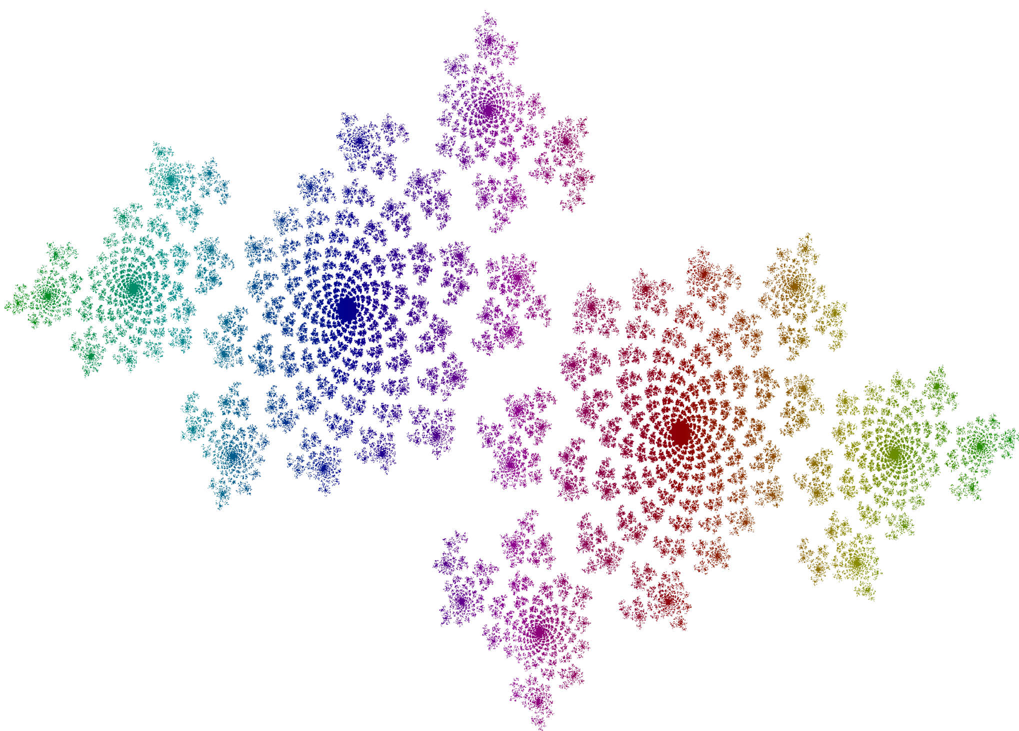
Ensembles de Julia

théorie et implémentations



Sommaire

1 Introduction

Les ensembles de Julia sont des ensembles de points dans le plan complexe qui sont définis par une fonction complexe f et un paramètre complexe c constant. Nous verrons dans ce document plus en détail de quelles façons.

Le nom de ces ensembles provient de leur découvreur, le mathématicien français Gaston Julia qui les a étudiés dans les années 1910 et 1920.

Il existe des ensembles de Julia différents pour tout choix approprié de f et c, mais certains d'entre eux donnent des images plus intéressantes que d'autres. Les ensembles de Julia les plus célèbres, ceux auxquels on va s'intéresser, sont ceux obtenus pour,

$$f : z \longrightarrow z^2 + c.$$

Les ensembles de Julia sont notamment utilisés en géométrie fractale, en théorie des systèmes dynamiques complexes et en théorie des chaînes de Markov. Moins glorieusement, nous nous en servons dans ce travail comme d'une excuse pour apprendre à utiliser *R*, *Rmarkdown*, *GitHub*, le langage de programmation *julia*, les *Pluto notebook* et enfin, juste pour le plaisir de générer de belles images.

2 Théorie

Dans toute la suite $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| \leq 2$ et $f : z \longrightarrow z^2 + c$. De plus, on note pour tout entier strictement positif n,

$$f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

2.1 Définitions

Définition 2.1 (Ensemble de Julia rempli)**.** On note $\mathcal{J}_f^r$ l'ensemble de Julia rempli associé à f. Il correspond à l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que la suite,

$$(f^{(n)}(z))_{n\geq 1}$$

est bornée. Autrement dit,

$$\mathcal{J}_f^r = \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ \exists M \in \mathbb{R}^+ \ \text{ tq } \ \forall n \geq 1, \ \ |f^{(n)}(z)| \leq M\}.$$

Définition 2.2 (Ensemble de Julia)**.** On note $\mathcal{J}_f$ l'ensemble de Julia associé à f qui n'est autre que la frontière de $\mathcal{J}_f^r$ défini précédemment:

$$\mathcal{J}_f = \partial \mathcal{J}_f^r.$$

Autrement dit, $\mathcal{J}_f$ est l'ensemble des nombres complexes qui sont à la fois limite d'éléments de $\mathcal{J}_f^r$ et limite d'éléments de $\mathbb{C} \backslash \mathcal{J}_f^r$.

