

Actuarial Formula Cheat Sheet
Mi Hoja de Referencia Actuarial

Máster en Economía de Seguros/Econometría
Master en Ciencias Actuariales

October 4, 2025

1 – Seguros de vida y no vida

La distinción entre seguros de vida y no vida es fundamental. Una aseguradora no puede ofrecer ambos tipos de seguros sin tener dos compañías separadas:

- **Seguro de vida**, es decir, seguro personal que excluye la cobertura de lesiones corporales.
- **Seguro distinto del de vida**, que incluye seguros de propiedad y de responsabilidad civil, así como seguros de lesiones corporales.

2 – Los principios del seguro

Se asume que el seguro :

- basarse en la máxima buena fe,
- se aplican únicamente si el asegurado tiene un interés asegurable en preservar el artículo (seguro de propiedad),
- operar bajo el principio de indemnidad :
 - no permitir el enriquecimiento a partir de una liquidación de siniestros,
 - ni siquiera a través de la acumulación de seguros,
 - incluir la subrogación (en el seguro de responsabilidad civil, si el asegurador indemniza a la víctima asegurada, éste no puede luego reclamar al responsable del siniestro).
- no reducirá los esfuerzos del asegurado en materia de prevención y protección, como persona razonable, incluso si está protegido económicamente.

establecer la causa de un accidente en Responsabilidad Civil, quién no es responsable si no contribuye a la causa del accidente.

3 – La póliza de seguro

La **póliza de seguro** (o contrato) es el documento contractual que rige la relación entre la compañía de seguros (o mutua) y el asegurado (tomador del seguro). El presente contrato define en particular :

1. la lista de eventos cubiertos, incluidas las exclusiones,
2. la cobertura, es decir, la asistencia prestada al asegurado en caso de pérdida,
3. las obligaciones del asegurado :
 - cualquier medida preventiva necesaria para reducir el riesgo,
 - plazos para comunicar un siniestro a la aseguradora,
 - el importe y las condiciones de pago de la prima (deducible, límite),
 - las condiciones de cancelación de la póliza (renovación automática),
4. Las obligaciones de la compañía de seguros : plazos para el pago de indemnizaciones.

4 – La prima y las reclamaciones

Clásicamente, el papel de la aseguradora es sustituir una constante C , la **contribución** o la **prima**, por un reclamo aleatorio S . La **prima pura** o **técnica** tiene como objetivo compensar las reclamaciones sin excedente ni beneficio, en general $C_t = \mathbb{E}[S]$

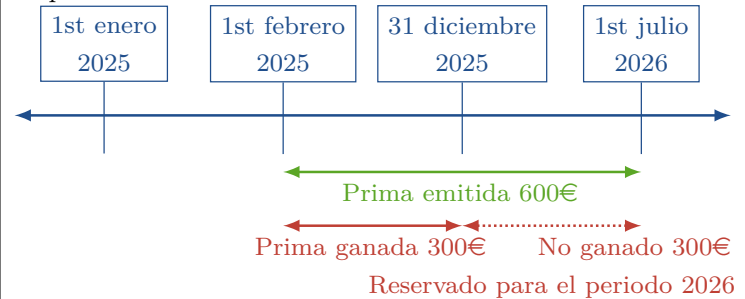
La **prima neta** es superior a la prima pura. Su objetivo es cubrir el coste de las reclamaciones y proporcionar un margen de seguridad.

La **prima bruta** es la prima neta + gastos generales + comisiones + beneficio esperado + impuestos.

Por razones comerciales, la prima efectivamente cobrada puede diferir significativamente de la prima técnica.

Prima escrita: prima cobrada al asegurado para cubrir reclamos que puedan ocurrir durante el período de cobertura definido por el contrato (generalmente 1 año en seguros de propiedad y accidentes).

Prima devengada: proporción de la prima emitida utilizada para cubrir el riesgo durante el período de exposición de un año de póliza.



El S/P es el indicador clave. Para que la aseguradora obtenga beneficios, el $S/P \ll 1$.

5 – Triángulo de pérdida / pago

La contabilidad de seguros se desglosa según el **año del accidente** del reclamo. Si una prima cubre varios años naturales, se asignará una parte proporcional a cada uno de ellos. Cada pago y cada reserva de siniestro se asigna al año del accidente. El seguimiento de los pagos o gastos se expresa a través de un triángulo (matriz triangular) :

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ C_{n-1,1} & C_{n-1,2} & & \\ C_{n,1} & & & \end{pmatrix}$$

donde $C_{i,j} = \sum_{k=1}^j X_{i,k}$ representa el monto acumulado de reclamaciones pagadas para el año de origen i y el año de desarrollo j .

6 – Solvencia II y Gestión de Riesgos

Solvencia II es el marco regulatorio europeo aplicable a aseguradoras y reaseguradoras desde 2016. Se basa en tres pilares interdependientes :

• Pilar 1 : Requisitos cuantitativos

Determina los requisitos de capital :

- **SCR** (Requisito de Capital de Solvencia) : capital para absorber un shock extremo (99.5% en un año),
- **MCR** (Requisito de Capital Mínimo) : umbral mínimo absoluto,

- activos admisibles para cubrir reservas técnicas y requerimientos de capital.

• Pilar 2 : Gobernanza, control interno y gestión de riesgos

Gira en torno a **ERM** (*Enterprise Risk Management*). Los requisitos cubren :

- gobernanza : juntas directivas responsables del marco de gestión de riesgos ;
- un sistema de **control interno** eficaz ;
- funciones clave independientes : **actuuario, gestión de riesgos, cumplimiento, auditoría interna** ;
- **ORSA** (*Own Risk and Solvency Assessment*) : Evaluación interna de riesgos y solvencia, una herramienta central que alinea la estrategia, el apetito de riesgo y el capital económico.

• Pilar 3 : Disciplina de mercado

Basado en la **transparencia** y la comunicación :

- **SFCR** (*Solvency and Financial Condition Report*) : público, resume la solvencia y la posición financiera,
- **RSR** (*Regular Supervisory Report*) : destinado al supervisor,
- Informes cuantitativos : declaraciones regulatorias (**QRTs**), Presentación periódica de datos financieros y prudenciales.

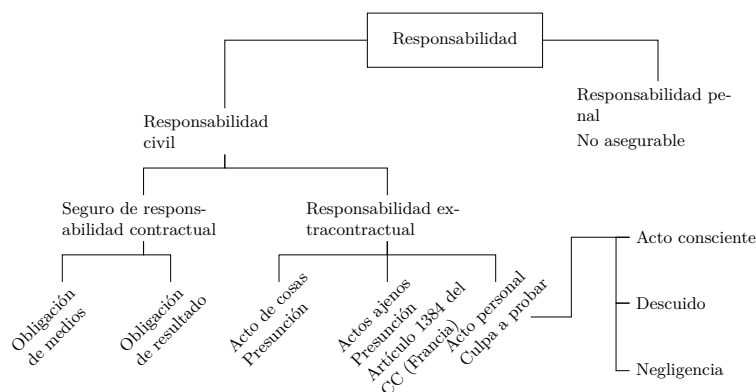
7 – Principales ramas de seguros de vida y no vida

El seguro de vida cubre compromisos a largo plazo, con o sin componente de ahorro :

- **Seguro de vida** : suma global o anualidad pagada si el asegurado está vivo en una fecha determinada.
- **Seguro de muerte** : pago si el asegurado fallece durante el período cubierto. **Seguro de dotación** : combinación de cobertura de vida y muerte. **Renta vitalicia** : pagos periódicos hasta la muerte. **Ahorro/jubilación** : productos con capital diferido o renta diferida.
- Pólizas vinculadas a unidades : beneficios que dependen del valor de los activos financieros.
- **Contratos colectivos** : pensiones de jubilación, seguros colectivos de bienestar.

El seguro de no vida cubre los riesgos que se producen a corto o medio plazo. :

- **Automóvil** : responsabilidad civil, daños al vehículo.
- **Vivienda** : incendio, robo, daños por agua, responsabilidad.
- **Responsabilidad civil general** : responsabilidad civil vida privada, responsabilidad civil empresarial.
- **Salud y bienestar** : reembolsos médicos, discapacidad, incapacidad.
- **Lesiones personales** : capital en caso de accidente, invalidez o muerte.
- **Interrupciones de negocios** : pérdidas financieras vinculadas a un desastre.
- **Interrupciones comerciales** : pérdidas financieras vinculadas a un desastre.
- **Transporte, aviación, seguro marítimo** : mercancías en tránsito, responsabilidades específicas.

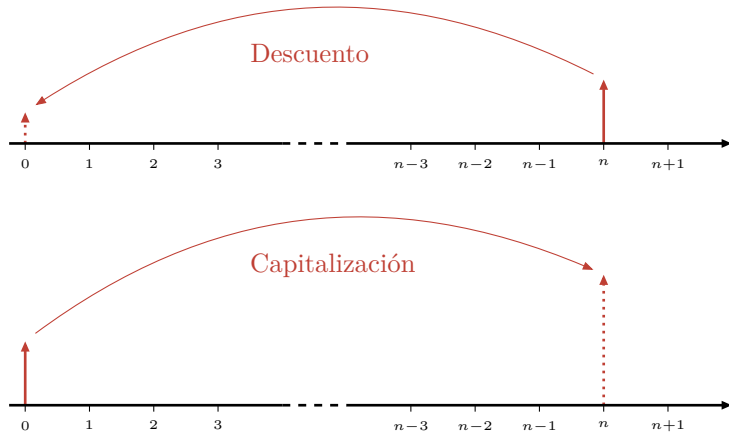


8 – Actuuario

En la práctica, el actuuario :

- precios de productos de seguros y bienestar,
- estima las reservas técnicas,
- proyecta flujos de efectivo y valora pasivos a largo plazo,
- Mide el capital económico (SCR, ORSA) y contribuye a la ERM,
- asesora a la gerencia sobre estrategia, solvencia y cumplimiento normativo..

9 – Capitalisation Actualisation



10 – Intereses

Tasa de descuento d

$$d = i/(1+i)$$

Interés simple i

$$I_t = Pit = Pi \frac{k}{365}$$

Interés compuesto i

$$V_n = P(1+i)^n = P \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Interés continuo r

$$V_t = V_0 e^{rt}$$

Tasa efectiva i_e

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

donde i es la tasa nominal y m el número de períodos en un año.

Tasa equivalente $i^{(m)}$

$$i^{(m)} = m \left((1+i)^{1/m} - 1 \right)$$

Tasa nominal i y tasa periódica

La tasa **nominal** o **facial** permite calcular el interés a pagar en un año. La tasa **periódica** corresponde a la tasa nominal dividida por el número de períodos en un año i/m . Si la tasa periódica es semanal, la tasa nominal se dividirá entre 52.

11 – Valeur actuelle et valeur future

El valor actual (VP) representa el capital que debe invertirse hoy a una tasa de interés compuesta anual i para obtener flujos de efectivo futuros (F_k) en tiempos t_k :

$$VP = \sum_{k=1}^n F_k \times \frac{1}{(1+i)^{t_k}} \quad (1)$$

Cuando los F_k son constantes

$$VP = K \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad (2)$$

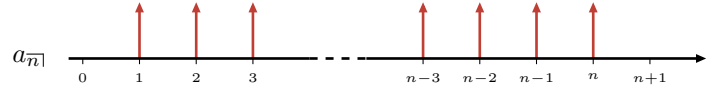
El valor futuro (VF) representa el valor del capital en T que, con una tasa de interés compuesta anual i , capitaliza los flujos de efectivo futuros (F_k) en tiempos t_k .

$$VF = V_n = \sum_{k=1}^n F_k \times (1+i)^{n-t_k} \quad (3)$$

De manera más general $VF = (1+i)^n VP$.

12 – Anualidades

Anualidad determinada $a_{\overline{n}|}$ (o $a_{\overline{n}|i}$ si es necesario especificar el tipo de interés i : este es el caso por defecto en matemáticas financieras. Sus pagos están, por ejemplo, garantizados por un contrato.



$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \dots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}$$

Renta vitalicia contingente \ddot{a}_x : sus pagos están condicionados a un evento aleatorio, como una renta vitalicia de una persona de x . En este ejemplo, los pagos continúan hasta el fallecimiento:



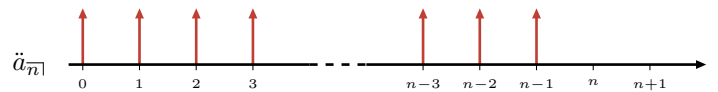
La fecha del fallecimiento se representa aquí mediante un pequeño ataúd. Este tipo de anualidad se estudiará extensamente en la sección sobre seguros de vida.

Anualidad vencida (inmediata) $a_{\overline{n}|}$: sus pagos periódicos se realizan al final de cada período de pago, como un salario a fin de mes. Este es el caso predeterminado, ilustrado previamente para la anualidad en cuestión.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \dots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d}$$

$$PV_{\overline{n}|}^{\text{due}} = K \ddot{a}_{\overline{n}|} = K \frac{1-v^n}{d}$$

Anualidad anticipada (vencida) $\ddot{a}_{\overline{n}|}$: sus pagos periódicos se efectúan al inicio de cada período de pago, como ocurre, por ejemplo, con el pago del alquiler.



También denotada PV^{im} :

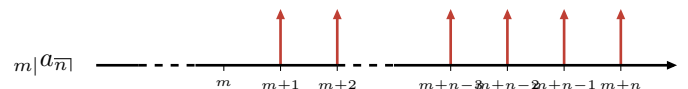
$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \dots + v^n = \frac{1-v^n}{i} = v \frac{1-v^n}{1-v}$$

$$PV_{\overline{n}|}^{\text{im}} = K a_{\overline{n}|} = K \frac{1-v^n}{i}$$

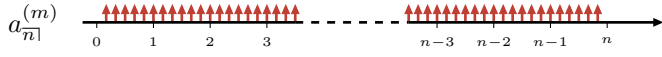
Anualidad perpetua a ó $a_{\infty|}$:

$$a = 1/i$$

Anualidad diferida ${}_m|a_{\overline{n}|}$: sus pagos no comienzan en el primer periodo sino después de m periodos, con m fijos de antemano.



Anualidad periódica/mensual $a^{(m)}$: la periodicidad predeterminada es de un año, pero el pago unitario también puede distribuirse en m periodos dentro del año.



Si $i^{(m)}$ representa la tasa de interés nominal (anual) equivalente con m periodos por año, entonces $i^{(m)} = m((1+i)^{1/m} - 1)$.

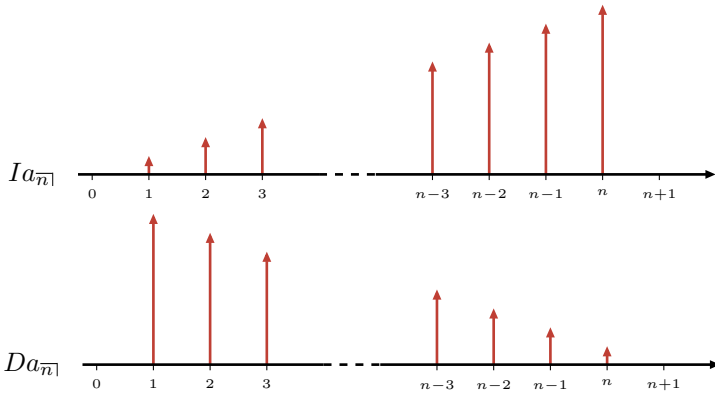
De manera similar, $d^{(m)}$ es la tasa de descuento nominal consistente con d y m : $d^{(m)} = m(1 - (1-d)^{1/m})$.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{mn-1} v^{\frac{k}{m}} = \frac{d}{d^{(m)}} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}} \approx \ddot{a}_{\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m} (1-v^n)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{mn} v^{\frac{k}{m}} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i^{(m)}} \approx a_{\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m} (1-v^n)$$

Anualidad unitaria a : se utiliza al construir fórmulas de anualidades. Para una anualidad constante, el monto total pagado cada año es 1, independientemente de m .

Anualidad dinámica, creciente/decreciente Ia/Da : en su forma más simple, paga una cantidad que comienza en 1 (n) y aumenta (decrece) cada período aritmética o geoméricamente. En el siguiente ejemplo, la progresión es aritmética. El prefijo I (increasing) se utiliza para indicar anualidades crecientes y D (decreasing) para anualidades decrecientes.



$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = 1 + 2v + \dots + nv^{n-1} = \frac{1}{d} (\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n) \quad (4)$$

con, recordamos, $d = i/(1+i)$ y vencida (inmediata)

$$(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + \dots + nv^n = \frac{1}{i} (\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n)$$

$$(D\ddot{a})_{\overline{n}|} = n + (n-1)v + \dots + v^{n-1} = \frac{1}{d} (n - a_{\overline{n}|})$$

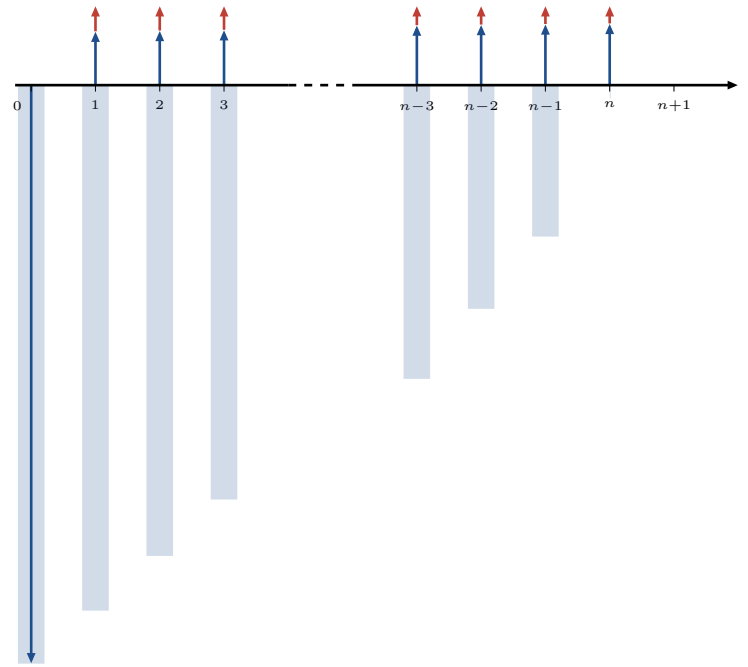
y vencida :

$$(Da)_{\overline{n}|} = nv + (n-1)v^2 + \dots + v^n = \frac{1}{i} (n - a_{\overline{n}|})$$

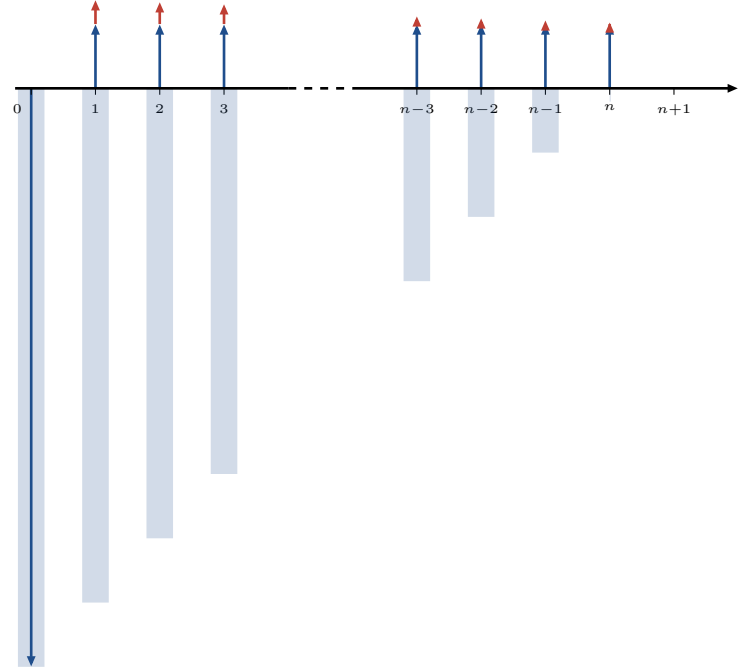
13 – Préstamos (indivisibles)

La propiedad principal del préstamo es considerar separadamente el interés de la devolución (o amortización).

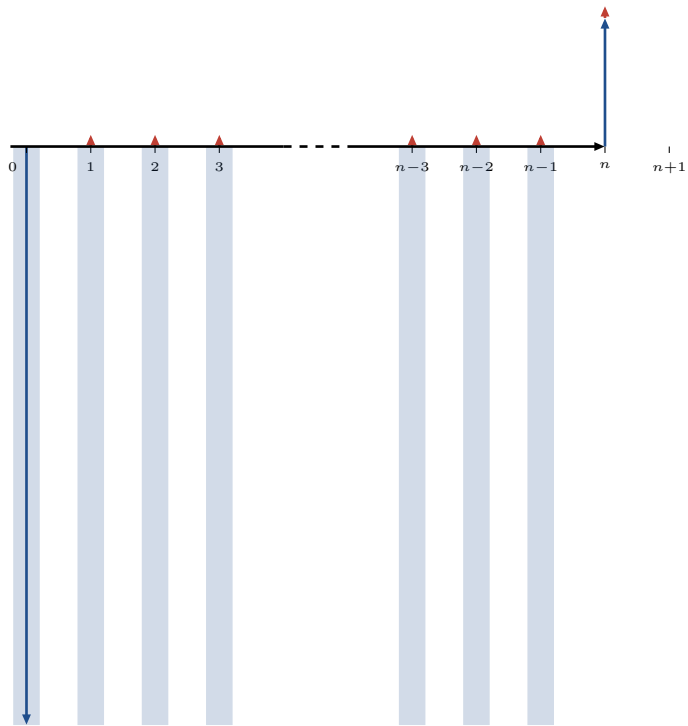
Por amortización constante o anualidad constante: la suma de la amortización y los intereses en cada periodo es constante.



Por amortización constante.



Mediante un pago único, donde el interés es constante. Solo los intereses se pagan periódicamente hasta el vencimiento, momento en el que se realiza el pago total.



14 – Tabla de amortización de préstamos

	Pago	Amortizaciones constantes	Anualidades constantes
Capital vivo S_k	$T_k = S_0, T_n = 0$	$S_0 \left(1 - \frac{k}{n}\right)$	$S_0 \frac{1-v^{n-k}}{1-v^n}$
Intereses U_k	$i \times S_0$	$S_0 \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) i$	$K \left(1 - v^{n-k+1}\right)$
Amortiza- ciones T_k	$T_k = 0, T_n = S_0$	$\frac{S_0}{n}$	$K v^{n-k+1}$
Anualidad K_k	$K_k = iS_0, K_n = (1+i)S_0$	$\frac{S_0}{n} (1-(n-k+1)i)$	$K = S_0 \frac{i}{1-v^n}$

15 – Funcionamiento del mercado

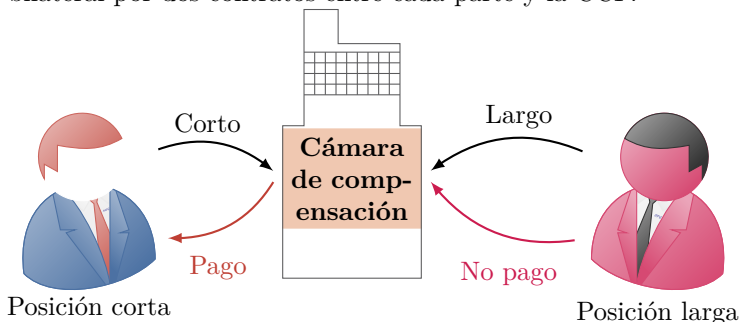
La **Bolsa** (Exchange) - un lugar de intercambio - permite, de hecho, el encuentro físico entre demandantes y oferentes de capital. Las principales cotizaciones se refieren a **acciones**, (equities), los **bonos** (Fixed Income) y las **materias primas** (commodities). Se enumeran **valores** como acciones o bonos, **fondos** ((Exchange Trade Funds que replican índices de acciones, ETC o ETN que replican índices o materias primas más específicos, SICAV o FCP, bonos de suscripción, warrant), **contratos de futuros**, **opciones**, **swaps** y **productos estructurados**.

L'Comisión Nacional del Mercado de Valores (**CNMV**) vela por :

- la protección de los ahorros invertidos;
- la información de los inversores;
- el buen funcionamiento de los mercados.

