

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Una **expresión algebraica** es una combinación cualquiera y finita de números, de letras, o de números y letras, ligadas entre sí con la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

$$a) 2x + 3^4 \quad b) 5x^3 + 6x - \frac{1}{3} \quad c) x^2 + \sqrt{3}x \quad d) \frac{x^5 - 4}{x^2} \quad e) \sqrt{2}x - \frac{2}{5}x^4$$

En las expresiones algebraicas se puede identificar:

- Letras, denominadas **variables** o **indeterminadas**.
- Números, denominados **constantes** o **coeficientes de las indeterminadas**.
- **Operaciones matemáticas**, permiten vincular los coeficientes con las indeterminadas.

Expresión Algebraica	Coeficientes	Indeterminadas	Operaciones
$3x^2 + \frac{1}{2}y$	3 y $\frac{1}{2}$	x y	Suma, producto y potencia
$\sqrt{8a^2b} + 3abc$	8 y 3	a, b y c	Suma, producto, potencia y raíz

Valor numérico de una expresión algebraica: el **valor numérico** de una expresión algebraica para $x=a$, es el número que se obtiene reemplazando en la expresión la indeterminada “x” por “a” y resolviendo las operaciones indicadas.

$$\begin{aligned} \text{Ej.:} \quad & 2x^3 - 5x \quad \text{para } x = 2 \\ & = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2 \\ & = 2 \cdot 8 - 10 \\ & = 6 \end{aligned}$$

Polinomio: Si la variable no está afectada por una raíz o como divisor, las expresiones algebraicas son enteras y se denominan **polinomios**.

Los ejemplos c) y d) no son polinomios; sí lo son a), b) y e).

¿Cómo se nombran los polinomios?

Generalmente se utilizan letras mayúsculas y se escriben entre paréntesis, las letras de las partes literales de los términos del polinomio.

$$P(x) = 5x^3 - 2x \quad Q(m) = \frac{1}{2}m^4 - 5m$$

Según la cantidad de términos, un polinomio se denomina:

- **Monomio**, si tiene un solo término : $\frac{1}{2}x^5$
- **Binomio**, si tiene dos términos : $4x^2 + 5$
- **Trinomio**, si tiene tres términos : $3x + 10 - 5x^2$
- **Cuatrinomio**, si tiene cuatro términos : $0,5x^3 + 2 - x^2 + 6x$
- **Polinomio de cinco, seis, ..., n términos**, si tiene más de cuatro términos.

Términos semejantes: los términos que tienen la misma variable y exponente son **semejantes**.

Los términos $4x^2$, $-\frac{1}{2}x^2$ y x^2 son semejantes.

Grado de un polinomio: se denomina **grado** al mayor exponente que tiene la variable de los términos con coeficientes diferentes de cero.

a) $P(x) = 7x + 6x^2 - x^5$; grado: “5”

b) $Q(x) = 4^6 - x + x^3$; grado: “3”

c) $T(x) = 5$; grado: “0”

d) $U(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x^4 + 0x^9$; grado: “4”

Coeficiente principal: se llama **coeficiente principal** al que multiplica a la variable de mayor exponente.

a) $S(x) = x + 5x^3 - 2x^4$; coeficiente principal: “-2”

b) $T(x) = x^5 - 8x^4 + x$; coeficiente principal: “1”

Al polinomio cuyo coeficiente principal es **1** se lo denomina **normalizado**.

Término independiente: se denomina **término independiente** al coeficiente que multiplica a la variable que tiene exponente cero. Al término independiente se lo reconoce por no aparecer la variable como factor en dicho término. Si el término independiente es 0, en general, dicho término no se escribe explícitamente.

a) $R(x) = 3x^5 + 2x^2 + 8$; término independiente : 8

b) $S(x) = 2x^4 + 6x^3 + 4x - 5$; término independiente: -5

c) $T(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x$; término independiente : 0

Polinomio ordenado: un polinomio está **ordenado** si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.

a) $H(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

b) $J(x) = 4 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$

c) $Z(x) = x^5 - 2x^2 + 7$

Polinomio completo: un polinomio está **completo** si tiene todas las potencias decrecientes del grado.

a) $R(x) = 6x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x - 1$; está completo.

b) $Q(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 3$; está incompleto.

