



# 傅里叶分析笔记

作者：吕浩哲（Lucas Shen）

时间：March 11, 2023

封面：<https://www.pixiv.net/artworks/100631860>

悟已往之不谏，知来者之可追。——陶渊明

# 目录

<b>第1章 Fourier 分析的起源</b>	<b>1</b>
1.1 弦振动 . . . . .	1
1.1.1 简谐振动 . . . . .	1
1.1.2 驻波与行波 . . . . .	1
1.1.3 波方程的导出 . . . . .	1
1.2 热方程 . . . . .	5
1.2.1 热传导方程的导出 . . . . .	5
<b>第2章 Fourier 级数基本理论</b>	<b>7</b>
2.1 Fourier 级数的定义 . . . . .	7
2.1.1 Fourier 级数的唯一性 . . . . .	9
2.2 卷积与核 . . . . .	11
2.2.1 卷积 . . . . .	11
2.2.2 核与好核 . . . . .	14
2.3 收敛性的进一步讨论 . . . . .	17
2.3.1 Cesaro 和 . . . . .	18
2.3.2 Abel 和 . . . . .	20
2.4 * 不连续情况的 Fourier 级数 . . . . .	23
<b>第3章 Fourier 级数的收敛性</b>	<b>24</b>
3.1 平方平均收敛 . . . . .	24
3.1.1 内积空间 . . . . .	24
3.1.2 平方平均收敛 . . . . .	29
3.2 对逐点收敛情况的进一步讨论 . . . . .	31
3.2.1 Fourier 级数的局部性 . . . . .	31
3.2.2 Dini&Lipschitz 判别法 . . . . .	33
3.2.3 具有发散 Fourier 级数的连续函数 . . . . .	35
<b>第4章 Fourier 级数的应用</b>	<b>39</b>
4.1 等周问题 . . . . .	39
4.1.1 Steiner 的进展 . . . . .	39
4.1.2 等周问题的解答 . . . . .	40
4.2 Weyl 等分布定理 . . . . .	42
4.2.1 实数的同余 . . . . .	42
4.2.2 数列的等分布 . . . . .	43
4.3 处处连续但处处不可微的函数 . . . . .	47
4.4 圆周上的热方程 . . . . .	49
<b>第5章 <math>\mathbb{R}</math> 中的 Fourier 变换</b>	<b>52</b>
5.1 Fourier 变换基本理论 . . . . .	52
5.1.1 实直线上积分的推广 . . . . .	52
5.1.2 Fourier 变换的定义 . . . . .	53
5.1.3 Schwartz 空间上的 Fourier 变换 . . . . .	53

5.1.4 Fourier 逆变换 . . . . .	57
5.1.5 Plancherel 等式 . . . . .	58
5.1.6 Weierstrass 逼近定理 . . . . .	58
5.2 Fourier 变换在 PDE 中的应用 . . . . .	60
5.2.1 实直线上的热传导方程 . . . . .	60
5.2.2 上半平面的稳态热方程 . . . . .	61
5.3 Poisson 求和公式 . . . . .	64
5.3.1 theta 与 zeta 函数 . . . . .	65
5.3.2 热核与 Poisson 核 . . . . .	65
5.4 Heisenberg 不确定原理 . . . . .	66
<b>第 6 章 Rd 中的 Fourier 变换</b>	<b>69</b>
6.1 回顾与准备工作 . . . . .	69
6.1.1 Rd 中的积分 . . . . .	69
6.1.2 径向对称 . . . . .	70
6.2 Fourier 变换基本理论 . . . . .	70
6.3 波动方程 . . . . .	73
6.3.1 Fourier 变换解法 . . . . .	73
6.3.2 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 中的波动方程 . . . . .	74
6.3.3 Huygens 原理 . . . . .	76
6.3.4 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ 中的波动方程 . . . . .	77
6.4 径向对称与 Bessel 函数 . . . . .	77
6.5 Radon 变换及其应用 . . . . .	78
6.5.1 $\mathbb{R}^2$ 中的 X-ray 变换 . . . . .	78
6.5.2 $\mathbb{R}^3$ 中的 Radon 变换 . . . . .	80
6.5.3 平面波 . . . . .	82
<b>第 7 章 离散 Fourier 分析</b>	<b>83</b>
7.1 $\mathbb{Z}_n$ 中的 Fourier 分析 . . . . .	83
7.1.1 $\mathbb{Z}_n$ 中的 Fourier 变换 . . . . .	83
7.1.2 快速 Fourier 变换 (FFT) . . . . .	85
7.2 有限 Abel 群上的 Fourier 分析 . . . . .	86
7.2.1 特征标与正交性 . . . . .	86
7.2.2 Fourier 逆变换 . . . . .	87
7.3 离散 Fourier 分析的应用 . . . . .	87
<b>第 8 章 Dirichlet 定理</b>	<b>88</b>
8.1 回顾与准备工作 . . . . .	88
8.1.1 基本的算数定理 . . . . .	88
8.1.2 素数有无穷多个 . . . . .	88
8.2 Dirichlet 定理 . . . . .	90
8.2.1 Fourier 分析与 Dirichlet 特征 . . . . .	91
8.2.2 Dirichlet L 函数 . . . . .	93
8.3 定理的证明 . . . . .	93
8.3.1 对数 . . . . .	93
8.3.2 L 函数 . . . . .	95

---

8.3.3 $L$ 函数的非零性 . . . . .	97
----------------------------	----

# 第1章 Fourier 分析的起源

研究 Fourier 分析的动机可以追溯到弦的振动与热传导问题，这二者也对应了两类重要的 PDE：波动方程与热方程，下面依次介绍。

## 1.1 弦振动

### 1.1.1 简谐振动

首先考虑一类最简单的情形：简谐振动，弹簧振子可以说是我们从中学时代就接触过的，最熟悉的物理对象之一。

考虑一个质量为  $m$  的滑块放置在光滑水平面上，一端与墙壁通过弹簧连接。我们以弹簧自然伸长（净伸长量为零）的位置作为原点建立一维坐标系。假设初始时刻对滑块作用一水平方向力，并且用  $y(t)$  表示时刻  $t$  时滑块的相对位置，则根据 Hooke 定律，滑块受力  $F = -ky$ ，通过 Newton 运动定律可以写出方程

$$ma = -ky \quad (1.1)$$

其中  $k > 0$  为弹簧的劲度系数，若设  $c = \sqrt{k/m}$ ，则方程化为

$$y'' + c^2 y = 0 \quad (1.2)$$

容易得到方程的解为

$$y(t) = a \cos ct + b \sin ct \quad (1.3)$$

特别地，在不考虑初值的情况下，上述形式解的线性叠加依然是原方程的解。

利用辅助角公式， $a \cos ct + b \sin ct = A \cos(ct - \phi)$ ，其中  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  为振幅， $c$  称为频率， $\phi$  称为相位。

### 1.1.2 驻波与行波

接着考虑驻波与行波。顾名思义，驻波可以看作固定端点，在原地振动的弦，而行波则是波随弦运动，导致不同时刻弦不同位置的振动。

对于驻波，若设初始波形为  $\varphi(x)$ ，振幅表示为  $\psi(t)$ ，则波函数可以表示为

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t) \quad (1.4)$$

这天然给了我们“分离变量”的灵感！

对于行波，若设初始波形为  $F(x)$ ，向右播速为  $c$ ，则波函数可以表示为

$$u(x, t) = F(x - ct) \quad (1.5)$$

这种波也称右行波，同理可得左行波函数  $u(x, t) = F(x + ct)$

### 1.1.3 波方程的导出

考虑一根放置在二维平面中的弦，首尾分别被固定在  $x = 0$ ,  $x = L$  处，用  $y = u(x, t)$  描述弦的振动，我们下面来导出弦振动的波动方程。

我们假设弦被平均分为  $N$  段 ( $N$  充分大)，第  $n$  段坐标为  $x_n = nL/N$ ，每段振动都会影响相邻段。设

$$y_n(t) = u(x_n, t), \quad x_{n+1} - x_n = h = \frac{L}{N} \quad (1.6)$$

以及弦有均匀密度  $\rho$ ，则每段质量均为  $\rho h$ ，第  $n$  段受右侧拉力为

$$\left(\frac{\tau}{h}\right)(y_{n+1} - y_n) \quad (1.7)$$

其中  $\tau > 0$  为弦的弹性模量, 同理可得左侧拉力

$$\left(\frac{\tau}{h}\right)(y_n - y_{n-1}) \quad (1.8)$$

根据 Newton 运动定律, 可列方程

$$\rho hy_n''(t) = \frac{\tau}{h}(y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)) \quad (1.9)$$

而

$$y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t) = u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n, t) \quad (1.10)$$

因此对上面的方程等式两边同除  $h$ , 根据二阶导数公式

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \rightarrow F''(x) \quad (1.11)$$

可得波动方程

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.12)$$

有时将常数合并, 令  $c = \sqrt{\tau/\rho}$ , 方程化为

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.13)$$

这就是一维波动方程, 其中  $c > 0$  称为波速.

从形式上讨论波方程时, 波速并不重要, 因为它可以通过对  $x, t$  同时伸缩变换进行抵消, 同样借助伸缩变换, 可不妨设  $c = 1, 0 \leq x \leq \pi$ .

导出波动方程后, 下面我们讨论一维波动方程的求解, 主要思路是使用行波法或驻波叠加法.

## 行波法

考虑  $c = 1, L = \pi$  时的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (1.14)$$

我们首先有这样的观察: 若  $F$  为二阶可微函数, 则  $u(x, t) = F(X \pm t)$  就是方程的解. 当  $t = 0$  时,  $u(x, 0) = F(x)$ , 此时的函数图形即为初始波形, 随着时间推移, 左右行波分别按相同速度向各自方向传播.

上面的观察让我们注意到, 波动方程是线性的, 这表明若  $u(x, t), v(x, t)$  都是方程的解, 则  $\alpha u(x, t) + \beta v(x, t)$  依然是方程的解. 由此我们可以假设, 波动方程的解是由两个向不同方向运动的行波  $F, G$  叠加而成的, 二者都二阶可微, 故设解

$$u(x, t) = F(x + t) + G(x - t) \quad (1.15)$$

上面的结果也可以从另一个角度得到, 作换元

$$\begin{cases} \xi = x + t \\ \eta = x - t \end{cases} \quad (1.16)$$

则波动方程变为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (1.17)$$

其解有形式  $v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$ , 这也就是

$$u(x, t) = F(x + t) + G(x - t). \quad (1.18)$$

此时回忆原问题的一些条件: 我们假设初始波形为  $u(x, 0) = f(x)$ , 弦的两端始终固定, 即  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ . 在此基础上, 我们再补充初值  $\partial_t u(x, 0) = g(x)$ , 这代表了弦的初速度, 并且显然有  $g(0) = g(\pi) = 0$ . 为方便起见, 我们将  $f, g, u$  关于  $x$  进行延拓, 使之成为以  $2\pi$  为周期的奇函数.

综上则有

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = f(x) \\ F'(x) - G'(x) = g(x) \end{cases} \quad (1.19)$$

由此可解得

$$2F'(x) = f'(x) + g(x) \quad (1.20)$$

$$2G'(x) = f'(x) - g(x) \quad (1.21)$$

进一步可得

$$F(X) = \frac{1}{2} \left[ f(x) + \int_0^x g(y) dy \right] + C_1 \quad (1.22)$$

$$G(X) = \frac{1}{2} \left[ f(x) - \int_0^x g(y) dy \right] + C_2 \quad (1.23)$$

根据  $F + G = f$  的条件可得  $C_1 + C_2 = 0$ , 综上可得波动方程的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy \quad (1.24)$$

该式称为 **D'Alembert 公式**.

## 驻波叠加法

在驻波的描述中, 我们使用了  $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$  的形式, 这就是数学中分离变量的过程, 它在处理许多问题是都能奏效. 将这样的  $u$  代入原方程, 可得

$$\varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t), \quad (1.25)$$

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} \quad (1.26)$$

由于上式的左、右仅与一个变量有关, 故二者相等时只能同时等于某个与  $x, t$  都无关的常数  $\lambda$ , 即

$$\begin{cases} \psi''(t) - \lambda\psi(t) = 0 \\ \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

若将重写  $\lambda = -m^2$ , 则根据一开始的讨论, 上述方程有解

$$\psi(t) = A \cos mt + B \sin mt \quad (1.28)$$

$$\varphi(x) = \tilde{A} \cos mx + \tilde{B} \sin mx \quad (1.29)$$

这时同样考虑初值、边值, 即  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ , 可得  $\tilde{A} = 0, \tilde{B} \neq 0$ , 以及  $m$  必定是一个整数, 不妨设其为正, 则记这个关于  $m$  的解为

$$u_m(x, t) = (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx \quad (1.30)$$

这就是我们最终求得的驻波, 确保起见, 可验算  $u_m$  确实是波动方程的解.

根据波动方程解的叠加性, 可以给出方程的解

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mt + B_m \sin mt) \sin mx \quad (1.31)$$

由于  $u(x, 0) = 0$ , 由此有

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx = f(x) \quad (1.32)$$

此时出现了新的问题: 对于给定的  $f(x)$ , 满足  $f(0) = f(\pi) = 0$ , 是否一定存在  $A_m$  使得左边的级数收敛到  $f$  呢? 若存在, 那么如何找到这列  $A_m$  呢?

从这个问题入手, 我们从下一章将正式开始 Fourier 分析的学习, 不过在这里可以先做一些尝试, 比如对上

式在  $[0, \pi]$  与  $\sin nx$  积分可得（暂且忽略一些算子可交换的条件）

$$\int_0^\pi f(x) \sin nx dx = \int_0^\pi \left( \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx \right) \sin nx dx \quad (1.33)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\pi \sin mx \sin nx dx \quad (1.34)$$

$$= \frac{\pi}{2} A_n \quad (1.35)$$

上面用到了三角函数积分公式

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn} \quad (1.36)$$

$$= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases} \quad (1.37)$$

其中  $\delta_{mn}$  为 Kronecker 符号.

上面的讨论似乎给出了一个求系数的方法，即

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx \quad (1.38)$$

此外还有  $\partial_t u(x, 0) = g(x)$ , 即

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A'_m \cos mx \quad (1.39)$$

考虑函数  $F = f + g$ , 从三角函数的角度, 它可以写作

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx + \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos mx \quad (1.40)$$

但如果使用复数中的 Euler 恒等式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ,  $F$  有形式

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx} \quad (1.41)$$

利用与上面“同时积分”相同的手段, 可得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \delta_{mn} \quad (1.42)$$

即

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} dx \quad (1.43)$$

$a_n$  称为  $F$  的第  $n$  个 Fourier 系数.

由此也可以重新表述我们的问题:

**问题 1.1** 给出函数  $F$ , 以及其如上 Fourier 系数, 是否成立

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx} ? \quad (1.44)$$

Joseph Fourier 是第一个相信  $F$  可由上述级数表达, 即被表达成许多三角函数的线性叠加形式的人, 他将这种前无古人的观点应用到了对热方程的研究中, 最后发展出了“Fourier 分析”这一学科, 后来被应用到更多领域, 我们对 Fourier 分析的探索也将由此开始.

最后以一个例子结束对弦振动问题的讨论.

**例 1.1** 我们考虑一个具体的问题, 假设弦固定在  $[0, \pi]$  区间上, 其满足  $c = 1$  的波动方程, 我们在  $x = p$  处将弦挑起, 使它的形状满足函数关系

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{p}, & 0 \leq s \leq p \\ \frac{h(\pi-x)}{\pi-p}, & p \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (1.45)$$

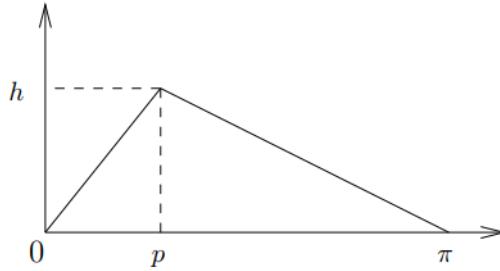


图 1.1: 弦图像

此时施放弦，取初速度  $g(x) = 0$ ，利用前面的讨论，可得

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin mx, \quad A_m = \frac{2h}{m^2} \frac{\sin mp}{p(\pi - p)} \quad (1.46)$$

以及弦振动方程的解

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mt \sin mx \quad (1.47)$$

上面的级数绝对收敛。此外也可以给出行波解

$$u(x, t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \quad (1.48)$$

二者之间仅相差一个积化和公式。

## 1.2 热方程

下面讨论热传导方程，我们先讨论依赖时间的热方程，后讨论热稳定状态下的热方程。

### 1.2.1 热传导方程的导出

我们给无限金属平面初始温度分布，考虑其按时间变化的温度分布  $u(x, y, t)$ 。

考虑一个边长为  $h$  的小正方形  $S$ ，中心为  $(x_0, y_0)$ ，该区域热量为

$$H(t) = \sigma \iint_S u(x, y, t) dx dy \quad (1.49)$$

其中  $\sigma > 0$  为材料的比热，由此可知  $S$  中热流为

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sigma \iint_S \frac{\partial u}{\partial t} dx dy \approx \sigma h^2 \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, y_0, t) \quad (1.50)$$

根据 Newton 热传导定律，从高温流向低温的热流与温度梯度成正比，设导热系数为  $\kappa$ ，则穿过  $S$  的热流为

$$\kappa h \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + h/2, y_0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 - h/2, y_0, t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0 + h/2, t) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0 - h/2, t) \right] \quad (1.51)$$

使用中值定理，并令  $h \rightarrow 0$ ，则有

$$\frac{\sigma}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.52)$$

这就是依赖时间的热传导方程，简称为热传导方程（或热方程）。经过很长一段时间后，系统将不会有热传递，此时系统达到了热平衡， $\partial_t u = 0$ ，热方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.53)$$

这就是热平衡状态下的热方程，这里的算子  $\partial_x^2 + \partial_y^2$  被称为 Laplace 算子，常用符号  $\Delta$  表示，因此方程也写作

$$\Delta u = 0 \quad (1.54)$$

上述方程的解称为调和函数.

如果在单位圆盘

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \quad (1.55)$$

考虑热方程, 带有边界条件  $u|_{\partial D} = f$ , 则称为 Dirichlet 问题, 这相当于在  $\partial D$  上赋予初温度, 随时间的演化最终  $D$  中会具有一定的温度分布.

下面我们就来讨论 Dirichlet 问题. 根据单位圆盘的对称性, 我们可以使用极坐标来表示

$$D = \{(r, \theta) : r < 1\} \quad (1.56)$$

同时需要使用极坐标中的 Laplace 算子

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (1.57)$$

则  $\Delta u = 0$  意味着

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (1.58)$$

这里故技重施, 将  $u$  分离变量为  $u(r, \theta) = F(r)G(\theta)$ , 则有

$$\frac{r^2 F''(r) + r F'(r)}{F(r)} = -\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} \quad (1.59)$$

令左右两边等于常数  $\lambda$ , 则有

$$\begin{cases} G''(\theta) + \lambda G(\theta) = 0 \\ r^2 F''(r) + r F'(r) - \lambda F(r) = 0 \end{cases} \quad (1.60)$$

根据极坐标的特点,  $G$  以  $2\pi$  为周期, 故  $\lambda = m^2 > 0$ , 解得

$$G(\theta) = \tilde{A} \cos m\theta + \tilde{B} \sin m\theta \quad (1.61)$$

$$= Ae^{im\theta} + Be^{-im\theta} \quad (1.62)$$

后一种形式通过 Euler 等式得到.

关于  $F$  的方程是一类特殊的 ODE, 称为 Euler 方程, 通过作换元  $r = e^t$ , 可解得  $F(r) = r^m$  和  $F(r) = r^{-m}$ , 特别当  $m = 0$  时, 有解  $F(r) = 1$  和  $F(r) = \ln r$ . 由于当  $r \rightarrow 0$  时,  $r^{-m}$  与  $\ln r$  均发散, 因此我们舍去这些解, 得到

$$u_m(r, \theta) = r^{|m|} e^{im\theta}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (1.63)$$

类似波方程, 热方程也是可以线性叠加的, 故

$$u(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m r^{|m|} e^{im\theta} \quad (1.64)$$

若上式给出了热方程的解, 则自然需要满足边值

$$u(1, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\theta} = f(\theta) \quad (1.65)$$

与波方程一样, 此时出现问题: 对于给定的  $f$ , 是否存在这列系数  $a_m$  呢? 下面我们正式进入 Fourier 分析的学习中.

# 第2章 Fourier 级数基本理论

本章从 Fourier 级数开始 Fourier 分析理论的学习.

## 2.1 Fourier 级数的定义

从前一章的例子里，我们足以提炼出 Fourier 级数的定义.

### 定义 2.1 (Fourier 级数 (指数))

Riemann 可积函数  $f$  在长度为  $L$  的闭区间  $[a, b]$  上的 Fourier 级数定义为

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x / L}, \quad (2.1)$$

其中 Fourier 系数为

$$\hat{f}(n) = a_n = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx \quad (2.2)$$



上面的定义采用了复指数形式，显得更简洁（在后文中我们也大多使用这种形式），使用 Euler 公式可以得到正弦与余弦函数的三角形式，这也是在学习数学分析时我们接触过的形式.

### 定义 2.2 (Fourier 级数 (三角))

Riemann 可积函数  $f$  在长度为  $L$  的闭区间  $[a, b]$  上的 Fourier 级数定义为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2\pi n}{L} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{L} x), \quad (2.3)$$

其中 Fourier 系数为

$$a_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n}{L} x dx, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n}{L} x dx \quad (2.4)$$



### 注

1. 在上面的两个定义中，我们要求  $f$  为 Riemann 可积的，这保证了积分有意义，暂且不讨论条件更差的情况.
2. 根据 Euler 公式，两种定义中的系数有关系

$$a_n = \frac{\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)}{2}, \quad b_n = \frac{\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)}{2i} \quad (2.5)$$

$$\hat{f}(n) = a_n + ib_n, \quad \hat{f}(-n) = a_n - ib_n \quad (2.6)$$

3. 我们并未说明，但是 Fourier 级数可以对复函数  $f$  定义（前提仍然是  $f$  Riemann 可积）.

很多时候，我们都使用  $L = 2\pi$  的情形，取  $[a, b] = [0, 2\pi]$  或  $[-\pi, \pi]$ （在此基础上，若  $f$  还具有  $2\pi$  周期，则也称  $f$  为定义在圆上的函数，即  $f(\theta) = F(e^{i\theta})$ ），比如在后者情况下， $f$  的 Fourier 系数与 Fourier 级数为

$$\hat{f}(n) = a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (2.7)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \quad (2.8)$$

Fourier 级数是三角级数的一种，形如

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x / L}, \quad (2.9)$$

其中  $c_n \in \mathbb{C}$ . 若只有有限项  $c_n \neq 0$ ，则称之为三角多项式，最大的  $n : |c_n| \neq 0$  称为三角多项式的次数. 由于

Fourier 级数为两边取极限，因此为了更精确描述它，我们使用三角多项式逼近，定义 Fourier 级数的前  $N$  项和为

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x / L} \quad (2.10)$$

接下来考虑两个例子。

**例 2.1** 设函数

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (2.11)$$

则  $f$  的 Fourier 系数为

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0 \quad (2.12)$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \quad (2.13)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{x}{in} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx \quad (2.14)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{in} \quad (2.15)$$

其 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (2.16)$$

**例 2.2** 设函数

$$f(x) = \frac{(\pi - x)^2}{4}, \quad x \in [0, 2\pi], \quad (2.17)$$

则  $f$  的 Fourier 系数为

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\pi - x)^2}{4} dx = \frac{\pi^2}{12} \quad (2.18)$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\pi - x)^2}{4} e^{-inx} dx \quad (2.19)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{(\pi - x)^2}{4in} e^{-inx} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} \frac{x - \pi}{2} e^{-inx} dx \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{4\pi in} \int_0^{2\pi} x e^{-inx} dx \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{4\pi in} \left[ -\frac{x}{in} e^{-inx} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi n^2} \int_0^{2\pi} e^{-inx} dx \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{2n^2} \quad (2.23)$$

其 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2n^2} e^{inx} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (2.24)$$

若将  $f(x)$  延拓，使之成为  $\mathbb{R}$  上的  $2\pi$  周期函数，则它是连续的，这说明上面的  $\sim$  可以改写为  $=$ （在这里我们提前使用后面的结论），即

$$f(x) = \frac{(\pi - x)^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (2.25)$$

取  $x = 0$ ，则有

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (2.26)$$

这样便得到了 Bessel 级数的值。而仿照这种方法，选择相应的函数进行展开，还能得到许多类似级数的值

(比如 Leibniz 级数等) .

回忆第一章中我们提出的问题, 它转化为

**问题 2.1** 在  $f$  满足何种条件下, 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b] \quad (2.27)$$

Fourier 级数的定义是很简单的 (虽然有时候积分的计算并不友好), 但是它引出的这个问题却不是显然的, 因为我们可以改变函数  $f$  在某一点的取值使之不连续, 但仍然 Riemann 可积且得到的 Fourier 系数相同, 甚至 Du Bois-Reymond 曾给出了一个连续函数, 但是它的 Fourier 级数仅在一点收敛.

倘若对  $f$  的连续性作更多的要求, 则结果又会不同: 若  $f \in C^1([a, b])$ , 则有  $S_N f \rightrightarrows f$ . 我们在后面会讨论这件事.

在本节的最后, 我们来讨论 Fourier 级数的某种 “唯一性” .

### 2.1.1 Fourier 级数的唯一性

若假定函数  $f$  的 Fourier 级数收敛到  $f$ , 则  $f$  可看作由其 Fourier 级数确定, 其中似乎蕴含了某种唯一性, 这种唯一性可以借助作差 (即假设存在不同的  $f_1, f_2$ , 考虑  $f_1 - f_2$ ) 表述为: 若  $f$  的 Fourier 系数  $\hat{f}(n) \equiv 0$ , 则  $f \equiv 0$ . 但我们尚未讨论何种函数的 Fourier 级数收敛, 并且可以通过调整函数在一点的连续性使得该命题不成立, 因此我们实际上证明如下结论:

#### 定理 2.1

设  $f$  为圆上的 Riemann 可积函数, 且对任意  $n \in \mathbb{Z}$  都有  $\hat{f}(n) = 0$ , 那么若  $f$  在  $x_0$  处连续, 则  $f(x_0) = 0$ .

**证明** 不妨设  $f$  定义在  $[-\pi, \pi]$  上, 假设  $x_0 = 0$  为  $f$  的连续点, 且有  $f(0) > 0$ , 我们的思路为: 首先考虑  $f$  为实值函数的情形, 构造一列三角多项式  $\{p_k\}$  使之在 0 处有 “峰”, 如此则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int p_k(x) f(x) dx = \infty \quad (2.28)$$

但根据假设,  $\hat{f}(n) \equiv 0$ , 这蕴含上面的每一项均为 0, 如此便产生了矛盾.

首先来构造三角多项式列. 由于  $f$  在 0 处连续, 故可取  $\delta > 0$ , 使得对任意  $|x| < \delta$ , 都有

$$f(x) > \frac{1}{2} f(0) \quad (2.29)$$

再令  $p_k(x) = \varepsilon + \cos x$ , 这里  $\varepsilon > 0$ , 且取之充分小, 满足对任意  $\delta \leq |x| \leq \pi$ , 都有

$$|p(x)| < 1 - \varepsilon/2 \quad (2.30)$$

再取  $0 < \eta < \delta$ , 使得对任意  $|x| < \eta$ , 有

$$p(x) \geq 1 + \varepsilon/2 \quad (2.31)$$

最后, 令  $p_k(x) = p^k(x) = (\varepsilon + \cos x)^k$ , 我们下面证明这样的三角多项式列足以推出矛盾.

根据  $f$  的有界性 (这可以由闭区间上的 Riemann 可积性得到), 可取  $B$  使得对任意  $x$  都有  $|f(x)| \leq B$ , 首先根据假设, 对任意  $k$  都有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) p_k(x) dx = 0 \quad (2.32)$$

但是又由于

$$\left| \int_{|x| \geq \delta} f(x) p_k(x) dx \right| \leq 2\pi B (1 - \varepsilon/2)^k \quad (2.33)$$

$$\int_{\eta \leq |x| < \delta} f(x) p_k(x) dx \geq 0 \quad (2.34)$$

$$\int_{|x| < \eta} f(x) p_k(x) dx \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} (1 + \varepsilon/2)^k \quad (2.35)$$

令  $k \rightarrow \infty$ , 可以得到我们想要的矛盾.

对于  $f$  为复函数的情况, 可以将其写成实部与虚部之和  $f(x) = u(x) + iv(x)$ , 则

$$u(x) = \frac{f(x) + \bar{f}(x)}{2}, \quad v(x) = \frac{f(x) - \bar{f}(x)}{2i} \quad (2.36)$$

这里  $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$ . 则根据 Fourier 系数的关系  $\hat{f}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$ , 重复前面的过程, 同样可证命题.

根据上面的定理, 可以得到两条推论.

### 推论 2.1

若  $f$  为圆上的连续函数, 且对任意  $n \in \mathbb{Z}$  都有  $\hat{f}(n) = 0$ , 则  $f \equiv 0$ .



### 推论 2.2

若  $f$  为圆上的连续函数, 且其 Fourier 级数绝对收敛, 即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty \quad (2.37)$$

则  $f$  的 Fourier 级数一致收敛到  $f$ , 即

$$S_N f(x) \rightrightarrows f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.38)$$



前一条推论是显然的, 我们只证后者, 它向我们所关心的问题迈出了第一步.

**证明** 根据 Fourier 级数的绝对收敛可知其收敛, 在此基础上, 由于每一项都是圆上的连续函数, 因此其极限函数

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx} \quad (2.39)$$

也是圆上的连续函数(一致收敛性). 这种一致收敛性还给了我们交换算子的自由, 通过交换积分号与求和, 可得  $g$  与  $f$  的对应的 Fourier 系数相同, 因此根据前面的唯一性定理, 有

$$S_N f(x) \rightrightarrows g(x) = f(x). \quad (2.40)$$

从这里可以看出,  $f$  的光滑性会影响 Fourier 级数的收敛性, 或者说 Fourier 系数的衰减性, 通过加强  $f$  的光滑性, 我们可以得到更精确的结论, 而为了对此进行刻画, 我们需要借助  $O$  记号, 这里简单回顾一下.

### 定义 2.3 (渐进记号 $O$ )

称在  $x \rightarrow a$  时有  $f(x) = O(g(x))$ , 是指存在常数  $C$ , 使得当  $x \rightarrow a$  时有

$$|f(x)| \leq C|g(x)|. \quad (2.41)$$



### 推论 2.3

若  $f$  为圆上的二阶连续可微函数, 则

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.42)$$



这条推论也直接表明了 Fourier 级数的绝对一致收敛性.

**证明** 通过两次分部积分计算可得

$$2\pi \hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (2.43)$$

$$= \left[ f(x) \frac{-e^{-inx}}{in} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx \quad (2.45)$$

$$= \frac{1}{in} \left[ f'(x) \frac{-e^{-inx}}{in} \right] \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{(in)^2} \int_0^{2\pi} f''(x) e^{-inx} dx \quad (2.46)$$

$$= -\frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} f''(x) e^{-inx} dx \quad (2.47)$$

这表明

$$2\pi n^2 |\hat{f}(n)| \leq \left| \int_0^{2\pi} f''(x) e^{-inx} dx \right| \leq \int_0^{2\pi} |f''(x)| dx = C \quad (2.48)$$

这里的  $C$  是仅依赖  $f$  的一个常数，故命题得证。

事实上，上面的命题可以被加强、推广，这涉及 Hölder 条件等更“分析”的内容，我们将在本章最后一节进行讨论，这里只列出一个使用多次分部积分可以很快得到的推广。

#### 推论 2.4

若  $f \in C^k([0, 2\pi])$  (即有  $k$  阶连续可微)，则

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.49)$$



## 2.2 卷积与核

卷积在数学中随处可见，而在 Fourier 分析中，卷积也有很重要的作用，核 (kernel) 通常是用来卷积的对象，本节我们主要讨论这两者。

### 2.2.1 卷积

#### 定义 2.4 (卷积)

给定两个  $2\pi$  周期的 Riemann 可积函数  $f, g$ ，可以定义其卷积为

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y) dy. \quad (2.50)$$



卷积是两个函数之间的一种运算，它代表了某种“加权平均”，比如当  $g(x) = 1$  时， $f * g$  就等于  $f$  在圆上的平均值。

卷积有很多良好的性质，下面列举一些。

#### 命题 2.1

设  $f, g, h$  为  $2\pi$  周期的 Riemann 可积函数，则

1.  $f * g = g * f$ .
2.  $\forall c \in \mathbb{C} : (cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ .
3.  $f * (g + h) = f * g + f * h$ .
4.  $(f * g) * h = f * (g * h)$ .
5.  $f * g$  连续。
6.  $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ .



如果  $f, g$  都是连续函数，那么这些性质中多数可以很轻松计算验证（这时积分换序会非常自由），对于 5 需要一些分析上的操作，也不会非常复杂。但对于一般情况，直接证明会比较麻烦，我们需要借助一个引理，首先考虑连续情形。

**证明** (连续情形)

1. 根据  $f, g$  的周期性, 可得

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \quad (2.51)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t)g(t)dt \quad (2.52)$$

$$= \int_{x-\pi}^{-\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{x+\pi} \quad (2.53)$$

$$= \int_{x+\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{x+\pi} \quad (2.54)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y)f(x-y)dy = g * f(x) \quad (2.55)$$

2.

$$(cf) * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} cf(y)g(x-y)dy \quad (2.56)$$

$$= \frac{c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy = c(f * g) \quad (2.57)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)cg(x-y)dy = f * (cg) \quad (2.58)$$

3.

$$f * (g+h)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} cf(y)[g(x-y) + h(x-y)]dy \quad (2.59)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} cf(y)g(x-y)dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} cf(y)h(x-y)dy \quad (2.60)$$

$$= f * g(x) + f * h(x) \quad (2.61)$$

4.

$$(f * g) * h(x) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \right] * h(x) \quad (2.62)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(z-y)h(x-z)dydz \quad (2.63)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z-y)h(x-z)dz \right] dy \quad (2.64)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(t)h(x-y-t)dt \right] dy \quad (2.65)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)h(x-y-t)dt \right] dy \quad (2.66)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g * h(x-y)dy \quad (2.67)$$

$$= f * (g * h)(x) \quad (2.68)$$

5. 只需对每一点  $x$ , 证明其连续性, 故不妨取  $x = 0$ .  $f$  的可积性蕴含其有界, 故设对任意  $x$  都有  $f(x) \leq M$ .

