14$ έως $0,01$.

Παίρνουμε αυτά τα αποτελέσματα λόγω της διαβάθμισης των λύσεων του MIT bag μοντέλου. Καταλήγουμε από την σχέση διαβάθμισης να έχουμε μία καμπύλη γιατί τα k_2 και C είναι αδιάστατα. Η μορφή της γραφικής παράστασης αλλάζει εάν ο αριθμός Love απεικονιστεί συναρτήσει κάποιας άλλης ποσότητας που έχει διαστάσεις, για παράδειγμα η μάζα ή η ακτίνα.

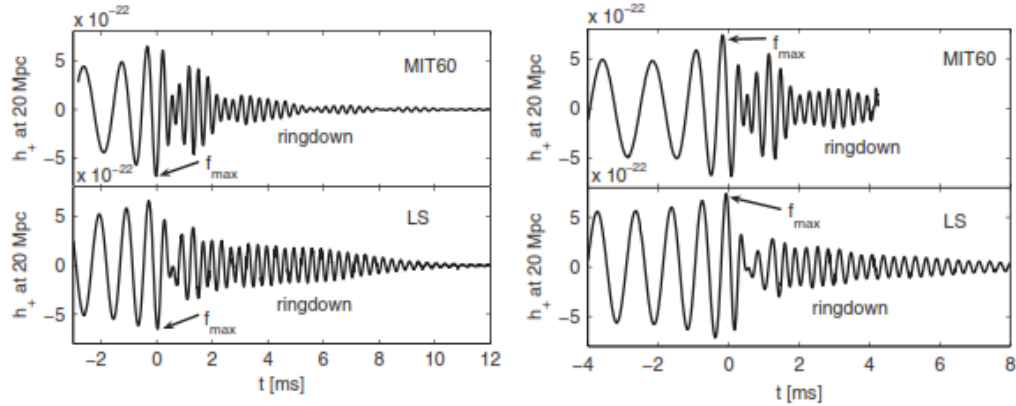
Εάν επιστρέψουμε στην σχέση (41), έχοντας τα δεδομένα από το παραπάνω διάγραμμα μπορούμε να δούμε το εξής. Αφού για το εύρος τιμών $C = 0,1 - 0,3$ ο αριθμός Love είναι αντιστρόφως ανάλογος του παράγοντα C , στην πραγματικότητα η αδιάστατη παλιρροιακή παραμορφωσιμότητα Λ είναι ανάλογη του C^{-6} . Άρα, αν γνωρίζουμε την μάζα του αστέρα, το Λ εξαρτάται ισχυρά από την ακτίνα του αστέρα R . Έτσι, υπολογίζοντας το Λ και βρίσκοντας ένα ανώτατο όριο του, καταλήγουμε στην πραγματικότητα να βρίσκουμε και ένα ανώτατο όριο για την ακτίνα του αστέρα νετρονίων R . Αυτό το όριο το βρίσκουμε αν λύσουμε την (41) ως προς R :

$$R = \left(\frac{3\tilde{\Lambda}}{2k_2(C)} \right)^{\frac{1}{5}} GM \quad (42)$$

Όπου $\tilde{\Lambda}$ η μέση αδιάστατη παλιρροιακή παραμορφωσιμότητα. Κάπως έτσι βρίσκουμε, όπως βρήκαν και οι ερευνητές, το ανώτατο όριο της ακτίνας για το σήμα που λήφθηκε από συγχώνευση αστέρων νετρονίων το 2017. Υποθέτουμε ότι οι αστέρες νετρονίων έχουν χαμηλό σπιν και μέσα από πολλούς υπολογισμούς μπορούμε να καταλήξουμε ότι η παλιρροιακή παραμορφωσιμότητα είναι $\tilde{\Lambda} = 300^{+420}_{-230}$ και η ολική μάζα $M = 2,73^{+0,04}_{-0,01} M_{\odot}$. Χρειαζόμαστε επίσης το κατώτερο όριο για τον αριθμό Love, τον οποίο παίρνουμε από το Σχήμα 9. Από το διάγραμμα αυτό καταλαβαίνουμε ότι μία πολύ καλή προσέγγιση του κατώτερου ορίου του αριθμού Love για πολλούς αστέρες νετρονίων είναι ο αριθμός Love ενός πολύτροπου με πολυτροπικό δείκτη $n = 1$. Υποθέτουμε ότι τα δύο αστέρια είναι ίσης μάζας με $C = 0,149$, έτσι ώστε να πάρουν τιμή του αριθμού Love $k_2 = 0,0776$. Το τελικό αποτέλεσμα δίνει ότι το σήμα αντιστοιχεί σε αστέρα νετρονίων με $M = 1,4 M_{\odot}$, οπότε το ανώτερο όριο της ακτίνας είναι $R \leq 13,2 - 13,7 km$. Οι απόψεις δίστανται για την μορφή του τελικού αστρικού σώματος. Είτε το τελικό σώμα είναι μαύρη τρύπα, είτε ένας μεγάλος αστέρας νετρονίων, ο οποίος θεωρούμε ότι κατέρρευσε σε μαύρη τρύπα πολύ γρήγορα.

4.3 Συγχώνευση strange αστέρων με προσομοίωση

Έχουμε αναφέρει ότι τα strange αστέρια έχουν πολλές ομοιότητες με τους αστέρες νετρονίων, για παράδειγμα στο εύρος μάζας τους και στο πόσο συμπαγή είναι. Η συχνότητα των βαρυτικών κυμάτων,

