

V46: Faraday-Effekt an Halbleitern

Martin Schönfeld
martin.schoenfeld@udo.edu

Tim Sedlaczek
tim.sedlaczek@udo.edu

Durchführung: 17.10.2022

Abgabe: 28.10.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Zielsetzung

Das Ziel dieses Versuchs ist es, die effektive Masse von Leitungselektronen in GaAs zu ermitteln. Es wird dazu die Faraday-Rotation an unterschiedlich stark dotierten Proben für verschiedene Wellen gemessen.

2 Theorie

2.1 Die effektive Masse

Die Bandstruktur von Halbleitern ist kompliziert. In der Nähe des Minimums des Leitungsbands am Punkt $\vec{k} = \vec{0}$ kann die $E(\vec{k})$ -Relation in eine Taylorreihe zu

$$E(\vec{k}) = E_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial k_i^2} \right)_{\vec{k}=\vec{0}} k_i + \dots$$

entwickelt werden. Hier steht \vec{k} für den Wellenvektor des Elektrons und der Index i steht für die Raumdimensionen. Diese Taylorreihe wird in die parabolische Relation eines freien Elektrons überführt, wobei

$$m_i^* := \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial k_i^2} \right)_{\vec{k}=\vec{0}}^{-1} \quad (1)$$

die effektive Masse definiert. Hierbei ist \hbar das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum. Durch Substitution der Elektronenmasse durch die effektive Masse lässt sich somit für Leitungselektronen die Quantenmechanik freier Teilchen anwenden. Dabei ist der Einfluss des Kristallpotentials berücksichtigt.

2.2 Rotation linear polarisierten Lichts in doppelbrechenden Kristallen

Wenn links- und rechtszirkular polarisiertes Licht linear überlagert wird, lässt sich dies als linear polarisiertes Licht verstehen. Die Phasengeschwindigkeiten beider zirkularer Wellen werden beim Durchlaufen eines doppelbrechenden Kristalls der Länge L unterschiedlich. Damit wird die lineare Polarisationsrichtung gedreht um einen Winkel

$$\theta = \frac{L}{2} (\vec{k}_R - \vec{k}_L). \quad (2)$$

Dabei beschreibt \vec{k}_R den Wellenvektor des rechtszirkular und \vec{k}_L den Wellenvektor des linkszirkular polarisierten Lichts. Mittels elektrischer Dipole lässt sich dieser Effekt erklären, diese werden im Kristall induziert. In einem externen elektrischen Feld \vec{E} werden zum einen positive Ionen relativ zu negativen Ionen verschoben, oder zum anderen der Ladungsschwerpunkt der positiven Ladungen und der Elektronenverteilung stimmt nicht überein. Die Summe der einzelnen Dipolmomente pro Volumen erzeugt eine Polarisation

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (3)$$

mit der elektrischen Feldkonstanten ϵ_0 und der *dielektrischen Suszeptibilität* χ . Dabei ist die Suszeptibilität χ im Allgemeinen ein Tensor. Ein Material ist doppelbrechend, wenn im Suszeptibilitätstensor nicht-diagonale und komplex konjugierte Koeffizienten auftreten. Für in z -Richtung durchlaufendes Licht hat ein solcher Tensor mit allen für die Drehung relevanten Koeffizienten die Gestalt

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ -i\chi_{xy} & \chi_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

Ein Ausdruck für den Drehwinkel kann nun durch Einsetzen des Ansatzes einer ebenen Welle in die Wellengleichung in Materie gewonnen werden. Es ergeben sich nach Zerlegung in die Komponenten drei Gleichungen, aus einer folgt $E_z = 0$. Für die beiden übrigen Gleichungen muss für eine nicht-trivial Lösung

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}(1 + \chi_{xx})\right)^2 - \left(i\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{xy}\right)\left(-i\frac{\omega^2}{c^2}\chi_{xy}\right) = 0$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c und der Kreisfrequenz ω der Welle gelten. Daraus folgen die zwei möglichen Wellenzahlen