首先考虑一种特殊情况, 当  $g$  连续时,  $g$  必然一致连续 (Cantor 引理), 因此对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < h < \delta$  时, 就有

$$|g(x+h) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad (2.69)$$

因此对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $|h| < \delta$ , 就有估计

$$|f * g(h) - f * g(0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(h-y) - g(-y)]dy \right| \quad (2.70)$$

$$\leq \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(h-y) - g(-y)|dy \quad (2.71)$$

$$\leq \frac{M}{2\pi} \frac{\varepsilon}{M} 2\pi \quad (2.72)$$

$$= \varepsilon \quad (2.73)$$

故连续性得证.

## 6. 计算可得

$$\widehat{f * g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f * g(x) e^{-inx} dx \quad (2.74)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy \right] e^{-inx} dx \quad (2.75)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-in(x-y)} dx \right] dy \quad (2.76)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \right] dy \quad (2.77)$$

$$= \hat{f}(n) \hat{g}(n) \quad (2.78)$$

对于一般的可积情形，我们借助如下引理（暂且不证）：

### 引理 2.1

设  $f$  为圆上的可积函数，且对任意  $x$ ，都有  $|f(x)| \leq B$ ，则存在一列连续函数  $\{f_k\}$ ，对于每个函数都有

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f_k(x)| \leq B, \text{ 并且}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)| dx = 0 \quad (2.79)$$



**证明**（一般可积情形）命题中 1,2 的证明与连续情况相同，只讨论其它几个。对于圆上的可积函数  $f, g$ ，设它们公共上界为  $B$ ，根据上述引理，可以找到对应的函数列  $\{f_k\}, \{g_k\}$ ，并且

$$f * g - f_k * g_k = (f - f_k) * g + f_k * (g - g_k) \quad (2.80)$$

我们有估计

$$|(f - f_k) * g(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f_k(x-y)| |g(y)| dy \quad (2.81)$$

$$\leq \frac{B}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - f_k(y)| dy \rightarrow 0 \quad (2.82)$$

因此  $(f - f_k) * g \rightarrow 0$ ，对  $f_k * (g - g_k)$  同理，并且这样的估计对  $x$  一致的成立，因此  $f_k * g_k \rightharpoonup f * g$ ，而每个  $f_k * g_k$  都是连续函数，这表明  $f * g$  还是连续的（连续函数列的一致极限），同样借助  $f_k * g_k$  和已证的连续函数结论，可证 3,4,6 成立。

之所以在 Fourier 级数中插入对卷积的讨论，是因为将 Fourier 系数代入级数表达式，就会出现卷积的形式。若考虑 Fourier 级数的部分和，则有

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx} \quad (2.83)$$

$$= \sum_{n=-N}^N \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \quad (2.84)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy \quad (2.85)$$

$$= f * D_N(x) \quad (2.86)$$

函数  $f$  的 Fourier 级数的部分和中自然出现了卷积，而与  $f$  进行卷积的函数  $D_N$  则是一类重要的函数，也是接下来要讨论的核的一种：**Dirichlet 核**。从 Fourier 级数中提炼出核，表明研究  $S_N f$  可以从研究对应的 Dirichlet

核入手.

### 2.2.2 核与好核

谈及核，我们先例举两种比较经典的核，Dirichlet 核与 Poisson 核，前者我们在刚才已经见过，后者在 PDE 中更常见。

#### 例 2.3 三角多项式

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} \quad (2.87)$$

被称为第  $N$  项 Dirichlet 核。可以看出，求和的相邻项之间是等比的，因此设  $w = e^{ix}$ ，使用等比数列求和公式可得

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N w^n = \sum_{n=0}^N w^n + \sum_{n=-N}^{-1} w^n \quad (2.88)$$

$$= \sum_{n=0}^N w^n + \sum_{n=1}^N w^{-n} \quad (2.89)$$

$$= \frac{1-w^{N+1}}{1-w} + w^{-1} \frac{1-w^{-N}}{1-w^{-1}} = \frac{1-w^{N+1}}{1-w} + \frac{w^{-N}-1}{1-w} \quad (2.90)$$

$$= \frac{w^{-N}-w^{N+1}}{1-w} = \frac{w^{-(N+1/2)}-w^{N+1/2}}{w^{-1/2}-w^{1/2}} \quad (2.91)$$

$$= \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \quad (2.92)$$

这也是 Dirichlet 核的三角形式，我们更熟悉的形式。

#### 例 2.4 函数

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \quad (2.93)$$

称为 Poisson 核，其中  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,  $0 \leq r < 1$ ，Poisson 核经常出现在热传导方程相关问题中。

易得该级数是绝对收敛的，因此可以交换求和次序，令  $w = re^{ix}$ ，可得到

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}^n \quad (2.94)$$

$$= \frac{1}{1-w} + \frac{\bar{w}}{1-\bar{w}} \quad (2.95)$$

$$= \frac{1-\bar{w}+(1-w)\bar{w}}{(1-w)(1-\bar{w})} = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2} \quad (2.96)$$

$$= \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \quad (2.97)$$

这是 Poisson 核的三角形式。

虽然很难定义什么是一个“核”，但通过上面的两个例子，我们可以大致感受核这一概念。在证明定理 2.1 时，我们曾构造过一列三角多项式  $\{p_k\}$ ，它们在原点有“峰”，因此我们可以在将  $f$  的积分限制在原点附近，以此得到我们期望的矛盾，这也是一种核，并且是一类性质很好的核，借助卷积运算，可以进一步体现其强大之处。首先来定义“好核”的概念。

#### 定义 2.5 (好核 (good kernel))

称一列定义在圆上的函数  $\{K_n(x)\}$  是“好核”，若其满足：

1. 对任意  $n \geq 1$ ，都有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1. \quad (2.98)$$

2. 存在  $M > 0$ , 使得对任意  $n \geq 1$ , 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M. \quad (2.99)$$

3. 对任意  $\delta > 0$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx = 0. \quad (2.100)$$



简单来说, 如果将好核  $K_n$  看作质量分布, 则当  $n \rightarrow \infty$  时,  $K_n(x)$  的大部分质量会处于原点附近, 边缘部分会非常小, 以至于最后会“只剩下原点的‘峰’”, 从图像出发, 可以更直观感受到好核的性态:

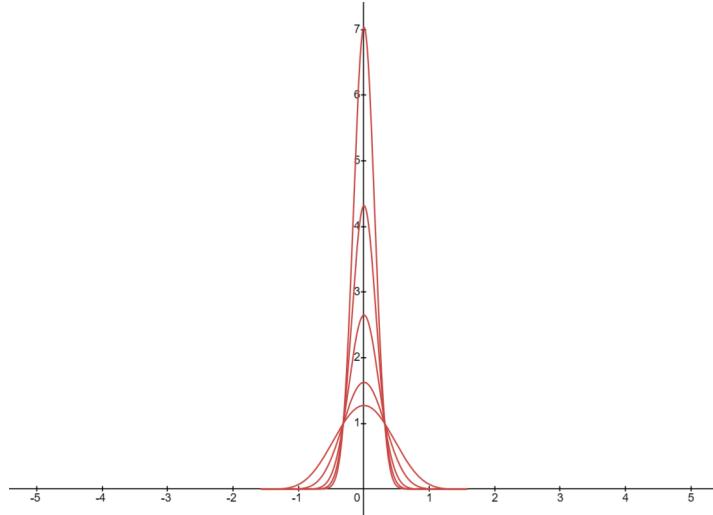


图 2.1: 好核

好核到底好在哪里? 先让话题回到卷积, 卷积具有很多非常好的性质, 它可以作为一种运算定义在全体 Riemann 可积函数组成的集合中, 那么卷积运算是否存在单位元, 即是否存在函数  $g(x)$ , 使得对任意 Riemann 可积函数  $f$ , 都有  $g * f = f$  成立? 答案是否定的, 假设存在这样的函数  $g(x)$ , 考虑函数  $f(x) = e^{inx}$ , 则

$$e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{in(x-y)} dy \quad (2.101)$$

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-iny} dy \quad (2.102)$$

这表明对任意  $n \in \mathbb{Z}$ , 都有  $\hat{g}(n) = 1$ , 但  $g$  为 Riemann 可积函数, 根据 Riemann-Lebesgue 引理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{g}(n) = 0 \quad (2.103)$$

这显然是矛盾的.

但在分析学中, 一个很重要的观点就是“逼近”, 既然不存在, 能否用一列函数去逼近? 好核的意义正在于此, 对于好核, 我们有如下逼近定理:

### 定理 2.2 (逼近定理)

设  $\{K_n\}$  为好核,  $f$  为圆上的 Riemann 可积函数, 则当  $f$  在  $x$  处连续时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f * K_n(x) = f(x) \quad (2.104)$$

特别地, 若  $f$  在圆上连续, 则上式一致地成立.



正因如此, 好核也常被称为“单位近似”(approximation to the identity).

**证明** 根据  $f$  的可积性可知其有界, 故假设对任意  $x$ , 都有  $|f(x)| \leq C$ . 由于  $f$  在  $x$  处连续, 故对任意  $\varepsilon > 0$ , 存

在  $0 < \delta < \pi$ , 对于任意  $|y| < \delta$ , 都有

$$|f(x-y) - f(x)| < \frac{\pi\varepsilon}{M} \quad (2.105)$$

其中  $M$  为好核定义 2 中的上界. 由于  $\{K_n\}$  为好核, 故对上面的  $\delta > 0$ , 存在  $N$  使得对任意  $n > N$  都有

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx < \frac{\pi\varepsilon}{2C} \quad (2.106)$$

因此我们有估计

$$|f * K_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)[f(x-y) - f(x)] dy \right| \quad (2.107)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)| |f(x-y) - f(x)| dy \quad (2.108)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \delta} |K_n(y)| |f(x-y) - f(x)| dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| |f(x-y) - f(x)| dy \quad (2.109)$$

$$< \frac{\pi\varepsilon}{M} \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \delta} |K_n(y)| dy + \frac{2C}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy \quad (2.110)$$

$$< \frac{\pi\varepsilon}{M} \frac{M}{2\pi} + \frac{2C}{2\pi} \frac{\pi\varepsilon}{2C} \quad (2.111)$$

$$= \varepsilon \quad (2.112)$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f * K_n(x) = f(x). \quad (2.113)$$

特别地, 若  $f$  为连续函数, 则必然一致连续 (Cantor 引理), 因此上面的  $\delta$  可一致地取到, 最终得到的结果必然是一致收敛的.

好核具有非常好的性质, 回想 Fourier 级数的部分和, 有  $S_N f(x) = f * D_N(x)$ , 因此我们自然会产生一个问题: Dirichlet 核是不是好核? 若是, 那么对任何 Riemann 可积函数  $f$ , 在连续点  $x$  处都有

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) \quad (2.114)$$

那么关于 Fourier 级数的讨论可以简化许多. 但是, 虽然对任意  $N$ , 可以计算得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N e^{inx} dx \quad (2.115)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx \quad (2.116)$$

$$= 1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{in} \quad (2.117)$$

$$= 1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{(-1)^n - (-1)^{-n}}{in} \quad (2.118)$$

$$= 1 \quad (2.119)$$

但对任意  $N$ , 我们可以得到下面的命题, 它与好核的定义 2 矛盾.

### 命题 2.2

对任意  $N \in \mathbb{N}$ , 都有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq c H_N \quad (2.120)$$

其中  $c$  为常量,  $H_N$  为调和级数的前  $N$  项和.

**证明** 这里我们使用 Dirichlet 核的三角形式，即

$$D_N(x) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} \quad (2.121)$$

由于  $|D_N(x)|$  为偶函数，故

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx = 2 \int_0^{\pi} |D_N(x)| dx \quad (2.122)$$

$$\geq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k\pi}{N+1/2}}^{\frac{(k+1)\pi}{N+1/2}} \left| \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} \right| dx \quad (2.123)$$

$$\geq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2N+1}{(k+1)\pi} \int_{\frac{k\pi}{N+1/2}}^{\frac{(k+1)\pi}{N+1/2}} \left| \sin(N + \frac{1}{2})x \right| dx \quad (2.124)$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt \quad (2.125)$$

$$= \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \quad (2.126)$$

得证。

如果从函数图像直观来看 Dirichlet 核，则它不是好核的原因在于当  $N$  充分大时，它在边缘会振荡非常快。这也告诉我们，Fourier 级数的收敛性是错综复杂的，路漫漫其修远，我们将继续求索。

关于好核，我援引一段 math.stackexchange.com 网站上的一段回答结束这一部分讨论，原问题 (3294744) 问到好核的实际意义 (价值)，得到了这样的回答：

In general, Good kernels serve as a bridge between the continuous and the discontinuous, and even the discrete.

The mathematical tools of analysis are generally defined for functions that are at least continuous, and often smooth. But when you model a physical object, that model is generally discontinuous. For example, density suddenly drops from a non-zero value to zero as you cross the boundary of your model. In the "real world", this doesn't occur. In fact, below a certain level, the very concept of the boundary of a physical object breaks down. Which atoms are part of the object vs not? How far out from each atom in the object does the space inside the object vs outside extend? "Volume", "Density", "Surface Area", "Length", etc are not even definable, much less measurable, beyond certain limits of accuracy. To apply mathematical methods to "real world objects" - i.e., to do physics and engineering - is to pretend that this limit of definition does not exist.

For convenience, we represent particles as points, and extended objects as volumes of space with well-defined boundaries. But doing so engenders discontinuities, particularly in densities. The density function in the vicinity of a particle is not even representable by a function. It must somehow integrate to give the mass of the particle while being 0 everywhere except at that one point.

So to apply our continuous mathematical tools to these discontinuous models, we have to approximate the discontinuous functions with continuous ones. And that exactly is what these good kernels are doing. They approximate a density "function" of a particle of mass 1 located at the identity. Operations that require a continuous density can be applied to the kernels, then taking the limit as  $n \rightarrow \infty$  provides the answer for the actual particle.

## 2.3 收敛性的进一步讨论

在前面的讨论中，很多情况下 Fourier 级数并不能很好的收敛，对此通常有两种思路：进一步剖析，细化其收敛的条件；考虑新的求和方式，讨论 Fourier 级数在新方式下的收敛情况，本节我们将着重讨论后者，首先介绍两种求和，Cesaro 和与 Abel 和。

### 2.3.1 Cesaro 和

对于级数  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , 我们通常情况下定义其部分和

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \quad (2.127)$$

并当  $n \rightarrow \infty$  时, 若数列  $s_n$  极限存在, 则将其定义为级数的 (收敛) 值. 这是最基本的求和方式, 在这种情况下, 级数  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$  显然是发散的 (因为其部分和数列极限点不唯一), 它的部分和数列为  $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$ . 从它的部分和数列考虑, 可以看到各项均匀分布在  $1/2$  附近, 那么我们自然会想, 能否将代表部分和数列平均值的  $1/2$  作为一种新意义上的极限呢? 因此便引出了 Cesaro 和的概念.

#### 定义 2.6 (Cesaro 和)

对于数列  $\{a_n\}$ , 设其部分和为  $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ , 则定义其 Cesaro 部分和 (或 Cesaro 平均) 为

$$\sigma_N = \frac{s_0 + \dots + s_{N-1}}{N} \quad (2.128)$$

若数列  $\{\sigma_n\}$  收敛到  $\sigma$ , 则称级数  $\sum a_n$  在 Cesaro 和意义下收敛到  $\sigma$ .



Cesaro 和实际上是传统求和方式的直接推广, 因为根据 Stoltz 公式, 若  $s_n$  本身是收敛的, 那么  $\sigma_n$  会与  $s_n$  有相同的极限, 反之不然, 比如容易验证,  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$  在 Cesaro 和意义下收敛到  $1/2$ .

在这种推广意义下考虑 Fourier 级数, 可以定义函数  $f$  的 Fourier 级数的 Cesaro 平均为

$$\sigma_N f(x) = \frac{S_0 f(x) + \dots + S_{N-1} f(x)}{N} \quad (2.129)$$

我们知道  $S_n f = f * D_n$ , 同样地, 对于上面的 Cesaro 平均, 也可以得到

$$\sigma_N f(x) = \frac{S_0 f(x) + \dots + S_{N-1} f(x)}{N} \quad (2.130)$$

$$= \frac{f * D_0(x) + \dots + f * D_{N-1}(x)}{N} \quad (2.131)$$

$$= f * \left( \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N} \right)(x) \quad (2.132)$$

$$= f * F_N(x) \quad (2.133)$$

上面的  $F_N$  是 Fourier 分析中非常重要的 Fejer 核, 它也是 Dirichlet 核的 Cesaro 和. 更进一步, 我们可以得到 Fejer 和的表达式, 为方便起见, 同样作约定  $w = e^{ix}$ .

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w^{-k} - w^{k+1}}{1-w} \quad (2.134)$$

$$= \frac{1}{n(1-w)} \left[ \frac{1-w^{-n}}{1-w^{-1}} - \frac{w-w^{n+1}}{1-w} \right] \quad (2.135)$$

$$= \frac{1}{n(1-w)} \left[ \frac{w^{-n+1}-w}{1-w} - \frac{w-w^{n+1}}{1-w} \right] \quad (2.136)$$

$$= \frac{w^{-n}+w^n-2}{n(w^{-1}+w-2)} = \frac{(w^{n/2}-w^{-n/2})^2}{n(w-w^{-1})^2} \quad (2.137)$$

$$= \frac{1}{n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)} \quad (2.138)$$

虽然 Dirichlet 不是好核, 但是其 Cesaro 和的结果——Fejer 核是一个好核, Fejer 核的重要性也正在于此, 我们下面来证明这件事.

**命题 2.3**

Fejer 核

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)} \quad (2.139)$$

是好核.

**证明**

1. 首先来验证归一化条件.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) dx \quad (2.140)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx \quad (2.141)$$

$$= 1 \quad (2.142)$$

2. 由于 Fejer 核是非负的，因此条件 2 是显然满足的.

3. 最后来验证边缘的衰减性. 首先证明一个对正弦函数的估计，对任意  $|x| \leq \pi$ ，都有

$$|x| \leq \pi |\sin \frac{x}{2}|. \quad (2.143)$$

令  $g(x) = x - \pi \sin \frac{x}{2}$ ，根据对称性，只需要证明  $0 \leq x \leq \pi$  时有  $g(x) \leq 0$  即可.由于  $g'(x) = 1 - \frac{\pi}{2} \cos \frac{x}{2}$ ，故  $g'(x)$  在  $[0, \pi]$  存在唯一零点  $x_0$ ，并且  $g'(x)$  在  $[0, x_0]$  为正，在  $[x_0, \pi]$  为负，这表明  $g(x)$  在  $[0, x_0]$  单调递增，在  $[x_0, \pi]$  单调递增，但由于  $g(0) = g(\pi) = 0$ ，故在  $[0, \pi]$  恒有  $g(x) \leq 0$ .利用这个估计，对任意  $0 < \delta < \pi$ ，都有

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |F_n(x)| dx = \frac{2}{n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)} dx \leq \frac{2\pi^2}{n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \quad (2.144)$$

$$= 2\pi^2 \left( \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\pi} \right) \frac{1}{n} \quad (2.145)$$

$$= c(\delta) \frac{1}{n} \quad (2.146)$$

这表明对任意给定的  $\delta$ ，任意  $\varepsilon > 0$ ，只要取  $N = \lfloor (c(\delta) + 1)/\varepsilon \rfloor$ ，那么对任意  $n > N$ ，都有

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |F_n(x)| dx \leq \frac{c(\delta)}{n} \leq \frac{c(\delta)}{c(\delta) + 1} \varepsilon < \varepsilon \quad (2.147)$$

得证.

因为 Fejer 核是好核，故许多好核的性质都可以直接“移植”过来，我们有如下推论

**推论 2.5**设  $f$  为圆上的 Riemann 可积函数，则在 Cesaro 和的意义下， $f$  的 Fourier 级数在任何连续点  $x$  收敛到  $f$ ，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(x) = f(x) \quad (2.148)$$

特别地，若  $f$  在圆上连续，则上式一致地成立.**推论 2.6**设  $f$  为圆上的 Riemann 可积函数，且对任意  $n \in \mathbb{Z}$  都有  $\hat{f}(n) = 0$ ，那么若  $f$  在  $x_0$  处连续，则  $f(x_0) = 0$ . ♥

这个命题我们在一开始就证明过，当时也是构造了一种好核，但在这里借助 Cesaro 和可以更简单说明这件事.

**推论 2.7 (Weierstrass 逼近定理)**

圆上的连续函数可以被三角多项式一致逼近，换句话说，给定圆上的连续函数  $f$ ，对任意  $\varepsilon > 0$ ，都存在三角多项式  $P$ ，使得

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon. \quad (2.149)$$



这条定理可以看作 Weierstrass 逼近定理的三角形式，因为  $\sigma_n f = f * F_n$  为三角多项式，所以利用 Fourier 级数的 Cesaro 和可以直接给出一个构造性证明<sup>1</sup>.

**2.3.2 Abel 和**

另一种求和方式是 Abel 和.

**定义 2.7 (Abel 和)**

对于级数  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ，称其 Abel 和为  $s$ ，若对任意  $0 \leq r < 1$ ，级数

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \quad (2.150)$$

收敛，并且  $\lim_{r \rightarrow 1^-} A(r) = s$ ，其中  $A(r)$  称为级数的 Abel 和（或 Abel 平均）.



根据幂级数理论可知，若级数收敛，则其在 Abel 和意义下也收敛到相同值. 事实上，Abel 和是一种比 Cesaro 和更强的求和，也就是说若级数在 Cesaro 和意义下收敛，则其在 Abel 和意义下也收敛到相同值，反之不然，我们在证明下述命题后给出一个反例.

**命题 2.4**

若级数在 Cesaro 和意义下收敛，则其在 Abel 和意义下也收敛到相同值.

**证明****例 2.5 考虑级数**

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1), \quad (2.151)$$

如果考虑其 Cesaro 和，则有

$$s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (k+1) = (-1)^n \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \quad (2.152)$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{n}{2} + 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (2.153)$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \quad (2.154)$$

$$= \begin{cases} \frac{n+1}{2n}, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (2.155)$$

即其在 Cesaro 和意义下发散. 但是

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) r^k = \frac{1}{(1+r)^2} \quad (2.156)$$

<sup>1</sup>关于 Weierstrass 逼近定理，如果有机会我们在附录中进行更多的介绍（先挖个坑）.

因此该级数在 Abel 和意义下收敛，且 Abel 和为  $1/4$ .

如果对 Fourier 级数考虑 Abel 和，则有

$$A_r f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \hat{f}(n) e^{inx} \quad (2.157)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \quad (2.158)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(x-y)} \right) dy \quad (2.159)$$

$$= f * P_r(x) \quad (2.160)$$

函数项级数的一致收敛保证了上面的求和号与积分号可以交换。这里出现了我们在前面举过例子的 Poisson 核，相比于 Dirichlet 核、Fejer 核以自然数为指标，Poisson 核可以看作一种不可数指标的核，而对于这种核，我们同样可以将好核的概念推广，这只需要将好核定义中的  $n$  换成  $r$ ，并将定义 3 中的极限修改为  $r \rightarrow 1$  即可（毕竟 Poisson 核中  $0 \leq r < 1$ ），更进一步，好核的性质也都可以推广过来。而有了这样的推广，我们自然会好奇：Poisson 核是不是好核？答案是肯定的。

### 命题 2.5

Poisson 核

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \quad (2.161)$$

是好核。



### 证明

1. 首先验证归一化条件。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} dx \quad (2.162)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|} e^{inx} dx \quad (2.163)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx + \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq 0} \int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|} e^{inx} dx \quad (2.164)$$

$$= 1 \quad (2.165)$$

上面积分与求和号可交换是因为级数绝对一致收敛。

2. 再验证绝对值有界性。因为  $P_r(x)$  的分子与分母均为正（分子显然，分母均值不等式易得），故  $P_r(x) > 0$ ，因此绝对值有界性是显然的。

3. 最后验证边缘衰减性。对于任意  $0 < \delta < \pi$ ,

$$1 - 2r \cos x + r^2 \geq 1 - 2r \cos \delta + r^2 \quad (2.166)$$

$$\geq \min\{1, 2(1 - \cos \delta)\} := c(\delta) > 0 \quad (2.167)$$

因此

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |x| \leq 2\pi} |P_r(x)| dx = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} dx \quad (2.168)$$

$$\leq \frac{2(1 - r)}{c(\delta)} \frac{1}{\pi} (\pi - \delta) \quad (2.169)$$

$$= \frac{2(\pi - \delta)}{\pi c(\delta)} (1 - r) \quad (2.170)$$

令  $r \rightarrow 1$ ，得证。

与 Cesaro 和类似，我们有推论

### 推论 2.8

设  $f$  为圆上的 Riemann 可积函数，则在 Abel 和的意义下， $f$  的 Fourier 级数在任何连续点  $x$  收敛到  $f$ ，即

$$\lim_{r \rightarrow 1} A_r f(x) = f(x) \quad (2.171)$$

特别地，若  $f$  在圆上连续，则上式一致地成立.



利用 Abel 和，我们可以对第一章中的热方程作更多的讨论，不过暂时仅限单位圆盘上的稳态情况（这种情况下方程也被称为位势方程）。圆盘的对称性促使我们在极坐标系中思考问题，即设  $u = u(r, \theta)$ ，则方程可表示为

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \\ u|_{\partial D} = u(1, \theta) = f(\theta) \end{cases} \quad (2.172)$$

这就是带有第一类边值（也称 Dirichlet 边值）的位势方程。假设解有形式

$$u(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m r^{|m|} e^{im\theta} \quad (2.173)$$

这里  $c_m$  是待定的系数，也是函数  $f$  的第  $m$  项 Fourier 系数（令  $r = 1$  易知），也就是说

$$u(r, \theta) = A_r f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) P_r(\theta - \varphi) d\varphi \quad (2.174)$$

事实上，在满足一些条件下，这样构造出的函数确实是方程的解（并且是唯一解）。

### 定理 2.3

设  $f$  为单位圆上的可积函数，则定义在单位圆盘中的函数  $u(r, \theta) = f * P_r(\theta)$  有如下性质：

1.  $u$  在单位圆盘中有二阶导数，并且满足  $\Delta u = 0$ 。
2. 若  $f$  在  $\theta$  处连续，则

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = f(\theta). \quad (2.175)$$

特别地，若  $f$  为连续函数，则上式一致地成立。

3. 若  $f$  为连续函数，则  $u(r, \theta)$  是满足上面两个条件的稳态热传导方程（位势方程）2.172 的唯一解。



### 证明

1. 我们主要使用函数项级数中的逐项微分定理。我们将  $u$  表示为

$$u(r, \theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(r, \theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N}^N c_m r^{|m|} e^{im\theta} \quad (2.176)$$

则每一项  $u_N$  都是可微的，且计算可得

$$\frac{\partial u_N}{\partial \theta} = \sum_{m=-N}^N i m c_m r^{|m|} e^{im\theta} \quad (2.177)$$

根据 Weierstrass 判别法（这里要用到每个  $c_m$  的一致有界性），该函数列绝对一致收敛，并且  $u_N$  至少在圆盘中一点收敛（事实上同样利用 Weierstrass 判别法，它在圆盘中每一点都收敛），因此对  $u(r, \theta)$  关于  $\theta$  的微分算子可与求和交换，即证  $u$  关于  $\theta$  一阶可微，同理可证二阶可微。

对于  $r$  也是一样。在证明可微后，为了计算验证其满足 Laplace 方程，只需要对每一求和项进行验证即可，设第  $m > 0$  项为  $v(r, \theta)$ ，则

$$\frac{\partial v}{\partial r} = |m| c_m r^{|m|-1} e^{im\theta} \quad (2.178)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = |m|(|m|-1) c_m r^{|m|-2} e^{im\theta} \quad (2.179)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = imc_m r^{|m|} e^{im\theta} \quad (2.180)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -m^2 c_m r^{|m|} e^{im\theta} \quad (2.181)$$

代入方程

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \quad (2.182)$$

得证.

2. 第二点是“显然”的，只需要使用前面的推论2.8即可。
3. 对于第三点，我们已验证  $u$  是解，假设还有解  $v$  满足前两条，则对于每个固定的  $0 < r < 1$ ，该解有 Fourier 级数（收敛性由连续性得到）

$$v(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r) e^{in\theta}, \quad a_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (2.183)$$

将其代入方程  $\Delta v = 0$  可得

$$a_n''(r) + \frac{1}{r} a_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} a_n(r) = 0 \quad (2.184)$$

我们在第一章讨论过，这类 ODE 的解为

$$a_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n} \quad (2.185)$$

根据  $a_n$  有界性 ( $v$  有界) 可知  $B_n = 0$ ，为了求出  $A_n$  我们令  $r \rightarrow 1$ ，则有

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (2.186)$$

这表明  $v$  仍旧由  $f$  的 Fourier 系数确定，即  $u = v$ ，唯一性得证。

**注** 在上面的 3 中，若  $u$  为方程的解，并且当  $r \rightarrow 1$  时一致趋于 0，则  $u \equiv 0$ ，但若是驻点趋于 0 则不然。比如考虑

$$u(r, \theta) = \frac{\partial P_r}{\partial \theta} = -\frac{2r(1-r^2)\sin\theta}{(1-2r\cos\theta+r^2)^2} \quad (2.187)$$

容易验证其满足

$$\Delta u = 0 \quad (2.188)$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = 0, \forall \theta \quad (2.189)$$

但  $u$  不是恒为 0 的。

## 2.4 \* 不连续情况的 Fourier 级数

# 第3章 Fourier 级数的收敛性

## 3.1 平方平均收敛

在本节中，我们主要讨论 Fourier 级数的一种新收敛性，平方平均收敛，相比于过去使用的逐点收敛，或是在此基础上的一致收敛，平方平均收敛体现了一种整体的收敛。因为收敛性依赖于范数，因此我们先对线性代数的内容做一些回顾、准备。

### 3.1.1 内积空间

在线性代数中，我们定义过抽象向量空间

#### 定义 3.1 (向量空间)

称一个带有加法与数乘的集合  $(V/\mathbb{F}, +, \cdot)$  为域  $\mathbb{F}$  线性空间（向量空间），要求：

1.  $(V, +)$  构成 Abel 群：
  - (a). 单位元： $0 \in V$ .
  - (b). 逆元： $\forall v \in V, \exists (-v) \in V : v + (-v) = 0$ .
  - (c). 封闭性： $\forall u, v \in V, u + v \in V$ .
  - (d). 结合律： $\forall u, v, w \in V, (u + v) + w = u + (v + w)$ .
  - (e). 交换律： $\forall u, v \in V, u + v = v + u$ .
2. 数乘定义为  $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ ，满足
  - (a). 乘法单位元： $1 \in \mathbb{F}, \forall v \in V, 1v = v$ .
  - (b). 数乘结合律： $\forall a, b \in \mathbb{F}, v \in V : \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ .
  - (c). 分配律：

$$\forall a, b \in \mathbb{F}, v \in V : (a + b)v = av + bv \quad (3.1)$$

$$\forall a \in \mathbb{F}, u, v \in V : a(u + v) = au + av \quad (3.2)$$



其中域  $\mathbb{F}$  通常为  $\mathbb{R}$  或  $\mathbb{C}$ ，在本节中，如无特殊说明， $\mathbb{F}$  均指  $\mathbb{R}$  或  $\mathbb{C}$ 。我们最常见的线性空间就是  $\mathbb{R}^d/\mathbb{R}$ ，它表示集合

$$\mathbb{R}^d = \{(x_1, \dots, x_d) : x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}\} \quad (3.3)$$

其中的加法与数乘则是对应分量的加法与数乘。同样地， $\mathbb{C}^d/\mathbb{C}$  也是一个常见的向量空间。

在向量空间定义内积，可以将其变成内积空间。

#### 定义 3.2 (内积)

称  $V/\mathbb{F}$  上的二元函数  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \rightarrow \mathbb{F}$  为内积，若满足

1. 正定性：对任意  $v \in V : \langle v, v \rangle \geq 0$ ，取等当且仅当  $v = 0$ .
2. 第一个位置的线性：对任意  $u_1, u_2, v \in V, a, b \in \mathbb{F} : \langle au_1 + bu_2, v \rangle = a\langle u_1, v \rangle + b\langle u_2, v \rangle$ .
3. 共轭对称性：对任意  $u, v \in V : \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ .

定义了内积的向量空间称为内积空间。



由共轭对称性与第一个位置的线性可以推出第二个位置的共轭线性，因此内积是一种反对称双线性函数。特别当  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  时，由于实数的共轭仍然为自身，此时内积变为对称双线性函数。接下来定义范数

**定义 3.3 (范数)**

称线性空间  $V$  上的函数  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$  为范数, 若其满足

1. 非负性: 对任意  $v \in V$ :  $\|v\| \geq 0$ .
2. 齐次性: 对任意  $c \in \mathbb{F}, v \in V$ :  $\|cv\| = |c| \|v\|$ .
3. 三角不等式: 对任意  $u, v \in V$ :  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .



内积可以自然诱导出范数, 即定义范数  $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ . 比如我们定义  $\mathbb{R}^d$  上的内积为

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d x_i y_i, \quad (3.4)$$

则其诱导出范数  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$ , 这是我们常见的 Euclid 范数, 通常使用  $|\cdot|$  代替  $\|\cdot\|$  进行表示. 对于复内积空间也可以定义类似的内积与范数, 只是形式上与  $\mathbb{R}$  的情形有些许不同, 即

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d x_i \bar{y}_i, \quad (3.5)$$

直观理解, 如果不将  $y_i$  改为  $\bar{y}_i$ , 则上面定义的内积将不满足正定性 (结果甚至可能会是一个复数) 以及共轭对称性. 这种内积也会诱导出范数  $\|v\| = \sqrt{x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_d \bar{x}_d} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$  (这里的  $|\cdot|$  表示模长), 这就是复内积空间中的 Euclid 范数.

有了内积, 我们可以讨论一个重要概念: 正交性. 如果从  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  的几何直观来看, 正交代表直角、垂直, 而更广义的正交实际上也是这种不相干性、无关性的推广, 后面我们会证明, 正交性与勾股定理的联系.

**定义 3.4 (正交性)**

称内积空间  $V$  中两个  $u, v$  正交, 若  $\langle u, v \rangle = 0$ , 记为  $u \perp v$ .