Para completar un polinomio se agregan los términos que faltan con coeficiente cero.

a) $M(x) = x^5 + 3x^3 - 1 = x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 0x - 1$

b) $N(x) = 4x^4 + 2x^2 = 4x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 0$

Reducción de polinomios semejantes: reducir un polinomio, consiste en sustituir todos los monomios semejantes por el resultado de la suma de todos ellos.

a) $3x + 5x^4 + x - 2x^4 = 4x + 3x^4$

b) $x^5 - \frac{3}{5}x^4 + x^4 + 2x^3 - 9x^3 = x^5 - \frac{2}{5}x^4 - 7x^3$

Operaciones con Polinomios

Adición y sustracción de polinomios

La suma de varios monomios semejantes es otro monomio semejante al dado, cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de los coeficientes de los monomios dados.

$$\text{a) } 2x^3 + x^3 + 6x^3 = 9x^3$$

$$\text{b) } 6x^5 + \frac{1}{2}x^5 + x^5 = \frac{15}{2}x^5$$

Para restar dos monomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

$$P(x) = 6x^4 \text{ y } Q(x) = -3x^4 \Rightarrow P(x) - Q(x) = 6x^4 + 3x^4 = 9x^4$$

Para sumar varios polinomios entre sí, se completan y ordenan, luego se encolumnan sus términos semejantes y se suman.

Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Suma	Resta
Dados: $\begin{cases} P(x) = -3 + 2x^2 - 5x^3 + x^4 \\ Q(x) = -9x^3 + x^2 + x - 1 \end{cases}$	Dados: $\begin{cases} R(x) = x^2 - x + 1 \\ T(x) = -x + 2 - 5x^2 \end{cases}$
Hallar: $P(x) + Q(x)$	Hallar: $R(x) - T(x)$
$\begin{array}{r} x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 0x - 3 \\ + \\ 0x^4 - 9x^3 + x^2 + x - 1 \\ \hline x^4 - 14x^3 + 3x^2 + x - 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ + \\ 5x^2 + x - 2 \\ \hline 6x^2 + 0x - 1 \end{array}$

Para resolver una suma algebraica de polinomios, se opera en el orden en que aparecen los términos.

Ej.: Dados: $R(x) = 4x^2 + 3x - 2$; $S(x) = 3x^2 - 2x + 7$; $T(x) = x^2 + 5x - 1$

$$R(x) + S(x) + T(x) =$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 3x - 2 \\ + \quad 3x^2 - 2x + 7 \\ \quad x^2 + 5x - 1 \\ \hline 8x^2 + 6x + 4 \end{array}$$

$$R(x) + S(x) - T(x) =$$

Primero realizamos: $R(x) + S(x) =$	Y luego, al resultado, le sumamos el polinomio opuesto a $T(x)$, es decir, le sumamos $[-T(x)]$
$\begin{array}{r} 4x^2 + 3x - 2 \\ + \quad 3x^2 - 2x + 7 \\ \hline 7x^2 + x + 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7x^2 + x + 5 \\ + \quad -x^2 - 5x + 1 \\ \hline 6x^2 - 4x + 6 \end{array}$

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos monomios se deben multiplicar los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de la potenciación.

$$\text{a) } (3x) \cdot (2x) = 6x^2 \qquad \text{b) } (10x^4) \cdot (-5x^4) = -50x^8 \qquad \text{c) } (-6x^5) \cdot (-3x^2) = 18x^7$$

Para multiplicar un polinomio por un número real, se aplica la propiedad distributiva, efectuando luego la multiplicación de monomios.

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

$$-3 \cdot \left(x^3 + 2x^2 + \frac{1}{3}x - 4 \right) = -3 \cdot x^3 + (-3) \cdot 2x^2 + (-3) \cdot \frac{1}{3}x + (-3) \cdot (-4) = -3x^3 - 6x^2 - x + 12$$

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva, efectuando luego la multiplicación de monomios.

$$(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d$$

Dados $P(x) = 2x^3 + 5x - 1$ y $Q(x) = 3x^2 - 2$, hallar : $P(x) \cdot Q(x)$

$$P(x) \cdot Q(x) = (2x^3 + 5x - 1)(3x^2 - 2) = 6x^5 - 4x^3 + 15x^3 - 10x - 3x^2 + 2 = 6x^5 + 11x^3 - 3x^2 - 10x + 2$$

Producto de la suma de dos términos por su diferencia

El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} \text{a) } (x+3) \cdot (x-3) &= x^2 + \cancel{3x} - \cancel{3x} - 9 = \\ &= x^2 - 9 \quad \text{se evidencia que: } x^2 - 9 = x^2 - 3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x^3 + 4x) \cdot (x^3 - 4x) &= x^6 + \cancel{4x^4} - \cancel{4x^4} - 16x^2 = \\ &= x^6 - 16x^2 \quad \text{se evidencia que: } x^6 - 16x^2 = (x^3)^2 - (4x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(3x^4 + \frac{1}{6}x^3\right) \cdot \left(3x^4 - \frac{1}{6}x^3\right) &= 9x^8 + \cancel{\frac{1}{2}x^7} - \cancel{\frac{1}{2}x^7} - \frac{1}{36}x^6 \\ &= 9x^8 - \frac{1}{36}x^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(-\frac{1}{2}x^2 + 7x\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 - 7x\right) &= \left(-\frac{1}{2}x^2\right)^2 - (7x)^2 \\ &= \frac{1}{4}x^4 - 49x^2 \end{aligned}$$