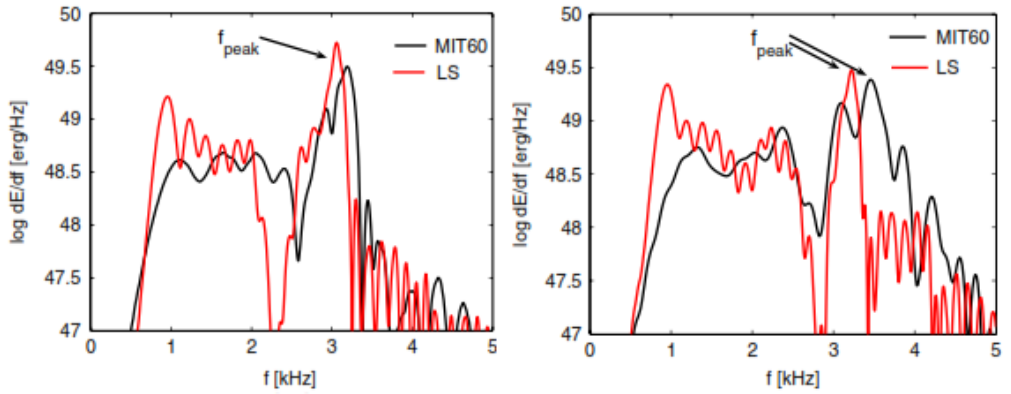


Σχήμα 10: Πλάτος βαρυτικών κυμάτων συναρτήσει του χρόνου. Τα πάνω διαγράμματα αναφέρονται στην καταστατική εξίσωση MIT60 για strange αστέρες και τα κάτω διαγράμματα στην LS για αστέρες νετρονίων. Τα αριστερά διαγράμματα είναι για δυαδικά συστήματα συγχώνευσης με $M_1 = 1,2 M_\odot$ και $M_2 = 1,35 M_\odot$ και τα δεξιά για $M_1 = 1,35 M_\odot$ και $M_2 = 1,35 M_\odot$. Εικόνες από [4] (σελ. 12-13)

όταν έχουμε σταθερή εσωτερική κυκλική τροχιά, εξαρτάται από το πόσο συμπαγής είναι ο αστέρας. Θέλουμε να δούμε εάν μπορούμε να διακρίνουμε το σήμα συγχώνευσης αστέρων νετρονίων από αυτό των strange αστέρων. Για να το κάνουμε αυτό χρειάζεται να συγκρίνουμε τα χαρακτηριστικά των βαρυτικών κυμάτων των δύο συγχωνεύσεων, μέσω προσομοιώσεων.

Στα διαγράμματα του Σχήματος 10 απεικονίζονται τα πλάτη των βαρυτικών κυμάτων συναρτήσει του χρόνου για καταστατικές εξισώσεις δυαδικών συστημάτων strange αστέρων και αστέρων νετρονίων που λήφθηκαν μέσω προσομοιώσεων. Τα αποτελέσματα αυτά είναι για συν πόλωση και υπολογίζονται κάθετα στο τροχιακό επίπεδο σε απόσταση $20 Mpc$ από την συγχώνευση. Παρατηρούμε πως αλλάζει η μορφή των διαγραμμάτων ανάλογα με τις μάζες των αστέρων και την καταστατική τους εξίσωση, δηλαδή ανάλογα με το αν είναι σύστημα αστέρων νετρονίων ή strange αστέρων. Σε όλα τα διαγράμματα έχουμε την δημιουργία ενός μεγάλου αστρικού αντικειμένου που καταρρέει σε μαύρη τρύπα. Στο δεξιά διάγραμμα βλέπουμε ότι για strange αστέρες με μάζες $M_1 = 1,35 M_\odot$ και $M_2 = 1,35 M_\odot$ το σήμα από τα βαρυτικά κύματα σταματάει. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν ξεκινάει η κατάρρευση, η προσομοίωση σταματάει και τα βαρυτικά κύματα δεν μπορούν πλέον να ληφθούν. Τα υπόλοιπα διαγράμματα, όμως, μπορούν και καταγράφουν τα βαρυτικά κύματα κατά τον σχηματισμό της μαύρης τρύπας και παρατηρούμε ότι το πλάτος του κύματος μειώνεται σημαντικά. Η περιοχή που ονομάζεται ringdown σχετίζεται με την κατάρρευση σε μαύρη τρύπα και είναι πολύ διαφορετική από την προηγούμενη περιοχή. Στο ringdown το πλάτος των βαρυτικών κυμάτων, ο χρόνος απόσβεσης μειώνονται και οι συχνότητες είναι γενικά μεγαλύτερες. Στο τέλος της φάσης που τα σώματα έλκονται σπειροειδώς, λίγο πριν από την συγχώνευση, εκεί το πλάτος γίνεται μέγιστο η συχνότητα γίνεται και αυτή μέγιστη f_{max} . Αυτή η μέγιστη συχνότητα των βαρυτικών κυμάτων είναι χαρακτηριστική για την καταστατική εξίσωση που χρησιμοποιούμε.

Για το αριστερό διάγραμμα, δηλαδή στην περίπτωση που το δυαδικό σύστημα έχει $M_1 = 1,2 M_\odot$ και $M_2 = 1,35 M_\odot$, υπολογίζεται ότι η μέγιστη συχνότητα f_{max} είναι $1,8 kHz$ για την MIT60 καταστατική εξίσωση και $1,57 kHz$ για την LS. Στην περίπτωση του δεξιού διαγράμματος όπου και τα δύο σώματα έχουν $1,35 M_\odot$ η f_{max} είναι $1,92 kHz$ για MIT60 και $1,75 kHz$ για LS. Η μειωμένη τιμή στην περίπτωση αστέρα νετρονίων είναι λογική, αφού οι αστέρες νετρονίων είναι λιγότερο συμπαγής σε σχέση με τους strange αστέρες. Παρόλα αυτά, επειδή η μέγιστη συχνότητα εξαρτάται από την



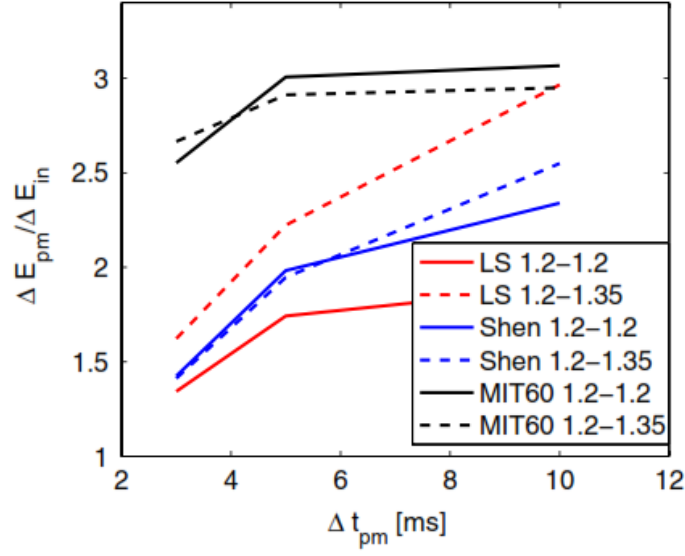
Σχήμα 11: Κατεύθυνση και πόλωση για το μέσο φάσμα φωτεινότητας των βαρυτικών κυμάτων. Το αριστερό διάγραμμα είναι για δυαδικά συστήματα συγχώνευσης με $M_1 = 1,2 M_\odot$ και $M_2 = 1,35 M_\odot$ και το δεξιά για $M_1 = 1,35 M_\odot$ και $M_2 = 1,35 M_\odot$. Η μαύρες γραμμές αντιστοιχούν στην καταστατική εξίσωση MIT60 και οι μαύρες στην LS. Εικόνες από [4] (σελ. 12-13)

καταστατική εξίσωση του αστέρα, για έναν αρκετά συμπαγή αστέρα νετρονίων και για έναν λιγότερο συμπαγή strange αστέρα που έχουν παρόμοια σχέση μάζας - ακτίνας, μέσα σε συγκεκριμένο εύρος μάζας, η μέγιστη συχνότητα από μόνη της δεν είναι αρκετή για την επιβεβαίωση της strange ύλης.