容易看出, 若  $u$  与  $v$  正交, 则  $v$  与  $u$  正交, 这表明在正交性的叙述中向量的次序无关紧要; 并且 0 与任何向量正交, 0 也是  $V$  中唯一与自身正交的向量 (根据内积的正定性).

正交性使得我们可以对向量进行正交分解, 即将向量  $u$  分解为沿向量  $v \neq 0$  方向以及与  $v$  正交的方向上的向量之和.

**命题 3.1 (正交分解)**

设  $u, v \in V, v \neq 0$ , 令  $c = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$ , 则

$$u = cv + w \quad (3.6)$$

称为  $u$  在  $v$  方向上的正交分解, 其中  $w \perp v$ .



借助正交分解, 可以很容易证明内积空间中的 Cauchy-Schwarz 不等式, 这一点我们连同 (广义) 勾股定理、内积诱导范数的三角不等式一同给出.

**命题 3.2**

设  $V/\mathbb{F}$  为内积空间,  $\|\cdot\|$  为内积诱导的范数, 则

1. 勾股定理: 对任意正交的  $x, y \in V$ :  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .
2. Cauchy-Schwarz 不等式: 对任意  $x, y \in V$ :  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ .
3. 三角不等式: 对任意  $x, y \in V$ :  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**证明**

1. 正交性告诉我们  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = 0$ , 因此直接计算可得

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad (3.7)$$

2. 当  $y = 0$  时, 显然成立, 若不然, 则令

$$x = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y + z \quad (3.8)$$

两边同时与  $y$  做内积可知  $z \perp y$ , 因此

$$\|x\|^2 = \left\| \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y \right\|^2 + \|z\|^2 \quad (3.9)$$

$$= \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \|z\|^2 \quad (3.10)$$

$$\geq \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \quad (3.11)$$

移项得证, 同时可知等号成立当且仅当  $u, v$  共线.

3.

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle \quad (3.12)$$

$$\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| \quad (3.13)$$

$$\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \quad (3.14)$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2 \quad (3.15)$$

得证, 同时可知等号成立当且仅当  $u, v$  共线且同向.

我们前面大多立足于有限维向量空间的讨论, 最后给出两个无限维向量空间的例子.

**例 3.1** 设

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (\dots, a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_n, \dots) : a_k \in \mathbb{C}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\} \quad (3.16)$$

则容易验证  $\ell^2(\mathbb{Z})$  在逐项加法、数乘下是  $\mathbb{C}$  上的向量空间 (大多条件都是容易验证的, 重点在于根据级数收敛理论说明封闭性), 并且可以定义其中内积为

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \bar{b}_n \quad (3.17)$$

由内积诱导的范数为

$$\|a\| = \langle a, a \rangle^{1/2} = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{1/2} \quad (3.18)$$

内积的合理性是容易验证的, 我们下面证明范数所满足的三角不等式确实成立.

### 命题 3.3

对于任意  $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , 都有  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ .



**证明** 对于  $a, b$ , 我们定义其从  $-n$  到  $n$  的截断部分为

$$a^{(n)} = \{\dots, 0, a_{-n}, \dots, a_n, 0, \dots\} \quad (3.19)$$

$$b^{(n)} = \{\dots, 0, b_{-n}, \dots, b_n, 0, \dots\} \quad (3.20)$$

则  $a^{(n)}, b^{(n)} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , 并且根据  $\mathbb{C}^{2n+1}$  中的三角不等式可得

$$\|a^{(n)}\| + \|b^{(n)}\| = \left( \sum_{|k| \leq n} |a_k + b_k|^2 \right)^{1/2} \quad (3.21)$$

$$\leq \left( \sum_{|k| \leq n} |a_k|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{|k| \leq n} |b_k|^2 \right)^{1/2} \quad (3.22)$$

$$\leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^2 \right)^{1/2} \quad (3.23)$$

$$= \|a\| + \|b\| \quad (3.24)$$

由于上面的不等式对任意  $n \in \mathbb{N}$  成立，因此令  $n \rightarrow \infty$ ，得证。

最后我们证明一个特殊的命题， $\ell^2(\mathbb{Z})$  空间是完备的。

#### 命题 3.4

向量空间  $\ell^2(\mathbb{Z})$  是完备的，即其中的 Cauchy 列收敛，并且极限仍在  $\ell^2(\mathbb{Z})$  中。



**证明** 设  $\{a_n\}$  为  $\ell^2(\mathbb{Z})$  中 Cauchy 列，记  $a_k = (\dots, a_{-n,k}, \dots, a_{n,k}, \dots)$ ，根据定义，对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $N > 0$ ，对任意  $m, n > N$ ，都有

$$|a_{k,m} - a_{k,n}| \leq \|a_m - a_n\| < \varepsilon \quad (3.25)$$

上式对每个固定的  $k$  成立，根据  $\mathbb{C}$  中的 Cauchy 收敛原理， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k,n} = b_k < \infty$ ，我们记

$$b = (\dots, b_{-n}, \dots, b_n, \dots) \quad (3.26)$$

下证  $a_n \rightarrow b$ 。

仿照上面的放缩过程，对于任意  $k$ ，也有  $\|a_m^{(k)} - a_n^{(k)}\| \leq \|a_m - a_n\| < \varepsilon$ ，根据  $\mathbb{C}^{2k+1}$  中的 Cauchy 收敛原理，对任意  $k \geq 0$ ，都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(k)} = b^{(k)} \quad (3.27)$$

由于上面  $N$  的选择与  $k$  无关，故上面的极限对  $k$  一致的成立，令  $k \rightarrow \infty$ ，就有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \quad (3.28)$$

还需要证明  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|^2 < \infty$ ，使得  $b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ，由于  $n \rightarrow \infty$  时  $a_n \rightarrow b$ ，故对任意  $\varepsilon > 0$ ，当  $n$  充分大时，有  $\|b\| - \|a_n\| \leq \|b - a_n\| < \varepsilon$ ，这说明

$$\|b\| \leq \|a_n\| + \varepsilon \quad (3.29)$$

故  $b$  平方收敛。

我们讨论过的内积空间  $\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d, \ell^2(\mathbb{Z})$  都有一个共同的特点，都满足：

1. 范数严格正定，即  $\|x\| = 0$  当且仅当  $|x| = 0$ 。
2. 向量空间是完备的，即其中的 Cauchy 列收敛，并且极限仍在该向量空间中。

满足上面两个条件的内积空间被称为 **Hilbert 空间**，可以看出  $\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^d, \ell^2(\mathbb{Z})$  都是 Hilbert 空间的例子。假如上面的条件有一条不满足，则称之为**准 Hilbert 空间**，下面我们给出一个重要的准 Hilbert 空间的例子，它不满足上述两个条件。

**例 3.2** 设  $\mathcal{R}$  为圆上的 Riemann 可积函数全体构成的集合，则它在逐点加法、数乘的条件下构成  $\mathbb{C}$  上的线性空间，并且我们可以定义内积

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \bar{g}(\theta) d\theta \quad (3.30)$$

继而由内积诱导出范数

$$\|f\| = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta \right)^{1/2} \quad (3.31)$$

这种范数称为  $L^2$  范数，其满足的三角不等式正好是 Minkowski 不等式<sup>1</sup>。

看似一切和前面相同，但是如果采用前面的方法证明 Cauchy-Schwarz 不等式，则会出现问题，因为  $\|f\| = 0$  不代表  $f \neq 0$ ，这与我们在前一章讨论过的问题相同，可以改变函数在一个点的取值使得积分值不变，比如考虑

<sup>1</sup>事实上，如果将上面的条件放宽到平方可积函数，对于圆上的平方可积函数定义上面的内积和范数，则可以得到一类重要的内积空间，记为  $L^2(\mathbb{C})$ 。

在 0 处取 1，其它处都取 0 的函数.

这也使我们注意到一件事，前面提到过内积的正定性，这里也并不满足，按理来说，这里定义的内积并不能被称为内积，事实上，根据（可积函数的）Lebesgue 引理，满足  $\|f\| = 0$  的函数在只圆上一个 Lebesgue 零测集中不为 0，对于这种函数，我们称之为“几乎处处为 0”，根据这样的逻辑，我们可以称两个差几乎处处为 0 的函数“几乎处处相等”，因此如果我们不考虑函数的空间，而考虑函数等价类的空间，那么  $\|f\| = 0$  就恰好对应了几乎处处为 0 的函数类，但在大部分时候，采用函数等价类的空间不如函数的空间方便，因此我们仍然保持上面的定义。这就解决了这种问题<sup>2</sup>。

这里我们给出一个  $\mathcal{R}$  中的 Cauchy-Schwarz 不等式的证明。

### 命题 3.5

设  $f, g \in \mathcal{R}$ ，则  $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$ .



**证明** 若  $f$  几乎处处为 0，则不等式显然成立（式左为 0），若不然则  $\|f\| \neq 0$ 。根据均值不等式，对任意  $\lambda > 0$ ，有

$$|f(\theta)\bar{g}(\theta)| \leq \frac{1}{2}(\lambda|f(\theta)|^2 + \lambda^{-1}|g(\theta)|^2) \quad (3.32)$$

对上式在  $[0, 2\pi]$  积分可得

$$|\langle f, g \rangle| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)\bar{g}(\theta)| d\theta \leq \frac{1}{2}(\lambda\|f\|^2 + \lambda^{-1}\|g\|^2) \quad (3.33)$$

接着取  $\lambda = \|g\|/\|f\|$  即证。

为了说明上面的内积空间不完备，我们构造  $\mathcal{R}$  中函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/n \\ f(x), & 1/n < x \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.34)$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \ln(1/x), & 0 < x \leq 2\pi \end{cases} \quad (3.35)$$

则由于

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_{n+p}(x) - f_n(x)|^2 dx \quad (3.36)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{1/(n+p)}^{1/n} |\ln(1/x)|^2 dx \quad (3.37)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_n^{n+p} \left( \frac{\ln(u)}{u} \right)^2 du \leq \frac{1}{2\pi} \int_n^{n+p} \left( \frac{\sqrt{2\pi}x^{1/3}}{x} \right)^2 du \quad (3.38)$$

$$= \int_n^{n+p} x^{-4/3} du = \frac{x^{-1/3}}{-1/3} \Big|_n^{n+p} \quad (3.39)$$

$$= \frac{3p}{n(n+p)} \leq \frac{3}{n} \quad (3.40)$$

因此  $\{f_n\}$  为 Cauchy 列，并且有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ，但是其极限在 0 附近发散，且平方不可积（指 Riemann 积分，不考虑反常积分），因此  $f \notin \mathcal{R}$ 。

最后，我们仿照有限维内积空间中标准正交基的概念，定义  $\mathcal{R}$  中的标准正交系。

<sup>2</sup>这部分思想参考 Stein 的 Real analysis，其中还有一些不太理解的部分，以及一些待处理的细节（比如良定性等），日后再补吧。

**定义 3.5 (标准正交系)**

对于  $\mathcal{R}$  中的一组函数  $\{\varphi_i \in \mathcal{R} : i \in I\}$ , 若对于任意  $i, j \neq I$ , 都有

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \quad (3.41)$$

则称  $\{\varphi_i \in \mathcal{R} : i \in I\}$  是  $\mathcal{R}$  中的一组标准正交系.



正交函数系有很多, 后面主要使用的是我们已经很熟悉的  $e_n(x) = e^{inx}, n \in \mathbb{Z}$  (我们早已验证过它确实满足标准正交系的条件). 从这种角度看, 函数  $f$  的 Fourier 级数的各项系数也可以写成  $f$  与对应的基进行内积的形式, 即

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \langle f, e_n \rangle \quad (3.42)$$

同理, Fourier 级数的部分和也可以写作

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{inx} = \sum_{|n| \leq N} \langle f, e_n \rangle e_n \in \text{Span}(e_{-N}, \dots, e_0, \dots, e_N) \quad (3.43)$$

回顾有限维内积空间, 给定一组标准正交基, 则其中任意向量都可被这组基张成, 而各个系数也是通过将向量与对应基作内积得到的. 下面回到正题, 在此基础讨论 Fourier 级数的平方平均收敛问题.

### 3.1.2 平方平均收敛

延续上一节的讨论, 由于  $e_n$  构成了一组标准正交系, 并且 Fourier 系数可用内积表示, 因此对于任意  $\{c_n \in \mathbb{C} : N \in \mathbb{Z}\}$  都有

$$(f - S_N f) \perp \sum_{|n| \leq N} c_n e_n \quad (3.44)$$

上面的关系可以直接对两边作内积得到. 并且我们有

$$f = (f - S_N f) + S_N f \quad (3.45)$$

$$\|f\|^2 = \|f - S_N f\|^2 + \|S_N f\|^2 = \|f - S_N f\|^2 + \sum_{|n| \leq N} |\hat{f}(n)|^2 \quad (3.46)$$

此外, 我们可以得到一个有趣的结论: Fourier 级数的最佳逼近. (这实际上也可以看作内积空间中极小化问题的一个例子.)

**引理 3.1 (最佳逼近)**

设  $f \in \mathcal{R}$ , 则对任意  $N \in \mathbb{N}, \{c_n : n \in \mathbb{Z}\}$ , 都成立

$$\|f - S_N f\| \leq \|f - \sum_{|n| \leq N} c_n e_n\| \quad (3.47)$$

等号成立当且仅当对任意  $n \in \mathbb{Z}$ , 都有  $c_n = \hat{f}(n)$ .



**证明** 设

$$f - \sum_{|n| \leq N} c_n e_n = f - S_N f + \sum_{|n| \leq N} b_n e_n \quad (3.48)$$

其中  $b_n = \hat{f}(n) - c_n$ , 则根据勾股定理 (以及前面提到的正交性) 可得

$$\|f - \sum_{|n| \leq N} c_n e_n\| = \|f - S_N f\| + \|\sum_{|n| \leq N} b_n e_n\| \quad (3.49)$$

$$= \|f - S_N f\| + \sum_{|n| \leq N} |b_n| \quad (3.50)$$

$$\geq \|f - S_N f\| \quad (3.51)$$

得证, 且等号成立当且仅当对任意  $n \in \mathbb{Z}$ , 都有  $b_n = 0$ ,  $c_n = \hat{f}(n)$ .

上面的引理说明，至多  $N$  次三角多项式中，与  $f$  在范数  $\|\cdot\|$  的意义下最接近的就是  $f$  的 Fourier 级数的部分和，这是因为  $f$  在  $\text{Span}(e_{-N}, \dots, e_0, \dots, e_N)$  空间的正交射影恰好是  $S_N f$ ，通过下图我们可以更直观理解。

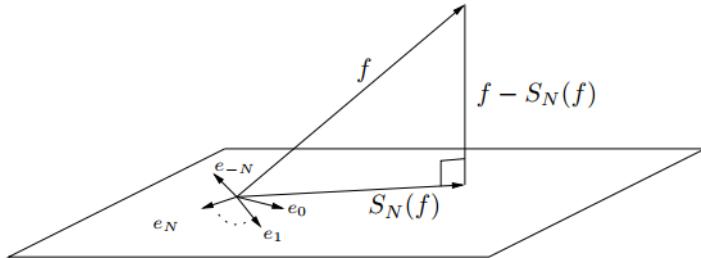


图 3.1: 最佳逼近

下面我们通过最佳逼近引理来证明平方平均收敛定理。

**定理 3.1 (平方平均收敛)**

设  $f \in \mathcal{R}$ ，则  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N f\| = 0$ ，即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - S_N f(\theta)|^2 d\theta = 0. \quad (3.52)$$



与证明卷积性质时相同，我们先证明命题对连续情况成立，再利用2.1对可积情形进行处理。

**证明** 若  $f$  连续，则根据 Weierstrass 逼近定理，对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在三角多项式  $P(\theta)$ ，设其次数为  $M$ ，使得

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta) - P(\theta)| < \varepsilon \quad (3.53)$$

但根据最佳逼近引理，对任意  $N > M$ ，都有

$$\|f - S_N f\| \leq \|f - P\| \leq \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta) - P(\theta)| < \varepsilon \quad (3.54)$$

即连续情况得证。若  $f$  仅可积，则根据引理2.1，对于任意  $\varepsilon > 0$ ，存在圆上的连续函数  $g$ ，使得

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |g(\theta)| \leq \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)| = B \quad (3.55)$$

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)|^2 d\theta < \varepsilon^2 \quad (3.56)$$

因此

$$\|f - g\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)|^2 d\theta \quad (3.57)$$

$$\leq \frac{2B}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)| d\theta \quad (3.58)$$

$$\leq C\varepsilon^2 \quad (3.59)$$

而对于连续函数  $g$ ，使用上面的结论，存在三角多项式  $P(\theta)$ ，使得  $\|g - P\| < \varepsilon$ ，因此

$$\|f - S_N f\| \leq \|f - P\| \leq \|f - g\| + \|g - P\| < C'\varepsilon \quad (3.60)$$

得证。

利用 Fourier 级数的平方平均收敛性质以及前面的讨论，可以得到下面两个重要结论：Parseval 等式可以看作  $\mathcal{R}$  中的勾股定理，这是对  $\mathbb{R}^n$  中勾股定理的直接推广；R-L 引理给出了 Fourier 系数在无穷远处的衰减性。

**定理 3.2 (Bessel 不等式 & Parseval 等式)**

设  $f \in \mathcal{R}$ , 则对任意  $\{c_n \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{Z}\}$ , 都有 Bessel 不等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|^2, \quad (3.61)$$

等号成立当且仅当对任意  $n \in \mathbb{Z}$ , 都有  $c_n = \hat{f}(n)$ , 此时成立 Parseval 等式

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2. \quad (3.62)$$

**定理 3.3 (Riemann-Lebesgue 引理)**

若  $f$  为圆上的可积函数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0 \quad (3.63)$$

如果使用 Euler 公式, 则可以得到 R-L 引理的三角函数形式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \quad (3.64)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \quad (3.65)$$

作为本节的结尾, 我们给出一个更一般的 Parseval 等式, 它可以看作内积的极限推广.

**定理 3.4**

设  $f, g \in \mathcal{R}$ , 则

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \langle e_n, g \rangle \quad (3.66)$$

**证明** 我们只需使用复内积空间中的极化恒等式

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} [ \|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i(\|f + ig\|^2 - \|f - ig\|^2)] \quad (3.67)$$

将各项代入, 根据级数的可加性, 右侧括号内的部分为 (只考虑每一项)

$$|\hat{f}(n) + \hat{g}(n)|^2 - |\hat{f}(n) - \hat{g}(n)|^2 + i(|\hat{f}(n) + i\hat{g}(n)|^2 - |\hat{f}(n) - i\hat{g}(n)|^2) \quad (3.68)$$

$$= 2(\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} + \overline{\hat{f}(n)}\hat{g}(n)) - 2(\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} - \overline{\hat{f}(n)}\hat{g}(n)) \quad (3.69)$$

$$= 4\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} \quad (3.70)$$

得证.

## 3.2 对逐点收敛情况的进一步讨论

我们在上一节中讨论了 Fourier 级数的平方平均收敛, 这是一种整体的性质, 甚至平方平均收敛不能保证任何一点的逐点收敛性. 本节我们将延续一开始的讨论, 对逐点收敛情况进行进一步讨论, 这也称为 Fourier 函数的局部性.

### 3.2.1 Fourier 级数的局部性

如果对于函数的 Fourier 级数部分和进行变形, 可以得到

$$S_N f(x) = f * D_N(x) = D_N * f(x) \quad (3.71)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_N(y) dy \quad (3.72)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} f(x-y) D_N(y) dy + \int_{-\pi}^0 f(x-y) D_N(y) dy \right) \quad (3.73)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} f(x-y) D_N(y) dy + \int_0^{\pi} f(x+y) D_N(y) dy \right) \quad (3.74)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x-y) + f(x+y)] D_N(y) dy \quad (3.75)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x-y) + f(x+y)] \frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}} dy \quad (3.76)$$

对于任意  $0 < \delta < \pi$ , 可以将  $[0, \pi]$  分成  $[0, \delta], [\delta, \pi]$  两部分, 在  $[\delta, \pi]$  中, 任何  $D_N(x)$  都有定义 (且有限), 根据 R-L 定理, 当  $N \rightarrow \infty$  时收敛到 0. 因此  $S_N f$  在  $x$  处的收敛性仅与上面的函数在  $[0, \delta]$  部分的积分有关, 而这个积分也仅依赖  $f$  在  $(x - \delta, x + \delta)$  中的取值, 因此我们有下面的定理

### 定理 3.5 (局部化定理)

设  $f$  为圆上的可积函数, 则  $f$  的 Fourier 级数在点  $x_0$  处的收敛情况 (收敛性以及收敛值) 仅与  $f$  在  $x_0$  附近的行为有关.



这个定理并不显然, 因为我们在定义 Fourier 级数时使用的 Fourier 系数是用在一个周期上的积分定义的, 但上面的定理告诉我们 Fourier 级数在某一点的值其实仅依赖于函数在该点附近的状态. 比如要求可积函数在一点处可微, 就可以得到下面的定理.

### 定理 3.6

设  $f$  为圆上的可积函数, 并且在  $x_0$  处可微, 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = f(x_0) \quad (3.77)$$



**证明** 定义函数

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t}, & t \neq 0, |t| \leq \pi \\ -f'(x_0), & t = 0 \end{cases} \quad (3.78)$$

则  $F$  在  $x_0$  附近, 在 0 可积, 综合可得  $F$  在  $[-\pi, \pi]$  可积, 因此

$$S_N f(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y) D_N(y) dy - f(x_0) \quad (3.79)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 - y) - f(x_0)] D_N(y) dy \quad (3.80)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(y) D_N(y) dy \quad (3.81)$$

其中  $y(D_N(y)) = \frac{y}{\sin(y/2)} \sin(N + \frac{1}{2})y$ , 并且  $y/\sin(y/2)$  在  $[-\pi, \pi]$  连续, 因此根据 R-L 定理有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f(x_0) - f(x_0)) = 0 \quad (3.82)$$

得证.

有了上面的收敛性, 我们也可以得到对应的“唯一性”, 即下面的命题.

### 推论 3.1

设  $f, g$  为圆上的可积函数, 并且对于  $x_0$ , 存在包含  $x_0$  的开区间  $I$  使得

$$f(x) = g(x), \quad x \in I, \quad (3.83)$$

则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f(x_0) - S_N g(x_0)) = 0 \quad (3.84)$$



**证明** 由于函数  $f - g$  在  $I$  中恒为 0, 故  $f - g$  的 Fourier 级数在  $x_0$  处收敛到  $(f - g)(x_0) = 0$ , 得证.

从上面的例子可以大致感受到 Fourier 级数的局部化性质, 下面我们进一步讨论 Fourier 函数的逐点收敛性.

### 3.2.2 Dini&Lipschitz 判别法

我们在等式

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x-y) + f(x+y)] \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}} dy \quad (3.85)$$

基础上进行讨论, 根据前面的讨论, 只需要考虑积分 (其中  $0 < \delta < \pi$ )

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\delta [f(x-y) + f(x+y)] \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}} dy = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x-y) + f(x+y)}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin(N + \frac{1}{2})y dy \quad (3.86)$$

的收敛性, 由于当  $y \rightarrow 0$  时,  $\sin y \sim y$ ,  $2 \sin \frac{y}{2} \sim y$ , 记上面的积分为  $I_{N,\delta}(x)$ , 则对它的收敛性讨论等价于讨论另一个积分  $J_{N,\delta}(x)$  的收敛性.

#### 引理 3.2

记

$$I_{n,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x-y) + f(x+y)}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})y dy, \quad (3.87)$$

$$J_{n,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x-y) + f(x+y)}{y} \sin(n + \frac{1}{2})y dy \quad (3.88)$$

则对于任意  $x$ , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_{n,\delta}(x) - J_{n,\delta}(x)) = 0 \quad (3.89)$$



**证明** 对任意  $x$ , 由于

$$I_{n,\delta}(x) - J_{n,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta h(x,y) \sin(n + \frac{1}{2})y dy \quad (3.90)$$

$$(3.91)$$

其中

$$h(x,y) = (f(x-y) + f(x+y)) \left( \frac{1}{2 \sin \frac{y}{2}} - \frac{1}{y} \right) \quad (3.92)$$

$$= (f(x-y) + f(x+y)) \frac{y - 2 \sin \frac{y}{2}}{2y \sin \frac{y}{2}} \quad (3.93)$$

容易验证  $h$  为可积函数 (由于后面一项连续), 因此根据 R-L 引理, 命题得证.

有了这样的观察, 可以给出一个很有用的 Dini 判别法,

#### 定理 3.7 (Dini 判别法)

设  $f$  为圆上的可积函数, 对于某个  $s \in \mathbb{C}$ , 令

$$\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s, \quad (3.94)$$

若存在  $\delta > 0$ , 使得函数  $\varphi(t)/t$  在  $[0, \delta]$  上可积且绝对可积, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x_0) = f(x_0)$ .



**注** 这里的绝对可积是指  $|f|$  在反常积分意义下可积，即若 0 为  $\varphi(t)/t$  的瑕点，则定义

$$\int_0^\pi \left| \frac{\varphi(t)}{t} \right| dt = \lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^\pi \left| \frac{\varphi(t)}{t} \right| dt \quad (3.95)$$

绝对可积代表上面极限存在。

**证明** 利用 Dirichlet 核在圆上的积分性质，有

$$S_n(x_0) - s = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x-y) + f(x+y) - 2s] \frac{\sin(N + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{y}{2}} dy \quad (3.96)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x-y) + f(x+y) - 2s}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})y dy \quad (3.97)$$

根据前面的引理，上式收敛性等价于积分（其中  $\delta$  取条件中的  $\delta$ ）

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\varphi(y)}{y} \sin(n + \frac{1}{2})y dy \quad (3.98)$$

但根据条件可知， $\varphi(y)/y$  在  $[0, \delta]$  可积，使用 R-L 引理可知命题成立。

借助 Dini 判别法，可以很容易推出另一个 Lipschitz 判别法，此前我们首先定义 Lipschitz 条件。

### 定义 3.6 (Lipschitz 条件)

设  $f$  是定义在  $x_0$  附近的函数，若存在  $\delta > 0, L > 0, \alpha \in (0, 1]$ ，使得当  $t \in (0, \delta]$  时就有

$$|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| \leq Lt^\alpha, \quad |f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)| \leq Lt^\alpha \quad (3.99)$$

则称  $f$  在  $x_0$  附近满足  $\alpha$  阶 Lipschitz 条件。



### 推论 3.2 (Lipschitz 判别法)

设  $f$  为圆上的可积函数，且在  $x_0$  附近满足  $\alpha$  阶 Lipschitz 条件，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} \quad (3.100)$$



**证明** 使用 Dini 判别法，取  $s = (f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))/2$ ，则

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} + \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} \quad (3.101)$$

由于  $f$  在  $x_0$  附近满足  $\alpha$  阶 Lipschitz 条件，因此

$$\left| \frac{\varphi(t)}{t} \right| \leq \frac{2L}{t^{1-\alpha}} \quad (3.102)$$

故  $\varphi(t)/t$  可积且绝对可积（比较判别法），因此由 Dini 判别法命题得证。

作为上述判别法的应用，可以得到如下推论，即在分段可微条件下，对于 Fourier 级数的收敛性有一个美妙的刻画。

### 定义 3.7 (分段可微)

设  $f$  定义在闭区间  $[a, b]$  上，若存在分割

$$\pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \quad (3.103)$$

使得如下定义在  $[t_{i-1}, t_i]$  上的函数

$$g_i(x) = \begin{cases} f(t_{i-1} + 0), & x = t_{i-1} \\ f(x), & x \in (t_{i-1}, t_i) \\ f(t_i - 0), & x = t_i \end{cases} \quad (3.104)$$

都是可微的（在端点处单侧可微），则称  $f$  在  $[a, b]$  上分段可微。



**推论 3.3**

若  $f$  为圆上的分段可微函数，则对任意  $x$ ，都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (3.105)$$

特别的， $S_n f(x)$  在连续点处收敛于  $f(x)$ .



**证明** 所有  $x$  可以分为两类：

1.  $f$  在  $x_0$  处存在导两个单侧导数

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{-t} \quad (3.106)$$

2.  $f$  在  $x_0$  处仅有两个有限的广义单侧导数（比如分界点）

$$f'_+(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t}, \quad f'_-(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t} \quad (3.107)$$

对于两种情况，都可得存在  $\delta > 0$ ，当  $0 < t < \delta$  时有

$$|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| \leq Lt, \quad |f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)| \leq Lt \quad (3.108)$$

因此  $f$  在  $x_0$  附近满足 1 阶 Lipschitz 条件，使用 Lipschitz 判别法得证.

### 3.2.3 具有发散 Fourier 级数的连续函数

最后我们讨论一个连续周期函数，其 Fourier 级数在一点处发散的例子。在定理3.6中，我们根据函数在一点的可微性得到了其 Fourier 级数在这一点的收敛性，我们将要讨论的例子就说明如果将可微性弱化为连续性，那么收敛性无法保证。

这里构造例子使用到的原理是“对称破缺”(symmetry-breaking)，一个物理上的概念。在 Fourier 级数中，不论是  $e^{in\theta}, e^{-in\theta}$ 、部分和  $S_N$  或是 Dirichlet 核、Fejer 核、Poisson 核，都具有对称性，而对称破缺代表我们要将  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}$  拆分为  $\sum_{n \geq 0}$  和  $\sum_{n < 0}$ ，下面具体讨论。

首先考虑一个简单的锯齿函数  $f$ ，它是圆上的周期函数，在一个周期内取

$$f(x) = \begin{cases} i(\pi - x), & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0 \\ i(-\pi - x), & -\pi < x < 0 \end{cases} \quad (3.109)$$

则其 Fourier 系数为

$$\hat{f}(0) = 0, \quad (3.110)$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (3.111)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 i(\pi + x) e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} i(\pi - x) e^{-inx} dx \quad (3.112)$$

$$= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \quad (3.113)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{x e^{-inx}}{-n} - \frac{i e^{-inx}}{-n^2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} \quad (3.114)$$

即

$$f(x) \sim \sum_{n \neq 0} \frac{e^{inx}}{n} \quad (3.115)$$

为了打破对称性，我们取级数

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{e^{inx}}{n} \quad (3.116)$$

事实上，这样得到的级数并不是一个 Riemann 可积函数的 Fourier 级数，我们用反证法来说明，若它是可积函数  $\tilde{f}$  的 Fourier 级数，则其在  $x = 0$  处的 Abel 和为

$$|A_r \tilde{f}(0)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \quad (3.117)$$

借助调和级数的发散性可知， $\lim_{r \rightarrow 1} |A_r \tilde{f}(0)| = +\infty$ 。但另一方面，Fourier 级数的 Abel 和可写作卷积的形式，因此

$$|A_r \tilde{f}(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(\tilde{x})| P_r(x) dx \leq \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\tilde{f}(x)| \quad (3.118)$$

出现了矛盾。

上面的两个函数就是我们构造例子的工具，设

$$f_N(x) = \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{e^{inx}}{n}, \quad \tilde{f}_N(x) = \sum_{-N \leq n \leq -1} \frac{e^{inx}}{n} \quad (3.119)$$

则它们有如下结论

### 命题 3.6

设  $f_N, \tilde{f}_N$  如上定义，则

1.  $|\tilde{f}_N(0)| \geq c \ln N$ .
2.  $f_N(x)$  对于  $N, x$  一致有界.



### 证明

1. 利用积分与级数的关系放缩可得

$$|\tilde{f}_N(x)| = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \int_1^N \frac{dx}{x} = \ln N \quad (3.120)$$

2. 对于结论 2，我们首先证明后面的引理 3.3，并取

$$c_n = \frac{e^{inx}}{n} + \frac{e^{-inx}}{-n} = \frac{2i \sin x}{n} = O(1/|n|) \quad (3.121)$$

由于  $f$  有界， $|A_r f(x)| \leq \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)| < +\infty$ ，故根据引理 3.3，表明  $S_N f(x)$  对  $N, x$  一致有界。

### 引理 3.3

假设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  的 Abel 和  $A_r = \sum_{n=1}^{\infty} r^n c_n$  当  $r \rightarrow 1$  时有界，若  $c_n = O(1/n)$ ，那么部分和  $S_N = \sum_{n=1}^N c_n$  也有界。



**证明** 根据条件，取  $M$  使得对任意  $n$  都有  $n|c_n| \leq M$ ，则估计  $S_N$  与  $A_r$  的差可得

$$|S_N - A_r| = \left| \sum_{n=1}^N c_n - \sum_{n=1}^{\infty} r^n c_n \right| \quad (3.122)$$

$$= \left| \sum_{n=1}^N c_n (1 - r^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n c_n \right| \quad (3.123)$$

$$\leq \sum_{n=1}^N |c_n| (1 - r^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n |c_n| \quad (3.124)$$

$$= \sum_{n=1}^N |c_n| (1 - r)(1 + r + \dots + r^{n-1}) + \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n |c_n| \quad (3.125)$$

$$\leq \sum_{n=1}^N n|c_n|(1 - r) + \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n \frac{M}{n} \quad (3.126)$$

$$\leq MN(1-r) + \frac{M}{N} \sum_{n=N+1}^{\infty} r^n \quad (3.127)$$

$$\leq MN(1-r) + \frac{M}{N} \frac{1}{1-r} \quad (3.128)$$

若取  $r = 1 - 1/N$ , 则  $|S_N - A_r| \leq 2M$ , 设  $\overline{\lim}_{r \rightarrow 1} A_r = K < \infty$ , 则

$$|S_N| \leq |S_N - A_r| + |A_r| \leq 3M + K \quad (3.129)$$

令  $N \rightarrow \infty$ , 得证.

