Localisation à bande ultra-large : estimation de paramètres

C. Craeye, C. Oestges, L. Vandendorpe

UCL, Louvain-la-Neuve, Belgium

Enoncé

- Signal dépendant d'un ou plusieurs paramètres que l'on souhaite estimer aussi précisément que possible
- $s_{rf}(t;\theta)$ où θ représente un paramètre dans ce cas-ci
- Observation/mesure: on observe $r_{rf}(t) = s_{rf}(t;\theta)+N_{rf}(t)$ où $N_{rf}(t)$ est un signal perturbateur (ici bruit blanc gaussien additif: BBGA)
- Problème: comment estimer θ à partir de ce qui est observé, $r_{rf}(t)$

Modèle

- Le signal reçu est passé dans un filtre passe-bas idéal de coupure $0.5/T_s$; le signal obtenu $r_f(t)$ est échantillonné au rythme $1/T_s$;
- Filtre : ne touche pas à la partie utile du signal mais limite le spectre du bruit;
- On obtient donc un vecteur d'éléments $r_f[n] = r_f(nT_s)$ donnés par

$$r_f[n] = s_{rf}[n;\theta] + N_f[n] = s_{rf}(nT_s;\theta) + N_f(nT_s) \tag{1}$$

Estimation MV

- Idée: choisir le paramètre θ de manière à maximiser la vraisemblance c'est-à-dire la probabilité d'observer le signal qui a été récolté
- Vraisemblance: densité de probabilité du vecteur observé

$$\mathbf{r} = [r_f[0]\, r_f[1]\, \cdots\, r_f[N-1]]^T \tag{2}$$

  en supposant "connu" ou en faisant une "proposition" $s_{rf}[n;\hat{\theta}]$ pour le signal $s_{rf}[n;\theta]$
- Q1: supposant que $N_{rf}(t)$ est un BBGA centré et de densité spectrale bilatérale $N_0/2$, montrez que $N_f[n]$ est gaussien, centré, de variance $\sigma^2 = \frac{N_0}{2T_s}$;
- Q2: montrez que $r_f[n]$ est gaussien, de moyenne $s_{rf}[n;\theta]$, et de variance $\sigma^2 = \frac{N_0}{2T_s}$;
- Q3 : montrez que $r_f[n]$ est orthogonal à (décorrélé de) $r_f[n']$ pour $n \neq n'$

Estimation MV

- Q4: montrez que la densité de probabilité $T_r(\mathbf{r}|\hat{\theta})$ du vecteur $\mathbf{r}$ est donnée par

$$T_r(\mathbf{r}|\hat{\theta}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_n (r_f[n] - s_{rf}[n;\hat{\theta}])^2\right) \quad (3)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{N_0}\sum_n (r_f[n] - s_{rf}[n;\hat{\theta}])^2 T_s\right) \quad (4)$$

$$\simeq \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^{NT_s} [r_f(t) - s_{rf}(t;\hat{\theta})]^2 \, \mathrm{d}t\right) \quad (5)$$

Estimation MV

- L'estimée θ_{mv} de θ au sens du maximum de vraisemblance est la valeur qui maximise $T_r(\mathbf{r}|\hat{\theta})$, soit

$$\theta_{mv} = \text{argmax}_{\hat{\theta}} \, T_r(\mathbf{r}|\hat{\theta}) \tag{6}$$

- Plutôt que de maximiser $T_r(\mathbf{r}|\hat{\theta})$, on peut aussi maximiser une fonction croissance de $T_r(\mathbf{r}|\hat{\theta})$ par exemple $\log T_r(\mathbf{r}|\hat{\theta})$
- On maximise alors

$$-\sum_n (r_f[n] - s_{rf}[n;\hat{\theta}])^2 T_s \simeq -\int_0^{NT_s} [r_f(t) - s_{rf}(t;\hat{\theta})]^2 \, \mathrm{d}t \tag{7}$$

- Ou l'on minimise la distance euclidienne

$$\sum_n (r_f[n] - s_{rf}[n;\hat{\theta}])^2 T_s \simeq \int_0^{NT_s} [r_f(t) - s_{rf}(t;\hat{\theta})]^2 \, \mathrm{d}t \tag{8}$$

