UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
KATEDRA INFORMATIKY

Martin Rotter (rotter.martinos@gmail.com)
Jiří Zehnula (jiri.zehnula01@upol.cz)
Radek Janoštík (radek.janostik01@upol.cz)

KMI/FJAA – Formální jazyky a automaty

20. června 2012

Abstrakt

Tento dokument je pouze přepisem zápisků a poznámek z přednášek předmětu KMI/FJAA. Přednášel doc. Vilém Vychodil PhD. Do tohoto dokumentu přispěli opravami i další lidé. Jmenovitě A. Baron

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

1. Historie

Počátek úvah, jež byly později základem seriozního zkoumání formálních jazyků potažmo automatů se datuje do 30. let 20. století. Průkopníkem této oblasti byl Noam Chomsky [1].

Důsledná (až antropologická) úvaha nad tvarem jazyků (opravdu nemáme na mysli vepřovy jazyk) je základním kamenem k efektivní a přívětivé implementaci překladačů, rozhodovacích systémů nebo programovacích jazyků obecně. Je proto nanejvýš vhodné proniknout do tajů vytváření jazyků (generativní formalismus) a jejich rozpoznávání a analýzy (analytický formalismus).

Jako příklad selhání autora programovacího jazyka si uveďme jazyk *Fortran*, jehož konstrukce byla po syntaktické stránce špatná, což vedlo ke *gramatické ne jednoznačnosti* tohoto jazyka.

2. Kódová analýza

Analýza kódu je elementárním stavebním kamenem analýzy jazyka, jenž je tímto kódem reprezentován, protože existuje (ne nutně silná) spojitost mezi syntaktickou „krásou“ kódu a následnou kvalitou (případně sémantikou) daného jazyka atp.

2.1. Lexikální analýza

V této analýze hraje prim dělení vstupního kódu na tokeny[2], jež se zapisují ve stylu:

$$\langle \text{ znak}, \text{ identifikátor } \rangle$$

Příkladem je tedy i token $\langle$ =, assignment $\rangle$, případně další tokeny.

2.2. Syntaktická analýza

Syntaktická analýza vytváří stromovou závislost jednotlivých tokenů, jejíž reprezentace se nazývá *derivační strom*. V rámci této analýzy rozlišme:

1. Teorii jazyků, jež se zabývá stavbou jazyka (respektive jeho syntaxí) a poskytuje tzv. *generativní aparát*. Gramatika říká, v jakém tvaru může být zapsán validní program, tedy definuje všechna slova[3], která jsou obsažena v daném jazyce.
2. Teorii automatů, jež poskytuje tzv. *analytický aparát*. Automatem se rozumí v podstatě jednoduchý algoritmus, který rozhoduje zdané dané vstupní slovo patří či nepatří do nějakého určitého jazyka.

3. Základní pojmy

- *Symbol* (případně znak) - jedná se o syntaktický pojem (význam tedy nehraje roli), který představuje *jméno* (analogicky k *písmenu* z přirozeného jazyka). Mezi symboly počítejme například *0, +, Š, while*. Symbol může mít jakoukoliv zástupnou grafickou reprezentaci.
- *Abeceda* - abecedou rozumíme množinu (například množinu X) všech přípustných *symbolů* (znaků), přičemž taková množina je neprázdná (tedy $|x| > 0$) a konečná. Konečnost množiny je omezení dané reprezentovatelností množiny v rámci počítačové techniky. Abecedy značíme řeckými písmeny. Například $\Sigma, \Sigma', \Gamma, \ldots, \Omega$. Například $\Sigma = \{a, b, c\}$, tedy „abeceda Σ obsahuje symboly a, b, c.“

[1] Jméno této osoby čti [*čomski*] a zapamatuj si ke státnicím, že Chomsky byl *nebezpečný levicový intelektuál*.
[2] Překládej jako *část, díl nebo také fráze*.
[3] Pojem *slovo* je v tomto kontextu poněkud zavádějící. V některé z následujících kapitol bude zaveden přesnější termín na vystihnutí prvku jazyka

- *Řetězec* - jedná se o konečnou posloupnost symbolů (znaků) vybraných z nějaké dané abecedy. Například $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \in \Sigma, n$ nazvěme *délkou řetězce*. Formálně definujme řetězec jakožto *zobrazení*

$$x : \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\} \to \Sigma$$

kde

$$1 \to a, 2 \to b, 3 \to c$$

a tak podobně. Délku řetězce označme $|x|$.

- *Prázdný řetězec* - edná se o řetězec, pro který platí, že $|x| = 0$ a značíme jej ε, přičemž platí následující zápis:

$$\varepsilon \subseteq \emptyset \to \Sigma$$

Prázdný řetězec není symbolem, tedy $\varepsilon \notin \Sigma$.

Věta 1: Nad k-prvkovou abecedou je právě k^n řetězců délky n.

Poznámka 1: Uveďme si rovněž značení pro dva důležité pojmy:

- Σ^* označuje množinu všech řetězců nad abecedou Σ.
- Σ^+ označuje množinu všech řetězců nad abecedou Σ vyjma ε.

4. Operace s řetězci

- *Zřetězení* (konkatenace). Jde v podstatě o spojení[4] dvou řetězců v daném pořadí do jednoho řetězce.

  Příklad 1: Mějme dva řetězce a, b:

$$a_1 \ldots a_n \text{ a } b_1 \ldots b_m$$

  Pak jejich zřetězení má tvar:

$$a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m$$

  Identifikátorem[5] operace zřetězení je $\circ$, například $x \circ y$ je zřetězením řetězců x a y. Formálně takto:

$$x : \{1, \ldots, n\} \to \Sigma$$
$$y : \{1, \ldots, m\} \to \Sigma$$
$$x \circ y : \{1, \ldots, n + m\} \to \Sigma$$

  Poznámka 2: Algebraicky je tatáž operace zapsána jako $\langle \Sigma^*, \circ, \varepsilon \rangle$.

- *Rovnost řetězců* Pro prohlášení dvou řetězců za sobě rovné v žádaném smyslu je třeba splnit obecně dvě následující podmínky:

  1. Oba řetězce mají stejnou délku, tedy $|x| = |y|$.
  2. Bude-li délka označena jako n, pak musí platit, že $\forall i | i \in \{1, \ldots, n\}, x(i) = y(i)$. Tedy každé dva k sobě náležící symboly z daných řetězců jsou si rovny.

[4] Pro milovníky jazyka Scheme můžeme tuto operaci přirovnat k proceduře *append*
[5] Identifikátor zřetězení se velmi čast v zápisech zřetězení vynechává.

Uvažujeme-li rovnost řetězců, pak je záhodno uvažovat následující pojmy:

- *Prefix* řetězce. Označme jej $Pfx(x) = \{y | \exists z \text{ tak, že } yz = x\}$.
- *Infix* řetězce. Označme jej $Ifx(x) = \{y | \exists z_1, z_2 \text{ tak, že } z_1 y z_2 = x\}$.
- *Sufix* řetězce. Označme jej $Sfx(x) = \{y | \exists z \text{ tak, že } zy = x\}$.

Věta 2:

$$xy = xz \implies y = z$$
$$yx = zx \implies y = z$$

Algebraicky je operace zapsána jako $\langle \Sigma^*, \cdot, \varepsilon \rangle$.

Věta 3: Vyslovme předpoklad, že platí $xy = uv$. Pak platí právě jedno z těchto tvrzení:

$$x = u, y = v$$
$$|x| > |u| \text{ a } \exists w | w \neq \varepsilon, \text{ tak že } x = uw \text{ a } v = wy$$
$$|x| < |u| \text{ a } \exists w | w \neq \varepsilon, \text{ tak že } u = xw \text{ a } y = wv$$

- *N-tá mocnina* řetězce.

$$x^n = \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon & \text{pro } n = 0 \\ x & \text{pro } n = 1 \\ xx^{n-1} & \text{pro } x > 1 \end{array} \right\}$$

Poznámka 3: Mějme na paměti, že operace mocnění má vyšší prioritu než-li operace konkatenace (zřetězení).

Věta 4: Mějme u a $v \in \Sigma^*$, pak platí $uv = vu$ (komutativita), právě tehdy, když $\exists z | z \in \Sigma^*$ a nezáporná celá čísla p, q tak, že $u = z^p$ a $v = z^q$.

Předpokládejme, že po p, z, q máme $u = z^p, v = z^q$. Pak obecně platí následující zápis:

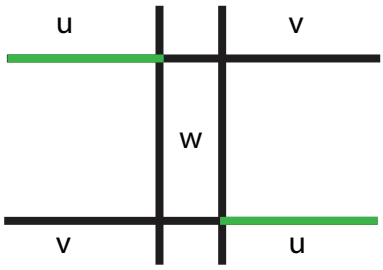
$$uv = z^p z^q = z^{p+q} = z^q z^p = vu$$

Předpokládejme, že $uv = vu$. Indukcí přes $|uv|$ předpokládáme, že tvrzení platí pro libovolné dva řetězce, jejichž délka zřetězení je menší než-li $|uv|$. Mohou nastat tyto případy:

1. $|u| = |v|, \text{ pak } u = v, \text{ pak } z = u, p = q = 1$
2. $|u| < |v|$

Berme v potaz také následující zápis doplněný obrázkem: 1.

$$uw = v$$
$$wu = v$$
$$uw = wu$$
$$|uw| < |uv|, \text{ tedy } \exists z, p, q \text{ tak, že } u = z^p, w = z^q, v = z^{p+q}$$



Obrázek 1. Grafické znázornění komutativity zřetězení řetězců.

5. Formální jazyk

Zaveďme si pojem *formální jazyk nad množinou všech řetězců* Σ^*. Označme tento jazyk jako L. Pak platí tato tvrzení:

$$\begin{aligned} L &\subseteq \Sigma^* \text{ (každá podmnožina abecedy je jazykem)} \\ L &= \emptyset \text{ (prázdný jazyk)} \\ L &= \{\varepsilon\} \text{ (jazyk s prázdným řetězcem)} \\ L &= jazykC++ \text{ (jazyk C++)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pozor, obecně platí že prázdný jazyk $\neq$ jazyk s prázdným řetězcem.

6. Lexikografické uspořádání

Předpokládejme uspořádání na množině Σ^*. Nazvěme toto uspořádání *striktním totálním*. Pak toto uspořádání například pro $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ je $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$.

Totální striktní uspořádání označme $<_l$.

Položme $x <_l y$ pro $x, y \in \Sigma^*$. To ale platí pokud platí alespoň jedno z následujících dvou tvrzení:

1. $|x| < |y|$
2. $|x| = |y|$ a $\exists i$ tak, že $x(i) < y(i)$ a zároveň $x(j) = y(j)$ pro $\forall j | j < i$

Příklad 2: $\Sigma = \{0, 1\}$. Triviálně tedy $0 < 1$. Následně striktně $\varepsilon <_l 0 <_l 1 <_l 00 <_l 01 <_l 10 <_l 11$.

Věta 5: Striktní totální uspořádání je asymetrické a tranzitivní. A pro $x \neq y$ platí buď $x <_l y$ nebo $y <_l x$.

Důsledek 1: Důsledkem věty 5 je tvrzení, že množina Σ^* je spočetně nekonečná. Dodejme, že jazyk je (obvykle) spočetná množina.

7. Operace nad jazyky

7.1. Množinové

Množinové operace nad jazyky jsou prakticky totožné operacím na kterýchkoliv jiných množinách. Můžeme tedy použít množinový průnik, sjednocení, komplement (doplněk) nebo rozdíl.

7.2. Ostatní

- *Zřetězení* (produkt) množin. Vyjádřeme produkt takto:

$$L_1 L_2 = \{xy | x \in L_1, y \in L_2\}$$

  Produkt množin není obecně komutativní, ale je asociativní, přičemž prázdná množina tuto operaci anihiluje. Uveďme si rovněž monoid $\langle 2^{\Sigma^*}, \circ, \{\varepsilon\}\rangle$.

- *Mocnina* jazyka. Mocninu vyjádříme takto:

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{pro } n = 0 \\ LL^{n-1} & \text{pro } n \geq 1 \end{cases}$$

- *Kleeneho*[6] uzávěr neboli *iterace*. Tento uzávěr vyjádříme takto:

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

- *Pozitivní* uzávěr neboli pozitivní iterace. Tento uzávěr vyjádříme takto:

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

  Všimněte si podobností mezi těmito dvěma uzávěry. Pozitivní uzávěr vynechává prázdný řetězec.

8. Gramatiky

Jak víme, tak jazyky mohou být *nekonečné* ve smyslu, že obsahují nekonečný počet slov. Nabízí se tedy otázka, jak tyto jazyky rozumně popsat, jak je reprezentovat resp. jak vytvořit *konečnou* sadu pravidel, jejichž aplikace by vedla k opětovné generaci původního jazyka.

8.1. Přepisovací generovací pravidla

Pravidlem rozumíme zpravidla každou takto definovanou dvojici.

$$\langle x, y\rangle \in \Sigma^* \times \Sigma^*$$

Pak neformálně tvrdíme, že x *se přepisuje* na y. Nutno dodat, že předchozí zápis lze zapsat i například takto.

$$x \to y, \text{ kde symbol } \to \notin \Sigma \text{ můžeme prohlásit za tzv. metasymbol.}$$

8.1.1. Vlastnosti pravidel

- *Nezkracující* pravidlo je pravidlo, o kterém platí, že $|x| \leq |y|$. Tedy aplikaci tohoto pravidla na vstupní řetězec určitě nevznikne řetězec kratší, než-li jeho předloha.

- ε - pravidlo je pravidlo tvaru $x \to \varepsilon$.

[6] Stephen Cole Kleene je známý matematik, jenž se významně podílel na položení základů teoretických počítačových věd.

8.1.2. Příklady pravidel

Příklad 3: Mějme zadání abecedy $\Sigma = \{a, b, c\}$. Pravidla s využitím této abecedy by mohla být například tato.

$$\begin{aligned} aa &\rightarrow bc \\ bb &\rightarrow abba \\ c &\rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Příklad 4: Mějme další zadání abecedy $\Sigma = \{expr, +, \times\}$. Pravidla s využitím této abecedy by mohla být například tato.

$$\begin{aligned} expr &\rightarrow expr + expr \\ expr &\rightarrow expr \times expr \end{aligned}$$

8.1.3. Přímé odvozování řetězců pomocí pravidel

Uvažujme odvozovací pravidlo $x \rightarrow y$ nad abecedou Σ, pak řekneme, že řetězec v *je přímo odvozen* z řetězce u pomocí pravidla $x \rightarrow y$, pokud $\exists p, q \in \Sigma^*$ tak, že

$$\begin{aligned} u &= pxq \\ v &= pyq \end{aligned}$$

Značení předchozí operace je následující:

$$u \Rightarrow_{x \rightarrow y} v$$

Slovně bychom tento zápis vystihli jako „přímý přepis dle pravidla $x \rightarrow y$.“

Řetězec v vznikne přímým přepisem z u pomocí pravidel $P \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, pokud $\exists \pi \in P$ tak, že $u \Rightarrow_\pi v$.

Značme $u \Rightarrow_P v$. P je množinou užitých pravidel. P i $\Rightarrow_p$ jsou binární relace na Σ^* a $P \subseteq \Rightarrow_p$, tedy „P je podmnožinou šipky p.“ Platí, že $x \rightarrow y \in P$ a $x \Rightarrow_{x \rightarrow y} y$.

Příklad 5: Mějme abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$ a soubor pravidel $P = \{aa \rightarrow bc, a \rightarrow cab, bb \rightarrow \varepsilon\}$. Pak by odvození v jednom kroku mohla vypadat například takto:

$$\begin{aligned} baaa &\rightarrow bbca \\ bac &\rightarrow bcabc \end{aligned}$$

Definice 1: Definujme pojem *derivace*. Jedná se o posloupnost řetězců ve tvaru:

$$x_0, \ldots, x_k, \text{ kde } k \geq 0 \text{ a kde } \{x_0, \ldots, x_k\} \in \Sigma^*$$

se nazývá *P-derivace délky k*, pokud $x_{i-1} \Rightarrow_p x_i, \forall 1 \leq i \leq k$. Symbolicky totéž $x_0 \Rightarrow_p x_1 \Rightarrow_p \ldots \Rightarrow_p x_k$. Počet odvození tedy značí *délku* derivace.

Pokud pro $u, v \in \Sigma^*$ $\exists$ P-derivace $u = x_0 \ldots x_k = v$, pak říkáme, že v je odvozeno z u pomocí pravidel z P, což značíme například $u \Rightarrow_P^* v$, tímto je pochopitelně myšleno odvození ve více krocích. Platí, že $P \subseteq \Rightarrow_P \subseteq \Rightarrow_P^+$.

Příklad 6: Mějme abecedu $\Sigma = \{a, \ldots, z\}$ a pravidla stejná jako v příkladu 5. Nyní odvozujeme například takto:

$$b\underline{aa}a, \underline{bb}ca, c\underline{a}, c\underline{cab}$$

8.2. Formální gramatiky

Mějme následující entity:

- Σ - abeceda terminálních symbolů (tyto symboly tvoří řetězce daného jazyka).
- N - abeceda neterminálních symbolů (tyto symboly se užívají k řízení průběhu odvozování).

Dodejme, že obě množiny by měly být neprázdné a konečné.

Definice 2: Odvozovací pravidlo $x \to y$ se nazývá *generativní*, pokud x obsahuje alespoň jeden neterminální symbol.

Definice 3: Mějme strukturu $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$, kde N je abecedou neterminálních symbolů, Σ je abecedou terminálních symbolů, P je množinou odvozovacích pravidel a $S \in N$ je tzv. *počátečním* resp. *startovním* neterminálem. Pak tuto čtveřici nazveme *gramatikou*.

Poznámka 4: Pokud chceme vyjádřit, že z jednoho symbolu odvozujeme několik možných alternativ, tak to zapíšeme místo klasického dlouhé zápisu $y \to x_1, y \to x_2, \ldots$ pomocí zkrácené notace např. $y \to x_1 | x_2 | \ldots$

Příklad 7: Gramatika může vypadat třeba takto:

$$\begin{aligned} N &= \{\varepsilon, S, D, I\} \\ \Sigma &= \{0, \ldots, 9, +, -\} \\ P &= \{S \to -I | +I | I, I \to DI | D, D \to 0 | 1 | \ldots | 9\} \\ G &= \langle N, \Sigma, P, S \rangle \end{aligned}$$

Příklad 8: Nebo takto:

$$\begin{aligned} N &= \{S, X, Y\} \\ \Sigma &= \{a, b, c\} \\ P &= \{S \to XcYcX, X \to aX, X \to bX, X \to cX, X \to \varepsilon, Y \to abY, Y \to ab\} \\ G &= \langle N, \Sigma, P, S \rangle \end{aligned}$$

Definice 4: Každý řetězec $x \in (N \cup \Sigma)^*$, pro který platí $S \to^* x$, je *větná forma* gramatiky $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$. Větná forma se nazývá *větou*, pokud $x \in \Sigma^*$.

Definice 5: Jazyk generovaný gramatikou definujme jako:

$$L(G) = \{x \in \Sigma^* | S \Rightarrow_G^* x\}$$

Vidíme tedy, že takový jazyk obsahuje *věty*, které lze odvodit ze startovacího neterminálu pomocí pravidel této gramatiky.

Příklad 9: Tento příklad čerpá gramatiku z příkladu 8.

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow_G^* abbccYcX \\ S &\Rightarrow_G^* Xcababababc \\ S &\Rightarrow_G^* cYcbaX \\ S &\Rightarrow_G^* abbccabca \\ S &\Rightarrow_G^* cababababc \end{aligned}$$

Definice 6: Gramatiky G_1 a G_2 jsou *ekvivalentní*, pokud generují stejný jazyk.

8.3. Hierarchie gramatik

- *Gramatiky typu 0* – jedná se o gramatiky bez omezení.
- *Gramatiky typu 1* – jedná se o tzv. *kontextové* nebo *kontextově závislé* gramatiky. Ty splňují následující omezení na tvar pravidel. Pro každé pravidlo gramatik tohoto typu platí, že:
  1. Buď je (pravidlo) ve tvaru $pAq \to pxq,$ kde $p, q \in (\Sigma \cup N)^*, A \in N, x \in (\Sigma \cup N)^*$, kde p a q se nazývají levým resp. pravým *kontextem*.
  2. Nebo je (pravidlo) ve tvaru $S \to \varepsilon$, kde S je startovní terminál gramatiky, ale pouze za předpokladu, že S se nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla.

  Zároveň platí pro každé pravidlo (s výjimkou pravidla $S \to \varepsilon$), že délka odvozeného řetězce je minimálně stejně velká jako délka vstupního řetězce. Gramatika tedy zároveň obsahuje pouze tzv. *nezkracující* pravidla.
- *Gramatiky typu 2* – jedná se o tzv. *bezkontextové* gramatiky, jenž obsahují pravidla ve tvaru:

  $$A \to x, \text{ kde } A \in N, x \in (\Sigma \cup N)^*$$

  Na levých stranách pravidel tedy očekáváme pouze neterminální symbol a na pravé straně očekáváme minimálně jeden symbol (s výjimkou ε-pravidla).

