3.º Teste – Parte 3 » Data: 10/02/2016

1. Considere a equação diferencial (ED) $\frac{dy}{dx} + A(x,y) = -y$

Das alíneas seguintes, resolva apenas uma:

(a) Para $A(x,y) = -yx^2$, mostre que a ED é de variáveis separáveis e determine a sua solução geral.

(b) Para $A(x,y) = -x^2 y\cos(y)$ a ED é de variáveis separadas ou separáveis? Justifique.

Se não for, elimine a parte do cosseno em A e determine a solução particular da ED que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

a) $\frac{dy}{dx} - yx^2 = -y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y + yx^2$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y(-1+x^2) \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = (-1+x^2)\,dx$

logo é de vars separáveis

$\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$

$\int f^p f' = \frac{f^{p+1}}{p+1}$

$\ln|y| = -x + \frac{x^3}{3} + C$

$|y| = e^{-x+\frac{x^3}{3}+C}$

$|y| = \overset{>0}{e^C}\, e^{-x+\frac{x^3}{3}}$

$|y| = Ce^{-x+\frac{x^3}{3}}$

$y = Ce^{-x+\frac{x^3}{3}} \vee y = -Ce^{-x+\frac{x^3}{3}}, C \in \mathbb{R}^+$

$y = Ce^{-x+\frac{x^3}{3}}, C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) $\frac{dy}{dx} - x^2 y\cos y = -y$

$\frac{dy}{dx} = -y + x^2 y \cos y$

$\frac{dy}{dx} = y(-1 + x^2\cos y)$ não é separável

$y = Ce^{-x+\frac{x^3}{3}}$, se $y(0) = 1$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$1 = c\,e^{0} \Leftrightarrow c = 1$$

Sol. particular: $y = e^{-x+\frac{x^3}{3}}$

(a) A equação diferencial, de menor ordem possível, que possui a família de curvas $y = c \times \exp(-x^2)$ como integral geral é dada por $y' + 2xy = 0$ cujo campo direcional é dado pela figura 2 e o gráfico da solução geral pela figura 1. Justifique analiticamente e graficamente a sua resposta.

EDO linear 1ª ordem

$$y' + a(x)\,y = b(x)$$

$$y' + \underbrace{2x}_{a(x)}\,y = 0$$

$$F.I. = e^{\int a(x)\,dx} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

Alternativa

$$y' = -2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{y}\,dy = -2x\,dx}_{\text{eq. vars separáveis}}$$

$$\underbrace{y'e^{x^2} + 2x\,e^{x^2}y} = 0$$

$$\left(y\,e^{x^2}\right)' = 0 \Leftrightarrow y\,e^{x^2} = C \Leftrightarrow y = C\,e^{-x^2}$$

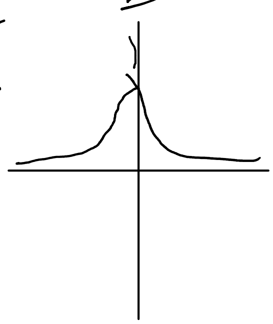
Esta parte da afirmação verdadeira

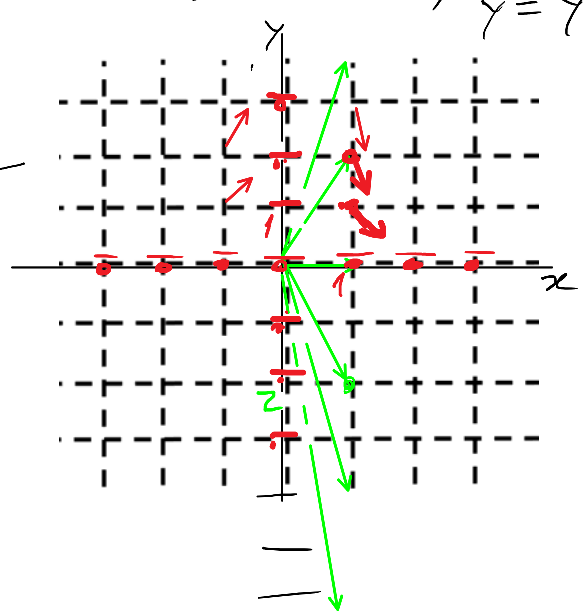
→ Campo direcional: $y' = f(t, x)$

$$y' = -2xy \qquad y = y(x) = ?$$

(x,y)	$y' = -2xy$
$(0,0)$	0
$(1,0)$	0
$(1,1)$	-2
$(1,2)$	-4
$(1,3)$	-6
$(-1,0)$	0
$(-1,1)$	2
$(-1,2)$	4
$(-1,3)$	6

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{1}$$





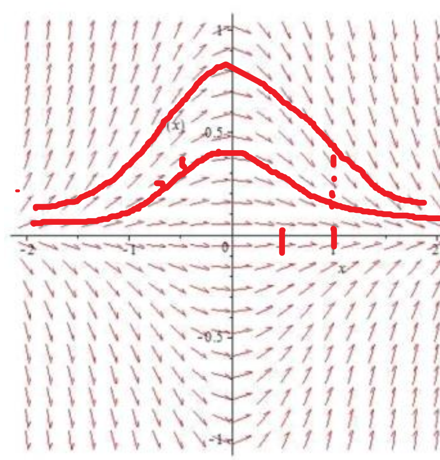


Figura 2

(b) A força eletromotriz e de um circuito RL com intensidade i, resistência $R = 10\,\Omega$ (ohms) e indutância $L = 0.5\ h$ (henry), é igual à queda de tensão Ri mais a força eletromotriz de autoindução $L\frac{di}{dt}$. Assim, a intensidade de corrente i, no instante t, se $e = 3\sin(2t)$ (em volts) e $i = 6$ quando $t = 0$ é dada pela solução particular $i(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\sin 2t + \frac{3}{101}\cos 2t$. À medida que o tempo aumenta, o termo que envolve e^{-20t} perde influência no valor da intensidade da corrente. Diz-se que este termo é o termo do *estado transitório* e o outro é o termo do *estado permanente*.

e – força eletromotriz (constante? ou $e = e(t)$)

i – intensidade (const? ou $i = i(t)$)

$R = 10\,\Omega$, $L = 0.5h$

$$\boxed{e = Ri + L\frac{di}{dt}} \qquad i(t) = ?$$

$$\begin{cases} 3\sin(2t) = 10i + 0.5\frac{di}{dt} \\ i(0) = 6 \end{cases}$$

a sol. dada é sol. do PVI

$i(t) = \frac{609}{101}e^{-20t} - \frac{30}{101}\sin 2t + \frac{3}{101}\cos 2t$.

$i(0) = 6$ verif.

$$\frac{di}{dt} = \frac{609}{101}(-20)e^{-20t} - \frac{60}{101}\cos(2t) - \frac{6}{101}\sin(2t)$$

$$10i + 0.5\frac{di}{dt} = \cancel{\frac{6090\,e^{-20t}}{101}} - \frac{300}{101}\sin(2t) + \cancel{\frac{30}{101}\cos(2t)} -$$

$$- \cancel{\frac{6090\,e^{-20t}}{101}} - \cancel{\frac{30}{101}\cos(2t)} - \frac{3}{101}\sin(2t)$$

$$= \frac{-303}{101}\sin(2t) = -3\sin(2t)$$

logo não é sol. particular