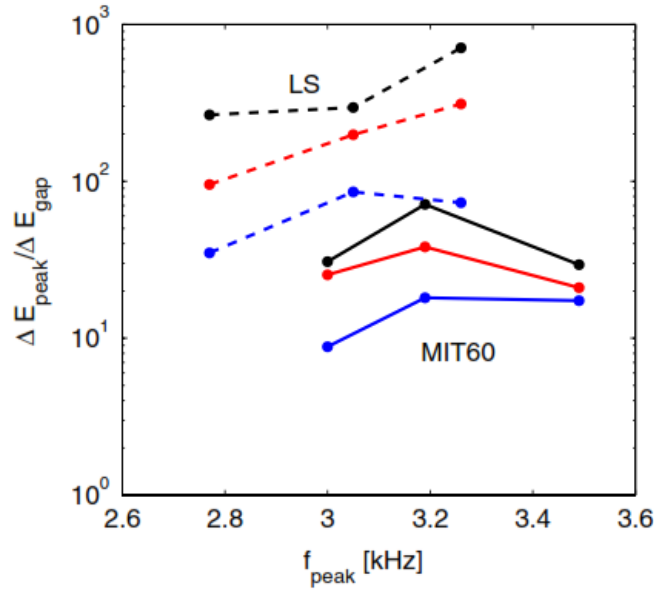
Ένα ακόμα χαρακτηριστικό των βαρυτικών κυμάτων είναι η f_{peak} που εμφανίζεται στο διάγραμμα του φάσματος φωτεινότητας του Σχήματος 11. Οι κορυφές που παρατηρούμε στα διαγράμματα αντιστοιχούν στην συχνότητα ringdown του νέου αστρικού σώματος μετά την συγχώνευση, f_{peak} . Για όλες τις περιπτώσεις, μετά την f_{peak} υπάρχει μία απότομη μείωση της συχνότητας, η οποία είναι πιο έντονη στην καταστατική εξίσωση LS για αστέρες νετρονίων. Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις ολικής μάζας τα διαγράμματα για MIT60 και LS είναι ποιοτικά παρόμοια και έχουν πολύ μικρή διαφορά στην συχνότητα κορυφής τους, η οποία είναι κοντά στα 3 kHz. Όπως και με την f_{max} , είναι δύσκολο να προσδιορίσουμε την strange ύλη χρησιμοποιώντας την f_{peak} , λόγω της μικρής διαφοράς που έχουν οι συχνότητες για τις δύο καταστατικές εξισώσεις. Καταλήγουμε ότι για την αναγνώριση της strange ύλης από την f_{peak} έχουμε το ίδιο πρόβλημα όπως και με την f_{max} . Για την εξακρίβωση αυτών των κορυφών απαιτείται καλύτερη ποιότητα στον καθορισμό του σήματος. Οπότε, για την διαχώριση των strange αστέρων από τους αστέρες νετρονίων χρειαζόμαστε επιπρόσθετα χαρακτηριστικά της φωτεινότητας των βαρυτικών κυμάτων.

Ένας τρόπος να εξάγουμε πληροφορίες χωρίς να γνωρίζουμε με μεγάλη ευκρίνεια το σήμα, είναι μέσω αναλογιών των ενεργειών του φάσματος φωτεινότητας που αντιστοιχούν οι συχνότητες των σημάτων. Ο λόγος ενεργειών που μας ενδιαφέρει είναι η ενέργεια που εκπέμπεται εντός χρόνου Δt_{pm} μετά την συγχώνευση ΔE_{pm} , προς την ενέργεια που εκπέμπεται στην φάση που τα σώματα έλκονται σπειροειδώς 3 ms πριν την συγχώνευση. Οι ενέργειες υπολογίζονται μέσω ολοκλήρωσης στο φάσμα φωτεινότητας. Ο χρόνος συγχώνευσης λαμβάνεται από τα διαγράμματα του Σχήματος 10, την στιγμή που το πλάτος των βαρυτικών κυμάτων γίνεται μέγιστο. Στο Σχήμα 12 βλέπουμε τον λόγο αυτών των ενεργειών σε συνάρτηση με τον χρόνο Δt_{pm} .

Αντίθετα από τα προηγούμενα διαγράμματα, σε αυτό παρατηρούμε ότι οι γραμμές των καταστατικών εξισώσεων των αστέρων νετρονίων και των strange αστέρων έχουν αρκετά μεγάλη απόκλιση μεταξύ τους. Ο λόγος των ενεργειών είναι μεγαλύτερος για την συγχώνευση strange αστέρων, όμως η τιμή του σταθεροποιείται μετά από περίπου $\Delta t_{pm} = 5 ms$. Για τους αστέρες νετρονίων, στα περίπου 5 ms



Σχήμα 12: Λόγος ενεργειών πριν και μετά την συγχώνευση συναρτήσει του χρόνου εκπομπής μετά την συγχώνευση. Φαίνονται οι καταστατικές εξισώσεις που αντιστοιχούν σε κάθε γραμμή, καθώς και οι μάζες των δύο σωμάτων που συγχωνεύονται. Εικόνα από [4] (σελ. 18)



Σχήμα 13: Λόγος ενεργειών για Δf πριν και μετά από την f_{peak} συναρτήσει της συχνότητας f_{peak} . Με συμπαγείς γραμμές είναι η καταστατική εξίσωση MIT60 και με διακεκομμένες η LS. Από αριστερά προς τα δεξιά τα σημεία αντιστοιχούν σε δυαδικά συστήματα με μάζες $1,2M_{\odot}$ και $1,2M_{\odot}$ (αριστερά), $1,2M_{\odot}$ και $1,35M_{\odot}$ (κέντρο), $1,35M_{\odot}$ και $1,35M_{\odot}$ (δεξιά). Οι μπλε γραμμές είναι για $\Delta f = 250\text{ Hz}$, οι κόκκινες για 100 Hz και οι μαύρες για 50 Hz . Εικόνα από [4] (σελ. 18)

μετά την συγχώνευση, ο λόγος συνεχίζει να αυξάνεται, απλώς με μικρότερο ρυθμό. Επομένως, για περιπτώσεις όπως οι συχνότητες f_{max} και f_{peak} , δεν έχουν επαρκή διάκριση, μπορούμε να διακρίνουμε εάν αναφερόμαστε σε strange αστέρα ή σε αστέρα νετρονίων σύμφωνα με τον χρόνο που χρειάζεται για να σταθεροποιηθεί ο λόγος των ενεργειών.