Euronext (incluyendo **Amsterdam**, **Brussels**, **Lisbon**, y **Paris**) es la principal bolsa de valores de Francia. Sus competidores incluyen **Deutsche Börse** (que incluye **Eurex**, **EEX**) en Europa, or **ICE** (que incluye **NYSE (2012)**, **NYBOT (2005)**, **IPE (2001)**, **LIFFE**) y **CME Group** (incluyendo **CBOT**, **NYMEX**, **COMEX**) en los Estados Unidos.

El **mercado extrabursátil** (**OTC**) representa una parte importante de los volúmenes negociados fuera de los mercados organizados. Depuis le G20 de Pittsburgh (2009), certains dérivés OTC standardisés doivent être compensés via une entité centrale. Estas **CCP** (entidades de contrapartida central) desempeñan así el papel de **cámaras de compensación**: sustituyen el contrato bilateral por dos contratos entre cada parte y la CCP.



16 – El mercado monetario

Los valores a corto plazo que devengan intereses y que se negocian en los mercados monetarios generalmente tienen un **interés descontado**. Las tasas nominales son entonces anuales y los cálculos utilizan **tasas proporcionales** para ajustarse a duraciones inferiores a un año. Estos valores se cotizan o valoran según el principio de descuento y con un calendario Euro-30/360.

En el mercado estadounidense los títulos de deuda pública se denominan : Letras del Tesoro (T-bills) : $ZC < 1$ año, Notas del Tesoro (T-notes) : $ZC < 10$ años, Bonos del Tesoro (T-bonds) : bonos con cupón y vencimiento > 10 años.

Ellas son principalmente :

- **BTF (letras del Tesoro a tipo fijo, Francia)** : emitidas a 13, 26 y 52 semanas, tipo de interés descontado, subasta semanal, nominal 1 €, liquidación en T+2.
- **Letras del Tesoro > 1 año** : mismas reglas que los bonos (ver siguiente sección).

- **Certificados de depósito (CDN)** : valores emitidos por bancos a tasa fija/descontada (corto plazo) o variable/post-descontada (largo plazo), también llamados BMTN.

Eurodólares : depósitos en dólares estadounidenses fuera de los EE. UU., anteriormente indexados a la LIBOR, ahora están disminuyendo.

- **Papel comercial** : valores a corto plazo no garantizados emitidos por grandes empresas para financiar su flujo de caja.

Cálculos de precios de una letra del Tesoro a tipo fijo con interés descontado

En el caso de un título con interés descontado según la convención Euro-30/360, el descuento D se expresa como :

$$D = F \cdot d \cdot \frac{k}{360}$$

donde F denota el valor nominal, d la tasa de descuento anual utilizada para valorar el título descontado, y k el vencimiento en días.

Si se conoce la tasa de descuento d , entonces el precio P se expresa como :

$$P = F - D = F \left(1 - d \cdot \frac{k}{360} \right)$$

De manera similar, si se conoce el precio P , entonces la tasa de descuento d se deriva como :

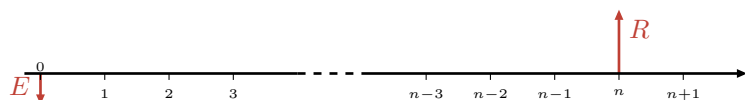
$$d = \frac{F - P}{F} \cdot \frac{360}{k}$$

Principales contratos de futuros : Futuros de Fondos Federales (EE. UU.) Futuros SOFR a tres meses (EE. UU.), Futuros ESTR (UE), Futuros SONIA (UK), Futuros Euribor (UE).

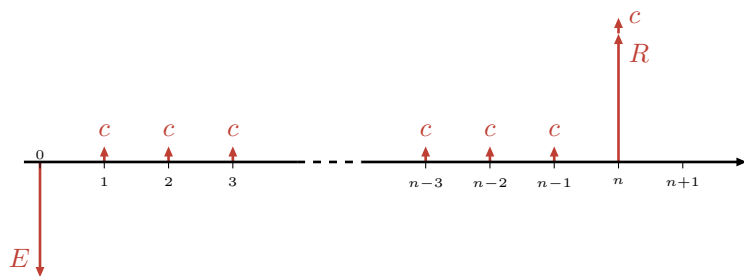
17 – Mercado de bonos

Los **bonos** son títulos de deuda a largo plazo en los que el emisor (gobierno central o local, banco, empresa prestataria) promete al tenedor del bono (el prestamista) pagar intereses (**cupones**) periódicamente y reembolsar el **valor nominal** (o valor facial, o capital) al vencimiento. Como se mencionó en la sección anterior, las **letras del Tesoro con vencimiento mayor a un año** serán tratadas como bonos con vencimiento menor a 5 años porque su funcionamiento es similar.

Bonos cupón cero : pagan solo el valor nominal al vencimiento. Con E el precio de emisión y R su valor de rescate :



Bonos con cupón : Los bonos a tipo fijo tienen un tipo de interés cupón que se mantiene constante hasta el vencimiento. Suponiendo un **reembolso** de tipo de interés variable, con E como precio de emisión, c como cupones y R como valor de rescate, se puede ilustrar de la siguiente manera. :



Los **bonos indexados** (bonos vinculados a la inflación) tienen cupones y, a veces, también el valor nominal indexado a la inflación u otro indicador económico, como los bonos asimilables del Tesoro. indexado a la inflación (OATi). Los valores de c varían.

Bonos con **tipo de interés flotante**, **tipo de interés variable** o **tipo de interés reajutable** : tienen un tipo de cupón vinculado a un tipo de interés de referencia (por ejemplo, el euro short- term rate (**€STR**)).

Los **bonos perpetuos** no tienen fecha de vencimiento; el capital nunca se devuelve.

A menudo se hace una distinción entre los bonos del Estado (bonos del Tesoro) y bonos corporativos emitidos por empresas privadas.

Un bono se define principalmente por un **valor nominal** F (valor nominal), la **tasa nominal** i , su duración o **vencimiento** n . En el caso predeterminado, el tenedor del bono presta la cantidad $E = F$ en la emisión en el momento 0, recibe cada año un cupón $c = i \times F$ y en n se devuelve el principal o capital $R = F$. Cuando $E = F$, se dice que la emisión está a la par, y cuando $R = F$, se dice que la redención está a la par.

El precio de un bono se determina por el valor actual de los flujos de efectivo futuros esperados (cupones y reembolso de capital) descontados a la tasa de rendimiento del mercado r .

El cálculo del precio de los bonos se basa simplemente en la fórmula del valor actual :

$$VP = \sum_{k=1}^n \frac{c}{(1+r)^k} + \frac{F}{(1+r)^n}$$

donde :

- VP : precio o valor actual del bono,
- r : tasa de interés de mercado para el vencimiento correspondiente.

Para los bonos con cupones periódicos, el cupón se divide por el número de períodos (m) por año y la fórmula se convierte en :

$$VP = \sum_{k=1}^{mn} \frac{c/m}{(1+r^{(m)})^k} + \frac{R}{(1+r^{(m)})^{mn}}$$

donde c/m representa el pago periódico del cupón y $r^{(m)}$ la tasa de interés periódica.

El rendimiento del bono es el valor $r^{(m)}$, la tasa equivalente de r durante m períodos en el año, que iguala el valor actual VP_r con el precio actual o de mercado de este bono.

La cotización de un bono se expresa como porcentaje. Por lo tanto, una cotización de 97.9 en Euronext indica un valor cotizado de $97.9/100 \times F$. Se cotiza excluyendo **cupones acumulados**, la parte del siguiente cupón a la que tiene derecho el vendedor si el bono se vende antes del pago de ese cupón.

18 – Duración & convexidad

La duración de Macaulay :

$$D = \sum_{t=1}^n t \cdot w_t, \quad \text{où} \quad w_t = \frac{PV(C_t)}{P}.$$

Si la frecuencia de pago es k por año, la duración expresada en años se obtiene dividiendo entre k . La duración modificada D^* :

$$D^* = \frac{D}{1+i}.$$

Lo que permite aproximar el cambio de cartera ΔP en caso de cambios en la tasa de interés Δ_i

$$\Delta P \approx -P D^* \Delta_i$$

De manera similar, la convexidad

$$C = \frac{1}{P(i)} \times \frac{d^2 P(i)}{di^2},$$

lo que permite refinar la aproximación de ΔP

$$P(i + \Delta_i) \approx P(i) \left(1 - D^* \Delta_i + \frac{1}{2} C (\Delta_i)^2 \right).$$

19 – CAPM

El CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) :

$$E(r_i) = r_f + \beta_i (E(r_m) - r_f)$$

- $E(r_i)$ es el rendimiento esperado del activo i ,
- r_f es la tasa libre de riesgo,
- $E(r_m)$ es el rendimiento esperado del mercado,
- β_i es el coeficiente de sensibilidad del activo i con respecto a las variaciones del mercado.

El coeficiente β_i mide la volatilidad del activo i en relación con el mercado general.

20 – Mercado de derivados

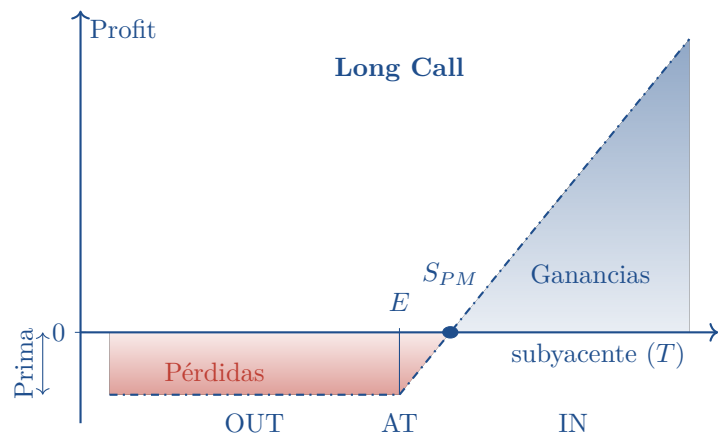
Un **contrato derivado** (o activo contingente) es un instrumento financiero cuyo valor depende de un activo subyacente o variable. Las opciones forman parte de los contratos derivados.

Una **opción** es un contrato que otorga el derecho (sin obligación) de comprar (call) o vender (put) un activo subyacente a un precio fijo (precio de ejercicio) en una fecha futura, a cambio del pago de una prima. El comprador (posición larga) paga la prima; el vendedor (posición corta) la recibe. **Opción europea** (ejercicio posible solo al vencimiento) y **Opción americana** (ejercicio posible en cualquier momento hasta el vencimiento).

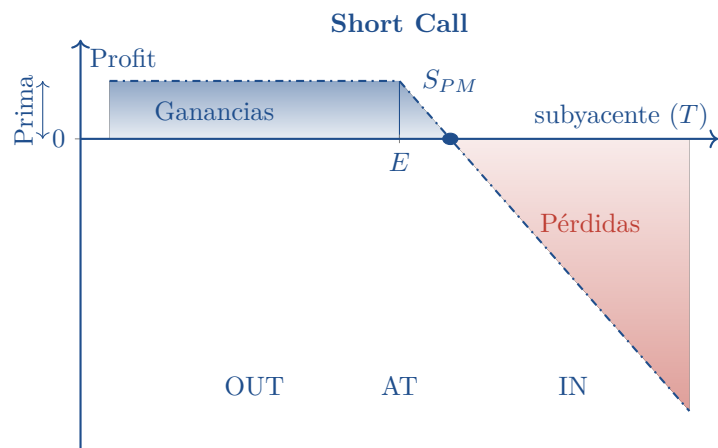
Las opciones que cotizan en acciones se denominan *stock options*.

21 – Estrategias simples

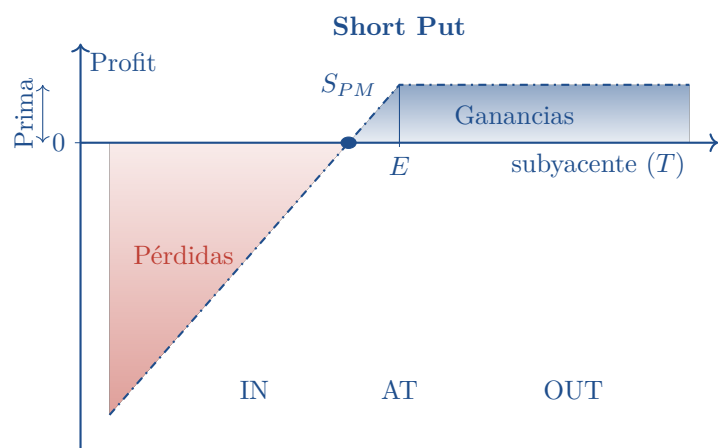
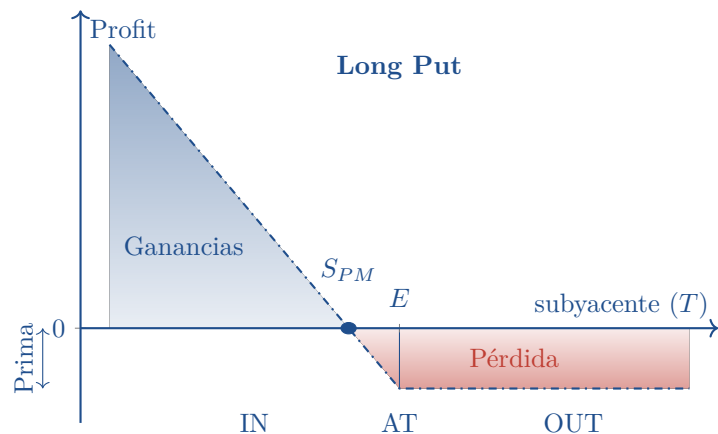
Con T el vencimiento, K el precio de ejercicio, S o S_T el subyacente al vencimiento, la recompensa (**payoff**) es $\max(0, S_T - K) = (S_T - K)^+$. Si C es la prima, la ganancia obtenida es $\max(0, S_T - K) - C$, con una ganancia si $(S_T < V_{PM} = K + C)$ (PM representa el **punto de equilibrio**).



Al vencimiento, el pago es $\min(0, K - S_T) = -\max(0, S_T - K) = -(S_T - K)^+$ y la ganancia obtenida es $C - \max(0, S_T - K)$.



Al vencimiento, el pago es $\max(0, K - S_T) = (K - S_T)^+$. Si P es la prima de la opción de venta, el beneficio obtenido es $\max(0, K - S_T) - P$, positivo si $V_{PM} = K - P < S_T$.



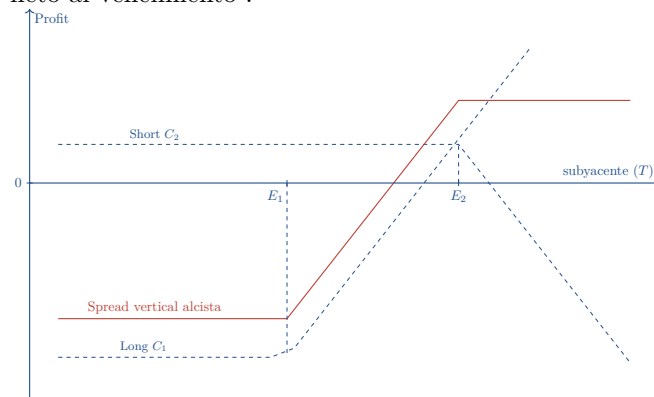
Al vencimiento, el pago es $\min(0, S_T - K) = -(K - S_T)^+$.

22 – Estrategias de spread

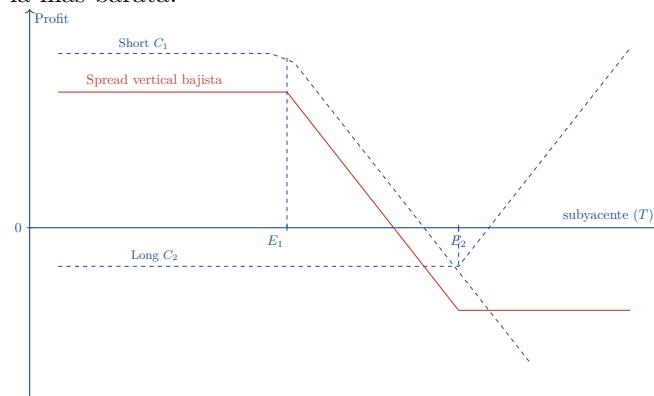
Estrategia de spread : utiliza dos o más opciones del mismo tipo (dos opciones de compra o dos opciones de venta). Si los precios de ejercicio varían, se trata de un **spread vertical**. Si los vencimientos cambian, se trata de un **spread horizontal**.

Una estrategia de spread vertical implica una posición larga y una posición corta en opciones de compra sobre el mismo activo subyacente, con el mismo vencimiento pero diferentes precios de ejercicio. Distinguimos : **spread vertical alcista** (*Bull spread*) y **spread vertical bajista** (*Bear spread*).

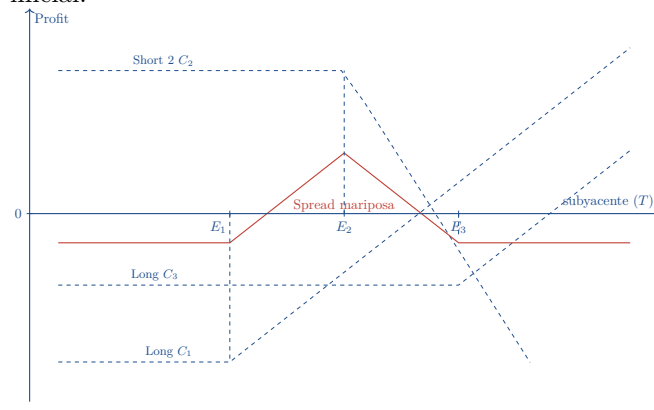
Spread vertical alcista : anticipando un aumento moderado del activo subyacente, el inversor toma una posición larga en C_1 y una posición corta en C_2 bajo la condición $E_1 < E_2$. Resultado neto al vencimiento :



Spread vertical bajista : anticipando una caída moderada del activo subyacente, el inversor vende la opción más cara y compra la más barata.



Spread mariposa (*butterfly spread*) : anticipa un pequeño movimiento en el activo subyacente. Es una combinación de un spread vertical alcista y un spread vertical bajista. Esta estrategia es adecuada cuando se considera poco probable que se produzcan grandes movimientos. Requiere una baja inversión inicial.

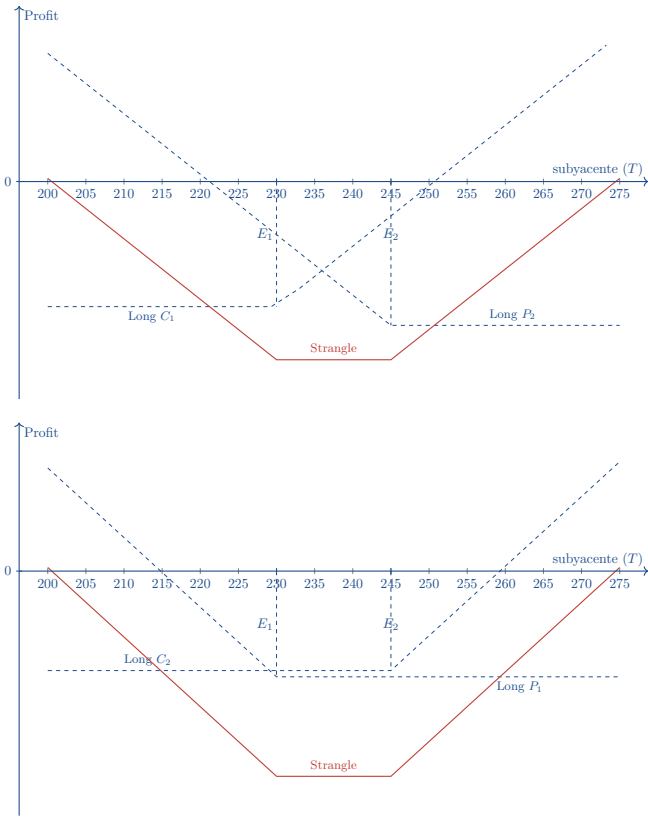


23 – Estrategias combinadas

Una **estrategia combinada** utiliza opciones de compra y venta. En particular, distinguimos entre **straddles** y **strangles**.

Un **straddle** combina la compra de una opción de compra (call) y una opción de venta (put) con la misma fecha de vencimiento y precio de ejercicio. Esta estrategia apuesta por una fuerte fluctuación del precio, ya sea al alza o a la baja. La pérdida máxima se produce si el precio al vencimiento es igual al precio de ejercicio.

Un **strangle** es la compra de una opción call y una opción put con la misma fecha de vencimiento, pero con diferentes precios de ejercicio. Supone una fluctuación muy pronunciada en el valor del activo subyacente.



24 – Ausencia de oportunidad de arbitraje

Es imposible obtener una ganancia sin riesgo con una inversión inicial nula. Por lo tanto, no es posible obtener ganancias sin riesgo aprovechando las diferencias de precios.

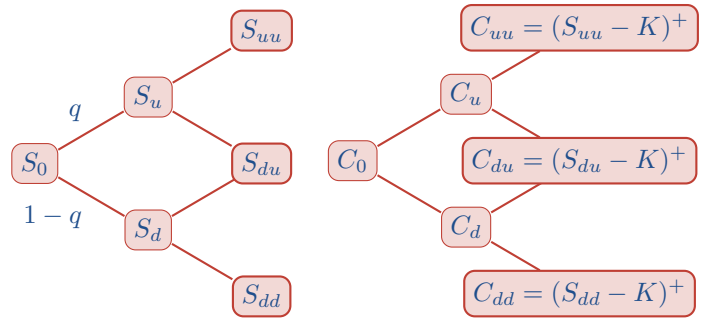
25 – Relación de paridad

AAO implica la siguiente relación entre el Call y el Put (acción) :

$$S_t - C_t + P_t = Ke^{-i_f \cdot \tau}$$

26 – El modelo de Cox-Ross-Rubinstein

Se basa en un proceso de tiempo discreto con dos posibles movimientos de precio en cada período : un aumento (factor u) o una disminución (factor d), con $u > 1 + i_f$ y $d < 1 + i_f$. El precio en $t = 1$ es entonces $S_1^u = S_0 u$ o $S_1^d = S_0 d$, según una probabilidad q o $1 - q$.



Este modelo se extiende a n periodos con $n + 1$ precios posibles para S_T . Al vencimiento, el valor de una opción de compra viene dado por $C_1^u = (S_1^u - K)^+$ y $C_1^d = (S_1^d - K)^+$.

La **ausencia de oportunidad de arbitraje** implica

$$d < 1 + i_f < u$$

y una probabilidad neutral al riesgo

$$q = \frac{(1 + i_f) - d}{u - d}$$

Precio de Call (con $S_1^d < K < S_1^u$) :

$$C_0 = \frac{1}{1 + i_f} [qC_1^u + (1 - q)C_1^d]$$

También podemos construir una cartera de replicación compuesta por acciones Δ y bonos B , de modo que :

$$\begin{cases} \Delta = \frac{S_1^u - K}{S_1^u - S_1^d}, \\ B = \frac{-S_1^d}{1 + i_f} \cdot \Delta \end{cases} \Rightarrow \Pi_0 = \Delta S_0 + B$$

Precio de Put :

$$P_0 = \frac{1}{1 + i_f} [qP_1^u + (1 - q)P_1^d]$$

Determinación de q, u, d : Al calibrar el modelo para que coincida con los primeros momentos del retorno bajo la probabilidad neutral al riesgo (valor esperado i_f , varianza $\sigma^2 \delta t$), obtenemos :

$$e^{i_f \delta t} = qu + (1 - q)d, \quad qu^2 + (1 - q)d^2 - [qu + (1 - q)d]^2 = \sigma^2 \delta t$$

Con la restricción $u = \frac{1}{d}$, obtenemos :

$$\begin{aligned} q &= \frac{e^{-i_f \delta t} - d}{u - d} \\ u &= e^{\sigma \sqrt{\delta t}} \\ d &= e^{-\sigma \sqrt{\delta t}} \end{aligned}$$

27 – El modelo de Black & Scholes

Supuestos del modelo

- La tasa libre de riesgo R es constante. Definimos $i_f = \ln(1 + R)$, lo que implica $(1 + R)^t = e^{i_f t}$.
- El precio de las acciones S_t sigue un movimiento browniano geométrico :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

$$S_t = S_0 \exp \left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right)$$

- No habrá dividendos durante la vigencia de la opción.
- La opción es "europea" (se ejerce sólo al vencimiento).

- Mercado sin fricciones : sin impuestos ni costes de transacción.
- Se permiten las ventas en corto.