  Příklad 10: Mějme tuto gramatiku:

  $$\begin{aligned} G &= \langle N, \Sigma, P, S \rangle \\ N &= \{A, S\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ P &= \{S \to 0A, A \to \varepsilon\} \end{aligned}$$

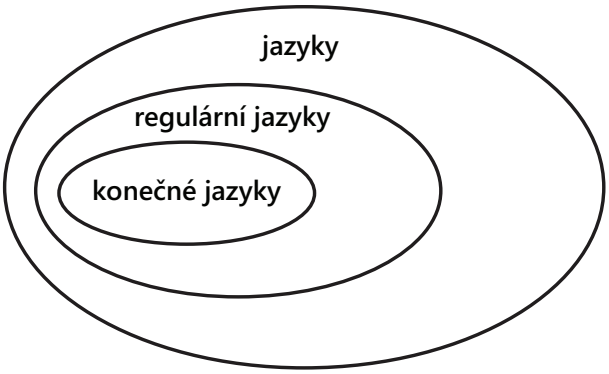
- *Gramatiky typu 3* – jedná se o tzv. *regulární* resp. *pravolineární* gramatiky, které obsahují pravidla ve třech následujících tvarech:
  1. $A \to bB,$ kde $A, B \in N, b \in \Sigma$
  2. $A \to a$
  3. $S \to \varepsilon$ (přičemž platí stejné podmínky, jako u gramatik typu 1)

Věta 6: Každý konečný jazyk je regulární.

Důkaz 8..1: Mějme jazyk $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Abychom tento jazyk prohlásili za regulární, tak je třeba najít regulární gramatiku, která tento jazyk generuje.

Mějme tedy nějaké dané Σ a S a zvolme N. Následně platí $\forall x_i \in L$ je dvojího typu:

1. $x_i = \varepsilon$ a následně $S \to \varepsilon$
2. $x_i = a_1 \ldots a_k$ a následně $S \to a_{i1}A', A' \to a_{i2}A'', \ldots\ldots, A^k \to a_{ik}$



Obrázek 2. Vychodilovo „vajíčko.“

Příklad 11:

$$\begin{aligned} N &= \{S\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ P &= \{S \to aSb|\varepsilon\} \\ L(G) &= \{a^n b^n| \quad n \geq 0\} \end{aligned}$$

Máme tedy *bezkontextový* jazyk.

Příklad 12:

$$\begin{aligned} N &= \{S\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ P &= \{S \to SS|aSb|bSa|\varepsilon\} \end{aligned}$$

$L(G)$ je *bezkontextový* jazyk.

Příklad 13:

$$\begin{aligned} N &= \{S, V\} \\ \Sigma &= \{p,), (, \Rightarrow, !\} \\ P &= \{S \to V|(S \Rightarrow S)|!S, V \Rightarrow pV|p\} \end{aligned}$$

$L(G)$ je jazyk všech výrokových formulí.

8.4. Gramatika nezkracující

Gramatika G se nazývá nezkracující, pokud má pouze nezkracující pravidla. Avšak navíc může mít tato gramatika pravidlo ve tvaru $S \to \varepsilon$, přičemž S se nesmí nacházet na pravé straně žádného pravidla.

Příklad 14:

$$\begin{aligned} N &= \{S, A, B, C\} \\ \Sigma &= \{a, b, c\} \\ P &= \{S \to \varepsilon|abc|Ac, A \to aBcb, Bcb \to bBc, Bcc \to Ccc, bc \to Cb, aC \to aab|aA\} \end{aligned}$$

Věta 7: Gramatiky typu 1(viz. 8.3.) a 3(viz. 8.3.) jsou nezkracující.

Věta 8: Ke každé gramatice G, existuje ekvivalentní gramatika G', ve které jsou všechna pravidla obsahující terminální symboly ve tvaru $A \to a$, kde $A \in N, a \in \Sigma$.

Důkaz 8..2: Pro každý terminál $a \in \Sigma$, zavedeme pomocný neterminál N_a a pravidlo $N_a \to a$. Všechny výskyty terminálů ve výchozích pravidlech nahradíme příslušnými pomocnými neterminály, tedy:

- $Bcb \to bBc$ se změní na $BN_cN_b \to N_bBN_c$
- Pomocná pravidla jsou následně $N_c \to c$ a $N_b \to b$

Věta 9: Ke každé nezkracující gramatice existuje ekvivalentní gramatika, která je kontextově závislá[7].

Důkaz 8..3: Předpokládejme, že $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ je nezkracující gramatika. Pak můžeme předpokládat, že všechna pravidla jsou buď ve tvaru $A \to a$ nebo ve tvaru obecně: $A_1A_2 \cdots A_m \to B_1B_2 \cdots B_n$, kde $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n \in N$ a navíc $m \leq n$.

Taková pravidla lze psát ve tvaru $A_1A_2 \cdots A_m \to B_1B_2 \cdots B_my$, kde $y = B_{m+1} \cdots B_n$ Budeme uvažovat nové pomocné neterminály $X_1, ..., X_m$ [8]. A zavedeme následující pravidla:

$$
\begin{gathered}
A_1A_2 \cdots A_m \to X_1A_2 \cdots A_m \\
X_1A_2 \cdots A_m \to X_1X_2A_3 \cdots A_m \\
\vdots \\
X_1X_2 \cdots X_{m-1}A_m \to X_1 \cdots X_{m-1}X_my \\
X_1X_2 \cdots X_my \to B_1X_2X_3 \cdots X_my \\
\vdots \\
B_1B_2 \cdots B_{m-1}X_my \to B_1B_2 \cdots B_{m-1}B_my
\end{gathered}
$$

Tento postup se aplikuje pro všechna pravidla. Hledaná gramatika G' se skládá z Σ, N a navíc všech pomocných neterminálů a odvozovacích pravidel.

8.5. Základní vlastnosti bezkontextových gramatik

Pro bezkontextové gramatiky obecně platí:

1. Levé strany odvozovacích pravidel obsahují jediný neterminál[9].
2. Odvozování nezávisí na kontextu.

Věta 10: Mějme bezkontextovou gramatiku $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ a nechť navíc existuje $X_1 \cdots X_k, \ldots, z$ P-derivace délky n, kde $X_1, \ldots, X_k \in (N \cup \Sigma)$ a $z \in (N \cup \Sigma)^*$ a potom pro každé $i = 1, \ldots, k$ existuje řetězec $z_i \in (N \cup \Sigma)^*$ a P-derivace $X_i, \ldots, z_i$ délky n_i tak, že $z = z_1 \cdot z_2 \cdots z_k$ a $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

[7] Mějme na paměti, že říkáme-li, že je gramatika kontextové zásvislá, tak tím myslíme, že je kontextová.

[8] pro každé pravidlo se uvažují zvlášť

[9] Toto tvrzení má praktický dopad. Jakmile se v odvozované větě objeví terminální symbol, tak již nemůže zmizet. Nemůže být například odvozen pravidlem, které na levé straně tento termínál obsahuje, protože takové pravidlo neexistuje.

Důkaz 8..4: Větu 10 prokážeme indukcí přes délku výchozí derivace $X_1 \cdots X_k, \ldots, z$.

1. Pro $n = 0$ je situace triviální, protože $z = X_1 \cdots X_k, z_i = X_i, n_i = 0$. Každé X_i je derivace délky 0.

2. Nechť tvrzení platí pro libovolnou derivaci délky n a dokážeme, že $X_1 \cdots X_k$ je P-derivace délky $n+1$. Jelikož má uvažovaná P-derivace délku n + 1, lze ji psát ve tvaru:

$$\underbrace{X_1 \cdots X_k, \ldots, y}_{\text{délka je } n}, z$$

   Máme $y \Rightarrow_G z$. Můžeme aplikovat indukční předpoklad:

   Existují řetězce $y_1, \ldots, y_k$ a P-derivace $X_1, \ldots, y_1$ až $X_k, \ldots, y_k$ délek $n_1 \cdots n_k$ tak, že $y = y_1 y_2 \cdots y_k$ a $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

   Z faktu, že $y \Rightarrow_G z$ a z toho, že gramatika je bezkontextová plyne, že y je ve tvaru $y = y^{''} y^{'} A w^{'} w^{''}$ pro $i = 1, \ldots, k$. Pak z je ve tvaru $z = y^{''} y^{'} u w^{'} w^{''}$ a $A \to u \in P$, to jest $X_i, \ldots, y_i, y^{'} u w^{'}$ je P-derivace délky n_{i+1}. Hledané derivace jsou:

$$\begin{gathered} X_1, \ldots, y_1 \\ \vdots \\ X_{i-1}, \ldots, y_{i-1} \\ X_i, \ldots, y_i y^{'} u w^{'} \\ X_{1+1}, \ldots, y_{i+1} \\ X_k, \ldots, j_k \end{gathered}$$

Příklad 15:

$$\begin{aligned} N &= \{S\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ P &= \{S \to SS | aSb | bSa | \varepsilon\} \end{aligned}$$

Posloupnost

$$SbSaS, SbSa, SbaSba, aSbbaSba, abbaSba$$

je P-derivací délky 4. Následně hledané P-derivace jsou:

1. S, aSb, ab (délka 2)
2. b (délka 0)
3. S, aSb (délka 1)
4. a (délka 0)
5. S, ε (délka 1)

Poznámka 5: U regulárních a kontextových gramatik jest hned vidět, zda $\varepsilon \in L(G)$.

Pro bezkontextovou gramatiku $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ zavedeme následující podmnožiny:

$$\begin{aligned} E_0 &= \{A \in N | A \to \varepsilon \in P\} \\ E_{i+1} &= E_i \cup \{A \in N | A \to x, \text{ kde } x \in E_i^*\} \end{aligned}$$

Příklad 16:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \varepsilon \\ B &\rightarrow \varepsilon \\ F &\rightarrow ABBA \\ G &\rightarrow BAF \\ E_0 &= \{A, B\} \\ E_1 &= \{A, B, F\} \\ E_2 &= \{A, B, F, G\} \end{aligned}$$

$$E_i \subseteq N, E_N = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$$

Jelikož je N konečná, musí platit:

$$\begin{aligned} E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_i = E_{i+1} &= E_{i+2} \\ E_N &= E_i \end{aligned}$$

Věta 11: Pro každou bezkontextovou gramatiku $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ a pro příslušné E_N platí následující $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$ právě když $A \in E_N$. Speciálně $\varepsilon \in L(G)$ právě když $S \in E_N$.

Důkaz 8..5: Dokazujeme obě implikace:

1. Pokud $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$, pak prokážeme indukci přes délku P-derivace, tj. triviální případ je $A \Rightarrow_G \varepsilon$, tj. existuje pravidlo $A \rightarrow \varepsilon \in P$ tj. $A \in E_0$.

   Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny P-derivace délky n.

   Mějme $A, \ldots, \varepsilon$ P-derivace délky n + 1. Použitím předchozí věty $(A, X_1 \cdots X_k, \ldots, \varepsilon)$ $A, X_i \cdots X_n, \ldots, \varepsilon$. Tzn. existují derivace $X_i, \ldots, \varepsilon$ délek nejvýše n. Z předpokladu $X_i \in E_n$, pro každé i tj. i $A \in E_N$.

2. Opačnou implikaci bychom dokázali tak, že pro každé E_i platí, pokud $E \in E_i$ a tedy pak $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$. Pro E_0 zřejmé. $A \rightarrow X_0 \cdots X_k, A \in E_j$.

Věta 12: Pro každou bezkontextovou gramatiku G existuje bezkontextová gramatika $G^{'}$, neobsahující ε - pravidla tak, že $L(G) \setminus \{\varepsilon\} = L(G^{'})$.

Důkaz 8..6: Mějme gramatiku $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$.

Stanovme množinu E_n dle předchozího postupu a pak stanovme gramatiku

$$\begin{aligned} G^{'} &= \langle N, \Sigma, P^{'}, S\rangle \\ P^{'} &= \{A \rightarrow y | A \rightarrow x \in P \text{ a } y \in D_{(x)}\} \end{aligned}$$

Kde $D_{(x)}$ značí množinu řetězců, které jsou neprázdné a vznikly z řetězce x vynecháním libovolného množství neterminálů z E_N.

Příklad 17: Mějme množinu $E_n = \{A, B\}$.

Následně pravidla:

$$\begin{aligned} X &\to aAbAB \\ &\dots \\ X &\to aAbAB \\ X &\to abAB \\ X &\to aAbB \\ X &\to aAbB \\ X &\to aAbA \\ X &\to abB \\ X &\to abA \\ X &\to aAb \\ X &\to ab \end{aligned}$$

Věta 13: Pro každou bezkontextovou gramatiku existuje ekvivalentní bezkontextová gramatika, která je navíc kontextová (a tudíž nezkracující).

Důkaz 8..7: Mějme gramatiku G.

Dle předchozí věty existuje $G^{'}$ tak, že $L(G) \setminus \{\varepsilon\} = L(G^{'})$. $G^{'}$ je nezkracující a kontextová, protože nemá ε - pravidla. Pokud ε nepatří do $L(G)$, pak jsme hotovi. Pokud $\varepsilon \in L(G)$. Pak $G^{'}$ rozšíříme tak, že přidáme startovní neterminální symbol $S^{'}$ a pravidlo $S^{'} \to \varepsilon$ a $S^{'} \to S$.

8.6. Jazyky bez gramatického základu

Věta 14: Označme třídu všech jazyků nad abecedou Σ jako 2^{Σ^*}. Následně o takovéto třídě můžeme prohlásit, že je nespočetná.

Důkaz 8..8: Víme, že Kleeneho uzávěr Σ^* je spočetná množina, lze tedy psát, že $\Sigma^* = \{x_1, x_2, \dots, x_5, \dots\}$.

Sporem nechť je množina 2^{Σ^*} spočetná, lze tedy napsat, že $2^{\Sigma^*} = \{L_1, L_2, \dots\}$ a $L = \{x_i | \quad x_i \notin L_i\}$.

Kdyby pro nějaké j platilo, že $L = L_j$, pak $x_j \in L \iff x_j \in L_j$, což je spor.

9. Determinismus versus nedeterminismus

Za *determinismus* považujme takovou konfiguraci, pro kterou platí, že je v *každém jejím kroku jasné*, co bude následovat. Naopak u *nedeterministických* konfigurací *není v určitých případech možné další krok přesně vyjádřit* na základě znalostí aktuálního kroku.

Automaty realizují tzv. analytický formalismus a naproti tomu gramatiky realizují tzv. generativní formalismus.

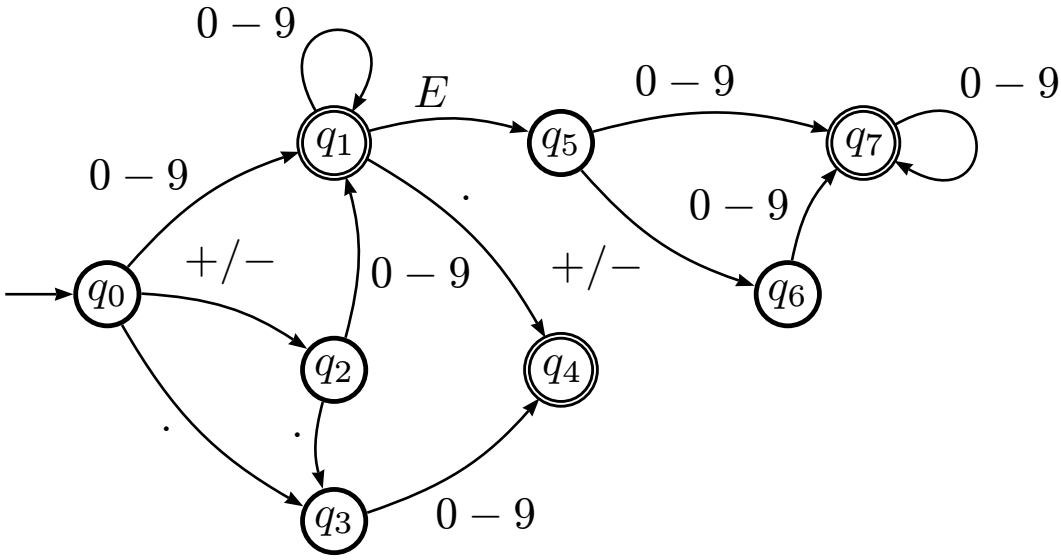
10. Konečné deterministické automaty

Jak již bylo řečeno, tak KDA realizují analytický (resp. výpočetní) formalismus a představují jakési „jednoduché počítače“. KDA a jejich činnost jsou charakterizovány několika prvky:

1. Vstupem jsou řetězce nad určitou abecedou, která se obvvykle značí Σ.

2. Řídící jednotka automatu se skládá z konečně mnoha stavů (aby byla reprezentovatelná v počítačích).
3. Počátek činnosti automatu představuje okamžik, kdy na vstupu automatu je celý vstupní řetězec a řídící jednotka je v iniciálním stavu.
4. Automat vykonává svou primární činnost tím, že přečte ze vstupu aktuální symbol a na základě stavu, ve kterém se právě nachází se řídící jednotka přepne do jiného stavu a odebere onen přečtený symbol ze vstupního řetězce.
5. Konec činnosti automatu nastává v případě, že na vstupu již není co číst. Byl tedy zpracován celý vstupní řetězec. V tomto okamžiku automat nachází v určitém stavu, podle typu stavu následně řekneme, že automat řetězec přijímá nebo zamítá. Existují tedy přijímací (neboli koncové) stavy a nepřijímací (neboli nekoncové) stavy.

Příklad 18: Nyní si ukažme, jak vypadá typický KDA.



Obrázek 3. Názorný příklad KDA

Dvojitě kroužkovaný stav označuje stav koncový. Šipky mezi jednotlivými stavy označují přechody, přičemž popisek u jednotlivých přechodů indikuji symbol, který se čte, pokud je tento přechod využit. Automat na obrázku 3. by přijímal například slovo $13.6E + 2$, obecně jakékoliv číslo kodované v tradiční fixní a pohyblivé notaci s desetinnou tečkou.

Definice 7: Konečný deterministický automat s úplnou přechodovou funkcí je struktura:

$$A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$$

Nyní si popišme jednotlivé členy automatu:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{vstupní abeceda} \\ Q &= \text{konečná množina stavů} \\ q_0 \in Q &= \text{počáteční stav} \\ F \subseteq Q &= \text{množina koncových stavů} \\ \delta &= \text{zobrazení } \delta: \quad Q \times \Sigma \to Q, \text{ neboli přechodová funkce} \end{aligned}$$

U přechodové funkce δ uvažujeme zápis například $\delta(r, a) = q$, který čteme: „Při vstupním symbolu $a \in \Sigma$ a aktuálním stavu r přejde automat do nového stavu q.“

Předpokládáme, že Q je konečná a δ je zobrazení.

Příklad 19: Automat s nadefinovanými přechody dle δ by mohl vypadat například takto:

$$\begin{aligned} A &= \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle \\ \Sigma &= \{a, b, c\} \\ Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} \\ F &= \{q_4\} \\ \delta &= \{< q_0, a, q_0 >, < q_0, b, q_0 >, < q_0, c, q_1 > \\ &\quad < q_1, a, q_2 >, < q_1, b, q_0 >, < q_1, c, q_1 > \\ &\quad < q_2, a, q_0 >, < q_2, b, q_3 >, < q_2, c, q_1 > \\ &\quad < q_3, a, q_2 >, < q_4, b, q_0 >, < q_3, c, q_4 > \\ &\quad < q_4, a, q_4 >, < q_4, b, q_4 >, < q_4, c, q_4 >\} \end{aligned}$$

10.1. Reprezentace KDA

10.1.1. Reprezentace přechodovou tabulkou

Řádky tabulky představují stavy a sloupce jednotlivé symboly vstupní abecedy. Znak * označuje, že stav je koncový.

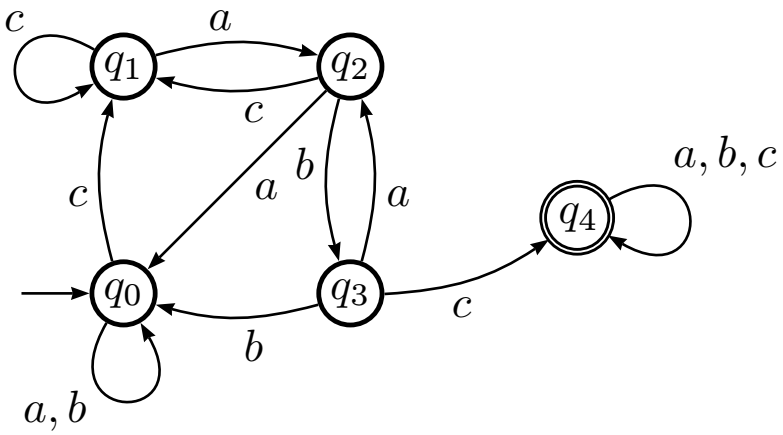
	a	b	c
q_0	q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_0	q_1
q_2	q_0	q_3	q_1
q_3	q_2	q_0	q_4
q_4^*	q_4	q_4	q_4

Tabulka 1. Přechodová tabulka pro KDA

10.1.2. Reprezentace přechodovým diagramem

10.2. Konfigurace a výpočet KDA

Konfgurace jednoznačně určuje aktuální fázi výpočtu a jsou to dvojice $\langle q, w \rangle, q \in Q, w \in \Sigma^*$, následně samotná konfigurace $Q \times \Sigma^*$.



Obrázek 4. Přechodový diagram pro KDA

Počáteční konfigurace zahrnuje obvykle počáteční stav q_0, tedy například $\langle q_0, w\rangle$.

Koncová konfigurace je konfigurací, kdy jsme přečetli celý vstupní řetězec, tedy $\langle q, \varepsilon\rangle$. Nicméně je třeba rozlišit dva stavy:

1. Koncová přijímací konfigurace, pro případ, kdy $q \in F$.
2. Koncová zamítací konfigurace, pro případ, kdy $q \notin F$.