Ένας ακόμη τρόπος για να διαχωρίσουμε που ανήκουν οι συχνότητες f_{max} και f_{peak} είναι μέσω του κενού που υπάρχει στις συχνότητες μετά το f_{peak} στα διαγράμματα του Σχήματος 11. Όπως προαναφέρθηκε, στην περίπτωση των LS καταστατικών εξισώσεων η πτώση στις συχνότητες μετά την f_{peak} είναι πιο απότομη από αυτήν των MIT60. Χρειάζεται να ορίσουμε και μία συχνότητα f_{gap} η οποία αντιστοιχεί στην συχνότητα του τοπικού ελαχίστου κοντά στην f_{peak} . Για συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων Δf , γύρω από τις συχνότητες f_{peak} και f_{gap} , ολοκληρώνουμε το φάσμα φωτεινότητας για να βρούμε τα ΔE_{peak} και ΔE_{gap} και στην συνέχεια βρίσκουμε τον λόγο τους. Το Σχήμα 13 απεικονίζει τον λόγο αυτών των ενεργειών για διάφορες τιμές του Δf , για τις καταστατικές εξισώσεις MIT60 και LS.

Για μικρότερες τιμές του Δf η διαφορά στους λόγους αυξάνεται. Βλέπουμε, όμως, ότι για όλες τις τιμές του Δf η διάκριση των καταστατικών εξισώσεων είναι ευκρινής. Καταλήγουμε και με αυτόν τον τρόπο να έχουμε μία ξεκάθαρη διαχώριση των καταστατικών εξισώσεων MIT60 και LS, την οποία δεν θα μπορούσαμε να είχαμε μόνο από τις συχνότητες f_{max} και f_{peak} , λόγω της παρόμοιας σχέσης μάζας - ακτίνας που έχουν.

5 Υπολογισμός TOV εξισώσεων με Python

Από την καταστατική εξίσωση, θέλουμε να βρούμε την δομή του αστέρα, δηλαδή έχουμε σκοπό από τον μικρόκοσμο να υπολογίσουμε ιδιότητες του μακρόκοσμου. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις TOV υπολογίζουμε πως κατανέμεται η ύλη από το κέντρο του αστέρα έως και την επιφάνειά του.

5.1 Διαβάθμιση TOV εξισώσεων

Από την καταστατική εξίσωση και τις εξισώσεις TOV έχουμε τρεις μεταβλητές ε , P και m , που είναι όλες συναρτήσεις της απόστασης r από το κέντρο. Η καταστατική εξίσωση δίνει τη σχέση μεταξύ πίεσης και πυκνότητας ενέργειας. Οπότε, έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα δύο απλών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης για $P(r)$ και $m(r)$. Επειδή, όπως φαίνεται από τις εξισώσεις TOV, αυτές οι δύο μεταβλητές είναι περιλαμβανόμενες η μία την άλλη, δεν μπορούν να λυθούν ανεξάρτητα. Αυτές οι διαφορικές εξισώσεις λέγονται συζευγμένες.

Υπό μαθηματικούς όρους έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών. Όπως έχουμε προαναφέρει στην παράγραφο 1.3, για να λύσουμε τις εξισώσεις TOV χρειαζόμαστε αρχικές συνθήκες για το κέντρο του αστέρα, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ και $m(0) = 0$, και ολοκληρώνουμε προς τα έξω. Η διαδικασία αυτή τελειώνει όταν φτάσουμε για $P(R) = 0$, το οποίο ισχύει για την επιφάνεια του αστέρα, οπότε για ακτίνα R η μάζα πρέπει να είναι $m(R) = M$, δηλαδή ίση με την ολική μάζα του αστέρα.

Οι εξισώσεις TOV (5), (6) χρειάζονται διαβάθμιση, έτσι ώστε να μπορέσουμε να τις χρησιμοποιήσουμε για την αριθμητική ολοκλήρωση. Οπότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} m(r) &= \bar{m}(r) M_{\odot} \\ \varepsilon(r) &= \bar{\varepsilon}(r) \varepsilon_0 \\ P(r) &= \bar{P}(r) \varepsilon_0 \\ \varepsilon_0 &= 1 \text{ MeV} \cdot f m^{-3} \\ \frac{G M_{\odot}}{c^2} &= 1474 \text{ km} \\ \frac{4\pi}{M_{\odot} c^2} &= 0,7 \cdot 10^{-40} \frac{s^2}{\text{kg} \cdot \text{km}^2} \end{aligned} \tag{43}$$

Δηλαδή, στις διαβαθμισμένες εξισώσεις TOV αντικαθιστούμε κάθε φορά την μάζα σε ηλιακές μάζες, την ακτίνα σε χιλιόμετρα και την πίεση και την πυκνότητα ενέργειας σε $\text{MeV} \cdot f m^{-3}$. Έτσι, οι εξισώσεις TOV που επιλύουμε παίρνουν την μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}(r)}{dr} &= -1,474 \frac{\bar{m}(r) \bar{\varepsilon}(r)}{r^2} \left(1 + \frac{\bar{P}(r)}{\bar{\varepsilon}(r)} \right) \left(1 + 11,2 \cdot 10^{-6} \frac{r^3 \bar{P}(r)}{\bar{m}(r)} \right) \left(1 - 2,948 \frac{\bar{m}(r)}{r} \right)^{-1} \\ \frac{d\bar{m}(r)}{dr} &= 11,2 \cdot 10^{-6} r^2 \bar{\varepsilon}(r) \end{aligned} \tag{44}$$