La ecuación de Black-Scholes-Merton para valorar un contrato derivado f es :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i_f S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = i_f f$$

Al vencimiento, el precio de una opción de compra es $C(S, T) = \max(0, S_T - K)$, y el de una opción de venta es $P(S, T) = \max(0, K - S_T)$.

Determinantes	call	put
Precio subyacente	+	-
Precio de ejercicio	-	+
Madurez (o tiempo)	+ (-)	+ (-)
Volatilidad	+	+
Tasas de interés a corto plazo	+	-
Pago de dividendos	-	+

Las soluciones analíticas son :

$$C_t = S_t \Phi(d_1) - K e^{-i_f \tau} \Phi(d_2)$$

$$P_t = K e^{-i_f \tau} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1)$$

ó :

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (i_f + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

- **Delta** Δ : variación en el precio de la opción dependiendo del subyacente.
- **Gamma** Γ : sensibilidad delta.
- **Thêta** Θ : sensibilidad al tiempo.
- **Véga** \mathcal{V} : sensibilidad a la volatilidad.
- **Rho** ρ : sensibilité au taux d'intérêt.

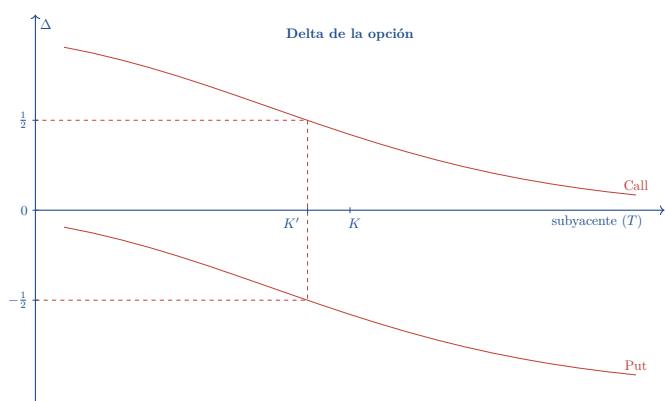
El **Delta** mide el impacto de un cambio en el activo subyacente :

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1), \quad \Delta \in (0, 1)$$

$$\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = \Phi(d_1) - 1, \quad \Delta \in (-1, 0)$$

El Delta global de una cartera Π con pesos ω_i es :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S_t} = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta_i$$



28 – La curva de rendimiento

La **curva de rendimiento**, o curva de retornos, o $r_f(\tau)$, proporciona una representación gráfica de las tasas de interés libres de riesgo en función del vencimiento (o plazo). También se denomina curva de rendimiento **cupón cero** y hace referencia a un tipo de bono libre de riesgo y sin cupones (una deuda compuesta únicamente por dos flujos de caja opuestos, uno en t_0 y el otro en T). Esta curva también proporciona información sobre las expectativas del mercado con respecto a las tasas de interés futuras (tasas forward).

29 – Los modelos Nelson-Siegel y Svensson

Las funciones **Nelson-Siegel** toman la forma

$$y(m) = \beta_0 + \beta_1 \frac{[1 - \exp(-m/\tau)]}{m/\tau} + \beta_2 \left(\frac{[1 - \exp(-m/\tau)]}{m/\tau} - \exp(-m/\tau) \right)$$

donde $y(m)$ y m son como arriba, y β_0 , β_1 , β_2 y τ son parámetros :

- β_0 se interpreta como el nivel de tipos de interés a largo plazo (el coeficiente es 1, es una constante que no disminuye),
- β_1 es el componente de corto plazo, teniendo en cuenta que :

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{[1 - \exp(-m/\tau)]}{m/\tau} = 1$$

De ello se deduce que el tipo de interés a un día, como ϵ_{str} , será igual a $\beta_0 + \beta_1$ en este modelo.

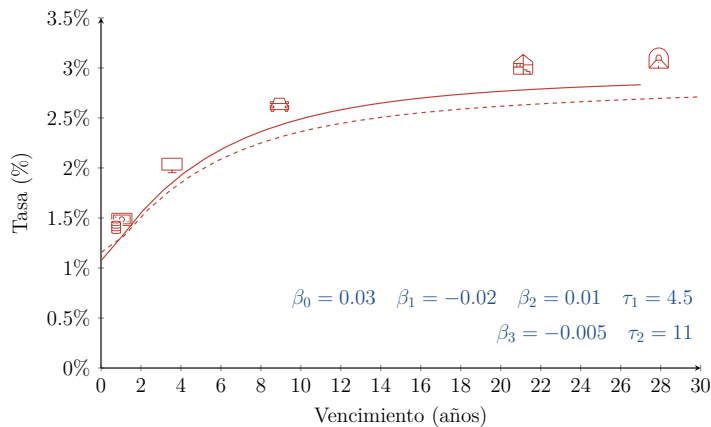
- β_2 es el componente de mediano plazo (comienza en 0, aumenta y luego disminuye nuevamente hacia cero, es decir, tiene forma de campana),
- τ es el factor de escala al vencimiento; determina dónde el término ponderado por β_2 alcanza su máximo.

Svensson (1995) añade un segundo término en forma de campana; este es el modelo de Nelson-Siegel-Svensson. El término adicional es :

$$+ \beta_3 \left(\frac{[1 - \exp(-m/\tau_2)]}{m/\tau_2} - \exp(-m/\tau_2) \right)$$

y la interpretación es la misma que para β_2 y τ anteriores; permite dos puntos de inflexión en la curva de rendimiento.

Estas funciones de Nelson-Siegel y Svensson tienen la ventaja de comportarse bien a largo plazo y ser fáciles de parametrizar. Ellas se ilustran en la figura donde los pictogramas representan los diferentes vencimientos habituales para este tipo de propiedad o inversión. Ellas permiten el modelado de una amplia curva de rendimiento. Una vez ajustado, el usuario puede evaluar los activos o definir diversas medidas de sensibilidad.



30 – Modelo de Vasicek

Bajo una probabilidad neutral al riesgo \mathbb{Q} , la tasa a corto plazo (r_t) sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck con coeficientes constantes :

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma dW_t, \quad r_0 \in \mathbb{R}$$

o :

- $\kappa > 0$ es la velocidad de reversión a la media,
- θ es el nivel medio a largo plazo,
- $\sigma > 0$ es la volatilidad,
- W_t es un movimiento browniano estándar bajo \mathbb{Q} .

La solución EDS (aplicación del lema de Itô a $Y_t = r(t)e^{\kappa t}$) :

$$r_t = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u$$

Entonces :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)})$$

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(t-s)})$$

El proceso (r_t) es gaussiano; son posibles tasas negativas.

31 – Precio de un bono cupón cero (Vasicek)

El precio en el momento t de un bono cupón cero que vence en T viene dado por :

$$ZC(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T) r_t}$$

où :

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}$$

$$A(t, T) = \exp \left[\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) (B(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2}{4\kappa} B(t, T)^2 \right]$$

Esta formulación es posible debido al hecho de que $\int_t^T r_s ds$ es una variable aleatoria gaussiana condicional a \mathcal{F}_t .

$$ZC(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

32 – Modelo Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Bajo la medida neutral al riesgo \mathbb{Q} , la tasa a corto plazo (r_t) sigue la dinámica :

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t, \quad r_0 \geq 0$$

con :

- $\kappa > 0$: velocidad de reversión a la media,

- $\theta > 0$: nivel a largo plazo,
- $\sigma > 0$: volatilidad,
- W_t : movimiento Browniano bajo \mathbb{Q} .

Entonces :

- La raíz cuadrada $\sqrt{r_t}$ garantiza $r_t \geq 0$ si $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ (condición de Feller).
- El proceso (r_t) es un proceso de difusión no gaussiano pero con trayectorias continuas.
- La tasa es de **reversión a la media** alrededor de θ .

Por tanto, el proceso (r_t) es una difusión con distribuciones condicionales explícitas (bajo \mathbb{Q}) :

Para $s < t$, la variable r_t sigue una distribución no central χ^2 :

$$r_t | \mathcal{F}_s \sim c \cdot \chi_d^2(\lambda)$$

con :

- $c = \frac{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(t-s)})}{4\kappa}$
- $d = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}$: grados de libertad
- $\lambda = \frac{4\kappa e^{-\kappa(t-s)} r_s}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa(t-s)})}$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] &= r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}) \\ \text{Var}_{\mathbb{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] &= \frac{\sigma^2 r_s e^{-\kappa(t-s)} (1 - e^{-\kappa(t-s)})}{\kappa} \\ &\quad + \frac{\theta \sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)})^2 \end{aligned}$$

33 – Precio de un bono cupón cero (CIR)

En el modelo CIR, el precio de un bono cupón cero en el momento t con vencimiento T viene dado por :

$$ZC(t, T) = A(t, T) \cdot e^{-B(t, T) r_t}$$

con :

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + \kappa)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \\ A(t, T) &= \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(\kappa+\gamma)}{2}(T-t)}}{(\gamma + \kappa)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}} \end{aligned}$$

o :

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}$$

34 – Swaption, Black model

Una **swaption** es una opción sobre un swap de tasas de interés. Otorga el derecho (pero no la obligación) de suscribir un swap en una fecha futura T .

- **Swaption del pagador**: derecho a *pagar la tasa fija y recibir la tasa flotante*.
- **Swap del receptor**: derecho a *recibir la tasa fija y pagar la tasa flotante*.

Notación :

- T : fecha de ejercicio del swaption
- K : tipo de interés fijo (strike)
- $S(T)$: tipo de cambio swap en la fecha T
- $A(T)$: valor actual de los flujos fijos futuros.
- σ : volatilidad de la tasa swap

El modelo Black (1976) es una adaptación del modelo Black-Scholes para productos de tipos de interés. En este modelo, el tipo swap $S(T)$ actúa como activo subyacente, con una rentabilidad similar a la de una opción europea.

Black's formula for a payer swaption :

$$SW_{\text{pagador}} = A(T) [S_0 N(d_1) - K N(d_2)]$$

or :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

y $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulativa de la distribución normal estándar.

Fórmula para un swaption de receptor :

$$SW_{\text{receptor}} = A(T) [K N(-d_2) - S_0 N(-d_1)]$$

35 – Notations sur les tables de survie

L'âge $x, y, z...$

l_x est le nombre de personnes vivantes, par rapport à une cohorte initiale, à l'âge x

ω est l'âge limite des tables de mortalité.

$d_x = l_x - l_{x+1}$ est le nombre de personnes qui meurent entre l'âge x et l'âge $x + 1$.

q_x est la probabilité de décès entre les âges de x et l'âge $x + 1$.

$$q_x = d_x / l_x$$

p_x est la probabilité que l'individu âgé de x survive à l'âge $x + 1$.

$$p_x + q_x = 1$$

De même, ${}_n d_x = d_x + d_{x+1} + \dots + d_{x+n-1} = l_x - l_{x+n}$ montre le nombre de personnes qui meurent entre l'âge x et l'âge $x + n$.

${}_n q_x$ est la probabilité de décès entre les âges de x et l'âge $x + n$.

$${}_n q_x = {}_n d_x / l_x$$

${}_n p_x$ est la probabilité d'une personne d'âge x de survivre à l'âge $x + n$.

$${}_n p_x = l_{x+n} / l_x$$

${}_m | q_x$, la probabilité que l'individu d'âge x meurt dans la $m + 1^e$ année.

$${}_m | q_x = \frac{d_{x+m}}{l_x} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+1}}{l_x}$$

e_x est l'espérance de vie pour une personne encore en vie à l'âge x . C'est le nombre espéré d'anniversaires à vivre.

$$e_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x$$

36 – Coefficient ou commutations

Ces coefficients ou commutations établies par des fonctions actuarielles qui dépendent d'une table de mortalité et d'un taux i ($v = 1/(1+i)$) pour établir la table actuarielle.

$$D_x = l_x \cdot v^x$$

peut être vu "comme" le nombre de survivants actualisés. Les sommes

$$N_x = \sum_{k \geq 0} D_{x+k} = \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k}$$

$$S_x = \sum_{k \geq 0} N_{x+k} = \sum_{k \geq 0} (k+1) \cdot D_{x+k}$$

seront utilisés pour simplifier les calculs. De même

$$C_x = d_x v^{x+1}$$

peut être vu "comme" le nombre de décès actualisés à l'âge x . Les sommes

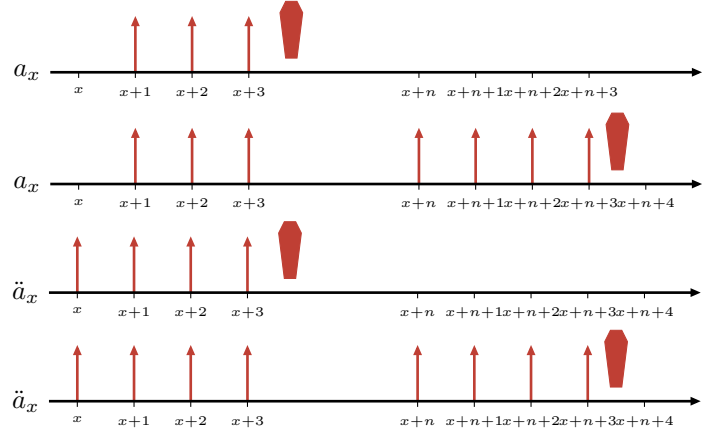
$$M_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} C_{x+k}$$

$$R_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} M_{x+k}$$

seront utilisés pour simplifier les calculs.

Les coefficients D_x , N_x et S_x seront utilisés pour les calculs sur les opérations en cas de vie et C_x , M_x et R_x pour les opérations en cas de décès.

37 – Les annuités viagères ou rentes



$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x v^k = \ddot{a}_x - 1 = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x v^k = \frac{N_x}{D_x}$$

Si la périodicité correspond à m période par an:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m} {}_k p_x v^{\frac{k}{m}} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

De même, s'il paie $1/m$ en début des m périodes

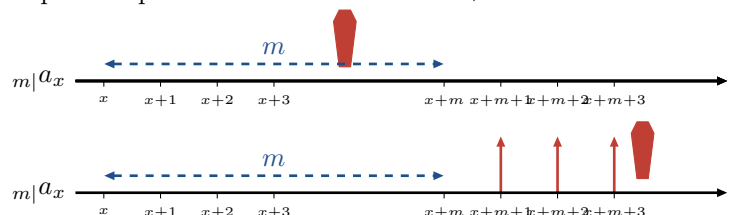
$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

Les annuités viagères temporaires (Whole life annuity guaranteed for n years)

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n {}_k p_x v^k = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

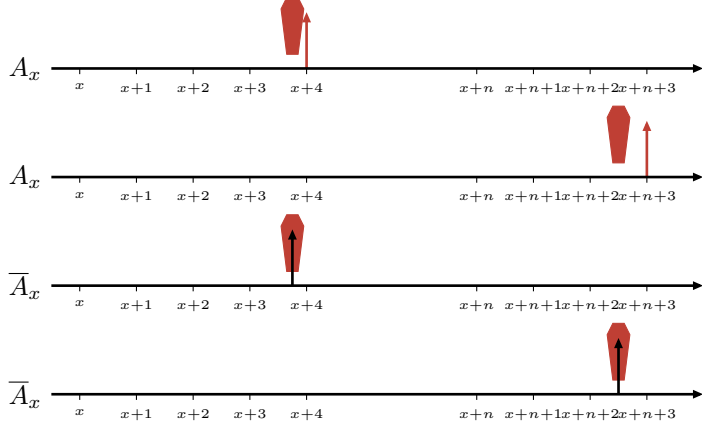
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_x v^k = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Les annuités viagères différées ${}_m | a_x$ (Deferred life annuity) représentent les rentes sur l'individu d'âge x différée m années. Le premier paiement intervient dans $m + 1$ ans en cas de vie.



38 – Capitaux décès ou survie

Les capitaux décès(Whole life insurance noted SP_x or A_x)
 A_x indique une prestation au décès à la fin de l'année de la mort (montant de 1), quelque que soit la date de survenance, pour un individu assuré à l'âge x lors de la souscription.
 $A_{x:\overline{n}|}$ désigne un capital versé au décès s'il survient et au plus tard dans n années (Endowment).
 $A_{x:\overline{n}|}^1$ désigne un capital décès versé si x décède dans les n années à venir (Term insurance).
 $A_x^{(12)}$ indique une prestation payable à la fin du mois du décès.
 \overline{A}_x indique une prestation payée à la date du décès.

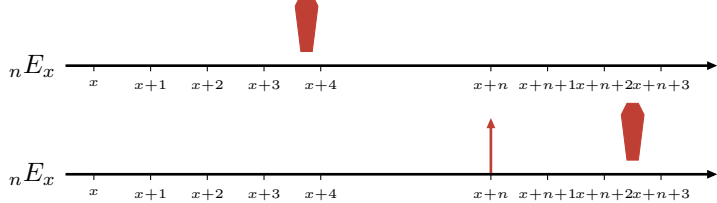


Capital décès (Whole life)

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} k|q_x \nu^{k+1} = \frac{M_x}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} k|q_x \nu^{k+1} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Capital différé (Pure Endowment, capital unique en cas de survie) noté $A_{x:\overline{n}|}^1$ ou ${}_nE_x$.



$${}_nE_x = {}_np_x \cdot v^n = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Capital décès avec versement du capital en cas de survie (Endowment)

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}$$

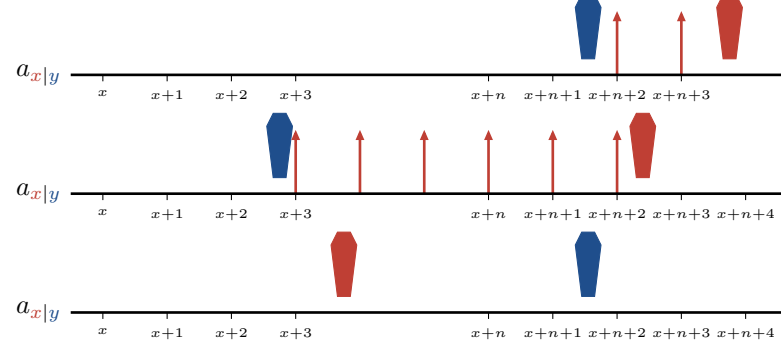
39 – L'assurance vie sur plusieurs individus

a_{xyz} est une rente annuelle, payée dès la fin de la première année et tant que vivent (x) , (y) et (z) .

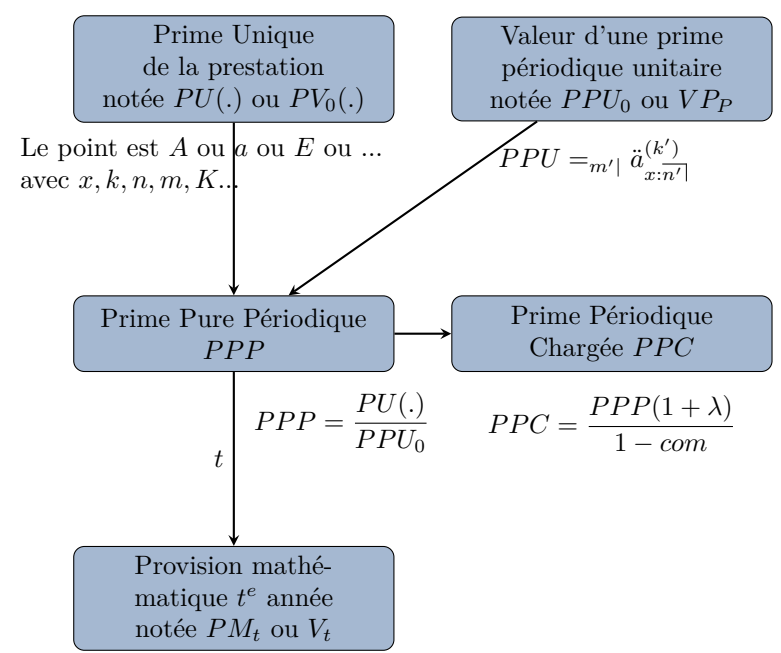
$a_{\overline{xyz}}$ est une rente annuelle, payée dès la fin de la première année et tant que vivent (x) , (y) ou (z) .

$$a_{\overline{xy}} = a_y + a_x - a_{xy}$$

A_{xyz} est une assurance qui intervient à la fin de l'année du premier décès de (x) , (y) et (z) .
 La barre verticale indique la conditionnalité :
 $a_{x|y}$ est une rente de réversion qui profite à (x) après le décès de (y) .
 $A_{x|yz}$ est une assurance au premier décès de (y) et (z) .



40 – Schémas simplifié de tarification des primes périodiques et provisions



$V_t = PV_t(.) - PPP \times PPU_t$
 $PV_t(.)$ recalculée avec $x+t, k, n, m-t, K...$ si $t \geq m$
 ou $x+t, k, n-(t-m), m=0, K...$ si $t > m$
 de même $PPU_t = {}_{(m'-t)+}| \ddot{a}_{x+t:n'-(t-m)+}^{(k')}$

41 – Axiomatique

Un **univers** Ω , est l'ensemble de tous les résultats possibles qui peuvent être obtenus au cours d'une expérience aléatoire.

L'**événement aléatoire** est un événement ω_i de l'univers dont l'issue (le résultat) n'est pas certaine.

L'**événement élémentaire** :

- deux événements élémentaires distincts ω_i et ω_j sont incompatibles,
- la réunion de tous les événements élémentaires de l'univers Ω correspond à la certitude.

Les **ensembles** :

- $E = \{\omega_{i1}, \dots, \omega_{ik}\}$ un sous-ensemble de Ω (k éléments).
- \bar{E} le complémentaire de E ,
- $E \cap F$ l'intersection de E et F ,
- $E \cup F$ l'union de E et F ,
- $E \setminus F = E \cap \bar{F}$ E moins F ,
- \emptyset l'événement impossible ou vide.

Soit E un ensemble. On appelle **tribu** ou σ -**algèbre** sur E , un ensemble \mathcal{A} de parties de E qui vérifie :

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$,
- $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$,
- si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{A}$ alors $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

On appelle **probabilité** \mathbb{P} toute application de l'ensemble des événements \mathcal{A} dans l'intervalle $[0, 1]$, telle que :

$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \mapsto [0, 1]$$

satisfaisant les propriétés (ou axiomes) suivantes :

(P1) $A \subseteq \mathcal{A}$ alors $\mathbb{P}(A) \geq 0$,

(P2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(P3) $A, B \subseteq \mathcal{A}$, si $A \cap B = \emptyset$ alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

L'**espace de probabilité** se définit par

$$\{\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}(\cdot)\}$$

L'**égalité de pincarré** s'écrit :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

42 – Bayes

En théorie des probabilités, la **probabilité conditionnelle** d'un événement A , sachant qu'un autre événement B de probabilité non nulle s'est réalisé.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Le réel $\mathbb{P}(A|B)$ se lit 'probabilité de A , sachant B . Le théorème de Bayes permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

43 – Variables aléatoires

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle **variable aléatoire** X de Ω vers \mathbb{R} , toute fonction mesurable $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

$$\{X \leq x\} \equiv \{e \in \Omega \mid X(e) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

L'ensemble des événements de Ω n'est souvent pas explicite.

La **fonction de répartition** (F_X) d'une variable aléatoire réelle caractérise sa loi de probabilité.

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), x \in \mathbb{R}$$

où le membre de droite représente la probabilité que la variable aléatoire réelle X prenne une valeur inférieure ou égale à x . La probabilité que X se trouve dans l'intervalle $]a, b]$ est donc, si $a < b$, $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Une loi de probabilité possède une **densité de probabilité** f , si f est une fonction définie sur \mathbb{R}^+ , Lebesgue-intégrable, telle que la probabilité de l'intervalle $[a, b]$ est donnée par

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \text{ pour tous nombres tq } a < x < b.$$

44 – Espérance

L'espérance mathématique dans le cas discret (variables qualitatives ou quantitatives discrètes) :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j \mathbb{P}(x_j)$$

où $\mathbb{P}(x_j)$ est la probabilité associée à chaque événement x_i .

