Exercícios TP - EDO

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 3$

a) Como é uma EDO de segunda ordem precisamos de integrá-la 2 vezes, assim:

$\frac{d^2y}{dx^2} = y''$

$y'' = 6x + 3$

$\Leftrightarrow y' = \int 6x + 3$

$\Leftrightarrow y' = \frac{6x^2}{2} + 3x$

$\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 3x + C$

$\Leftrightarrow y = \int 3x^2 + 3x + C_1$

$\Leftrightarrow y = \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C_1 x + C_2$

$\Leftrightarrow y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C_1 x + C_2$

b)

$y(0) = 1$

$y'(0) = 0$

$\boxed{y' = 3x^2 + 3x + C_1}$

- Determinar C_1 $\quad y'(0) = 0$

$0 = 3 \times 0^2 + 3 \times 0 + C_1$

$\Leftrightarrow 0 = 0 + 0 + C_1$

$\Leftrightarrow C_1 = 0$

- Determinar C_2 $\rightarrow y(0) = 1$

$0^3 + \frac{3}{2} \times 0^2 + C_1 \times 0 + C_2 = 1$

$\Leftrightarrow 0 + 0 + 0 + C_2 = 1$

$\Leftrightarrow C_2 = 1$

Logo $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

c) Não existe integral particular — $y(1)=0$, $y'(0)=1$, $y'(1)=0$

$y' = 3x^2 + 3x + C_1$

$y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C_1 x + C_2$

• $y(1) = 0$

$0 = 1^3 + \frac{3}{2} \times 1^2 + C_1 \times 1 + C_2$

$0 = 1 + \frac{3}{2} + C_1 + C_2$

$0 = \frac{5}{2} + C_1 + C_2$

$-\frac{5}{2} = C_1 + C_2$

• $y'(0) = 1$

$1 = 3 \times 0^2 + 3 \times 0 + C_1$

$1 = 0 + 0 + C_1$

$C_1 = 1$

• $y'(1) = 0$

$0 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + C_1$

$0 = 3 + 3 + C_1$

$-6 = C_1$

C_1 tem diferentes valores, logo não existe nenhum integral particular que satisfaz estas condições de fronteira.

2.

a) $y = 3x + \frac{2}{x} + 4$

$y' = 3 + \frac{2' \cdot x - 2 \cdot x'}{x^2}$

$= 3 - \frac{2}{x^2}$

$y'' = -\frac{2' \cdot x^2 - (-2) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}$

$= \frac{4x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$

$y''' = \frac{4' \cdot x^3 - 4 \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = -\frac{12x^2}{x^6} = -\frac{12}{x^4}$

A condição inicial é $y''' + \frac{3}{x} y'' = 0$

Substituindo:

$$-\frac{12}{x^4} + \frac{3}{x} \times \frac{4}{x^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{12}{x^4} + \frac{12}{x^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

Concluímos que y é solução

b) $y = ce^{-x} + x - 1 \to y' + y = x \,;\, y(0) = 0$

$y(0) = 0$

$\Leftrightarrow c \times e^{-0} + 0 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow c \times 1 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow c = 1$

$y' = 0 \cdot e^{-x} + c\,(e^{-x})' + x' - 1'$

$= -ce^{-x} + 1$

Verificamos que y é solução

$-ce^{-x} + 1 + ce^{-x} + x - 1 - x = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$

3.

a) $y = cx^2 \,,\, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y' = c' \cdot x^2 + c\,(x^2)'$

$y' = 0 + 2xc$

$y' = 2xc$

$y'' = 2c \to$ Não é possível reduzir mais, logo esta é a equação diferencial de menor ordem

b) $y = c_1 \cos(x) + c_2 \text{sim}(x)$

$y' = c_1' \cdot \cos(x) + c_1 (\cos(x))' + c_2' * \text{sim}(x) + c_2 \cdot (\text{sim}(x))'$

$y' = c_1 \cdot (-\text{sim}(x)) + c_2 \cos(x)$

$y' = -c_1 \text{sim}(x) + c_2 \cos(x)$

$y'' = (-c_1)' \cdot \text{sim}(x) + (-c_1) \cdot (\text{sim}(x))' + c_2' \cdot \cos(x) + c_2 (\cos(x))'$