下面是构造的核心部分, 由于  $f_N$  和  $\tilde{f}_N$  都是次数为  $N$  的三角多项式, 将其平移可以得到次数分别为  $3N$  和  $2N - 1$  的三角多项式

$$P_N(x) = e^{i(2N)x} f_N(x), \quad \tilde{P}_N(x) = e^{i(2N)x} \tilde{f}_N(x) \quad (3.130)$$

容易验证,  $P_N$  的 Fourier 部分和满足如下命题

### 命题 3.7

记  $S_M P_N$  为函数  $P_N(x)$  的 Fourier 部分和 ( $M$  次), 则有

$$S_M P_N = \begin{cases} P_N, & M \geq 3N \\ \tilde{P}_N, & M = 2N \\ 0, & M < N \end{cases} \quad (3.131)$$

**证明**  $S_M P_N(x) = \sum_{m=-M}^M \hat{P}_N(m) e^{imx}$ , 计算 Fourier 系数

$$\hat{P}_N(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum 1 \leq |n| \leq N \frac{e^{i(n+2N)x}}{n} e^{-imx} dx \quad (3.132)$$

$$= \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+2N-m)x} dx \quad (3.133)$$

$$= \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{\delta_{n+2N,m}}{n} \quad (3.134)$$

$$= \begin{cases} 1/(m-2N), & N \leq m < 2N, 2N < m \leq 3N \\ 0, & m < N, m = 2N, m > 3N \end{cases} \quad (3.135)$$

对于题中三种情形, 我们分别讨论其部分和

1. 当  $M < N$  时, 每个  $\hat{P}_N(m) = 0$ , 因此  $S_M P_N = 0$ .
2. 当  $M = 2N$  时, 非零项仅在  $N \leq m < 2N$  中出现, 因此

$$S_M P_N(x) = \sum_{N \leq m \leq 2N-1} \hat{P}_N(m) e^{imx} \quad (3.136)$$

$$= \sum_{N \leq m \leq 2N-1} \frac{e^{imx}}{m-2N} = \sum_{-N \leq m \leq -1} \frac{e^{i(m+2N)x}}{m} \quad (3.137)$$

$$= \tilde{P}_N(x) \quad (3.138)$$

3. 当  $M \geq 3N$  时, 非零项仅在  $N \leq m \leq 3N, m \neq 2N$  中出现, 因此

$$S_M P_N(x) = \sum_{\substack{N \leq m \leq 3N \\ m \neq 2N}} \hat{P}_N(m) e^{imx} \quad (3.139)$$

$$= \sum_{\substack{N \leq m \leq 3N \\ m \neq 2N}} \frac{e^{imx}}{m-2N} = \sum_{\substack{-N \leq m \leq N \\ m \neq 0}} \frac{e^{i(m+2N)x}}{m} \quad (3.140)$$

$$= P_N(x) \quad (3.141)$$

得证.

**注** 更直观一些，上面的结论也可以通过下图看出

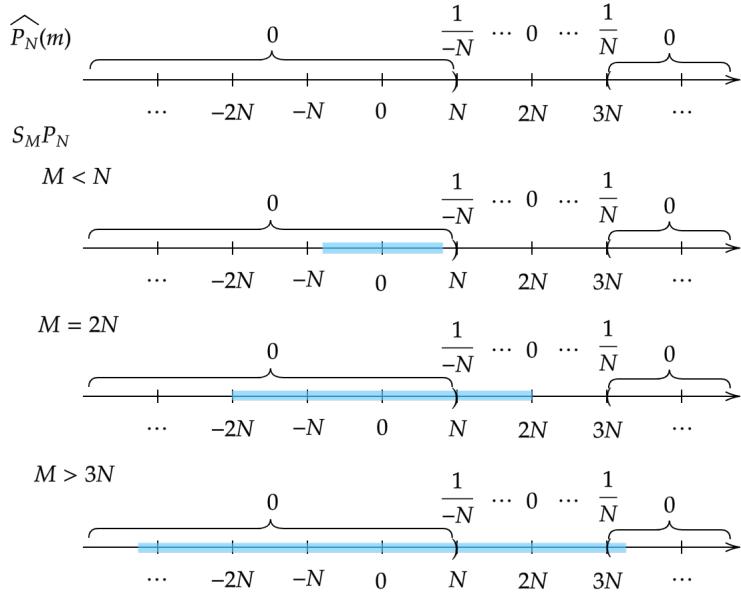


图 3.2:  $P_N$  的 Fourier 部分和

最后，我们取数列  $\alpha_k = 1/k^2$ ,  $N_k = 3^{2^k}$ , 前者求和收敛，后者增长较快，且满足（这里也可取满足这两个条件的其它数列）

- 对任意  $k$ ,  $N_{k+1} > 3N_k$ .
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \ln N_k = \infty$

其中第一个性质保证了区间  $(N_k, 3N_k)$  两两无交，第二个性质保证了最后构造出的函数在某一点发散.

根据上面的准备工作，可构造出想要的函数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{N_k}(x) \quad (3.142)$$

由于级数的每一项都是连续函数，并且  $P_N$  一致有界（因为  $|P_N(x)| = |f_N(x)|$ ），根据 Weierstrass 判别法（ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$  收敛），上面的级数一致收敛，因此  $f(x)$  连续（连续函数列的一致极限），并且由于

$$|S_{2N_m} f(0)| = |\tilde{f}_{2N_m}(0)| \geq c \alpha_m \ln N_m + O(1) \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty \quad (3.143)$$

因此它满足我们所预期的条件：连续函数，Fourier 级数在某一点处发散.

# 第4章 Fourier 级数的应用

本节主要讨论 Fourier 级数的一些应用，包括：

- 等周问题.
- Weyl 等分布定理.
- 处处连续但处处不可微的函数.
- 圆周上的热方程.

## 4.1 等周问题

等周问题是一个古老而质朴的问题：用定长的绳子围成封闭、无自交的曲线，怎样使得曲线围成区域面积最大？做一些抽象化的表述，可以归结到如下命题：

**问题 4.1** 在周长相等的一切平面曲线中，什么样的曲线内部有最大面积？

早在 19 世纪，几何学家 Steiner 曾利用非常朴素的几何方法给出了一个美妙的结论：若等周问题的解存在，那么它必定是一个圆。这样的结果并不意外，毕竟这样高度对称的图形总会有一些美妙的性质。不过 Weierstrass 指出了 Steiner 证明中的漏洞（尽管最终得到的确实是正确的结果），即忽略了解的存在性，圆不能进一步“优化”，未必表示圆就是问题的解，与之类似，可以考虑这样的例子：

**例 4.1** 对于大于 1 的任意正整数  $n$ ，都有  $n < n^2$ ，因此任意大于 1 的正整数  $n$  都不可能是最大的正整数，但这并不能断言 1 是最大的正整数，因为正整数集并没有上界。

下面先简单介绍 Steiner 的方法，而后讨论更严谨的证明。

### 4.1.1 Steiner 的进展

Steiner 得到圆的过程是，首先给出等周问题的解需要满足的三个条件，然后说明满足这三条性质的闭曲线必定是圆。

#### 命题 4.1

若闭曲线  $\Gamma$  是等周问题的解，那么它必定满足如下三个条件：

1.  $\Gamma$  围成的图形是凸的。
2. 若  $\Gamma$  中有弦  $AB$  平分周长，那么它也平分  $\Gamma$  围成图形的面积。
3. 取  $\Gamma$  中任何一条同时平分周长与面积的弦  $AB$ ，那么对于  $\Gamma$  上任何异于  $A, B$  的点  $P$ ,  $\angle APB = \pi/2$ 。

**注** 称平面图形  $A$  是凸的，若其中任何两点所连线段上的任何一点仍在  $A$  中。

证明方法很简单，只要说明若曲线不满足某个条件，则可以在保证周长不变的情况下进行变换，得到更大的面积，从而得证。

首先考虑条件 1，若图形不是凸的，那么存在两点  $A, B \in \Gamma$ ，使得线段  $AB$  除端点外都不在  $\Gamma$  内部，因此将  $\Gamma$  与线段  $AB$  所围成的区域沿  $AB$  对折（镜像变换），得到的新图形周长不变，但面积显然增大。



图 4.1: 条件 1 与条件 2

接着考虑条件2，若某条弦 $AB$ 平分周长，但不平分面积，则仿照前面的操作，将面积更大的部分沿 $\Gamma$ 折叠，以代替面积小的部分，这样得到的新图形周长不变（因为 $AB$ 平分周长），但面积更大。

最后考虑条件3，若不然，则将 $\Gamma$ 与 $PB$ 围成部分沿 $P$ 点旋转，直到旋转后的弦 $PB' \perp AP$ ，再将 $AB'P$ 一侧的 $\Gamma$ 关于 $AB'$ 对折，这样得到的新图形周长不变（因为 $AB$ 平分周长与面积），但面积更大（因为增大了一边的三角形面积，对折后总面积增大）。



图 4.2: 条件 3

容易证明，满足上述三个条件的平面曲线一定是圆。因为任取一条平分周长与面积的弦 $AB$ ，记其中点为 $O$ ，则对任意 $P \in \Gamma$ ，根据直角三角形的长度关系可得 $OP = OA = OB$ ，根据定义可知 $\Gamma$ 是圆。

下面我们借助分析工具对等周问题做更严谨的讨论。

### 4.1.2 等周问题的解答

首先对曲线、长度、面积的概念做一下定义。

#### 定义 4.1 (曲线)

平面参数曲线定义为 $C^1$ 映射 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的像集 $\Gamma$ （一个平面点集）为曲线。特别的，若 $\gamma(a) = \gamma(b)$ 则称为闭曲线，若 $\gamma(u) = \gamma(v)$ 当且仅当 $u = v$ 或 $(u, v) = (a, b)$ 则称之为简单曲线（即无自交）。 

上面的定义保证了 $\gamma$ 在每一点有连续的导数，且 $\gamma'(s) \neq 0$ ，这可以看作点在曲线上运动，过该点的切线斜率连续变化。从点运动的角度可以看出，映射 $\gamma$ 给出了曲线 $\Gamma$ 的定向。

通过采取不同的参数化，可以得到曲线的不同形式，比如若 $s : [c, d] \rightarrow [a, b] \in C^1$ ，则 $\eta(t) = \gamma(s(t)) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 就给出了新的参数化。称 $\eta, \gamma$ 同向（反向），若 $s'(t) > 0$  ( $s'(t) < 0$ )。另外，容易验证上面定义的“闭曲线”“简单曲线”的概念与参数化的选取无关。

若曲线 $\Gamma$ 的参数化为 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ ，则其长度可定义为

$$\ell = \int_a^b |\gamma'(s)| ds = \int_a^b \sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)} ds \quad (4.1)$$

可以看出，长度是曲线的固有属性，不随参数化的改变而改变，即若 $\gamma(s(t)) = \eta(t)$ ，则

$$\int_a^b |\gamma'(s)| ds = \int_c^d |\gamma'(s(t))| |s'(t)| dt = \int_c^d |\eta'(t)| dt \quad (4.2)$$

在后面的证明中，我们将使用一种特殊的参数化；弧长参数，即 $|\gamma'(s)| \equiv 1$ ，可以理解为点在曲线上匀速运动，并且这时曲线长度即为

$$\ell = \int_a^b |\gamma'(s)| ds = b - a \quad (4.3)$$

曲线 $\Gamma$ 围成的区域面积可表示为

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \int_{\Gamma} (xdy - ydx) \right| = \frac{1}{2} \left| \int_a^b x(s)y'(s) - y(s)x'(s) ds \right| \quad (4.4)$$

下面给出本节最核心的定理。

**定理 4.1 (等周定理)**

设  $\Gamma$  为  $\mathbb{R}^2$  中的简单闭曲线，周长为  $\ell$ ，围成区域面积为  $\mathcal{A}$ ，则

$$\mathcal{A} \leq \frac{\ell^2}{4\pi} \quad (4.5)$$

等号成立当且仅当  $\Gamma$  为圆.



**证明** 简单起见，不妨设  $\ell = 2\pi$ ，这样只需证明  $\mathcal{A} \leq \pi$ ，当且仅当  $\Gamma$  为单位圆时取等。设  $\Gamma : [0, 2\pi] : \mathbb{R}^2, \gamma(s) = (x(s), y(s))$  采用弧长参数，则  $x'^2(s) + y'^2(s) \equiv 1$ ，这也表明

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x'^2(s) + y'^2(s)) ds = 1 \quad (4.6)$$

由于  $\gamma$  为闭曲线，因此可将其延拓为圆上的可微函数，因此  $x(s), y(s)$  都是圆上的可微函数，可以考虑其 Fourier 级数

$$x(s) \sim \sum \hat{x}(n)e^{ins}, \quad y(s) \sim \sum \hat{y}(n)e^{ins} \quad (4.7)$$

根据第三章的讨论， $x, y$  的 Fourier 级数收敛到自身，并且可以逐项求导，因此

$$x'(s) \sim \sum i n \hat{x}(n)e^{ins}, \quad y'(s) \sim \sum i n \hat{y}(n)e^{ins} \quad (4.8)$$

对  $x', y'$  使用 Parseval 等式可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 (|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2) = \|x'\|^2 + \|y'\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x'^2(s) + y'^2(s)) ds = 1 \quad (4.9)$$

对于  $\mathcal{A}$  使用一般形式的 Parseval 等式，可得

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} x(s)y'(s) - y(s)x'(s) ds \right| = \pi |\langle x, \bar{y}' \rangle - \langle y, \bar{x}' \rangle| = \pi \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(\hat{x}(n)\bar{\hat{y}(n)} - \hat{y}(n)\bar{\hat{x}(n)}) \right| \quad (4.10)$$

根据不等式

$$|a\bar{b} - b\bar{a}| = 2|\text{Im}(a\bar{b})| \leq 2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2 \quad (4.11)$$

对上式进行放缩，可得

$$\mathcal{A} = \pi \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} n(\hat{x}(n)\bar{\hat{y}(n)} - \hat{y}(n)\bar{\hat{x}(n)}) \right| \quad (4.12)$$

$$\leq \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| |\hat{x}(n)\bar{\hat{y}(n)} - \hat{y}(n)\bar{\hat{x}(n)}| \quad (4.13)$$

$$\leq \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 (|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2) \quad (4.14)$$

$$= \pi \quad (4.15)$$

得证，下面考虑取等条件。上面的不等式取等首先需要满足对任意  $n \neq 0$ ， $|\hat{x}(n)| = |\hat{y}(n)|$ ，存在  $k_n \in \mathbb{R}$  使得  $\hat{x}(n) = ik_n\hat{y}(n)$ （根据前一个条件可知这里  $k_n = \pm 1$ ），并且任意  $|n| > 1$  项都为 0，这表明

$$x(s) = \hat{x}(-1)e^{-is} + \hat{x}(0) + \hat{x}(1)e^{is}, \quad y(s) = \hat{y}(-1)e^{-is} + \hat{y}(0) + \hat{y}(1)e^{is} \quad (4.16)$$

再根据  $|\hat{x}(1)| = |\hat{y}(1)|$  以及

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 (|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2) = 2(|\hat{x}(1)|^2 + |\hat{y}(1)|^2) = 1 \quad (4.17)$$

可得  $|\hat{x}(1)| = |\hat{y}(1)| = 1/2$ ，再根据  $\hat{x}(1) = \pm i\hat{y}(1)$  可设  $\hat{x}(1) = e^{i\alpha}/2, \hat{y}(1) = e^{i(\alpha+\pi/2)}/2$ ，代入上面的表达式可得（这里记  $a_0 = \hat{x}(0), b_0 = \hat{y}(0) \in \mathbb{R}$ ）

$$x(s) = \hat{x}(0) + e^{i(s+\alpha)} + e^{-i(s+\alpha)} = a_0 + \cos(\alpha + s) \quad (4.18)$$

$$y(s) = \hat{y}(0) + e^{i(s+\alpha+\pi/2)} + e^{-i(s+\alpha+\pi/2)} = b_0 + \cos(\alpha + s) = b_0 - \sin(\alpha + s) \quad (4.19)$$

因此  $\Gamma$  为以  $(a_0, b_0)$  为圆心的单位圆，得证。

上面的证明是由 Hurwitz 再 1901 年给出的，借助 Fourier 级数给出了这样优雅的证明。不过上面的讨论其实还有一些不严密的地方，比如

- 如何定义  $\Gamma$  围成的区域？
- 上面的结果能否推广到一般的可求长曲线？
- ...

除此之外，在等周问题上还有许多值得深入讨论的问题，它们中的许多也对分析学的研究提供了重要的思路。

## 4.2 Weyl 等分布定理

本节我们将借助 Fourier 级数讨论一个与无理数有关的问题，首先做一些准备工作，从实数的同余开始。

### 4.2.1 实数的同余

在初等数论中，我们可以对整数作带余除法，从而定义出模整数同余的概念，进一步讨论  $\mathbb{Z}$  上的同余关系。而对于实数，也可以类比定义对整数的取模，进而讨论在这种意义下的同余。借助 Gauss 函数（或下取整函数） $f(x) = [x]$  可以定义  $x$  的整数部分为  $[x]$ ，并且记  $x$  的小数部分为  $\{x\} = x - [x]$ ，由此  $x$  可唯一分解为  $x = [x] + \{x\}$ ，其中  $[x] \in \mathbb{Z}, 0 \leq \{x\} < 1$ 。

#### 例 4.2

$$2.7 = [2.7] + \{2.7\} = 2 + 0.7, \quad -3.4 = [-3.4] + \{-3.4\} = -4 + 0.6 \quad (4.20)$$

如果将上面的  $\{x\}$  看作类比余数，则可以定义出实数的同余

#### 定义 4.2 (实数的同余)

称  $x, y \in \mathbb{R}$  同余，若  $x - y \in \mathbb{Z}$ ，这等价于  $\{x\} = \{y\}$ ，记为

$$x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}} \quad \text{或} \quad x \equiv y \pmod{1}. \quad (4.21)$$



在上面的定义下，两个实数同余可以理解为相差一个整数，所有相差一个整数的实数都可以看作一类等价的元素，而对于所有的等价类，其中都有唯一的处于 0 到 1 之间的实数，可以作为这个等价类的代表元。从代数的角度，上面的过程实际上是定义了商群

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{r + \mathbb{Z} : 0 \leq r < 1\} \quad (4.22)$$

从上面的角度，如果考虑一个实数  $\gamma \neq 0$ ，以及数列  $\gamma, 2\gamma, 3\gamma, \dots$ ，表面上看只是一个等差数列，但更有趣的是关注其在模  $\mathbb{Z}$  下的性态，即

$$\{\gamma\}, \{2\gamma\}, \{3\gamma\}, \dots \quad (4.23)$$

通过对  $\gamma$  分类讨论，可以得到一些初步的结论：若  $\gamma = p/q$  为有理数（这里  $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, (p, q) = 1$ ），那么数列为

$$\{p/q\}, \{2p/q\}, \dots, \{(q-1)p/q\}, \{qp/q\} = 0, \{(q+1)p/q\} = \{p/q\}, \dots \quad (4.24)$$

可以看出数列  $\{\{n\gamma\}\}$  中出现的实数是有限的，进一步，可以说它是一个周期数列。若  $\gamma$  为无理数，假设有  $n_1\gamma \equiv n_2\gamma \pmod{\mathbb{Z}}$ ，那么  $(n_1 - n_2)\gamma \in \mathbb{Z}$ ，这与  $\gamma$  为无理数矛盾，因此  $\{\{n\gamma\}\}$  中各项两两不同。

上面的观察总结如下：

1. 若  $\gamma$  为有理数，那么数列  $\{\{n\gamma\}\}$  中出现的实数是有限的，或者说它是一个周期数列。
2. 若  $\gamma$  为无理数，那么数列  $\{\{n\gamma\}\}$  中各项两两不同。

对于  $\gamma$  是无理数的情形，还可以得到更有趣的结论：数列  $\{\{n\gamma\}\}$  在区间  $[0, 1)$  稠密，即对任意  $r \in [0, 1), \varepsilon > 0$ ，都存在  $n \in \mathbb{N}$ ，使得  $|r - \{n\gamma\}| < \varepsilon$ ，这就是 Kronecker 定理。

### 定理 4.2 (Kronecker 定理)

设  $\gamma$  是无理数，则数列  $\{\{n\gamma\}\}$  在  $[0, 1]$  中稠密。 ♥

我们在此不讨论其初等证明，而是将其作为数列  $\{\{n\gamma\}\}$  具有的一个特性的推论：等分布性。下面我们正式开始讨论这部分内容。

## 4.2.2 数列的等分布

### 定义 4.3 (数列的等分布)

称取值在  $[0, 1]$  的数列  $\{\xi_n\}$  在  $[0, 1]$  等分布，若对任意  $(a, b) \subset [0, 1]$ ，都有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a, b)\}}{N} = b - a \quad (4.25)$$

其中  $\#$  表示集合的基数，这里表示对应  $\xi_n$  的个数。 ♣

如果将数列的取值看作数轴上的点，则对于充分大的  $N$ ，对于  $1 \sim N$  中的每个  $n$ ，使  $\xi_n \in (a, b)$  的  $n$  的比例近似等于区间  $(a, b)$  长度占总长度的比例。这也可以理解为  $N$  充分大时， $\xi_N$  落在  $[0, 1]$  中的任何位置的可能性是相同的。注意，等分布并不是指数列值的整体分布均匀，而是对任意  $N$ ， $1 \leq n \leq N$  中的点分布均匀，即与数列的顺序有关。

**例 4.3** 设  $\{r_n\}$  为  $[0, 1]$  中所有的有理数列，则数列

$$\xi_n = \begin{cases} r_{n/2}, & 2|n \\ 0, & 2 \nmid n \end{cases} \quad (4.26)$$

不是等分布的，取  $(a, b) = (0, 1)$ ，可以看出上面的极限不存在（子列有两个极限点），但另一方面， $\xi_n$  在  $[0, 1]$  确实是稠密的。

下面我们给出本节的重要定理。

### 定理 4.3 (等分布定理)

若  $\gamma$  为无理数，则数列  $\{\{n\gamma\}\}$  在  $[0, 1]$  等分布。 ♥

如果等分布定理得证，则作为其推论很容易得到 Kronecker 定理。如果以  $\gamma = \sqrt{2}$  为例，可以得到下面的分布图，它直观展示了等分布的状态

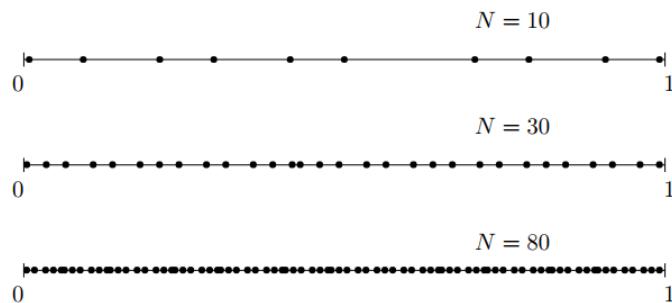


图 4.3: 数列  $\{\{\sqrt{2}n\}\}$  的分布

为了证明上述定理，我们引入集合的示性函数。

**定义 4.4 (集合的示性函数)**

设全集  $A, B \subset A$ , 则定义示性函数  $\chi_B : A \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases} \quad (4.27)$$



在上面的定义中取  $(a, b) \subset [0, 1]$ , 则  $\chi_{(a,b)}$  在  $(a, b)$  中取 1, 在  $[0, 1] \setminus (a, b)$  取 0, 在此基础上可以将  $\chi_{(a,b)}$  作  $\mathbb{R}$  上的周期延拓 (周期为 1), 由此可得

$$\#\{1 \leq n \leq N : \{n\gamma\} \in (a, b)\} = \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma) \quad (4.28)$$

这里可以看出作周期延拓的用意, 我们从讨论  $\{n\gamma\}$  转向了  $n\gamma$ , 相比于小数部分, 直接讨论实数往往更方便些. 同理, 等分布定理等价于证明

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma) = \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x) dx. \quad (4.29)$$

为此, 我们通过下面的引理来证明这件事.

**引理 4.1**

若  $f$  为周期为 1 的连续函数,  $\gamma$  为无理数, 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) = \int_0^1 f(x) dx \quad (4.30)$$



因为出现了周期可积函数, 由此我们希望借助 Fourier 级数解决这件事, 取基  $1, e^{\pm 2\pi i x}, \dots, e^{\pm 2\pi i kx}, \dots$ , 证明主要步骤如下:

1. 验证命题对上面的基成立.
2. 证明若命题对  $f, g$  成立, 则对它们的线性组合仍成立, 进而得到命题对三角多项式成立.
3. 对  $f$  取三角多项式进行估计.

**证明** Step 1. 若  $f = 1$ , 则命题显然成立 (左边为常数列, 右边积分为 1); 若  $f = e^{2\pi i kx}$ ,  $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ , 则积分为 0, 并且

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) = \frac{e^{2\pi i k\gamma}}{N} \frac{1 - e^{2\pi i kN\gamma}}{1 - e^{2\pi i k\gamma}} \quad (4.31)$$

令  $N \rightarrow \infty$ , 极限显然为 0.

Step 2. 根据引理中算子的线性性, 可知命题对任意三角多项式成立.

Step 3. 由于  $f$  为连续周期函数 (有界), 由此根据 Weierstrass 逼近定理, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在三角多项式  $P$  使得  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P(x)| < \varepsilon/3$ , 并且存在  $N_0$ , 对任意  $N > N_0$  都有

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\gamma) - \int_0^1 P(x) dx \right| < \varepsilon/3 \quad (4.32)$$

因此

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(n\gamma) - P(n\gamma)| \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\gamma) - \int_0^1 P(x) dx \right| + \int_0^1 |P(x) - f(x)| dx \quad (4.33)$$

$$< \varepsilon \quad (4.34)$$

命题得证.

为证明  $\chi_{(a,b)}$  的情形, 只需要使用两个连续函数进行逼近即可. 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取周期为 1 的折线函数  $f_\varepsilon^+, f_\varepsilon^-$

如下图所示

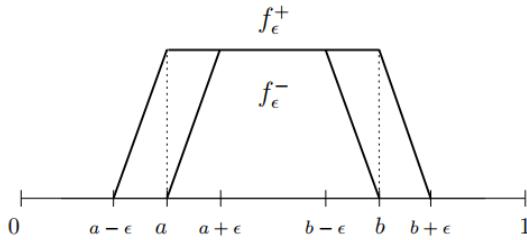


图 4.4: 双边逼近  $\chi_{(a,b)}$

则二者都有上界 1，并且  $f_\varepsilon^-(x) \leq \chi_{(a,b)}(x) \leq f_\varepsilon^+(x)$ ，以及有积分关系

$$b - a - 2\varepsilon \leq \int_0^1 f_\varepsilon^-(x) dx \leq \int_0^1 f_\varepsilon^+(x) dx \leq b - a + 2\varepsilon \quad (4.35)$$

令  $S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma)$  则有

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\varepsilon^-(n\gamma) \leq S_N \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\varepsilon^+(n\gamma) \quad (4.36)$$

令  $N \rightarrow \infty$ ，得证。

作为上面过程的一个推论，我们可以证明引理对一般的 Riemann 可积函数成立。

#### 推论 4.1

若  $f$  为周期为 1 的 Riemann 可积函数， $\gamma$  为无理数，则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) = \int_0^1 f(x) dx \quad (4.37)$$



**证明** 对于实值连续函数  $f$ ，取分割  $\pi : 0 = x_0 < \dots < x_N = 1$ ，并定义  $f^U(x), f^L(x)$  为函数  $f$  在每一段的最大值、最小值组成的阶梯函数，则  $f_L \leq f \leq f_U$ ，

$$\int_0^1 f_L(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 f_U(x) dx \quad (4.38)$$

并且对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在分割  $\pi$  使得如上定义的函数满足

$$0 \leq \int_0^1 f_U(x) dx - \int_0^1 f_L(x) dx < \varepsilon \quad (4.39)$$

由于阶梯函数可以看作多个示性函数的线性组合，因此

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_U(n\gamma) = \int_0^1 f_U(x) dx \quad (4.40)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_L(n\gamma) = \int_0^1 f_L(x) dx \quad (4.41)$$

故命题得证。

也可以从动力系统的角度看待上面的推论。比如考虑一个借助角度  $\theta$  参数化的圆周，定义其上的一个（旋转）变换  $\rho : \theta \mapsto \theta + 2\pi\gamma$ ，以及复合  $\rho^n : \theta \mapsto \theta + 2\pi n\gamma$ ，则可以用  $\rho^n$  代表时间  $t = n$ ，进而考虑序列

$$f(\theta), f(\rho(\theta)), \dots, f(\rho^n(\theta)), \dots \quad (4.42)$$

其中  $f(\rho^n(\theta)) = f(\theta + 2\pi n\gamma)$ 。那么随着  $n$  的增大，系统随着时间演化，前面的推论告诉我们对任意  $\theta$ ，“时

间平均”都存在，并且都收敛到“空间平均”，即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\rho^n(\theta)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (4.43)$$

其中  $2\pi\gamma$  为无理数.

回到等分布定理的主题，由等分布定理的证明过程可以得到下面的命题.

#### 定理 4.4 (Weyl 准则)

数列  $\{\xi_n\}$  在  $[0, 1]$  等分布当且仅当对任意整数  $k \neq 0$ , 都有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k \xi_n} = \int_0^1 e^{2\pi i k x} dx = 0 \quad (4.44)$$



**证明** 若对任意整数  $k$  都有上面的等式成立，则仿照前面的过程

$$\text{正交基} \rightarrow \text{三角多项式} \rightarrow \text{连续函数} \rightarrow \text{示性函数} \quad (4.45)$$

可证. 反之，若  $\{\xi_n\}$  在  $[0, 1]$  等分布，则有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(\xi_n) = \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x) dx. \quad (4.46)$$

利用 Euler 公式将复指数展开为三角的形式，则对仿照前面的过程

$$\text{示性函数} \rightarrow \text{可积函数} \quad (4.47)$$

分别证明实部与虚部即可.

最后，我们讨论数列  $\{\{\gamma\}\}$  等分布性的一个美妙的几何结论. 考虑单位正方形中，从一点发射出的光线，在接触边界后反射，那么在反射足够长时间后的光路有怎样的性质？

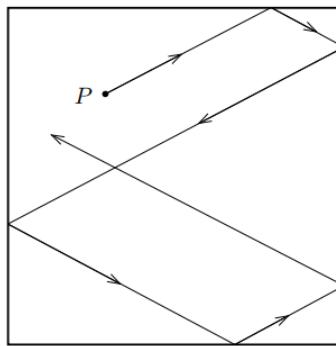


图 4.5: 正方形中的光线反射

首先可以对光路做一些猜测

1. 光会在某一时刻回到  $P$  点，即成闭环且具有周期性.
2. 光会在正方形中一直传播、反射下去，不会回到  $P$  点.

为了考虑这两种情况，我们可以不妨设  $P$  点在正方形的一条边上（比如左边），在此基础上，我们可以将单位正方形平移并置，考虑平面上的正方形网格，那么光线从其中一个正方形中的一点  $P$  发射，在接触到边界后分为两条，一条反射，另一条透过边界射入其它正方形中，以此类推，每次反射时光线都发生“分裂”. 那么若假设发出的光线斜率为  $\gamma > 0$ ，则始终沿直线传播的光线所在光路恰好是平面上的直线  $P + (t, \gamma t) = (t, p + \gamma t)$ （这里设  $P(0, p)$ ）.

根据光线的反射性质，光线  $(t, p + \gamma t)$  与每个正方形的上/下边相交时，在初始正方形中反射的光线也会在同一时间与初始正方形的上、下边中某个边相交，且两个交点在各边上的相对距离相同（即可以通过平移使之重合），对于左右边同理，由于问题转化到了边上，因此参数  $t$  可以认为取非负整数，并且这时只需考虑  $\{p + n\gamma\}$ ，

问题转化为：是否存在  $n$ ，使得

$$p \equiv p + \gamma n \pmod{1} \iff \gamma n \in \mathbb{N} \quad (4.48)$$

这时已经来到了我们熟悉的地方，对  $\gamma$  进行分类讨论，当  $\gamma$  为有理数时，会出现周期性光路，而当  $\gamma$  为无理数时，根据  $\{\{n\gamma\}\}$  的等分布性推出的 Kronecker 定理确保必定不会出现周期性光路，甚至不会经过同一条边上的相同点两次。

## 4.3 处处连续但处处不可微的函数

在一开始接触数学分析时，就对连续与可微有许多辨析。很多连续函数可以找到不可微点，比如  $f(x) = |x|$  的  $x = 0$ ，我们甚至可以构造出连续函数，使之在给定点甚至可数点处不可微，但是连续但处处不可微的函数却并不自然（至少我们没办法轻易构造出来），因此一个有趣的问题就是是否存在这样“处处连续但处处不可微”的函数。1861 年，Riemann 猜测函数

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \quad (4.49)$$

是这样的函数（他研究这个函数是因为其与 theta 函数有关，这一方面将在后面的章节中介绍），但他并没有给出证明，只是在一个讲稿中提到了这个函数。这引发了 Weierstrass 的兴趣，他在此基础上构造出了第一个“处处连续但处处不可微”的函数，被称为 Weierstrass 函数

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x), \quad b \in (0, 1), a \in \mathbb{N}, ab > 1 + 3\pi/2 \quad (4.50)$$

但 Riemann 提出的问题并没有结束：1916 年，Hardy 证明  $R(x)$  在任何  $x = k\pi$  处不可微，其中  $k$  为无理数；直到 1969 年，Gerver 完全解决了这个问题，即  $R(x)$  在  $\pi p/q$  的点可微，其中  $p, q$  均为奇整数，并且在其它点不可微。

在本节中，我们主要证明如下定理

### 定理 4.5

若  $\alpha \in (0, 1)$ ，那么

$$f_{\alpha}(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{i2^n x} \quad (4.51)$$

处处连续但是处处不可微。



借助 Weierstrass 判别法，很容易证明  $f$  的连续性（连续函数列的一致极限），因此证明的重点会放在可微性。由于  $f$  是三角级数，从定义可以看出  $f$  的一个重要性质：其许多 Fourier 系数都为 0，对于这种“跳过”许多项的 Fourier 级数，称为缺项 Fourier 级数 (lacunary Fourier series)。

定理的证明主要依靠对三种求和的讨论，即 Fourier 级数的部分和  $S_N g = g * D_N$ 、Cesaro 和  $\sigma_N g = g * F_N$ 、以及由 Cesaro 和导出的 delayed mean，定义为

$$\Delta_N g = 2\sigma_{2N} g - \sigma_N g = g * (2F_{2N} - F_N) \quad (4.52)$$

$$= \frac{S_N g + \dots + S_{2N-1} g}{N} \quad (4.53)$$

我们可以从一个统一的新视角对比上面的三种求和，设  $g(x) \sim \sum a_n e^{inx}$ ，则

- $S_N$  表示将所有的  $a_n e^{inx}$  与函数  $\begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ 0, & |n| > N \end{cases}$  相乘的结果。

- $\sigma_N$  表示将所有的  $a_n e^{inx}$  与函数  $\begin{cases} 1 - |n|/N, & |n| \leq N \\ 0, & |n| > N \end{cases}$  相乘的结果。

- $\Delta_N$  表示将所有的  $a_n e^{inx}$  与函数  $\begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ 2(1 - |n|/2N), & N < |n| \leq 2N \\ 0, & |n| > 2N \end{cases}$  相乘的结果.