L'espérance mathématique dans le cas continu :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$$

où f désigne la fonction de densité de la variable aléatoire x , définie dans notre cas sur \mathbb{R} . S'agissant de somme ou d'intégrale, l'espérance est linéaire, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}[c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2] = c_0 + c_1 \mathbb{E}[X_1] + c_2 \mathbb{E}[X_2]$$

$$\mathbb{E}[X] = \int x.f(x)dx = \int_0^1 F^{-1}(p)dp = \int \bar{F}(x)dx$$

45 – Convolution ou loi de la somme

La convolution de deux fonctions f et g , notée $(f * g)(x)$, est définie par :

$$(f * g)(x) = \int f(t)g(x-t) dt$$

La convolution mesure comment $f(t)$ et $g(t)$ interagissent à différents points tout en tenant compte du décalage (ou translation) entre Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_X et f_Y , alors la densité de la somme $Z = X + Y$ est donnée par :

$$f_Z(x) = (f_X * f_Y)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt.$$

46 – Loi composée ou modèle fréquence/gravité

Soit N une variable aléatoire discrète dans \mathbb{N}^+ , (X_i) une suite de variable aléatoire *iid* d'espérance et variance finies, alors pour

$$S = \sum_{i=1}^N X_i :$$

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(\mathbb{E}[S | N]) = \mathbb{E}(N \cdot \mathbb{E}(X_1)) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X_1)$$

$$\text{Var}(S) = \mathbb{E}(\text{Var}[S | N]) + \text{Var}(\mathbb{E}[S | N])$$

47 – Théorèmes fondamentaux

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et supposée presque sûrement positive ou nulle. L'**Inégalité de Markov** donne :

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\alpha}.$$

L'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : Pour tout réel strictement positif α , avec $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\text{Var}[X] = \sigma^2$

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

La **loi faible des grands nombres** considère une suite $(X_i)_{i \geq n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé, ayant mêmes espérance et variance finies notées respectivement $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}(X)$.

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X]\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Considérons une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de probabilité, intégrables, i. e. $E(|X_0|) < +\infty$.

En reprenant les notations, la **loi forte des grands nombres** précise que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $E(X)$ presque sûrement.

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = E(X)\right) = 1$$

Considérons la somme $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

l'espérance et l'écart-type de Z_n valent respectivement 0 et 1 : la variable est ainsi dite centrée et réduite.

Le **théorème central limite** stipule alors que la loi de Z_n converge en loi vers la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque n tend vers l'infini. Cela signifie que si Φ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$, alors pour tout réel z :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n \leq z) = \Phi(z),$$

ou, de façon équivalente :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(z)$$

48 – Variables multidimensionnelles

Une loi de probabilité est dite **multidimensionnelle**, ou n -dimensionnelle, lorsque la loi décrit plusieurs valeurs (aléatoires) d'un phénomène aléatoire. Le caractère multidimensionnel apparaît ainsi lors du transfert, par une variable aléatoire, de l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}) vers un espace numérique E^n de dimension n .

Soit une variable aléatoire X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans \mathbb{R}^n muni de la tribu borélienne réelle produit $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$. La loi de la variable aléatoire X est la mesure de probabilité \mathbb{P}_X définie par :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B).$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$.

Le théorème de **Cramer-Wold** assure que la loi (n -dimensionnelle) de ce vecteur aléatoire est entièrement déterminée par les lois (unidimensionnelles) de toutes les combinaisons linéaires de ces composantes :

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i \text{ pour tous } a_1, a_2, \dots, a_n$$

49 – Loi marginale

La loi de probabilité de la i^e coordonnée d'un vecteur aléatoire est appelée la i^e loi marginale. La **loi marginale** \mathbb{P}_i de \mathbb{P} s'obtient par la formule :

$$\mathbb{P}_i(B) = \mathbb{P}_{X_i}(B) = \iint \mathbb{1}_{\omega_i \in B} \mathbb{P}(d(\omega_1, \dots, \omega_n)), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Les lois marginales d'une loi absolument continue s'expriment à l'aide de leurs densités marginales.

La fonction de densité conditionnelle X_2 sachant la valeur x_1 de X_1 , peut s'écrire :

$$f_{X_2}(x_2 | X_1 = x_1) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)},$$

$$f_{X_2}(x_2 | X_1 = x_1) f_{X_1}(x_1) = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1 | X_2 = x_2) f_{X_2}(x_2)$$

50 – Indépendance

(X_1, X_2, \dots, X_n) est une famille de **variables aléatoires indépendantes** si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{E}_1 \times \dots \times \mathcal{E}_n$$

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1 \text{ et } X_2 \in A_2 \dots \text{ et } X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i),$$

on a l'égalité

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \varphi_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\varphi_i(X_i)],$$

pour n'importe quelle suite de fonctions φ_i définies sur (E_i, \mathcal{E}_i) , à valeurs dans \mathbb{R} , dès que les espérances ci-dessus ont un sens.

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

51 – Dépendance parfaite en dimension 2

Soient F_1, F_2 fonctions de répartition $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$.

Les **classes de Fréchet** $\mathcal{F}_{(F_1, F_2)}$ regroupent l'ensemble des fonctions de répartition $\mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ dont les lois marginales sont précisément F_1, F_2 .

Pour tout $F \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$, et pour tout x in \mathbb{R}^d

$$F^-(x) \leq F(x) \leq F^+(x)$$

où $F^+(x) = \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$, et $F^-(x) = \max\{0, F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1\}$.

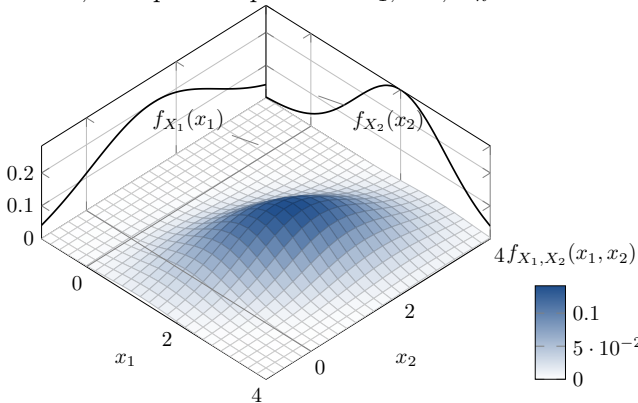
1. Le couple $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit **comonotone** si et seulement s'il admet F^+ comme fonction de répartition.
2. Le couple $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit **antimonotone** si et seulement s'il admet F^- comme fonction de répartition.

Le couple $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit **comonotone (antimonotone)** s'il existe des fonctions non-décroissantes (non-croissante) g_1 et g_2 d'une variable aléatoire Z telles que

$$\mathbf{X} = (g_1(Z), g_2(Z))$$

52 – Le vecteur gaussien

Un vecteur $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ est dit **vecteur gaussien**, de loi $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, lorsque toute combinaison linéaire $\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j$ de ses composantes est la loi normale univariée. En particulier, chaque composante X_1, \dots, X_n est de loi normale.



- $\boldsymbol{\mu}$ de \mathbb{R}^N sa localisation,
- $\boldsymbol{\Sigma}$ semi-définie positive de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, sa variance-covariance.

Si $\boldsymbol{\Sigma}$ est bien définie positive, donc inversible, alors

$$f_{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}.$$

où $|\boldsymbol{\Sigma}|$ est le déterminant de $\boldsymbol{\Sigma}$.

53 – Trois mesures de lien (corrélations)

On nomme le coefficient de **corrélation linéaire de Pearson** la valeur

$$\rho_P = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

où σ_{xy} désigne la covariance entre les variables x et y , et σ_x, σ_y leur écart type. ρ prend ses valeurs dans $[-1, 1]$ (application du théorème de Cauchy-Schwartz).

$X \perp Y \Rightarrow \rho_P = 0$, Attention, $\rho_P = 0 \not\Rightarrow X \perp Y$.

Le **tau de Kendall** se définit par

$$\tau_K = \mathbb{P}((X - X')(Y - Y') > 0) - P((X - X')(Y - Y') < 0)$$

où (X, Y) (X', Y') sont deux couples indépendant de même densité jointe. Cela correspond à la probabilité des concordants diminuée de celle des discordants :

$$\begin{aligned} \tau_K &= \mathbb{P}(\text{sgn}(X - X') = \text{sgn}(Y - Y')) - \\ &\quad \mathbb{P}(\text{sgn}(X - X') \neq \text{sgn}(Y - Y')) \\ &= \mathbb{E}[\text{sgn}(X - X') \text{sgn}(Y - Y')] \\ &= \text{Cov}(\text{sgn}(X - X'), \text{sgn}(Y - Y')) \\ &= 4\mathbb{P}(X < X', Y < Y') - 1 \end{aligned}$$

Le coefficient de corrélation **rho de Spearman** de (X, Y) est défini comme le coefficient de corrélation de Pearson des rangs des variables aléatoires X et Y . Pour un échantillon n , les n valeurs X_i, Y_i sont converties par leurs rangs x_i, y_i , et ρ est calculé :

$$\rho_S = \frac{1/n \sum_i (x_i - \mathbb{E}[x])(y_i - \mathbb{E}[y])}{\sqrt{1/n \sum_i (x_i - \mathbb{E}[x])^2 \times 1/n \sum_i (y_i - \mathbb{E}[y])^2}}.$$

Si on note $x_i = R(X_i)$ de 1 à N et $d_i = x_i - y_i$:

$$\rho_S = 1 - \frac{6 \sum_i d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

54 – Copule

Une **copule** est une fonction de répartition, notée \mathcal{C} , définie sur $[0, 1]^d$ dont les marges sont uniformes sur $[0, 1]$. Une caractérisation est alors que $\mathcal{C}(u_1, \dots, u_d) = 0$ si une des composantes u_i est nulle, $\mathcal{C}(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$, et \mathcal{C} est d -croissante.

Soit $F^{(d)}$ une fonction de répartition en dimension d où les F_i sont les lois marginales de F .

Le **théorème de Sklar** indique que $F^{(d)}$ admet une représentation copule :

$$F^{(d)}(x_1, \dots, x_d) = \mathcal{C}(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

Si ces lois marginales sont toutes continues, la copule \mathcal{C} est alors unique, et donnée par la relation

$$\mathcal{C}(u_1, \dots, u_d) = F^{(d)}(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))$$

Dans ce cas, on pourra alors parler de la copule associée à un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_d) . Ce théorème est très important puisque nous pouvons séparer la partie marge de distribution de la partie dépendance.

La **Copule Gaussienne** est une distribution sur le cube unitaire de dimension d , $[0, 1]^d$. Elle est construite sur la base d'une loi normale de dimension d sur \mathbb{R}^d .

Soit la matrice de corrélation $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$, la copule Gaussienne de paramètre Σ peut s'écrire :

$$\mathcal{C}_\Sigma^{\text{Gauss}}(u) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)),$$

où Φ^{-1} est la fonction de répartition inverse de la loi normale standard et Φ_Σ est la distribution jointe d'une loi normale de dimension d , de moyenne nulle et de matrice de covariance égale à la matrice de corrélation Σ .

Une copule \mathcal{C} est qualifiée d'**archimédienne** si elle admet la représentation suivante :

$$\mathcal{C}(u_1, \dots, u_d) = \psi^{-1}(\psi(u_1) + \dots + \psi(u_d))$$

où ψ est alors appelé **générateur**.

Souvent, les copules admettent une formulation explicite de \mathcal{C} . Un seul paramètre permet d'accentuer la dépendance de toute la copule, quelque soit sa dimension d .

Cette formule fournit une copule si et seulement si ψ est d -monotone sur $[0, \infty)$ i.e. la dérivé k^e de ψ satisfait

$$(-1)^k \psi^{(k)}(x) \geq 0$$

pour tout $x \geq 0$ et $k = 0, 1, \dots, d-2$ et $(-1)^{d-2} \psi^{d-2}(x)$ est non-croissante et convexe.

Les générateurs suivants sont tous monotones, i.e. d -monotone pour tout $d \in \mathbb{N}$.

Nom	Générateur $\psi^{-1}(t)$,	$\psi(t)$	Paramètre
Ali-Mikhail-Haq	$\frac{1-\theta}{\exp(t)-\theta}$	$\log\left(\frac{1-\theta+\theta t}{t}\right)$	$\theta \in [0, 1)$
Clayton	$(1+\theta t)^{-1/\theta}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta}-1)$	$\theta \in (0, \infty)$
Frank	$-\frac{1}{\theta}\exp(-t)$ $\times \log(1-(1-\exp(-\theta)))$	$-\log\left(\frac{\exp(-\theta t)-1}{\exp(-\theta)-1}\right)$	$\theta \in (0, \infty)$
Gumbel	$\exp(-t^{1/\theta})$	$(-\log(t))^\theta$	$\theta \in [1, \infty)$
\perp	$\exp(-t)$	$-\log(t)$	
Joe	$1-(1-\exp(-t))^{1/\theta}$	$-\log(1-(1-t)^\theta)$	$\theta \in [1, \infty)$

55 – Mouvement brownien, filtration et martingales
Une **filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une famille croissante de σ -algèbres ou tribu représentant l'information disponible jusqu'au temps t . Un processus (X_t) est dit **\mathcal{F}_t -adapté** si X_t est mesurable par rapport à \mathcal{F}_t pour tout t .
Un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est un **mouvement brownien standard** (ou processus de Wiener) s'il vérifie :

- $B_0 = 0$;
- accroissements indépendants : $B_t - B_s$ indépendant de \mathcal{F}_s ;
- accroissements stationnaires : $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$;
- trajectoires continues presque sûrement.

Un processus (M_t) est une **martingale** (par rapport à \mathcal{F}_t) si :
$$\mathbb{E}[|M_t|] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad \forall 0 \leq s < t$$

Exemples : le mouvement brownien, les intégrales stochastiques de la forme $\int_0^t \theta_s dB_s$ (sous conditions) sont des martingales.

Variation quadratique est noté $\langle B \rangle_t = t$, $\langle cB \rangle_t = c^2 t$
Covariation : pour deux processus d'Itô X, Y ,

$$\langle X, Y \rangle_t := \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

convergence en probabilité, où $\Pi = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ est une partition de $[0, t]$.

56 – Processus d'Itô et calcul différentiel stochastique
Un processus (X_t) est un **processus d'Itô** s'il peut s'écrire :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s$$

ou en différentielle

$$dX_t = \phi_t dt + \theta_t dB_t$$

avec ϕ_t, θ_t \mathcal{F}_t -adaptés et L^2 -intégrables.

Formule d'Itô (1D) : pour $f \in C^2(\mathbb{R})$, on a :

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle X \rangle_t$$

Exemple : si $dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$ alors :

$$dX_t^2 = 2X_t dX_t + d\langle X \rangle_t$$

Formule d'Itô (multi-dimension) :
Si $X = (X^1, \dots, X^d)$ est un processus d'Itô, $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$:

$$df(X_t) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_t)dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t)d\langle X^i, X^j \rangle_t$$

Intégration par parties (Itô) :

$$d\langle X_t Y_t \rangle = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t$$

57 – Équations différentielles stochastiques (EDS)
Une EDS (*SDE*) est une équation stochastique de la forme :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + a(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x$$

où :

- $b(t, x)$ est la **dérive** (*drift*) : fonction $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- $a(t, x)$ est la **diffusion** : fonction $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- B_t est un mouvement brownien ;
- X_t est la solution, processus stochastique adapté.

Forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t a(s, X_s)dB_s$$

Conditions d'existence et d'unicité :

- **Lipschitz** : il existe $L > 0$ tel que :
$$|b(t, x) - b(t, y)| + |a(t, x) - a(t, y)| \leq L|x - y|$$
- **Croissance linéaire** :
$$|b(t, x)|^2 + |a(t, x)|^2 \leq C(1 + |x|^2)$$

Exemples classique :

- **Brownien géométrique** : $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$
- **Ornstein-Uhlenbeck** : $dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dB_t$

Méthodes numériques : Euler-Maruyama, Milstein.

58 – Probabilité risque neutre
Une probabilité \mathbb{Q} est dite **risque neutre** si, sous \mathbb{Q} , tout actif S_t a un prix actualisé $\frac{S_t}{B_t}$ qui est une martingale où (B_t) est le numéraire (par exemple $B_t = e^{rt}$).
L'absence d'arbitrage $\iff \exists \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ telle que les prix actualisés soient des martingales. C'est le **théorème fondamental de l'évaluation des actifs**.

Application :

Sous \mathbb{Q} , la valeur à l'instant t d'un actif donnant un retour H à la date T est :

$$S_t = B_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{H}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Remarque :

La mesure \mathbb{Q} est équivalente à \mathbb{P} , mais reflète un monde "sans préférence pour le risque", utile en valorisation.

Les simulations permettent en particulier d'approximer l'espérance par la moyenne empirique des réalisations x_1, \dots, x_n :

$$\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) \approx \int x dF(x) = \mathbb{E}[X]$$

Ensuite, en vertu du TLC, nous estimons l'incertitude ou intervalle de confiance sur la base de la loi normale:

$$\left[\bar{x} - 1,96 \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right]$$

où S_n estime sans biais la variance de X :

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

la convergence est dite en $\mathcal{O}(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Cet intervalle permet de décider le nombre de simulation à réaliser.

60 – Générateur pseudo aléatoire sur $[0, 1]^d$
L'ordinateur ne sait pas lancer le dé ($\Omega = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}$). Il génère un pseudo aléa, c'est à dire un algorithme déterministe qui ressemble à un événement aléatoire. Les générateurs produisent généralement un aléa sur $[0, 1]^d$. Si la valeur initiale (*seed*) est définie ou identifiée, les tirages suivants sont connus et répliquables.

L'algorithme le plus simple es appelée méthode des congruences linéaires.

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) = (a \times x_n + c) \mod m$$

chaque x_n est un entier compris entre 0 et $m-1$. a le multiplicateur [*multiplier*], c l'accroissement [*increment*], et m le modulo [*modulus*] de la forme $2^p - 1$, c'est-à-dire un nombre premier de Mersenne (p nécessairement premier) :

Générateur de Marsaglia: $a = 69069, b = 0, m = 2^{32}$

Générateur Knuth&Lewis: $a = 1664525, b = 1013904223, m = 2^{32}$

Générateur de Haynes: $a = 6364136223846793005, b = 0, m = 2^{64}$

Le générateur de Tausworthe, constitue une extension 'autorégressive' :

$$x_n = (a_1 \times x_{n-1} + a_2 \times x_{n-2} + \dots + a_k \times x_{n-k}) \mod m \text{ avec } n \geq k$$

La période du générateur est $m^k - 1$, avec tous les a_i premiers entre eux. Si m est de la forme 2^p , les temps de calculs machine sont réduits.

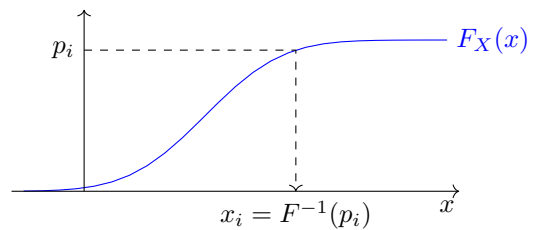
Le générateur aléatoire par défaut est généralement l'algorithme de Mersenne-Twister. Il est basé sur une récurrence linéaire sur une matrice F_2 (matrice dont les valeurs sont en base 2, i.e. 0 ou 1). Son nom provient du fait que la longueur de la période choisie pour être un nombre premier de Mersenne.

1. sa période est de $2^{19937} - 1$
2. il est uniformément distribué sur un grand nombre de dimensions (623 pour les nombres de 32 bits) ;
3. il est plus rapide que la plupart des autres générateurs ,
4. il est aléatoire quel que soit le poids du bit considéré, et passe les tests Diehard.

61 – Simuler une variable aléatoire

Simuler X d'une loi quelconque F_X revient souvent à simuler $(p_i)_{i \in [1, n]}$ de loi $\mathcal{Uni}(0, 1)$.

Si F_X est inversible, $x_i = F_X^{-1}(p_i)$ (ou fonction quantile) livre $(x_i)_{i \in [1, n]}$ un jeu de n simulations de loi F_X .



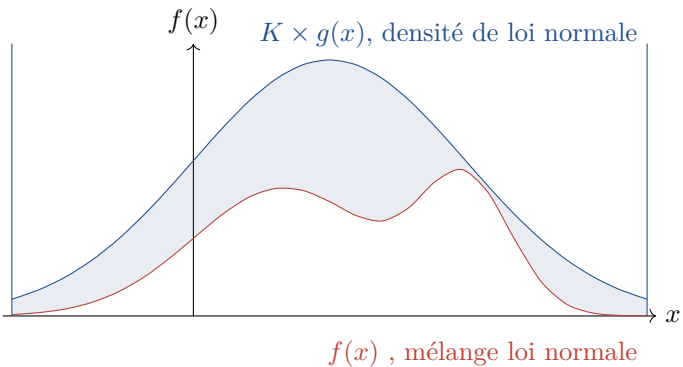
Si c'est une variable discrète (F^{-1} n'existe pas) $X_\ell = \min_{\ell} F(X_\ell) > p_i$, où $(X_\ell)_\ell$ l'ensemble dénombrable des valeurs possibles, ordonnées de manière croissante.

Dans la méthode du **changement de variable**, on suppose qu'on sait simuler une loi X , et qu'il existe ϕ tel que $Y = \phi(X)$ suit une loi F_Y . L'exemple naturelle est celui de $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et de faire le changement $Y = \exp(X)$ pour obtenir Y qui suit une loi lognormale.

La méthode du rejet est utilisée dans des cas plus complexe, par exemple lorsque F^{-1} n'est pas explicite ou exige beaucoup de temps de calcul. Soit f une fonction de densité de probabilités. On suppose qu'il existe une densité de probabilités g telle que :

$$\exists K > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq K g(x)$$

On simule alors Z suivant la loi de densité g , et $Y \sim \mathcal{U}([0; K g(Z)])$. Alors la variable aléatoire $X = \{Z | Y \leq f(Z)\}$ suit la loi de densité f .



La performance de l'algorithme dépend du nombre de rejet, représenté par la surface bleu sur le graphique.

62 – Méthodes de Monte Carlo

Les **méthodes de Monte Carlo** reposent sur la simulation répétée de variables aléatoires pour approximer des quantités numériques.

Convergence :

- Par la **loi des grands nombres**, l'estimateur converge presque sûrement vers la valeur attendue.
- Par le **théorème central limite**, l'erreur standard est en $\mathcal{O}(N^{-1/2})$:

$$\sqrt{N}(\hat{\mu}_N - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

- Cette convergence lente justifie l'usage de techniques d'**amélioration de la convergence**.

Techniques de réduction de variance :

- **Variables antithétiques** : on simule X et $-X$ (ou $1 - U$ si $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$), puis on moyenne les résultats. Réduction efficace si f est monotone.
- **Méthode de contrôle** : si $\mathbb{E}[Y]$ est connue, on simule $(f(X), Y)$ et on corrige :

$$\hat{\mu}_{\text{corr}} = \hat{\mu} - \beta(\bar{Y} - \mathbb{E}[Y])$$

où β optimal minimise la variance.

- **Stratification** : on divise l'espace des simulations en strates (sous-ensembles), et on simule proportionnellement dans chaque strate.
- **Importance sampling** : on modifie la loi de simulation pour accentuer les événements rares, puis on repondère :

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}^Q \left[f(X) \frac{dP}{dQ}(X) \right]$$

utilisée notamment pour estimer les queues de distribution (VaR, TVaR).

63 – Le bootstrap

Le **bootstrap** est une méthode de *rééchantillonnage* permettant d'estimer l'incertitude d'un estimateur sans supposer de forme paramétrique pour la loi sous-jacente.

Soit un échantillon $\xi = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ de variables iid suivant une loi inconnue F . On cherche à estimer une statistique $\theta = T(F)$ (ex. moyenne, médiane, variance), via son estimateur empirique $\hat{\theta} = T(\hat{F}_n)$.

1. On approxime F par la fonction de répartition empirique :

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{X_k \leq x\}}$$

2. On génère B échantillons bootstrap $\xi^{*(b)} = (X_1^{*(b)}, \dots, X_n^{*(b)})$ en tirant **avec remise** dans l'échantillon initial.
3. Pour chaque échantillon simulé, on calcule l'estimation $T^{*(b)} = T(\hat{F}_n^{*(b)})$.

Les réalisations $T^{*(1)}, \dots, T^{*(B)}$ forment une approximation de la distribution de l'estimateur $\hat{\theta}$.

On peut en déduire :

- un **biais estimé** : $\widehat{\text{bias}} = \overline{T^*} - \hat{\theta}$;
- un **intervalle de confiance** à $(1 - \alpha)$: $[q_{\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]$ des quantiles empiriques de $T^{*(b)}$;
- une estimation de la **variance** : $\widehat{\text{Var}}(T^*)$.

Remarque : Le bootstrap est particulièrement utile lorsque la distribution de T est inconnue ou difficile à estimer analytiquement.

64 – Bootstrap paramétrique

Le **bootstrap paramétrique** repose sur l'hypothèse que les données suivent une famille de lois paramétrée $\{F_\theta\}$.