Η παραπάνω διαβάθμιση είναι από [5] (σελ. 10-11). Για τον προσδιορισμό της πυκνότητας ενέργειας $\varepsilon(r)$, χρησιμοποιούμε την καταστατική εξίσωση (36), για την οποία δίνουμε διάφορες τιμές για το

B_{eff} , 100, 120, 145, 170 και 200 MeV. Στους περισσότερους αστέρες η πίεση και η πυκνότητα ενέργειας μηδενίζονται ταυτόχρονα. Σε αυτήν την περίπτωση, που η καταστατική εξίσωσή μας είναι για strange αστέρα βλέπουμε ότι για μηδενική πίεση έχουμε $\varepsilon = 4B_{eff}$. Η πίεση πρέπει να είναι θετική οπότε οι τιμές της πυκνότητας ενέργειας ξεκινάνε από τα $4B_{eff}$ για κάθε B_{eff} και αυξάνονται με κάθε επανάληψη μέχρι να φτάσουμε σε μία μέγιστη μάζα. Όμως, όπως είπαμε η πυκνότητα ενέργειας, για την διαβάθμισή μας, πρέπει να έχει μονάδες μέτρησης $\text{MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$. Οπότε, πρέπει να μετατρέψουμε τις τιμές του B_{eff} που θέλουμε, σε αυτές τις μονάδες μέτρησης. Χρησιμοποιούμε το $1 = \hbar c = 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ και οι τιμές του B_{eff} μετατρέπονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\frac{B_{eff}^4}{(\hbar c)^3} = \frac{B_{eff}^4}{(197,3)^3} \quad \left[\frac{(\text{MeV})^4}{(\text{MeV} \cdot \text{fm})^3} = \text{MeV} \cdot \text{fm}^{-3} \right] \quad (45)$$

Οπότε οι τιμές που θέλουμε δέχονται αυτήν την τροποποίηση και τελικά στην καταστατική εξίσωση αντικαθιστούμε τις τιμές $B_{eff} = 13, 27, 58, 109, 209 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$, αντίστοιχα. Οι τιμές αυτές είναι στρογγυλοποιημένες για να βοηθήνε στην ροή του προγράμματος.

Κάθε φορά που λύνουμε τις εξισώσεις TOV για μία αρχική τιμή της πυκνότητας ενέργειας, και συνεπώς και της πίεσης, καταλήγουμε σε ένα ζεύγος ολικής μάζας M και ακτίνας του αστέρα R . Εάν λύσουμε τις εξισώσεις για διάφορες αρχικές τιμές και συλλέξουμε τα ζεύγη $M - R$, μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα της ολικής μάζας ενός αστέρα συναρτήσει της ακτίνας του. Από αυτό το διάγραμμα παρατηρούμε ότι η καμπύλη φτάνει μέχρι ένα μέγιστο για M_{max} και έπειτα αρχίζει να πέφτει πάλι. Τα ζεύγη τιμών μάζας - ακτίνας μέχρι το μέγιστο της καμπύλης αντιστοιχούν σε σταθερούς αστέρες, ενώ έπειτα από το μέγιστο σε ασταθείς αστέρες. Για τις διάφορες τιμές του B_{eff} , που αναφέρθηκαν παραπάνω, καταλήγουμε κάθε φορά σε διαφορετικό M_{max} . Οπότε, σχεδιάζουμε και το διάγραμμα M_{max} συναρτήσει του B_{eff} για να δούμε την εξάρτησή τους.

5.2 Μέθοδος Runge - Kutta

Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιούμε την μέθοδο Runge - Kutta 4ης τάξης. Αυτή η μέθοδος χρειάζεται τέσσερις συναρτήσεις για να υπολογίσει την αναδρομική σχέση και δεν χρειάζεται να εκτιμήσει καμία παράγωγο. Σε σύγκριση με άλλες μεθόδους για επίλυση διαφορικών εξισώσεων, η μέθοδος Runge - Kutta έχει χαμηλό σφάλμα της τάξης του $O(h^5)$. Επειδή, έχουμε δύο διαφορικές εξισώσεις, έχουμε δύο αναδρομικές σχέσεις. Για $dy/dx = f(x, y, z)$ και $dz/dx = g(x, y, z)$, οι αναδρομικές σχέσεις παίρνουν την μορφή:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) & z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6}(l_0 + 2l_1 + 2l_2 + l_3) \\ k_0 &= h f(x_n, y_n, z_n) & l_0 &= h g(x_n, y_n, z_n) \\ k_1 &= h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}, z_n + \frac{l_0}{2}\right) & l_1 &= h g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}, z_n + \frac{l_0}{2}\right) \\ k_2 &= h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}\right) & l_2 &= h g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{l_1}{2}\right) \\ k_3 &= h f(x_n + h, y_n + k_2, z_n + l_2) & l_3 &= h g(x_n + h, y_n + k_2, z_n + l_2) \end{aligned} \quad (46)$$

Στην περίπτωση των εξισώσεων TOV βλέπουμε ότι $dP/dr = f(r, P, m)$ και $dm/dr = g(r, P)$, οπότε $x = r$, $y = P$, $z = m$ και $h = dr$, επειδή είναι το βήμα. Στο dm/dr δεν εμφανίζεται το m , οπότε παραλείπουμε το z και είναι $g(x, y)$ για τον υπολογισμό των l .

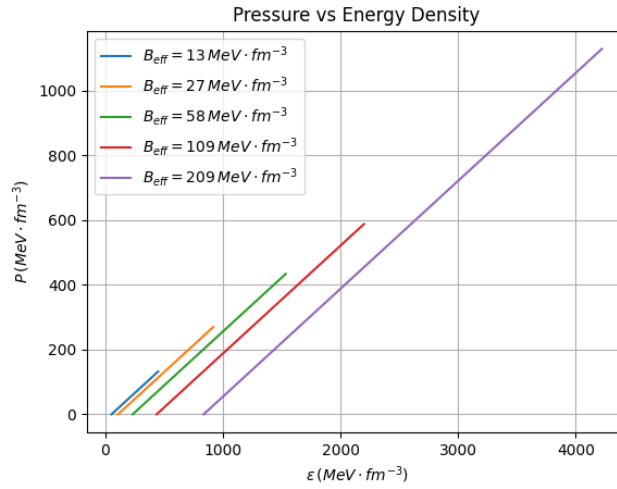
5.3 Σχεδίαση Διαγραμμάτων

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω κατασκευάσαμε ένα πρόγραμμα, το οποίο μας δίνει 4 διαγράμματα. Στο Σχήμα 14 απεικονίζεται η γραμμική σχέση πίεσης και πυκνότητας ενέργειας που δίνεται από την καταστατική εξίσωση (36). Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η τιμή του B_{eff} αυξάνονται και η πίεση και η πυκνότητα ενέργειας. Οι τιμές της πίεσης και της πυκνότητας ενέργειας σταματάνε όταν φτάνουμε σε μία μέγιστη μάζα για την συγκεκριμένη τιμή του B_{eff} , η οποία αντιστοιχεί στην βαρυτική μάζα του strange αστέρα.