之所以能得到  $\sigma_N$  的结论, 是因为可以通过改变求和顺序得到

$$\sigma_N g(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n g(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{|k| \leq n} a_k e^{ikx} \quad (4.54)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{|n| \leq N} (N - |n|) a_n e^{inx} \quad (4.55)$$

$$= \sum_{|n| \leq N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) a_n e^{inx} \quad (4.56)$$

其它两者的结论是显然的. 下图更直观解释了这一现象

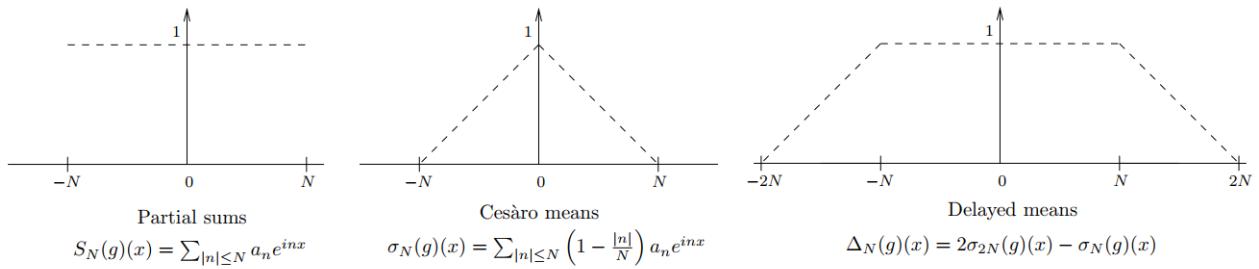


图 4.6: 三种求和

对于4.5中定义的函数  $f_\alpha$ , 由于其 Fourier 系数仅  $\hat{f}(2^k) \neq 0, k \in \mathbb{N}$ , 因此对于任意  $N' = 2^k \leq N, k \in \mathbb{N}$ , 其 delay mean 有

$$S_N f = \Delta_{N'} f \quad (4.57)$$

可归结为如下引理

### 引理 4.2

若  $2N = 2^n, n \in \mathbb{N}$ , 则 4.1 中定义的函数满足

$$\Delta_{2N} f - \Delta_N f = 2^{-n\alpha} e^{i2^n x}. \quad (4.58)$$

这从上面的图中也可以很容易看到.

定理的证明采用反证法, 假设某个点  $x_0$  处  $f'(x_0)$  存在, 进一步推出矛盾. 此前作一些准备工作, 先证明如下引理.

### 引理 4.3

设  $g$  为圆上的连续函数, 且在  $x_0$  处可微, 则其 Cesaro 和满足  $(\sigma_N g)'(x_0) = O(\log N)$ , 并且

$$(\Delta_N g)'(x_0) = O(\log N). \quad (4.59)$$

**证明** 由于

$$(\sigma_N g)'(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} F'_N(x_0 - t) g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} F'_N(t) g(x_0 - t) dt \quad (4.60)$$

并且 Fejer 核  $F_N$  具有  $2\pi$  周期，且为偶函数，因此  $F'_N$  在一个周期内积分为 0，再加上  $g$  在  $x_0$  的可微性就有

$$(\sigma_N g)'(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} F'_N(t)[g(x_0 - t) - g(x_0)]dt \quad (4.61)$$

$$|(\sigma_N g)'(x_0)| \leq C \int_{-\pi}^{\pi} |F'_N(t)| |t| dt \quad (4.62)$$

其中

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nt/2)}{\sin^2(t/2)}, \quad F'_N(t) = \frac{N \sin(Nt) \sin(t/2) - \sin^2(Nt/2) \cos(t/2)}{2N \sin^3(t/2)} \quad (4.63)$$

因此有放缩

$$|F'_N(t)| \leq \frac{N |\sin(Nt) \sin(t/2)| + |\sin(Nt/2) \sin(Nt/2) \cos(t/2)|}{2N |\sin^3(t/2)|} \quad (4.64)$$

$$\leq \frac{N + |Nt/2|}{2N|t/4|^3} = \frac{A}{|t|^2} \quad (4.65)$$

另外，由于  $F_N$  为次数为  $N$ ，系数模不大于 1 的三角多项式，因此  $F'_N$  为次数不大于  $N$  的三角多项式，故  $|F'_N(t)| \leq AN^2$  (这里两个估计结果使用了相同的  $A$ ，对于不同的常数可以通过取更大者做到这件事)，因此

$$|(\sigma_N g)'(x_0)| \leq C \int_{|t| \geq 1/N} |F'_N(t)| |t| dt + C \int_{|t| \leq 1/N} |F'_N(t)| |t| dt \quad (4.66)$$

$$\leq CA \int_{|t| \geq 1/N} \frac{dt}{|t|} + CAN \int_{|t| \leq 1/N} dt \quad (4.67)$$

$$= O(\log N) + O(1) \quad (4.68)$$

得证. 对于  $\Delta_N g$  的情形，借助阶的运算易得.

下面开始证明定理4.5. 取  $N = 2^n$ ，假设  $f$  在一点  $x_0$  处可微，则根据上面的引理有

$$|(\Delta_{2N} f)'(x_0) - (\Delta_N f)'(x_0)| = O(\log N) \quad (4.69)$$

但是  $\Delta_{2N} f - \Delta_N f = 2^{-n\alpha} e^{i2^nx}$ ，并且  $N = 2^n$ ，因此故

$$|(\Delta_{2N} f)'(x_0) - (\Delta_N f)'(x_0)| = 2^{n(1-\alpha)} \geq cN^{1-\alpha} \quad (4.70)$$

由于  $N^{1-\alpha}$  的阶大于  $\log N$ ，因此出现矛盾.

最后做一些补充说明. 我们上面得到的函数  $f$  是一个复值函数，但将其拆分为实部与虚部，可以得到两个处处连续，处处不可微的函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \cos(2^n x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \sin(2^n x) \quad (4.71)$$

这件事的证明过程也与上面的相同（因为它们对应的 Fourier 级数也有“缺项”的性质）.

总结一下，对于函数  $f_\alpha$ ，当  $\alpha > 1$  时， $f_\alpha$  连续可微（可以由逐项微分级数的一致收敛性得到）；当  $0 < \alpha < 1$  时，我们证明了  $f_\alpha$  处处连续但处处不可微；而对于  $\alpha = 1$  的情况，我们将在下一章进行处理. 此外，借助前面的方法，我们也很容易证明 Weierstrass 函数确实是一个处处连续，处处不可微的函数.

## 4.4 圆周上的热方程

最后，我们返回第一章的引入，借助 Fourier 级数讨论热方程问题. 在第二章的最后我们简单讨论过，不过也仅限于齐次情况. 假设给定  $t = 0$  时单位圆周上的初始温度，我们的目标在于求出  $t > 0$  时刻的温度分布. 与之前不同的是，现在我们考虑的是圆环，而非圆盘. 为方便起见，我们设  $\theta = 2\pi x$ ，其中  $x \in [0, 1]$ .

假设  $u(x, t)$  代表  $t$  时刻在坐标  $x$  处的温度，根据第一章的讨论，有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.72)$$

其中  $c$  为与导体材料有关的常数，不妨设  $c = 1$ . 假设  $f$  为初始温度分布，即  $u(x, 0) = f(x)$ ，并且设  $f$  为 Riemann 可积函数

为了解决问题，我们依然进行分离变量  $u(x, t) = A(x)B(t)$ ，根据方程可得

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)} = \lambda \quad (4.73)$$

$$\begin{cases} B'(t) - \lambda B(t) = 0 \\ A''(x) - \lambda A(x) = 0 \end{cases} \quad (4.74)$$

$$\begin{cases} B(t) = C_1 e^{\lambda t} \\ A(x) = C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_3 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \end{cases} \quad (4.75)$$

由于  $A(x)$  周期为 1 (一开始的假设)，因此必有  $\lambda = -4\pi^2 n^2, n \in \mathbb{Z}$ ，代入原方程有

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x} \quad (4.76)$$

令  $t = 0$ ，可以看出  $a_n = \hat{f}(n)$ ，即  $f$  的 Fourier 系数。类似第二章的讨论，这里也可以证明  $u$  有二阶连续偏导数（因为因子  $e^{-4\pi^2 n^2 t}$  的收敛速度非常快）。

另一个我们关心的问题就是边界情况，即是否有  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x)$  成立。借助 Parseval 等式可知，上面的收敛情况在平方可积意义下成立，即有如下命题。

#### 命题 4.2

设  $u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x}$ ，则

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(x, t) - f(x)\|^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 |u(x, t) - f(x)|^2 dx = 0 \quad (4.77)$$

**证明** 根据 Parseval 等式，

$$\|u(x, t) - f(x)\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)(e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1)|^2 \quad (4.78)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 |e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1|^2 \quad (4.79)$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \quad (4.80)$$

并且由于  $f$  可积， $\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$ ，因此根据 Weierstrass 判别法，上面的函数项级数一致收敛，令  $t \rightarrow 0$ ，并交换积分与求和号，命题得证。

将  $f$  的 Fourier 系数代入，则上面的解也可写作卷积形式

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x} \quad (4.81)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_0^1 f(y) e^{-2\pi i n y} dy \right) e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x} \quad (4.82)$$

$$= \int_0^1 f(y) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n(x-y)} \right) dy \quad (4.83)$$

$$= f * H_t(x) \quad (4.84)$$

这里出现的  $H_t(x)$  就被称为圆周上的热核

$$H_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x}, \quad (4.85)$$

这里的卷积定义为

$$f * g(x) = \int_0^1 f(x-y)g(y)dy \quad (4.86)$$

并且易知第二章讨论过的许多卷积性质在这里也是成立的. 更幸运的是, 热核也是一个好核, 由此立即得到, 当  $t \rightarrow 0$  时,  $u(x, t)$  在  $f$  的连续点收敛到  $f$ . 关于好核的事实, 在此容易验证其归一化性质, 对于边缘的衰减性需要到利用后面的章节的 Poisson 求和公式证明.

在第二章讨论热方程时, 出现了 Poisson 核, 与之相比热核并没有一个很简洁的表达式, 但若对本节圆周上的热方程直接采用角度  $\theta \in [0, 2\pi]$  代替  $x \in [0, 1]$ , 则有

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (4.87)$$

利用相同的过程也能得到

$$u(\theta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-n^2 \tau} e^{in\theta} = f * h_{\tau}(\theta) \quad (4.88)$$

这里得到了热核的另一种形式

$$h_{\tau}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \tau} e^{in\theta} \quad (4.89)$$

将其与 Poisson 核对比

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \quad (4.90)$$

如果令  $r = e^{-\tau}$  ( $0 < r < 1$  表示  $\tau > 0$ ), 则热核实际上是 Poisson 核的一个特殊形式.

# 第5章 $\mathbb{R}$ 中的 Fourier 变换

前面讨论过 Fourier 级数，它可以解决许多问题，但美中不足的是 Fourier 级数只能对圆上的函数，或者说  $\mathbb{R}$  上的周期函数定义，而 Fourier 变换可以看作它在  $\mathbb{R}$  上对非周期函数的推广。不过这种推广也有一定限制，大多考虑在无穷远处非常“小”的函数。

Fourier 级数借助一列 Fourier 系数得到了一个关于周期函数  $f$  的函数项级数，而 Fourier 变换则是求出一个关于函数  $f$  的函数  $\hat{f}$ ，从这一角度看，Fourier 变换可以看作 Fourier 级数从离散的级数到连续的函数的推广。

对于 Fourier 级数，我们曾这样定义其 Fourier 系数（设  $f$  周期为 1）

$$a_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx, \quad (5.1)$$

当  $f$  满足一定条件时就有

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}. \quad (5.2)$$

为了推广出 Fourier 变换，需要将离散记号改为连续，即将  $n \in \mathbb{Z}$  改为  $\xi \in \mathbb{R}$ ， $\sum$  改为  $\int$ ，得到

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (5.3)$$

这引出了新的问题：上面的积分如何定义？定义后是否收敛？下面进入正题。

## 5.1 Fourier 变换基本理论

首先从推广积分的区域开始。

### 5.1.1 实直线上积分的推广

过去经常考虑某个闭区间上的积分，而对于  $\mathbb{R}$  上的积分，可以借助 Cauchy 主值推广

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx \quad (5.4)$$

对于这样的定义，很自然要讨论其存在性，或者说收敛性。比如取  $f(x) = 1$  或  $f(x) = 1/(|x| + 1)$ ，上式显然发散，但只要保证  $f$  在无穷远处衰减够快，就能保证上式的收敛性。

#### 定义 5.1 (适度衰减 (moderate decrease))

称  $\mathbb{R}$  上的连续函数  $f$  适度衰减，若存在  $A > 0$ ，使得对任意  $x \in \mathbb{R}$  都有

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}, \quad (5.5)$$

定义  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  为  $\mathbb{R}$  上所有适度衰减函数的全体。



通过积分估计，适度衰减函数在  $\mathbb{R}$  上的积分必定是收敛的，更进一步，可以验证  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  是  $\mathbb{C}$  上的向量空间，并且容易验证， $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  中根据 5.4 定义出的积分具有如下性质（为便于描述，用  $\int_{\mathbb{R}}$  代表  $\int_{-\infty}^{\infty}$ ）

#### 命题 5.1

1. 线性：若  $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ ，则

$$\int_{\mathbb{R}} (af(x) + bg(x)) dx = a \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + b \int_{\mathbb{R}} g(x) dx. \quad (5.6)$$

2. 平移不变性：对任意  $h \in \mathbb{R}$  都有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-h) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx. \quad (5.7)$$

3. 伸缩性质：若  $\delta > 0$ , 则

$$\delta \int_{\mathbb{R}} f(\delta x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx. \quad (5.8)$$

4. 连续性：若  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ , 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dx = 0 \quad (5.9)$$

**注** 第四条的证明可三分为

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| dx \leq \int_{-N}^N |f(x-h) - f(x)| dx + \int_{|x| \geq N} |f(x-h)| dx + \int_{|x| \geq N} |f(x)| dx \quad (5.10)$$

### 5.1.2 Fourier 变换的定义

上一节验证了  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  中的函数在  $\mathbb{R}$  上积分收敛，因此根据一开始的讨论，可定义出 Fourier 变换

#### 定义 5.2 (Fourier 变换)

对于  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ , 定义其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx. \quad (5.11)$$

**注** 由于  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ ,  $|e^{-2\pi i x \xi}| = 1$ , 因此容易验证上面的积分是收敛的.

从定义很容易得到  $\hat{f}$  为有界连续函数，并且在无穷远处收敛到 0. 然而，现有条件并不能保证  $\hat{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ , 也就是说无法确定  $\hat{f}$  在无穷远处的收敛速度，这将导致 Fourier 逆变换  $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$  无法定义，为了解决这一问题，我们将考虑一个更精巧的结构：Schwartz 空间，用来建立 Fourier 变换的基本理论.

Schwartz 空间的选则基于一个重要原理： $\hat{f}$  的衰减性与其光滑性有关，或者说， $\hat{f}$  的收敛速度越快，则  $f$  的光滑性应该越好，在 Fourier 级数中也有类似的理论：若  $f \in C^k$ , 则  $\hat{f}(n) = O(1/|n|^k)$ .

### 5.1.3 Schwartz 空间上的 Fourier 变换

#### 定义 5.3 (Schwartz 空间)

定义 Schwartz 空间包含所有满足如下条件的  $\mathbb{R}$  上的函数

1. 无穷可微： $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ .
2. 快速衰减 (rapidly decreasing)：对任意  $k, l \geq 0$ , 都有

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty. \quad (5.12)$$

记作  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

容易验证  $\mathcal{S}$  也是一个  $\mathbb{C}$  上的向量空间，并且若  $f \in \mathcal{S}$ , 则  $f', xf \in \mathcal{S}$ , 这表示 Schwartz 空间在求导与乘多项式两种运算下封闭. 此外，根据与  $x^{-p}$  比较可知  $|f|$  在  $\mathbb{R}$  上的积分收敛.

$\mathcal{S}$  中一个经典的例子就是 Gauss 函数  $e^{-x^2}$ , 并且对任意  $a > 0$ ,  $e^{-ax^2} \in \mathcal{S}$ , 如果令  $a = \pi$ , 可以使 Gauss 函数标准化，即在  $\mathbb{R}$  上积分为 1.

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy \quad (5.13)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r dr d\theta \quad (5.14)$$

$$= \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-\pi r^2} dr \quad (5.15)$$

$$= 1 \quad (5.16)$$

对于  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  中的函数，同样可以定义 Fourier 变换.

#### 定义 5.4 (Fourier 变换)

对于  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ，定义其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi} dx. \quad (5.17)$$

容易验证，Fourier 变换满足如下性质.

#### 命题 5.2

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ，使用  $f(x) \rightarrow \hat{f}(\xi)$  表示  $f$  及其 Fourier 变换，则

1.  $f(x+h) \rightarrow \hat{f}(\xi)e^{2\pi ih\xi}$ .
2.  $f(x)e^{-2\pi ixh} \rightarrow \hat{f}(\xi+h)$ .
3.  $f(\delta x) \rightarrow \delta^{-1}\hat{f}(\delta^{-1}\xi)$ .
4.  $f'(x) \rightarrow 2\pi i\xi\hat{f}(\xi)$ ，进一步有  $f^{(k)}(x) \rightarrow (2\pi i\xi)^k\hat{f}(\xi)$ .
5.  $-2\pi ix f(x) \rightarrow \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi)$ ，进一步有  $(-2\pi ix)^k f(x) \rightarrow \frac{d^k}{d\xi^k}\hat{f}(\xi)$ .



可以看出，Fourier 变换将平移变为旋转，旋转变为平移；并且将求导变为乘法，将乘法变为求导（这里仅指乘  $x$  或  $\xi$  并且不考虑常数倍），这种性质使得 Fourier 变换在微分方程中有很广泛的应用. 下面证明 4.5.

**证明** 对于 4，通过分部积分可得

$$f'(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi ix\xi} dx = 2\pi i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi} dx = 2\pi i\xi\hat{f}(\xi). \quad (5.18)$$

对于 5，直接计算可得

$$\frac{\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)}{h} - (-2\pi ixf)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi} \left[ \frac{e^{-2\pi ixh} - 1}{h} + 2\pi ix \right] dx \quad (5.19)$$

对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $N$ ，使得

$$\int_{|x| \geq N} |f(x)| dx, \int_{|x| \geq N} |xf(x)| dx < \varepsilon, \quad (5.20)$$

并且存在  $h_0 > 0$ ，对任意  $|h| < h_0$ ,  $|x| \leq N$  都有

$$\left| \frac{e^{-2\pi ixh} - 1}{h} + 2\pi ix \right| < \frac{\varepsilon}{N} \quad (5.21)$$

对任意  $|x| \geq N$  都有

$$\left| \frac{e^{-2\pi ixh} - 1}{h} \right| = \left| \frac{2\pi i x h + o(xh)}{h} \right| \quad (5.22)$$

$$= |2\pi ix + o(x)| \quad (5.23)$$

$$\leq C|x| \quad (5.24)$$

估计原式右边可得

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi} \left[ \frac{e^{-2\pi ixh} - 1}{h} + 2\pi ix \right] dx \right| \leq \int_{-N}^N |f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi ixh} - 1}{h} + 2\pi ix \right| dx \quad (5.25)$$

$$+ C' \int_{|x| \geq N} |xf(x)| dx \quad (5.26)$$

$$\leq C''\varepsilon \quad (5.27)$$

得证.

借助 Schwartz 空间中 Fourier 变换的特性，可以证明如下命题，这也是我们讨论 Schwartz 空间的初心.

**命题 5.3**

若  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 则  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .



**证明** 易知  $\hat{f}$  无穷可微. 由于  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 故  $\hat{f}$  有界, 并且由于  $f^{(k)}(x) \rightarrow (2\pi i\xi)^k \hat{f}(\xi)$ ,  $(-2\pi i x)^k f(x) \rightarrow \hat{f}^{(k)}(\xi)$ , 因此并且对于任意  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $\xi^k \hat{f}^{(l)}(\xi)$  也有界, 或者写得更清楚些

$$\frac{1}{(2\pi i)^k} [(-2\pi i x)^l f(x)]^{(k)} \rightarrow \xi^k \hat{f}^{(l)}(\xi) \quad (5.28)$$

这说明  $\hat{f}$  快速衰减, 得证.

这说明  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  在 Fourier 变换下封闭, 进一步我们可以对任意  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  定义 Fourier 逆变换

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad (5.29)$$

关于逆变换的内容留到下一节, 这里先讨论前面提到过的 Gauss 函数, 即  $f(x) = e^{-ax^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 其中  $a > 0$ . 一个最有趣的性质是, 标准化的 Gauss 函数  $e^{-\pi x^2}$  的 Fourier 变换就是它本身.

**定理 5.1**

设  $f(x) = e^{-\pi x^2}$ , 则  $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$ .



**证明** 设

$$F(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (5.30)$$

则可以发现  $F(0) = 1$ , 并且根据  $f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2} = -2\pi x f(x)$  可得

$$F'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i x) f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = i \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = -2\pi \xi \hat{f}(\xi) = -2\pi \xi F(\xi) \quad (5.31)$$

综上, 我们得到了一个关于  $F$  的微分方程

$$\begin{cases} F'(\xi) + 2\pi \xi F(\xi) = 0 \\ F(0) = 1 \end{cases} \quad (5.32)$$

有两种方法得到结果, 一种是直接解得  $F(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$ ; 另一种是看到  $F$  满足与  $f$  相同的微分方程

$$\begin{cases} f'(x) + 2\pi x f(x) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (5.33)$$

借助微分方程解的唯一性可知  $F = f$ .

借助 Fourier 变换的伸缩特性, 可以得到一个使用更广泛的结论.

**推论 5.1**

设  $K_\delta(x) = \delta^{-1/2} e^{-\pi x^2/\delta}$ , 则  $\widehat{K_\delta}(\xi) = e^{-\pi \delta \xi^2}$ , 其中  $\delta > 0$ . 进一步还可知  $\widehat{\widehat{K_\delta}}(x) = K_\delta(x)$ , 即 Fourier 变换在  $K_\delta$  上的作用是“对合”的.



从图像可以看出, 当  $\delta \rightarrow 0$  时,  $K_\delta$  在 0 处有峰, 而  $\widehat{K_\delta}$  在 0 附近越来越“平坦”(反过来当  $\delta \rightarrow \infty$  时,  $K_\delta$  在 0 附近越发平坦, 而  $\widehat{K_\delta}$  在 0 处出现了峰), 说明  $K_\delta$  与  $\widehat{K_\delta}$  在原点处不可能同时被限制住, 这背后隐藏了一个重要原理: Heisenberg 不确定原理, 我们将在本章的最后讨论这件事.

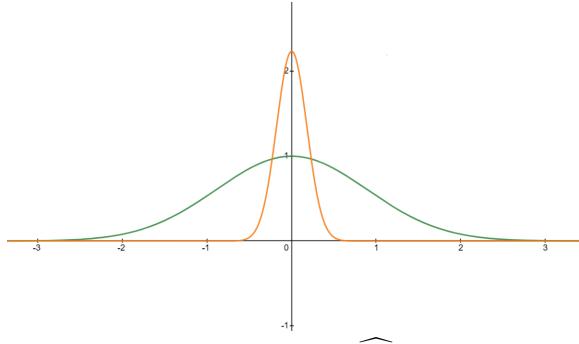
$K_\delta(x)$  实际上也给出了一个实直线上好核的例子, 即其满足

1.  $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(x) dx = 1$ .

2.  $\int_{\mathbb{R}} |K_\delta(x)| dx \leq M$ .

3. 对任意  $\eta > 0$ , 都有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x| > \eta} |K_\delta(x)| dx = 0. \quad (5.34)$$

图 5.1:  $K_\delta$  与  $\widehat{K_\delta}$ 

其中 1 通过计算很容易验证，继而结合  $K_\delta$  的非负性可得 2 成立；对于 3，进行换元可得

$$\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)| dx = \int_{|y|>\eta/\delta^{1/2}} e^{-\pi y^2} dy \rightarrow 0. \quad (5.35)$$

也就是说

### 定理 5.2

函数集  $\{K_\delta(x)\}_{\delta>0}$  在  $\delta \rightarrow 0$  时是一个好核.



在 Fourier 级数中，与好核做卷积可以得到连续函数的一致逼近，在 Fourier 变换中也有类似的结论。首先定义  $\mathbb{R}$  上的卷积。

### 定义 5.5 ( $\mathbb{R}$ 上的卷积)

对任意  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ，定义其卷积为

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt. \quad (5.36)$$



根据  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  空间的性质，对固定的  $x \in \mathbb{R}$ ， $f(x-t)g(t)$  关于  $t$  快速衰减，因此上面的积分是收敛的。

Fourier 变换有很好的卷积性质，即将卷积变为乘积，可以证明如下命题。

### 命题 5.4

设  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ，则

1.  $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .
2.  $f * g = g * f$ .
3.  $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ .



### 证明

1. 根据  $g$  的快速衰减性可知对任意  $l \geq 0$  都有

$$|x|^l |g(x-y)| \leq (|x-y| + |y|)^l |g(x-y)| \leq 2^l (|x-y|^l |g(x-y)| + |y|^l |g(x-y)|) \quad (5.37)$$

其中用到了放缩  $(a+b)^l \leq \max\{2a, 2b\}^l \leq (2a)^l + (2b)^l$ . 两边关于  $x$  取上确界可得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^l |g(x-y)| \leq 2^l \sup_{x \in \mathbb{R}} |x-y|^l |g(x-y)| + 2^l |y|^l \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x-y)| \leq A_l (1 + |y|^l) \quad (5.38)$$

其中  $A_l = 2^l \max\{\sup_x |x|^l |g(x-y)|, \sup_x |g(x-y)|\}$ . 因此

$$|x|^l |f * g(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |x|^l |g(x-y)| dy \leq A_l \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| (1 + |y|^l) dy \quad (5.39)$$

对左边取上确界得证。对于对于  $f * g$  微分的估计，根据卷积的性质

$$(f * g)^{(k)}(x) = f * g^{(k)}(x) \quad (5.40)$$

可知证明是相同的.

2. 变量替换  $x - t = u$  可得

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u)f(u)du = g * f(u) \quad (5.41)$$

3. 令  $F(x, y) = f(y)g(x-y)e^{-2\pi i x \xi}$ , 则  $F$  关于  $x, y$  的无穷积分可换序, 因此

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f * g(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (5.42)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(x, y) dy dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(x, y) dx dy \quad (5.43)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}(\xi) e^{-2\pi i y \xi} dy \quad (5.44)$$

$$= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \quad (5.45)$$

得证.

### 推论 5.2

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 则

$$f * K_{\delta}(x) \Rightarrow f(x), \quad \delta \rightarrow 0. \quad (5.46)$$



**证明** 做差可得

$$|f * K_{\delta}(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} K_{\delta}(t)[f(x-t) - f(x)]dx \right| \quad (5.47)$$

$$\leq \int_{|t|>\eta} + \int_{|t|\leq\eta} K_{\delta}(t)|f(x-t) - f(x)|dt \quad (5.48)$$

前一部分根据好核的性质, 后一部分根据  $f$  在  $\mathbb{R}$  上的一致连续性可知二者均能充分小, 得证.

### 5.1.4 Fourier 逆变换

首先证明如下引理

#### 引理 5.1 (乘积公式)

设  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) g(y) dy \quad (5.49)$$



**证明** 设  $F(x, y) = f(x)g(y)e^{-2\pi i xy}$ , 可知  $F$  的含参变量反常积分可以换序, 因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) g(y) dy \quad (5.50)$$

得证.

借助引理, 可以直接证明如下命题

#### 定理 5.3

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 则

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad (5.51)$$



**证明** 首先证明

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (5.52)$$

考虑  $\widehat{K_\delta}(x) = e^{-\pi\delta x^2}$ , 则根据引理可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{\widehat{K_\delta}}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\widehat{K_\delta}(\xi)d\xi \quad (5.53)$$

当  $\delta \rightarrow 0$  时, 左边趋于  $f(0)$ , 右边趋于  $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)d\xi$ , 得证.

更一般地, 令  $F(y) = f(y+x)$ , 因此有

$$f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi. \quad (5.54)$$

由此可以定义 Fourier 逆变换, 将其与 Fourier 变换一同给出.

#### 定义 5.6 (Fourier 变换与 Fourier 逆变换)

定义映射  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  分别为 Fourier 变换与 Fourier 逆变换, 对任意  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  有

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx, \quad \mathcal{F}^*(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi. \quad (5.55)$$

并且  $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^* = \mathcal{F}^* \circ \mathcal{F} = I$ .



由此可知, Fourier 变换实际上是一个双射.

#### 推论 5.3

Fourier 变换是 Schwartz 空间中的双射.



### 5.1.5 Plancherel 等式

Plancherel 等式可以看作 Parseval 等式在 Fourier 变换中的推广, 这一事实同样依赖一些内积结构. 定义  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  上的内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx \quad (5.56)$$

以及由内积诱导的范数

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (5.57)$$

下面给出 Plancherel 等式, 它与 Parseval 等式有非常类似的形式.

#### 定理 5.4 (Plancherel 等式)

若  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 则  $\|\hat{f}\| = \|f\|$ .



**证明** 设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 定义  $f^\flat(x) = \overline{f(-x)}$ , 则  $\hat{f}^\flat(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$ , 设  $h = f * f^\flat$ , 则  $\hat{h} = \widehat{f * f^\flat} = \hat{f}\hat{f}^\flat = |\hat{f}|^2$ , 在  $\hat{h}$  的 Fourier 逆变换中令  $x = 0$  则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi) d\xi = h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad (5.58)$$

得证.

在前面对 Fourier 变换的讨论中, 我们大多限制在 Schwartz 空间  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  中考虑, 事实上, 这些讨论可以推广到适度衰减函数空间  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  中, 只要考慮满足条件  $f, \hat{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$  的函数  $f$  即可, 事实上可以证明: 若  $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ , 则  $f * g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ . 这种推广可以拓宽 Fourier 变换的使用范围, 在许多方面都有所应用.

### 5.1.6 Weierstrass 逼近定理

借助好核  $K_\delta$ , 可以很容易证明连续函数 Weierstrass 逼近定理 (在第二章中曾讨论过类似内容). 首先证明一个引理.

**引理 5.2**

设  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数,  $g$  为多项式函数, 则  $f * g$  依然为多项式函数.



**证明** 设  $g(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ , 则

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \quad (5.59)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_{k=0}^n a_k (x-t)^k dt \quad (5.60)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_{k=0}^n a_k \sum_{l=0}^k x^l (-t)^{k-l} \binom{k}{l} dt \quad (5.61)$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k a_k \binom{k}{l} x^l \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-t)^{k-l} dt \quad (5.62)$$

$$= \sum_{l=0}^n \sum_{k=l}^n a_k \binom{k}{l} x^l \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-t)^{k-l} dt \quad (5.63)$$

$$= \sum_{l=0}^n b_l x^l \quad (5.64)$$

其中系数

$$b_l = \sum_{k=l}^n a_k \binom{k}{l} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-t)^{k-l} dt. \quad (5.65)$$

**定理 5.5 (Weierstrass 逼近定理)**

设  $f$  为定义在闭区间  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  中的有界连续函数, 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在多项式  $P$  使得

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon. \quad (5.66)$$

或者说,  $f$  可以被多项式一致逼近.



**证明** 不妨设  $[a, b] = [-M, M]$ ,  $f(a) = f(b) = 0$ . 前一件事可以通过平移得到, 后一件事只需要考虑  $g(x) = f(x) - l(x)$ , 其中  $l(x)$  为多项式.

$$l(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \quad (5.67)$$

对任意  $\varepsilon > 0$ , 由于  $f * K_\delta \Rightarrow f$ , 故存在  $\delta_0$ , 使得对任意  $x \in \mathbb{R}$  都有

$$|f(x) - f * K_\delta(x)| < \varepsilon/2 \quad (5.68)$$

由于  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n / n!$ , 并且该级数在  $\mathbb{R}$  中内闭一致收敛, 故存在  $N$ , 对任意  $x \in [-2M, 2M]$  都有

$$|K_{\delta_0}(x) - R(x)| < \frac{\varepsilon}{4MB} \quad (5.69)$$

其中  $B$  为  $g(x)$  的界, 多项式

$$R(x) = \delta_0^{-1/2} \sum_{n=0}^N \frac{(-\pi x^2 / \delta_0)^n}{n!} \quad (5.70)$$

因此根据上面的估计有  $|f(x) - f * R(x)| < \varepsilon$ , 根据引理可知  $f * R$  为多项式, 命题得证.