$y'' = -c_1 \cos(x) - c_2 \text{sim}(x)$

4

a) $2y\,dx + (xy + 5x)\,dy = 0$ → Equação diferencial variável separável

$\Leftrightarrow 2y\,dx + x(y+5)\,dy = 0$

$\Leftrightarrow 2y \times \frac{1}{2y \cdot x} + x(y+5) \times \frac{1}{2y \cdot x}\,dy = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\,dx + \frac{y+5}{2y}\,dy = 0$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{y+5}{2y}\,dy = c$

$\Leftrightarrow \ln|x| + \frac{1}{2} \int \frac{y+5}{y}\,dy = c$

$\Leftrightarrow \ln|x| + \frac{1}{2} \int \frac{y}{y} + \frac{5}{y}\,dy = c$

$\Leftrightarrow \ln|x| + \frac{1}{2}(y + 5\ln|y|) = c$ → $\Leftrightarrow \ln|x| + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}\ln|y| = c$

$c \in \mathbb{R}$

b) $\sin y \cos x \, dx + (1+\sin^2 x)\, dy = 0$ EDV separáveis

Fator integrante $= \dfrac{1}{\sin(y) \times 1+\sin^2 x}$

$\Leftrightarrow \sin y \cos x \times \dfrac{1}{\sin y \times 1+\sin^2 x} + (1+\sin^2 x) \times \dfrac{1}{\sin y \times 1+\sin^2 x} \, dy = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x} \, dx + \dfrac{1}{\sin y} \, dy = 0$

$\Leftrightarrow \int \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x} \, dx + \int \dfrac{1}{\sin y} \, dy = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}(\sin x) + \int \operatorname{cosec} y \, dy = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}(\sin x) + \ln|\operatorname{cosec} y - \operatorname{cotg} y| + C, \ C \in \mathbb{R}$

c) $y' = x - 1 + xy - y \rightarrow$ Eq. Linear 1ª ordem

$\boxed{y' + P(x)\, y = Q(x)}$

$y' - xy + y = x - 1$

$\Leftrightarrow y' + \underbrace{y(-x+1)}_{P(x)\,y} = \underbrace{x-1}_{Q(x)}$

$\Leftrightarrow y = e^{-\int -x+1 \, dx} \cdot \int e^{\int -x+1 \, dx} \cdot x - 1 + C$

$\Leftrightarrow y = e^{\frac{x^2}{2} - x} \cdot \int e^{-\frac{x^2}{2} + x} \cdot x - 1 \, dx + C$

$\Leftrightarrow y = e^{\frac{x^2}{2} - x} \cdot \left(-x + 1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2} + x} - e^{-\frac{x^2}{2} + x} + C \right)$

$\Leftrightarrow y = e^{\frac{x^2}{2} - x} \cdot \left[e^{-\frac{x^2}{2} + x} \left(-x + 1 - 1 \right) + C \right]$

$\Leftrightarrow y = e^{\frac{x^2}{2} - x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2} + x} \cdot -x + C$

Com recurso ao MATLAB

syms (y(x))

ode01 = diff(y, x) == x - 1 + x*y - y

dsolve(ode01) = $C\, e^{\frac{x(x-2)}{2}} - 1$

d) $(x+3y)\,dx + (3x-2y)\,dy = 0$

MATLAB

```
syms y(x)
ode02 = (x+3*y)*diff(x) + (3*x-2*y)*diff(y)==0;
dsolve(ode02)
```

$\hookrightarrow$ Solução: $\begin{pmatrix} \frac{3x}{2} + \frac{\sqrt{11x^2+C_1}}{2} \\ \frac{3x}{2} - \frac{\sqrt{11x^2+C_1}}{2} \end{pmatrix}$

e) $y' + 2y = e^{2x} \rightarrow$ Equação Linear 1ª ordem

$\boxed{y' + P(x)\,y = Q(x)}$

$P(x) = 2 \qquad Q(x) = e^{2x}$

$y = e^{-\int 2} \cdot \left(\int e^{\int 2} \cdot e^{2x} + C\right)$

$\Leftrightarrow y = e^{-2x} \cdot \left(\int e^{2x} \cdot e^{2x} + C\right)$

$\Leftrightarrow y = e^{-2x} \cdot \left(\int e^{4x} + C\right)$

$\Leftrightarrow y = e^{-2x} \cdot \left(\frac{1}{4} e^{4x} + C\right)$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4} e^{2x} + e^{-2x} + C, \; C \in \mathbb{R}$

f) $\left(y \sin\frac{y}{x} + x \cos\frac{y}{x}\right) dx - x \sin\frac{y}{x}\, dy = 0$