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{(1 + \chi_{xx}) \pm \chi_{xy}},$$

und wiederum daraus zwei Phasengeschwindigkeiten für eine rechts- beziehungsweise linkszirkular polarisierte Welle. Daraufhin werden diese Wellenzahlen in den Ausdruck (2) eingesetzt und linearisiert, wodurch sich der der Ausdruck

$$\theta \approx \frac{L\omega}{2cn}\chi_{xy} \quad (4)$$

mit Brechungsindex $n = c/v_{\text{Ph}}$ ergibt.

2.3 Faraday-Rotation in optisch inaktiven Medien

Die Polarisationsrichtung von Licht in einem optisch inaktiven Medium bleibt unverändert. Geändert wird die Polarisationsrichtung Durch Anwesenheit eines externen magnetischen Feldes \vec{B} . Dieses muss parallel zur Ausbreitungsrichtung des Lichts sein. Durch die Gleichung

$$m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + K \vec{r} = -e_0 \vec{E}(r) - e_0 \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}$$

wird ein Elektron beschrieben, wobei durch m_e die Masse und e_0 die Ladung des Elektrons, durch K eine die Bindung beschreibende Konstante und durch \vec{E} die Feldstärke der einfallenden Lichtwelle darstellt. Weiterhin wird angenommen, dass \vec{E} harmonisch in der Zeit oszilliert, die Polarisation \vec{P} ist proportional zu \vec{r} die Richtung des Magnetfeldes ist die z -Richtung, wodurch sich diese Gleichung zerlegen lässt. Nur für $E_z = 0$ ergeben sich

nicht triviale Lösungen, wodurch sich die Anzahl an Komponentengleichungen auf zwei reduziert. Nun wird der Ansatz

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & i\chi_{xy} & 0 \\ i\chi_{yx} & \chi_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

genutzt und setzt diesen in die verbleibenden zwei Komponenten von (3) ein. Diese Gleichung wird nach Real- und Imaginärteil separiert, so ergibt sich

$$\chi_{xy} = -\chi_{yx}.$$

Also dreht sich die Polarisationssebene von einfallendem Licht in einem optisch inaktiven Medium bei einem externen Magnetfeld parallel zur Ausbreitungsrichtung, dies wird Faraday-Effekt genannt. Der Drehwinkel lässt sich mit Gleichung (4) und den zuvor genannten Überlegungen wie folgt ausdrücken

$$\theta = \frac{e_0^3}{2\epsilon_0 c} \frac{1}{m_e^2} \frac{\omega^2}{\left(-\omega^2 + \frac{K}{m_e}\right)^2 - \left(\frac{e_0}{m_e} B \omega\right)^2} \frac{NBL}{n}$$

Hierbei beschreibt m_e die Masse des Elektrons und N die Anzahl an Elektronen pro Volumen. Die Zyklotronfrequenz $\omega_Z = Be_0/m_e$ ist die Frequenz eines aufgrund der Lorentzkraft im magnetischen Feld rotierenden Elektrons und $\omega_0 = \sqrt{K/m_e}$ ist die Resonanzfrequenz hat. Der Grenzfall $\omega_0 \rightarrow 0$ ist erfüllt für quasifreie Ladungsträger

$$\theta_{\text{frei}} \approx \frac{e_0^3}{8\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{m_e^2} \lambda^2 \frac{NBL}{n}. \quad (5)$$

Sonst ist in Halbleitern die Resonanzfrequenz ω_0 deutlich größer als die Zyklotronfrequenz, sodass folgende Näherungen getroffen werden können

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \gg \omega^2 \omega_Z^2 \text{ und } \omega \ll \omega_0$$

Hierdurch ergibt sich die wichtige Relation

$$\theta(\lambda) \approx \frac{2\pi^2 e_0^3 c}{\epsilon_0} \frac{1}{m_e^2} \frac{1}{\lambda^2 \omega_0^4} \frac{NBL}{n}. \quad (6)$$

3 Versuchsaufbau

Der in Abbildung 1 dargestellte Versuchsaufbau wird verwendet, um die Faraday-Rotation zu messen.