Definice 8: Mějme automat $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F\rangle$ a řetězec $w \in \Sigma^*$. Pak posloupnost konfigurací r_i, w_i pro $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ splňující podmínky:

1. r_0 je počáteční stav automatu A.
2. $w_0 = w$
3. $w_n = \varepsilon$
4. $w_i = a_i w_{i+1}$ a $\delta(r_i, a_i) = r_{i+1}$ pro každé $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

nazveme *výpočet automatu A délky n pro řetězec w.*

Popíšme si nyní jeden krok výpočtu, tj. obecně:

$$\langle r_i, w_i\rangle = \langle r_{i+1}, w_{i+1}\rangle$$

tj. w_{i+1} vzniknlo z w_i odebráním prvního symbolu, který si označme a_i. Do stavu r_{i+1} jsme se dostali ze stavu r_i při vstupním symbolu a_i.

Příklad 20: Typický automatový výpočet vypadá například takto:

$$\begin{gathered}\langle q_0; accbcabca\rangle\\ \langle q_0; ccbcabca\rangle\\ \langle q_1; cbcabca\rangle\\ \langle q_1; bcabca\rangle\\ \langle q_0; cabca\rangle\\ \langle q_1; abca\rangle\\ \langle q_2; bca\rangle\\ \langle q_3; ca\rangle\\ \langle q_4; c\rangle\\ \langle q_4; \varepsilon\rangle\end{gathered}$$

Věta 15: KDA A má pro řetězec délky n jednoznačný výpočet rovněž délky n.

10.3. Rozšířená přechodová funkce pro KDA

Rozšířená přechodová funkce má rekurzivní předpis:

$$\begin{aligned}\delta^* :&\quad Q \times \Sigma^* \to Q\\ \delta^*(q,u) = \{&\begin{array}{ll} q & \text{pokud } u = \varepsilon\\ \delta^*(\delta(q,a),v) & \text{pokud } u = av, a \in \Sigma,\end{array}\end{aligned}$$

Věta 16: Pro každé $u, v \in \Sigma^*$ platí, že $\delta^*(q, uv) = \delta^*(\delta^*(q,u),v)$

Důkaz 10..1: Větu 16 dokážeme indukcí přes délku řetězce následujícím způsobem:

1. Pokud $|u| = 0$, pak $\delta^*(\delta^*(q,u),v) = \delta^*(\delta^*(q,\varepsilon),v) = \delta^*(q,v) = \delta^*(q,\varepsilon v) = \delta^*(q,uv)$
2. Pokud $|u| > 0$, pak předpokládáme, že tvrzení platí pro $\forall$ řetězce kratší délky. Tj. pro $u = aw, a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$ máme:

$$\begin{aligned}\delta^*(\delta^*(q,u),v) &= \delta^*(\delta^*(q,aw),v)\\ &= \delta^*(\delta^*(\delta(q,a),w),v)\\ &= \delta^*(\delta(q,a),wv)\\ &= \delta^*(q,awv)\\ &= \delta^*(q,uv)\end{aligned}$$

Poznámka 6: Automat A přijím řetězec a, pokud $\delta^*(q_0,w) \in F$.

Věta 17: Řetězec w je přijat automatem, právě když existuje přijímací výpočet pro w.

Důkaz 10..2: Stačí dokázat, že $\delta^*(q_0,w) \in F$ každý výpočet $\langle r_0,w_0\rangle \cdots \langle r_n,w_n\rangle$ je přijímající, tj. když $r_n \in F$. Pro každé $\langle r_i,w_i\rangle$ prokážeme, že $\delta^*(r_i,w_i) = r_n$, což dokazujeme indukcí přes i.

1. Pro $i = n$ mějme $\delta^*(r_n,w_n) = \delta^*(r_n,\varepsilon) = r_n$. Pak lze předpokládat, že máme nějaké i a pro každé j takové, že $i < j \leq n$ tvrzení platí.

2. Dle bodu 4 z definice výpočtu platí, že $w_i = a_i w_{i+1}$ a $\delta(r_i, a_i) = r_{i+1}$. Tj. $\delta^*(r_i, w_i) = \delta^*(r_i, a_i w_{i+1}) = \delta^*(\delta(r_i, a_i), w_{i+1}) = \delta^*(r_{i+1}, w_{i+1}) = r_n$

Jazyk rozpoznaný konečným deterministickým automate lze formulovat jako $L(A) = \{w \in \Sigma^* | \quad \delta^*(q_0, w) \in F\}$.

10.4. KDA s neúplnou přechodovou funkcí

Mějme KDA $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ a upřesněme δ, které se liší.

δ je neúplná přechodová funkce tvaru $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$, přičemž také platí, že pokud $\langle q, a, r_1 \rangle \in \delta$ a $\langle q, a, r_2 \rangle \in \delta$, pak $r_1 = r_2$ a $\delta : \quad Q \times \Sigma \to Q$.

Z toho plynou dvě situace:

1. $\delta(q, a)$ je definována, $\langle q, a, r \rangle \in \delta$ pro nějaké r takové, že $\delta(q, a) = r$.
2. $\delta(q, a)$ není definováno, pokud $\langle q, a, r \rangle \notin \delta$ pro žádná r.

   V grafu se toto projeví tak, že ze stavu q_i nevede žádná hrana pro symbol a_i.

   Výpočet se liší v bodu 4 $w_i = a_i w_{i+1}$ a $\delta(r_i, a_i)$ je definována a $\delta(r_i, a_i) = r_{i+1}$ pro každé $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Řetězec w je přijat automatem A, právě tehdy, když existuje výpočet A pro w, kteý je přijímající.

Následně jazyk rozpoznaný automatem A je $L(A) = \{w \in \Sigma^* | \quad \delta^*(q_0, w) \in F\}$.

Věta 18: Ke každému KDA s neúplnou přechodovu funkcí δ existuje KDA s úplnou přechodovu funkcí δ, který rozpoznává stejný jazyk.

Důkaz 10. .3: Každý KDA s úplnou přechodovou funkcí je zároveň KDA s neúplnou přechodovou funkcí. Tedy $A' = \langle \Sigma, Q \cup \{\#\}, \delta', q_0, F \rangle$

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & \text{pokud } \delta(q, a) \text{ je definováno} \\ \# & \text{pokud } q = \#, \forall a \in \Sigma \\ \# & \text{pokud } \delta(q, a) \text{ není definováno} \end{cases}$$

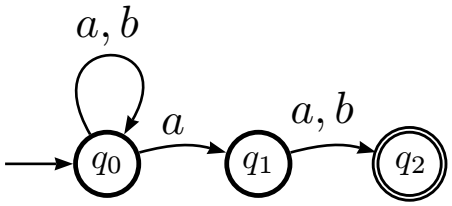
Následně tedy $L(A) = L(A')$.

10.5. Implementace KDA

1. δ jako dvourozměrné pole - „ďábelsky rychlé“, paměťově náročné
2. δ jako seznam/hashovací tabulka - vhodné když $|\delta| <<< |Q \times \Sigma|$
3. δ jako orientovaný graf

11. Konečné nedeterministické automaty

Příklad 21: Mějme automat:



Vstupní řetězce: *abba* (nepřijat), *baba* (nepřijat), *baab* (přijat), *bbaa* (přijat).
V případě řetězce *baab* máme dokonce 3 možnosti výpočtu:

1. $\langle q_0, baab\rangle, \langle q_0, aab\rangle, \langle q_0, ab\rangle, \langle q_0, b\rangle, \langle q_0, \varepsilon\rangle$ – končí neúspěchem.
2. $\langle q_0, baab\rangle, \langle q_0, aab\rangle, \langle q_1, ab\rangle, \langle q_2, b\rangle$ – končí neúspěchem.
3. $\langle q_0, baab\rangle, \langle q_0, aab\rangle, \langle q_0, ab\rangle, \langle q_1, b\rangle, \langle q_2, \varepsilon\rangle$ – končí úspěchem.

Předchozí zápisy můžeme pojmenovat také jako „nedeterministický výpočet.“
Jiným zápisem téhož může být také ten následující.

$$\langle \{q_0\}, baab\rangle, \langle \{q_0\}, aab\rangle, \langle \{q_0, q_1\}, ab\rangle, \langle \{q_0, q_1, q_2\}, b\rangle, \langle \{q_0, q_2\}, \varepsilon\rangle$$

Definice 9: Strukturu $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F\rangle$ nazvěme *konečným nedeterministickým automatem* nad abecedou Σ. Pro tuto strukturu následně platí tato tvrzení:

- Σ, Q a F jsou stejné jako u konečného deterministického automatu.
- $I \subseteq Q$ označuje množinu počátečních stavů, která by měla být obecně neprázdná.
- δ označuje přechodovou funkci ve tvaru $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$, tedy $\delta(q, a) = \{r_1, \ldots, r_k\}$. Totéž slovně: „Automat může při stavu q při symbolu a přejít do kteréhokoliv stavu z $\{r_1, \ldots, r_k\}$.“

Příklad 22:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{a, b\} \\ P &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\ I &= \{q_0, q_3\} \\ F &= \{q_2\} \end{aligned}$$

Následně přechodová funkce:

$$\begin{aligned} \delta = \quad & \{\langle q_0, a, \{q_0, q_1\}\rangle, \langle q_0, b, \{q_0\}\rangle, \langle q_1, a, \{q_2\}\rangle, \langle q_1, b, \{q_2\}\rangle, \\ & \langle q_2, a, \emptyset\rangle, \langle q_2, b, \emptyset\rangle, \langle q_3, a, \emptyset\rangle, \langle q_3, b, \{q_1\}\rangle\} \end{aligned}$$

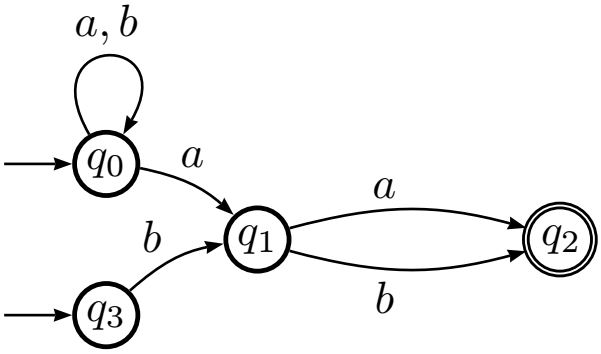
	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2*	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow q_3$	$\emptyset$	$\{q_1\}$

Tabulka 2. Přechodová tabulka s množinami stavů

11.1. Reprezentace KNA

Předchozí příklad číslo 22 lze reprezentovat několika způsoby:

1. *Přechodová tabulka*, která ve svém těle obsahuje množiny stavů.
2. *Diagram*, který automat demonstruje v grafičtější podobě.



11.2. Nedeterministický výpočet

Nyní si popišme *nedeterministický výpočet*, který je definován následujícími věcmi:

- Konfigurace, což je dvojice ve tvaru $\langle stav, řetězec \rangle$.
- Počáteční konfigurace ve tvaru $\langle q, w \rangle$ kde $q \in I$.
- Koncová konfigurace ve tvaru $\langle q, \varepsilon \rangle$.
- Koncová přijímací konfigurace $\langle q, \varepsilon \rangle$ kde $q \in F$.

Definice 10: Mějme $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$ a $w \in \Sigma^*$. Pak posloupnost konfigurací $\langle r_i, w_i \rangle$ pro $i = \{0, \ldots, n\}$ splňující podmínky:

$$r_0 \in I \tag{1}$$
$$w_0 = w \tag{2}$$
$$w_n = \varepsilon \tag{3}$$
$$w_i = a_i w_{i+1} \text{ a } r_{i+1} \in \delta(r_i, a_i) \text{ pro } i = \{0, \ldots, n-1\} \tag{4}$$

nazveme *nedeterministický výpočet*.

11.3. Rozšířená přechodová funkce

Definice 11: Rozšířená přechodová funkce má tvar:

$$\delta^* : 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$$

$$\delta^*(R,w) = \left\{ \begin{array}{ll} R & \text{pokud } w = \varepsilon \\ \delta^*(\bigcup\limits_{q\in R} \delta(q,a), u) & \text{pokud } w = au, \text{ kde } a \in \Sigma, u \in \Sigma^* \end{array} \right\}$$

Věta 19: Platí $\delta^*(R,w) = \delta^*(\delta^*(R,u),v), \forall R \subseteq Q, uv \in \Sigma^*$.

Důkaz 11..1: Předchozí tvrzení dokazujeme indukcí přes délku řetězce.

1. Pro $u = \varepsilon$ je situace triviální.
2. Pokud $u = ay, |y| < |u|,$ pak $\delta^*(R,w) = \delta^*(R,ayv) = \delta^*(R,a(yv))$.
3. Nyní aplikujme definici.

$$\delta^*(\bigcup_{q\in R} \delta(q,a), yv) = \text{ indukční předpoklad}$$
$$\delta^*(\delta^*(\bigcup_{q\in R} \delta(q,a), y), v) = \text{ definicie } \delta^*$$
$$\delta^*(\delta^*(R,ay),v) = \delta^*(\delta^*(R,u),v)$$

Věta 20: Platí následující tvrzení:

$$\delta^*(\bigcup_{i=1}^{k} R_i, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta^*(R_i, w) \text{ pro každé} R_i \subseteq Q, w \in \Sigma^*$$

Důkaz 11..2: Předchozí tvrzení dokazujeme indukcí přes délku řetězce w.

$$\delta^*(\bigcup_{i=1}^{k} R_i, w) = \delta^*(\bigcup_{i=1}^{k} R_i, au) = \delta^*(q \in \bigcup_{\bigcup_{i=1}^{k}} \delta(q,a), u)$$
$$\delta^*(\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{q\in R_i} \delta(q,a), u) \ldots \text{indukční předpoklad}$$
$$\bigcup_{i=1}^{k} \delta^*(\bigcup_{q\in R_i} \delta(q,a), u)$$
$$\bigcup_{i=1}^{k} \delta^*(R, a_n) = \bigcup_{q\in R_i} \delta(R,w)$$

11.4. Řetězce přijímané KNA

KNA A přijímá řetězec w, pokud $\delta^*(I,w) \cap F \neq \emptyset$. Navíc jazyk, přijímaný KNA A si definujme jako $L(A) = \{w \in \Sigma^* | \delta^*(I,w) \cap F \neq \emptyset\}$.

Věta 21: Platí, že $w \in L(a)$ právě tehdy, když KNA A má přijímací výpočet pro w.

Důkaz 11..3: Předchozí tvrzení lze dokázat indukcí přes délku řetězce w.

$q \in \delta^*(I, w)$ právě tehdy, když existuje výpočet pro w, končící ve stavu q
dekompozice navíc $w = ua$

11.5. Determinizace KNA

Věta 22: Pro každý KDA $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle \exists$ KNA A' tak, že $L(A) = L(A')$.

Důkaz 11..4: Pro výchozí A uvažujme $A' = \langle \Sigma, Q, \delta', \{q_0\}, F \rangle$, pak $\delta'(q, a) = \{\delta(q, a)\}$. Zbytek důkazu je zřejmý.

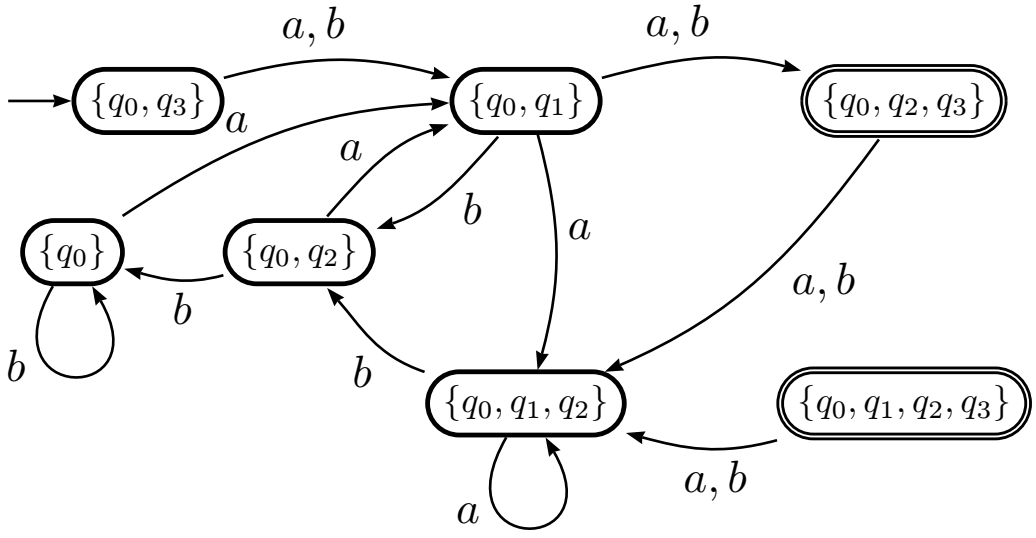
Věta 23: Pro každý KNA A existuje KDA A^D tak, že $L(A) = L(A^D)$.

Důkaz 11..5: Předchozí větu lze dokázat následujícím způsobem:

1. Uvažujme $A^D = \langle \Sigma, 2^Q, \delta^D, I, F^D \rangle$, kde $F^D = \{R \subseteq 2^Q | R \cap F \neq \emptyset\}, \delta^D(R, a) = \delta^*(R, a)$. Nyní zbývá ukázat, že $\delta^*(I, w) \cap F \neq \emptyset$ právě tehdy, když $(\delta^D)^*(I, w) \in F^D$, což prokážeme indukcí přes délku řetězce w.
2. Pro $w = \varepsilon$ je situace zřejmá. Jinak $(\delta^D)^*(R, w) = (\delta^D)^*(R, \varepsilon) = R = \delta^*(R, \varepsilon) = \delta^*(R, w)$.
3. Předpokládejme, že tvrzení platí pro řetězce délky n a nechť w má délku $n+1$ a $w = au$ pro $a \in \Sigma, |u| < |w|$. Pak:

$$(\delta^D)^*(R, w) = (\delta^D)^*(R, au) = (\delta^D)^*(\delta^D(R, a), u) =$$
$$= \delta^*(\delta^D(R, a)u) = \delta^*(\delta^*(R, a), u) = \delta^*(R, au) = \delta^*(R, w)$$

Příklad 23: Vemme KNA z příkladu 22.



Ještě jeden automat, nepřečtu to dobře ze sešitu. :)

11.6. Algoritmus pro převod KNA na KDA

Nyní si ukažme pseudokód algoritmu pro převod konečných nedeterministických automatů na konečné deterministické automaty, pro které platí, že akceptují řetězce stejného jazyka.

```
δ^D ← ∅; Q^D ← ∅; F^D ← ∅; w ← 1
while w ≠ Q do
    select R ∈ w
     w ← w ∖ R; Q^D ← Q^D ∪ R
    if R ∩ F ≠ ∅ then
         F^D ← F^D ∪ R
    endif
    foreach a ∈ Σ do
         v ← δ^*(R, a)
        if N ≠ ∅ then
            if N ∉ w ∪ Q^D then
                 w ← w ∪ N
            endif
             δ^D ← δD ∪ < R, u, N >
        endif
    end
end
return < Σ, Q^D, δ^D, I, F^D >
```

Obrázek 5. Pseudokód pro převod KNA na KDA.

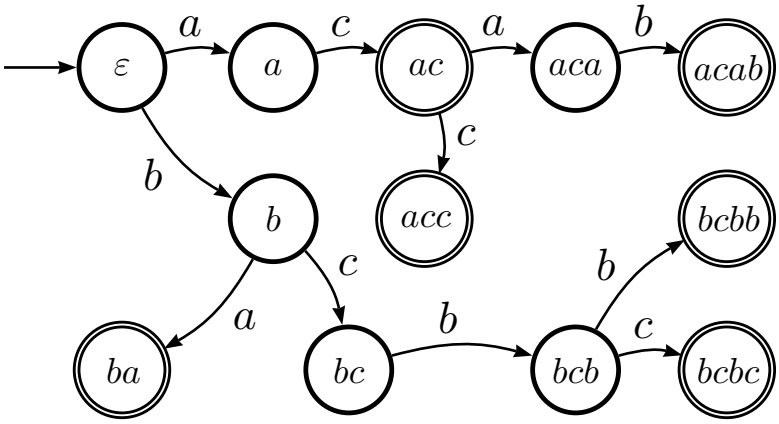
Definice 12: *Trie* je prefixový strom, který umožňuje „rychlé hledání ve slovníku."

Definice 13: Jako *slovník* označujeme konečný neprázdný jazyk který neobsahuje ε.

Definice 14: Trie slovníku L je KDA $T_L = \langle \Sigma, Q, \delta, \varepsilon, F \rangle$, přičemž:

$$\begin{aligned} Q &- \text{množina prefixů všech řetězců} \\ Q &- \bigcup_{w \in L} Pfx(w) \\ F &= L^{w \in L} \\ \delta(w,a) &= wa, \text{ pokud } wa \in Q, \text{ jinak } \delta(w,a) \text{ není definováno} \end{aligned}$$

Příklad 24: Uveďme si příklad konečného slovníkového automatu D_L, který je pochopitelně deterministický:



12. Vztah regulárních jazyků a konečných automatů

12.1. Regulární jazyky jsou rozpoznatelné KDA (implikace zleva)

Věta 24: Pro každou regulární gramatiku $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ existuje konečný deterministický automat A tak, že jazyk generovaný gramatikou je totéž, jako jazyk rozpoznatelný automatem, tj. $L(G) = L(A)$

Důkaz 12..1: Nejprve uvažujeme situaci, že $\varepsilon \notin L(G)$. Uvažujme konečný nedeterministický automat $A = \langle \Sigma, N \cup \{\#\}, \delta, \{S\}, \{\#\}\rangle$.

$$\delta(A,b) = \begin{cases} \{B \in N | A \to bB \in P\} & \text{pokud} \quad A \in N \wedge A \to b \notin P \\ \{B \in N | A \to bB \in P\} \cup \{\#\} & \text{pokud} \quad A \in N \wedge A \to b \in P \\ \emptyset & \text{jinak} \end{cases}$$

Pro důkaz $L(G) = L(A)$ stačí prokázat, že pro každé $A \in N$ a $x \in \Sigma^*$ platí, že $A \Rightarrow_G^* x$ právě když $\# \in \delta^*(\{A\}, x)$.