**注** 事实上, 如果取一个多项式函数的好核, 证明会大大简化.

## 5.2 Fourier 变换在 PDE 中的应用

因为 Fourier 变换可以将分析运算（比如求导）变为代数运算（乘某个多项式），所以 Fourier 变换在微分方程中有许多应用，下面借助 Fourier 变换来讨论热传导方程。

### 5.2.1 实直线上的热传导方程

我们在第四章中讨论了圆周上的热传导方程，下面讨论实直线上的热传导方程。

考虑一个无限长铁棒，给出初始温度分布  $u(x, 0) = f(x)$ ，需要求出时间  $t > 0$  的温度分布  $u(x, t)$ ，根据前面的讨论，这需要解热方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (5.71)$$

对方程两边关于  $x$  作 Fourier 变换得到

$$\partial_t \hat{u}(\xi, t) + 4\pi^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t) = 0 \quad (5.72)$$

固定  $\xi$ ，则上面的方程是一个关于  $t$  的常微分方程，初值  $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$ ，解得

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t} \quad (5.73)$$

对两边作 Fourier 逆变换可知方程的解由卷积给出（与圆周上的热方程类似），设实直线上的热核为

$$\mathcal{H}_t(x) = K_{4\pi t}(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t}, \quad \widehat{\mathcal{H}}_t(\xi) = e^{-4\pi^2 t \xi^2} \quad (5.74)$$

则

$$u(x, t) = f * \mathcal{H}_t(x), \quad t > 0. \quad (5.75)$$

进一步，可以得到如下定理。

#### 定理 5.6

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ，令  $u(x, t) = f * \mathcal{H}_t(x)$ ， $t > 0$ ，其中  $\mathcal{H}_t$  为直线上的热核，则

1.  $u \in C^2$ ，并且是热方程 5.71 的解。
2. 当  $t \rightarrow 0$  时， $u(x, t)$  一致收敛到  $f(x)$ ，并且若令  $u(x, 0) = f(x)$ ，则  $u$  在上半平面  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$  上连续。
3.  $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t) - f(x)|^2 dx = 0.$



#### 证明

1. 由于  $u = f * \mathcal{H}_t$ ，因此  $u \in C^2$ （卷积的性质，事实上  $u \in C^\infty$ ），并且根据上文推理可知  $u$  满足热方程，得证。
2. 由于热核是好核，因此  $f * \mathcal{H}(t) \rightrightarrows f, t \rightarrow 0$ ，得证。
3. 根据 Plancherel 等式可得

$$\|u - f\| = \|\hat{u} - \hat{f}\| = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\xi, t) - \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \quad (5.76)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |e^{-4\pi^2 t \xi^2} - 1|^2 d\xi \quad (5.77)$$

当  $t \rightarrow 0$  时，对任意  $|e^{-4\pi^2 t \xi^2} - 1|$  可以充分小，故  $\|u - f\| \rightarrow 0$ ，得证。

上面的定理说明了直线上热方程解的存在性，并且解仅依赖初始分布  $f$ ，得到的解  $u = f * \mathcal{H}_t$  也具有很多性质。

**定理 5.7**

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 则  $u = f * \mathcal{H}_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  关于  $t$  是一致的, 即对任意  $T > 0$ ,  $k, l \geq 0$  都有

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ 0 < t < T}} |x|^k |\partial_x^l u| < \infty. \quad (5.78)$$



**证明** 由于  $f$  快速衰减, 因此对任意  $|y| \leq |x|/2$  都有

$$|f(x-y)| \leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N} \quad (5.79)$$

而对于任意  $|y| \geq |x|/2$ , 都有

$$\mathcal{H}_t(y) \leq Ct^{-1/2}e^{-cx^2/t} \quad (5.80)$$

因此

$$|u(x,t)| \leq \int_{|y| \leq |x|/2} |f(x-y)|\mathcal{H}_t(y)dy + \int_{|y| \geq |x|/2} |f(x-y)|\mathcal{H}_t(y)dy \quad (5.81)$$

$$\leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N} + \frac{C}{\sqrt{t}}e^{-cx^2/t} \quad (5.82)$$

第一项用到了核的归一性. 这说明  $u$  在  $0 < t < T$  一致快速衰减. 对于  $u$  关于  $x$  的任意阶导数可以进行相同的操作, 只是上面的  $f$  变为  $f^{(k)}$ . 得证.

借助上面的命题, 可以得到热方程解的唯一性定理.

**定理 5.8 (唯一性定理)**

若  $u(x,t)$  满足如下性质:

1.  $u$  在上半平面连续.
2.  $u$  满足热方程 ( $t > 0$ ) .
3.  $u(x,0) = 0$ .
4.  $u(\cdot,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  且关于  $t$  一致, 即满足上一条定理.

则  $u \equiv 0$ .



**证明** 构造 (时间)  $t$  的函数: 能量

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2 dx \geq 0. \quad (5.83)$$

可知  $E(0) = 0$ . 并且

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\mathbb{R}} [\partial_t u(x,t)\bar{u}(x,t) + u(x,t)\partial_t \bar{u}(x,t)]dx \quad (5.84)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} [\partial_x^2 u(x,t)\bar{u}(x,t) + u(x,t)\partial_x^2 \bar{u}(x,t)]dx \quad (5.85)$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} [\partial_x u(x,t)\partial_x \bar{u}(x,t) + \partial_x u(x,t)\partial_x \bar{u}(x,t)]dx \quad (5.86)$$

$$= -2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(x,t)|^2 dx \quad (5.87)$$

$$\leq 0. \quad (5.88)$$

这说明  $E(t)$  单调递减, 故  $E(t) \equiv 0$ , 根据  $u$  的连续性可知  $u \equiv 0$ .

## 5.2.2 上半平面的稳态热方程

下面再考虑上半平面  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$  中的稳态热方程, 即

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5.89)$$

具有边值  $u(x, 0) = f(x)$ . 对上面的方程作关于  $x$  的 Fourier 变换可得

$$-4\pi^2\xi^2\hat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2}(\xi, y) = 0 \quad (5.90)$$

解得

$$\hat{u}(\xi, y) = A(\xi)e^{-2\pi|\xi|y} + B(\xi)e^{2\pi|\xi|y} \quad (5.91)$$

根据边值  $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$ , 以及  $e^{2\pi|\xi|y}$  关于  $y$  不快速衰减, 因此

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}. \quad (5.92)$$

接着作 Fourier 逆变换, 可得方程的解. 为了计算这里的核, 考虑下述引理

### 引理 5.3

定义  $\mathbb{R}$  中的 Poisson 核为

$$\mathcal{P}_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (5.93)$$

则  $\widehat{\mathcal{P}}_y(\xi) = e^{-2\pi|\xi|y}$ .



**证明** 积分可得

$$\int_0^\infty e^{-2\pi\xi y} e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_0^\infty e^{2\pi i(x+iy)\xi} d\xi = \left[ \frac{e^{2\pi i(x+iy)\xi}}{2\pi i(x+iy)} \right]_0^\infty = -\frac{1}{2\pi i(x+iy)} \quad (5.94)$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{2\pi\xi y} e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{-\infty}^0 e^{2\pi i(x-iy)\xi} d\xi = \left[ \frac{e^{2\pi i(x-iy)\xi}}{2\pi i(x-iy)} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{2\pi i(x-iy)} \quad (5.95)$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|\xi|y} e^{2\pi i \xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi i(x-iy)} - \frac{1}{2\pi i(x+iy)} = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} \quad (5.96)$$

这说明  $\mathcal{F}^*(e^{-2\pi|\xi|y})(x) = \mathcal{P}_y(x)$ , 反之同理.

这里的 Poisson 核与 Fourier 级数部分讨论过的 Poisson 核非常相似, 并且它也是好核.

### 引理 5.4

Poisson 核  $\mathcal{P}_y(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的好核 ( $y \rightarrow 0$ ) .



**证明** 由于  $\widehat{\mathcal{P}}_y(\xi) = e^{-2\pi|\xi|y}$ , 因此在 Fourier 变换的等式中令  $\xi = 0$ , 即得

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_y(x) dx = 1. \quad (5.97)$$

并且  $\mathcal{P}_y(x) \geq 0$ , 因此好核的定义 2 也满足. 对固定的  $\delta > 0$ , 令  $u = x/y$  可得

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \int_{\delta/y}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(\delta/y) \quad (5.98)$$

令  $y \rightarrow 0$  可知上式趋于 0, 得证.

对于前面对热方程的讨论, 结合两条引理可以得到如下定理.

### 定理 5.9

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 令  $u(x, y) = f * \mathcal{P}_y(x)$ , 则

1.  $u(x, y) \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$ , 并且满足  $\Delta u = 0$ .
2. 当  $y \rightarrow 0$  时,  $u(x, y)$  一致趋于  $f(x)$ .
3.  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |u(x, y) - f(x)|^2 dx = 0$ .
4. 若  $u(x, 0) = f(x)$ , 则  $u$  为闭上半平面  $\overline{\mathbb{R}_+^2}$  的连续函数, 并且

$$u(x, y) \rightarrow 0, \quad |x| + y \rightarrow \infty. \quad (5.99)$$



**证明**

1. 根据好核的卷积性质以及前面的讨论得证.
2. 根据好核的性质可知  $f * \mathcal{P}_y(x) \rightharpoonup f, y \rightarrow 0$ .
3. 根据 Plancherel 等式易得.
4. 若  $|x| > y$ , 则根据  $f$  的快速衰减以及 Poisson 核进行放缩可得

$$|f * \mathcal{P}_y(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \frac{y}{\pi(t^2 + y^2)} dt \right| \quad (5.100)$$

$$\leq \int_{|t| \leq |x|} |f(x-t)| \frac{y}{\pi(t^2 + y^2)} dt + \int_{|t| \geq |x|} |f(x-t)| \frac{y}{\pi(t^2 + y^2)} dt \quad (5.101)$$

$$\leq C \left( \frac{1}{1+x^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad (5.102)$$

若  $|x| < y$ , 则直接放缩可得

$$|f * \mathcal{P}_y(x)| \leq \frac{C}{y}. \quad (5.103)$$

故命题得证.

接着考虑唯一性定理.

**定理 5.10 (唯一性定理)**

设  $u$  为  $\overline{\mathbb{R}_+^2}$  中的连续函数, 并且满足  $\Delta u = 0$ ,  $u(x, 0) = 0$ , 并且在无穷远处为 0, 则  $u \equiv 0$ .



这一定理的证明要用到调和函数的平均值性质.

**引理 5.5 (平均值性质)**

设  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  为开集,  $u \in C^2$  并且在  $\Omega$  上  $\Delta u = 0$ , 若以  $(x, y)$  为圆心,  $R$  为半径的圆盘  $D \subset \Omega$ , 则对任意  $0 \leq r \leq R$  有

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) d\theta. \quad (5.104)$$



**证明** 设  $U(r, \theta) = u(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)$ , 则考虑极坐标系中的 Laplace 算子  $\Delta u = 0$ , 可知

$$0 = r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \quad (5.105)$$

设

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r, \theta) d\theta, \quad (5.106)$$

则根据上面的结果有

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(r, \theta) d\theta = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_0^{2\pi} = 0 \quad (5.107)$$

这表明  $r \partial_r F$  为常数, 即  $\partial_r F = 0$ ,  $F$  为常数, 而  $F(0) = u(x, y)$ , 故命题得证.

为了证明唯一性定理, 设在某处有  $u(x_0, y_0) > 0$ , 则考虑半径为  $R$  的半圆盘

$$D_R^+ = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}, \quad (5.108)$$

在其外每一点都有  $u(x, y) \leq \frac{1}{2}u(x_0, y_0)$ . 由于  $u$  在  $D_R^+$  连续, 因此存在  $(x_1, y_1) \in D_R^+$ , 使得  $u$  在该点达到半圆盘中的最大值  $u(x_1, y_1) = M$ , 根据圆盘的选取可知  $M$  也是  $u$  在上面平面的最大值. 根据平均值公式可知

$$u(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta) d\theta \quad (5.109)$$

这表明在整个圆周  $C_r(x_1, y_1)$  上都有  $u(x_1 + r \cos \theta, y_1 + r \sin \theta) = M$ , 令  $r \rightarrow y_1$ , 则根据  $u$  的连续性可得  $u(x_1, 0) = M > 0$ , 这与  $u(x, 0) = 0$  矛盾, 因此得证.

### 5.3 Poisson 求和公式

研究 Fourier 变换的动机是将 Fourier 级数从离散推广到连续，事实上，圆上的连续函数以及实直线上的连续函数之间有很深入的关系。设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  为  $\mathbb{R}$  中的函数，则可以构造函数

$$F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n), \quad (5.110)$$

根据  $f$  的快速衰减性，可知上述级数在  $\mathbb{R}$  中内闭绝对一致收敛，因此  $F_1$  连续，并且是周期为 1 的连续函数，这样的函数  $F_1$  称为  $f$  的周期化。

此外，还有另一种方法将  $f$  周期化，借助 Fourier 分析理论可知

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad (5.111)$$

考虑其离散版本，即将积分换成求和可得

$$F_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}. \quad (5.112)$$

由于  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ，因此上面的级数绝对一致收敛，故  $F_2$  也是连续函数。

下面给出一个非常有趣的事：上面周期化的两个函数实际上是相同的。

#### 定理 5.11 (Poisson 求和公式)

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}. \quad (5.113)$$

特别的，令  $n=0$  可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n). \quad (5.114)$$



**证明** 根据 Fourier 级数的唯一性定理，只需验证两个函数的 Fourier 系数相同（因为它们都是连续的）。而右边的第  $m$  项为  $\hat{f}(m)$ ，计算左边可得

$$\int_0^1 \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right) e^{-2\pi i m x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2\pi i m x} dx \quad (5.115)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2\pi i m y} dy \quad (5.116)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i m y} dy \quad (5.117)$$

$$= \hat{f}(m) \quad (5.118)$$

其中积分号与求和号的交换是因为  $f$  的快速衰减性得到的绝对一致收敛，得证。

事实上，上面的定理也可以推广到适度衰减函数  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ ，证明是一样的。

离散化的思想在许多方面都有应用，比如考虑函数  $f(x) = 1/x, x \neq 0$ ，则当  $x \notin \mathbb{Z}$  时，它的离散化给出了余切函数的离散形式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+n} = \pi \cot \pi x \quad (5.119)$$

类似的，考虑  $f(x) = 1/x^2$  可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} \quad (5.120)$$

上面的求和均在 Cauchy 主值意义下。

### 5.3.1 theta 与 zeta 函数

对任意  $s > 0$ , 定义 theta 函数为

$$\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s}, \quad (5.121)$$

根据  $s$  的范围, 上述级数绝对收敛, 并且有下面的性质.

#### 命题 5.5

上面定义的 theta 函数对任意  $s > 0$  满足方程

$$s^{-1/2} \theta(1/s) = \theta(s). \quad (5.122)$$

**证明** 令  $f(x) = e^{-\pi s x^2}$ , 则  $\hat{f}(\xi) = s^{-1/2} e^{-\pi \xi^2 / s}$ , 根据 Poisson 求和公式可得

$$\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^{-1/2} e^{-\pi n^2 s^{-1}} = s^{-1/2} \theta(1/s) \quad (5.123)$$

在复平面中, theta 函数可以被延拓到  $\operatorname{Re}(s) > 0$  的范围, 延拓后的函数仍满足上面的方程. 此外, 它还与一个非常重要的函数有紧密联系: 定义在  $\operatorname{Re}(s) > 1$  的 zeta 函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (5.124)$$

在后面的章节会看到, zeta 函数包含着许多素数的信息.

下面的等式将 theta、zeta 函数以及另一个非常重要的 Gamma 函数联系在了一起

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{s/2-1} (\theta(t) - 1) dt. \quad (5.125)$$

回到 theta 函数, 定义更一般的 Theta 函数

$$\Theta(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau} e^{2\pi i n z} \quad (5.126)$$

这里  $\operatorname{Im}(\tau) > 0, z \in \mathbb{C}$ , 若令  $z = 0, \tau = is$  则有  $\Theta(z|\tau) = \theta(s)$ .

### 5.3.2 热核与 Poisson 核

借助 Poisson 求和公式, 可以讨论热核与 Poisson 核的一些性质. 根据前面的讨论, 圆上的热方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{x^2}^2 u = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (5.127)$$

的解为  $u(x, t) = f * H_t(x)$ , 这里  $H_t(x)$  为圆上的热核

$$H_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2\pi i n x} = \Theta(x|4\pi it) \quad (5.128)$$

此外, 还讨论过  $\mathbb{R}$  上的热核

$$\mathcal{H}_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t} \quad (5.129)$$

以及其 Fourier 变换  $\hat{\mathcal{H}}_t(\xi) = e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$ . Poisson 求和公式直接将这二者联系了起来.

#### 定理 5.12

圆周上的热核是  $\mathbb{R}$  上热核的周期化, 即

$$H_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_t(x+n) \quad (5.130)$$

**证明** 注意到  $H_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{H}_t(n) e^{2\pi i n x}$ , 根据 Poisson 求和公式易得.

我们很轻易证明了  $\mathcal{H}_t$  是好核, 借助上述定理, 可以证明第四章中的一个遗留问题:  $H_t$  是好核.

### 推论 5.4

圆上的热核  $H_t(x)$  在  $t \rightarrow 0$  时是好核.



**证明** 设

$$H_t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_t(x+n) = \mathcal{H}_t(x) + \sum_{|n| \geq 1} \mathcal{H}_t(x+n) = \mathcal{H}_t(x) + E_t(x) \quad (5.131)$$

这里误差项

$$E_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \sum_{|n| \geq 1} e^{-(x+n)^2/4t} \leq Ct^{-1/2} \sum_{n \geq 1} e^{-cn^2/t} \quad (5.132)$$

由于  $n^2/t \geq n^2, n^2/t \geq 1/t$ , 因此  $n^2/t \geq 1/2(n^2 + 1/t)$ , 所以有

$$|E_t(x)| \leq Ct^{-1/2} e^{-\frac{c}{2} \frac{1}{t}} \sum_{n \geq 1} e^{-\frac{c}{2} n^2} \leq c_1 e^{-c_2/t} \quad (5.133)$$

这里也用到了  $t^{-1/2} e^{-\frac{c}{2} \frac{1}{t}}$  有界的事, 因此

$$\int_{|x| \leq 1/2} |E_t(x)| dx \leq c_1 e^{-c_2/t} \rightarrow 0 \quad (5.134)$$

这说明对任意  $\eta > 0$ , 积分

$$\int_{\eta < |x| \leq 1/2} |H_t(x)| dx \leq \int_{\eta < |x| \leq 1/2} |\mathcal{H}_t(x)| dx + \int_{\eta < |x| \leq 1/2} |E_t(x)| dx \rightarrow 0 \quad (5.135)$$

命题得证.

类似地, 可以讨论两种 Poisson 核之间的关系

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \quad \mathcal{P}_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2} \quad (5.136)$$

有如下结论

### 定理 5.13

设  $r = e^{-2\pi y}$ , 则

$$P_r(2\pi x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(x+n). \quad (5.137)$$



**证明** 根据 Poisson 求和公式可得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{P}}_y(n) e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi |n| y} e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-2\pi y})^{|n|} e^{i n (2\pi x)} = P_r(2\pi x) \quad (5.138)$$

这里  $r = e^{-2\pi y}$ .

## 5.4 Heisenberg 不确定原理

借助某个函数与其 Fourier 变换的关系, 可以从数学角度理解 Heisenberg 不确定原理. 简单来说, 它指出一个函数与其 Fourier 变换不可能同时被准确定位. 更准确一点, 假设函数的质量集中于长度为  $L$  的区间中, 那么质量的 Fourier 变换必然不会集中在比  $L^{-1}$  更短的区间内. 下面来更严谨讨论这一问题.

**定理 5.14 (不确定性定理)**

设  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , 并且满足归一化性质  $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$ , 那么

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} \quad (5.139)$$

等号成立当且仅当  $\psi(x) = Ae^{-Bx^2}$ , 其中  $B > 0$ ,  $|A|^2 = \sqrt{2B/\pi}$ . 更一般的, 对任意  $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$  都有

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} \quad (5.140)$$



**证明** 分部积分可得

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot |\psi(x)|^2 dx \quad (5.141)$$

$$= x|\psi(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d(\psi\bar{\psi})}{dx} dx \quad (5.142)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} x(\psi'(x)\bar{\psi}(x) + \bar{\psi}'(x)\psi(x)) dx \quad (5.143)$$

因此使用 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$1 \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\psi(x)| |\psi'(x)| dx \quad (5.144)$$

$$\leq 2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (5.145)$$

由于  $\mathcal{F}(\psi')(\xi) = 2\pi i \xi \hat{\psi}(\xi)$ , 因此将 Plancherel 等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \quad (5.146)$$

代入上式, 命题得证.

为了证明第二个等式, 只需用  $e^{-2\pi ix\xi_0} \psi(x + x_0)$  替代  $\psi(x)$ , 则根据  $\mathcal{F}(e^{-2\pi ix\xi_0} \psi(x + x_0))(\xi) = \hat{\psi}(\xi + \xi_0)$  以及第一个等式可知

$$\frac{1}{16\pi^2} \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x + x_0)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi + \xi_0)|^2 d\xi \right) \quad (5.147)$$

$$= \left( \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \quad (5.148)$$

命题得证. 特别的, 等号成立当且仅当  $\psi'(x) = \beta x \psi(x)$ , 即  $\psi(x) = Ae^{\beta x^2/2}$ . 令  $\beta = -B$ , 根据归一化条件知  $|A|^2 = \sqrt{2B/\pi}$ .

上面的定理源于量子力学的研究, 为“能否同时测定例粒子的位置与动量”的问题给出了否定的回答. 考虑直线上运动的粒子, 一些物理规律表明它由一个状态函数  $\psi$  描述 (不妨设  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ), 并且有归一化性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (5.149)$$

更准确来说, 粒子的位置不再表示为某一点, 而是用状态函数的积分 (一种比率、概率) 表示, 即粒子位于区间  $(a, b)$  的概率为

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx \quad (5.150)$$

因此  $|\psi(x)|^2$  也被称为概率密度函数. 进一步, 可以得到粒子位置的期望 (平均值) 为

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx. \quad (5.151)$$

同理可得方差为

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 |\psi(x)|^2 dx. \quad (5.152)$$

方差描述了数据与平均值（期望）的偏差，方差越小，说明数据越集中；若考虑测量数据，则越小的方差表示测量的确定性越大，反之大的方差就反映了一种“不确定性”。量子力学还指出，在前面符号的基础上，粒子的动量  $\xi$  在区间  $(a, b)$  分布的概率为

$$\int_a^b |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \quad (5.153)$$

这里  $\hat{\psi}$  恰好是表示位置的函数  $\psi$  的 Fourier 变换。

综上，定理5.14实际上给出了位置与动量不确定性的乘积的下界  $1/16\pi^2$ ，也说明位置越确定，则动量就会越不确定，反之亦然。我们通过改变单位长度给出了 Heisenberg 不确定原理的简单描述，它的物理版本是

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar}{16\pi^2} \quad (5.154)$$

这里出现的非常小的常量  $\hbar \approx 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  被称为 **Planck 常数**。

# 第6章 $\mathbb{R}^d$ 中的 Fourier 变换

上一章讨论了  $\mathbb{R}$  中的 Fourier 变换，本章就将其推广到  $\mathbb{R}^d$  上，考虑多变量函数的 Fourier 变换。因为大多情况在做推广，因此许多定理、核心证明都与上一章有相似之处。

## 6.1 回顾与准备工作

本章要考慮的是  $d$  维 Euclid 空间  $\mathbb{R}^d = \{(x_1, \dots, x_d) : x_k \in \mathbb{R}\}$ ，这是一个内积空间，其上的实内积与范数 (Euclid 范数) 也都讨论过。

方便起见，在此定义一个正整数指标的记号，设  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ ，其中  $\alpha_k \in \mathbb{N}$ ，则定义

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} \quad (6.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad (6.2)$$

其中  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ 。

### 6.1.1 $\mathbb{R}^d$ 中的积分

定义实直线上的积分需要一定的衰减性，因此首先给出连续函数适度衰减的定义。

#### 定义 6.1 (适度衰减 (moderate decreasing))

称  $\mathbb{R}^d$  中的连续复值函数  $f$  适度衰减，若

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^{d+1} |f(x)| < \infty \quad (6.3)$$



对于适度衰减函数，定义其在  $\mathbb{R}^d$  上的积分为

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{Q_N} f(x) dx \quad (6.4)$$

其中  $Q_N$  表示以原点为中心，边长为  $N$  的立方体

$$Q_N = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_k| \leq N/2\}. \quad (6.5)$$

上面的极限收敛是因为右边的数列  $I_N$  为 Cauchy 列。类似也可以用球  $B_N(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq N\}$  上的积分取极限。

根据定义，很容易验证积分在平移、(某种) 伸缩、旋转下的不变性。

#### 命题 6.1

设  $f$  在  $\mathbb{R}^d$  适度衰减，则

1. 对任意  $h \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x+h) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx. \quad (6.6)$$

2. 对任意  $\delta > 0$

$$\delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx. \quad (6.7)$$

3. 对任意旋转变换  $R$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(R(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx. \quad (6.8)$$



极坐标系的概念也可以由二维推广到  $d$  维, 在  $\mathbb{R}^2$  有

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (6.9)$$

定义  $S^1$  为一维球面, 即圆周  $\gamma = (\cos \theta, \sin \theta)$ , 并且定义

$$\int_{S^1} g(\gamma) dS(\gamma) = \int_0^{2\pi} g(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \quad (6.10)$$

则前式可记为

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_{S^1} \int_0^\infty f(r\gamma) r dr dS(\gamma) \quad (6.11)$$

同理, 对于  $\mathbb{R}^3$  有

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 dr d\theta d\varphi \quad (6.12)$$

$$= \int_{S^2} \int_0^\infty f(r\gamma) r^2 dr dS(\gamma) \quad (6.13)$$

这里的  $S^2$  表示二维球面  $\gamma = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ .

更一般地, 任何  $x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$  都能唯一表示为  $x = r\gamma$  的形式, 这里  $r > 0$ ,  $\gamma \in S^{d-1}$ ,  $f$  在  $\mathbb{R}^d$  中的积分也可表示为

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{S^{d-1}} \int_0^\infty f(r\gamma) r^{d-1} dr dS(\gamma). \quad (6.14)$$

### 6.1.2 径向对称

径向对称是在高维 Euclid 空间中才能体会到的性质, 首先给出定义

#### 定义 6.2 (径向对称)

称  $\mathbb{R}^d$  上的函数  $f$  径向对称, 若存在函数  $f_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , 使得  $f(x) = f_0(|x|)$ .

从极坐标的视角看, 径向对称实际上是指

$$f(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = f_0(r) \quad (6.15)$$

即  $f$  的取值仅与 “半径” 有关, 而与角度无关. 另外根据一些几何特性可知, 若  $|x| = |x'|$ , 则必定存在旋转变换  $R' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$  使得  $x' = Rx$ .

## 6.2 Fourier 变换基本理论

首先定义更一般的 ( $\mathbb{R}^d$  上的) Schwartz 空间  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

#### 定义 6.3 (Schwartz 空间)

定义  $\mathbb{R}^d$  上的 Schwartz 空间包含满足如下条件的  $\mathbb{R}^d$  上的函数

1. 无穷可微:  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ .
2. 快速衰减 (rapidly decreasing): 对任意指标  $\alpha, \beta$  都有

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta f(x) \right| < \infty. \quad (6.16)$$

同理可以定义任意 Schwartz 空间中的 Fourier 变换, 这只是将一维 Fourier 变换的乘法改为点乘而已.

**定义 6.4 (Fourier 变换)**

对任意  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 定义其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx. \quad (6.17)$$

简便起见, 将 Fourier 变换记为  $f(x) \rightarrow \hat{f}(\xi)$ , 则容易验证如下性质

**命题 6.2**

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 则

1.  $f(x + h) \rightarrow \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot h}$ .
2.  $f(x) e^{-2\pi i x \cdot h} = \hat{f}(\xi + h)$ .
3.  $f(\delta x) \rightarrow \delta^{-d} \hat{f}(\delta^{-1} \xi)$ .
4.  $(\partial_x^\alpha) f(x) \rightarrow (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$ .
5.  $(-2\pi i x)^\alpha f(x) \rightarrow (\partial_\xi^\alpha) \hat{f}(\xi)$ .
6. 对任意旋转变换  $R$ ,  $f(Rx) \rightarrow \hat{f}(R\xi)$ .

**证明** 只证明 6, 设  $y = Rx$ , 则  $R^{-1}y \cdot \xi = y \cdot R\xi$ , 这说明

$$\widehat{f(Rx)}(\xi) = \widehat{f(y)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \quad (6.18)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i (R^{-1}x) \cdot \xi} |\det R| dx \quad (6.19)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot R\xi} dx \quad (6.20)$$

$$= \hat{f}(Rx) \quad (6.21)$$

上面用到了旋转变换的自伴性  $R^T = R$  以及  $\det R = 1$ .

进一步考虑卷积, 则对任意  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 都有

1.  $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .
2.  $f * g = g * f$ .
3.  $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$ .

上一章中讨论过,  $\mathbb{R}$  中的函数  $f(x) = e^{-\pi x^2}$  在 Fourier 变换下不变, 同样可以证明,  $\mathbb{R}^d$  中的函数  $f(x) = e^{-\pi x^2}$  在 Fourier 变换下也不变.

**例 6.1** 设  $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , 则

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (6.22)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\pi(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_n^2} e^{-2\pi i x_n \xi_n} dx_n \right) e^{-2\pi i (x_1 \xi_1 + \dots + x_{n-1} \xi_{n-1})} dx_1 \dots dx_{n-1} \quad (6.23)$$

$$= e^{-\pi \xi_n^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\pi|x^{(n-1)}|^2} e^{-2\pi i x^{(n-1)} \cdot \xi^{n-1}} dx^{(n-1)} \quad (6.24)$$

$$= \dots \quad (6.25)$$

$$= e^{-\pi(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)} = e^{-\pi|\xi|^2} \quad (6.26)$$

上面不严格地定义了一个记号  $x^{(n-1)} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

由此可以给出  $\mathbb{R}^d$  中的一个好核  $K_\delta$ , 定义为

$$K_\delta(x) = \delta^{-d/2} e^{-\pi|x|^2/\delta}, \quad (6.27)$$

这实际上就是实直线上热核的推广, 其好核的性质也容易验证. 同时可计算得到如下命题

**命题 6.3**

设  $K_\delta(x) = \delta^{-d/2} e^{-\pi|x|^2/\delta}$ , 则  $\widehat{K_\delta}(\xi) = e^{-\pi\delta|\xi|^2}$ , 并且  $\widehat{\widehat{K_\delta}}(x) = K_\delta(x)$ .

**引理 6.1**

设  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 则

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx \quad (6.28)$$



有了 Fourier 变换, 同理可定义 Fourier 逆变换, 这实际上需证

**引理 6.2**

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 则

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{2\pi ix \cdot \xi}d\xi. \quad (6.29)$$



**证明** 首先证明

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)d\xi. \quad (6.30)$$

考虑  $\widehat{K_\delta}(x) = e^{-\pi\delta|x|^2}$ , 则根据引理可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)K_\delta(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{\widehat{K_\delta}}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\widehat{K_\delta}(\xi)d\xi \quad (6.31)$$

当  $\delta \rightarrow 0$  时, 左边趋于  $f(0)$ , 右边趋于  $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)d\xi$ , 得证.

更一般地, 令  $F(y) = f(y+x)$ , 因此有

$$f(x) = F(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{F}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)e^{2\pi ix \cdot \xi}d\xi. \quad (6.32)$$

再来证明推广的 Plancherel 等式, 这与  $\mathbb{R}$  的过程类似.

**定理 6.1 (Plancherel 等式)**

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 则  $\|f\| = \|\hat{f}\|$ , 即

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx. \quad (6.33)$$



**证明** 设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , 定义  $f^\flat(x) = \overline{f(-x)}$ , 则  $\hat{f}^\flat(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$ , 设  $h = f * f^\flat$ , 则  $\hat{h} = \widehat{f * f^\flat} = \hat{f}\hat{f}^\flat = |\hat{f}|^2$ , 在  $\hat{h}$  的 Fourier 逆变换中令  $x = 0$  则有

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{h}(\xi)d\xi = h(0) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \quad (6.34)$$

得证.

综上, 这种推广的 Fourier 变换也是对应 Schwartz 空间上的双射, 即可以定义 Fourier 逆变换.

**定义 6.5 (Fourier 变换与 Fourier 逆变换)**

定义映射  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  分别为 Fourier 变换与 Fourier 逆变换, 对任意  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  有

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi ix \cdot \xi}dx, \quad \mathcal{F}^*(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)e^{2\pi ix \cdot \xi}d\xi. \quad (6.35)$$

并且  $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^* = \mathcal{F}^* \circ \mathcal{F} = I$ .



## 6.3 波动方程

Fourier 分析在微分方程中有重要的应用，我们讨论过许多情形的热传导方程，下面考虑  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  中的波动方程。简便起见，默认在 Schwartz 空间  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  中讨论（在实际情况中，很容易遇到不可微/不连续甚至性质更差的函数）。

### 6.3.1 Fourier 变换解法

波动方程形如

$$\partial_x^2 u = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u \quad (6.36)$$

其中  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  表示位置与时间（这里的时间取值认为是  $\mathbb{R}$  而非  $\mathbb{R}_+$ ，因为波方程具有“时间反演”对称性），有时也写作

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0 \quad (6.37)$$

其中  $u$  定义在  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  上，称为  $d$  维波动方程，特别地， $d = 3$  时的波方程刻画了电磁波的性质，这时  $c$  就是光速。

不妨设  $c = 1$ ，通常波方程会伴有两个初值

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ \partial_t u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (6.38)$$

其中  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ，上式被称为波方程的 **Cauchy 问题**。

为了利用 Fourier 变换解波动方程，首先计算 Laplace 算子的 Fourier 变换

$$\widehat{\Delta u}(\xi) = \sum_{k=1}^d \widehat{\partial_{x_k}^2 u}(\xi) = \sum_{k=1}^d (2\pi i \xi_k^2) \hat{u}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi) \quad (6.39)$$

因此对波动方程两边关于  $x \in \mathbb{R}^d$  作 Fourier 变换可得

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}(\xi, t) + 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) \\ \partial_t \hat{u}(\xi, 0) = \hat{g}(\xi) \end{cases} \quad (6.40)$$

这时偏微分方程转化为了关于  $t$  的常微分方程（若暂时将  $\xi$  视为参数），可解得

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + B(\xi) \sin(2\pi|\xi|t) \quad (6.41)$$

代入初值有

$$A(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad 2\pi|\xi|B(\xi) = \hat{g}(\xi) \quad (6.42)$$

即

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \quad (6.43)$$

再对两边作 Fourier 逆变换可得

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \hat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad (6.44)$$

容易验证：

**定理 6.2**

Cauchy 问题6.38的解为

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[ \hat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad (6.45)$$

进一步可以证明，上面给出的波动方程的解是唯一的. 首先定义波动方程的解对应的能量为

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u|^2 + |\partial_{x_1} u|^2 + \cdots + |\partial_{x_d} u|^2 dx \quad (6.46)$$

**定理 6.3**

若  $u$  是 Cauchy 问题6.38的解，则其对应的能量是守恒的，即对任意  $t \in \mathbb{R}$  都有  $E(t) = E(0)$ .

**证明** 根据 Plancherel 等式可得

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} | -2\pi|\xi|\hat{f}(\xi) \sin(2\pi|\xi|t) + \hat{g}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) |^2 d\xi \quad (6.47)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^d |\partial_{x_k} u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |2\pi|\xi|\hat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + \hat{g}(\xi) \sin(2\pi|\xi|t) |^2 d\xi \quad (6.48)$$

根据如下事实：设  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 则

$$|a \cos \alpha + b \sin \alpha|^2 + |-a \sin \alpha + b \cos \alpha|^2 = |a|^2 + |b|^2 \quad (6.49)$$

故

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u|^2 + |\partial_{x_1} u|^2 + \cdots + |\partial_{x_d} u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} (4\pi^2|\xi|^2|\hat{f}(\xi)|^2 + |\hat{g}(\xi)|^2) d\xi = E(0) \quad (6.50)$$

**推论 6.1**

Cauchy 问题6.38的解是唯一的.