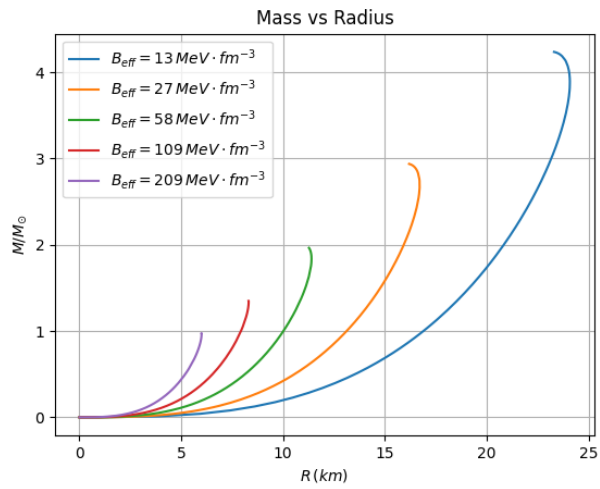
Στο Σχήμα 15 παρουσιάζεται το διάγραμμα της μάζας συναρτήσει της ακτίνας των αστέρων. Φαίνεται ότι για μικρότερες τιμές του B_{eff} φτάνουμε σε μεγαλύτερες τιμές για το ζεύγος μάζας - ακτίνας. Τα διαγράμματα έχουν όμοια μορφή με το Σχήμα 5, όπως αναμέναμε, αφού και τα δύο αναφέρονται στην ίδια καταστατική εξίσωση. Στο Σχήμα 5, όπως προαναφέρθηκε, φαίνεται ότι για $B_{eff} = 145 \text{ MeV}$ η μέγιστη μάζα φτάνει τα $M_{max} = 2M_{\odot}$ με $R_{crit} = 10,9 \text{ km}$. Η αντίστοιχη τιμή για αυτό στο διάγραμμα του Σχήματος 15 είναι το $B_{eff} = 58 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$, το οποίο αντιστοιχεί σε μέγιστη μάζα $M_{max} = 1,98M_{\odot}$ με $R_{crit} = 11,19 \text{ km}$. Η μικρή αυτή διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι η τιμή $58 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$ είναι στρογγυλοποιημένη.

Αναφέραμε στην παράγραφο 2.7 ότι για την καμπύλη $M - R$ ισχύει η σχέση $M/R^3 = \text{constant}$ άρα $M = c \cdot R^3$. Για να επαληθεύσουμε της καμπύλες αυτές, σχεδιάζουμε και το διάγραμμα $M - R^3$, το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 16. Παρατηρούμε ότι για το μεγαλύτερο μέρος της καμπύλης η σχέση μεταξύ των μεγεθών είναι γραμμική, όπως περιμέναμε. Στο τέλος κάθε γραμμής, εκεί που πλησιάζουμε στην μέγιστη μάζα υπάρχει μία καμπύλωση. Η καμπύλωση αυτή είναι μικρή για μεγάλες τιμές της B_{eff} και μπορεί να αγνοηθεί, όμως είναι μεγάλη για μικρές τιμές B_{eff} , ιδιαίτερα για την μικρότερη τιμή $13 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$.

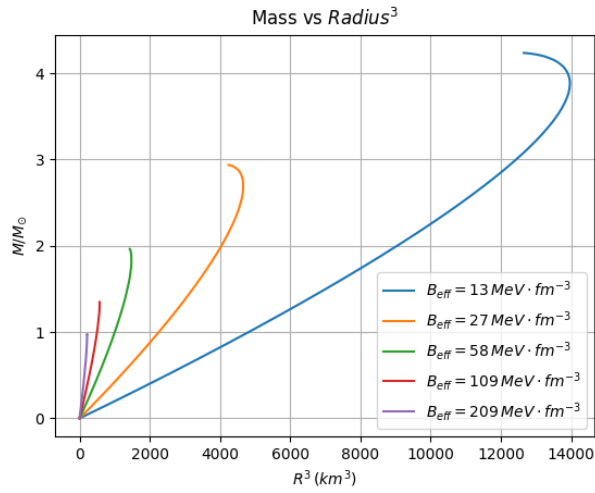
Για να μελετήσουμε καλύτερα πως επηρεάζει το B_{eff} την μέγιστη μάζα που λαμβάνουμε κάθε φορά σχεδιάζουμε το διάγραμμα $M_{max} - B_{eff}$, το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 17. Βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται η τιμή του B_{eff} , η τιμή της μέγιστης μάζας μειώνεται εκθετικά. Συγκεκριμένα για τιμές $B_{eff} = 13, 27, 58, 109$ και $209 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$, έχουμε τιμές της μέγιστης μάζας $M_{max} = 4, 25, 2, 95, 1, 98, 1, 36$ και $1M_{\odot}$ αντίστοιχα.



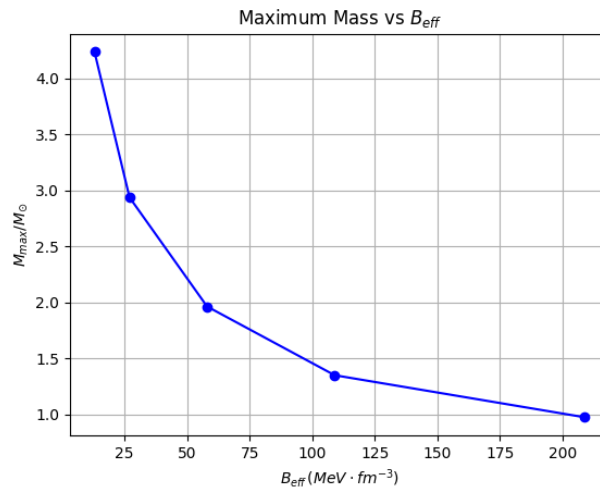
Σχήμα 14: Πίεση συναρτήσει της πυκνότητας ενέργειας για κάθε B_{eff}



Σχήμα 15: Βαρυτική μάζα σε μονάδες ηλιακής μάζας συναρτήσει της ακτίνας για κάθε B_{eff} .