Důkaz provedeme indukcí přes délku řetězce x.

1. Pro $|x| = 1$ zřejmé. $A \Rightarrow_G^* x$ právě když $A \Rightarrow_G x$, tj. existuje pravidlo $A \to x \in P$ tj. z definice δ^* platí, že $\# \in \delta^*(\{A\}, x)$. Nechť $|x| = n$ a nechť tvrzení platí pro všechny řetězce kratší délky. Jelikož gramatika G je regulární, má P-derivace $A, \ldots, x$ právě n kroků. Pokud $|x| > 1$ pak $A \Rightarrow_G bB \Rightarrow_G^* by = x$ pro nějaké $A \to bB \in P$.

2. Pro $|y| < n$ z indukčního předpokladu platí, že $\# \in \delta^*(\{B\}, y)$. Tím spíš $\delta^*(\{A\}, x) = \delta^*(\{A\}, by) = \delta^*(\delta(A,b), y) = \delta^*(\{B, \ldots\}, y) \supseteq \delta^*(\{B\}, y)$ tj. $\# \in \delta^*(\{A\}, \#)$ protože $A \to bB \in P$tj.$B \in \delta(A,b)$

3. Tím jsme prokázali, že pokud $A \Rightarrow_G^* x$ pak $\# \in \delta^*(\{A\}, x)$.

4. Obráceně, pokud $\# \in \delta^*(\{A\}, x)$ pak pro $x = by, b \in \Sigma$ máme: $\# \in \delta^*(\{A\}, by) = \delta^*(\delta(A,b), y) = \delta^*(\bigcup_{B \in \delta(A,b)} \{B\}, y) = \bigcup_{B \in \delta(A,b)} \delta^*(\{B\}, y)$ Tj. existuje $B \in \delta(A,b)$ tak, že $\# \in \delta^*(\{B\}, y)$. Ze zavedení δ plyne, že $A \to bB \in P$

5. Aplikací indukčního předpokladu, existuje P-derivace $B, \ldots, y$. Hledaná P-derivace je ve tvaru: $A, bB, \ldots, by = x$,tj. $A \Rightarrow_G^* x$.

V případě, že $\varepsilon \in L(G)$, rozšíříme automat následovně, jednou ze tří možností:

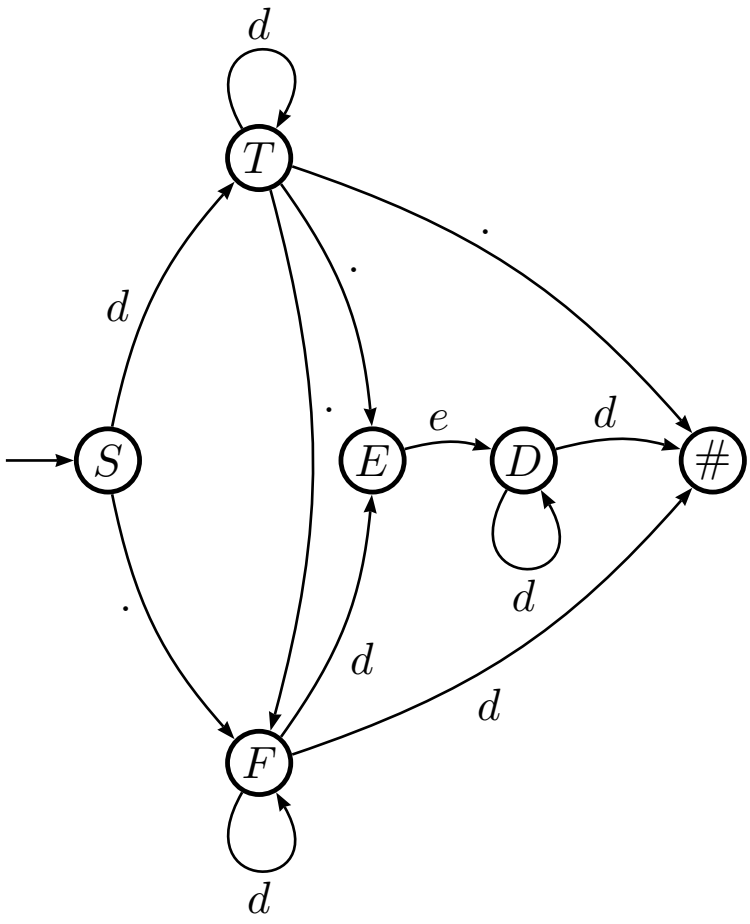
1. Přidáme S do množiny koncových stavů.
2. Přidáme # mezi počáteční stavy.[10]
3. Zavedeme nový stav, který bude počáteční a zároveň koncový a nevedou z něj žádné přechody jinam.

Poznámka 7: Nyní zbývá automat pouze determinizovat.

Příklad 25: Máme gramatiku G.

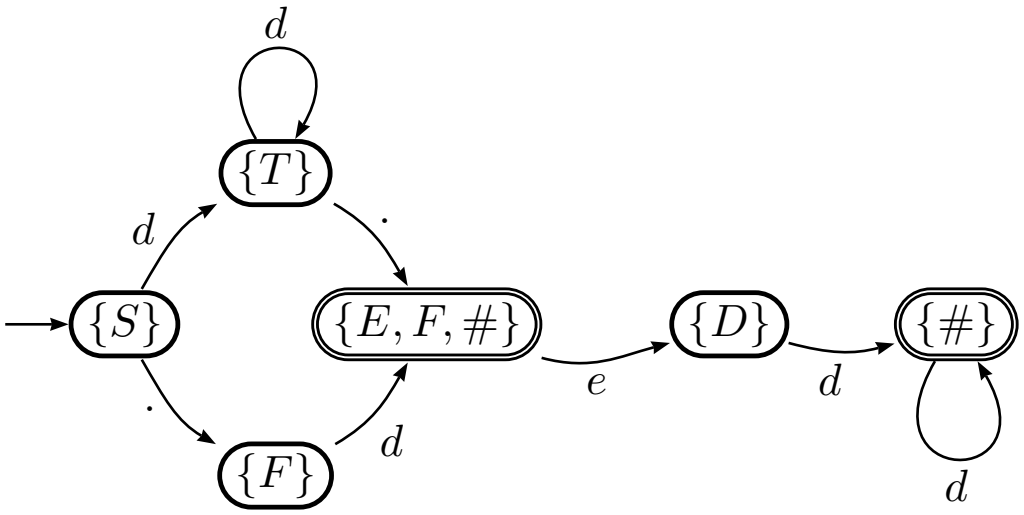
$$\begin{aligned} G &= \langle N, \Sigma, P, S \rangle \\ \Sigma &= \{e, d, .\} \\ P &= \{S \to .F|dT, T \to .E|.F|dT|., D \to dD|d, E \to eD, F \to dE|dF|d\} \end{aligned}$$

Automat rozpoznávající jazyk, generovaný gramatikou G, bude vypadat následovně:



Když tento automat zdeterminizujeme, dostaneme následující automat:

[10] Též nazývána jako „Konyho finta“.



12.2. Jazyky rozpoznatelné KDA jsou regulární (implikace zprava)

Věta 25: Pro každý konečný deterministický automat $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ existuje regulární gramatika G tak, že $L(A) = L(G)$.

Důkaz 12..2: Za neterminální symboly G vezmeme stavy automatu. Startovní neterminál bude q_0. Uvažujeme gramatiku: $G = \langle Q, \Sigma, P, q_0 \rangle$

$P = \{q \to ar |$ pokud $\delta(q, a) = r,$ pro $q, r \in Q$ a $a \in \Sigma\}$
$\cup \{q \to a |$ pokud $\delta(q, a) \in F\}$

Prokážeme že: $q \Rightarrow_G^* x$ právě když $\delta^*(q, x) \in F$

Pro $|x| = 1$ platí: $q \Rightarrow_G^* x$ právě když existuje pravidlo $q \to x \in P$, tj. z definice P platí $\delta(q, x) \in F$

Pro $x = by$, kde $b \in \Sigma^*$ předpokládejme, že tvrzení platí pro y. Platí, že $q \Rightarrow_G br \Rightarrow_G^* by = x$ právě když $\delta(q, b) = r$ a $\delta^*(r, y) \in F$

To znamená $\delta^*(q, by) = \delta^*(\delta(q, b), y) \in F$

Předchozí dokazuje, že $x \in L(G)$ právě když $x \in L(A)$ pro každý neprázdný x.

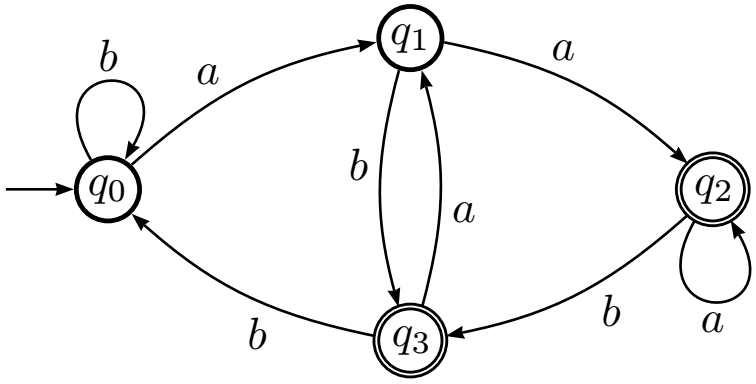
Pokud A nepřijímá ε , pak jsme hotovi.

Uvažujeme nový neterminál S, který bude nový startovní symbol, tj. místo G uvažujeme $G' = \langle Q \cup \{S\}, \Sigma, P', S \rangle$

$P' = \{S \to \varepsilon\} \cup \{S \to x | q_0 \to x \in P\} \cup P$

Pak $L(A) = L(G)$.

Příklad 26: Mějme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$ a automat zadaný diagramem:



Odvozovací pravidla gramatiky, generující tento jazyk budou:

$$\begin{aligned} q_0 &\rightarrow aq_1 \mid bq_0 \\ q_1 &\rightarrow aq_2 \mid a \mid bq_3 \mid b \\ q_2 &\rightarrow aq_2 \mid a \mid bq_3 \mid b \\ q_3 &\rightarrow aq_1 \mid bq_0 \end{aligned}$$

12.3. Regulární gramatiky

Co jsou to regulární gramatiky a jaké podmínky jejich odvozovací pravidla splňují již víme, ale můžeme si je ještě rozdělit na dva druhy, právě podle tvaru odvozovacích pravidel.

1. *Zprava regulární gramatiky:* Obsahují pravidla ve tvaru $A \rightarrow bB$, tedy neterminál je napravo od terminálního symbolu.
2. *Zleva regulární gramatiky:* Obsahují pravidla ve tvaru $A \rightarrow Bb$. Analogicky se neterminál nachází vlevo od terminálního symbolu.

Věta 26: Pro každou zleva regulární gramatiku $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ existuje konečný deterministický automat A tak, že *L(A)=L(G)*.

Důkaz 12..3: Budeme konstruovat automat, jehož stavy budou N, nový pomocný počáteční stav $\#$ a jediný koncový stav je S.

Hledaný KNA $A = \langle \Sigma, N \cup \{\#\}, \delta, \{\#\}, \{S\}\rangle$ s následovně definovanou přechodovou funkcí δ

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \{A \in N | A \rightarrow a \in P\} & \text{pokud} \quad q = \# \\ \{A \in N | A \rightarrow Ba \in P\} & \text{pokud} \quad q = B \end{cases}$$

Ekvivalence *L(A)=L(G)* se dokazuje vzájemně jednoznačnou korespondencí P-derivace a nedeterministického výpočtu.

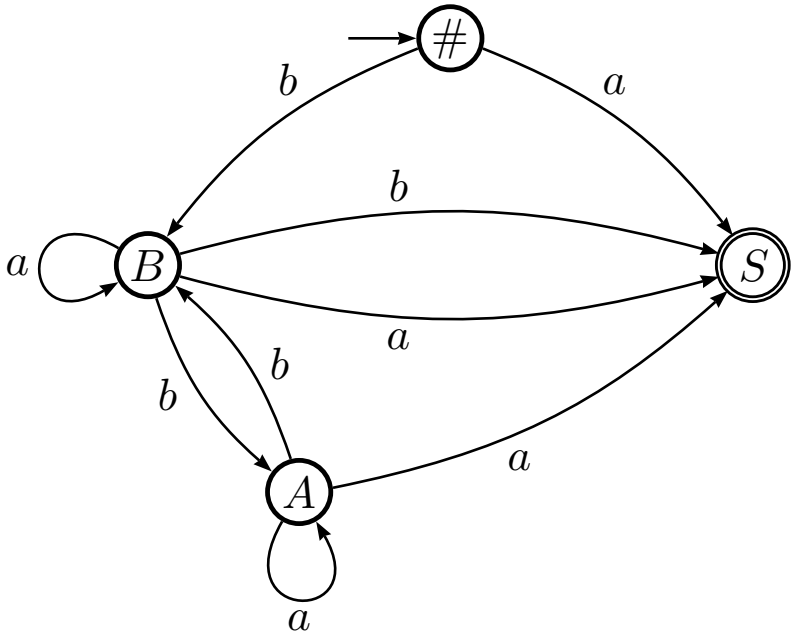
Pro derivaci:

$x_0 = S, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x$
jsme schopni sestavit posloupnost
$\langle \#, X_n \rangle, \langle A_{n-1}, y_{n-1} \rangle, \ldots, \langle A_1, y_1 \rangle, \langle S, \varepsilon \rangle$ kde $x_i = A_i y_i$

Příklad 27: Máme gramatiku G s následovně definovanými pravidly.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Aa|Ba|Bb|a \\ A &\rightarrow Aa|Bb \\ B &\rightarrow Ab|Ba|b \end{aligned}$$

Automat rozpoznávající jazyk generovaný touto gramatikou bude vypadat následovně:



Věta 27: Pro každý konečný deterministický automat A existuje zleva regulární gramatika taková, že $L(A)=L(G)$

Důkaz 12..4: Neterminály gramatiky jsou stavy automatu a budeme uvažovat dodatečný startovní neterminál S.

$$\begin{aligned} P = \quad & \{ \quad \delta(q,a) \rightarrow qa | q \in Q \wedge a \in \Sigma \} \ \cup \\ & \{ \quad \delta(q_0,a) \rightarrow a | q_0 \text{ je počáteční stav} \} \ \cup \\ & \{ \quad S \rightarrow w | w \text{ je pravá strana každého pravidla } q \rightarrow w, \text{ kde } q \in F \} \end{aligned}$$

Příklad 28: Vezmeme KDA z příkladu 26. Odvozovací pravidla budou vypadat takto:

$$
\begin{aligned}
q_0 &\to q_0 b \mid b \mid q_3 b \\
q_1 &\to q_0 a \mid a \mid q_3 a \\
q_2 &\to q_1 a \mid q_2 a \\
q_3 &\to q_1 b \mid q_2 b \\
S &\to q_1 a \mid q_1 b \mid q_2 a \mid q_2 b
\end{aligned}
$$

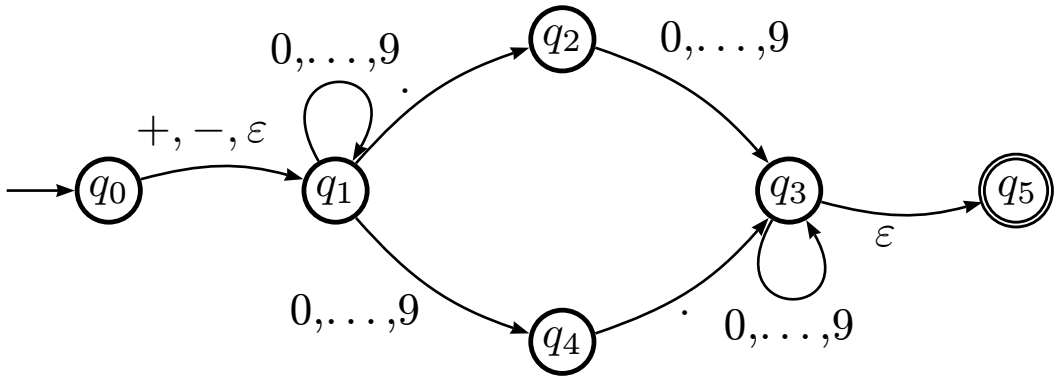
Definice 15: Regulární jazyky jsou jazyky, generované zprava (zleva) regulárními gramatikami, tj. jsou rozpoznatelné konečnými ne/deterministickými automaty.

Poznámka 8: Pravidla zprava a zleva nelze míchat.

13. Nedeterministický konečný automat s ε-přechody

Značíme εKNA.

Příklad 29: Zde je jeden motivační příklad na úvod.



Definice 16: Nedeterministický konečný automat s ε-přechody je struktura $\langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$, kde Σ, Q, δ, I, F mají stejný význam jako u KNA. δ je přechodová funkce $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$.

Fakt $\delta(q, a) = \{r_1, \ldots, r_k\}$ čteme: „automat A při čtení symbolu a přejde ze stavu q do některého ze stavů $r_1, \ldots, r_k$.“

Fakt $\delta(q, \varepsilon) = \{r_1, \ldots, r_k\}$ čteme: „automat A přejde samovolně ze stavu q do některého ze stavů $r_1, \ldots, r_k$.“

13.1. Reprezentace εKNA

1. *Přechodová tabulka*, vypadá stejně jako u KNA s tím, že přidáme jeden sloupec, ve kterém budeme zaznamenávat ε-přechody.

   Takto bude vypadat předchozí příklad číslo 29, reprezentovaný pomocí tabulky.

	+,-	.	$0, \ldots, 9$	ε
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\{q_5\}$
q_4	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Tabulka 3. Přechodová tabulka pro 29. příklad

2. *Přechodový diagram*, u kterého mohou být některé hrany ohodnoceny ε. Viz příklad 29.

13.2. Nedeterministický výpočet

Pojem *konfigurace* pro nás zůstává stejný, jedná se stále o dvojici $\langle$*stav,řetězec*$\rangle$.

Definice 17: Mějme automat $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$ a řetězec $w \in \Sigma^*$. Posloupnost konfigurací $\langle r_i, w_i \rangle$ pro $i = 0, \ldots, n$ splňující podmínky:

1. $r_0 \in I, w_0 = w$
2. $w_n = \varepsilon$
3. pro každé $i = 0, \ldots, n$
   (a) $w_i = aw_{i+1}, r_{i+1} \in \delta(r_i, a)$
   (b) $w_i = w_{i+1}, r_{i+i} \in \delta(r_i, \varepsilon)$

13.3. ε-uzávěry množin stavů

Je dána množina stavů $R \subseteq Q$, jež se nazývá ε-uzavřená, pokud $\delta(q, \varepsilon) \subseteq R$ pro každý stav $q \in R$.

Příklad 30: Lze ukázat na našem příkladě 29.
$\{q_0\}$ není ε-uzavřená protože $\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_1\} \nsubseteq \{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$ je ε-uzavřená

13.3.1. Tvorba ε-uzávěru

1. Mějme ε-uzávěr R.
2. Prohlašme, že $E_0 = R$ a následně pro $i \geq 1$ tvrďme, že:
   - $E_i = E_{i-1} \cup \{\delta(q, \varepsilon) | q \in E_{i-1}\}$
   - $E_A(R) = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$
   - $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_A(R)$

Poznámka 9: Vzhledem ke konečnosti množiny $E_A(R)$ musí existovat index k, pro který platí $E_k = E_{k+1} = \ldots = E_A(R)$

Můžeme pozorovat, že $E_A(R)$ není jen ε-uzavřená, ale je také *nejmenší* ε-uzavřená. Z toho můžeme vyvodit, že

$$E_A : 2^Q \to 2^Q$$

je *uzávěrový* operátor.

13.4. Rozšířená přechodová funkce

Pro automat $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$ je rozšířená přechodová funkce definovaná jako
$\delta^* : 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

$$\delta^*(R, w) = \begin{cases} E_A(R) & \text{pokud} \quad w = \varepsilon \\ \delta^*(E_A(\bigcup_{q \in E_A(R)} \delta(q, a), u)) & \text{pokud} \quad w = au, a \in \Sigma, u \in \Sigma^* \end{cases}$$

Věta 28: Pro libovolné množiny $R_i \subseteq Q \quad (i = 1, \ldots, k)$ platí:
$\bigcup_{i=1}^k E_A(R_i) = E_A(\bigcup_{i=1}^k R_i)$

Důkaz 13..1: Z monotonie E_A dostáváme
$E_A(R_i) \subseteq E_A(\bigcup_{i=1}^k R_i)$ pro všechna i
$\bigcup_{i=1}^k E_A(R_i) \subseteq E_A(\bigcup_{i=1}^k R_i)$
Opačná inkluze
$\bigcup_{i=1}^k E_A(R_i)$ je ε-uzavřená a obsahuje $\bigcup_{i=1}^k R_i$
z extenzivity E_A plyne, že $\bigcup_{i=1}^k R_i \subseteq \bigcup_{i=1}^k E_A(R_i)$
Stačí tedy ukázat, že $\bigcup_{i=1}^k E_A(R_i)$ je ε-uzavřená.
$q \in \bigcup_{i=1}^k E_A(R_i) \Rightarrow \exists k \; q \in E_A(R_i)$
Protože $E_A(R_i)$ je ε-uzavřená, $\delta(q, \varepsilon) \in E_A(R_i) \Rightarrow \delta(q, \varepsilon) \in \bigcup_{i=1}^k E_A(R_i) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k (E_A(R_i))$ je ε-uzavřená množina.

