3º Teste - Parte 3 → "Teste do Farol"

1.

a) $\frac{dy}{dx} - yx^2 = -y$ $\quad A(x,y) = -yx^2$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y + yx^2$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y(-1+x^2)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = -1+x^2 dx$ Logo é de variáveis separáveis

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -1+x^2 dx$

$\Leftrightarrow \ln|y| = -x + \frac{x^3}{3} + c$

$\Leftrightarrow y = e^{-x+\frac{x^3}{3}+c}$

$\Leftrightarrow y = C e^{-x+\frac{x^3}{3}}$

b) $\frac{dy}{dx} - x^2 y \cos(y) = -y$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 y \cos(y) - y$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y(x^2 \cos(y) - 1)$ Não é separável

$y(0) = 1$

$y = C e^{-x+\frac{x^3}{3}}$

$\Leftrightarrow 1 = C e^0$

$\Leftrightarrow 1 = C \cdot 1$

$\Leftrightarrow C = 1$

2

a) $y = Cxe^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$ Solução → Gráfico fig. 1 (1)

$y' + 2xy = 0$ ED → Gráfico fig. 2 (2)

Graficamente

→ A afirmação é verdadeira, uma vez que as figuras 1 e 2 encaixam uma na outra e o ajuste é perfeito, isto é, os vetores d (campo direcional) descrevem as trajetórias dadas pelas linhas da fig 1.

Analiticamente

- Derivar (1)

$y' = (Cx e^{-x^2})'$

$\Leftrightarrow y' = C - 2x e^{-x^2}$

$\Leftrightarrow y' = -2Cx e^{-x^2}$

- Substituir

$y' + 2xy = 0$

$-2Cx e^{-x^2} + 2xCe^{-x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$

$\boxed{P.V}$

b)

$e = Ri + L\frac{di}{dt}$ (1)

$\Downarrow$

$\boxed{e = Ri\,L\,i'(t)}$ (2)

$R = 10$ (3)

$L = 0.5$ (4)

$e = 3\,sen(2t)$ (5)

$t = 0 \Rightarrow i = 6 \Rightarrow i(0) = 6 \Rightarrow$ condisão inicial (6)

Objetivo

$$\boxed{i(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\sin 2t + \frac{3}{101}\cos 2t} \quad (7)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3\sin(2t) = 10i + 0.5\,i' & (8) \\ i(0) = 6 & (9) \end{array}\right\} \text{PVI}$$

· Substituir usando (9) na (7)

$$6 = \frac{609}{101}e^{-20\times 0} - \frac{30}{101}\sin 2\times 0 + \frac{3}{101}\cos 2\times 0$$

$$\Leftrightarrow 6 = \frac{609}{101} - 0 + \frac{3}{101}$$

$$\Leftrightarrow 6 = \frac{609}{101} + \frac{3}{101}$$

$$\Leftrightarrow 6 = \frac{612}{101}$$

$$\Leftrightarrow 6 = 6{,}059 \quad \boxed{PF}$$

3

a)

$y' = -2ty$

$\frac{dy}{dt} = -2ty$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = -2t\,dt$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int -2t\,dt$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \frac{-2t^2}{2}$

$\Leftrightarrow \ln|y| = -t^2$

$\Leftrightarrow y = e^{-t^2}$

b) $y(t) = 2e^{-t^2}$ $\quad y' = -2ty$

			Aproximações		Erros	
i	t_i	$y(t_i)$ t_i Exata	y_i Euler	y_i Rk2	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Euler	$\lvert y(t_i) - y_i \rvert$ Rk2
0	0	2	2	2	0	0
1	0.5	1.5576	2	1.5000	0.4424	0.0576
2	1	0.7358	0	0.75	0.7358	0.0142
3	1.5	0.2108	0	0.3750	0.2108	0.1642

$\boxed{i = 1} \Rightarrow t = ?$

$1.5576 = 2e^{-t^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1.5576}{2} = e^{-t^2}$

$\Leftrightarrow 0.7788 = e^{-t^2}$

$\Leftrightarrow -t^2 = \ln(0.7788)$

$\Leftrightarrow -t^2 = -0.25$

$\Leftrightarrow t^2 = 0.25$

$\Leftrightarrow t = 0.5 \lor \cancel{t = -0.5}$, $t \in [0, 1.5]$

Euler $(i=1)$ $\quad f(0,2) = -2 \times 0 \times 2) = 0$

$y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0)$

$y_1 = 2 + 1\, f(0,2) = 2 + 0 = 2$

$\boxed{i = 2 \quad t = 1}$

$y(1) = 2e^{-1} = 0.7358$

Euler

$y_2 = y_1 + h\, f(t_1, y_1)$ $\quad f(0.5, 2) = -2 \times 0.5 \times 2 = -2$

$y_2 = 2 + h\, f(0.5, 2)$

$y_2 = 2 + 1 \times (-2) = 0$

Rk2

$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ $\quad k_1\ f(0.5, 1.5) = -2 \times 0.5 \times 1.5 = -1.5$

$k_1 = h \times f(t_i, y_i)$

$k_1 = 1 \times f(0.5, 1.5)$

$k_1 = 1 \times (-1.5) = -1.5$

$k_2 = h\, f(t_{i+1}, y_i + k_1)$ $\quad f(1,0) = -2 \times 1 \times 0 = 0$

$k_2 = 1 \times f(1, 0)$

$k_2 = 0$

$y_2 = 1.5 + \frac{1}{2}(-1.5 + 0)$ $\quad 0.0142 = 0.7358 + x$

$y_2 = 1.5 - 0.75$

$y_2 = 0.75$

$i = 3 \quad t = 1.5$

Euler

$y_3 = y_2 + h\,f(t_2, y_2) \qquad f(1,0) = -2\times1\times0 = 0$

$y_3 = 0 + 1\times f(1,0)$

$y_3 = 0$

c) É a figura 4 pois os resultados obtidos na tabela coincidem com a figura tanto a yExata, yEuler e yRK2. Outra opção de verificar que era esta figura, é que na figura 5 o t varia entre $[-1.5, 1.5]$ e no enunciado diz que $t \in [0, 1.5]$

d)

$$PVI \begin{cases} y' = -2xy \\ y(0) = 0.2108 \\ t \in [-1.5, 1.5] \end{cases}$$

e)

(A) → Solução exata do PVI

(B) → Solução aproximada do PVI

Realizado por:

Martim Antunes 2022141890