Σχήμα 16: Μάζα σε μονάδες ηλιακής μάζας συναρτήσει της ακτίνα για κάθε B_{eff} .



Σχήμα 17: Μέγιστη μάζα σε μονάδες ηλιακής μάζας συναρτήσει του B_{eff}

Συμπεράσματα - Σύνοψη

Σκοπός της εργασίας ήταν η μελέτη strange αστέρων και πως θα μπορούσαμε, θεωρητικά, να τα ανακαλύψουμε μέσω των βαρυτικών κυμάτων.

Αρχικά, αναφέραμε τις εξισώσεις TOV για συμπαγή αστέρια. Οι εξισώσεις TOV χρειάζονται διαβαθμίσεις και αρχικές συνθήκες για να λυθούν και να μας δώσουν τα επιτρεπτά ζεύγη μάζας - ακτίνας που μπορούν να έχουν οι αστέρες. Παρατηρήσαμε ότι η καταστατική εξίσωση των συμπαγών αστέρων είναι διαφορετική από αυτήν των αυτοδεσμευμένων αστέρων. Τα πρώτα έχουν στην επιφάνειά τους μηδενική πυκνότητα ενέργειας, ενώ τα τελευταία έχουν μη - μηδενική. Το γεγονός αυτό μας δίνει διαφορετικά ζεύγη μάζας - ακτίνας με αποτέλεσμα οι αυτοδεσμευμένοι αστέρες να είναι πιο συμπαγείς.

Έπειτα, μελετήσαμε πως συμπεριφέρεται η ύλη μέσα στους κουάρκ αστέρες μέσω διάφορων μοντέλων. Θεωρούμε ότι η ύλη από βαρυονική διασπάται και σχηματίζει μία «σουπά» από κουάρκ και γκλουόνια. Για να περιγράψουμε αυτήν την μετατροπή χρησιμοποιήσαμε μοντέλα όπως η ασυμπτωτική ελευθερία, τα δεδομένα πλέγματος QCD, η pQCD και το bag μοντέλο. Θεωρήσαμε ότι η κουάρκ ύλη έχει αλληλεπιδράσεις και μέσω μετασχηματισμών καταλήξαμε ότι η καταστατική εξίσωση που την περιγράφει είναι ίδια με αυτή των αυτοδεσμευμένων αστέρων και καταλήξαμε ότι οι κουάρκ αστέρες δεν χρειάζονται την βαρύτητα για να διατηρηθούν.

Οι strange αστέρες είναι όμοιοι με τους κουάρκ με την διαφορά ότι στο εσωτερικό τους πέρα από τα up και down κουάρκ έχουν δημιουργηθεί και strange κουάρκ, οπότε και η strange ύλη είναι αυτοδεσμευμένη. Είδαμε πως για τιμές της πίεσης κοντά στο μηδέν, θεωρητικά η βαρυονική ύλη δεν συμφέρει ενεργειακά το αστέρι και διασπάται δημιουργώντας ταυτόχρονα και strange κουάρκ. Περιγράψαμε πως η δημιουργία ενός «σπόρου» strange ύλης στο εσωτερικό ενός αστέρα μπορεί να τον μετατρέψει ολόκληρο σε strange αστέρα σε μικρό χρονικό διάστημα. Δεν μπορούμε ακόμα να αποκλείσουμε την πιθανότητα για την ύπαρξη strange αστέρων, αφού η θεωρητική τους μελέτη υποδεικνύει ότι μπορούν να υπάρχουν.

Επιπλέον, αναφερθήκαμε στα βαρυτικά κύματα και στον εντοπισμό τους, μέσω συγχώνευσης συστήματος δύο αστέρων, από τους ανιχνευτές LIGO και Virgo. Από την παλιρροιακή παραμορφωσιμότητα των βαρυτικών κυμάτων αναλύσαμε πως λαμβάνουμε πληροφορίες για την δομή του αρχικού δυαδικού συστήματος αστέρων, αλλά και για το τελικό αστρικό αντικείμενο. Χρησιμοποιήσαμε προσομοίωση για συγχώνευση συστημάτων strange αστέρων και αστέρων νετρονίων με παρόμοιο παράγοντα compactness. Είδαμε ότι εάν οι συχνότητες που λαμβάνουμε δεν έχουν αρκετή απόκλιση, μπορούμε να διαχωρίσουμε αυτά τα δύο γεγονότα με τον λόγο των ενεργειών που υπολογίζουμε από ολοκλήρωση στο φάσμα φωτεινότητας. Η λειτουργία των ανιχνευτών βαρυτικών κυμάτων είναι ακόμα σχετικά νέα, αλλά θα μπορούσε να συνεισφέρει σε κάποια πιθανή εύρεση strange αστέρων, εάν ανιχνευτεί σήμα από σύγκρουση δύο strange αστέρων.

Τέλος, χρησιμοποιήσαμε τις παραπάνω πληροφορίες που συλλέξαμε για την διαβάθμιση των TOV εξισώσεων και την επίλυσή τους, για την καταστατική εξίσωση strange αστέρων, αλλά και για την σχέση μάζας - ακτίνας τους, και κατασκευάσαμε έναν κώδικα στην Python. Ο κώδικας αυτός μας έδωσε 4 διαγράμματα στα οποία παρουσιάζονταν η πίεση συναρτήσει της πυκνότητας ενέργειας, η μάζα συναρτήσει της ακτίνας, η μάζα συναρτήσει της ακτίνας εις τον κύβο και η μέγιστη μάζα συναρτήσει της παραμέτρου B_{eff} . Το διάγραμμα μάζας - ακτίνας ακολουθούσε την μορφή της θεωρίας. Το διάγραμμα μάζας - ακτίνας εις τον κύβο μας επιβεβαίωσε σε μεγάλο βαθμό την αναλογία των δύο μεγεθών, με μια μικρή απόκλιση στο τέλος της καμπύλης που πλησιάζουμε την μέγιστη μάζα. Με το τελευταίο διάγραμμα συμπεράναμε ότι η μέγιστη μάζα μειώνεται εκθετικά με την αύξηση του B_{eff} .