13.5. Přijímaný řetězec εKNA

Nechť $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$ je εKNA. Řetězec $w \in \Sigma^*$ nazýváme řetězec *přijímaný* A, pokud
$\delta^*(I, w) \cap F \neq \emptyset$
jinak w nazýváme řetězec *zamítaný* A.
Jazyk přijímaný A: $L(A) = \{w \in \Sigma^* | \delta^*(I, w) \cap F \neq \emptyset\}$

13.6. Ekvivalence s KDA

Věta 29: Ke každému εKNA $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$ existuje KNA $A^S = \langle \Sigma, Q, \delta^S, I^S, F \rangle$ takový, že $L(A) = L(A^S)$.

Důkaz 13..2: $I^S = E_A(I)$

$\delta^S(q,a) = \delta^*(\{q\},a) = E_A(\bigcup_{u\in E_A(\{q\})} \delta(u,a))$

Indukcí přes délku řetězce $w \in \Sigma^*$ prokážeme, že $(\delta^S)^*(E_A(R),w) = \delta^*(R,w)$

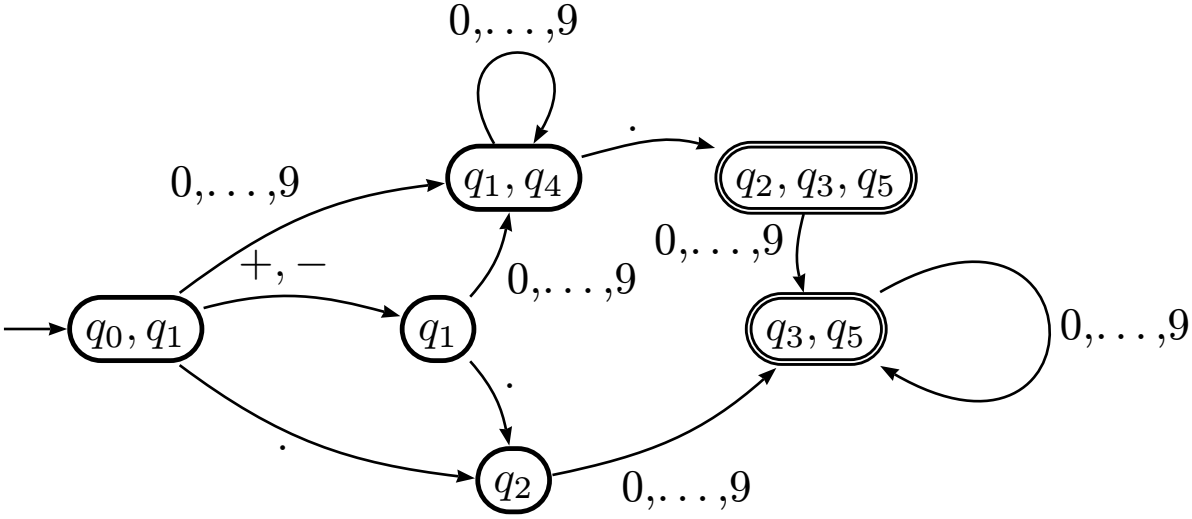
1. $w = \varepsilon$ platí triviálně
2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro w délky n a dokážeme pro slova w délky $n+1$.

$$w = av, \quad a \in \Sigma, \quad v \in \Sigma^*, \quad |v| = n, \quad R \subseteq Q$$

$$\begin{aligned}
(\delta^S)^*(E_A(R),w) &= (\delta^S)^*(E_A(R),av) \\
&= (\delta^S)^*(\bigcup_{q\in E_A(R)} \delta^S(q,a),u) \\
&= (\delta^S)^*(\bigcup_{q\in E_A(R)} E_A(\bigcup_{u\in E_A(\{q\})} \delta(u,a)),u) \\
&= (\delta^S)^*(E_A \bigcup_{q\in E_A(R)} \bigcup_{u\in E_A(\{q\})} \delta(u,a)),u) \\
&= (\delta^S)^*(E_A \bigcup_{q\in E_A(R)} \delta(q,a)),u) \\
&= (\delta^S)^*(E_A(E_A \bigcup_{q\in E_A(R)} \delta(q,a))),u) \\
&= \delta^*(E_A \bigcup_{q\in E_A(R)} \delta(q,a)),u) \\
&= \delta^*(R,w)
\end{aligned}$$

14. Algoritmus na převod ε KNA na KDA

Máme $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F\rangle$ a víme, že W je neprázdná množina dosud nezpracovaných stavů.



```
δ^s ← ∅; Q^s ← ∅; F^s ← ∅; W ← E_A(I)
while W ≠ Q do
    select R ∈ W
     W ← W ∖ R; Q^s ← Q^s ∪ R
    if R ∩ F ≠ ∅ then
         F^s ← F^s ∪ R
    endif
    foreach a ∈ Σ do
         N ← δ^*(R, a)
        if N ≠ ∅ then
            if N ∉ W ∪ Q^s then
                 W ← W ∪ N
            endif
             δ^s ← δs ∪ < R, a, N >
        endif
    endfor
endwhile
return < Σ, Q^s, δ^s, I, F^s >
```

Obrázek 6. Pseudokód pro převod ε KNA na KDA.

15. Regulární výrazy

Definice 18: Nechť je dána $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Pak regulární výraz na Σ je:

1. $\emptyset$
2. ε
3. symboly $a_1, \ldots, a_k$
4. pokud R_1, R_2 jsou RV, pak $(R_1|R_2)$ je RV
5. pokud R_1, R_2 jsou RV, pak $(R_1 R_2)$ je RV
6. pokud R je RV, pak R^* je RV

Příklad 31: Podívejme se na následující výrazy a rozhodněme, zda-li jsou regulární:

- $((ab)c)^*$, $((a|b)c)^*$ – jsou RV
- $a^*b)$, $a||b$ – nejsou RV

Poznámka 10: Priorita $|, \circ, *$ je stejná jako (po řadě) $+, \cdot, ^{-1}$ v aritmetických výrazech.

16. Jazyky generované regulárními výrazy

Definice 19: Nechť R je RV nad Σ. Pak $L(R) \subseteq \Sigma^*$. Pak také platí:

1. $L(R) = \emptyset$, pokud $R = \emptyset$.
2. $L(R) = \{\varepsilon\}$, pokud $R = \varepsilon$.
3. $L(R) = \{a_i| \quad \text{pokud } R = a_i\}$.

4. $L(R) = L(R_1) \cup L(R_2)$, pokud $R = \{R_1|R_2\}$.
5. $L(R) = L(R_1) \circ L(R_2)$, pokud $R = \{R_1 \circ R_2\}$.
6. $L(R) = L(R_1)^*$, pokud $R = R_1^*$.

Věta 30: Každý regulární výraz lze převést na konečný automat.

Věta 31: Každý jazyk generovaný regulárním výrazem je regulární.

Důkaz 16..1: Předchozí body dokážeme indukcí dle složitosti regulárního výrazu.

- Pro body 1 až 3 je vše zřejmé.
- Pro bod 4 – $R = R_1|R_2$, kde R_1, R_2 jsou regulární výrazy. Předpokládáme, že existuje KDA, rozpoznávající jazyky $L(R_1)$ a $L(R_2), L(R_1) = L(A_1), L(R_2) = L(A_2)$.
  Pak vytvoříme KNA, který má tvar $\langle \Sigma, Q_1 \cup Q_2, \delta 1 \cup \delta_2, \{q_0, q_0'\}, F_1 \cup F_2 \rangle$.
- Pro bod 5 – $R = R_1 R_2$. Z koncových stavů A_1 vytvoříme ε-přechody do počátečního stavu automatu A_2 a počátečním stavem bude stav q_0 z automatu A_1.
- Pro bod 6 – $R = R_1^*, L(A_1) = L(R_1)$. Následně sestavujeme ε KNA tak, že před počátečním stavem vytvoříme nový koncový stav, který bude navíc novým počátečním stave a do kterého vedeme ε přechody z již existujících koncových stavů a z našeho nového koncového stavu navíc vedeme ε přechod do původního počátečního stavu.

Věta 32: Každý regulární jazyk lze generovat regulárním výrazem.

17. Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

17.1. Základní uzávěrové vlastnosti

- *Komplement*
  Pokud je L regulární, pak je $\Sigma^* \backslash L$ regulární.

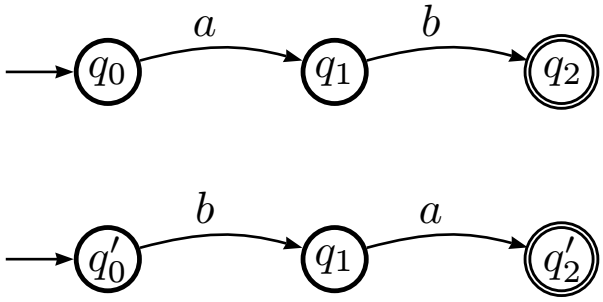
  Důkaz 17..1: Pro L existuje KDA s úplnou přechodovou funkcí tak, že $L(A) = L$. Na základě tohoto automatu zkonstruujeme $A' = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, Q \backslash F \rangle$, A i A' mají stejnou rozšířenou přechodovu funkci δ^*.
  Tj. $\Sigma^* \backslash L = L(A')$

- *Sjednocení*
  Jsou-li L_1 a L_2 regulární, pak je $L_1 \cup L_2$ regulární.

  Důkaz 17..2: Pro L_1 existuje $A_1 = \langle \Sigma, Q_1, \delta_1, q_{01}, F_1 \rangle$, tak že $L_1 = L(A_1)$
  Pro L_2 existuje $A_2 = \langle \Sigma, Q_2, \delta_2, q_{02}, F_2 \rangle$, tak že $L_2 = L(A_2)$
  Předpokládáme-li, že A_1 a A_2 mají disjunktní množiny stavů, tj. $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, sestavíme následující KNA:
  $A = \langle \Sigma, Q_1 \cup Q_2, \delta, \{q_{01}, q_{02}\}, F_1 \cup F_2 \rangle$ s přechodovou funkcí δ definovanou jako

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \{\delta_1(q,a)\} & \text{pokud} \quad q \in Q_1 \\ \{\delta_2(q,a)\} & \text{pokud} \quad q \in Q_2 \end{cases}$$

Příklad 32: Nyní si uvedeme protipříklad, co by se stalo, kdyby množiny stavů nebyly disjunktní.



První automat přijímá řetězec ab, druhý automat přijímá řetězec ba, čili od jejich sjednocení očekáváme, že bude přijímat ab i ba. Jelikož množiny stavů nejsou disjunktní (q_1 je společný pro oba), sjednocení těchto automatů může stejně dobře přijímat i řetězce aa nebo bb, což je nežádoucí.

- *Průnik*

  S použitím De Morganových zákonů, dostáváme:

  $$L_1 \cap L_2 = \Sigma^* \backslash (\Sigma^* \backslash L_1 \cup \Sigma^* \backslash L_2)$$

  tj. $L_1 \cap L_2$ je regulární.

  Důkaz 17..3: Uvažujeme konečné deterministické automaty s úplnou přechodovou funkcí $A_1 = \langle \Sigma, Q_1, \delta_1, q_{01}, F_1 \rangle$ a $A_2 = \langle \Sigma, Q_2, \delta_2, q_{02}, F_2 \rangle$

  Zkonstruujeme automat $A_1 \times A_2$ (direktní součin):

  $$A_1 \times A_2 = \langle \Sigma, Q_1 \times Q_2, \delta, \langle q_{01}, q_{02} \rangle, F_1 \times F_2 \rangle$$

  s přechodovou funkcí δ:

  $$\delta(\langle q, r \rangle, a) = \langle \delta_1(q, a), \delta_2(r, a) \rangle$$

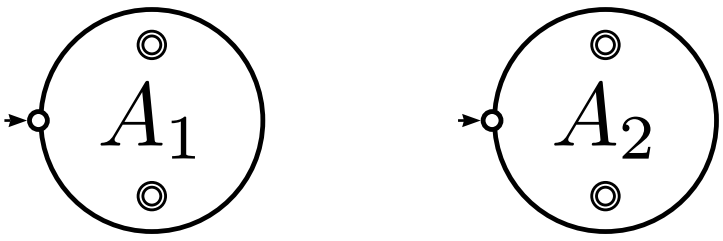
  platí:

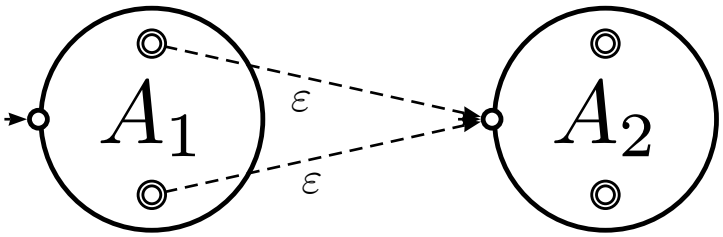
  $$L_1 \cap L_2 = L(A_1 \times A_2)$$

- *Produkt (zřetězení)*

  $L_1 \cdot L_2$

  Předpokládáme existenci automatů $A_1 = \langle \Sigma, Q_1, \delta_1, q_{01}, F_1 \rangle$ a $A_2 = \langle \Sigma, Q_2, \delta_2, q_{02}, F_2 \rangle$ takových, že $L_1 = L(A_1)$ a $L_2 = L(A_2)$.





Sestavíme εKNA

$$A = \langle \Sigma, Q_1 \cup Q_2, \delta, \{q_{01}\}, F_2 \rangle$$

s přechodovou funkcí $\delta : (Q_1 \cup Q_2) \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^{Q_1 \times Q_2}$

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \{\delta_1(q,a)\} & \text{pokud} \quad q \in Q_1 \\ \{\delta_2(q,a)\} & \text{pokud} \quad q \in Q_2 \end{cases}$$

$$\delta(q,\varepsilon) = \begin{cases} \{q_{02}\} & \text{pokud} \quad q \in F_1 \\ \emptyset & \text{pokud} \quad q \notin F_1 \end{cases}$$

- *Kleeneho uzávěr*

  Pokud je L regulární, pak je L^* regulární.

  Předpokládáme, že existuje automat A tak, že $L = L(A)$

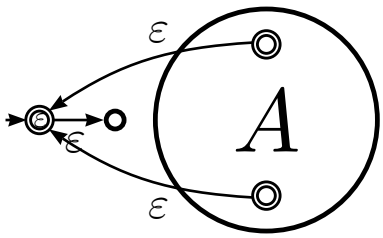
  Poznámka 11: Automat rozpoznávající L^* musí mít možnost dostat se z koncového stavu zpět na začátek.

  Pro automat $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ je potřeba zavést nový počáteční stav $q_T \notin Q$. Konstruovaný εKNA bude vypadat následovně:

  $$A' = \langle \Sigma, Q \cup \{q_T\}, \delta', \{q_T\}, F \cup \{q_T\} \rangle$$

  s přechodovou funkcí δ':

  $$\begin{array}{lll} \delta'(q,a) = \{\delta(q,a)\} & \text{pokud} & q \in Q \\ \delta'(q,\varepsilon) = \emptyset & \text{pokud} & q \in Q \backslash F \\ \delta'(q,\varepsilon) = \{q_T\} & \text{pokud} & q \in F \\ \delta'(q_T,\varepsilon) = \{q_0\} & & \\ \delta'(q_T,a) = \emptyset & a \in \Sigma & \end{array}$$



17.2. Další uzávěrové vlastnosti

- *Množinový rozdíl*
  Jsou-li L_1 a L_2 regulární, pak $L_1 \backslash L_2 = L_1 \cap (\Sigma^* \backslash L_2)$ je regulární.
- *Kleeneho pozitivní uzávěr*
  Je-li L regulární, pak $L^+ = (L^* \backslash \{\varepsilon\}) \cup L$ je regulární.
- *N-tá mocnina jazyka*
  L^n ... plyne z uzavření na produkt
- *Jazyk reverzních řetězců*
  $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$
  Zdůvodníme pomocí konstrukce automatu rozpoznávající L^R (viz cvičení 6)
- *Jazyk sufixů*
  $Sfx(L) = \bigcup_{w \in L} Sfx(w)$

  Důkaz 17..4: Pro L uvažujeme A tak, že $L = L(A)$. Navíc A je KDA s úplnou přechodovou funkcí takový, že všechny jeho stavy jsou dosažitelné.
  Námi hledaný automat je KNA definován jako:
  $$A' = \langle \Sigma, Q, \delta, Q, F \rangle$$
  s přechodovou funkcí
  $$\delta(q, a) = \{\delta(q, a)\}$$

  Poznámka 12: Všechny stavy jsou označeny za počáteční, aby měl automat možnost skočit do libovolné fáze výpočtu a tím "uhádnout" vynechané znaky řetězce, jehož sufix zkoumáme.

- *Jazyk prefixů*
  $$\begin{aligned} Pfx(L) &= \bigcup_{w \in L} Pfx(w) \\ Pfx(L) &= (Sfx(L^R))^R \end{aligned}$$
  Důkaz plyne z uzavření na Sfx a reverzní řetězec.
- *Jazyk infixů*
  $$Ifx(L) = Pfx(Sfx(L))$$
  Důkaz je taktéž zřejmý.

17.3. Pumping lemma

Poznámka 13: Jen drobné upozornění na začátek: jedná se o tvrzení ve tvaru když $\rightarrow$ pak, tj. "Pokud je L regulární, pak ..."

Věta 33: Nechť L je regulární jazyk nad Σ. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že pro každý řetězec $w \in L$ délky alespoň n platí, že existují $x, y, z \in \Sigma^*$ tak, že jsou splněny podmínky:

1. $w = xyz$

2. $|xy| \leq n$
3. $y \neq \varepsilon$
4. pro každé $i \geq 0$ platí, že $xy^i z \in L$

Důkaz 17..5: Rozlišíme dva případy.

- *L je konečný*

  pak je tvrzení triviální. Hledané n je ve tvaru $l+1$, kde l je délka nejdelšího řetězce z L. Pak není v L žádný řetězec delší než n a tvrzení $1. - 4.$ platí triviálně.

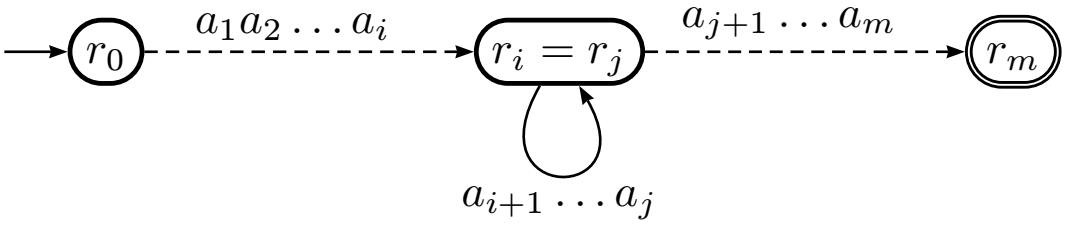
- *L je nekonečný*

  pak pro něj existuje KDA s množinou stavů Q tak, že $L(A) = L$. Položíme $n = |Q|$.

  Pro každý řetězec $w = a_1 a_2 \cdots a_m$ kde $m \geq n$ existuje přijímací výpočet délky m:

  $$\langle q_0, w\rangle = \langle r_0, a_1 \cdots a_m\rangle, \langle r_1, a_2 \cdots a_m\rangle \ldots \langle r_{m-1}, a_m\rangle, \langle r_m, \varepsilon\rangle$$

  Jelikož je $m \geq n$, tak nevyhnutelně musí existovat alespoň 1 stav, který je v tomto přijímacím výpočtu zopakován.



Následně dle obrázku mějme:

$$\begin{aligned} x &= a_1 a_2 \ldots a_i \\ y &= a_{i+1} a_{i+2} \ldots a_j \\ z &= a_{j+1} a_{j+2} \ldots a_m \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že všechny podmínky Pumping lemmy jsou splněny.

Příklad 33: Jazyk $L = \{a^n b^n |$ kde $n \in N\}$ není regulární.

Důkaz 17..6: Předchozí příklad 33 není regulární, což dokážeme sporem. Nechť je tedy L regulární a dle předchozí věty existuje číslo n tak, že vezmeme řetězec $a^n b^n = xyz$ tak, že $x = a^k, y = a^l, z = a^{n-k-l} b^n$.

Tím jsme došli ke sporu, protože $xy^i z$ pro každé $i \geq 0$ obecně nemusí patřit do jazyku L (ovlivníme tím počet a v řetězci a tím se počet znaků a a b nerovná).

18. Minimalizace KDA

Poznámka 14: Pro regulární jazyk L existuje více, než jeden automat A tak, že $L = L(A)$ a navíc můžeme mít A_1, A_2 tak, že $L(A_1) = L(A_2)$, ale $|Q_1| < |Q_2|$.

18.1. Zprava invariantní ekvivalence

Definice 20: Předpokládejme, že máme $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ a relaci ekvivalence $\Theta \subseteq Q \times Q$ nazveme *zprava invariantní ekvivalencí* vzhledem k δ, pokud platí, že $\langle q, r \rangle \in \Theta$ a $a \in \Sigma$, pak $\langle \delta(q, a), \delta(r, a) \rangle \in \Theta$.

Pravá invariance reprezentuje přirozenou vlastnost, kterou musí mít relace nerozlišitelnosti stavů.

