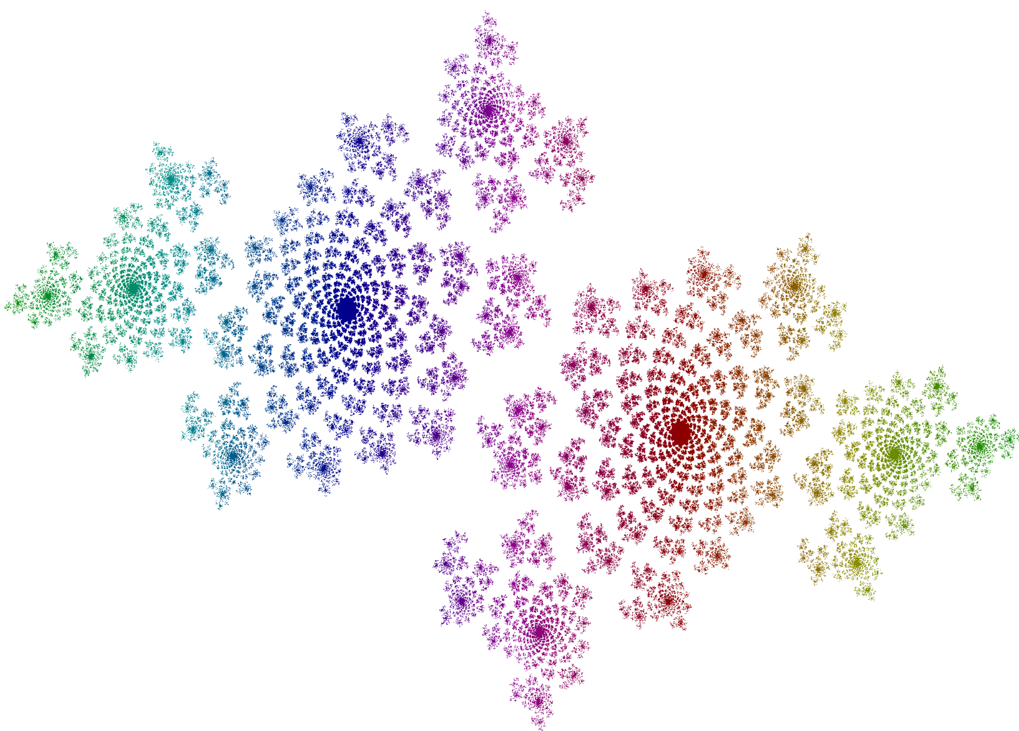
Ensembles de Julia

théorie et implémentations



Sommaire

1 Introduction

Les ensembles de Julia sont des ensembles de points dans le plan complexe qui sont définis par une fonction complexe f et un paramètre complexe c constant. Nous verrons dans ce document plus en détail de quelles façons.

Le nom de ces ensembles provient de leur découvreur, le mathématicien français Gaston Julia qui les a étudiés dans les années 1910 et 1920.

Il existe des ensembles de Julia différents pour tout choix approprié de f et c, mais certains d'entre eux donnent des images plus intéressantes que d'autres. Les ensembles de Julia les plus célèbres, ceux auxquels on va s'intéresser, sont ceux obtenus pour,

$$f : z \longrightarrow z^2 + c.$$

Les ensembles de Julia sont notamment utilisés en géométrie fractale, en théorie des systèmes dynamiques complexes et en théorie des chaînes de Markov. Moins glorieusement, nous nous en servons dans ce travail comme d'une excuse pour apprendre à utiliser *R*, *Rmarkdown*, *GitHub*, le langage de programmation *julia*, les *Pluto notebook* et enfin, juste pour le plaisir de générer de belles images.

2 Théorie

Dans toute la suite $c \in \mathbb{C}$ et $f : z \longrightarrow z^2 + c$. De plus, on note pour tout entier strictement positif n,

$$f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

2.1 Définitions

Définition 2.1 (Ensemble de Julia rempli)**.** On note $\mathcal{J}_c^r$ l'ensemble de Julia rempli associé à c. Il correspond à l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que la suite,

$$(f^{(n)}(z))_{n \geq 1}$$

est bornée. Autrement dit,

$$\mathcal{J}_c^r = \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ \exists M \in \mathbb{R}^+ \ \text{ tq } \ \forall n \geq 1, \ \ |f^{(n)}(z)| \leq M\}.$$

Définition 2.2 (Ensemble de Julia)**.** On note $\mathcal{J}_c$ l'ensemble de Julia associé à c qui n'est autre que la frontière de $\mathcal{J}_c^r$ défini précédemment:

$$\mathcal{J}_c = \partial \mathcal{J}_c^r.$$

Autrement dit, $\mathcal{J}_c$ est l'ensemble des nombres complexes qui sont à la fois limite d'éléments de $\mathcal{J}_c^r$ et limite d'éléments de $\mathbb{C} \backslash \mathcal{J}_c^r$.

Remarque. Ces définitions sont en fait des caractérisations. De manière plus générale, tout ensemble de Julia associé à une fonction complexe g polynomiale peut être caractérisé de cette manière.

La véritable définition consiste à décrire, pour toute fonction g holomorphe non-constante de $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, l'ensemble de Julia associé à g comme le plus petit ensemble fermé $\mathcal{J}$ vérifiant,

- $\#\mathcal{J} \geq 3$
- $g(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$.

2.2 Caractérisation utile

Nous allons voir dans cette partie une caractérisation intéressante de l'ensemble de Julia associé à

\begin{thm}[]