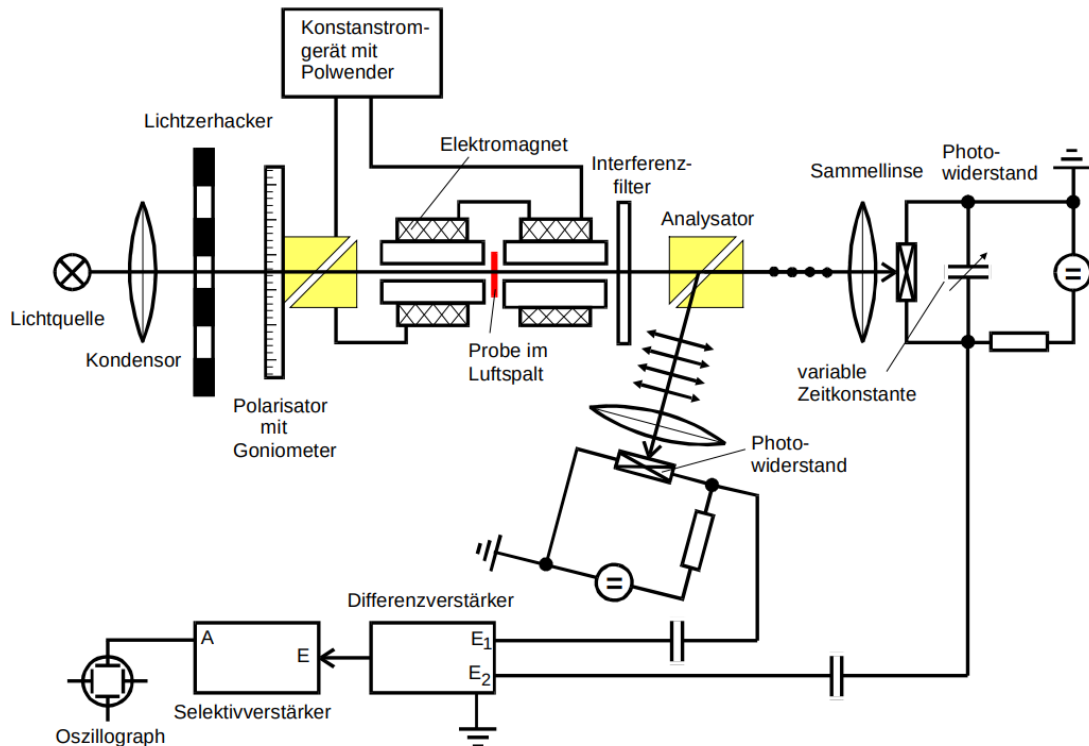


Abbildung 1: Der für die Messung verwendete Versuchsaufbau in schematischer Darstellung [Dor].