Mezními případy invariantních relací zprava jsou:

1. identita $\Theta = \{\langle q, q \rangle | \quad q \in Q\}$
2. $\Theta = Q \times Q$

18.2. Faktorizace automatu

Definice 21: Mějme KDA $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ a zprava invariantní ekvivalenci Θ vzhledem k δ, pak zavedeme $A/\theta = \langle \Sigma, Q/\Theta, \delta^{A/\Theta}, [q_0]_\Theta, F^{A/\Theta} \rangle$, kde

$$\delta^{A/\Theta} = ([q]_\Theta, a) = [\delta(q, a)]_\Theta \text{ a } F^{A/\Theta} = \{[q]_\Theta | \quad q \in F\}$$

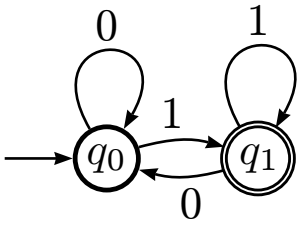
Věta 34: Automat A je dobře definovaný KDA.

Důkaz 18..1: Větu 34 si ověříme tak, že definice $\delta^{A/\Theta}$ nezávisí na výběru prvků z třídy rozkladu dle Θ.

Mějme $[q]_\Theta = [r]_\Theta$, to jest $\langle q, r \rangle \in \Theta$. Potom pro $a \in \Sigma$ platí $\langle \delta(q, a), \delta(r, a) \rangle \in \Theta$, to jest $[\delta(q, a)]_\Theta = [\delta(r, a)]_\Theta$.

Obecně $L(A/\Theta) \neq L(A)$. Snažíme se najít co největší Θ, tak aby tato rovnost platila.

Příklad 34: $\Theta = Q \times Q$



Věta 35: Platí, že $(\delta^{A/\Theta})^*([q]_\Theta, x) = [\delta^*(q, x)]_\Theta$ pro každý $x \in \Sigma^*$.

Důkaz 18..2: Dokážeme indukcí přes délku řetězce.

- Tedy $x = \varepsilon$, pak
$$(\delta^{A/\Theta})^*([q]_\Theta, \varepsilon) = [q]_\Theta = [\delta^*(q, \varepsilon)]_\Theta$$
- pak nechť toto tvrzení platí pro $u \in \Sigma^*$ a řetězec $x = au$, kde $a \in \Sigma$.
$$(\delta^{A/\Theta})^*([q]_\Theta, au) = (\delta^{A/\Theta})^*(\delta^{A/\Theta}([q]_\Theta, a), u) =$$
$$= (\delta^{A/\Theta})^*([\delta(q, a)]_\Theta, u) = [\delta^*(\delta(q, a), u]_\Theta = [\delta^*(q, au)]_\Theta$$

Definice 22: Mějme KDA $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ s úplnou přechodovou funkcí. Pro stavy $q, r \in Q$ položme $q \equiv_A r$, pokud pro každý řetězec $x \in \Sigma*$ platí, že $\delta^*(q, x) \in F$, právě když $\delta^*(r, x) \in F$.

Věta 36: $\equiv_A$ je zprava invariantní operace.

Důkaz 18..3: Dokazujeme větu 36. Důkaz reflexivity je zřejmý, stejně tak symetrie i tranzitivita. Nechť $q \equiv_A r$ a máme $a \in \Sigma$. Máme dokázat, že $\delta(q, a) \equiv_A \delta(r, a)$. Pro každé $x \in \Sigma^*$ platí:

$$\begin{aligned} \delta^*(\delta(q, a), x) &= \delta^*(q, ax) \\ \delta^*(\delta(r, a), x) &= \delta^*(r, ax) \end{aligned}$$

Užitím faktu, že $\delta^{*(q,ax} \in F$ dostaneme $\delta^*(r, ax) \in F$, tedy $\delta^*(\delta(q, a), x) \in F$ právě tehdy, když $\delta^*(\delta(r, a), x) \in F$, to jest $\delta(q, a) \equiv_A \delta r, a$ a tedy $A/\equiv_A$.

Věta 37: Pro $A/\equiv_A$ a stav $q \in Q$ platí, že $q \in F$ právě, když $[q]_{\equiv_A} \in F^{A/\equiv_A}$.

Důkaz 18..4: Předchozí větu dokážeme tak, že dokážme implikace z obou stran.

- Implikace zleva doprava („⇒“) plyne z definice.
- Implikace zprava doleva („⇐“): pokud $[q]_{\equiv_A} \in F^{A/\equiv_A}$, pak z definice $\exists r \in F$ tak, že $r \in [q]_{\equiv_A}$. To znamená, že $r \equiv_A q$ pro každý $x \in \Sigma^*$ platí, že $\delta^*(r, x) \in F$ právě tehdy, když $\delta^*(q, x) \in F$, speciálně pro $x = \varepsilon$, navíc $\delta^*(r, \varepsilon) = r \in F$, to jest $\delta^*(q, \varepsilon) = q \in F$.

Důsledek 2: KDA A nazveme redukovaný, pokud je $\equiv_A$ identita.

Věta 38: KDA $A/\equiv_A$ je redukovaný.

Důkaz 18..5: Automat $A \equiv_A$ označme jako B, následně prokážeme, že $\equiv_B$ je identita, tozn., že pokud $[q]_{\equiv_A} \equiv_B [r]_{\equiv_A}$, tak pak $[q]_{\equiv_A} = [r]_{\equiv_A}$.
Předpokládejme, že platí $[q]_{\equiv_A} \equiv_B [r]_{\equiv_A}$.

- Pak podle definice $\equiv_B$ tozn, že pro $\forall x \in \Sigma^*$ platí $(\delta^{A/\equiv_A})^*([q]_{\equiv_A}, x) \in F^{A/\equiv_A}$ právě, když $(\delta^{A/\equiv_A})^*([r]_{\equiv_A}, x) \in F^{A/\equiv_A}$.
- S využitím věty 35 pro každé $x \in \Sigma^*$:
$$[\delta^*(q, x)]_{\equiv_A} \in F^{A/\equiv_A} \text{ právě tehdy, když } [\delta^*(r, x)]_{\equiv A} \in F^{A/\equiv_A}$$
Následně aplikujeme větu 37:
$$\delta^*(q, x) \in F \text{ právě tehdy, když } \delta^*(r, x) \in F \text{ , tozn., že } q \equiv_A r \text{ a tedy } [q]_{\equiv_A} = [r]_{\equiv_A}$$

Věta 39: $L(A) = L(A/\equiv_A)$, což plyne užitím vět 37 a 35.

Důkaz 18..6: Máme dokázat, že $\delta^*(q_0, x) \in F$, právě, když $(\delta^{A/\equiv_A})^*([q_0]_{\equiv_A}, x) \in F^{A/\equiv_A}$.
Z věty 35: $\delta^*(q_0, x)$ právě, když $[\delta^*(q_0, x)]_{\equiv_A} \in F^{A/\equiv_A}$, to ale platí z věty 37.

Důsledek 3: Obecně platí, že $L(A) \subseteq L(A/\Theta)$.

Věta 40: Pokud je každý stav automatu A dosažitelný, pak má $A/\equiv_A$ také každý stav dosažitelný.

18.3. Algoritmus pro hledání redukovaného automatu

1. Označíme $A/\equiv_A$ jako A^R, konstruujeme posloupnost rozkladů na Q tak, že $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i = \varphi_{i+1}$, kde $\varphi_1 = \{F, Q \setminus F\}$
2. Při odvození rozkladů φ_i z φ_{i-1} postupujeme následovně:
   Pro $\forall R \in \varphi_{i-1}$ provedeme:
   (a) Vezmeme libovolný stav $r \in R$.
   (b) Položíme $S = \{s \in R|$ pro každé $a \in \Sigma$ platí také, že $\delta(S, a) \in [\delta(R, a)]\}$.
   (c) Pokud $S = R$, pak vložíme R do φ_i, pokud $S \subseteq R$, pak vložíme S a $R \setminus S$ do φ_i.

Věta 41: Korektnost algoritmu pro nalezení $\equiv_A$: pokud $\varphi_i = \varphi_{i+1}$, pak $\varphi_i = Q/\equiv_A$.

Důkaz 18..7: Ověříme, že $q \equiv_A r$ právě, když $q \in [r]_{\varphi_i}$.
Pokud $q \in [r]_{\varphi_i}$, pak z toho, jak jsme zavedli posloupnost rozkladů, plyne, že nemůže platit $q \equiv_A r$.
Pokud $q \equiv_A r$, pak $q \in [r]_{\equiv_A}$ a zbývá dokázat opačnou implikaci, což provedeme indukcí přes délku řetězce:

- Máme libovolná $q, r \in Q$.
- Pokud $q \in [r]_{\varphi_i}$, pak $\delta^*(q, x) \in F$ právě, když $\delta^*(r, x) \in F$.

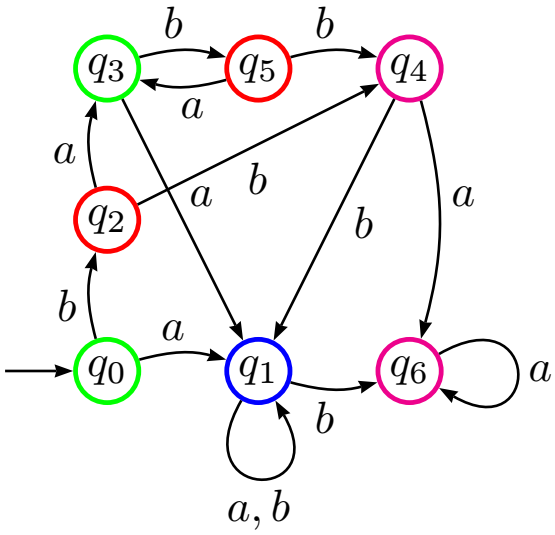
1. Pro $x = \varepsilon$ je situace triviální. Máme dokázat, že $q \in F$ právě, když $r \in F$, ale to obecně platí, protože $\varphi_i = \{F, Q \setminus F\}$
2. Pro $x \in \Sigma^*, x = au$, kde $a \in \Sigma, u \in \Sigma*$. Z předpokladu, že $q \in [r]_{\varphi_i}$ a $\varphi_i = \varphi_{i+1}$ platí, že $[\delta(q, a)]_{\varphi_i} = [\delta(r, a)]_{\varphi_i}$, to jest $\delta(q, a) \in [\delta(q, a)]_{\varphi_i}$ - zde použijeme indukční předpoklad.

$$\delta^*(\delta(q, a)r) \in F \text{ právě tehdy, když } \delta^*(q, x) \in F$$
$$\delta^*(\delta(r, a)r) \in F \text{ právě tehdy, když } \delta^*(r, x) \in F$$

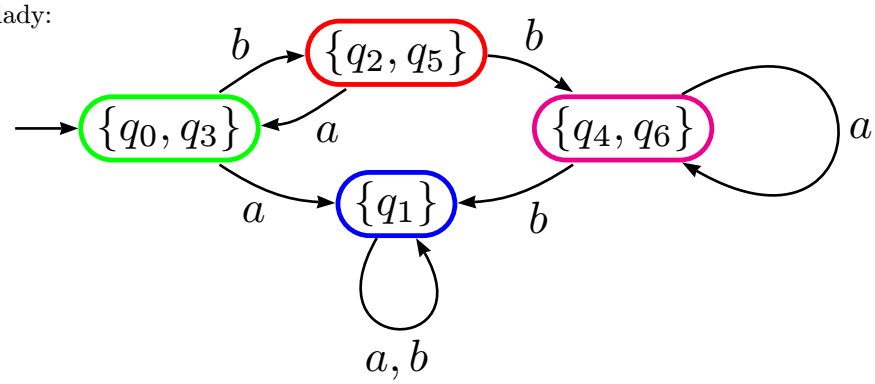
Tvrzení dokázáno pro každé x,tedy $q \equiv_A r$.

Příklad 35: Mějme výraz $b(ab)^*ba^*$. Dále

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_5\}, \{q_4, q_6\}\} \\
\varphi_2 &= \{\{q_0, q_1, q_3\}, \{q_2.q_5\}, \{q_4, q_6\}\} \\
\varphi_3 &= \{\{q_0, q_3\}, \{q_1\}, \{q_2.q_5\}, \{q_4, q_6\}\}
\end{aligned}$$



Následně rozklady:



	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0	*	X	X	*	X	X	X
q_1	-	*	X	X	X	X	X
q_2	-	-	*	X	X	*	X
q_3	-	-	-	*	X	X	X
q_4	-	-	-	-	*	X	*
q_5	-	-	-	-	-	*	X
q_6	-	-	-	-	-	-	*

Tabulka 4. Tabulkový popis rozkladů stavů

V tabulce 4. se objevují znaky X na pozicích, pro které platí, že:

$$T[q,x] \quad \text{kde platí} \quad q \in F, x \notin F$$
$$\text{nebo} \quad q \notin F, x \in F$$

Projdeme prázdná místa, $T[q,r]$ = „prázdno, pokud“ $\exists a \in \Sigma$ tak, že:

- buď $T[\delta(q,a), \delta(r,a)] = X$
- nebo $T[\delta(r,a), \delta(q,a)] = X$

Pokud ano, tak „X“ na pozici $[q,r]$.

19. Izomorfismus automatů

Pro KDA A_1 a A_2 mějme zobrazení

$$h: \quad Q_1 \to Q_2$$

a toto zobrazení označme jako *izomorfismus*, pokud platí:

1. Zobrazení h je bijektivní.
2. Počáteční stav automatu A_1 e zobrazí na počáteční stav automatu A_2.
3. Pro všechna $q \in Q$ platí, že $Q \in F_1$ právě, pokud $q \in F_2$.
4. Zobrazení h je kompatibilní s přechodovou funkcí.

Věta 42: Jsou-li dva automaty izomorfní, pak $L(A_1) = L(A_2)$.

Definice 23: Mějme regulární jazyk L, pak KDA s úplnou přechodovou funkcí je *minimálním automatem* pro L, pokud $L(A) = L$ a pro každý KDA B takový, že $L(B) = L$ platí, že B má tolik stavů jako A.

Věta 43: Je-li automat A minimální pro jazyk L, pak je *redukovaný*a nemá nedosažitelné stavy.

Věta 44: Pokud jsou automaty A, B KDA bez nedosažitelných stavů a pokud jsou tyto automaty navíc redukované a existuje stejný jazyk, který generují, pak jsou izomorfní.

Věta 45: A je minimální automat pro jazyk L právě tehdy, když A neobsahuje nedosažitelné stavy a je redukovaný.

20. Bezkontextové gramatiky

V této části se vrátíme k problematice bezkontextových gramatik. Před dalším čtením je potřeba ovládat základní pojmy, zejména

- Bezkontextové gramatiky
- Bezkontextové jazyky
- P-derivace
- Odvozování řetězců
- Věty a větné formy

Navíc si zavedeme duální pojem k derivaci - *redukci*.

Definice 24: Řetězec v lze redukovat na řetězec u, pokud $u \Rightarrow_G^* v$. Značíme $v \Leftarrow_G^* u$.

V následujícím příkladě si ukážeme problém nejednoznačnosti bezkontextových gramatik.

Příklad 36: Mějme gramatiku:

$G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$
$\Sigma = \{a, b, c, 0, 1, +, -, *, /, (,)\}$
$N = \{S, E, C, V\}$
$P = \{ \quad S \to E,$
$\quad E \to E * E | E/E | E + E | E - E | -E | C | V | (E),$
$\quad C \to 0C | 1C | 0 | 1,$
$\quad V \to aV | bV | cV | a | b | c \quad \}$

Uvažujme větu $w = ac * 1 - c$. K ní se lze dostat buď:

$S \Rightarrow_G E \Rightarrow_G E * E \Rightarrow_G V * E \Rightarrow_G V * E - E \Rightarrow_G V * E - V \Rightarrow_G aV * E - V \Rightarrow_G ac * E - V \Rightarrow_G ac * C - V \Rightarrow_G ac * C - c \Rightarrow_G$ *ac*1-c*

nebo

$S \Rightarrow_G E \Rightarrow_G E * E \Rightarrow_G V * E \Rightarrow_G aV * E \Rightarrow_G ac * E \Rightarrow_G ac * E - E \Rightarrow_G ac * C - E \Rightarrow_G ac * 1 - E \Rightarrow_G ac * 1 - V \Rightarrow_G$ *ac*1-c*

Ačkoliv odvozujeme stejnou větu, můžeme zde pozorovat jakousi nejednoznačnost, způsobenou tím, že neterminály derivujeme v libovolném pořadí.

Tento problém bychom mohli vyřešit použitím tzv. lineární bezkontextové gramatiky, tedy takové, jejíž odvozovací pravidla obsahují pouze jeden neterminální symbol na pravé straně.

Příklad 37: Lineární gramatika může vypadat např. takto:
$G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$
$P = \{ \quad S \to abB,$
$\quad A \to aaBb | \varepsilon,$
$\quad B \to bbAa \quad \}$
$L(G) = \{ab(bbaa)^n bba(ba)^n \mid n \geq 0\}$

Ovšem k nejednoznačnosti může stejně dojít, pokud by se z různých neterminálních symbolů daly odvodit stejná slova.

Příklad 38: Příklad nejednoznačné lineární gramatiky:
$G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$
$P = \{ \quad S \to aA \mid aB,$
$\quad A \to bA | a,$
$\quad B \to bB | a \quad \}$

Uvažujme slovo $w = abba$, ke kterému lze dojít buď:

$S \Rightarrow_G aA \Rightarrow_G abA \Rightarrow_G abbA \Rightarrow_G abba$

nebo:

$S \Rightarrow_G aB \Rightarrow_G abB \Rightarrow_G abbB \Rightarrow_G abba$

Mějme bezkontextovou gramatiku $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$.

Definice 25: P-derivace $x_0, \ldots, x_k$ se nazývá *nejlevější* P-derivace, pokud pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ platí, že x_{i-1} je ve tvaru uAv, kde $u \in \Sigma^*$, $A \in N$, $v \in (\Sigma \cup N)^*$ a x_i je ve tvaru uyv, kde $A \to y \in P$.

Poznámka 15: Řetězci u se říká uzavřená forma a řetězci Av otevřená forma (větné formy uAv). Odvození pomocí nejlevější derivace značíme $u \Rightarrow_{G,l} v$.

Věta 46: Mějme $v \in \Sigma^*$ a $X \in N$. Pokud existuje P-derivace $X, \ldots, v$, pak existuje nejlevější P-derivace $X, \ldots, v$ používající stejnou množinu pravidel jako výchozí P-derivace.

Důkaz 20..1: Tvrzení dokážeme indukcí přes délku P-derivace

- Pro délku 0 platí triviálně.
- Předpokládejme, že tvrzení platí pro P-derivaci délky $\leq n$.

  Uvažujme P-derivaci délky $n+1$, ve tvaru $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$. Pokud x_1 vzniklo z x_0 použitím pravidla $X \to w_0 X_{i_1} w_1 X_{i_2} \cdots X_{i_k} w_k$ kde $w_0, \ldots, w_j \in \Sigma^*,\ X_{i_j} \in N,\ 1 \leq j \leq k$ pak X_{n+1} je ve tvaru $w_0 u_1 w_1 u_2 w_2 \cdots w_k$ tak, že $x_{i_j} \Rightarrow_G^* u_j$.

  To znamená, že existují P-derivace délek $\leq n$: $X_{i_j}, \ldots, u_j$

  Z indukčního předpokladu: existují nejlevější P-derivace $X_{i_j}, \ldots, u_j$ používající stejnou množinu pravidel.

  Dále platí:

  $$\begin{aligned} X &\Rightarrow_{G,l} w_0 X_{i_1} w_1 X_{i_2} \ldots X_{i_k} w_k \\ &\Rightarrow_{G,l} w_0 u_1 w_1 X_{i_2} \ldots X_{i_k} w_k \\ &\Rightarrow_{G,l} w_0 u_1 w_1 u_2 \ldots X_{i_k} w_k \\ &\ldots \\ &\Rightarrow_{G,l} w_0 u_1 w_1 u_2 w_2 \ldots u_k w_k \end{aligned}$$

  To jest, existuje nejlevější P-derivace $X, \ldots, w_0 \cdots w_k$

Příklad 39: Uvažujme gramatiku z příkladu 36

$S \Rightarrow_G^* E + C$ tady problém není
$S \Rightarrow_{G,l}^* E + C$ tento výraz už smysl nedává. Pomocí nejlevější derivace bychom zákonitě museli nejdříve derivovat E na levé straně výrazu $E + E$

Poznámka 16: Lze zavést duálně nejpravější derivaci.

Příklad 40: Zase se odkážeme na příklad 36.

Výraz $10 + (ca * 110)$ má jedinou nejlevější derivaci

Naopak $a + 10 * c$ jich má několik:

$S \Rightarrow_{G,l} E \Rightarrow_{G,l} E+E \Rightarrow_{G,l} V+E \Rightarrow_{G,l} a+E \Rightarrow_{G,l} a+E*E \Rightarrow_{G,l} a+C*E \Rightarrow_{G,l} a+1C*E \Rightarrow_{G,l} a+10*E \Rightarrow_{G,l} a+10*V \Rightarrow_{G,l} a+10*c$

nebo:

$S \Rightarrow_{G,l} E \Rightarrow_{G,l} E*E \Rightarrow_{G,l} \ldots \Rightarrow_{G,l} a+10*c$ (už ve druhém odvození můžeme pozorovat rozdíl)

Je to způsobeno jinou nejednoznačností než tou, kterou jsme eliminovali pomocí nejlevější derivace.

20.1. Derivační stromy

Slouží ke grafickému znázornění nejlevějších derivací. Mějme gramatiku $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$.