Soit $\xi = (X_1, \dots, X_n)$ un échantillon *iid* selon une loi F_θ inconnue. On procède comme suit :

1. Estimer le paramètre $\hat{\theta}$ à partir de ξ (ex. par maximum de vraisemblance).
2. Générer B échantillons $\xi^{*(b)}$ de taille n , simulés selon la loi $F_{\hat{\theta}}$.
3. Calculer $T^{*(b)} = T(\xi^{*(b)})$ pour chaque échantillon.

Ce procédé approxime la distribution de l'estimateur $T(\xi)$ en supposant connue la forme de F . Il est plus efficace que le bootstrap non paramétrique si l'hypothèse de modèle est bien spécifiée. Le bootstrap paramétrique est plus rapide, mais hérite des biais du modèle.

65 – Validation croisée

La **validation croisée** est une méthode d'évaluation de la performance prédictive d'un modèle statistique, utilisée notamment en machine learning ou en tarification.

Principe :

- Diviser les données en K blocs (ou folds).
- Pour chaque $k = 1, \dots, K$:
 - Entraîner le modèle sur les $K - 1$ autres blocs.
 - Évaluer la performance (erreur, log-vraisemblance...) sur le k -ième bloc.
- Agréger les erreurs pour obtenir une estimation globale de la performance hors-échantillon.

66 – Méthodes quasi-Monte Carlo

Les méthodes **quasi-Monte Carlo** visent à **accélérer la convergence** de l'estimateur d'espérance sans recourir à l'aléatoire. L'erreur typique est de l'ordre :

$$\mathcal{O} \left(\frac{(\ln N)^s}{N} \right)$$

où N est la taille de l'échantillon et s la dimension du problème. Ces méthodes reposent sur l'utilisation de suites à **discrépance faible** dans $[0, 1]^s$. La discrépance à l'origine (*star discrepancy*), notée $D_N^*(P)$ pour un ensemble de points $P = \{x_1, \dots, x_N\}$, mesure l'écart maximal entre la proportion de points contenus dans des rectangles *ancrés à l'origine* et leur volume. Elle est définie par :

$$D_N^*(P) = \sup_{u \in [0, 1]^s} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{[0, u)}(x_i) - \lambda_s([0, u)) \right|$$

avec :

- $[0, u) = \prod_{j=1}^s [0, u_j)$ un rectangle ancré à l'origine dans $[0, 1]^s$,
- $\mathbf{1}_{[0, u)}(x_i)$ l'indicatrice de l'appartenance de x_i à ce rectangle,
- $\lambda_s([0, u)) = \prod_{j=1}^s u_j$ le volume de ce rectangle.

Une discrépance faible signifie que les points sont bien répartis dans l'espace, ce qui améliore la convergence de l'estimation.

Suite de van der Corput (dimension 1) : Soit n un entier. On l'écrit en base b :

$$n = \sum_{k=0}^{L-1} d_k(n) b^k$$

puis on inverse les chiffres autour de la virgule pour obtenir :

$$g_b(n) = \sum_{k=0}^{L-1} d_k(n) b^{-k-1}$$

Par exemple, pour $b = 5$ et $n = 146$, on a $146 = (1041)_5$, donc :

$$g_5(146) = \frac{1}{5^4} + \frac{0}{5^3} + \frac{4}{5^2} + \frac{1}{5} = 0,3616$$

Séquence de Halton (dimension s) : On généralise la suite de van der Corput en utilisant s bases entières premières distinctes b_1, \dots, b_s :

$$x(n) = (g_{b_1}(n), \dots, g_{b_s}(n))$$

Cette construction fournit une suite de points bien répartis dans $[0, 1]^s$.

Inégalité de Koksma–Hlawka

Pour une fonction f de variation finie $V(f)$ (au sens de Hardy–Krause) sur $[0, 1]^s$:

$$\left| \int_{[0,1]^s} f(u) \, du - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \right| \leq V(f) \, D_N$$

où D_N est la discrépance de la suite utilisée.
Cette borne explique pourquoi les méthodes quasi-Monte Carlo sont souvent plus efficaces que les méthodes de Monte Carlo.

Distribution	Densité & support	Moments &	Fonction génératrice
		fonction de répartition	de moment
$Bin(m, q)$ ($0 < p < 1, m \in \mathbb{N}$)	$\binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}$ $x = 0, 1, \dots, m$	$E = mp, \text{Var} = mp(1-p)$ $\gamma = \frac{mp(1-p)(1-2p)}{\sigma^3}$	$(1-p+pe^t)^m$
$Ber(q)$	$\equiv \text{Binomial}(1, p)$		
$\mathcal{D}Uni(n)$ ($n > 0$)	$\frac{1}{n}, x = 0, 1, \dots, n$	$\mathbb{E} = (n+1)/2$ $\text{Var} = (n^2-1)/12$	$\frac{e^t(1-e^{nt})}{n(1-e^t)}$
$\mathcal{Pois}(\lambda)$ ($\lambda > 0$)	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \dots$	$\mathbb{E} = \text{Var} = \lambda$ $\gamma = 1/\sqrt{\lambda}$ $\kappa_j = \lambda, j = 1, 2, \dots$	$\exp[\lambda(e^t-1)]$
$\mathcal{N}Bin(m, q)$ ($m > 0, 0 < p < 1$)	$\binom{m+x-1}{x} p^m (1-p)^x$ $x = 0, 1, 2, \dots$	$\mathbb{E} = m(1-p)/p$ $\text{Var} = \mathbb{E}/p$ $\gamma = \frac{(2-p)}{p\sigma}$	$\left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^m$
$\mathcal{Geo}(q)$	$\equiv \mathcal{N}Bin(1, q)$		
$\mathcal{C}Uni(a, b)$ ($a < b$)	$\frac{1}{b-a}; a < x < b$	$\mathbb{E} = (a+b)/2,$ $\text{Var} = (b-a)^2/12,$ $\gamma = 0$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$	$\mathbb{E} = \mu, \text{Var} = \sigma^2, \gamma = 0$ ($\kappa_j = 0, j \geq 3$)	$\exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$
$\mathcal{G}am(k, \theta)$ ($k, \theta > 0$)	$\frac{\theta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\theta x}, x > 0$	$\mathbb{E} = k/\theta, \text{Var} = k/\theta^2,$ $\gamma = 2/\sqrt{k}$	$\left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^k (t < \theta)$
$\mathcal{E}_{xp}(\lambda)$	$\equiv \mathcal{G}am(1, \lambda)$	$\mathbb{E} = 1/\lambda$ $\text{Var} = 1/\lambda^2$	
$\chi^2(k) (k \in \mathbb{N})$	$\equiv \mathcal{G}am(k/2, 1/2)$		
$\mathcal{IN}(\alpha, \beta)$ ($\alpha > 0, \beta > 0$)	$\frac{\alpha x^{-3/2}}{\sqrt{2\pi\beta}} \exp\left(\frac{-(\alpha-\beta x)^2}{2\beta x}\right)$	$\mathbb{E} = \alpha/\beta, \text{Var} = \alpha/\beta^2,$ $\gamma = 3/\sqrt{\alpha}$	$e^{\alpha(1-\sqrt{1-2t/\beta})}$ $(t \leq \beta/2)$
	$F(x) = \Phi\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\beta x}} + \sqrt{\beta x}\right) + e^{2\alpha} \Phi\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\beta x}} - \sqrt{\beta x}\right), x > 0$		
$\mathcal{B}eta(\alpha, \beta)$ ($\alpha > 0, \beta > 0$)	$\Gamma(\alpha+\beta) \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, 0 < x < 1$	$\mathbb{E} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \text{Var} = \frac{\mathbb{E}(1-\mathbb{E})}{\alpha+\beta+1}$	
$\mathcal{LN}orm(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$)	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}, x > 0$	$\mathbb{E} = e^{\mu+\sigma^2/2}, \text{Var} = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}$ $\gamma = c^3 + 3c$ où $c^2 = \text{Var}/\mathbb{E}^2$	
$\mathcal{P}areto(\alpha, x_m)$ ($\alpha, x_m > 0$)	$\frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}, x > x_m$	$\mathbb{E} = \frac{\alpha x_m}{\alpha-1} \quad \alpha > 1, \text{Var} = \frac{\alpha x_m^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \quad \alpha > 2$	
$\mathcal{W}eibull(\alpha, \beta)$ ($\alpha, \beta > 0$)	$\alpha\beta(\beta y)^{\alpha-1} e^{-(\beta y)^\alpha}, x > 0$	$\mathbb{E} = \Gamma(1+1/\alpha)/\beta$ $\text{Var} = \Gamma(1+2/\alpha)/\beta^2 - \mathbb{E}^2$ $\mathbb{E}[Y^t] = \Gamma(1+t/\alpha)/\beta^t$	

67 – Concept d'utilité

L'utilité modélise les préférences d'un individu entre deux paniers de biens x et y dans un ensemble S , via la relation $x \succ y$ (préférée ou indifférent).

Une fonction $U : S \rightarrow \mathbb{R}$ représente les préférences si :

$$x \succ y \iff U(x) \geq U(y)$$

Axiomes nécessaires à l'existence d'une fonction d'utilité :

1. **Complétude** : Pour tout $x, y \in S$, soit $x \succ y$, soit $y \succ x$
2. **Transitivité** : Si $x \succ y$ et $y \succ z$, alors $x \succ z$
3. **Continuité** : Si $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$, et $x_n \succ y_n$ pour tout n , alors $x \succ y$

68 – Fonction d'utilité

Une fonction $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ représente les préférences d'un agent face à l'incertitude.

Critère d'utilité espérée : L'agent préfère X à Y si :

$$\mathbb{E}[u(X)] > \mathbb{E}[u(Y)]$$

Il choisit X tel que $\mathbb{E}[u(X)]$ soit maximale.

Propriétés de u :

- $u' > 0$: l'agent préfère plus de richesse (monotonie)
- $u'' < 0$: l'agent est averse au risque (concavité)

Exemples classiques :

- *Linéaire* (neutre au risque) : $u(x) = x$
- *Logarithmique* : $u(x) = \ln(x)$
- *CRRA* (aversion relative constante) : $u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, $\gamma \neq 1$
- *CARA* (aversion absolue constante) : $u(x) = -e^{-ax}$

69 – Aversion au risque

Un agent est dit **averse au risque** (ou risquophobe) si :

$$u(\mathbb{E}[X]) > \mathbb{E}[u(X)]$$

Ce qui est équivalent à u concave, c.-à-d. $u''(x) < 0$

70 – Mesure de l'aversion au risque

Indice d'aversion absolue :

$$A_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Indice d'aversion relative :

$$A_r(x) = -x \cdot \frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Inégalité de Jensen (cas concave) :

$$u(\mathbb{E}[X]) \geq \mathbb{E}[u(X)]$$

Avec l'égalité si et seulement si X est constante.

71 – Primes de risque

La **prime de risque** π est le montant maximal qu'un individu est prêt à payer pour remplacer une loterie de gain aléatoire H par son espérance certaine $\mathbb{E}[H]$. Elle vérifie :

$$\mathbb{E}[u(w + H)] = u(w + \mathbb{E}[H] - \pi)$$

π est aussi appelée *mesure de Markowitz* : elle capture l'écart entre utilité espérée et utilité certaine.

Inversement, la **prime compensatoire** $\tilde{\pi}$ est le montant que l'on doit offrir à un individu pour qu'il accepte la loterie H au lieu d'un gain certain. Elle vérifie :

$$\mathbb{E}[u(w + H + \tilde{\pi})] = u(w + \mathbb{E}[H])$$

72 – Diversification et utilité

Soient deux actifs :

- A : risqué
- B : certain, avec $\mathbb{E}[A] = B$

Un agent averse au risque préfère une combinaison $Z = \alpha A + (1 - \alpha)B$, avec $0 < \alpha < 1$, à l'actif risqué seul. Si u est concave, alors

$$\mathbb{E}[u(Z)] > \mathbb{E}[u(A)]$$

Portefeuille optimal : choix des pondérations (w_i) maximisant l'utilité espérée :

$$\max \mathbb{E}[u(X)], \quad \text{où } X = \sum_i w_i X_i, \quad \text{s.c. } \sum_i w_i = 1$$

Principe : la diversification réduit le risque (variance) sans affecter l'espérance.

73 – Méthode de Lagrange pour l'optimisation sous contrainte

La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de résoudre un problème d'optimisation sous contrainte.

Objectif : maximiser/minimiser $f(\mathbf{x})$ sous la contrainte $g(\mathbf{x}) = c$, où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur de variables.

Étapes de la méthode :

1. **Identification** : déterminer la fonction objectif $f(\mathbf{x})$ et la contrainte $g(\mathbf{x}) = c$

2. **Lagrangien** :

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda(g(\mathbf{x}) - c)$$

3. **Système d'équations** : résoudre

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L} = \nabla f(\mathbf{x}) + \lambda \nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(\mathbf{x}) - c = 0$$

4. **Résolution** du système pour obtenir \mathbf{x}^*, λ^*

5. **Vérification** : s'assurer que les solutions satisfont bien la contrainte et le type d'optimum (max/min)

Exemple (dimension 2) : maximiser $f(x, y) = xy$ sous la contrainte $x + y = 10$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 10)$$

On dérive :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y + \lambda = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x + \lambda = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x + y - 10 = 0$$

On résout le système :

$$\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -y \\ x = -\lambda = y \\ x + y = 10 \Rightarrow 2x = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = y^* = 5, \\ f(5, 5) = 25 \end{cases}$$

Exemple (Choix optimal et contrainte budgétaire)

Un agent rationnel est face à un choix de consommation (c_1, c_2) entre deux biens, sous la contrainte :

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 = R$$

où p_1, p_2 sont les prix et R le revenu total.

Problème : $\max_{c_1, c_2} u(c_1, c_2)$ s.c. $p_1 c_1 + p_2 c_2 = R$

Méthode : introduire le **lagrangien**

$$\mathcal{L}(c_1, c_2, \lambda) = u(c_1, c_2) + \lambda(R - p_1 c_1 - p_2 c_2)$$

Conditions du premier ordre (FOC) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial c_1} = \lambda p_1 \\ \frac{\partial u}{\partial c_2} = \lambda p_2 \\ p_1 c_1 + p_2 c_2 = R \end{cases}$$

En divisant les deux premières équations :

$$\frac{\partial u / \partial c_1}{\partial u / \partial c_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Ce rapport est appelé **taux marginal de substitution (TMS)** : il mesure la quantité de bien 2 à laquelle l'agent est prêt à renoncer pour obtenir une unité supplémentaire de bien 1, tout en maintenant son niveau d'utilité constant.

74 – Demande d'assurance (Mosin)

Un agent possède un patrimoine initial w et fait face à une perte aléatoire L . Il existe une **demande d'assurance** pour l'assurance qui verse l'indemnité $0 < I(L) < L$ ssi $u(w - \pi_I) \geq \mathbb{E}(u(w - L))$ et l'**assurance optimale** maximise $u(w - \pi_I)$.

Dans Mosin (1968) ou Borch (1961) ou Smith (1968), le modèle de perte L se définit simplement par s compris entre 0 et w :

$$L = \begin{cases} 0 & \text{avec proba. } 1 - p \\ s & \text{avec proba. } p \end{cases}$$

La prime devient $\pi_I = (1 + \lambda)\mathbb{E}(I(L)) = (1 + \lambda)pI(s)$ avec λ un chargement. On note π le cas où $I(L) = L$ avec $\pi = ps$. Si $\lambda = 0$, alors on parle de prime pure ou actuariellement juste.

Coassurance (partage du risque) : $I(l) = \alpha l$ sachant $L = l$ pour $\alpha \in [0, 1]$, $\pi_I(\alpha) = \alpha \pi$ et :

$$w_f = w - L + I(L) - \pi(\alpha) = w - L + \alpha L - \alpha \pi = w - (1 - \alpha)L - \alpha \pi$$

$$U(\alpha) = (1 - p)u(w - \alpha \pi) + pu(w - (1 - \alpha)s - \alpha \pi)$$

L'assurance partielle ($\alpha^* < 1$) est optimale ssi $\lambda > 0$. L'assurance totale ($\alpha^* = 1$) est optimale si le chargement est nul.

L'assurance avec franchise (part d'autoassurance): Avec franchise d l'assureur verse une indemnité $I(l) = (l - d)_+$ sachant $L = l$.

$$\pi(d) = (1 + \lambda)\mathbb{E}((L - d)_+) = (1 + \lambda)(s - d)p$$

$$w_f = w - X + (L - d)_+ - \pi(d) = w - \min(X, d) - (1 + \lambda)(s - d)p$$

$$U(d) = (1 - p)u(\underbrace{w + (1 + \lambda)(d - s)p}_{w_f^+}) + pu(\underbrace{w - d + (1 + \lambda)(d - s)p}_{w_f^-})$$

Dans le modèle avec franchise, l'assurance partielle ($d^* > 0$) est optimale ssi la prime n'est pas actuariellement juste. De même, l'assurance totale ($d^* = 0$) est optimale si le chargement est nul.

Modèle généralisé : Le risque de perte $L > 0$ aléatoire est défini sur \mathcal{R} , avec fonction de répartition F_L ,

$$\pi_I = (1 + \lambda)\mathbb{E}(I(L)) = (1 + \lambda) \int_0^\infty I(l) dF_L(l)$$

1. L'assurance totale ($d^* = 0$) ou ($\alpha^* = 1$) est optimale si et seulement si la prime est actuariellement juste.
2. Si $A_a(u, x)$ est décroissante, alors le niveau de franchise d^* ou le taux de couverture α^* augmente avec la richesse initiale. Pour les préférences CARA, d^* est indépendant de w ou α^* est constant.
3. Le niveau de couverture décroît avec le coefficient de chargement λ lorsque $A_a(u, x)$ est croissante ou constante.
4. Un agent plus averse au risque choisit une couverture plus élevée.

75 – Information et assurance

Mosin avec hétérogénéité : Deux types d'individus : H pour haut risque et Lo pour faible risque. $\theta \in [0, 1]$ la proportion d'individu H . Les individus de type $i \in \{Lo, H\}$ font face à un risque de même montant s survenant avec une probabilité différente p_i telle que $1 > p_H > p_{Lo} > 0$.

$$L_i = \begin{cases} 0 & \text{avec probabilité } 1 - p_i, \\ s & \text{avec probabilité } p_i. \end{cases}$$

La probabilité du marché :

$$p_m = \theta p_H + (1 - \theta)p_{Lo}.$$

Absence d'antisélection : Dans ce modèle, en présence d'information totale, l'assureur préfère une assurance individuelle $I_i = s$ et $\pi_i = sp_i, \forall i$.

Le problème d'anti-sélection : L'assureur propose un contrat non individualisé du marché $M = (\pi_m = p_m I, I_m(s) = I(s))$, qui ne dépend pas de i . La fortune finale d'un individu de type i est $W_i^m = w - \pi_m - X_i + I_m$.

En présence d'un contrat unique, les individus de type H préfèrent un contrat d'assurance tel que $I_H(s) = s$ et $\pi_H = sp_m$, tandis que les individus de type Lo préfèrent une couverture partielle avec $I_L^* < s$ et $\pi_{Lo} = I_L^* p_m$.

Aléa moral : L'assuré réduit ou interrompt ses efforts maintenant qu'il est assuré. Les efforts de

- prévention réduisent la probabilité de sinistre,
- protection réduisent le montant de sinistre.

En l'absence d'effort e de prévention ou de réduction du risque, la fortune finale w_f est simplement définie par

$$\begin{cases} w_f^- = w - s - \pi(I) + I & \text{avec probabilité } p \\ w_f^+ = w - \pi(I) & \text{avec probabilité } 1 - p \end{cases}$$

S'il y a un effort e de prévention des risques, on considère

$$\begin{cases} w_f^- = w - s - \pi(I) + I - e & \text{avec probabilité } p(e) \\ w_f^+ = w - \pi(I) - e & \text{avec probabilité } 1 - p(e) \end{cases}$$

S'il y a un effort e de protection des risques, on considère

$$\begin{cases} w_f^- = w - s(e) - \pi(I) + I - e & \text{avec probabilité } p \\ w_f^+ = w - \pi(I) - e & \text{avec probabilité } 1 - p \end{cases}$$

avec

- $e \mapsto p(e)$ est strictement décroissante et strictement convexe.
- $e \mapsto s(e)$ est strictement décroissante et strictement convexe.
- $I \leq s$ implique $w_f^- \leq w_f^+$

76 – Définitions

Série temporelle - succession d'observations quantitatives d'un phénomène classées par ordre temporelle.

Il existe plusieurs variantes de séries temporelles :

- **Données de panel** - consistant en une série temporelle pour chaque observation d'une section transversale.
- **Sections transversales regroupées** - combinant des sections transversales de différentes périodes.

Processus stochastique - séquence de variables aléatoires indexées dans le temps.

77 – Composantes d'une série temporelle

- **Tendance** - mouvement général à long terme d'une série.
- **Variations saisonnières** - oscillations périodiques qui se produisent sur une période égale ou inférieure à une année et qui peuvent être facilement identifiées d'une année à l'autre (elles sont généralement dues à des raisons climatologiques).
- **Variations cycliques** - sont des oscillations périodiques qui se produisent sur une période supérieure à une année (elles sont le résultat du cycle économique).
- **Variations résiduelles** - sont des mouvements qui ne suivent pas une oscillation périodique reconnaissable (elles sont le résultat de phénomènes ponctuels).

78 – Types de modèles de séries temporelles

- **Modèles statiques** - la relation entre y et x est contemporaine. Conceptuellement :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$$

- **Modèles à décalage distribué** - la relation entre y et x n'est pas contemporaine. Conceptuellement :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + \dots + \beta_s x_{t-(s-1)} + u_t$$

L'effet cumulatif à long terme dans y lorsque Δx est : $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s$

- **Modèles dynamiques** - décalages de la variable dépendante (endogénéité). Conceptuellement :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \dots + \beta_s y_{t-s} + u_t$$

- **Combinaisons** de ce qui précède, comme les modèles rationnels à décalage distribué (décalage distribué + dynamique).

79 – Hypothèses du modèle OLS dans le cadre des séries temporelles

Sous ces hypothèses, l'estimateur OLS présentera de bonnes propriétés. **Hypothèses de Gauss-Markov** étendues aux séries temporelles :

t1. **Linéarité des paramètres et faible dépendance.**

a. y_t doit être une fonction linéaire des β .

b. Le stochastique $\{(x_t, y_t) : t = 1, 2, \dots, T\}$ est stationnaire et faiblement dépendant.

t2. **Pas de colinéarité parfaite.**

- Il n'y a pas de variables indépendantes qui sont constantes : $\text{Var}(x_j) \neq 0, \forall j = 1, \dots, k$
- Il n'y a pas de relation linéaire exacte entre les variables indépendantes.

t3. **Moyenne conditionnelle nulle et corrélation nulle.**

- a. Il n'y a pas d'erreurs systématiques : $\mathbb{E}(u | x_1, \dots, x_k) = \mathbb{E}(u) = 0 \rightarrow$ **exogénéité forte** (a implique b).
- b. Il n'y a pas de variables pertinentes laissées hors du modèle : $\text{Cov}(x_j, u) = 0, \forall j = 1, \dots, k \rightarrow$ **exogénéité faible**.

t4. **Homoscédasticité.** La variabilité des résidus est la même pour tout x : $\text{Var}(u | x_1, \dots, x_k) = \sigma_u^2$

t5. **Pas d'autocorrélation.** Les résidus ne contiennent aucune information sur les autres résidus : $\text{Corr}(u_t, u_s | x_1, \dots, x_k) = 0, \forall t \neq s$

t6. **Normalité.** Les résidus sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d. etc.) : $u \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$

t7. **Taille des données.** Le nombre d'observations disponibles doit être supérieur à $(k+1)$ paramètres à estimer. (Cette condition est déjà satisfaite dans des situations asymptotiques)

80 – Propriétés asymptotiques de l'OLS

Sous les hypothèses du modèle économétrique et le théorème de la limite centrale :

- Si t1 à t3a sont vérifiées : l'OLS est **non biaisée**. $\mathbb{E}(\hat{\beta}_j) = \beta_j$
- Si t1 à t3 sont vérifiées : l'OLS est **cohérent**. $\text{plim}(\hat{\beta}_j) = \beta_j$ (pour t3b, t3a est omis, exogénéité faible, biaisé mais cohérent)
- Maintenir t1 à t5 : **normalité asymptotique** de l'OLS (alors, t6 est nécessairement satisfait) : $u \sim_a \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$
- Maintenir t1 à t5 : **estimation non biaisée** de σ_u^2 . $\mathbb{E}(\hat{\sigma}_u^2) = \sigma_u^2$
- Maintenir t1 à t5 : OLS est **BLUE, Best Linear Unbiased Estimator** (meilleur estimateur linéaire non biaisé) ou **efficace**.
- Maintenir t1 à t6 : les tests d'hypothèse et les intervalles de confiance peuvent être effectués de manière fiable.