Eine Halogenlampe spendet Licht, welches mit einem Kondensor bzw. einer Sammellinse parallelisiert wird. Anschließend wird dieses Licht mit einem Lichtzerhacker frequenziert. Die Amplitude des Lichtsignals oszilliert somit in der Frequenz des Lichtzerhackers. Danach fällt der Lichtstrahl auf ein Glan-Thomson Prisma, welches das Licht linear polarisiert. Der Drehwinkel des Polarisators ist ablesbar an einem Goniometer. Dieses linear polarisierte Licht läuft danach durch einen Elektromagneten. Dort befindet sich die zu untersuchende Probe in einem Luftspalt. Das externe Magnetfeld wird durch ein Konstantstromgerät erzeugt und an die Probe angelegt. Das Licht wird hinter dem Magnetfeld mit einem Interferenzfilters monochromatisiert. Der Aufbau des Interferenzfilters ergibt sich aus einem Dielektrikum zwischen zwei transparenten Scheiben. An diesen werden die Lichtstrahlen an jeder Schicht teilweise reflektiert. Eine Transmission ergibt sich lediglich, wenn bei den Teilstrahlen konstruktive Interferenz gegeben ist. Es ergibt sich jedoch nur eine Verteilung endlicher Breite und keine scharfe Spitze. Das liegt an der begrenzten Anzahl an Schichten, die reflektieren. Das annähernd monochromatische Licht trifft danach auf ein zweites Glan-Thomson-Prisma. Dieses teilt den Lichtstrahl

in zwei orthogonal zueinander linear polarisierte Lichtstrahlen. Diese beiden Strahlen werden dann mit Hilfe einer Sammellinse auf einen Photowiderstand fokussiert, welche sich in einem geerdeten Schaltkreis befinden und dort mit einem Vorwiderstand und einer Spannungsquelle verbunden sind. Die Photowiderstände bestehen aus amorphen PbS Halbleitern. Die Intensität des Lichts bestimmt, wie viele Elektronen aus dem Halbleiter rausgelöst werden. Dies geschieht über den äußeren Photoeffekt. Die so im Halbleitermaterial entstehenden Löcher werden mit Elektronen aus dem Schaltkreis wieder aufgefüllt. Genau das ist messbar durch einen Abfall an dem Widerstand der Spannung. Dieser Innenwiderstand ist proportional zur Lichtintensität [Dor]. Die an den Photowiderständen abfallende Wechselspannung wird ausgekoppelt auf Kondensatoren, die an einem Differenzverstärker angeschlossen sind. Eine regelbare Zeitkonstante befindet sich parallel zum Photowiderstand geschaltet im Schaltkreis, um den Strahlengang zu messen. Hierdurch wird eine Anpassung der Phase an das Signal des anderen Photowiderstands ermöglicht. Die Charakteristik des Differenzverstärkers ist es, die Differenz der beiden Wechselspannungen abzubilden. Dies wird an einen Selektivverstärker weitergegeben. Ein Selektivverstärker ähnelt einem Bandpass mit regelbarer Frequenz. Dieser filtert alle Frequenzen außer der eingestellten Frequenz raus. Letztendlich wird das gefilterte Signal auf einem Oszilloskop angezeigt.

4 Durchführung

4.1 Kalibrierung des Aufbaus

Zuerst muss der Versuchsaufbau justiert werden. Dafür werden die Halogenlampe, Kondensor, Lichtzerhacker, Polarisator, Elektromagnet, Analysator und die beiden Photowiderstände so positioniert, dass beide Photowiderstände vom Licht getroffen werden. Hierfür werden die Deckel der Photowiderstandsgehäuse entfernt. Daraufhin ist das Ziel, dass der durchgehende Strahl verschwindet. Dafür wird das Analysatorprisma um seine vertikale Achse gedreht. Daraufhin wird der Lichtzerhacker eingestellt. Zur Ermittlung der Frequenz wird der Photowiderstand des durchgehenden Strahles an das Oszilloskop angeschlossen und die Frequenz abgelesen. Nun wird eine der Proben in den Luftschacht des Elektromagneten installiert und die Photowiderstände werden an die Eingänge des Differenzverstärkers angeschlossen. Daraufhin wird der Ausgang des Differenzverstärkers mit dem Eingang des Selektivverstärkers verbunden. Letztlich wird der Ausgang des Selektivverstärkers an das Oszilloskop angeschlossen.