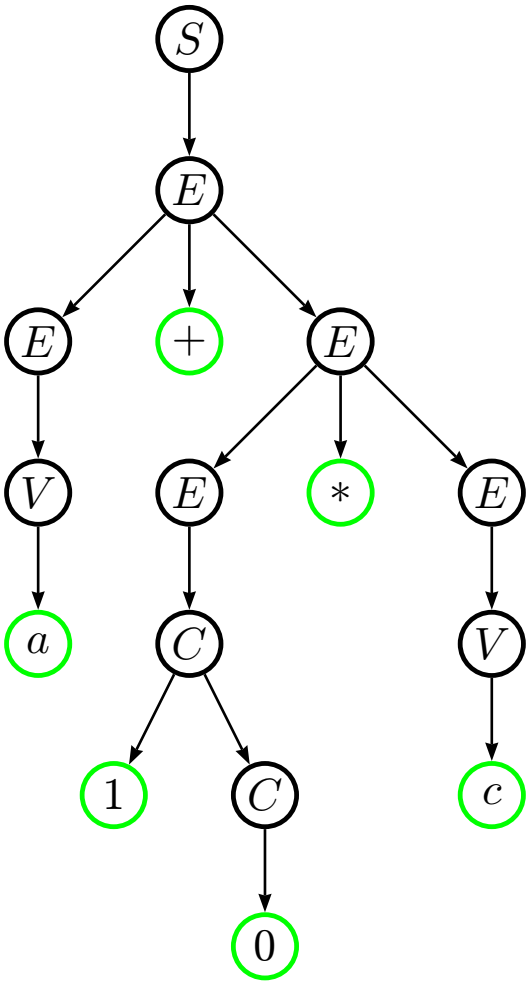
Definice 26: Derivačním stromem slova $x \in (\Sigma \cup N)^*$ z $X \in N$ podle pravidel z G je každý strom splňující:

1. každý vnitřní uzel je ohodnocen neterminálem
2. kořen je ohodnocen X

3. pokud je vnitřní uzel označený $A \in N$ a jeho potomci jsou zleva doprava označeni $X_1, \ldots, X_k \in N \cup \Sigma$ pak existuje pravidlo $A \to X_1 \cdots X_k \in P$
4. zřetězením hodnot v listech při průchodu stromu do hloubky a zleva doprava získáme řetězec x

Příklad 41: Opět pracujeme s gramatikou z příkladu 36.

$S \Rightarrow^*_{G,l} a + 10 * c$ Derivační strom bude vypadat následovně:



Věta 47: Pokud $X \Rightarrow^*_{G,l} x$ pak existuje derivační strom x z X podle G.

Důkaz 20..2: Tvrzení dokážeme jak jinak, než indukcí přes délku P-derivace.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro derivace délky n a méně.

Mějme derivaci $X = x_0, \ldots, x_{n+1}$ délky $n+1$ pak existuje pravidlo $x \to x_1 \in P$

$x_1 = w_0 X_1 w_1 X_2 w_2 \ldots X_k w_k$ kde $w_i \in \Sigma^*,\ X_i \in N$

x_{n+1} je ve tvaru $w_0u_1w_1u_2 \dots u_kw_k$

$X_i \Rightarrow^*_{G,l} u_i \dots$ délky nejvýše n. Z indukčního předpokladu vyplývá, že existují derivační stromy $X_i \Rightarrow^*_{G,l} u_i$.

Věta 48: Pokud existuje derivační strom x z X podle G, pak $X \Rightarrow^*_{G,l} x$

Důkaz 20..3: Dokážeme indukcí přes výšku stromu.

- Pro 0 je to jasné
- Předpokládejme, že tvrzení platí pro stromy výšky n a méně.

  Mějme strom výšky $n+1$, podle tohoto víme, jak vypadal první krok derivace $X \to w_0X_0w_1 \dots$.

  Z indukčního předpokladu existují derivace $X_i \Rightarrow^*_{G,l} u_i$ a proto

$$\begin{aligned} X &\Rightarrow_{G,l} w_0X_1w_1X_2 \dots X_{i_k}w_k \\ &\Rightarrow_{G,l} w_0u_1w_1X_2 \dots X_{i_k}w_k \\ &\dots \\ &\Rightarrow_{G,l} w_0u_1w_1u_2w_2 \dots u_kw_k \end{aligned}$$

Věta 49: $S \Rightarrow^*_{G,l} u$ právě když existuje derivační strom u z S podle G.

20.2. Jednoznačné a nejednoznačné bezkontextové gramatiky

Definice 27: Bezkontextová gramatika $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ se nazývá nejednoznačná, pokud existuje věta $x \in L(G)$, která má více než jeden derivační strom z S podle G. V opačném případě se nazývá jednoznačná bezkontextová gramatika.

Definice 28: Bezkontextový jazyk L se nazývá jednoznačný pokud existuje jednoznačná gramatika G tak, že $L = L(G)$.

Definice 29: Bezkontextový jazyk L se nazývá *inherentně* nejednoznačný, pokud neexistuje žádná jednoznačná gramatika G taková, že $L = L(G)$.

Věta 50: Každý regulární jazyk je jednoznačný.

Důkaz 20..4: Pokud L je regulární, pak existuje KDA A s úplnou přechodovou funkcí δ. Pak pro A lze sestavit gramatiku G tak, že bude platit $L(A) = L(G)$.

Z toho jak byla gramatika G konstruována plyne, že pro každý $A \in N$ a $a \in \Sigma$ existuje nejvýše jedno pravidlo $A \to aB$. To jest, pro $x \in L$ existuje právě jedna P-derivace.

Důkaz 20..5:

Příklad 42: $L = \{a^nb^nc^pd^p \mid n, p \geq 0\}$ je inherentně nejednoznačný.

20.3. Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků

- *Sjednocení*

Mějme dány bezkontextové jazyky L_1, L_2 a korespondující bezkontexotvé gramatiky G_1 a G_2. Lze předpokládat, že množiny stavů obou gramatik jsou disjunktní (tj. $N_1 \cap N_2 = \emptyset$).

Dále uvažujeme gramatiku $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$, kde
$N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}$
$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}$

Platí, že $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$.

- *Produkt*

  L_1 a L_2 jsou bezkontextové jazyky, G_1 a G_2 jsou odpovídající bezkontextové gramatiky.

  Zavedeme gramatiku $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$, kde
  $N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}$
  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
  $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}$

  Platí, že $L(G) = L(G_1) \cdot L(G_2)$.

- *Kleeneho uzávěr*

  Mějme bezkontextový jazyk L a k němu odpovídající gramatiku G.

  Vytvoříme novou gramatiku $G' = \langle N \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \to \varepsilon \mid SS'\}, S' \rangle$.

- *Pozitivní uzávěr*

  Podobné jako u Kleeneho uzávěru, akorát výsledná gramatika se bude lišit v množině pravidel.

  $G' = \langle N \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \to S \mid SS'\}, S' \rangle$

- *Průnik*

  $\mathcal{L}_2$ není uzavřená na průnik.

  Příklad 43: Uvedeme si příklad, který nám tvrzení potvrdí.
  $\Sigma = \{a, b, c\}$
  $L_1 = \{a^n b^n c^* \mid n \geq 0\}$
  $L_2 = \{a^* b^n c^n \mid n \geq 0\}$

  $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$

  Z toho také plyne, že není uzavřená ani na Komplement či Množinový rozdíl (De Morganovy zákony).

20.4. Bezkontextové gramatiky v programátorské praxi

BNF(Backus-Naurova forma): Vytvořili ji John Backus a Peter Naur. Zápis se řidí několika pravidly:

- neterminální symboly se zapisují do $\langle \ldots \rangle$
- používá se ::= místo $\to$
- terminální symboly se píší do uvozovek (" $*$ ")
- pravidla se oddělují pomocí |

Příklad 44: Uvedeme si příklad zápisu gramatiky pomocí BNF.

$\langle expr\rangle$ ::= "("$\langle expr\rangle$")" | $\langle expr\rangle\langle op\rangle\langle expr\rangle$ | $\langle number\rangle$
$\langle op\rangle$ ::= " + " | " − " | " ∗ " | "/"
$\langle number\rangle$ ::= $\langle digit\rangle\langle number\rangle$ | $\langle digit\rangle$
$\langle digit\rangle$ ::= "0" | ... | "9"

Extended BNF: Zavedl Niklaus Wirth v roce 1977. Odpovídá BNF, pouze zjednodušuje její notaci a to tak že:

- každé pravidlo je ukončeno znakem ";"
- terminální symboly se píší do uvozovek, neterminální ne
- [,] značí volitelnou část výrazu
- {, } indukují možnost opakování
- (,) jsou použity pro shlukování výrazů
- místo ::= se používá =
- terminální a neterminální symboly se oddělují čárkou

Příklad 45: Gramatiku z předchozího příkladu můžeme zapsat pomocí EBNF takto:

$expr$ = "(", $expr$, ")" | $expr, op, expr$ | $number$;
op = " + " | " + " | " − " | " ∗ " | "/";
$number$ = [$signum$], $digit$, {$digit$};
$digit$ = "0" | ... | "9";
$signum$ = " + " | " − ";

21. Nedeterministický zásobníkový automat

Hledáme silnější analytický aparát, než jsou KDA, protože ty v určitých situacích selhávají.

Příklad 46: Mějme jazyk

$$L = \{x \in \Sigma^* | \quad x \text{ je korektně uzávorkovaný výraz}\}$$

Následně podrobněji

$$L = \{x \in \Sigma^* | \Sigma = \{(,), [,]\} \quad x \text{ je korektně uzávorkovaný výraz}\}$$

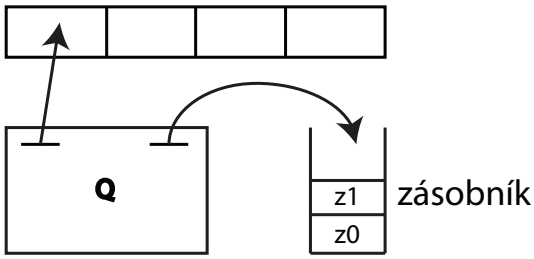
Do tohoto jazyka patří například řetězce $()[], ([]), \ldots$, ale nepatří do něj řetězce $()),][][, \ldots$

Definice 30: Jako *nedeterministický zásobníkový automat* označme následující strukturu:

$$A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, z_0, F\rangle$$

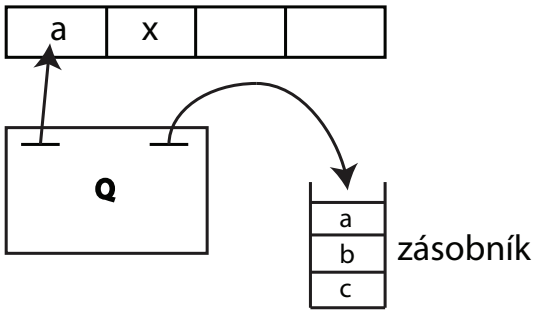
Nyní si popišme význam nám dosud neznámých prvků tohoto automatu:

Γ	–	abeceda zásobnákových symbolů.
z_0	–	počáteční zásobníkový symbol.
Q	–	konečná množina stavů.
δ	–	přechodová funkce ve tvaru $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$



Obrázek 7. Náčrt zásobníkového automatu.

Navíc $\langle \sigma, abc \rangle \in \delta(q, a, d)$ znamená slovně: „Ze stavu q po přečtení a ze vstupu a symbolu d ze zásobníku přejde automat A do stavu σ a na zásobník zapíše řetězec "abc"." Mějme na paměti, že tento řetězec je na zásobník zapsán „obráceně".



Obrázek 8. Vkládání hodnot na zásobník u NZA.

21.1. Reprezentace NZA

21.1.1. Přechodová tabulka

V přechodové tabulce řádky odpovídají stavům a sloupce odpovídají prvkům $(\Sigma \cup \{\varepsilon\} \times \Gamma$.

Příklad 47:

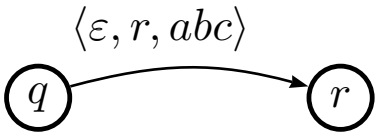
$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ \Gamma &= \{0, 1\} \end{aligned}$$

	$\langle a,0\rangle$	$\langle b,0\rangle$	$\langle c,0\rangle$	$\langle a,1\rangle$	$\langle b,1\rangle$	$\langle c,1\rangle$
$\to q_0$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
q_1	$\cdots$	$\{\langle r,w\rangle\}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Tabulka 5. Ukázka přechodové tabulky pro NZA

21.1.2. Přechodový diagram

Přechodové diagramy NZA jsou velmi podobné diagramům KA.



Definice 31: Konfigurací NZA je každý prvek z množiny $Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$, tedy $\langle q, abc, 001\rangle \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ znamená, že NZA je ve stavu q, na vstupu zbývá přečíst řetězec „abc“ a na zásobníku je řetězec „001“.

Pro konfigurace $\langle q_i, w_i, x_i\rangle$ a $\langle q_j, w_j, x_j\rangle$ klademe $\langle q_i, w_i, x_i\rangle \vdash \langle q_j, w_j, x_j\rangle$ právě, když platí:

- $x_i = zy$,kde $z \in \Gamma, y \in \Gamma^*$
- $w_i = aw_j$,kde $a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\}), w_j \in \Sigma^*$
- $\langle q_j, x\rangle \in \delta(q_i, a, z)$

Přičemž $x_j = xy$.

Reflexivní a tranzitivní uzávěr $\vdash$ označíme $\vdash^*$ a platí:

$$\langle q_i, w_i, x_i\rangle \vdash^* \langle q_j, w_j, x_j\rangle \text{ právě, když}$$
$$\langle q_i, w_i, x_i\rangle \vdash \cdots \vdash \langle q_j, w_j, x_j\rangle$$

Pokud $\langle q_i, w_i, x_i\rangle \vdash^* \langle q_j, w_j, x_j\rangle$ tak říkáme, že existuje výpočet NZA, kterým přejde tento NZA z $\langle q_i, w_i, x_i\rangle$ do $\langle q_j, w_j, x_j\rangle$.

21.2. Jazyky rozpoznávané NZA

1. Jazyk rozpoznávaný pomocí koncových stavů automatu, tedy:

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | \quad \langle q_0, w, z_0\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, x\rangle, q \in F, x \in \Gamma^*\}$$

2. Jazyk rozpoznávaný vyprazdňováním zásobníků, tedy:

$$N(A) = \{w \in \Sigma^* | \quad \langle q_0, w, z_0\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon\rangle, q \in Q\}$$

21.3. Rozpoznání jazyk způsobem přechodu od koncových stavů k vyprázdnění zásobníku

Věta 51: Ke každému NZA A existuje NZA A', pro který platí $L(A) = N(A') = L(A')$

Důkaz 21..1: Mějme automatu $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, z_0, F\rangle$. Zkonstruujeme automat A' tak, že platí $L(A) = N(A') = L(A')$, načež je třeba vyřešit dvě věci:

1. V případě, že automat A vyprázdní svůj zásobník, ale v koncovém stavu, potom A' nesmí vyprázdnit zásobník, což se řeší přidáním symbolu z'_0 na dno zásobníku automatu A.
2. V případě, že automat A skončí (s prázdným vstupem), tak by v koncovém stavu automat A' měl navíc ještě vyprázdnit zásobník, to ale zajistíme tak, že přidáme slovo $q_\#$, ve kterém A' vyprazdňuje svůj zásobník.

Uvažujme

$$A' = \langle \Sigma, \Gamma \cup \{z'_0\}, Q \cup \{q'_0, q'_\#\}, \delta', q'_0, z'_0, \{q'_\#\}\rangle$$

kde δ' je přechodová funkce, jež vznikne rozšířením původní přechodové funkce o následující přechody:

$$\delta'(q'_0, \varepsilon, z'_0) = \{\langle q_0, z_0, z'_0\rangle\}$$
$$\delta'(q, \varepsilon, z) = \delta(q, \varepsilon, z) \cup \{\langle q'_\#, \varepsilon\rangle\} \text{ pokud } q \in F, a \in \Gamma \cup \{z'_0\}$$
$$\delta'(q'_\#, \varepsilon, z) = \{\rangle q'_\#, \varepsilon\langle\} \text{ pro } z \in \Gamma \cup \{z'_0\}$$

21.4. Rozpoznání jazyk způsobem přechodu od vyprázdnění zásobníku k přijímání koncovými stavy

Věta 52: Ke každému NZA $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, z_0, F\rangle$ existuje NZA A' tak, že $N(A) = L(A') = N(A')$.

Důkaz 21..2: Něchť je dán $A = \langle$ nemám poznačeno $\rangle$. Konstruujeme A', načež je třeba vyřešit dvě věci:

1. V případě, kdy výchozí automat A vyprázdnil vstup a zásobník (to může nastat v libovolném stavu), pak přejdeme do koncového stavu. To řešíme přidáním nového zásobníkového symbolu z'_0.
2. Je potřeba zamezit přijetí slova koncovým stavem bez vyprázdnění zásobníku. To řešíme tak, že máme jediný koncový stav, do kterého přejdeme jen pokud máme prázdný zásobník automatu A.

$$A' = \langle \Sigma, \Gamma \cup \{z'_0\}, Q \cup \{q'_\#, q'_0\}, \delta', q'_0, z'_0, \{q'_\#\}\rangle$$
$$\delta' \text{ je navíc rozšířením } \delta$$
$$\delta'(q'_0, \varepsilon, z'_0) = \{\langle q_0, z_0 z'_0\rangle\}$$
$$\delta'(q, \varepsilon, z'_0) = \{\langle q'_\#, \varepsilon\rangle\}, \quad \forall q \in Q$$

21.5. Automaty pracující s celým zásobníkem

Pro automat pracující s celým zásobníkem má platit, že $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^* \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ s omezením, že přechodová funkce je pro každé $q \in Q, a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$ definována pouze pro konečně mnoho řetězců $z \in \Gamma^*$ a navíc musí platit, že pro každý z konečně mnoha řetězců je $\delta(q, a, z)$ konečná.

Platí také:

$$\langle q_i, w_i, z_i\rangle \vdash \langle q_j, w_j, z_j\rangle$$

1. $z_i = zy, z \in \Gamma^*, y\Gamma^*$
2. $w_i = aw_j, a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$

3. $\langle q_j, x\rangle \in \delta(q_i, a, z)$
4. $z_j = xy$

Věta 53: Pro každý NZA A pracující s celým zásobníkem existuje NZA A' pracující pouze s vrcholem zásobníku.

Důkaz 21..3: Mějme $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, z_0, F\rangle$ pracující s celým zásobníkem. Následně vytvoříme $A' = \langle \Sigma, \Gamma \cup \{z_0'\}, Q \cup \{q_0', q_\#\} \cup Q', q_0', z_0', F\rangle$ pracující s vrcholem zásobníku.

- $q_\#$ je nový nekoncový stav, ve kterém se vyprázdní zásobník automatu.
- Q' je pomocná množina stavu, které potřebujeme pro nahrazení pravidel, která pracují s více zásobníkovými symboly.
- δ' je definována následovně:
  - Na počátku je prázdná.
  - Přidáme přechody $\delta'(q_0', \varepsilon, z_0') = \{\langle q_0, z_0, z_0'\rangle\}$.
    1. Pokud $\langle r, y\rangle \in \delta(q, a, \varepsilon)$ pak pro každé $z \in \Gamma \cup \{z_0'\}$ přidáme $\langle r, yz\rangle$ do $\delta'(q, a, z)$.
    2. Pokud $\langle r, y\rangle \in \delta(q, a, z), z \in \Gamma$, pak přidáme přechod $\langle r, y\rangle \in \delta'(q, a, z)$.
    3. Pokud $\langle r, y\rangle \in \delta(q, a, z), z = z_1 z_2 z_3 \cdots z_n$ pro $n > 1$, v tomto případě zavedeme dosud neuvažované stavy $q_1', q_2', \ldots, q_{n-1}'$ a ty přidáme do Q' a zavedeme přechody $\delta'(q, a, z_1) = \{\langle q_1', \varepsilon, \rangle\}, \delta(q_1', \varepsilon) = \{\langle q_2', \varepsilon\rangle\} = \ldots = \delta'(q_{n-1}', \varepsilon, z_n) = \{\langle q_\#, \varepsilon\rangle\}$
- Zavedeme přechod $\delta'(q, \varepsilon, z_0') = \{\langle q_\#, \varepsilon\rangle\}$.

Důsledek 4: Třídy automatu jsou ekvivalentní.

21.6. Poznámky o vlastnostech NZA

1. Pokud $\langle q, u, x\rangle \vdash^* \langle p, v, y\rangle$ pak $\langle q, uw, x\rangle \vdash^* \langle p, vw, y\rangle$ pro libovolný řetězec $w \in \Sigma^*$.
2. Pokud $\langle q, u, x\rangle \vdash^* \langle p, v, y\rangle$ pak $\langle q, u, xz\rangle \vdash^* \langle p, v, yz\rangle$ pro libovolný řetězec $w \in \Gamma^*$.
3. Pokud $\langle q, uw, x\rangle \vdash^* \langle p, vw, y\rangle$ pak $\langle q, u, x\rangle \vdash^* \langle p, v, y\rangle$.

1.+2. Pokud $\langle q, u, x\rangle \vdash^* \langle p, v, y\rangle$ pak $\langle q, uw, xz\rangle \vdash^* \langle p, vw, yz\rangle$ pro všechny řetězce $w \in \Sigma^*$ a $z \in \Gamma^*$.

1.+3. $\langle q, u, x\rangle \vdash^* \langle p, v, y\rangle$ právě když $\langle q, uw, x\rangle \vdash^* \langle p, vw, y\rangle$.