Estimation MV et corrélation

- On a encore

$$\theta_{mv} = \text{argmin}_{\hat{\theta}} \int_0^{NT_s} [r_f(t) - s_{rf}(t;\theta)]^2 \, \mathrm{d}t \tag{9}$$

$$= \text{argmin}_{\hat{\theta}} \left\{ -2 \int_0^{NT_s} [r_f(t)\, s_{rf}(t;\theta)] \, \mathrm{d}t + \int_0^{NT_s} [s_{rf}(t;\theta)]^2 \, \mathrm{d}t \right\} \tag{10}$$

- Lorsque l'énergie du signal utile reçu ne dépend pas du paramètre $\hat{\theta}$, alors on a encore

$$\theta_{mv} = \text{argmax}_{\hat{\theta}} \int_0^{NT_s} [r_f(t)\, s_{rf}(t;\hat{\theta})] \, \mathrm{d}t \tag{11}$$

c'est-à-dire que l'on maximise la corrélation entre le signal observé et le signal à recevoir sous l'hypothèse testée.

Positionnement UWB indirect

- Le signal $r_{f,m}(t)$ reçu à l'ancre m a une structure correspondant à

$$r_{f,m}(t) = A_m \, s(t - \tau_m) + n_m(t) \tag{12}$$

  où

  - A_m est l'amplitude avec laquelle le signal émis est reçu;
  - les bruits $n_m(t)$ sont indépendants entre différentes ancres m.

- Q5.1: donnez l'expression de la fonction de vraisemblance à maximiser pour τ_m uniquement.
- Q5.2: la solution obtenue concerne le cas TOA. Comment l'adapter pour obtenir une estimée de type TDOA ?
- Q5.3: calculez la fonction de vraisemblance associée à l'estimation de A_m à partir du signal $r_{f,m}(t)$
- Q5.4: donnez l'expression explicite de $\hat{A}_m$, l'estimateur de A_m au sens du maximum de vraisemblance, obtenu par annulation de la dérivée du logarithme de la fonction de vraisemblance

Positionnement UWB direct

- Le signal $r_{f,m}(t)$ reçu à l'ancre m dans le cas d'une cible unique s'écrit dans ce cas

$$r_{f,m}(t) \;=\; A_m s[t - \tau_m(x,y)] + n_m(t) \tag{13}$$

- où la dépendance de τ_m vis à vis des coordonnées (x, y) de la cible a été rendue explicite
- L'objectif est cette fois d'estimer directement ces coordonnées (x, y)
- Q6.1: donnez la fonction de vraisemblance des paramètres (x, y) calculée à partir de tous les signaux $r_{f,m}(t)$ reçus à toutes les ancres
- Q6.2: donnez l'expression explicite des quantités $\hat{A}_m$ correspondant aux estimées au sens du MV
- Q7: Proposez un modèle de signal reçu dans le cas où le signal émis atteindrait chaque antenne réceptrice par un trajet direct mais aussi plusieurs trajets indirects liés à des réflexions.

Corrélation dans le domaine spectral

- Partant du résultat obtenu en Q5.1, on se pose la question de la réalisation de la corrélation à effectuer dans le domaine spectral.
- Q8: En vous inspirant de la similitude avec l'opération de convolution, montrez et exprimez mathématiquement comment vous calculez une corrélation en temps continu en passant par les transformées de Fourier des signaux;
- On suppose que le signal $s(t)$ émis a les caractéristiques spectrales semblables à celles discutées en MS0 (énoncé MS0 pages 6 et suivantes): son spectre va de 3.2 GHz à 4.8 GHz.
- Q9: Si vous disposez des échantillons des signaux à 3.2GHz, comment pouvez-vous obtenir la corrélation qui caractérise les signaux remis dans la bonne bande de fréquences (3.2 GHz à 4.8 GHz) ? Exprimez mathématiquement les opérations à réaliser .

Expérimentation

- Q10: Il vous est demandé de tester les résultats obtenus en Q9 sur des signaux réels dans un scénario de type TDOA, et positionnement indirect.

Bon travail