4.2 Vermessung der Faraday-Rotation

Um die tatsächliche Faraday-Rotation zu messen, wird die Konstantstromquelle auf das Maximum von 10 A eingestellt. Das Magnetfeld ist nun hergestellt und in das Magnetfeld werden für acht verschiedene Interferenzfilter jeweils drei Proben in den Luftspalt eingesetzt. Dann wird für jeden Filter das beobachtete Signal am Oszilloskop auf ein Minimum abgeglichen. Hierzu wird der Polarisator gedreht. Der Winkel des Polarisators wird mit einem Goniometer abgelesen und für jeden Filter notiert. Danach

wird das Magnetfeld umgepolt und die gleiche Messung durchgeführt. Die verwendeten Proben sind

1. n-dotiertes GaAs mit $N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ 1/cm}^3$ und $L = 1,296 \text{ mm}$
2. n-dotiertes GaAs mit $N = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ 1/cm}^3$ und $L = 1,36 \text{ mm}$
3. hochreines GaAs mit $L = 5,11 \text{ mm}$

Die Interferenzfilter sind jewwils für die Wellenlängen 1060 nm, 1290 nm, 1450 nm, 1720 nm, 1960 nm, 2156 nm, 2340 nm, 2510 nm und 2650 nm durchlässig.

4.3 Messung der magnetischen Flussdichte der Spule

Das angelegte magnetische Feld, in dem sich die Probe befindet wird mit Hilfe einer Hall-Sonde gemessen. Hierfür wird das Konstantstromgerät auf den maximalen Strom von ungefähr 10 A eingestellt. Mit der Spitze der Hall-Sonde wird daraufhin der Luftspalt abgefahren. In Abständen von 1 mm wird dann die magnetische Flussdichte vermessen.

5 Auswertung

5.1 Bestimmung der maximalen magnetischen Flussdichte $|\vec{B}|_{\max}$

In der Probenkammer wird in Strahlrichtung abhängig vom Ort z die magnetische Flussdichte $|\vec{B}(z)| = B(z)$ gemessen. Diese sind in Tabelle 1 zu sehen. Diese Messwerte werden in 2 mit Hilfe von

$$B(z) = a \cdot z^4 + b \cdot z^3 + c \cdot z^2 + d \cdot z + e \quad (7)$$

approximiert aufgetragen. Dies wird durchgeführt mit Hilfe der Funktion *scipy.optimize.curve_fit* aus der Python-Bibliothek SciPy. z ist dabei relativ von der ungefähren Probenmitte gemessen, diese befindet sich bei $z = 130 \text{ mm}$. Es ergeben sich die Approximationsparameter

$$\begin{aligned} a &= (-0,00218 \pm 0,00103) \frac{\text{mT}}{\text{mm}^4} \\ b &= (0,00958 \pm 0,00749) \frac{\text{mT}}{\text{mm}^3} \\ c &= (-1,68080 \pm 0,17851) \frac{\text{mT}}{\text{mm}^2} \\ d &= (1,86273 \pm 0,93305) \frac{\text{mT}}{\text{mm}} \\ e &= (430,82900 \pm 5,55488) \text{ mT} . \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Maximums der Fitkurve wird die Nullstelle der ersten Ableitung bestimmt durch

$$B'(z) = 4a \cdot z^3 + 3b \cdot z^2 + 2c \cdot z + d \stackrel{!}{=} 0. \quad (8)$$

Es ergibt sich $z_{\max} = 0,56 \text{ mm}$ und die maximale magnetische Flussdichte

$$B_{\max} = |B(z_{\max})| = 431,347 \text{ mT}.$$

Dies ist ersichtlich in Abbildung 2.