Poznámka 17: Opak 2. vlastnosti neplatí: Pokud $\langle q, u, xz\rangle \vdash^* \langle p, v, yz\rangle$ pak obecně nelze odvodit, že $\langle q, u, x\rangle \vdash^* \langle p, v, y\rangle$.
Speciálně: $x = y = \varepsilon$

Poznámka 18: $\langle q, u, z\rangle \vdash^* \langle p, \varepsilon, \varepsilon\rangle$: automat je schopen přejít ze stavu q do p, přitom zkonzumuje řetězec u ze vstupu a řetězec z ze zásobníku, ale bez toho, aniž by se někdy během činnosti dostal pod úroveň řetězce z na zásobníku.

21.7. Od gramatik k automatům

Prokážeme, že ke každé bezkontextové gramatice existuje NZA A tak, že $L(G) = N(A)$.

Uvažujme bezkontextovou gramatiku $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$. Zkonstruujeme zásobníkový automat $A = \langle \Sigma, N \cup \Sigma, \{q\}, \delta, q, S, \emptyset \rangle$.

- Zásobníkové symboly se skládají z terminálních a neterminálních symbolů gramatiky
- Množina stavů je jednoprvková
- Množina koncových stavů je prázdná
- S je počáteční zásobníkový symbol
- δ simuluje provádění nejlevějších derivací

$$\delta(q, a, z) = \begin{cases} \{\langle q, \varepsilon \rangle\} & \text{pokud} \quad a \in \Sigma \text{ a } z = a \\ \{\langle q, y \rangle \mid z \to y \ \in P\} & \text{pokud} \quad a \in \Sigma \text{ a } z \in N \\ \emptyset & \text{jinak} \end{cases}$$

  - Prvnímu případu říkáme *operace srovnání*: pokud je na vstupu i na vrcholu zásobníku stejný znak (terminál) pak jsou oba odebrány.
  - Druhý případ se jmenuje *operace expanze*: bez čtení vstupu při neterminálu na vrcholu zásobníku se tento neterminál nahradí pravou stranou některého pravidla s tímto neterminálem na levé straně.
  - U třetího případu dochází k zastavení činnosti.

Příklad 48: Uvedeme si gramatiku a na ní ukážeme činnost takového automatu:

$G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$
$\Sigma = \{a, b, c, 0, 1, +, -, *, /, (,)\}$
$N = \{S, E, C, V\}$
$P = \{ \quad S \to E,$
$E \to E * E|E/E|E + E|E - E| - E|C|V|(E),$
$C \to 0C|1C|0|1,$
$V \to aV|bV|cV|a|b|c \quad \}$

Řetězec na vstupu	Stav zásobníku
$10+(ca*110)$	S
$10+(ca*110)$	E
$10+(ca*110)$	$E+E$
$10+(ca*110)$	$C+E$
$10+(ca*110)$	$1C+E$
$0+(ca*110)$	$C+E$
$0+(ca*110)$	$0+E$
$+(ca*110)$	$+E$
$(ca*110)$	E
$(ca*110)$	(E)
$ca*110)$	$E)$
$ca*110)$	$E*E)$
$ca*110)$	$V*E)$
$ca*110)$	$cV*E)$
$a*110)$	$V*E)$
$a*110)$	$a*E)$
$*110)$	$*E)$
$110)$	$E)$
$110)$	$C)$
$110)$	$1C)$
$10)$	$C)$
$10)$	$1C)$
$0)$	$C)$
$0)$	$0)$
$)$	$)$
ε	ε

Věta 54: Pro každou bezkontextovou gramatiku G existuje NZA A tak, že $L(G) = N(A)$.

Důkaz 21..4: Uvažujeme gramatiku $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle$ a odtud A zkonstruovaný pomocí operací expanze a srovnání (předchozí způsob).

Tvrdíme, že pro libovolný řetězec $w \in \Sigma^*$ platí:

$$S \Rightarrow^*_{G,l} w \text{ právě když } \langle q, w, S\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon\rangle$$

- *Implikace zleva:*

  Nechť $S \Rightarrow^*_{G,l} w$, to znamená, že existuje nejlevější derivace $S = X_0, \ldots, X_n = w$. Indukcí pro $i = 0, \ldots, n$ prokážeme, že $\langle q, w, S\rangle \vdash^* \langle q, u_i, z_i\rangle$ pro $w = y_i \cdot u_i$.
  $X_i = y_i z_i$, kde buď

  1. $z_i = \varepsilon$
     nebo
  2. $z_i = Av_i$, kde $A \in N$

  Pro $i = 0$ je tvrzení zřejmé, protože $x_0 = S$ a můžeme položit $y_0 = \varepsilon$, $u_i = w$ a $z_0 = S$.

  Nechť platí tvrzení pro i. Prokážeme jej pro $i + 1$.

  Z indukčního předpokladu $\langle q, w, S\rangle \vdash \langle q, u_i, z_i\rangle$ pro $w = y_i u_i$ a $x_i = y_i z_i$. Dále musí platit, že $z_i = Av_i$, jinak by byl x_i ze samách terminálních symbolů a posloupnost $X_1, X_2, \ldots, X_i, X_{i+1}, \ldots$ by nemohla být P-derivace.

  Dále z předpokladu $X_i \Rightarrow_{G,l} X_{i+1}$ to jest z indukčního předpokladu $x_i = y_i z_i = y_i A v_i$, A je nejlevější neterminál, tj. existuje pravidlo $A \to w_i \in P$ tak, že $x_{i+1} = y_i w_i v_i$.

NZA A může přejít z konfigurace $\langle q, u_i, z_i\rangle = \langle q, u_i, Av_i\rangle$ do konfigurace $\langle q, u_i, w_iv_i\rangle$ (pomocí expanze). Dále může NZA přecházet do dalších konfiguací postupnou aplikací operace srovnání, dokud není vyprázdněn zásobník nebo není na vrcholu neterminál. Automat nakonec skončí v konfiguraci $\langle q, u_{i+1}, z_{i+1}\rangle$, kde buď $z_{i+1} = \varepsilon$ nebo $z_{i+1} = Bv_{i+1}$ kde $B \in N$.

Zřejmě $w = y_{i+1}u_{i+1}$ kde $x_{i+1} = y_iw_iv_i = y_{i+1}z_{i+1}$.

Ve speciálním případě: $i = n$ dostáváme $\langle q, w, S\rangle \vdash^* \langle q, u_n, z_n\rangle$, kde $w = y_nu_n$, $X_n = y_nz_n = w$ tj. dle 1. vlastnosti, protože z_n je celý z terminálnch symbolů, platí, že $z_n = \varepsilon$, to jest $x_n = y_nz_n = y_n = w$ ale $w = y_nu_n$, odtud $u_n = \varepsilon$.

Takže $\langle q, w, S\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon\rangle$.

- *Implikace zprava:*

  Prokážeme obecnější tvrzení:

  Pro každý neterminál $A \in N$ platí: pokud $\langle q, w, A\rangle \vdash^* \langle, \varepsilon, \varepsilon\rangle$ pak $A \Rightarrow^*_{G,l} w$.

  Požadované tvrzení získáme jako důsledek pro $S \in N$.

  Tvrzení se dokazuje přes délku výpočtu (pro $n = 0$ nelze).

  Pro $n = 1$ je triviální, protože $\langle q, w, A\rangle \vdash \langle q, \varepsilon, \varepsilon\rangle$ pak $w = \varepsilon$ a $A \to \varepsilon \in P$.

  Předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolný výpočet nejvýše u kroků dlouhý a předpokládejme, že výpočet, který se dostane z $\langle q, w, A\rangle$ do $\langle q, \varepsilon, \varepsilon\rangle$ má délku $n + 1$.

  První přechod v tomto výpočtu musí nahradit A na vrcholu zásobníku pravou stranou některého pravidla s A na levé straně. Musí tedy existovat $A \to z_1z_2 \dots z_k \in P$ a $\langle q, w, A\rangle \vdash \langle q, w, z_1z_2 \dots z_k\rangle$ je první krok výpočtu. Zbývajících n kroků výpočtu musí odstranit $z_1z_2 \dots z_k$ ze zásobníku.

  Řetězec w je ve tvaru $w = x_1x_2 \cdots x_i$, kde každá část x_i odpovídá podřetězeci řetězce w, který byl odstraněn ze vstupu po odstranění z_{i-1} z vrcholu zásobníku až do chvíle, kdy byl odstrněn z_i z vrcholu zásobníku.

  Formálně: $\langle q, x_i, z_i\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon\rangle$

  Jelikož výpočet nezávisí na části řetězce, který nebyl dosud zkoumán, platí

  $$\langle q, x_ix_{i+1} \cdots x_k, z_i\rangle \vdash^* \langle q, x_{i+1} \cdots x_k, \varepsilon\rangle$$

  Každý z příslušných výpočtů má délku nejvýše n. Pokud je tedy z_i neterminál, aplikujeme indukční předpoklad $z_i \Rightarrow^*_{G,l} x_i$.

  To znamená:

  $$A \Rightarrow_{G,l} z_1z_2 \cdots z_k \Rightarrow^*_{G,l} x_1z_2 \cdots z_k \Rightarrow^*_{G,l} x_1x_2z_3 \cdots z_k \Rightarrow^*_{G,l} x_1 \cdots x_k = w$$

21.8. Od automatů ke gramatikám

Věta 55: Pro každý NZA $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, z_0, F\rangle$ existuje bezkontextová gramatika G tak, že $L(G) = N(A)$.

Důkaz 21..5: Množina N je $N = Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$. Pravidla gramatiky vypadají následovně:

1. Pro každý stav $p \in Q$ obsahuje pravidlo $S \to \langle q_0, z_0, p\rangle$
2. Pokud $\langle u, z_1z_2 \cdots z_k\rangle \in \delta(q, a, z)$, kde $a \in \Sigma \cup \{S\}$, pak pro libovolnou posloupnost stavů $r_1, \dots, r_n = p \in Q$ platí, že P obsahuje pravidlo

   $$\langle q, z, p\rangle \to a\langle r, z_1, u_1\rangle\langle r_1, z_2, u_2\rangle \cdots \langle r_{k-1}, z_k, u_k\rangle$$

Speciálně pokud $\langle r, \varepsilon\rangle \in \delta(q, a, z)$ pak P obsahuje pravidlo $\langle q, z, r\rangle \to a$

Budeme se snažit dokázat tvrzení $\langle q, z, p\rangle \Rightarrow^*_{G,l} w$ právě když $\langle q, w, z\rangle \vdash^* \langle p, \varepsilon, \varepsilon\rangle$

- *Implikace zleva*

  Důkaz provedeme indukcí přes délku nejlevější derivace. předpokládejme, že $\langle q, z, p\rangle \Rightarrow^*_{G,l} w$

  $\langle q, z, p\rangle \Rightarrow_{G,l} w$. Pak existuje $\langle q, z, p\rangle \to w$, tj. pravidlo je speciálním případem pravidla z bodu 2. To jest $w \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $\langle p, \varepsilon\rangle \in \delta(q, w, z)$ - platí z toho, jak jsme zavedli pravidla. Potom ale $\langle q, w, z\rangle \vdash \langle p, \varepsilon, \varepsilon\rangle$.

  Předpokládejme, že nejlevější derivace w z $\langle q, z, p\rangle$ má délku $n > 1$ a tvrzení platí pro všechny derivace kratší délky.

  Rozepsáním $\langle q, z, p\rangle \Rightarrow^*_{G,l} w$ dostaneme, že $\langle q, z, p\rangle \Rightarrow_{G,l} a\langle r_0, z_1, r_1\rangle \cdots \langle r_{k-1}, z_k, r_k\rangle \Rightarrow^*_{G,l} w$ kde $r_1, \ldots, r_k \in Q,\ r_k = p$ a $\langle q, z, p\rangle \to a\langle r_0, z_1, r_1\rangle \cdots \langle r_{k-1}, z_k, r_k\rangle$ je pravidlo dle bodu 2.

  Dle bodu 2, musí platit, že $\langle r_0, z_1 \cdots z_k\rangle \in \delta(p, x, z)$ a $w = a \cdot x$, kde $x \in \Sigma^*$ a $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$. Jelikož $\langle r_i, z_{i+1}, r_{i+1}\rangle$ jsou všechno neterminály gramatiky.

  Z vlastností bezkontextových gramatik platí, že x lze vyjádřit jako $x = w_1 w_2 \cdots w_k$ tak, že $\langle r_{i-1}, z_i, r_i\rangle \Rightarrow^*_{G,l} w_i$.

  Každá z těchto nejlevějších derivací má délku nejvýše n. Na každou z nich aplikujeme indukční předpoklad, tj.: $\langle r_{i-1}, w_i, z_i\rangle \vdash^* \langle r_i, \varepsilon, \varepsilon\rangle$.

  Nyní můžeme zřetězit posloupnosti odpovídajících konfigurací:

  $$\begin{aligned}\langle q, w, z\rangle &= \langle q, ax, z\rangle \vdash \langle r_0, x, z_1 z_2 \cdots z_k\rangle \vdash^* \langle r_1, w_2 \cdots w_k, z_2 \cdots z_k\rangle \vdash^* \cdots \vdash^* \langle r_k, \varepsilon, \varepsilon\rangle \\ &= \langle p, \varepsilon, \varepsilon\rangle\end{aligned}$$

  což jsme měli dokázat.

- *Implikace zprava*

  Dokážeme indukcí přes délku výpočtu automatu A.

  Předpokládejme, že platí $\langle q, w, z\rangle \vdash^* \langle p, \varepsilon, \varepsilon\rangle$. Výpočet má alespoň jeden krok, protože je třeba vyprázdnit zásobník. V tomto případě $w \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

  Dále musí $\langle p, \varepsilon\rangle \in \delta(q, w, z)$. Ze speciálního případu bodu 2, pak máme, že $\langle q, z, p\rangle \to w$ je jedno z pravidel gramatiky. použitím tohoto pravidla $\langle q, z, p\rangle \Rightarrow^*_{G,l} w$.

  Předpokládejme, že výpočet $\langle q, w, z\rangle \vdash^* \langle q, \varepsilon, \varepsilon\rangle$ má délku $n > 1$ a tvrzení platí pro všechny výpočty ostře kratších délek.

  První krok výpočtu $\langle q, w, z\rangle \vdash \langle r_0, x, z_1 \cdots z_k\rangle \vdash^* \langle p, \varepsilon, \varepsilon\rangle$, kde w lze psát jako $w = a \cdot x$, kde $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a platí, že $\langle r_0, z_1 \cdots z_k\rangle \in \delta(q, a, z)$

  Z bodu 2, definujícího odvozovací pravidla gramatiky, máme, že existují pravidla ve tvarech $\langle q, z, p\rangle \to a\langle r_0, z_1, r_1\rangle \cdots \langle r_{k-1}, z_k, r_k\rangle$ kde $r_1, \ldots, r_{k-1}$ jsou libovolné stavy z Q a $r_k = p$.

  Jelikož $\langle r_0, x, z_1 \cdots z_k\rangle \vdash^* \langle p, \varepsilon, \varepsilon\rangle$ pak můžeme x psát ve tvaru $x = w_1 w_2 \cdots w_k$ a existují stavy $r_1, \ldots, r_{k-1}$ tak, že $\langle r_{i-1}, w_i, z_i\rangle \vdash^* \langle r_i, \varepsilon, \varepsilon\rangle$

  Dle indukčního předpokladu:

  $$\langle r_{i-1}, z_i, r_i\rangle \Rightarrow^*_{G,l} w_i$$

  $$\langle q, z, p\rangle \Rightarrow_{G,l} a\langle r_0, z_1, r_1\rangle \cdots \langle r_{k-1}, z_k, r_k\rangle$$

Důsledek 5: Ke každému NZA existuje ekvivalentní automat rozpoznávající stejný jazyk, který má pouze 1 stav.

22. Deterministické zásobníkové automaty

Definice 32: Řekneme, že zásobníkový automat $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, z_0, F \rangle$ je *deterministický* (DZA), pokud jsou pro každé $q \in Q$ a $z \in \Gamma$ splněny následující podmínky:

1. pro všechny $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ platí $|\delta(q, a, z)| \leq 1$
2. pokud $\delta(q, \varepsilon, z) \neq \emptyset$ pak $\delta(q, a, z) = \emptyset$ pro každé $a \in \Sigma$

Nabízí se otázka, jaké třídy jazyků, jsou vlastně rozpoznatelné deterministickým zásobníkový automatem pomocí buď koncových stavů, nebo vyprázdněním zásobníku.

Definice 33: Bezkontextový jazyk L se nazývá *deterministický*, pokud existuje deterministický zásobníkový automat A tak, že $L = L(A)$.

Definice 34: Bezkontextový jazyk L má *prefixovou vlastnost*, pokud L neobsahuje dva různé řetězce x, y tak, že x je prefixem y.

Věta 56: Pro libovolný bezkontextový jazyk L jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. $L = N(A)$ pro nějaký DZA A
2. $L = L(A')$ pro nějaký DZA A' a L má prefixovou vlastnost

Důkaz 22..1: Nechť platí 1. tvrzení: $L = N(A)$ *pro DZA* A

1. pozorování: L má prefixovou vlastnost

   $x \in L = N(A)$ tj. x je přijat vyprázdněním zásobníku. Zjišťujeme, že $\langle q_0, x, z_0 \rangle \vdash^* \langle p, \varepsilon, \varepsilon \rangle$ je *jednoznačně* daný výpočet.

2. pozorování:

   Hledaný automat A' můžeme najít tak, že vytvoříme nový pomocný zásobníkový symbol z_0', který umístíme na počátku činnosti na dno zásobníku. Pak rozšíříme automat o přechody $\delta(p, \Sigma, z_0') = \{\langle p\#, \varepsilon \rangle\}$. $p\#$ je nový a zároveň jediný koncový stav automatu A'.

Nechť platí 2. tvrzení.

Jelikož má L prefixovou vlastnost, pak automat A' můžeme upravit tak, že z každého koncového stavu zrušíme všechny vycházející přechody. Vzniklý automat opět přijímá L pomocí koncových stavů. Z koncových stavů vytvoříme ε-přechody do nového stavu, ve kterém vyprázdníme zásobník.

Důsledek 6: Deterministický bezkontextový jazyk má prefixovou vlastnost, právě když je přijímán nějakým DZA pomocí vyprázdnění zásobníku.

Věta 57: Každý regulární jazyk je deterministický.

Důkaz 22..2: Pro L existuje KDA $A = \langle \Sigma, Q, \delta, q_0, F \rangle$ s úplnou přechodovou funkcí.

Příklad 49: Následující jazyk je deterministický:

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

Poznámka 19: Mnoho regulárních jazyků *nemá* prefixovou vlastnost.

Věta 58: Pokud $L = N(A)$ pro DZA A, pak je L jednoznačný.

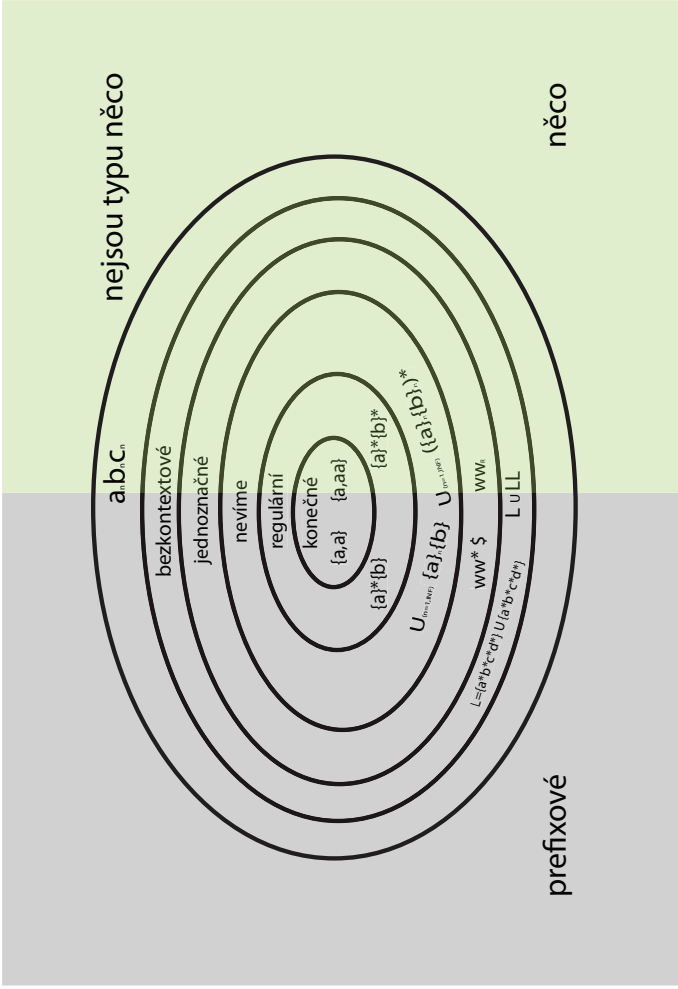
Důkaz 22..3: Náznak důkazu je následující:

Na základě A sestavíme gramatiku G tak, že $L(G) = N(A)$ a navíc prokážeme, že gramatika G má jednoznačné odvození každé věty.

Věta 59: Pokud $L = L(A)$ pro DZA A, pak je L jednoznačný. Deterministické bezkontextové jazyky jsou jednoznačné.

Důkaz 22..4: Náznak důkazu:

Vyjdeme z toho, že $L = L(A)$ a uvažujeme, že $L' = L \cdot \{\$\}$. I ten je deterministický. Tj. existuje A' tak, že $L(A') = L' = L \cdot \{\$\}$. Dle předchozí věty existuje jednoznačná gramatika G tak, že $L(G) = L \cdot \{\$\}$.



Obrázek 9. Vychodilovo „vajíčko 2.“