81 – Tendances et saisonnalité

Régression parasite - se produit lorsque la relation entre y et x est due à des facteurs qui affectent y et qui sont corrélés à x , $\text{Corr}(x_j, u) \neq 0$. Il s'agit du **non-respect de t3**.

Deux séries temporelles peuvent avoir la même tendance (ou une tendance contraire), ce qui devrait entraîner un niveau élevé de corrélation. Cela peut provoquer une fausse apparence de causalité, le problème étant la **régression fallacieuse**. Étant donné le modèle :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$$

où :

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \text{Tendance} + v_t$$

$$x_t = \gamma_0 + \gamma_1 \text{Tendance} + v_t$$

L'ajout d'une tendance au modèle peut résoudre le problème :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 \text{Tendance} + u_t$$

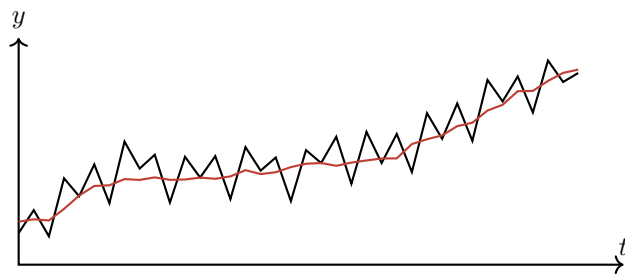
La tendance peut être linéaire ou non linéaire (quadratique, cubique, exponentielle, etc.).

Une autre méthode consiste à utiliser le **filtre de Hodrick-Prescott** pour extraire la tendance et la composante cyclique.

82 – Saisonnalité

Une série temporelle peut présenter une saisonnalité. Cela signifie que la série est soumise à des variations ou à des schémas saisonniers, généralement liés aux conditions climatiques.

Par exemple, le PIB (en noir) est généralement plus élevé en été et plus faible en hiver. Série corrigée des variations saisonnières (en orange) à titre de comparaison.



- Ce problème est une **régression parasite**. Un ajustement saisonnier peut le résoudre.

Un simple **ajustement saisonnier** pourrait consister à créer des variables binaires stationnaires et à les ajouter au modèle. Par exemple, pour les séries trimestrielles (Qq_t sont des variables binaires) :

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 Q2_t + \beta_2 Q3_t + \beta_3 Q4_t + \beta_4 x_{1t} + \dots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

Une autre méthode consiste à ajuster les variables en fonction des variations saisonnières (sa), puis à effectuer la régression avec les variables ajustées :

$$z_t = \beta_0 + \beta_1 Q2_t + \beta_2 Q3_t + \beta_3 Q4_t + v_t \rightarrow \hat{v}_t + \mathbb{E}(z_t) = \hat{z}_t^{sa}$$

$$\hat{y}_t^{sa} = \beta_0 + \beta_1 \hat{x}_{1t}^{sa} + \dots + \beta_k \hat{x}_{kt}^{sa} + u_t$$

Il existe des méthodes bien plus efficaces et complexes pour ajuster saisonnièrement une série temporelle, comme la méthode **X-13ARIMA-SEATS**.

83 – Autocorrélation

Le résidu de toute observation, u_t , est corrélé avec le résidu de toute autre observation. Les observations ne sont pas indépendantes. Il s'agit d'un cas de **non-respect** de **t5**.

$$\text{Corr}(u_t, u_s \mid x_1, \dots, x_k) = \text{Corr}(u_t, u_s) \neq 0, \forall t \neq s$$

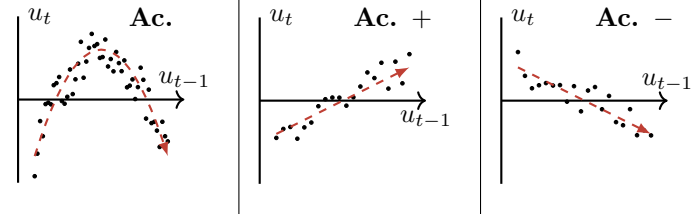
84 – Conséquences

- Les estimateurs OLS restent non biaisés.
- Les estimateurs OLS restent cohérents.
- L'OLS n'est **plus efficace**, mais reste un LUE (estimateur linéaire non biaisé).

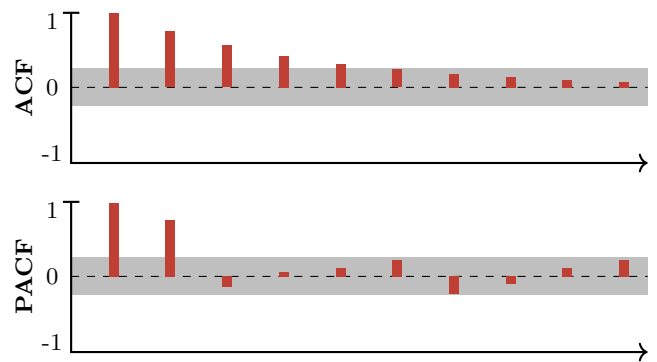
- Les **estimations de variance** des estimateurs sont **biaisées** : la construction des intervalles de confiance et les tests d'hypothèse ne sont pas fiables.

85 – Détection

- **Diagrammes de dispersion** - recherchez des modèles de dispersion sur u_{t-1} par rapport à u_t .



- **Corrélogramme** - fonction d'autocorrélation (ACF) et fonction d'autocorrélation partielle (PACF).
 - Axe Y : corrélation.
 - Axe X : nombre de décalages.
 - Zone grise : $\pm 1,96/T^{0,5}$



Processus MA(q). ACF : seuls les premiers coefficients q sont significatifs, les autres sont brusquement annulés. PACF : décroissance exponentielle rapide atténuée ou ondes sinusoïdales.

Processus AR(p). ACF : décroissance exponentielle rapide atténuée ou ondes sinusoïdales. PACF : seuls les premiers coefficients p sont significatifs, les autres sont brusquement annulés.

Processus ARMA(p, q). ACF et PACF : les coefficients ne sont pas brusquement annulés et présentent une décroissance rapide.

Si les coefficients ACF ne décroissent pas rapidement, cela indique clairement un manque de stationnarité dans la moyenne.

- **Tests formels** - En général, H_0 : pas d'autocorrélation. En supposant que u_t suit un processus AR(1) :

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \varepsilon_t$$

où ε_t est un bruit blanc.

Test t AR(1) (régresseurs exogènes) :

$$t = \frac{\hat{\rho}_1}{\text{se}(\hat{\rho}_1)} \sim t_{T-k-1, \alpha/2}$$

- H_1 : Autocorrélation d'ordre un, AR(1).

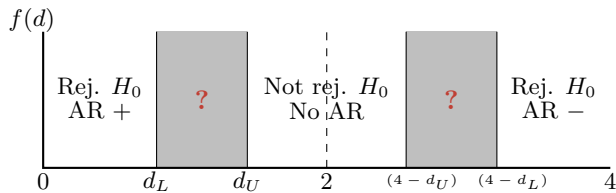
Statistique de Durbin-Watson (régresseurs exogènes et normalité des résidus) :

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2} \approx 2 \cdot (1 - \hat{\rho}_1)$$

Où $0 \leq d \leq 4$

– H_1 : Autocorrélation d'ordre un, AR(1).

$$\frac{d}{\rho} \approx \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$



h de Durbin (régresseurs endogènes) :

$$h = \hat{\rho} \cdot \sqrt{\frac{T}{1 - T \cdot v}}$$

où v est la variance estimée du coefficient associé à la variable endogène.

– H_1 : Autocorrélation d'ordre un, AR(1).

Test de Breusch-Godfrey (régresseurs endogènes) : il permet de détecter les processus MA(q) et AR(p) (ε_t est w. bruit) :

– MA(q) : $u_t = \varepsilon_t - m_1 u_{t-1} - \dots - m_q u_{t-q}$

– AR(p) : $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \dots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$

Sous H_0 : Pas d'autocorrélation :

$$T \cdot R_{\hat{u}_t}^2 \underset{a}{\sim} \chi_q^2 \quad \text{ou} \quad T \cdot R_{\hat{u}_t}^2 \underset{a}{\sim} \chi_p^2$$

– H_1 : Autocorrélation d'ordre q (ou p).

Test Q de Ljung-Box :

– H_1 : Autocorrélation jusqu'au décalage h .

86 – Correction • Utiliser la méthode des moindres carrés ordinaires (OLS) avec un estimateur de matrice de variance-covariance **robuste à l'hétéroscédasticité et à l'autocorrélation** (HAC), par exemple celui proposé par **Newey-West**.

• Utiliser les **moindres carrés généralisés** (GLS). Supposons que $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$, avec $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, où $|\rho| < 1$ et ε_t est un bruit blanc.

– Si ρ est **connu**, utilisez un **modèle quasi-différencié** :

$$y_t - \rho y_{t-1} = \beta_0(1 - \rho) + \beta_1(x_t - \rho x_{t-1}) + u_t - \rho u_{t-1}$$

$$y_t^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_t^* + \varepsilon_t$$

où $\beta_1^* = \beta_1$; et estimez-le par OLS.

– Si ρ n'est **pas connu**, l'estimer par exemple par la **méthode itérative de Cochrane-Orcutt** (la méthode de Prais-Winsten est également valable) :

1. Obtenir \hat{u}_t à partir du modèle original.

2. Estimez $\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$ et obtenez $\hat{\rho}$.

3. Créez un modèle quasi-différencié :

$$y_t - \hat{\rho} y_{t-1} = \beta_0(1 - \hat{\rho}) + \beta_1(x_t - \hat{\rho} x_{t-1}) + u_t - \hat{\rho} u_{t-1}$$

$$y_t^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_t^* + \varepsilon_t$$

où $\beta_1^* = \beta_1$; et l'estimer par OLS.

4. Obtenir $\hat{u}_t^* = y_t - (\hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x_t) \neq y_t - (\hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x_t^*)$.

5. Répéter à partir de l'étape 2. L'algorithme se termine lorsque les paramètres estimés varient très peu entre les itérations.

• Si le problème n'est pas résolu, rechercher une **forte dépendance** dans la série.

87 – Lissage exponentiel $f_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)f_{t-1}$
où $0 < \alpha < 1$ est le paramètre de lissage.

88 – Prévisions
Deux types de prévisions :

- De la valeur moyenne de y pour une valeur spécifique de x .
- D'une valeur individuelle de y pour une valeur spécifique de x .

Statistique U de Theil - compare les résultats prévus avec les résultats des prévisions réalisées à partir d'un minimum de données historiques.

$$U = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T-1} \left(\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} \right)^2}{\sum_{t=1}^{T-1} \left(\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} \right)^2}}$$

- < 1 : la prévision est meilleure qu'une simple estimation.
- $= 1$: la prévision est à peu près aussi bonne qu'une simple estimation.
- > 1 : La prévision est moins bonne qu'une simple estimation.

89 – Stationnarité
La stationnarité permet d'identifier correctement les relations entre les variables qui restent inchangées dans le temps.

- **Processus stationnaire** (stationnarité stricte) : si un ensemble de variables aléatoires est pris et décalé de h périodes (changements de temps), la distribution de probabilité conjointe doit rester inchangée.
- **Processus non stationnaire** : par exemple, une série avec une tendance, où au moins la moyenne change avec le temps.
- **Processus stationnaire de covariance** - il s'agit d'une forme plus faible de stationnarité :
 - $\mathbb{E}(x_t)$ est constant. \quad – $\text{Var}(x_t)$ est constant.
 - Pour tout $t, h \geq 1$, $\text{Cov}(x_t, x_{t+h})$ dépend uniquement de h , et non de t .

90 – Faible dépendance
La faible dépendance remplace l'hypothèse d'échantillonnage aléatoire pour les séries temporelles.

- Un processus stationnaire $\{x_t\}$ est **faiblement dépendant** lorsque x_t et x_{t+h} sont presque indépendants lorsque h augmente sans limite.
- Un processus stationnaire de covariance est **faiblement dépendant** si la corrélation entre x_t et x_{t+h} tend vers 0 suffisamment rapidement lorsque $h \rightarrow \infty$ (ils ne sont pas corrélés de manière asymptotique).

Les processus faiblement dépendants sont appelés **intégrés d'ordre zéro**, $I(0)$. Quelques exemples :

- **Moyenne mobile** - $\{x_t\}$ est une moyenne mobile d'ordre q , $MA(q)$:

$$x_t = e_t + m_1 e_{t-1} + \dots + m_q e_{t-q}$$

où $\{e_t : t = 0, 1, \dots, T\}$ est une séquence *i.i.d.* avec une moyenne nulle et une variance σ_e^2 .

- **Processus autorégressif** - $\{x_t\}$ est un processus autorégressif d'ordre p , $AR(p)$:

$$x_t = \rho_1 x_{t-1} + \dots + \rho_p x_{t-p} + e_t$$

où $\{e_t : t = 1, 2, \dots, T\}$ est une séquence *i.i.d.* avec une moyenne nulle et une variance σ_e^2 .

Condition de stabilité : si $1 - \rho_1 z - \dots - \rho_p z^p = 0$ pour $|z| > 1$, alors $\{x_t\}$ est un processus $AR(p)$ stable qui est faiblement dépendant. Pour $AR(1)$, la condition est : $|\rho_1| < 1$.

- **Processus ARMA** - est une combinaison de $AR(p)$ et $MA(q)$; $\{x_t\}$ est un $ARMA(p, q)$:

$$x_t = e_t + m_1 e_{t-1} + \dots + m_q e_{t-q} + \rho_1 x_{t-1} + \dots + \rho_p x_{t-p}$$

91 – Racines unitaires
Un processus est $I(d)$, c'est-à-dire intégré d'ordre d , si l'application de différences d fois rend le processus stationnaire. Lorsque $d \geq 1$, le processus est appelé **processus à racine unitaire** ou on dit qu'il a une racine unitaire.

Un processus a une racine unitaire lorsque la condition de stabilité n'est pas remplie (il existe des racines sur le cercle unitaire).

92 – Forte dépendance
La plupart du temps, les séries économiques sont fortement dépendantes (ou très persistantes). Quelques exemples de **racine unitaire** $I(1)$:

- **Marche aléatoire** - un processus $AR(1)$ avec $\rho_1 = 1$.

$$y_t = y_{t-1} + e_t$$

où $\{e_t : t = 1, 2, \dots, T\}$ est une séquence *i.i.d.* avec une moyenne nulle et une variance σ_e^2 .

- **Marche aléatoire avec dérive** - un processus $AR(1)$ avec $\rho_1 = 1$ et une constante.

$$y_t = \beta_0 + y_{t-1} + e_t$$

où $\{e_t : t = 1, 2, \dots, T\}$ est une séquence *i.i.d.* avec une moyenne nulle et une variance σ_e^2 .

93 – Tests de racine unitaire

Test	H_0	Rejeter H_0
ADF	$I(1)$	$\tau < \text{Valeur critique}$
KPSS	Niveau $I(0)$ Tendance $I(0)$	$\mu > \text{Valeur critique}$ $\tau > \text{Valeur critique}$
Phillips-Perron	$I(1)$	$Z\text{-}\tau < \text{Valeur critique}$
Zivot-Andrews	$I(1)$	$\tau < \text{Valeur critique}$

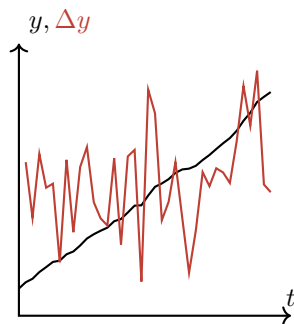
94 – De la racine unitaire à la faible dépendance
Intégré d'ordre **un**, $I(1)$, signifie que la **première différence** du processus est **faiblement dépendante** ou $I(0)$ (et généralement stationnaire). Par exemple, soit $\{y_t\}$ une marche aléatoire :

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = e_t$$

où $\{e_t\} = \{\Delta y_t\}$ est *i.i.d.*

Remarque :

- La première différence d'une série supprime sa tendance.
- Les logarithmes d'une série stabilisent sa variance.



De la racine unitaire au pourcentage de variation

Lorsqu'une série $I(1)$ est strictement positive, elle est généralement convertie en logarithmes avant de prendre la première différence pour obtenir le pourcentage de variation (approximatif) de la série :

$$\Delta \log(y_t) = \log(y_t) - \log(y_{t-1}) \approx \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$$

95 – Cointégration

Lorsque deux séries sont $I(1)$, mais qu'une combinaison linéaire de celles-ci est $I(0)$. Dans ce cas, la régression d'une série sur l'autre n'est pas fallacieuse, mais exprime quelque chose sur la relation à long terme. Les variables sont dites cointégrées si elles ont une tendance stochastique commune.

Par exemple, $\{x_t\}$ et $\{y_t\}$ sont $I(1)$, mais $y_t - \beta x_t = u_t$ où $\{u_t\}$ est $I(0)$. (β est le paramètre de cointégration).

96 – Test de cointégration

En suivant l'exemple ci-dessus :

1. Estimer $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$ et obtenir $\hat{\varepsilon}_t$.
2. Effectuer un test ADF sur $\hat{\varepsilon}_t$ avec une distribution modifiée.

Le résultat de ce test est équivalent à :

- $H_0 : \beta = 0$ (pas de cointégration)
- $H_1 : \beta \neq 0$ (cointégration)

si la statistique du test $>$ valeur critique, rejeter H_0 .

97 – Hétéroscédasticité sur les séries temporelles

L'hypothèse affectée est **t4**, ce qui conduit à une **inefficacité de l'OLS**.

Utilisez des tests tels que Breusch-Pagan ou White, où H_0 : pas d'hétéroscédasticité. Il est **important** pour que les tests fonctionnent qu'il n'y ait **pas d'autocorrélation**.

98 – ARCH

Une hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive (ARCH) est un modèle permettant d'analyser une forme d'hétéroscédasticité dynamique, où la variance de l'erreur suit un processus $AR(p)$.

Étant donné le modèle : $y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t$ où il y a $AR(1)$ et hétéroscédasticité :

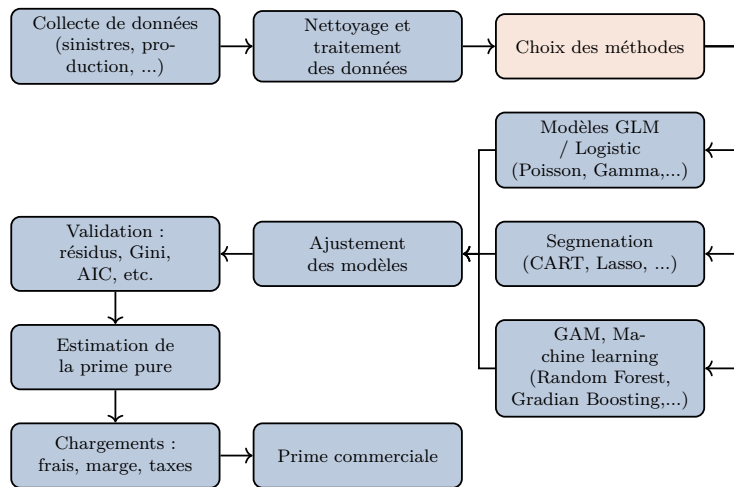
$$\mathbb{E}(u_t^2 | u_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

99 – GARCH

Un modèle général d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive (GARCH) est similaire au modèle ARCH, mais dans ce cas, la variance de l'erreur suit un processus $ARMA(p, q)$.

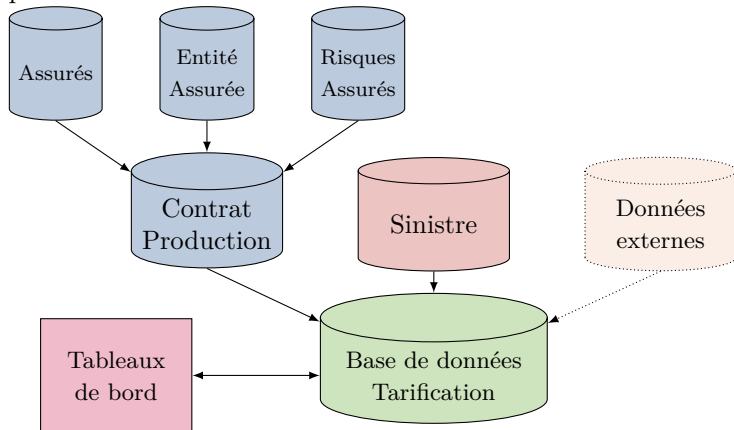
100 – La tarification en assurance non-vie

Une approche générale, mais non exhaustive, car les possibles sont nombreux :



101 – Structure générale des données en assurance

Une structure classique des données en assurance. Là encore, les possibles sont nombreux :



102 – Provision

L'actuaire non-vie évalue principalement les provisions suivantes:

- Des provisions pour sinistres à payer (PSAP, *Reserves for claims reported but not settled (RBNS)*)
- Des provisions pour sinistres non encore manifestés (PSNEM, *Reserve for claims incurred but not reported (IBNR)*)
- Des provisions pour primes non acquises (PPNA, *Reserves for unearned premiums*)
- Des provisions pour risques en cours (PREC, *Reserves for outstanding risks (non-life)*)

103 – Chain Ladder déterministe

Soit C_{ik} le montant, cumulé jusqu'en l'année de développement k , des sinistres survenus en l'année d'accident i , pour $1 \leq i, k \leq n$. C_{ik} peut représenter soit le montant payé, soit le cout total estimé (paiement déjà effectué plus réserve) du sinistre. Les montants C_{ik} sont connus pour $i + k \leq n + 1$ et on cherche à estimer les valeurs des C_{ik} pour $i + k > n + 1$, et en particulier les valeurs ultimes C_{in} pour $2 \leq i \leq n$. Ces notations sont illustrées dans le triangle suivant:

La méthode de Chain Ladder estime les montants inconnus, C_{ik} pour $i + k > n + 1$, par

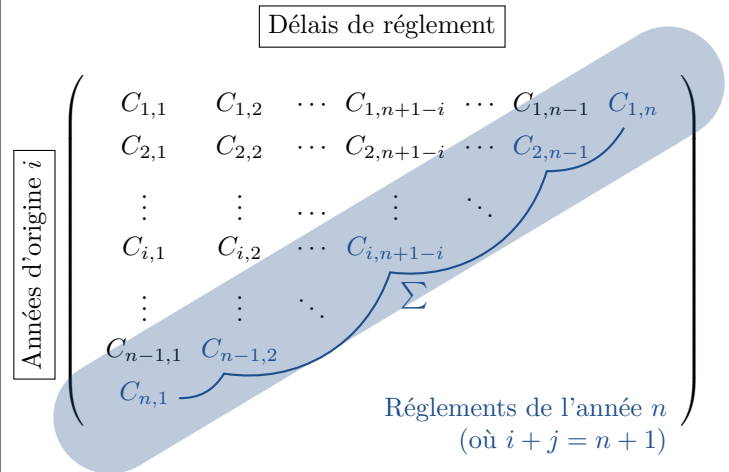
$$\hat{C}_{ik} = C_{i,n+1-i} \cdot \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{k-1} \quad i + k > n + 1 \quad (5)$$

ó

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}} \quad 1 \leq k \leq n - 1. \quad (6)$$

La réserve de sinistre pour l'année d'accident (R_i , $2 \leq i \leq n$), est alors estimée par

$$\begin{aligned} \hat{R}_i &= C_{in} - C_{i,n+1-i} \\ &= C_{i,n+1-i} \cdot \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{n-1} - C_{i,n+1-i} \end{aligned}$$



104 – Méthode de Mack

Les deux premières hypothèses sont les suivantes:

$$E(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} f_k \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq n - 1 \quad (7)$$

$$\{C_{i1}, \dots, C_{in}\}, \{C_{j1}, \dots, C_{jn}\} \quad \forall i, j \text{ sont indépendants} \quad (8)$$

Mack démontre que si on estime les paramètres du modèle (7) par (6) alors ce modèle stochastique (7), combiné avec l'hypothèse (8) fournit exactement les mêmes réserves que la méthode originale de Chain Ladder (5).