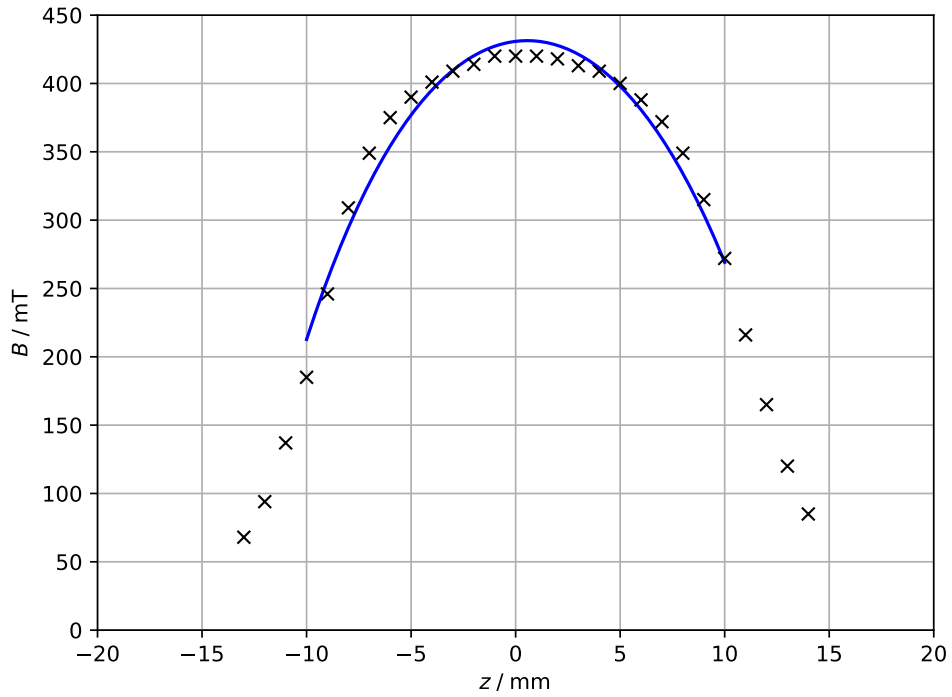


Abbildung 2: Messwerte der magnetischen Feldstärke $B(z)$ in Abhängigkeit des Ortes z , genähert um den Hochpunkt

5.2 Bestimmung der effektiven Masse von GaAs

Zur Bestimmung der effektiven Massen der hochreinen und n-dotierten GaAs-Proben, werden die in den Tabellen 2, 3 und 4 aufgelisteten Daten der Faradayrotation

$$\theta = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) \quad (9)$$

zusammen mit den Probendicken d normiert. Die Probendicken waren angegeben zu

Tabelle 1: Mit einer Hall-Sonde gemessene Magnetfeldstärke im Bereich des Luftspalts zur Bestimmung des Maximalwerts.

z / mm	B / mT	z / mm	B / mT
104	0	132	418
105	1	133	413
106	2	134	409
107	2	135	400
108	3	136	388
109	5	137	372
110	7	138	349
111	9	139	315
112	13	140	272
113	18	141	216
114	25	142	165
115	34	143	120
116	48	144	85
117	68	145	61
118	94	146	43
119	137	147	31
120	185	148	23
121	246	149	16
122	309	150	12
123	349	151	9
124	375	152	6
125	390	153	5
126	401	154	3
127	409	155	2
128	414	156	2
129	420	157	1
130	420	158	1
131	420	159	0

$$d_{\text{hochrein}} = 5,11 \text{ mm}$$

$$d_{N=2,8 \cdot 10^{18} \text{ 1/cm}^3} = 1,296 \text{ mm}$$

$$d_{N=1,28 \cdot 10^{18} \text{ 1/cm}^3} = 1,36 \text{ mm} .$$

Die Faradayrotationen θ/d sind normiert in Abbildung 3 gegen λ^2 aufgetragen. Die Faradayrotationen der hochreinen Probe werden von den normierten Faradayrotationen der n-dotierten Proben abgezogen. Für die Regressionsparameter für die Proben mit $N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ 1/cm}^3$ und $1,28 \cdot 10^{18} \text{ 1/cm}^3$ ergibt sich:

$$a_1 = (14,62 \pm 1,32) \frac{1}{\text{m}^3}$$

$$a_2 = (6,91 \pm 0,77) \frac{1}{\text{m}^3} .$$

Die effektiven Massen

$$m^* = \sqrt{\frac{e_0^3}{8\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{NB_{\max}}{n} \frac{1}{a}} \quad (10)$$

ergeben sich mit einem Brechungsindex von $n = 3,5$ zu

$$m_{1,N=2,8 \cdot 10^{18} \text{ 1/cm}^3}^* = 0,0776 \cdot m_e$$

$$m_{2,N=1,28 \cdot 10^{18} \text{ 1/cm}^3}^* = 0,0765 \cdot m_e$$

relativ zur Elektronenmasse $m_e = 9,109\,383\,701\,5 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

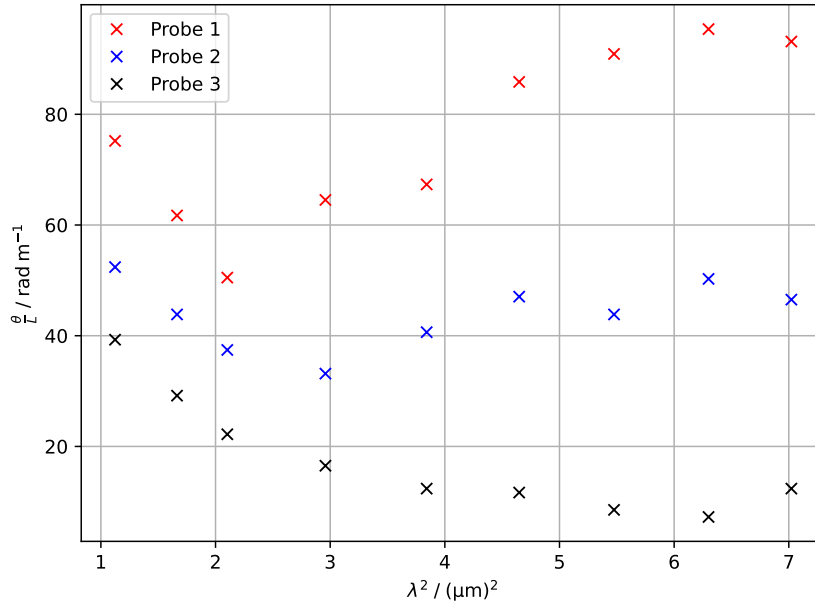


Abbildung 3: Normierte Faradayrotationen θ/d der drei Proben aufgetragen gegen λ^2

Tabelle 2: Winkelmesswerte in Abhängigkeit der gefilterten Lichtwellenlänge λ der hochreinen GaAs-Probe

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$
1,06	273,00	250,00
1,29	269,11	252,00
1,45	268,64	255,64
1,72	266,32	256,64
1,96	260,83	253,58
2,16	260,00	253,16
2,34	233,50	228,50
2,51	214,33	210,08
2,65	164,90	157,39

Tabelle 3: Winkelmesswerte in Abhängigkeit der gefilterten Lichtwellenlänge λ der n-dotierten GaAs-Probe mit $N = 2,8 \cdot 10^{18} \text{ 1/cm}^3$

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$
1,06	268.83	257.67
1,29	266.17	257.00
1,45	266.33	258.84
1,72	266.08	256.50
1,96	263.00	253.00
2,16	263.33	250.67
2,34	238.50	225.00
2,51	220.83	206.66
2,65	167.08	153.25

Tabelle 4: Winkelmesswerte in Abhängigkeit der gefilterten Lichtwellenlänge λ der n-dotierten GaAs-Probe mit $N = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ 1/cm}^3$

$\lambda / \mu\text{m}$	$\theta_1 / ^\circ$	$\theta_2 / ^\circ$
1,06	266.83	258.00
1,29	263.16	257.00
1,45	265.00	259.16
1,72	263.33	258.16
1,96	259.67	253.33
2,16	259.17	251.83
2,34	233.00	226.17
2,51	216.00	208.17
2,65	166.33	159.08