Operaciones combinadas

Las operaciones combinadas entre polinomios se resuelven aplicando los mismos procedimientos y propiedades que con números reales.

$$\text{Ej.: Dados: } P(x) = 5x^2 + 6x + 2 \quad ; \quad Q(x) = 2x^3 - x + 6 \quad \text{y} \quad R(x) = x^2 + 1$$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot R(x) + Q(x) &= (5x^2 + 6x + 2) \cdot (x^2 + 1) + 2x^3 - x + 6 \\ &= 5x^4 + 5x^2 + 6x^3 + 6x + 2x^2 + 2 + 2x^3 - x + 6 = \\ &= 5x^4 + (6x^3 + 2x^3) + (5x^2 + 2x^2) + (6x - x) + (6 + 2) = \\ &= 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 5x + 8 \end{aligned}$$

División de polinomios

Para dividir dos monomios se deben dividir los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de la potenciación.

$$x^n : x^m = x^{n-m}$$

$$\text{a) } (4x^3) : (2x) = (4 : 2)(x^3 : x) = 2x^2$$

$$\text{b) } -6x^5 : 3x^2 = (-6 : 3)(x^5 : x^2) = -2x^3$$

Para dividir un polinomio por un monomio, se aplica la propiedad distributiva.

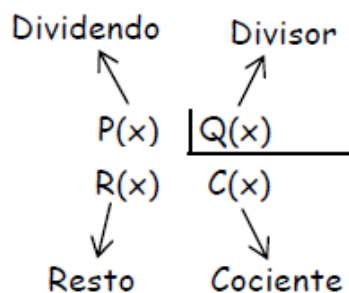
$$\begin{aligned} \text{a) } (24x^5 - 16x^3 + 12x^2 - 4x) : (-4x) &= \\ &= 24x^5 : (-4x) + (-16x^3) : (-4x) + 12x^2 : (-4x) + (-4x) : (-4x) = \\ &= -6x^4 + 4x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

$$\text{b) } (2x^6 + 5x^5 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x) : \left(\frac{1}{2}x\right) = 4x^5 + 10x^4 + 2x^2 + x + 12$$

$$\text{c) } (7x^4 - 6x^3 + 5x^2 - x + 3) : (2x^2) = \frac{7}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

Para dividir dos polinomios:

- El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el grado del polinomio divisor.
- El polinomio dividendo debe estar completo y ordenado en forma decreciente.
- El polinomio divisor debe estar ordenado.



En toda división de polinomios se cumple lo siguiente:

$$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

a) Realizar la división entre $P(x) = 4x^3 + 5x^2 + 1$ y $Q(x) = x^2 - 2$

$\begin{array}{r} 4x^3 + 5x^2 + 0x + 1 \\ -4x^3 + 8x \\ \hline 0x^3 + 5x^2 + 8x + 1 \\ -5x^2 + 10 \\ \hline 0x^2 + 8x + 11 \\ \boxed{} \\ \downarrow \\ \text{Resto} \end{array}$ <p> $C(x) = 4x + 5$ $R(x) = 8x + 11$ </p>	<p>Cálculos auxiliares:</p> $G[P(x)] \geq G[Q(x)]$ <p>Comprobamos: $3 \geq 2$</p> <p>Completamos:</p> $P(x) = 4x^3 + 5x^2 + 0x + 1$ <p>Verificamos:</p> <p>$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$, es decir que:</p> $4x^3 + 5x^2 + 1 = (4x + 5)(x^2 - 2) + (8x + 11)$
--	---

b)

$$A(x) : B(x), \text{ siendo } A(x) = x^4 - 2x^6 + 3x^5 - 6x + 4 \quad \text{y} \quad B(x) = 2x^3 - 3 + 2x^2$$

$$\begin{array}{r}
 -\cancel{2x^6} + 3x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 6x + 4 \\
 + \quad \cancel{2x^6} + 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 \\
 \hline
 5x^5 + x^4 - 3x^3 + 0x^2 \\
 + \quad -\cancel{5x^5} - 5x^4 + 0x^3 + \frac{15}{2}x^2 \\
 \hline
 -\cancel{4x^4} - 3x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 6x \\
 + \quad \cancel{4x^4} + 4x^3 + 0x^2 - 6x \\
 \hline
 x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 12x + 4 \\
 + \quad -\cancel{x^3} - x^2 + 0x + \frac{3}{2} \\
 \hline
 \frac{13}{2}x^2 - 12x + \frac{11}{2}
 \end{array}$$