**证明** 设有解  $u_1, u_2$ , 则令  $u = u_1 - u_2$ , 可知  $u$  是  $f = g = 0$  时 Cauchy 问题的解, 因此  $u$  的能量  $E(t) = E(0) = 0$ , 这说明  $\partial_t u = \partial_{x_k} u = 0$ , 因此  $u$  为常数, 而  $u(x, 0) = 0$  说明  $u \equiv 0$ , 因此  $u_1 = u_2$ , 唯一性得证.

综上, Fourier 变换给出了波动方程的解, 但其表达式中存在 Fourier 变换与 Fourier 逆变换, 在实际计算时显得复杂. 对于特定的维数, 可以给出更简单的表达式, 比如当  $d = 1, 3, 2$ .

第一章中讨论过区间  $[0, L]$  上的一维波动方程, 它由 D'Alembert 公式给出

$$u(x, t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy. \quad (6.51)$$

通过将其奇延拓到  $[-L, L]$ , 再周期延拓到  $\mathbb{R}$ , 可以给出一维波动方程的解, 具有与上式类似的形式, 只需要注意

$$\cos(2\pi|\xi|t) = \frac{1}{2}(e^{2\pi i|\xi|t} + e^{-2\pi i|\xi|t}), \quad \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} = \frac{4\pi i|\xi|}{e^{2\pi i|\xi|t} - e^{-2\pi i|\xi|t}}. \quad (6.52)$$

D'Alembert 公式表明: 一维波动方程的解可以由初值  $f, g$  在区间  $[x-t, x+t]$  的边值平均与积分平均表示(对应公式中的两项), 这也是波动方程的特性, 在更高维度也有体现.

### 6.3.2 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 中的波动方程

设  $S^2$  为二维球面, 则可以定义函数  $f$  的球平均为

$$M_t(f)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x+ty) dS(y) \quad (6.53)$$

其中  $4\pi$  为二维单位球面的面积,  $dS(y)$  为球面面元,  $M_t(f)$  则表示以  $x$  为球心,  $t$  为半径的球面上的平均值.

**引理 6.3**

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , 则对每个  $t > 0$ ,  $M_t(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ .



**证明** 设  $F(x) = M_t(f)(x)$ , 需证  $F$  快速收敛, 设对每个  $N \in \mathbb{N}$  有

$$|f(x)| \leq \frac{A_N}{1 + |x|^N} \quad (6.54)$$

则存在  $A'_N > 0$  使得

$$|f(x - ty)| \leq \frac{A'_N}{1 + |x|^N} \quad (6.55)$$

积分可得

$$|F(x)| \leq \sup_{y \in B(x,t)} |f(x + ty)| \leq \frac{A'_N}{1 + |x|^N} \quad (6.56)$$

再证  $F$  无穷可微, 只需要考虑每个分量, 根据对称性仅需考虑第一分量, 即

$$\frac{F(x_1 + h, x_2, x_3) - F(x_1, x_2, x_3)}{h} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} g_h(y) dS(y) \quad (6.57)$$

其中

$$g_h(y) = \frac{f(x + he_1 + ty) - f(x + ty)}{h} \quad (6.58)$$

当  $h \rightarrow 0$  时,  $g_h \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} f(x + ty)$ , 故得证.

**引理 6.4**

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} e^{-2\pi i \xi \cdot y} dS(y) = \frac{\sin(2\pi |\xi|)}{2\pi |\xi|} \quad (6.59)$$



**证明** 设  $R \in \mathcal{L}(R^3)$  为旋转变换, 则根据对称性可知积分在旋转变换下不变, 即

$$\int_{S^2} e^{-2\pi i R(\xi) \cdot y} dS(y) = \int_{S^2} e^{-2\pi i \xi \cdot R^{-1}(y)} dS(y) = \int_{S^2} e^{-2\pi i \xi \cdot y} dS(y) \quad (6.60)$$

设  $|\xi| = \rho$ , 则必定存在旋转变换将  $\xi$  变为  $(0, 0, \rho)$ , 此时

$$\int_{S^2} e^{-2\pi i \xi \cdot y} dS(y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-2\pi i \rho \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (6.61)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-2\pi i \rho \cos \theta} \sin \theta d\theta \quad (6.62)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{2\pi i \rho u} du \quad (6.63)$$

$$= \frac{1}{4\pi i \rho} e^{2\pi i \rho u} \Big|_{-1}^1 \quad (6.64)$$

$$= \frac{\sin(2\pi \rho)}{2\pi \rho} \quad (6.65)$$

得证.

由此可以得到一个重要推论

**推论 6.2**

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , 则

$$\widehat{M_t(f)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2\pi i x \cdot y} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x + ty) dS(y) \right) = \hat{f}(\xi) \frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi| t} \quad (6.66)$$



经过了对球平均的讨论, 可以给出三维波方程的如下定理

**定理 6.4**

三维波方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ \partial_t u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (6.67)$$

的解为

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}(t M_t(f)(x)) + t M_t(g)(x). \quad (6.68)$$



**证明** 根据定理 6.2 可知上述问题的解为

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \hat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + \hat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad (6.69)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \hat{f}(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi + \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \hat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad (6.70)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \hat{f}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t} \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \right) + t \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \hat{g}(\xi) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|t} \right] e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad (6.71)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (t M_t(f)(x)) + t M_t(g)(x) \quad (6.72)$$

得证.

### 6.3.3 Huygens 原理

由前面的讨论可知，一维波方程的解为

$$u(x, t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy \quad (6.73)$$

可以看出， $(x, t)$  位置的值仅由初值函数  $f, g$  在  $(x, t)$  下方三角形的底边中的值决定

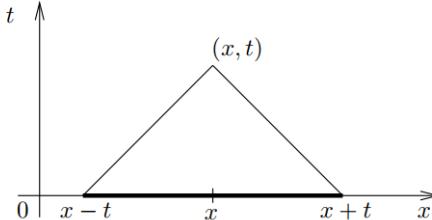


图 6.1: 一维 Huygens 原理

如果考虑三维情形的解

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} (t M_t(f)(x)) + t M_t(g)(x) \quad (6.74)$$

可以看出， $(x, t)$  位置的值仅由初值函数  $f, g$  在  $(x, t)$  下方圆锥底面中的值决定

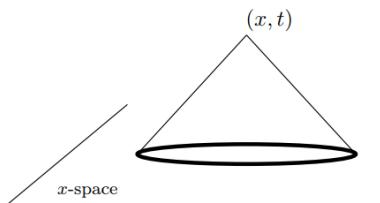


图 6.2: 三维 Huygens 原理

这称为  $(x, t)$  点的决定区域 (backward light cone)，与之类似，可以得出一个点所能影响到取值的区域，称为影响区域 (forward light cone)

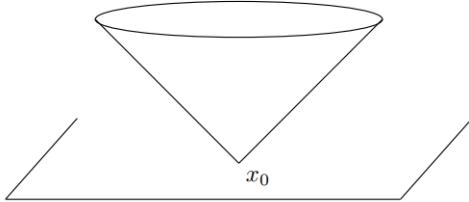


图 6.3: 影响区域

上面的这种现象称为 **Huygens 原理**，它描述了一维、三维波的传播规律.

与之相关的还有波方程的另一个重要性质：**有限传播速度**，也就是说，若在  $x = x_0$  处有初值，则该点在时刻  $t$  的影响区域是一个以  $x_0$  为圆心， $ct$  为半径的圆盘，这里  $c$  就是波方程中的参数，即波速. 也可以这样理解：设  $f, g$  都有紧支集，则随着时间的演化， $u$  的紧致集会随时间变大，这一变大的速度是有限的.

### 6.3.4 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ 中的波动方程

我们已经求出了三维波方程的解，因此可以采用降维法从三维得到二维的结果.

对于函数  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ，可以定义考虑对应的函数  $\tilde{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ，且满足  $\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2)$ ，一个最自然的想法是使  $\tilde{f}$  在第三个分量上取常值，但这样的结果往往不会快速衰减，因此可以如此考虑：对于固定的  $T > 0$ ，设  $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ，并且对任意  $|x| < 3T$  都有  $\eta(x) = 1$ ，以及

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2)\eta(x_3), \quad \tilde{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)\eta(x_3), \quad (6.75)$$

则有初值  $\tilde{f}, \tilde{g}$  的三维波方程的解  $\tilde{u}$  对于任意的  $|x_3| < T, |t| < T$ ，都对应了以  $f, g$  为初值的二维波方程的解，特别地可以令  $u(x_1, x_2, t) = \tilde{u}(x_1, x_2, 0, t)$ .

为了给出解的表达式，需要考虑降维后的球平均. 设  $H(x_1, x_2, 0) = h(x_1, x_2)$ ，则

$$M_t(H)(x, 0) = M_t(H)(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi h(x_1 + t \sin \theta \cos \varphi, x_2 + t \sin \theta \sin \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (6.76)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} h(x_1 + t \sin \theta \cos \varphi, x_2 + t \sin \theta \sin \varphi) d\varphi \quad (6.77)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_{S^1} h(x + t(\sin \theta)u) dS(u) \quad (6.78)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq 1} \frac{h(x + ty)}{\sqrt{1 - |y|^2}} dy \quad (6.79)$$

将上式定义为  $\widetilde{M}_t(f)(x)$ ，则有如下定理

#### 定理 6.5

二维波方程的 Cauchy 问题的解为

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} (t \widetilde{M}_t(f)(x)) + \widetilde{M}_t(g)(x) \quad (6.80)$$

## 6.4 径向对称与 Bessel 函数

根据 Fourier 变换  $\mathcal{F}(f(R(x))) = \hat{f}(R\xi)$  的性质，可知  $\mathcal{F}$  将径向对称的函数变为径向对称的函数，设  $f(x) = f_0(|x|)$ ， $\hat{f}(\xi) = F_0(\xi)$ ，我们自然会考虑  $f_0$  与  $F$  之间的关系，从维数  $d = 1, 3$  的情况开始.

由于一维仅有两个方向，因此

$$F_0(\rho) = \hat{f}(|\xi|) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x |\xi|} dx \quad (6.81)$$

$$= \int_0^\infty f_0(r) (e^{-2\pi i r |\xi|} + e^{2\pi i r |\xi|}) dr \quad (6.82)$$

$$= 2 \int_0^\infty \cos(2\pi \rho r) f_0(r) dr \quad (6.83)$$

三维情形也比较简单

$$F_0(\rho) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (6.84)$$

$$= \int_0^\infty f_0(r) \int_{S^2} e^{-2\pi i r \gamma \cdot \xi} dS(\gamma) r^2 dr \quad (6.85)$$

$$= \int_0^\infty f_0(r) \frac{2 \sin(2\pi \rho r)}{\rho r} r^2 dr \quad (6.86)$$

$$= 2\rho^{-1} \int_0^\infty \sin(2\pi \rho r) f_0(r) dr \quad (6.87)$$

最后考虑二维情形，根据  $\hat{f}(\xi)$  的径向对称性，设  $\xi = (0, -\rho)$ ，则

$$F_0(\rho) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-2\pi i x \cdot (0, \rho)} dx \quad (6.88)$$

$$= \int_0^{2\pi} f_0(r) e^{2\pi i r \rho \sin \theta} r dr d\theta \quad (6.89)$$

$$= 2\pi \int_0^\infty J_0(2\pi r \rho) f_0(r) r dr \quad (6.90)$$

其中  $J_n(\rho)$  被称为 **Bessel 函数**，定义为

$$e^{i\rho \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\rho) e^{in\theta}, \quad J_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta, \quad (6.91)$$

即函数  $e^{i\rho \sin \theta}$  的  $n$  项 Fourier 系数。Bessel 函数可以推广到高维情形，但过程会更复杂些，对于非整数的  $n > -1/2$ ，它有形式

$$J_n(\rho) = \frac{(\rho/2)^n}{\Gamma(n+1/2)\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 e^{i\rho t} (1-t^2)^{n-(1/2)} dt, \quad (6.92)$$

若定义

$$J_{-1/2}(\rho) = \lim_{n \rightarrow -1/2} J_n(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho^{-1/2} \cos \rho \quad (6.93)$$

则我们证明过的  $d = 1, 2, 3$  的情形可以合并为

$$F_0(\rho) = 2\pi \rho^{-(d/2)+1} \int_0^\infty J_{(d/2)-1}(2\pi \rho r) f_0(r) r^{d/2} dr. \quad (6.94)$$

从上面的讨论可以看出，在奇数维空间中，径向对称函数与其 Fourier 变换可以通过初等函数联系起来，但对于偶数维情况则不然，这也体现了奇数维与偶数维空间中的一些差异。

## 6.5 Radon 变换及其应用

Radon 变换

### 6.5.1 $\mathbb{R}^2$ 中的 X-ray 变换

考虑  $\mathbb{R}^2$  中的二维物体  $\mathcal{O}$ （这也可以想象为某个人体器官的横截面），设有 X 射线穿过  $\mathcal{O}$

其中  $I_0, I$  表示穿过物体前后的射线强度，若设  $d$  为射线穿过的距离， $\rho$  为衰减系数（或吸收系数，依赖于

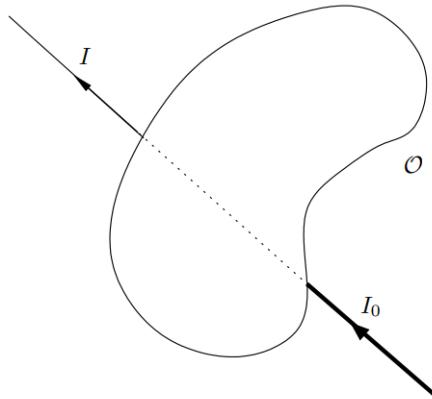


图 6.4: 穿过物体的 X 射线

物体的材料等固有性质), 则两个强度之间有关系

$$I = I_0 e^{-d\rho} \quad (6.95)$$

这里考虑的物体由单一材料组成, 并且均匀, 其衰减系数为常数. 若有两组材料构成, 则

$$I = I_0 e^{-d_1 \rho_1 - d_2 \rho_2} \quad (6.96)$$

其中  $d_1, d_2$  分别为经过两种材料部分的距离. 更一般的, 若设  $\rho$  为  $\mathbb{R}^2$  上的函数, 则上述关系变为

$$I = I_0 e^{\int_L \rho} \quad (6.97)$$

其中  $L$  表示 X 射线穿过的路径,  $\int_L \rho$  表示衰减系数在路径上的积分 (可以理解为总衰减量). 由于对  $\mathbb{R}^2$  中的任意方向都可以计算该积分, 因此可以定义出  $\mathbb{R}^2$  中函数  $\rho$  的 X-ray 变换

$$X(\rho)(L) = \int_L \rho = \int_L \rho \quad (6.98)$$

它将定义在  $\mathbb{R}^2$  中的函数  $\rho$  变换为定义在  $\mathbb{R}^2$  中所有直线的集合上的函数  $X(\rho)$ . 为了保证在直线上积分的存在性, 可以设  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ .

#### 定义 6.6 (X-ray 变换)

设  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ , 则定义 X-ray 变换  $X : \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \{\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}\}$ , 且

$$X(\rho)(L) = \int_L \rho, \quad (6.99)$$

其中  $\mathcal{L}$  为  $\mathbb{R}^2$  中所有直线构成的集合.



如果已知  $\rho$ , 那么计算  $X(\rho)$  是很容易的, 但大多数时候容易获得的是  $X(\rho)$  (发出平行 X 射线, 接收穿过物体的射线即得强度), 需要反过来计算  $\rho$ , 这便从一个实际问题引出了一个数学问题: 是否存在 X-ray 逆变换? 如何计算它? 这称为 “重构问题” (reconstruction problem).

与逆变换等价的性质是 X-ray 变换的唯一性: 若  $X(\rho) = X(\rho')$ , 是否有  $\rho = \rho'$  成立? 因为  $\rho$  有两个自由度 (因为  $\rho$  定义在  $\mathbb{R}^2$  上), 而  $X(\rho)$  也有两个自由度 (直线的截距与斜率, 或者说方向与位置), 所以从直觉来看, 这种对应有一定的合理性, 可以证明如下命题.

#### 命题 6.4

定义  $\mathbb{R}^2$  中的直线  $x \cos \theta + y \sin \theta = t$  ( $|\theta| \leq \pi, t \in \mathbb{R}$ ), 则  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  的 X-ray 变换可定义为

$$X(f)(t, \theta) = \int_{L_{t, \theta}} f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta + u \sin \theta, t \sin \theta - u \cos \theta) du. \quad (6.100)$$

在此基础上可以证明, 若  $f \in \mathcal{S}, X(f) = 0$ , 则  $f \equiv 0$ .



**证明** 由于  $X(f) = 0$ , 因此  $X(f)$  与  $t, \theta$  无关, 如果固定  $t$ , 可知

事实上, 可以对 X-ray 变换进行采样, 仅确定有限条直线的  $X(\rho)(L)$ , 因此 X-ray 变换在实际应用中也有非常重要的价值 (如取样过程、数值估计及计算机算法), 下一章中会讨论一个与之相关的算法: 快速 Fourier 变换 (FFT) .

## 6.5.2 $\mathbb{R}^3$ 中的 Radon 变换

前面讨论了  $\mathbb{R}^2$  中的 X-ray 变换, 对于三维情形也有类似理论, 设  $\mathcal{O}$  为  $\mathbb{R}^3$  中的物体,  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  代表 X 射线在物体  $\mathcal{O}$  中的衰减系数, 则同样可以定义每条直线上的总衰减量为

$$\int_L \rho, \quad (6.101)$$

在  $\mathbb{R}^2$  中, 函数与其 X-ray 变换一一对应, 但对于  $\mathbb{R}^3$  来说, 这种 X-ray 变换包含的信息有些 “过多” 了, 这从分析其自由度可以看出:  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  自由度为 3, 而  $\int_L \rho$  自由度为 4 (通过直线到原点距离以及一个方向向量描述). 为了减少这个额外的自由度, 可以考虑一个  $\mathbb{R}^3$  中 3 自由度的几何模型: 平面, 并仿照 X-ray 变换定义出 Radon 变换:

### 定义 6.7 (Radon 变换)

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , 则定义  $\mathbb{R}^3$  中的 Radon 变换  $\mathcal{R} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \{\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}\}$ , 且

$$\mathcal{R}(f)(P) = \int_P f, \quad (6.102)$$

其中  $\mathcal{P}$  表示  $\mathbb{R}^3$  中所有平面构成的集合.



对于  $\mathbb{R}^3$  中的平面, 设  $\gamma \in S^2, t \in \mathbb{R}$ , 则可以这样刻画

$$P_{t,\gamma} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x \cdot \gamma = t\} \quad (6.103)$$

这里的  $\gamma$  实际上是平面的单位法向量, 而  $t$  是原点到该平面的距离. 进一步, 可以将  $\gamma$  扩充为一组标准正交基  $\gamma, e_1, e_2$ , 则任意  $x \in \mathbb{R}^3$  都能唯一表示为  $x = t\gamma + u = t\gamma + u_1e_1 + u_2e_2$ , 并且有

$$\int_{P_{t,\gamma}} f = \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u_1e_1 + u_2e_2) du_1 du_2 \quad (6.104)$$

为了确保良定性, 需要说明上述积分的值与  $e_1, e_2$  的选择无关.

### 命题 6.5

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , 则对于任意  $\gamma, t$ , 积分  $\int_{P_{t,\gamma}} f$  与基  $e_1, e_2$  的选取无关, 更进一步, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{P_{t,\gamma}} f \right) dt = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx. \quad (6.105)$$



**证明** 设  $e'_1, e'_2$  为另一组满足条件的基, 则两组基之间仅相差一个旋转变换, 其行列式为 1, 因此换元可知良定. 进一步, 假设旋转变换  $R$  将  $\gamma, e_1, e_2$  变为我们熟悉的标准正交基, 则有

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(Rx) dx \quad (6.106)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} f(x_1\gamma + x_2e_1 + x_3e_2) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (6.107)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{P_{t,\gamma}} f \right) dt \quad (6.108)$$

得证.

从平面的参数化形式可知, Radon 变换也可以看作  $\mathbb{R} \times S^2$  上的函数, 并且满足 Schwartz 条件

$$\sup_{(t,\gamma) \in \mathbb{R} \times S^2} |t|^k \left| \frac{\partial^l F}{\partial t^l}(t, \gamma) \right| < \infty, \quad k, l \geq 0. \quad (6.109)$$

下面证明这件事，以及 Radon 变换与 Fourier 变换之间的联系。

### 引理 6.5

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ，则对任意固定的  $\gamma$  都有  $\mathcal{R}(f)(t \cdot \gamma) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ，并且有

$$\widehat{\mathcal{R}}(f)(s, \gamma) = \hat{f}(s\gamma). \quad (6.110)$$



**证明** 由于  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ，故对任意  $N$  存在常数  $A_N < \infty$  使得

$$(1 + |t|)^N (1 + |u|)^N |f(t\gamma + u)| \leq A_N \quad (6.111)$$

若设  $x = t\gamma + u$ ，这里  $u \perp \gamma$ ，两边对  $u$  在  $\mathbb{R}^2$  积分可得

$$(1 + |t|)^N \mathcal{R}(f)(t, \gamma) \leq A_N \int_{\mathbb{R}^2} \frac{du}{(1 + |u|)^N} < \infty \quad (6.112)$$

对于  $f$  各阶导数的情况有类似处理。进一步，对  $\mathcal{R}(f)$  两边对标量  $s$  做 Fourier 变换可得

$$\widehat{\mathcal{R}}(f)(s, \gamma) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{P_{t, \gamma}} f \right) e^{-2\pi i s t} dt \quad (6.113)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u) e^{-2\pi i s \gamma \cdot (t\gamma + u)} du_1 du_2 dt \quad (6.114)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-2\pi i x \cdot (s\gamma)} dx \quad (6.115)$$

$$= \hat{f}(s\gamma) \quad (6.116)$$

上面用到了  $\gamma \cdot u = 0, |\gamma| = 1$  以及最后一步旋转变换。

利用上述引理，可以立即证明 Radon 变换的唯一性。

### 推论 6.3

设  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ，并且有  $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g)$ ，则  $f = g$ 。



**证明** 只需证明，若  $\mathcal{R}(f) = 0$ ，则  $f = 0$  即可，这借助 Fourier 变换的唯一性是显然的。

最后考虑一个最重要问题，这也是一开始的出发点：如何通过函数的 Radon 变换反解出函数？下面讨论**对偶 Radon 变换**。

### 定义 6.8 (对偶 Radon 变换)

设  $F$  定义在  $\mathbb{R} \times S^2$  上，则定义对偶 Radon 变换  $\mathcal{R}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R} \times S^2) \rightarrow \{\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}\}$  为

$$\mathcal{R}^*(F)(x) = \int_{S^2} F(x \cdot \gamma, \gamma) dS(\gamma). \quad (6.117)$$



这里的“对偶”是一个代数学概念，若设  $V_1 = \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ，定义其上的 Hermite 内积为

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (6.118)$$

再设  $V_2 = \mathcal{S}(\mathbb{R} \times S^2)$ ，同样带有 Hermite 内积

$$\langle F, G \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{S^2} F(t, \gamma) \overline{G(t, \gamma)} dS(\gamma) dt \quad (6.119)$$

则计算可知

$$\langle \mathcal{R}f, F \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{S^2} \mathcal{R}(f)(t, \gamma) \overline{F(t, \gamma)} dS(\gamma) dt \quad (6.120)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{S^2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} f(t\gamma + u) du \right) \overline{F(t, \gamma)} dS(\gamma) dt \quad (6.121)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f(x) \overline{F(x \cdot \gamma, \gamma)} dS(\gamma) dx \quad (6.122)$$

$$= \langle f, \mathcal{R}^*F \rangle_1 \quad (6.123)$$

借助对偶 Radon 变换，可以解决本节最重要的问题，也就是给出如下定理.

**定理 6.6 (重构定理)**

设  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ,  $\Delta$  为 Laplace 算子，则

$$\Delta(\mathcal{R}^*\mathcal{R}(f)) = -8\pi^2 f. \quad (6.124)$$



**证明** 借助 Radon 变换与 Fourier 变换的关系可得

$$\mathcal{R}(f)(t, \gamma) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathcal{R}}(f)(s, \gamma) e^{2\pi i ts} ds = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\gamma) e^{2\pi i ts} ds, \quad (6.125)$$

因此有

$$\mathcal{R}^*\mathcal{R}(f)(x) = \int_{S^2} \mathcal{R}(f)(x \cdot \gamma, \gamma) dS(\gamma) = \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\gamma) e^{2\pi i x \cdot \gamma s} ds dS(\gamma) \quad (6.126)$$

计算可得

$$\Delta(\mathcal{R}^*\mathcal{R}(f))(x) = \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\gamma) (-4\pi^2 s^2) e^{2\pi i x \cdot \gamma s} ds dS(\gamma) \quad (6.127)$$

$$= -4\pi^2 \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s\gamma) e^{2\pi i x \cdot \gamma s} s^2 ds dS(\gamma) \quad (6.128)$$

$$= -8\pi^2 \int_{S^2} \int_0^\infty \hat{f}(s\gamma) e^{2\pi i x \cdot \gamma s} s^2 ds dS(\gamma) \quad (6.129)$$

$$= -8\pi^2 \int_{\mathbb{R}^3} f(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi \quad (6.130)$$

$$= -8\pi^2 f(x) \quad (6.131)$$

其中用到了换元，即将  $\mathbb{R}$  拆分为  $\int_0^\infty, \int_{-\infty}^0$ ，再将后者中  $s, \gamma$  同时反向，根据对称性可以得到  $2 \int_0^\infty$ .

### 6.5.3 平面波

作为本章的结尾，这里简单提及 Radon 变换与波动方程解之间的关系。根据 D'Alembert 公式，一维波方程的解可以表示为行波的叠加，那么对于高维波方程是否也有类似的性质？事实上，如果设  $F$  为  $\mathbb{R}$  上的函数， $|\gamma| = 1$ ，则  $u(x, t) = F(x \cdot \gamma - t)$  就恰好给出了  $d$  维波方程的一个解（波速  $c = 1$ ），这样的解被称为平面波。观察平面波解的形式可以看出，在与  $\gamma$  正交的方向上  $u$  关于  $x$  恒为常数（由此可知当  $d > 1$  时，波方程的解不会是  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  中的函数，因为它在某个方向上为常值），并且随着时间的推移，波沿  $\gamma$  方向前行。

假设  $f(x) = F(x \cdot \gamma), g(x) = G(x \cdot \gamma)$ ，则可验证  $d$  维波方程的 Cauchy 问题的解为

$$u(x, t) = \frac{F(x \cdot \gamma + t) + F(x \cdot \gamma - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x \cdot \gamma - t}^{x \cdot \gamma + t} G(s) ds \quad (6.132)$$

对于一般的  $f, g$ ，借助 Radon 变换，设

$$\tilde{\mathcal{R}}(f)(t, \gamma) = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{R}(f)(t, \gamma), \quad (6.133)$$

则对应的解可表示为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{S^2} (\tilde{\mathcal{R}}(f)(x \cdot \gamma - t, \gamma) + \tilde{\mathcal{R}}(f)(x \cdot \gamma + t, \gamma)) dS(\gamma) + \frac{1}{2} \int_{S^2} \left( \int_{x \cdot \gamma - t}^{x \cdot \gamma + t} \tilde{\mathcal{R}}(g)(s, \gamma) ds \right) dS(\gamma) \quad (6.134)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{S^2} \left( \tilde{\mathcal{R}}(f)(x \cdot \gamma - t, \gamma) + \tilde{\mathcal{R}}(f)(x \cdot \gamma + t, \gamma) + \int_{x \cdot \gamma - t}^{x \cdot \gamma + t} \tilde{\mathcal{R}}(g)(s, \gamma) ds \right) dS(\gamma). \quad (6.135)$$

# 第 7 章 离散 Fourier 分析

前面的章节讨论了 Fourier 级数以及 Euclid 空间上的 Fourier 变换，本章我们将目光从连续转向离散，考虑离散结构上的 Fourier 变换，更精确地说，是有限 Abel 群中的 Fourier 变换。在有限集合中，积分与无穷求和将会被有限求和代替，因此离散 Fourier 分析中很少会涉及收敛性，因此本章的内容会相对简单一些。

我们先考虑  $\mathbb{Z}_n$  群中的 Fourier 变换，再讨论更一般的有限 Abel 群中的 Fourier 变换。

## 7.1 $\mathbb{Z}_n$ 中的 Fourier 分析

### 定义 7.1 (单位根群)

定义集合

$$\mathbb{Z}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\} = \{1, e^{2\pi i/n}, e^{2\pi i 2/n}, \dots, e^{2\pi i(n-1)/n}\} \quad (7.1)$$

则群  $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$  称为  $n$  次单位根群（容易验证它是一个有限 Abel 群，且同构于  $n$  阶循环群）。



**注** 有时也会使用更方便的记号  $\zeta_n$  代表  $e^{2\pi i/n}$ ，则  $\mathbb{Z}_n = \{1, \zeta_n, \dots, \zeta_n^{n-1}\}$ 。

本节的主要研究对象是  $n$  阶循环群  $\mathbb{Z}_n = \{1, a, \dots, a^{n-1}\}$ ，通常  $\mathbb{Z}_n$  用来表示模  $n$  剩余类群，但由于剩余类群与单位根群之间的同构关系，使得二者实际上是“贴了不同标签”的同一个群，

不同群之间可能存在同构关系，使得它们实际上是“贴了不同标签”的同一个群，比如模  $n$  剩余类的加法群、 $n$  次单位根的乘法群等，都是  $\mathbb{Z}_n$  的具体例子，前者更熟悉，但本节我们默认使用后者。根据这种同构关系，自然存在其上的函数之间的对应

$$F(k) \longleftrightarrow f(e^{2\pi i k/n}) \quad (7.2)$$

因此，本节中记号  $\mathbb{Z}_n$  既可以表示模  $n$  剩余类群，也可以表示  $n$  次单位根群。

### 7.1.1 $\mathbb{Z}_n$ 中的 Fourier 变换

为了建立离散的 Fourier 分析，首先要找到  $\mathbb{Z}_n$  中的函数，与圆上的  $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$  对应，这一类圆上的函数满足如下性质：

1.  $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$  是圆上 Riemann 可积函数空间中的一组正交基。
2.  $e_n$  的（有限）线性组合在圆上的连续函数空间中是稠密的（即 Weierstrass 逼近定理）。
3.  $e_n(x+y) = e_n(x)e_n(y)$ 。

首先定义  $V = \{\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}\}$  中的内积（方便起见，后文会多次用  $V$  指代  $\mathbb{Z}_n$  上的函数空间）。

### 定义 7.2 (内积与范数)

设  $V = \{\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}\}$ ,  $f, g \in V$ , 则定义  $V$  中的内积为

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \overline{g(k)}, \quad (7.3)$$

由此也可诱导出范数

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |f(k)|^2. \quad (7.4)$$



接着考虑函数

$$e_m(k) = \zeta_n^{mk} = e^{2\pi i m k / n}, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad (7.5)$$

则计算可得

$$\langle e_p, e_q \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{pk} \zeta^{-qk} = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{(p-q)k} \quad (7.6)$$

对等比数列求和可知, 当  $p = q$  时每一项为 1, 上式为  $n$ , 否则

$$\langle e_p, e_q \rangle = \frac{1 - \zeta^{(p-q)N}}{1 - \zeta^{(p-q)}} = 0 \quad (7.7)$$

即得如下引理

### 引理 7.1

设  $V$  中的函数集

$$e_m(k) = \zeta^{mk} = e^{2\pi i mk/n}, \quad m = 0, \dots, n-1, \quad (7.8)$$

则集合  $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$  是正交的, 即  $\langle e_p, e_q \rangle = n\delta_{pq}$ .



如果换一种思路, 上述内积的定义方式是非常自然的:  $\mathbb{Z}_n$  是有限群, 而函数由其在定义域中每一点的取值唯一决定, 因此其上的函数空间  $V$  实际上同构于  $\mathbb{C}^n$ , 即考虑

$$(f(0), f(1), f(2), \dots, f(n-1)) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \quad (7.9)$$

那么上述内积实际上就是  $\mathbb{C}^n$  中的内积, 我们已经非常熟悉. 这实际上说明了一个重要事实:  $V$  是  $\mathbb{C}$  上的  $n$  维向量空间.

进一步, 由于  $\dim V = n$ , 根据正交组的线性无关性, 上面定义的  $e_0, \dots, e_{n-1}$  实际上是  $V$  中的一组正交基, 将其标准化可以得到一组标准正交基

$$e_m^* = \frac{1}{\sqrt{n}} e_m, \quad m = 0, \dots, n-1 \quad (7.10)$$

结合  $V \cong \mathbb{C}^n$  以及  $\mathbb{C}^n$  中的正交基表示, 可知任意  $f \in V$  都可以表示为

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, e_k^* \rangle e_k^*, \quad \|f\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\langle f, e_k^* \rangle|^2 \quad (7.11)$$

也容易验证对任意  $m \in \mathbb{Z}_n$  有

$$\sum_{k=0}^{n-1} \langle f, e_k^* \rangle e_k^*(m) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \zeta^{-kj} \zeta^{km} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{k(m-j)} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) n \delta_{jm} = f(m) \quad (7.12)$$

这也说明了  $\{e_n : n \in \mathbb{Z}_n\}$  满足一开始提到的三条性质: 正交基, 稠密性 (这在有限维空间中表现为有限张成), 加法变为乘法 (第三条是显然的), 由此可以定义出 Fourier 系数与 Fourier 逆变换

### 定义 7.3 (Fourier 逆变换)

对于定义在  $\mathbb{Z}_n$  上的函数  $f$ , 定义其 Fourier 系数为

$$a_m = \frac{1}{n} \langle f, e_m \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k) e^{-2\pi i km/n}, \quad (7.13)$$

则称  $f$  的 Fourier 逆变换为

$$f(m) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_k(m) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{2\pi i km/n} \quad (7.14)$$



根据上述讨论, 也可以得到  $\mathbb{Z}_n$  中的 P-P 等式 (这实际上是线性代数中有限维内积空间中 Parseval 等式的一个实例).