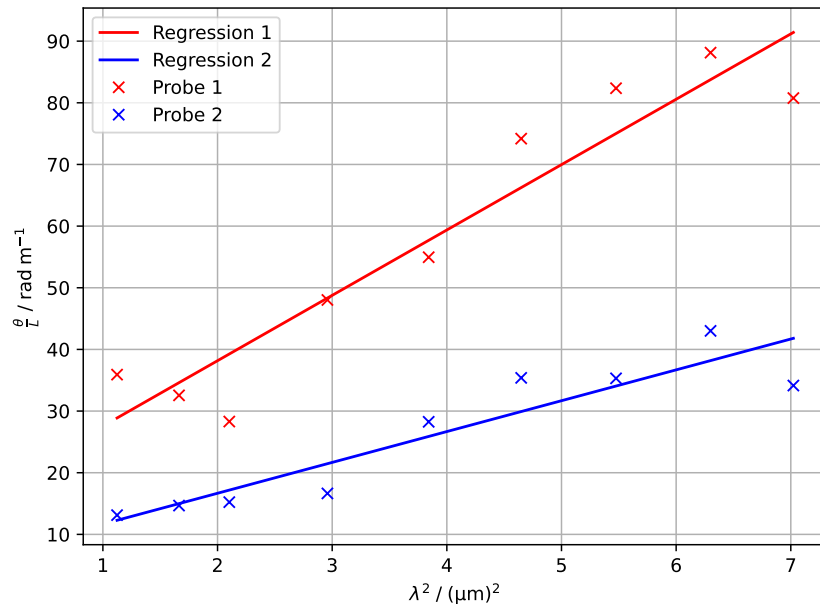


Abbildung 4: Lineare Approximationen der beiden Differenzen der normierten Faradayrotation θ/d der hochreinen GaAs-Probe von denen der n-dotierten Proben, aufgetragen gegen λ^2

6 Diskussion

Das vermessene Magnetfeld ist in Anbetracht der Dicke der Proben relativ homogen. Für die beiden verwendeten Proben ergeben sich Theoriewerte von

$$\frac{m_1^*}{m_e} \approx 0,0778$$
$$\frac{m_2^*}{m_e} \approx 0,0765.$$

Es zeigen sich Abweichungen von Werten um 16% zum Vergleich mit dem Theorie-
wert [Law71, S. 3]. Dies lässt sich auf mehrere Ursachen zurückführen: Das Signal am
Oszilloskop konnte nicht auf Null runtergeregelt werden. Wegen dieses Rauschens war
eine präzise Einstellung mit dem Goniometer nicht gut möglich. Aus diesem Grund
können die Steigungen der Regressionen und somit auch die effektive Masse nur ungenau
bestimmt werden. Durch Wärmestrahlung lässt sich das Rauschen des Signals teilweise
erklären, welche die Spule und die Proben aufgrund des Aufheizens im Laufe der Messung
emittieren. Außerdem sind die Verstaubung der Filter sowie die Fingerabdrücke auf den
Proben erwähnenswert, die zu weiteren Störungen geführt haben können. Die Messung
und Auswertung für die Bestimmung des Maximalwerts des Magnetfeldes zeigt, dass die
gewählte Ausgleichsfunktion mit einer vierten Potenz eine gute Näherung liefert.

Literatur

- [Dor] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zu Versuch 46*. URL: <https://moodle.tu-dortmund.de/mod/folder/view.php?id=1233916> (besucht am 26.10.2022).
- [Law71] P. Lawaetz. „Valence-Band Parameters in Cubic Semiconductors“. In: *Phys. Rev. B* 4 (10 Nov. 1971), S. 3460–3467. DOI: 10.1103/PhysRevB.4.3460. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.4.3460>.