Avec la notation $f_{i,k} = \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}$, \hat{f}_k est la moyenne des $f_{i,k}$ pondérée par les $C_{i,k}$:

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k} \times f_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}}$$

La variance s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_k^2 &= \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{f}_k \right)^2 \\ &= \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k} \left(\frac{C_{i,k+1} - C_{i,k} \hat{f}_k}{\sqrt{C_{i,k}}} \right)^2 \end{aligned}$$

Le troisième hypothèse concerne la distribution de R_i pour pouvoir construire facilement des intervalles de confiance sur les réserves estimées. Si la distribution est normale, de moyenne la valeur estimée \hat{R}_i et d'écart-type donné par l'erreur standard se (\hat{R}_i). Un intervalle de confiance à 95% est alors donné par $[\hat{R}_i - 2 \text{ se}(\hat{R}_i), \hat{R}_i + 2 \text{ se}(\hat{R}_i)]$.

Si la distribution est supposée lognormale, les bornes d'un intervalle de confiance à 95% seront alors données par

$$\left[\hat{R}_i \exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} - 2\sigma_i\right), \hat{R}_i \exp\left(\frac{-\sigma_i^2}{2} + 2\sigma_i\right)\right]$$

105 – Le modèle risque collectif

Le modèle collectif est le modèle de base en actuariat non-vie? X_i désigne le montant du i^e sinistre, N désigne le nombre de sinistres et S le montant total au cours d'une année

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

en sachant que $S = 0$ lorsque $N = 0$ et que $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ est une séquence iid et $N \perp \{X_i\}_{i=1}^\infty$. La difficulté est d'obtenir la distribution de S , alors même que $\mathbb{E}[N]$ n'est pas grand au sens du TCL.

106 – La distribution de S

Soit $G(x) = \mathbb{P}(S \leq x)$, $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)$, et $p_n = \mathbb{P}(N = n)$ de sorte que $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ soit la fonction de probabilité pour le nombre de sinistres.

$$\{S \leq x\} = \bigcup_{n=0}^\infty \{S \leq x \text{ et } N = n\}$$

$$\mathbb{P}(S \leq x \mid N = n) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) = F^{n*}(x)$$

Ainsi, pour $x \geq 0$

$$G(x) = \sum_{n=0}^\infty p_n F^{n*}(x)$$

où F^{n*} désigne la convolution n^e , malheureusement elle n'existe pas sous forme fermée pour de nombreuses distributions. Si $E[X] = m$

$$E[S] = E[Nm] = E[N]m$$

Ce résultat est très intéressant, car il indique que le montant total attendu des sinistres est le produit du nombre attendu de sinistres et du montant attendu de chaque sinistre. De même, en utilisant le fait que $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ sont des variables aléatoires indépendantes,

$$V[S \mid N = n] = V\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n V[X_i]$$

$$\begin{aligned} V[S] &= E[V(S \mid N)] + V[E(S \mid N)] \\ &= E[N]V[X_i] + V[N]m^2 \end{aligned}$$

107 – La classe de distributions $(a, b, 0)$

Une distribution de comptage est dite $(a, b, 0)$ si sa fonction de probabilité $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ peut être calculée de manière récursive à partir de la formule

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}$$

pour $n = 1, 2, 3, \dots$, où a et b sont des constantes. Il existe exactement trois distributions non triviales dans la classe $(a, b, 0)$, à savoir Poisson, binomiale et binomiale négative. Voici les valeurs de a et b pour les principales distributions $(a, b, 0)$:

	a	b
$\mathcal{P}_{ois}(\lambda)$	0	λ
$\mathcal{B}_{in}(n, q)$	$-q/(1 - q)$	$(n + 1)q/(1 - q)$
$\mathcal{NB}_{in}(k, q)$	$1 - q$	$(1 - q)(k - 1)$
$\mathcal{G}_{eo}(q)$	$1 - q$	0
Distribution de Panjer	$\frac{\lambda}{\alpha + \lambda}$	$\frac{(\alpha - 1)\lambda}{\alpha + \lambda}$

La loi géométrique est un cas particulier de la binomiale négative où $k=1$.

108 – Algorithme d'agrégation de Panjer

L'algorithme de Panjer vise l'estimation de distribution d'une loi composée coût-fréquence dans des conditions particulières.

- $(X_i)_{i=1}^N$ iid discrètes définies sur $\{0, h, 2h, 3h, \dots\}$
- la loi du nombre dans la classe dite $(a, b, 0)$

Puisque nous supposons désormais que les montants individuels des demandes sont répartis sur les entiers non négatifs, il s'ensuit que S est également réparti sur les entiers non négatifs. Comme $S = \sum_{i=1}^N X_i$, il s'ensuit que $S = 0$ si $N = 0$ ou si $N = n$ et $\sum_{i=1}^n X_i = 0$. Comme $\sum_{i=1}^n X_i = 0$ uniquement si chaque $X_i = 0$, il s'ensuit par indépendance que

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i = 0\right) = f_0^n$$

$$\begin{cases} g_0 = p_0 + \sum_{n=1}^\infty p_n f_0^n = P_N(f_0) \text{ si } a \neq 0, \\ g_0 = p_0 \cdot \exp(f_0 b) \text{ si } a = 0, \\ g_k = \frac{1}{1 - a f_0} \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{b j}{k}\right) f_j g_{k-j} \end{cases}$$

g_x est exprimé en fonction de g_0, g_1, \dots, g_{x-1} , de sorte que le calcul de la fonction de probabilité est récursif. Dans toutes les applications pratiques de cette formule, un ordinateur est nécessaire pour effectuer les calculs. Cependant, l'avantage de la formule de récursivité de Panjer par rapport à la formule pour g_x est qu'il n'est pas nécessaire de calculer les convolutions, ce qui est beaucoup plus efficace d'un point de vue computationnel. L'algorithme de Panjer nécessite la discrétisation de la variable X_i .

109 – Panjer et la loi de Poisson

Lorsque la fréquence suit une loi de Poisson, cela implique que $a = 0$ et $b = \lambda$. Le résultat se simplifie :

$$\begin{cases} g_0 = e^{-\lambda(1-f_0)} \\ g_k = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^k j \cdot f_j \cdot g_{k-j} \end{cases}$$

110 – Panjer et Pollaczek-Khinchine-Beekman

Soit τ_1 le premier instant où $R_t < \kappa (= \kappa_0)$. On pose alors $L_1 = \kappa - R_{\tau_1}$. On redémarre le processus avec $\kappa_1 = \kappa_0 - R_{\tau_1}$ pour trouver τ_2 et $L_2 = \kappa_1 - R_{\tau_2}$. En continuant de la sorte, on constate que :

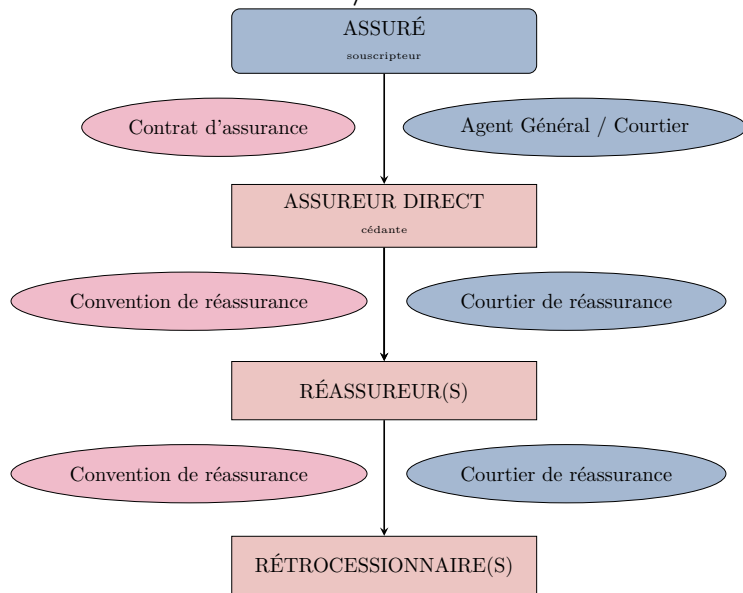
$$M = \sup_{t \geq 0} \{S_t - ct\} = \sum_{k=1}^K L_k$$

où $K \sim \mathcal{G}_{eo}(q)$ avec $q = 1 - \psi(0)$. En remarquant que les variables $(L_k)_{1 \leq k \leq K}$ sont iid (F), on a alors $\psi(k) = \mathbb{P}[M > \kappa]$ donnée par la formule de Pollaczek-Khinchine-Beekman. La représentation

$$\psi(\kappa) = \mathbb{P}\left[\sum_{j=1}^K L_j > \kappa\right]$$

permet d'évaluer la probabilité de ruine sur horizon infini à l'aide | de l'algorithme de Panjer.

111 – Schémas de cession/rétrocession



112 – Les mots clés de la réassurance

Cédante : client du réassureur, c'est-à-dire l'assureur direct, qui transfère (cède) des risques au réassureur contre le versement d'une **prime de réassurance**.

Cession : transfert de risques par l'assureur direct au réassureur.

Capacité (Value Exposure) : limite du montant du risque couvert par un contrat de (ré)assurance.

Réassurance proportionnelle : participation proportionnelle du réassureur aux primes et aux sinistres de l'assureur direct.

Réassurance en quote-part (Quota Share) : type de réassurance proportionnelle où le réassureur participe à un pourcentage donné de tous les risques souscrits par un assureur direct dans une branche déterminée.

Réassurance en excédent de plein (Surplus Share) : type de réassurance proportionnelle où le réassureur couvre les risques au delà du plein de conservation de l'assureur direct. Ce ratio se calcule sur la capacité du risque souscrit (\approx Sinistre maximal possible).

Commission de réassurance : rémunération que le réassureur accorde à l'assureur ou aux courtiers en dédommagement des frais d'acquisition et de gestion des contrats d'assurance.

Réassurance non proportionnelle (ou réassurance en excédent de sinistre, Excess Reinsurance) : prise en charge par le réassureur des sinistres excédant un certain montant, contre le versement par l'assureur direct d'une prime de réassurance spécifique.

Rétrocession : part des risques que le réassureur cède à d'autres réassureurs.

Coassurance : participation de plusieurs assureurs directs au même risque.

On utilise alors l'expression **pool de réassurance**. Le réassureur principal est appelé **apérîteur**.

Traité de réassurance : contrat conclu entre l'assureur direct et le réassureur sur un ou plusieurs portefeuilles de l'assureur.

Réassurance facultative : Elle diffère du traité de réassurance par une souscription risque par risque (ou police par police) (du cas par cas, un risque à la fois).

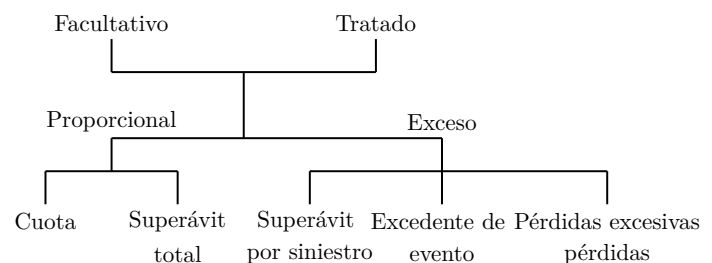
113 – Le rôle économique de la réassurance

L'assurance et la réassurance partagent la même finalité : la mutualisation des risques. La réassurance intervient en particuliers sur les risques :

- indépendants, mais unitairement coûteux (avion, navire, sites industriels...),
- de petits montants (bris, auto, ...) mais corrélés lors d'événements de grandes ampleurs, engendrant des cumuls onéreux,
- agrégés au sein d'un portefeuille de polices d'assurance,
- mal connus ou nouveaux.

La réassurance permet d'augmenter la capacité d'émission d'affaires, assurer la stabilité financière de l'assureur, surtout en cas de catastrophes, réduire leur besoin en capital, bénéficier de l'expertise du réassureur.

114 – Les types d'ententes en réassurance

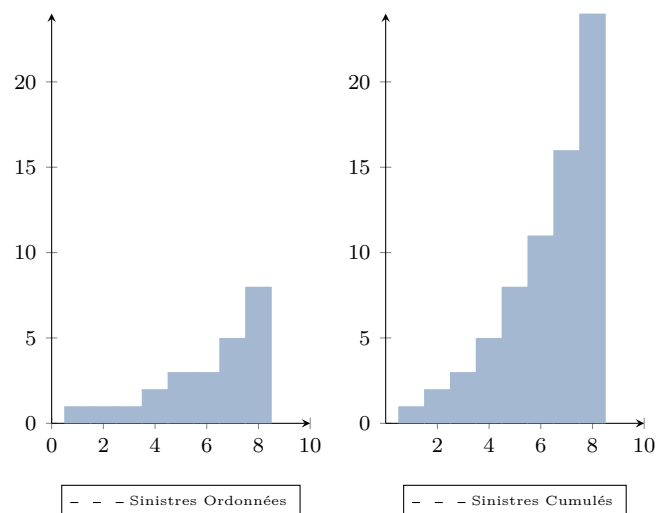


115 – Les types de réassurance à travers un exemple

Notre assureur réassure $N = 30$ polices d'assurance, d'un total de primes est de 10M€ ($P = \sum_{i=1...N} P_i$). La capacité totale est de 180M€ ($\sum_{i=1...30} K_i$). S_r sera la part totale de sinistre pris en charge par l'assureur et P_r la prime totale de réassurance. Voici les $n = 8$ polices sinistrées ($1 \leq i \leq n$), les sinistres des autres polices étant nuls ($S_i = 0, \forall i > n$) :

Num de sinistre	1	2	3	4	5	6	7	8
Prime (k€)	500	200	100	100	50	200	500	200
Capacité (M€)	8	5	3	2	3	5	8	8
Sinistres (M€)	1	1	1	2	3	3	5	8

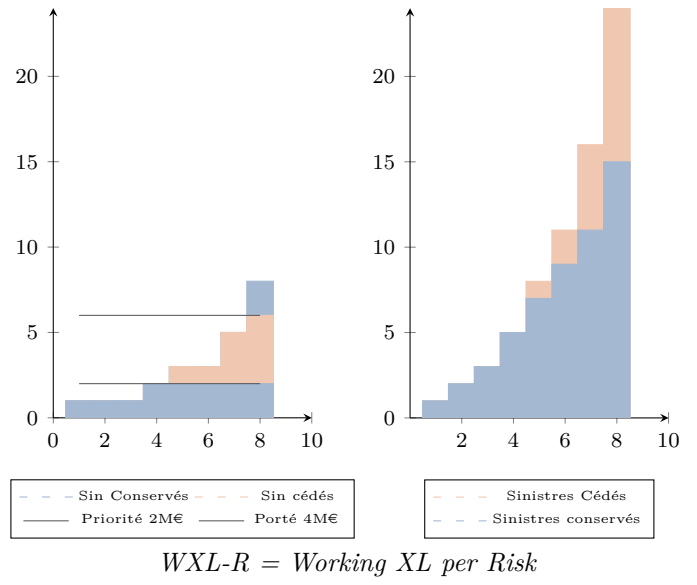
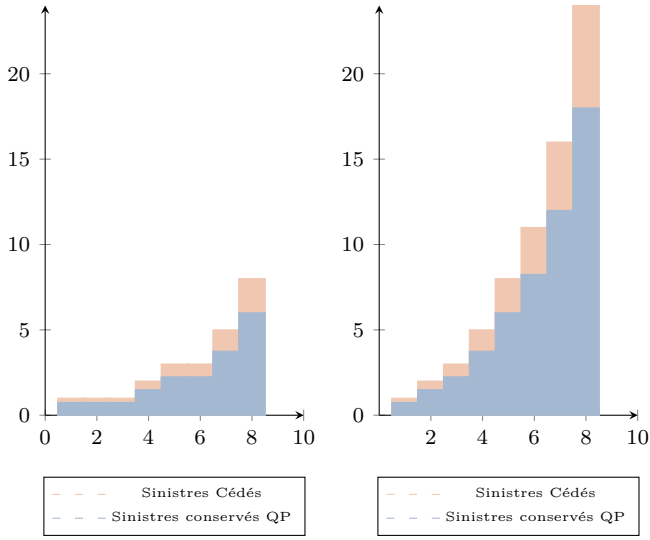
Le S/P est de 240%.



Quote-part:

$$S_r = \alpha \sum_{i=1 \dots n} S_i \quad P_r = \alpha \sum_{i=1 \dots N} P_i$$

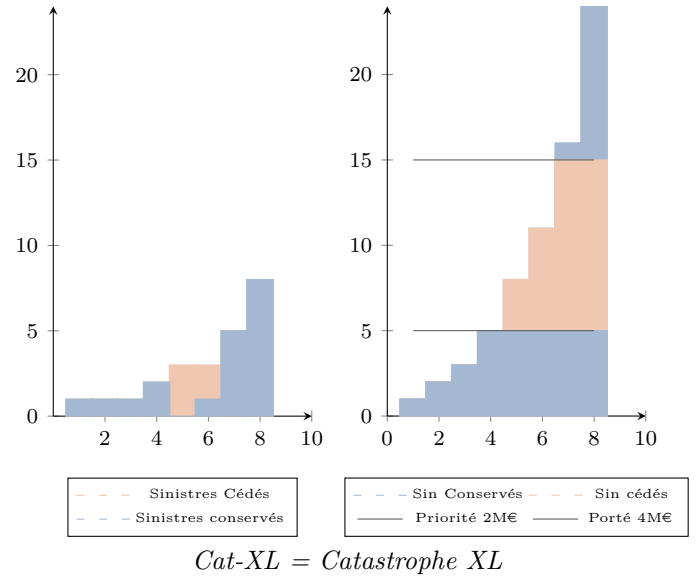
où $\alpha \in [0, 1]$ (25% dans la figure) est la part cédée en Quote-part.



Excédent par événement

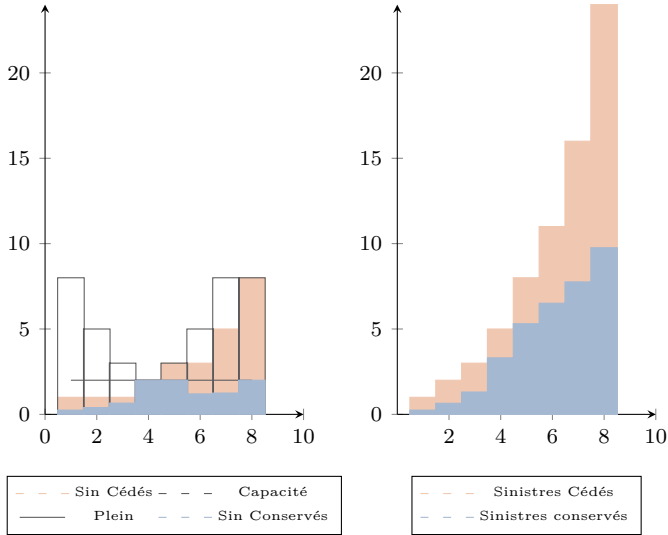
$$S_r = \sum_{i=1 \dots N} \min \left(\mathbb{1}_{i \in \text{Cat}_j} \times (S_i - a)^+, b \right)$$

Dans l'illustration, les sinistres font référence à un seul événement, avec une priorité à 5M€ et une portée à 10M€.



Excédent de plein, le plein est noté K (2M€ dans l'exemple), α_i représente le taux de cession de la police i .

$$S_r = \sum_{i=1 \dots n} \underbrace{\left(\frac{(K_i - K)^+}{K_i} \right)}_{\alpha_i} S_i \quad P_r = \sum_{i=1 \dots N} \left(\frac{(K_i - K)^+}{K_i} \right) P_i$$



Excédent par sinistre

L'assureur fixe la priorité a et la portée b (respectivement 2M€ et 4M€ dans la figure).

$$S_r = \sum_{i=1 \dots n} \min \left((S_i - a)^+, b \right)$$

La prime est fixée par le réassurance, en fonction de son estimation de $\mathbb{E}[S_r]$.

Excédent de pertes annuelles

Cette réassurance (*Stop Loss*) intervient lorsque le cumul des pertes annuelles est dégradé. Il s'exprime sur la base du ratio S/P avec une priorité et une portée du XL exprimées en %.

$$S_r = \min \left(\left(\sum_{i=1 \dots N} S_i - aP \right)^+, bP \right)$$

116 – Les principales clauses en réassurance

La franchise a^{ag} et la **limite aggregate b^{ag}** s'appliquent après le calcul du S_r .

$$S_r^{ag} = \min \left((S_r - a^{ag})^+, b^{ag} \right)$$

L'objectif de la **clause d'indexation** est de conserver les modalités du traité sur plusieurs exercices successifs. Les bornes du traité s'alignent sur un indice économique (salaire, devise, indice de prix ...).

Avec **clause de stabilisation**, lorsque le sinistre souffre d'un règlement long, voire très long (au moins ≥ 1 an), les bornes du traité sont actualisées dans le calcul du S_r afin que les parts respectives du réassureur et de la cédante prévues initialement soient globalement respectées.

Avec la **clause de partage des intérêts**, si lors d'une transaction ou d'un jugement d'un tribunal une distinction a été faite entre l'indemnité et les intérêts, les intérêts courus entre la date du sinistre et celle du paiement effectif de l'indemnité seront répartis entre la cédante et le réassureur proportionnellement à leur charge respective résultant de l'application du traité hors intérêts.

La **clause de reconstitution de garantie** concerne uniquement les *traités en excédent de sinistre par risque ou par événement* qui pourraient être déclenchée à plusieurs reprises dans l'année. Le réassureur limite sa prestation à N fois la portée de l' XS , contre le versement d'une prime complémentaire. La reconstitution peut se faire au prorata temporis (temps qui reste à courir jusqu'à la date d'échéance du traité) ou au prorata des capitaux absorbés, ou les deux (double proata).

La **clause de superposition** (*Interlocking Clause*) est utilisée dans les traités en XS par événement, qui fonctionnent par exercice de souscription et non par exercice de survenance. La clause de superposition qui aura pour effet de recalculer les bornes du traité, parce qu'un même événement peut déclencher le traité des souscriptions n et $N - 1$.

117 – La réassurance publique

La **Caisse Centrale de Réassurance (CCR)** propose, avec la garantie de l'État, des couvertures illimitées pour des branches spécifiques au marché français.

- les risques exceptionnels liés à un transport,
- la RC des exploitants de navires et installations nucléaires,
- les risques de catastrophes naturelles,
- les risques d'attentats et d'actes de terrorisme,

- le Complément d'Assurance crédit Public (CAP).

Elle gère également pour le compte de l'État certains Fonds Publics, en particulier le régime Cat Nat.

Également, le **GAREAT** est un Groupement d'Intérêt Économique (GIE) à but non lucratif, mandaté par ses adhérents, qui gère la réassurance des risques d'attentats et actes de terrorisme avec le soutien de l'État via la CCR.

118 – Titrisation / CatBonds

Pourquoi ? Les capacités financières de tous les assureurs et réassureurs réunies ne couvrent pas les dégâts d'un tremblement de terre majeur aux États Unis (≥ 200 Md€). Cette somme correspond à moins de 1% de la capitalisation sur les marchés financiers américains.

La **titrisation** transforme un risque assuranciel en titre négociable, souvent en titres obligataires appelés **Cat-Bonds**. Elle consiste en un échange de principal contre paiement périodique de coupons, dans lequel le paiement des coupons et ou le remboursement du principal sont conditionnés à la survenance d'un événement déclencheur défini *a priori*. Les taux de ces obligations sont majorés en fonction du risque, non pas de défaillance ou de contre partie, mais de la survenance de l'événement (inférieur à 1%). La structure dédiée à cette transformation s'appelle *Special Purpose Vehicle* (SPV).

Le déclencheur peut être liés directement aux résultats de la cédente (Indemnitaire), dépendre d'un indice de sinistralité, d'un paramètre mesurable (somme des excédents de pluie, échelle de Richter, taux de mortalité), ou d'un modèle (RMS & Equecat Storm modelling).