MATLAB

```
syms y(x)
ode03 = (y*sin(y/x) + x*cos(y/x))*diff(x) - (x*sin(y/x)*
                                              diff(y)==0;
dsolve(ode03);
```

$\hookrightarrow$ Solução: $\begin{pmatrix} x \operatorname{acos}\left(\frac{C_1}{x}\right) \\ \frac{\pi x}{2} \end{pmatrix}$

8

6.

Seja $P(x, y)$ um ponto na curva, e seja m a inclinação da reta que une P à origem. Então a inclinação da tangente à curva em P é m vezes maior do que m, ou seja,

$m = \frac{y}{x}$ = declive da reta

Declive da tangente = derivada nesse ponto

$$P'(x) = m \times m$$

$$P'(x) = m \times \frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow P'(x) = \frac{my}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{my}{x}$$

$$\Leftrightarrow dy = \frac{m \cdot y}{x} \times dx$$

$$\Leftrightarrow dy = \frac{my\,dx}{x} \Leftrightarrow dy\,x - (my)\,dx = 0$$

$$\Leftrightarrow x\,dy \times \frac{1}{xy} - (my) \cdot \frac{1}{xy}\,dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\,dy - \frac{m}{x}\,dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dx - \int \frac{m}{x}\,dx = C$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| - m\ln|x| = C$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = m\ln|x| + C$$

$$\Leftrightarrow y = e^{m\ln|x| + c}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = C\,e^{m\ln|x| + c}$$

7. Dados

Lei de Newton $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$

$T = 100°C$

$T_a = 20°C$

Ao fim de 2 minutos $T = 80°C$

Para $T = 40°, \Rightarrow t = ?$

$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$

$\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$

$\Leftrightarrow dT = k(T-20)\,dt$

$\Leftrightarrow k(T-20)\,dt - dT = 0$

Fator integrante $\boxed{\frac{1}{T-20}}$

$\Leftrightarrow k(T-20) \times \frac{1}{T-20}\,dt - \frac{1}{T-20}\,dT = 0$

$\Leftrightarrow k\,dt - \frac{1}{T-20}\,dT = 0$

$\Leftrightarrow \int k\,dt - \int \frac{1}{T-20}\,dT = c$

$\Leftrightarrow kt - \ln|T-20| = c$

$\Leftrightarrow -\ln|T-20| = -kt + c$

$\Leftrightarrow \ln|T-20| = kt + c$

$\Leftrightarrow T - 20 = e^{kt+c}$

$\Leftrightarrow T = 20 + e^{kt+c}, \; c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \boxed{T = 20 + Ce^{kt}, \; c \in \mathbb{R}}$

Determinar C

$T(0) = 100$

$\Leftrightarrow 100 = 20 + C e^{k \times 0}$

$\Leftrightarrow 100 = 20 + C$

$\Leftrightarrow C = 80$

$$\boxed{T = 20 + 80 e^{kt}}$$

Determinar k

$T(2) = 80$

$80 = 20 + 80 e^{k \times 2}$

$\Leftrightarrow 60 = 80 e^{2k}$

$\Leftrightarrow \frac{60}{80} = e^{2k}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4} = e^{2k}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{3}{4}\right) = 2k$

$\Leftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{2} = k$

$\Leftrightarrow k \simeq -0,1438$

$$\boxed{T = 20 + 80 e^{-0,1438t}}$$

$T(t) = 40$

$40 = 20 + 80 e^{-0,1438t}$

$\Leftrightarrow 20 = 80 e^{-0,1438t}$

$\Leftrightarrow \frac{20}{80} = e^{-0,1438t}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = e^{-0,1438t}$

$\Leftrightarrow -0,1438t = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow t = \frac{-1,3863}{-0,1438}$

$\Leftrightarrow t = 9,64$ minutos

Logo é necessário 9,64 min para a temperatura chegar aos 40°C