Remarque. Ces définitions sont en fait des caractérisations. De manière plus générale, tout ensemble de Julia associé à une fonction complexe g polynomiale peut être caractérisé de cette manière.

La véritable définition consiste à décrire, pour toute fonction g holomorphe non-constante de $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (les fractions rationnelles non-constantes), l'ensemble de Julia associé à g comme le plus petit ensemble fermé $\mathcal{J}$ vérifiant,

- $\#\mathcal{J} \geq 3$
- $g(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$.

2.2 Caractérisations utiles et algorithmes

Nous allons voir dans cette partie deux caractérisations intéressantes de l'ensemble de Julia (rempli et non-rempli) associé à f qui nous permettront d'implémenter deux algorithmes pour représenter les fractales recherchées.

2.2.1 Ensemble de Julia rempli : une borne uniforme

La première caractérisation dont on va parler est basée sur ce lemme.

Lemme 2.1. $\mathcal{J}_f^r = \{z \in \mathbb{C} \;\; tq \;\; (|f^{(n)}(z)|)_{n\geq 1} \;\; \leq 2\}$.

Proof. Montrons que,

$$\mathcal{J}_f^r \subseteq \{z \in \mathbb{C} \;\; tq \;\; (|f^{(n)}(z)|)_{n\geq 1} \;\; \leq 2\} =: A.$$

La réciproque étant évidente, nous aurons l'égalité. Par contraposition, soit $z_0 \notin A$, il existe un rang N et $\epsilon > 0$ tels que,

$$|f^{(N)}(z_0)| \geq 2 + \epsilon,$$

Notons $u_N = |f^{(N)}(z_0)|$, par inégalité triangulaire inverse,

$$\begin{aligned} u_{N+1} &= |f^{(N)}(z_0)^2 + c| \\ &\geq |u_N^2 - |c|| \end{aligned}$$

Or, $u_N^2 > 2$ et $|c| \leq 2$, d'où,

$$u_{N+1} \geq u_N^2 - |c| \geq 4 + 4\epsilon + \epsilon^2 - 2 \geq 2 + 2\epsilon$$

Un récurrence immédiate nous donne ainsi que pour tout entier k,

$$u_{N+k} \geq 2 + (1+k)\epsilon,$$

impliquant,

$$\lim_{k\to+\infty} u_{N+k} = +\infty.$$

Autrement dit, $(|f^{(n)}(z_0)|)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$, $(f^{(n)}(z_0))_{n\geq 1}$ n'est pas bornée et z_0 n'appartient pas à $\mathcal{J}_f^r$. Ce qui conclut la preuve. □

2.2.2 Algorithme du temps de fuite

Du lemme précédent découle un algorithme simple qui consiste à quadriller $[-2,2] \times [-2,2]$ et à itérer f un certain nombre de fois, notons ce nombre I, à chaque élément du quadrillage. Les points qui après I itérations restent dans le cercle de rayon 2 seront considérés comme appartenant à l'ensemble de Julia rempli associé à f. Les autres non.

C'est une approximation, déjà parce qu'on ne teste pas tous les points de $[-2,2] \times [-2,2]$, mais aussi parce qu'en théorie il faudrait vérifier que toute les itérations de f à un élément du quadrillage reste dans le cercle de rayon 2 pour s'assurer que ce point appartient à l'ensemble de Julia rempli. Mais c'est impossible, on se restreint à I itérations. Ce nombre est ainsi directement lié à la précision de l'approximation obtenue.

De plus, notons que les ensembles de Julia associés à f sont symétrique par rapport à l'origine. Nous pouvons ainsi nous restreindre à ne "tester" que les éléments du quadrillage appartenant au pan supérieur du plan et obtenir le reste par symétrie.