Παράρτημα: Code Listing

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def en(P,Beff):
5     return(3*P+4*Beff)
6
7 def mr(r,P,Beff):
8     return(11.2*10**(-6)*r**2*en(P,Beff))
9
10 def Pr(r,P,m,Beff):
11     return((-1.474*en(P,Beff)*m)/r**2*(1+P/en(P,Beff))*(1+11.2*10**(-6)*r**3*P/m)
12         *(1-2.948*m/r)**(-1))
13
14 def TOV(P0, m0, dr,Beff):
15     P = [P0]
16     m = [m0]
17     r = [0.01]
18     h = dr
19     i = 0
20
21     while P[i]>0.000000000001:
22         k0 = h * Pr(r[i], P[i], m[i], Beff)
23         l0 = h * mr(r[i], P[i], Beff)
24         k1 = h * Pr(r[i]+h/2, P[i]+k0/2, m[i]+l0/2, Beff)
25         l1 = h * mr(r[i]+h/2, P[i]+k0/2, Beff)
26         k2 = h * Pr(r[i]+h/2, P[i]+k1/2, m[i]+l1/2, Beff)
27         l2 = h * mr(r[i]+h/2, P[i]+k1/2, Beff)
28         k3 = h * Pr(r[i]+h, P[i]+k2, m[i]+l2, Beff)
29         l3 = h * mr(r[i]+h, P[i]+k2, Beff)
30
31         P.append(P[i]+1/6*(k0+2*k1+2*k2+k3))
32         m.append(m[i]+1/6*(l0+2*l1+2*l2+l3))
33         r.append(r[i] + h)
34
35         i += 1
36
37     return m[-1], r[-1]
38
39 Beff_values = [13, 27, 58, 109, 209]
40 Mmax_list = []
41 all_Pep_data = []
42 all_Mr_data = []
43 condition = False
44
45 for Beff in Beff_values:
46     M_list = []
47     R_list = []
48     ep_list = []
49     P0_list = []
50     M_max = -1.0
51     condition = False
52
53     for ep in range(4*Beff, 5001, 1):
54         P0 = 1/3*(ep-4*Beff)
55         final_M, final_R = TOV(P0,0.001,0.001,Beff)
56         M_list.append(final_M)
57         R_list.append(final_R)
```

```

58     ep_list.append(ep)
59     P0_list.append(P0)
60
61     if final_M >= M_max:
62         M_max = final_M
63     else:
64         condition = True
65         break
66
67     if not condition:
68         break
69
70     Mmax_list.append(M_max)
71
72     all_Pep_data.append((ep_list, P0_list, f'$B_{{eff}} = {Beff} \, \text{MeV} \cdot \text{fm}^{{-3}}$')
73 )
74     all_Mr_data.append((R_list, M_list, f'$B_{{eff}} = {Beff} \, \text{MeV} \cdot \text{fm}^{{-3}}$'))
75
76
77 plt.figure()
78 for ep_list, P0_list, label in all_Pep_data:
79     plt.plot(ep_list, P0_list, label=label)
80 plt.xlabel('$\epsilon \, , \, (\text{MeV} \cdot \text{fm}^{{-3}})$')
81 plt.ylabel('$P \, , \, (\text{MeV} \cdot \text{fm}^{{-3}})$')
82 plt.title('Pressure vs Energy Density')
83 plt.grid(True)
84 plt.legend()
85
86
87 plt.figure()
88 for R_list, M_list, label in all_Mr_data:
89     plt.plot(R_list, M_list, label=label)
90 plt.xlabel('$R \, , \, (\text{km})$')
91 plt.ylabel('$M/M_{{\odot}}$')
92 plt.title('Mass vs Radius')
93 plt.grid(True)
94 plt.legend()
95
96
97 plt.figure()
98 for R_list, M_list, label in all_Mr_data:
99     R_cubed_list = [R ** 3 for R in R_list]
100     plt.plot(R_cubed_list, M_list, label=label)
101 plt.xlabel('$R^3 \, , \, (\text{km}^3)$')
102 plt.ylabel('$M/M_{{\odot}}$')
103 plt.title('Mass vs $R^3$')
104 plt.grid(True)
105 plt.legend()
106
107
108 plt.figure()
109 plt.plot(Beff_values, Mmax_list, 'bo-')
110 plt.xlabel('$B_{{eff}} \, , \, (\text{MeV} \cdot \text{fm}^{{-3}})$')
111 plt.ylabel('$M_{{max}}/M_{{\odot}}$')
112 plt.title('Maximum Mass vs $B_{{eff}}$')
113 plt.grid(True)
114
115 plt.show()

```

Αναφορές

- [1] Jürgen Schaffner - Bielich. *Compact Star Physics*. Cambridge University Press, 2020. ISBN: 9781316848357. DOI: <https://doi.org/10.1017/9781316848357>.
- [2] Gaurav Narain, Jürgen Schaffner-Bielich, Igor N. Mishustin. «Compact stars made of fermionic dark matter». In: *Phys.Rev.D74:063003,2006* (2006). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.74.063003>.
- [3] P. Haensel, A. Y. Potekhin, D.G. Yakovlev. *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*. Springer New York, NY, 2007. ISBN: 9780387473017. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-47301-7>.
- [4] A. Bauswein, R. Oechslin, H.-Th. Janka. «Discriminating Strange Star Mergers from Neutron Star Mergers by Gravitational-Wave Measurements». In: *Phys.Rev.D81:024012,2010* (2010). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.024012>.
- [5] Alkiviadis Kanakis-Pegios. «Constraints on neutron stars equation of state using tidal deformability of the GW170817 system». MA thesis. Aristotle University of Thessaloniki, 2019. DOI: <https://doi.org/10.26262/heal.auth.ir.306267>.
- [6] Norman K. Glendenning. *Compact Star*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer New York, NY, 2012. ISBN: 9781468404913. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0491-3>.
- [7] Angela V. Olinto. «On the conversion of neutron stars into strange stars». In: *PHYSICS LETTERS B* (1987). DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)91144-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)91144-0).
- [8] Katerina Chatziioannou. «Neutron star tidal deformability and equation of state constraints». In: (2020). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10714-020-02754-3>.
- [9] Alex Gezerlis. *Numerical Methods in Physics with Python*. Cambridge University Press, 2020. ISBN: 9781108772310. DOI: <https://doi.org/10.1017/9781108772310>.
- [10] Wikipedia contributors. *Neutron star merger* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 19-June-2023]. 2023. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Neutron_star_merger&oldid=1143745606.
- [11] Wikipedia contributors. *Gravitational wave* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 19-June-2023]. 2023. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gravitational_wave&oldid=1160264291.