Critère	Indemnitaire	Indice	Paramétrique	Modèle
Transparence	⊖	⊕	⊕	⊕
Risque de base	⊕	⊖	⊖	⊕
Aléa moral	⊖	⊕	⊕	⊕
Universalité des périls	⊕	⊕	⊖	⊕
Délai de déclenchement	⊖	⊖	⊕	⊕

119 – Loi de Pareto

Soit la variable aléatoire X qui suit une loi de Pareto de paramètres (x_m, k) , k est l'indice de Pareto:

$$\mathbb{P}(X > x) = \left(\frac{x}{x_m}\right)^{-k} \quad \text{avec } x \geq x_m$$

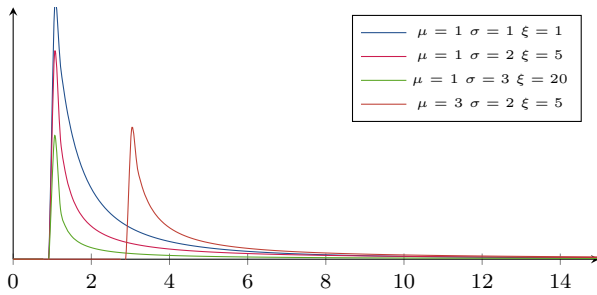
$$f_{k,x_m}(x) = k \frac{x_m^k}{x^{k+1}} \quad \text{pour } x \geq x_m$$

Loi de Pareto généralisée (GPD) a 3 paramètres μ , σ et ξ .

$$F_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-1/\xi} & \text{for } \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) & \text{for } \xi = 0. \end{cases}$$

pour $x \geq \mu$ quand $\xi \geq 0$ et $\mu \leq x \leq \mu - \sigma/\xi$ quand $\xi < 0$ et où $\mu \in \mathbb{R}$ est la localisation, $\sigma > 0$ l'échelle et $\xi \in \mathbb{R}$ la forme. Notez que certaines références donnent le paramètre de forme, comme $\kappa = -\xi$.

$$f_{\xi,\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{(-\frac{1}{\xi}-1)} = \frac{\sigma^{\frac{1}{\xi}}}{(\sigma + \xi(x-\mu))^{\frac{1}{\xi}+1}}$$



120 – Loi des valeurs extrême généralisée

La fonction de répartition de la loi des extrêmes généralisée est

$$F_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right\}$$

pour $1 + \xi(x-\mu)/\sigma > 0$, où $\mu \in \mathbb{R}$ est la localisation, $\sigma > 0$ d'échelle et $\xi \in \mathbb{R}$ la forme. Pour $\xi = 0$ l'expression est définie par sa limite en 0.

$$f_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{(-1/\xi)-1} \times \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right\}$$

$$f(x; \mu, \sigma, 0) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

121 – Loi de Gumbel

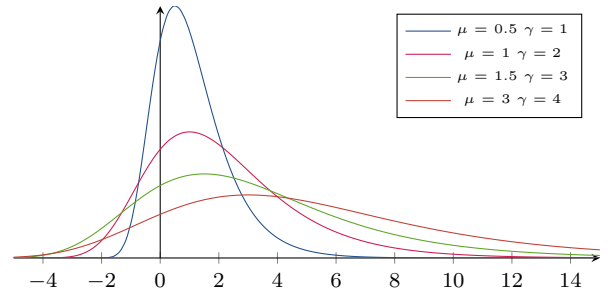
La fonction de répartition de la **loi de Gumbel** est :

$$F_{\mu,\sigma}(x) = e^{-e^{-(x-\mu)/\sigma}}.$$

Pour $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on obtient la loi standard de Gumbel. La loi de Gumbel est un cas particulier de la GEV (avec $\xi = 0$).

Sa densité :

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - e^{-(x-\mu)/\sigma}}$$



122 – Loi de Weibull

La **loi de Weibull** a pour fonction de répartition est définie par :

$$F_{\alpha,\mu,\sigma}(x) = 1 - e^{-((x-\mu)/\sigma)^\alpha}$$

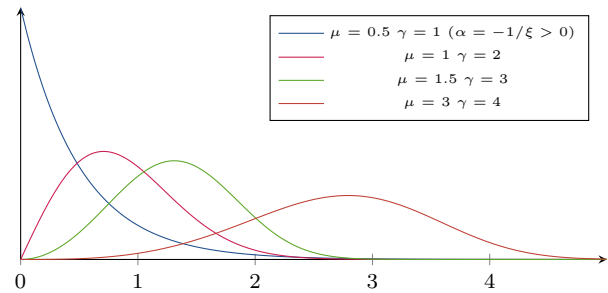
où $x > \mu$. Sa densité de probabilité est :

$$f_{\alpha,\mu,\sigma}(x) = (\alpha/\sigma)((x-\mu)/\sigma)^{(\alpha-1)} e^{-((x-\mu)/\sigma)^\alpha}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est la localisation, $\sigma > 0$ d'échelle et $\alpha = -1/\xi > 0$ la forme.

La distribution de Weibull est souvent utilisée dans le domaine de l'analyse de la durée de vie. C'est un cas particulier de la GEV lorsque $\xi < 0$.

Si le taux de pannes diminue au cours du temps alors, $\alpha < 1$. Si le taux de panne est constant dans le temps alors, $\alpha = 1$. Si le taux de panne augmente avec le temps alors, $\alpha > 1$. La compréhension du taux de pannes peut fournir une indication au sujet de la cause des pannes.



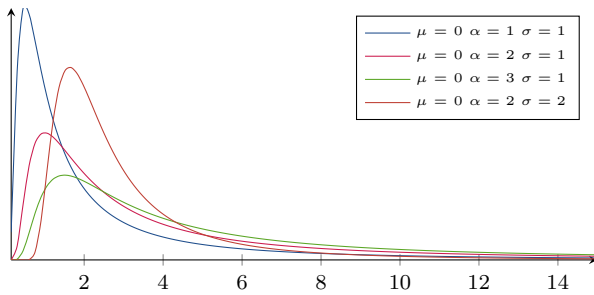
123 – Loi de Fréchet

Sa fonction de répartition de la **loi de Fréchet** est donnée par

$$F_{\alpha,\mu,\sigma}(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}} & \text{si } x > \mu \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est la localisation, $\sigma > 0$ l'échelle et $\alpha = 1/\xi > 0$ la forme. C'est un cas particulier de la GEV lorsque $\xi > 0$.

$$f_{\alpha,\mu,\sigma}(x) = \frac{\alpha}{\sigma} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1-\alpha} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}}$$



124 – Lien entre GEV, Gumbel, Fréchet et Weibull

Le paramètre de forme ξ gouverne le comportement de la queue de distribution. Les sous-familles définies par $\xi = 0$, $\xi > 0$ et $\xi < 0$ correspondent respectivement aux familles de Gumbel, Fréchet et Weibull :

- Gumbel ou loi des valeurs extrêmes de type I
- Fréchet ou loi des valeurs extrêmes de type II, si $\xi = \alpha^{-1}$ avec $\alpha > 0$,
- Reversed Weibull (\bar{F}) ou loi des valeurs extrêmes de type III, si $\xi = -\alpha^{-1}$, avec $\alpha > 0$.

125 – Théorème général des valeurs extrêmes

Soit X_1, \dots, X_n iid, X de fonction de répartition F_X et soit $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

La théorie donne la distribution exacte du maximum :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M_n \leq z) &= \Pr(X_1 \leq z, \dots, X_n \leq z) \\ &= \mathcal{P}(X_1 \leq z) \cdots \mathcal{P}(X_n \leq z) = (F_X(z))^n. \end{aligned}$$

S'il existe une séquence de paire de nombres réels (a_n, b_n) de telle sorte que $a_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = F_X(x)$, où F_X est une fonction de répartition non dégénérée, alors la limite de la fonction F_X appartient à la famille des lois *GEV*.

126 – Densité sous-exponentielle

Cas des puissances

Si $\bar{F}_X(x) = \mathbb{P}(X > x) \sim c x^{-\alpha}$ quand $x \rightarrow \infty$ pour un $\alpha > 0$ et une constante $c > 0$ alors la loi de X est sous-exponentielle.

Si F_X est une fonction de répartition continue d'espérance $\mathbb{E}[X]$ finie, on appelle l'indice des grands risques par

$$D_{F_X}(p) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{1-p}^1 F_X^{-1}(t) dt, \quad p \in [0, 1]$$

Cette distribution en excès décroît moins vite que n'importe quelle distribution exponentielle. Il est possible de considérer cette statistique :

$$T_n(p) = \frac{X_{(1:n)} + X_{(2:n)} + \dots + X_{(np:n)}}{\sum_{1 \leq i \leq np} X_i} \quad \text{où } \frac{1}{n} \leq p \leq 1$$

$X_{(i:n)}$ désigne le i^e max des X_i .

127 – Théorème de Pickands–Balkema–de Haan (loi des excès)

Soit X de distribution F_X , et soit u un seuil élevé. Alors, pour une large classe de lois F_X , la loi conditionnelle des excès

$$X_u := X - u \mid X > u$$

est approximable, pour u suffisamment grand, par une loi de Pareto généralisée (GPD) :

$$\mathbb{P}(X - u \leq y \mid X > u) \approx G_{\xi, \sigma, \mu=0}(y) := 1 - \left(1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma}\right)^{-1/\xi}$$

$y \geq 0$. Autrement dit, pour $u \rightarrow x_F := \sup\{x : F(x) < 1\}$,

$$\sup_{0 \leq y < x_F - u} |\mathbb{P}(X - u \leq y \mid X > u) - G_{\xi, \sigma, \mu=0}(y)| \rightarrow 0.$$

Ce théorème justifie l'utilisation de la *loi de Pareto (généralisée)* pour modéliser les excès au-delà d'un seuil, ce qui est précisément le cadre des traités de réassurance en *excess of loss* par risque, par événement ou de cumul annuel.

128 – Les données en réassurance

Comme la réassurance indemnise des agrégations de sinistre ou des sinistres extrêmes, elle utilise souvent des historiques qui devront être utilisés avec prudence :

- l'actualisation des données (impact de l'inflation monétaire).
- la revalorisation prend en compte l'évolution du risque :
 - l'évolution des taux de prime, garanties et modalités des contrats,
 - l'évolution des coûts des sinistres (indice des coûts de la construction, indices des coûts de réparation automobile, ...)
 - l'évolution de l'environnement juridique.
- le redressement de la statistique pour prendre en compte l'évolution de la base portefeuille :
 - profil des polices (nombre, capitaux, ...),
 - natures des garanties (évolution des franchises, des exclusions, ...)

Après ces corrections, les données sont dites as if (en économie, on utilise l'expression contre-factuel).

129 – La prime *Burning Cost*

X_i^j désigne le i^e sinistre de l'année j as if actualisé, revalorisé et redressé, n^j le nombre de sinistres l'année j , c^j la charge de l'assureur c . Le taux pur par la méthode de **Burning Cost** est donné par la formule :

$$BC_{pur} = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^n \frac{c^j}{a_j}$$

Le *Burning Cost* n'est qu'une moyenne des ratios S/P croisés : les sinistres à la charge du réassureur sur les primes reçues par la cédante. La prime *Burning Cost* est alors : $P_{pure} = BC_{pur} \times a_{s+1}$.

Dans le cas d'un p XS f),

$$c^j = \sum_{i=1}^{n^j} \max\left(\left(X_i^j - f\right), p\right) \mathbb{1}_{x^j \geq f}$$

Si l'assurance vie calcule des taux de prime en référence au capital, l'assurance non vie utilise comme référence à la valeur assurée, la réassurance prend elle comme référence le total des primes de la cédante, appelée **assiette**. On note a_j désigne l'assiette de prime à l'année j et a_{s+1}^* désigne l'assiette estimée de l'année à venir et où s désigne le nombre d'années d'historique.

130 – Le modèle Poisson-Pareto

[Prime de l'XS ou de l'XL] Soit p et f respectivement la portée et la priorité (franchise) de l'XS, avec la limite $l = p + f$ (p XS f).

La prime XS correspond à :

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N Y_i\right] = \mathbb{E}[N] \times \mathbb{E}[Y]$$

où

$$\mathbb{E}[Y] = l\mathbb{P}[X > l] - f \times \mathbb{P}[X \geq f] + \mathbb{E}[X \mid f \leq X \leq l]$$

Si $l = \infty$ et $\alpha \neq 1$:

$$\mathbb{E}[S_N] = \lambda \frac{x_m^\alpha}{\alpha - 1} f^{1-\alpha}$$

si $l = \infty$ et $\alpha = 1$ il n'y a pas de solution.

Si $l < \infty$ et $\alpha \neq 1$:

$$\mathbb{E}[S_N] = \lambda \frac{x_m^\alpha}{\alpha - 1} (f^{1-\alpha} - l^{1-\alpha})$$

Si $l < \infty$ et $\alpha = 1$:

$$\mathbb{E}[S_N] = \lambda x_m \ln\left(\frac{1}{f}\right)$$

131 – Le modèle Poisson-LogNormal

Si X suit une $\mathcal{LNorm}(x_m, \mu, \sigma)$ alors $X - x_m$ suit une $\mathcal{LNorm}(\mu, \sigma)$ Il vient :

$$\mathbb{P}[X > f] = \mathbb{P}[X - x_m > f - x_m] = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(f - x_m) - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{E}[X \mid X > f]$$

$$= \mathbb{E}[X - x_m \mid X - x_m > f - x_m] + x_m \mathbb{P}[X > f]$$

$$= e^{m+\sigma^2/2} \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(f - x_m) - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right) \right]$$

$$+ x_m \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(f - x_m) - \mu}{\sigma}\right) \right)$$

Avec franchise et sans limite :

$$\mathbb{E}[S_N]$$

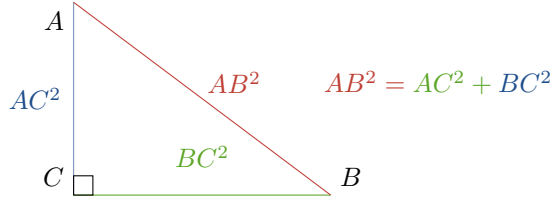
$$= \lambda (\mathbb{E}[X - x_m \mid X - x_m > f - x_m] + x_m \mathbb{P}[X > f] - f \mathbb{P}[X > f])$$

$$= \lambda \left(e^{m+\sigma^2/2} \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(f - x_m) - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right) \right] \right)$$

$$+ \lambda (x_m - l) \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(f - x_m) - \mu}{\sigma}\right) \right)$$

132 – Pythagore

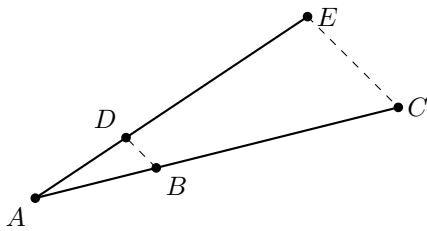
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Si ABC est rectangle en C , alors



133 – Thalès

Soient deux droites **sécantes en un point** A , et soient deux droites (BC) et (DE) **parallèles**, coupant les deux droites en B, D et C, E , alors :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$



134 – Équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Le discriminant est défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation a une solution dans les imaginaires

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

135 – Fonctions factorielle, dénombrement et Gamma

La fonction **factorielle** (de \mathbb{N} dans \mathbb{N}) est définie par $0! = 1$ et $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 =$ permutations de n éléments $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =$ choix de k éléments parmi n les C_n^k se calculent aussi par le triangle de Pascal et vérifient:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Soit E un ensemble de cardinal $\text{Card}(E)$ et de parties $\mathcal{P}(E)$:

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$$

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$$

La fonction Γ peut être vue comme le prolongement de la factorielle : $\Gamma(n+1) = n!$.

136 – Développement binomial

Pour un entier positif n ,

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

137 – Suites

Les suites arithmétiques de raison r

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n = nr + u_0 \\ \sum_{k=0}^n u_k = \frac{(n+1)(2u_0 + nr)}{2} \end{cases}$$

suites géométriques de raison q $\begin{cases} u_{n+1} = q \times u_n \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n = u_0 \times q^n \\ \sum_{k=0}^n u_k = \begin{cases} (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad q = 1$$

138 – Exponentielle et Logarithme

La fonction exponentielle e^x peut être définie par le développement en série entière suivant :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et permet de définir l'exponentielle comme une somme infinie.

La fonction logarithme naturel $\ln(x)$ est définie comme la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$. Autrement dit :

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

avec la condition $\ln(1) = 0$. Cette définition permet d'établir le lien entre l'exponentielle et le logarithme via l'inversion : $e^{\ln(x)} = x$ pour $x > 0$.

139 – Relation de congruence

Soit $m > 0$. On dit que deux réels a et b sont congrus modulo m s'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$a = b + km.$$

On note $a \equiv b \pmod{m}$.

En trigonométrie, on choisit souvent $m = 2\pi$ ou $m = \pi$.

Soient $m > 0$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Alors :

- **Réflexivité** : $a \equiv a \pmod{m}$.
- **Symétrie** : $a \equiv b \pmod{m} \iff b \equiv a \pmod{m}$.
- **Transitivité** : si $a \equiv b \pmod{m}$ et $b \equiv c \pmod{m}$, alors $a \equiv c \pmod{m}$.
- **Additivité** : si $a \equiv b \pmod{m}$ et $c \equiv d \pmod{m}$, alors $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

142 – Dérivées et primitives

f continue en $x_m \iff \lim_{x \rightarrow x_m} f(x) = f(x_m)$

f dérivable en $x_m \iff \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_m + h) - f(x_m)}{h} =: f'(x_m)$

L'**intégrale de Riemann** d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[a, b]$ est la limite, si elle existe, de la somme des aires des rectangles approchant l'aire sous la courbe, donnée par :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i,$$

- $[x_{i-1}, x_i]$ est une subdivision de $[a, b]$,
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ est la largeur du sous-intervalle,
- $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ est un point choisi arbitrairement dans chaque sous-intervalle.

Exemple d'intégrale de Riemann (upper)*

L'**intégrale de Lebesgue** d'une fonction $f(x)$ sur un ensemble E est définie en mesurant l'aire sous la courbe en fonction des valeurs prises par f , donnée par :

$$\int_E f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in E : f(x) > t\}) dt,$$

- μ est une mesure (souvent la mesure de Lebesgue),
- $\{x \in E : f(x) > t\}$ représente l'ensemble des points où $f(x)$ dépasse t .

À la différence de Riemann, Lebesgue regroupe les points selon leurs valeurs plutôt que selon leur position.

fonction ($n \in \mathbb{R}$)	dérivée	primitive
x	1	$\frac{x^2}{2} + C$
x^2	$2x$	$\frac{x^3}{3} + C$
$1/x$	$-1/x^2$	$\ln(x) + C$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
$x^n, n \neq -1$	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\ln(x)$	$1/x$	$x \ln(x) - x + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$a^x = e^{x \ln(a)}$	$\ln(a) \times a^x$	$a^x / \ln(a) + C$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)$	$-\ln(\cos(x)) + C$
$1/(1+x^2)$	$-2x/(1+x^2)^2$	$\arctan(x) + C$

$$\begin{array}{l|l}
(u+v)' = u' + v' & \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \\
(ku)' = ku' & (\ln(u))' = \frac{u'}{u} \\
(u \times v)' = u'v + uv' & (\exp(u))' = \exp(u) \times u' \\
\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} & (f(u))' = f'(u) \times u' \\
(au^n)' = nu^{n-1} \times u' & (f \circ u)' = (f' \circ u) \times u'
\end{array}$$

143 – Intégration par parties

Soit $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions continûment dérivables sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

où :

- $u(x)$ est une fonction dont on connaît la dérivée $u'(x)$,
- $v'(x)$ est une fonction dont on connaît la primitive $v(x)$.

144 – Intégration avec changement de variable

Soit $f(x)$ une fonction continue et $x = \phi(t)$ un changement de variable, où ϕ est une fonction dérivable. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t) dt$$

où :

- $x = \phi(t)$ représente le changement de variable,
- $\phi'(t)$ est la dérivée de $\phi(t)$,
- les bornes de l'intégrale sont ajustées en fonction du changement de variable.

145 – Formule de Taylor

Soit $f(x)$ une fonction n - fois dérivable en un point a . Le développement de Taylor de $f(x)$ autour de a est donné par :

$$\begin{aligned}
f(x) = & f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\
& + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathcal{O}_n(x)
\end{aligned}$$

où :

- $f^{(n)}(a)$ est la n dérivée de f évaluée en a ,
- $\mathcal{O}_n(x)$ est le reste du développement de Taylor, représentant l'erreur d'approximation lorsque l'on tronque la série après le terme d'ordre n , avec

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}_n(x)}{x^n} \Rightarrow 0$$

146 – Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ et $f(a) \neq f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un point $x \in [a, b]$ tel que :

$$f(x) = c$$

Autrement dit, si une fonction est continue sur un intervalle, elle prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ au moins une fois.

147 – Matrices et propriétés

Matrices diagonales : Une matrice est dite diagonale si tous les éléments en dehors de la diagonale principale sont nuls. Pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cela s'écrit :

$$A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

où a_i sont les éléments diagonaux.

Matrices triangulaires : Une matrice est triangulaire supérieure si tous les éléments en dessous de la diagonale sont nuls, c'est-à-dire $A_{ij} = 0$ pour $i > j$. Inversement, elle est triangulaire inférieure si $A_{ij} = 0$ pour $i < j$.

148 – Déterminant d'une matrice

Le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est un scalaire, noté $\det(A)$:

- Si A est une matrice carrée $n \times n$, alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) ou d'une matrice diagonale :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n A_{ii}$$

•

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B), \quad \det(\lambda B) = \lambda \det(B),$$

•

$$\det(A^T) = \det(A)$$

- Si une matrice A contient deux lignes ou colonnes identiques, alors $\det(A) = 0$.

Calcul du déterminant : Le déterminant d'une matrice 2×2 se calcule simplement par :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Pour une matrice 3×3 , il est donné par :

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Pour des matrices de dimension supérieure, le déterminant peut être calculé par cofacteurs ou via une méthode de réduction (par exemple, la méthode de Gauss).

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible s'il existe une matrice A^{-1} telle que :

où I_n est la matrice identité. L'inversibilité d'une matrice est garantie par $\det(A) \neq 0$.

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$$

Elle représente souvent des grandeurs liées à la somme des valeurs propres d'une matrice.

Décomposition de Cholesky : La décomposition de Cholesky est applicable aux matrices symétriques définies positives. Elle permet de factoriser une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en un produit de la forme :

où L est une matrice triangulaire inférieure. Cette décomposition est utile dans les calculs numériques et les algorithmes d'optimisation.

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , on définit :

- Le **gradient** $\nabla f(x)$ comme le vecteur des dérivées par-

tielles premières :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

- La **matrice Hessienne** $\nabla^2 f(x)$ comme la matrice symétrique des dérivées secondes :

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , et supposons que $F(a^*, b) = 0$ pour un certain couple $(a^*, b) \in \mathbb{R}^2$. Si

alors il existe un réel $h > 0$ et une unique fonction φ , définie sur un voisinage $(a^* - h, a^* + h)$, telle que





$$\varphi(a^\star) = b \quad \text{et} \quad \forall x \in (a^\star - h, a^\star + h), \quad F(x, \varphi(x)) = 0$$





De plus, la fonction implicite φ est de classe C^1 et sa dérivée est donnée par :

$$\varphi'(x) = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \Big|_{y=\varphi(x)}$$

Mis notas personales

Sobre los autores

Martial Phéllippé-Guinvarc'h @     es actuuario y profesor en la Universidad de Le Mans desde 2012 y también enseña en EURIA desde 2003. Es actuuario (EURIA, 2006), miembro del Instituto de Actuarios (IA) y miembro de la Asociación Europea de Economistas Agrícolas (EAAE). Martial Phéllippé-Guinvarc'h imparte clases de estadística, análisis de datos, modelado actuarial, programación (en particular, en SAS y SAS IML), matemáticas financieras, mercados de materias primas, finanzas de mercado y derivados, ciencia actuarial de no vida, ciencia actuarial de vida, provisiones, solvencia, reaseguro, economía de seguros, gestión de riesgos y gestión de activos y pasivos. Es Protor de SAS y obtuvo el certificado SAS Join **Seguros y Análisis Económico** para el máster MBFA de la Universidad de Le Mans.

Marcelo Moreno Porras @     es Profesor Asociado del Departamento de Economía Aplicada I e Historia e Instituciones Económicas de la Universidad Rey Juan Carlos (Madrid, España) desde 2023, especializado en econometría, macroeconomía y programación. También es Desarrollador de Software y Especialista en TI en una empresa privada de Mijas (España). Es autor de varias contribuciones a la innovación docente, coautor de publicaciones sobre la incorporación de los Objetivos de Desarrollo Sostenible en la formación económica y cuenta con experiencia técnica en diversos lenguajes de programación y herramientas estadísticas. Su formación académica incluye un Grado en Economía (URJC, entre el 1 % ranking nacional), un Máster en Análisis Económico Moderno (URJC) y un Máster en Estadística Aplicada (Universidad Nebrija).