El cociente de la división es: $C(x) = -x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

El resto es: $R(x) = \frac{13}{2}x^2 - 12x + \frac{11}{2}$

Regla de Ruffini

Cuando se presenta una división entre un polinomio en “x” por un binomio de la forma $(x \pm a)$, siendo “a” una constante del conjunto de los números reales, los coeficientes del polinomio cociente presentan ciertas características que permiten calcularlos sin emplear la metodología descrita anteriormente. Para estos casos se dispone de una regla práctica, conocida como **Regla de Ruffini**, que exige el empleo de una tabla en la que se colocan ordenadamente los coeficientes de los polinomios que intervienen en la operación.

Dados: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$.
Hallar $P(x):Q(x)$, aplicando la regla de Ruffini.

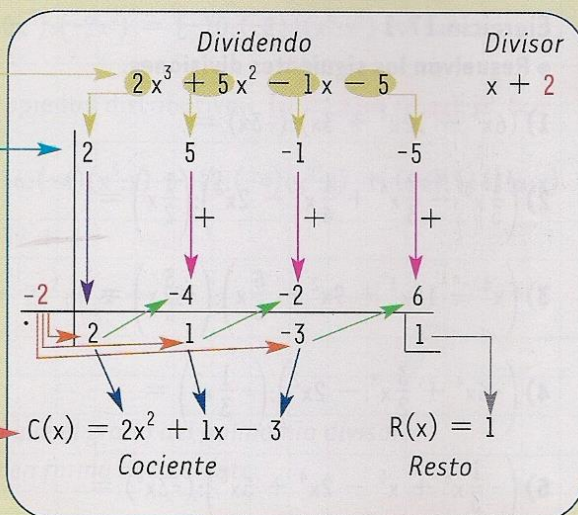
El polinomio **dividendo** debe estar **completo y ordenado**.

Se escriben alineados los coeficientes del dividendo.

El coeficiente principal se "baja" sin ser modificado; luego se lo **multiplica** por el opuesto del término independiente del divisor y se **suma** con el segundo coeficiente; y así sucesivamente hasta llegar al resto.

Los números que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto.

El polinomio **cociente** es un **grado menor** que el polinomio **dividendo**.



a) $(x^3 - x + 2):(x - 2)$

$1x^3 + 0x^2 - 1x + 2 \rightarrow$ Dividendo

1	0	-1	2
2	2	4	6
1	2	3	8

Cociente $\rightarrow x^2 + 2x + 3$

Resto $\rightarrow 8$

b) $(\frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + 1):(x + 1)$

$\frac{1}{3}x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 1 \rightarrow$ Dividendo

$\frac{1}{3}$	0	-3	0	1
-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{5}{3}$

Cociente $\rightarrow \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$

Resto $\rightarrow -\frac{5}{3}$

Teorema del resto

El **resto** de la división de un polinomio por otro de la forma " $x + a$ ", es el valor que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto al término independiente del divisor.

a) Dados: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$. b) Dados: $P(x) = x^2 - 2x - 3$ y $Q(x) = x - 3$.

El resto de la división $P(x):Q(x)$, se obtiene:

$P(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - (-2) - 5$

$P(-2) = -16 + 20 + 2 - 5 = 1$

El resto de la división es 1.

El resto de la división $P(x):Q(x)$, es:

$P(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 3$

$P(3) = 9 - 6 - 3 = 0$

Si el resto es 0 (cero): **$P(x)$ es divisible por $Q(x)$.**

Potenciación de polinomios

Potencia de un monomio

Para resolver la potencia de un monomio, se debe aplicar la propiedad distributiva de la potenciación respecto de la multiplicación y la potencia de otra potencia.

$$\begin{aligned}(a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \\ (x^n)^m &= x^{n \cdot m}\end{aligned}$$

$$\text{a) } (2x)^4 = 2^4 \cdot x^4 \qquad \text{b) } (-3x^3)^2 = (-3)^2 \cdot (x^3)^2 = 9x^6$$

Cuadrado de un binomio

Al elevar al cuadrado un binomio se obtiene un **trinomio cuadrado perfecto**.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a.a + a.b + b.a + b.b = a^2 + 2.ab + b^2$$

Generalizando:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2.ab + b^2$$

Cuadrado de un binomio Trinomio cuadrado perfecto

$$\text{a) } (x+3)^2 = x^2 + 2.3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\text{b) } (2x-5)^2 = (2x)^2 - 2.2x.5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

$$\text{c) } \left(-\frac{3}{2}x + x^2\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}x\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{2}x\right).x^2 + (x^2)^2 = \frac{9}{4}x^2 - 3x^3 + x^4$$