**定理 7.1 (Parseval-Plancherel 等式)**

若  $f$  为定义在  $\mathbb{Z}_N$  上的函数,  $a_k$  为  $f$  的 Fourier 系数, 则

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(k)|^2 \quad (7.15)$$



对比 Fourier 级数与离散 Fourier 变换可以得出, Fourier 变换实际上是将函数的“点值表示法”转化为“正交基表示”的过程.

### 7.1.2 快速 Fourier 变换 (FFT)

本节讨论离散 Fourier 分析的一个重要应用: 快速 Fourier 变换 (FFT). 顾名思义, 这是一个计算  $\mathbb{Z}_n$  上函数  $f$  的 Fourier 系数的算法, 在许多领域有非常重要的应用.

设  $f$  为定义在  $\mathbb{Z}_n$  上的函数, 并且已知  $f(0), \dots, f(n-1)$ , 记  $a_k(f)$  为  $f$  的第  $k$  项 Fourier 系数,  $\omega_n = e^{-2\pi i/n}$ , 则根据定义可得

$$a_k(f) = \frac{1}{n} \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f(r) \omega_n^{kr} \quad (7.16)$$

如果根据定义直接计算, 那么计算所有的  $n$  个 Fourier 系数的运算次数约为  $n(2n+1) = O(n^2)$ , 这也称为这种算法的**时间复杂度**, 可以看出, 当  $n$  非常大时, 运算次数也会非常大 (比如取  $n = 10^5$ , 则总运算次数约为  $10^{10}$ ), 这样的效率不尽人意, 由此便诞生了 FFT 算法, 它可以在  $O(n \log n)$  的时间复杂度解决问题, 这时若取  $n = 10^5$ , 则总运算次数约为  $5 \cdot 10^5 \ll 10^{10}$ .

**定理 7.2 (快速 Fourier 变换)**

设  $w_n = e^{-2\pi i/n}$ , 并设  $n = 2^p$ , 则计算  $\mathbb{Z}_n$  中函数的 Fourier 系数至多需要的计算次数约为

$$4 \cdot 2^p p = 4n \log_2 n = O(n \log n). \quad (7.17)$$



**证明** 记  $\#(M)$  表示  $\mathbb{Z}_M$  中计算所有 Fourier 系数的最少运算次数, 首先证明:

$$\#(2M) \leq 2\#(M) + 8M. \quad (7.18)$$

对于  $\mathbb{Z}_{2M}$  上的函数  $f$ , 可以分解为两个  $\mathbb{Z}_M$  上的函数  $f_0, f_1$ , 使得

$$f_0(r) = f(2r), \quad f_1(r) = f(2r+1) \quad (7.19)$$

因此计算  $f$  的 Fourier 系数可知

$$a_k(f) = \frac{1}{2M} \sum_{r=0}^{2M-1} f(r) \omega_{2M}^{kr} \quad (7.20)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} f(2p) \omega_{2M}^{k(2p)} + \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} f(2p+1) \omega_{2M}^{k(2p+1)} \right] \quad (7.21)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} f_0(p) \omega_M^{kp} + \omega_{2M}^k \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} f_1(p) \omega_M^{kp} \right] \quad (7.22)$$

$$= \frac{1}{2} [a_k(f_0) + \omega_{2M}^k a_k(f_1)] \quad (7.23)$$

并且计算  $\omega_{2M}, \dots, \omega_{2M}^{2M}$  的总次数不会超过  $2M$ , 因此

$$\#(2M) - 2\#(M) \leq 2M + 3 \times 2M = 8M \quad (7.24)$$

得证. 在此基础上, 设  $n = 2^p$ , 则当  $p = 1, n = 2$  时

$$a_0(f) = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1)), \quad a_1(f) = \frac{1}{2}(f(1) + (-1)f(-1)) \quad (7.25)$$

显然有  $\#(2^1) \leq 8 = 4 \cdot 2^1 \cdot (2 - 1)$ , 假设  $\#(2^{p-1}) \leq 4 \cdot 2^{p-1}(p - 1)$ , 则有

$$\#(2^p) \leq 2\#(2^{p-1}) + 8 \cdot 2^{p-1} = 4 \cdot 2^p p \quad (7.26)$$

得证.

上面的证明过程实际上也给出了 FFT 的分治过程.

## 7.2 有限 Abel 群上的 Fourier 分析

本章最后一部分着重将离散 Fourier 分析理论推广到有限 Abel 群中, 我们直入正题, 不对 Abel 群的一些基本性质作过多回顾. 这部分会用到一类经典的 Abel 群: 模  $n$  缩系  $\mathbb{Z}_n^*$ , 由  $\mathbb{Z}_n$  中所有乘法可逆元构成.

### 7.2.1 特征标与正交性

#### 定义 7.4 (特征标)

设  $(G, \cdot)$  为有限 Abel 群,  $S^1$  为复平面上的单位圆周, 则称  $G$  上的积性函数  $e : G \rightarrow S^1$

$$e(a \cdot b) = e(a)e(b) \quad (7.27)$$

为群  $G$  的一个特征标.



简单来说, Abel 群  $G$  上的特征标就是从  $G$  到  $S^1$  的群同态 (由映到  $S^1$  上的积性可证  $e(1) = 1$ ). 特别地, 称  $e(a) = 1, \forall a \in G$  为单位特征标 (或平凡特征标). 特征标在 Fourier 分析的推广过程中有重要价值, 因为这种积性对应了指数函数将加法变为乘法的特点. 事实上,  $e_m(k) = e^{2\pi i m k / n}, m = 0, \dots, n - 1$  就是  $\mathbb{Z}_n$  中的一组特征标.

对于 Abel 群  $G$ , 可以定义其特征标的全体为对偶群  $\hat{G}$ .

#### 定义 7.5 (对偶群)

设  $G$  为 Abel 群, 定义对偶群  $\hat{G}$  为  $G$  上所有特征标构成的函数集合, 若定义其上的乘法

$$e_1 \cdot e_2 : a \mapsto e_1(a)e_2(a) \quad (7.28)$$

则  $(\hat{G}, \cdot)$  是一个 (有限) Abel 群.



**注** 许多由函数定义的群中, 乘法都是映射的复合, 这时单位元是恒等映射, 逆元是逆映射; 但上述定义中采用的是逐点的自然乘法, 这时单位元则是前面的平凡特征标,  $e$  的逆元为  $e^{-1} : a \mapsto (e(a))^{-1}$ , 注意到  $S^1$  中取逆与共轭是等价的, 因此也有  $\overline{e(a)} = e^{-1}(a)$ .

对偶群的元素是某个 Abel 群上的所有特征标, 举出特征标的例子是简单的, 但如何保证无遗漏找到确定所有特征标 (进而确定对偶群所有元素)? 下述引理表明, 满足一定条件的积性函数就是特征标.

#### 引理 7.2

设  $G$  为有限 Abel 群,  $e : G \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  为积性函数, 则  $e \in \hat{G}$ .



**证明** 设  $e$  满足所给条件, 由于  $G$  有限, 因此对任意  $a \in G$ , 存在  $n$  使得  $a^n = 1 \in G$ , 因此

$$1 = |e(b^n)| = |e(b)^n| = |e(b)|^n \quad (7.29)$$

这说明  $|e(b)| = 1, e(b) \in S^1$ , 得证.

定义出了具有积性的特征标, 下一步就是建立线性空间  $V = \{G \rightarrow \mathbb{C}\}$  上的正交关系, 事实上, 特征标给出了这个空间的一组标准正交基.

**定义 7.6 (内积)**

设  $G$  为有限 Abel 群,  $V = \{G \rightarrow \mathbb{C}\}$ , 则定义  $V$  上的内积

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} f(a) \overline{g(a)}. \quad (7.30)$$

**定理 7.3**

设  $G$  为有限 Abel 群, 则  $\hat{G}$  中的元素给出了线性空间  $V$  中的一组标准正交基.



**证明** 类比  $\mathbb{Z}_n$  中的讨论可知张成是显然的, 因此只需证明这是一组标准正交基. 记  $\hat{G} = \{e_a : a \in I\}$ , 则计算可得

$$\langle e_i, e_j \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} e_i(a) \overline{e_j(a)} = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} e_i(a) e_j^{-1}(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} (e_i \cdot e_j^{-1})(a) \quad (7.31)$$

当  $i = j$  时,  $e_i \cdot e_j^{-1}$  为平凡特征标, 上式中每一项为 1, 结果为 1; 当  $i \neq j$  时,  $e_i \cdot e_j^{-1} \in \hat{G}$  但不为平凡特征标, 下证对任意不为平凡特征标的  $e \in \hat{G}$ , 有  $\sum_{a \in G} e(a) = 0$ . 由于对任意  $b \in G$  都有

$$e(b) \sum_{a \in G} e(a) = \sum_{a \in G} e(ba) = \sum_{a' \in G} e(a') = \quad (7.32)$$

由于  $e$  不为平凡特征标, 故不妨设  $e(b) \neq 1$ , 则有  $\sum_{a \in G} e(a) = 0$ .

综上可知,  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , 命题得证.

## 7.2.2 Fourier 逆变换

做一定铺垫后, 下面正式讨论 Abel 群上的 Fourier 变换.

**定义 7.7 (Fourier 系数 &Fourier 逆变换)**

设  $G$  为有限 Abel 群, 则定义  $f \in V$  相应于  $e \in \hat{G}$  的 Fourier 系数为

$$\hat{f}(e) = \langle f, e \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} f(a) \overline{e(a)}. \quad (7.33)$$

则称  $f$  的 Fourier 逆变换为

$$f = \sum_{e \in \hat{G}} \hat{f}(e) e. \quad (7.34)$$

**定理 7.4 (Parseval-Plancherel 等式)**

设  $f \in V$ , 则

$$\|f\|^2 = \sum_{e \in \hat{G}} |\hat{f}(e)|^2. \quad (7.35)$$



## 7.3 离散 Fourier 分析的应用

# 第8章 Dirichlet 定理

作为 Fourier 分析的一大应用，本章讨论数论中的重要定理：Dirichlet 定理及其证明。有限 Abel 群  $\mathbb{Z}_q^*$  上的 Fourier 变换会起到很大作用。

## 8.1 回顾与准备工作

### 8.1.1 基本的算数定理

下面的多数定理不予证明。

#### 定理 8.1 (带余除法)

设  $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ ，则存在唯一的  $q, r \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq r < b$  使得

$$a = qb + r. \quad (8.1)$$

#### 定理 8.2 (Bezout 定理)

设  $\gcd(a, b) = d$ ，则存在  $x, y \in \mathbb{Z}$  使得

$$ax + by = d. \quad (8.2)$$

#### 推论 8.1

正整数  $a, b$  互素当且仅当存在  $x, y \in \mathbb{Z}$  使得

$$ax + by = 1. \quad (8.3)$$

#### 推论 8.2

若  $\gcd(a, c), c|ab$ ，则  $c|b$ 。特别的，若  $p$  为素数， $p|ab$ ，则必有  $p|a$  或  $p|b$ 。

#### 定理 8.3 (算数基本定理)

设  $a \in \mathbb{Z}$ ，则存在分解

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}, \quad (8.4)$$

其中  $p_1, \dots, p_s$  为互不相同的素数， $\alpha_i > 0$ ，并且这种分解是唯一的。

### 8.1.2 素数有无穷多个

在数论中，关于素数的研究总是处于核心位置，初等数论中也有许多关于素数的命题，比如最经典的一个：素数有无穷多个。

#### 定理 8.4

素数有无穷多个。

**证明** 若不然，假设所有的素数为  $p_1, \dots, p_n$ ，则构造

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1, \quad (8.5)$$

可知  $p_i \nmid N$ ，因此  $N$  也是素数，并且不在  $p_1, \dots, p_n$  中，矛盾，得证。

上面这个脍炙人口的证明来自 Euclid，Euler 也给出过另一种思路，并且这种思路蕴含更多有趣的问题。

**证明** 所有素数可分类为  $4k+1$  型与  $4k+3$  型，假设素数仅有有限多个，则两类均有限多个。考虑  $4k+3$  型，设其中素数为  $p_1, \dots, p_n$ ，则令

$$N = 4p_1 \cdots p_n + 3, \quad (8.6)$$

若  $N$  为素数，则与假设矛盾，命题得证；若  $N$  不为素数，则  $N$  有素因子  $q$ ，且  $q \equiv 1 \pmod{3}$ （因为  $p_1, \dots, p_n \nmid N$ ），这与  $N \equiv 1 \pmod{3}$  矛盾，得证。

Euler 将素数分为  $4k+1$  与  $4k+3$  两类解决了问题，与之类似，Legendre 在证明二次互反律的过程中，也曾提出了如下命题：设  $\gcd(q, l) = 1$ ，则形如

$$l + kq, \quad k \in \mathbb{N} \quad (8.7)$$

的素数有无穷多个。换句话说，数列  $\{l + kq : k \in \mathbb{N}\}$  中包含无穷多个素数。

最终 Legendre 的上述断言被 Dirichlet 证明，因此上述命题也被称为 Dirichlet 定理。证明的核心是利用 zeta 函数的 Euler 乘积形式，下面介绍这一内容。

对于一列实数  $\{a_n\}$ ，定义其无穷乘积为（若极限存在）

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n \quad (8.8)$$

若其中每一项都是正数，则可以通过取对数将其转化为无穷和考虑。

### 命题 8.1

设  $A_n = 1 + a_n$ ，若  $\sum |a_n|$  收敛，则无穷乘积  $\prod A_n$  收敛；若还有  $a_n \neq 1$ ，则  $\prod 1/(1 - a_n)$  也收敛。



**证明** 根据对数的性质可知

$$\prod_{n=1}^N A_n = \prod_{n=1}^N e^{\ln(1+a_n)} = e^{B_N} \leq \prod_{n=1}^N e^{a_n} = e^{\sum_{n=1}^N a_n} \quad (8.9)$$

由此可知  $B_N$ （绝对）收敛，因此无穷乘积收敛。后半命题采用类似放缩可得。

$$\prod_{n=1}^N \frac{1}{1-a_n} = \frac{1}{\prod_{n=1}^N (1-a_n)} \quad (8.10)$$

下面给出 zeta 函数的定义。

### 定义 8.1 (zeta 函数)

定义 zeta 函数为

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (8.11)$$

其中  $s > 1$ 。



**注** 利用 p-级数的收敛性容易判定：对任意  $s > 1$ ， $\zeta(s)$  收敛。

由于

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots \quad (8.12)$$

从唯一分解定理的角度考虑 zeta 函数，可以得到如下定理，即 Euler 乘积公式。

### 定理 8.5

对任意  $s > 1$ ，有

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s}, \quad (8.13)$$

其中  $p$  取遍所有素数。



**证明** 设  $M, N \in \mathbb{N}, M > N$ , 则根据唯一分解定理, 任意  $n \leq N$  都可以写作素数的幂积, 则有

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \leq \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{M_s}}\right) \quad (8.14)$$

$$\leq \prod_{p \leq N} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right) \quad (8.15)$$

$$\leq \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right) \quad (8.16)$$

令  $N \rightarrow \infty$  可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right). \quad (8.17)$$

此外, 根据  $\zeta(s)$  每一项的非负性可得

$$\prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \cdots + \frac{1}{p^{M_s}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (8.18)$$

先令  $M \rightarrow \infty$ , 在令  $N \rightarrow \infty$  可得

$$\prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (8.19)$$

综上, 命题得证.

根据这种表示, 还可以给出素数无穷多个的证明:

**证明** 若仅有有限多个素数, 根据算数基本定理可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - p_k^{-1}} < \infty \quad (8.20)$$

这与调和级数的收敛性矛盾.

### 推论 8.3

当  $p$  取遍所有素数时, 下述级数发散

$$\sum_p \frac{1}{p}. \quad (8.21)$$



**证明** 对  $\zeta$  函数两边同取对数, 当  $s$  充分小时可得

$$\ln \zeta(s) = - \sum_p \ln(1 - 1/p^s) = - \sum_p \left[-\frac{1}{p^s} + O\left(\frac{1}{p^{2s}}\right)\right] = \sum_p \frac{1}{p^s} + O(1) \quad (8.22)$$

这里用到了  $x = 0$  附近  $\ln(1 + x) = x + O(x^2)$  的特性, 令  $s \rightarrow 1^+$  可知

$$\sum_p \frac{1}{p} \geq \sum_p \frac{1}{p^s} = \ln \zeta(s) + O(1) \rightarrow \infty. \quad (8.23)$$

得证.

事实上, 这也可以用来反证素数有无穷多个.

## 8.2 Dirichlet 定理

下面正式介绍 Dirichlet 定理, 表述为

### 定理 8.6 (Dirichlet 定理)

设  $q, l$  互素, 则数列  $\{l + kq : k \in \mathbb{N}\}$  中有无穷多个素数.



Dirichlet 定理可以由下述级数的发散得出

$$\sum_{p \equiv l \pmod{q}} \frac{1}{p} \quad (8.24)$$

其中  $p$  取遍所有模  $q$  同余  $l$  的素数. 定理的证明有许多步, 其中会对  $\mathbb{Z}_q^*$  使用 Fourier 变换. 下面以  $q = 4, l = 1$  的情形为例, 简单介绍定理的证明过程.

定义  $\mathbb{Z}$  中的 Dirichlet 特征为

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 3 \end{cases} \quad (8.25)$$

显然  $\chi$  是积性函数, 再令

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \dots \quad (8.26)$$

根据  $\chi$  的积性, 设  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$ , 则

$$\frac{\chi(n)}{n^s} = \frac{\chi(p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t})}{(p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t})^s} = \left(\frac{\chi(p_1)}{p_1^s}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\chi(p_t)}{p_t^s}\right)^{\alpha_t} \quad (8.27)$$

因此借助 Euler 乘积, 可以将  $L$  函数表示为

$$L(s, \chi) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s}. \quad (8.28)$$

对两边取对数可得

$$\ln L(s, \chi) = - \sum_p \ln(1 - \chi(p)/p^s) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1) \quad (8.29)$$

当  $s = 1$  时,  $L(1, \chi)$  恰好等于 Leibniz 级数

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (8.30)$$

上式通过  $\arctan x$  的 Taylor 展开可得. 这说明当  $s \rightarrow 1^+$  时,

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^s} - \sum_{p \equiv 3 \pmod{4}} \frac{1}{p^s} \quad (8.31)$$

有界, 但根据推论8.3可知当  $s \rightarrow 1^+$  时

$$\sum_p \frac{1}{p^s} \quad (8.32)$$

无界, 相加可得  $s \rightarrow 1^+$  时

$$2 \sum_{p \equiv 1 \pmod{4}} \frac{1}{p^s} \quad (8.33)$$

无界, 这说明形如  $4k + 1$  型素数有无穷多个 (这同时也可以说明  $4k + 3$  型素数有无穷多个).

下一节将给出 Dirichlet 定理的完整证明, 在此先做一些 Dirichlet 特征、 $L$  函数的准备工作.

## 8.2.1 Fourier 分析与 Dirichlet 特征

约定: 本节未额外说明情况下, 认为 Abel 群  $G = \mathbb{Z}_q^*$ .

### 定义 8.2 (Euler 函数)

设  $n \in \mathbb{N}$ , 定义 Euler 函数为

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} 1, \quad (8.34)$$

即与  $n$  互素的正整数的个数.



**注** 根据 Euler 函数可知  $|G| = |\mathbb{Z}_q^*| = \varphi(q)$ .

考虑  $G$  上的函数  $\delta_l$ , 定义为

$$\delta_l(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv l \pmod{q} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8.35)$$

这可以视为 Kronecker 记号  $\delta_l(n) = \delta_{ln}$ . 作 Fourier 变换可得

$$\hat{\delta}_l(e) = \langle \delta_l, e \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{m \in G} \delta_l(m) \overline{e(m)} = \frac{1}{|G|} \overline{e(l)}, \quad (8.36)$$

$$\delta_l(n) = \sum_{e \in \hat{G}} \hat{\delta}_l(e) e(n) = \frac{1}{|G|} \sum_{e \in \hat{G}} \overline{e(l)} e(n) \quad (8.37)$$

根据定义, 上面的  $\delta_l$  可以直接推广到  $\mathbb{Z}$  中, 同理特征标  $e \in \hat{G}$  也能进行推广, 由此得到 Dirichlet 特征.

### 定义 8.3 (Dirichlet 特征)

设  $q \in \mathbb{N}$ , 定义 (模  $q$ ) 的 Dirichlet 特征为  $G = \mathbb{Z}_q^*$  的特征标在  $\mathbb{Z}$  上的推广, 即

$$\chi(m) = \begin{cases} e(m), & \gcd(m, q) = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8.38)$$

特别的, 平凡特征标的推广记为  $\chi_0$ , 满足  $\chi_0(m) \equiv 1$ .



也就是说, 当  $m \in \mathbb{Z}_q^*$  时,  $\chi$  与  $e$  取相同值, 否则取 0. 易知 Dirichlet 特征也是积性函数, 结合  $|G| = \varphi(q)$ , 可以重述上面的结论.

### 引理 8.1

设  $\delta_l$  如上定义, 并推广到  $\mathbb{Z}$  上, 则

$$\delta_l(m) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi(l)} \chi(m) \quad (8.39)$$



借助该引理可得

$$\sum_{p \equiv l} \frac{1}{p^s} = \sum_p \frac{\delta_l(p)}{p^s} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi(l)} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \quad (8.40)$$

$$= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s} + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \quad (8.41)$$

$$= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(p,q)=1} \frac{1}{p^s} + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \quad (8.42)$$

由于仅有有限的素数  $p$  满足  $(p, q) \neq 1$ , 因此根据推论 8.3 可知当  $s \rightarrow 1^+$  时右式第一项发散. 因此要证明左式发散只需证明右式第二项有界, 即如下定理

### 定理 8.7

设  $\chi$  为非平凡 Dirichlet 特征, 则

$$\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \quad (8.43)$$



在  $s \rightarrow 1^+$  时有界.

该定理的证明要用到下一个工具:  $L$  函数.

## 8.2.2 Dirichlet L 函数

我们已经证明了, zeta 函数可以表示为 Euler 乘积的形式

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad (8.44)$$

在此基础上定义 Dirichlet L 函数

### 定义 8.4 (L 函数)

设  $s > 1$ , 定义 L 函数为

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad (8.45)$$

其中  $\chi$  为 Dirichlet 特征,  $p$  遍历所有素数.



### 定理 8.8

L 函数满足

$$L(s, \chi) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s}. \quad (8.46)$$



仿照对  $4k + 1$  形式的证明, 对 L 两边取对数可得

$$\ln L(s, \chi) = - \sum_p \ln(1 - \chi(p)/p^s) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1) \quad (8.47)$$

如果  $s \rightarrow 1^+$  时  $L \not\rightarrow 0$ , 则可知右边的级数有界, 这就证明了上一节的遗留定理.

说起来简单, 但其中包含了许多细节需要考虑.

1. 需要证明 L 函数的 Euler 乘积形式.
2. Dirichlet 特征  $\chi$  由特征标延拓, 其值域在  $S^1$  中, 因此需要将对数推广到复平面, 并进一步合理化对 L 函数两边取对数的操作.
3. 需要证明当  $\chi \neq \chi_0$ ,  $s \rightarrow 1^+$  时  $\ln L(s, \chi)$  有界, 这可以证明 L 在  $s = 1$  处连续, 并且满足  $L(1, \chi) \neq 0$ , 这也是最困难的部分之一.

Dirichlet 定理的证明最早可追溯到 Euler 提出 zeta 函数的 Euler 乘积, 后来 Legendre 为了证明二次互反律, 提出了猜想——但最终二次互反律的证明由 Gauss 完成, 尽管他给出了许多证明, 但对于二次互反律的应用尚且不成熟; 后来 Riemann 对 zeta 函数作了进一步研究, 将其延拓到复平面, 并由此对素数的分布有了更深入的了解.

本书论题的起点, Joseph Fourier 于 1830 年离世, 他曾在 Dirichlet 访问巴黎时给予帮助. 最终 Dirichlet 于 1837 年证明了猜想, 为跨越时间的问题写下了句号. 除去数学成就, 当时的艺术 (特别是音乐) 也正处一个黄金时期: Beethoven 的时代已过十载, Schumann 的创造力将达高峰. 但与 Dirichlet 最近的还是小五岁的 Felix Mendelssohn, 更巧合的是, 在 Dirichlet 完成证明后, Mendelssohn 也开始了其最著名的小提琴协奏曲的创作.

## 8.3 定理的证明

下面回到主题, 依次解决上面提出的问题. 其中 L 函数、Dirichlet 特征都在模  $q$  的意义下讨论 (或者说在  $\mathbb{Z}_q^*$  中).

### 8.3.1 对数

首先定义对数, 我们的思路是借助对数函数的 Taylor 展开进行定义. 需要注意: 后文中 log 的下标并不代表底数, 只是一种序号区分.

**定义 8.5 (复对数)**

设  $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ , 则定义

$$\ln\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}. \quad (8.48)$$

**命题 8.2**

上面定义的复对数满足如下性质：

1. 对任意  $|z| < 1$  有

$$e^{\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)} = \frac{1}{1-z}. \quad (8.49)$$

2. 对任意  $|z| < 1$  有

$$\ln\left(\frac{1}{1-z}\right) = z + E_1(z) = z + O(|z|^2). \quad (8.50)$$

3. 若  $|z| < 1/2$ , 则有

$$\left| \ln\left(\frac{1}{1-z}\right) \right| \leq 2|z|. \quad (8.51)$$



只证明 1, 2/3 的证明与实数形式类似.

**证明**

1. 令  $z = re^{i\theta}$ , 则只需证明

$$(1 - re^{i\theta}) e^{\sum_{k=1}^{\infty} (re^{i\theta})^k / k} = 1 \quad (8.52)$$

左边对  $r$  求导可得

$$\left[ -e^{i\theta} + (1 - re^{i\theta}) \left( \sum_{k=1}^{\infty} (re^{i\theta})^k / k \right) \right] e^{\sum_{k=1}^{\infty} (re^{i\theta})^k / k} \quad (8.53)$$

括号内的部分为

$$-e^{i\theta} + (1 - re^{i\theta}) \left( \sum_{k=1}^{\infty} (re^{i\theta})^{k-1} \right) = -e^{i\theta} + (1 - re^{i\theta}) \frac{e^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} = 0 \quad (8.54)$$

在原式中代入  $r = 0$  得证 (导数为 0 可知取常值).

类似实数, 复对数也有如下命题成立.

**命题 8.3**

设复级数  $\sum |a_n|$  收敛, 并且  $a_n \neq 1$ , 则

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-a_n} \right) \quad (8.55)$$

收敛.



**证明** 当  $n$  充分大时,  $|a_n| < 1/2$ , 则有

$$\prod_{n=1}^N \left( \frac{1}{1-a_n} \right) = e^{\sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{1}{1-a_n}\right)} \quad (8.56)$$

根据放缩

$$\left| \ln\left(\frac{1}{1-z}\right) \right| \leq 2|z| \quad (8.57)$$

可知无穷乘积收敛.

下面证明 Dirichlet 乘积公式

$$L(s, \chi) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(n)/p^s}. \quad (8.58)$$

记

$$S_N = \sum_{n \leq N} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \Pi_N = \prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - \chi(n)/p^s} \quad (8.59)$$

易知上述两级数均收敛. 定义

$$\Pi_{N,M} = \prod_{p \leq N} \left( 1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \cdots + \frac{\chi(p^M)}{p^{Ms}} \right), \quad (8.60)$$

则对任意  $\varepsilon > 0$ , 可选取充分大的  $N$  使得

$$|S_N - L| < \varepsilon, \quad |\Pi_N - \Pi| < \varepsilon, \quad (8.61)$$

再选取充分大的  $M$  使得

$$|S_N - \prod_{N,M} | < \varepsilon, \quad |\Pi_{N,M} - \Pi_N| < \varepsilon, \quad (8.62)$$

其中第二项容易理解, 第一项是根据唯一分解定理以及 Dirichlet 特征的积性得到的. 因此有

$$|L - \Pi| \leq |L - S_N| + |S_N - \Pi_{N,M}| + |\Pi_{N,M} - \Pi_N| + |\Pi_N - \Pi| < 4\varepsilon \quad (8.63)$$

得证.

### 8.3.2 $L$ 函数

接下来讨论  $L$  函数, 定义为

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s}, \quad (8.64)$$

其中  $s > 1$ ,  $\chi$  为 Dirichlet 特征. 首先考虑平凡特征.

#### 命题 8.4

设  $\chi_0$  为非平凡 Dirichlet 特征,  $q = p_1^{a_1} \cdots p_N^{a_N}$  则

$$L(s, \chi_0) = (1 - 1/p_1^s) \cdots (1 - 1/p_N^s) \zeta(s) \quad (8.65)$$

**证明** 由于  $\chi_0$  在任何与  $q$  不互素的  $a$  处取 0, 其余取 1, 因此上式是显然的.

上述命题说明当  $s \rightarrow 1^+$  时  $L(s, \chi_0)$  发散 (因为  $\zeta(1)$  发散). 而对于非平凡特征,  $L$  函数有更精细的性质. 首先证明一个关于 Dirichlet 特征的引理.

#### 引理 8.2

设  $\chi$  为非平凡 Dirichlet 特征, 则对任意  $k \in \mathbb{N}$  有

$$\left| \sum_{n=1}^k \chi(n) \right| \leq q. \quad (8.66)$$

**证明** 特征标有性质

$$\sum_{n=1}^q \chi(n) = 0, \quad (8.67)$$

因此作带余除法  $k = aq + b$ , 则有

$$\sum_{n=1}^k \chi(n) = \sum_{n=1}^{aq} \chi(n) + \sum_{aq < n \leq aq+b} \chi(n) = \sum_{aq < n \leq aq+b} \chi(n) \quad (8.68)$$

由于最后一式中有不超过  $q$  项，每项模长不超过 1，故得证.

### 命题 8.5

设  $\chi$  为非平凡 Dirichlet 特征，则  $L(s, \chi)$  对任意  $s > 0$  收敛，并且

1.  $L(s, \chi)$  关于  $s$  在  $(0, \infty)$  连续可微.
2. 存在常数  $c, c' > 0$  使得当  $s \rightarrow \infty$  时

$$L(s, \chi) = 1 + O(e^{-cs}), \quad L'(s, \chi) = O(e^{-c's}). \quad (8.69)$$

**证明** 易知  $s > 1$  时  $L$  对应的级数绝对收敛，因此  $L$  在  $(1, \infty)$  连续可微. 令  $s_k = \sum_{n=1}^k \chi(n), s_0 = 0$ ，则

$$\sum_{k=1}^N \frac{\chi(k)}{k^s} = \sum_{k=1}^N \frac{s_k - s_{k-1}}{k^s} \quad (8.70)$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} s_k \left[ \frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right] + \frac{s_N}{N^s} \quad (8.71)$$

$$= \sum_{k=1}^{N-1} f_k(s) + \frac{s_N}{N^s}, \quad (8.72)$$

根据中值定理可知

$$|f_k(s)| \leq q |k^{-s} - (k+1)^{-s}| \leq q s k^{-s-1} \quad (8.73)$$

这说明  $\sum f_k(s)$  对任意  $s \geq \delta > 0$  绝对一致收敛，这说明了  $L$  在  $s > 0$  连续. 为了证明其连续可微性 ( $C^1$ )，逐项微分得到

$$L'(s, \chi) = \sum (\ln n) \frac{\chi(n)}{n^s} = \sum s_k [-k^{-s} \ln(k) + (k+1)^{-s} \ln(k+1)] \quad (8.74)$$

再次利用中值定理可知上式为  $O(k^{-\delta/2-1})$ ，这就证明了级数对任意  $s \geq \delta > 0$  收敛， $C^1$  得证.

对充分大的  $s$ ，有

$$|L(s, \chi) - 1| \leq 2q \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} \leq 2^{-s} O(1) \quad (8.75)$$

因此取  $c = \ln 2$ ，就有  $L(s, \chi) = 1 + O(e^{-cs})$ . 类似可取  $c' = c$ ，有  $L'(s, \chi) = O(e^{-c's})$ .

做了诸多准备工作，下面可以讨论  $L$  函数的对数，我们借助积分来构造另一种对数，后面再证明它与前面的对数相同. 设  $\chi$  非平凡则有

$$\log L(s, \chi) = - \int_s^\infty \frac{L'(t, \chi)}{L(t, \chi)} dt. \quad (8.76)$$

由于  $L$  可由乘积定义，因此其非 0，上面的定义是合理的. 上面的积分收敛是因为

$$\frac{L'(t, \chi)}{L(t, \chi)} = O(e^{-ct}), \quad (8.77)$$

下面的命题进一步验证了这种定义的合理性.

### 命题 8.6

设  $s > 1$ ，则

$$e^{\log L(s, \chi)} = L(s, \chi), \quad (8.78)$$

进一步有

$$\log L(s, \chi) = \sum_p \ln \left( \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s} \right). \quad (8.79)$$

**证明** 对函数  $L(s, \chi)e^{-\log L(s, \chi)}$  求导可得

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} e^{-\log L(s, \chi)} + e^{-\log L(s, \chi)} L'(s, \chi) = 0 \quad (8.80)$$

故该函数取常值，再令  $s \rightarrow \infty$  得证。

固定  $s$ ，对两边同取指数对数，则

$$e^{\log L(s, \chi)} = L(s, \chi) = \prod_p \frac{1}{1 - \chi(p)/p^s} = \prod_p e^{\ln(\frac{1}{1 - \chi(p)/p^s})} = e^{\sum_p \ln(\frac{1}{1 - \chi(p)/p^s})} \quad (8.81)$$

根据复指数函数的周期性可知

$$\log L(s, \chi) - \sum_p \ln\left(\frac{1}{1 - \chi(p)/p^2}\right) = 2\pi i M(s) \quad (8.82)$$

左边对  $s$  连续，而右边的  $M$  取整数值，因此必有  $M(s) \equiv 0$ ，故得证。

综上所述，我们证明了

$$\sum_p \ln\left(\frac{1}{1 - \chi(p)/p^s}\right) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O\left(\sum_p \frac{1}{p^{2s}}\right) \quad (8.83)$$

$$= \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1). \quad (8.84)$$

如果对非平凡特征有  $L(1, \chi) \neq 0$ ，则根据积分形式可知  $\log_2 L(s, \chi)$  当  $s \rightarrow 1^+$  时有界，因此上面的  $\sum_p \chi(p)/p^s$  当  $s \rightarrow 1^+$  时有界，Dirichlet 定理得证，因此现在之差最后一步：证明  $L$  的非零性。

### 8.3.3 $L$ 函数的非零性

本节的重点是证明如下定理。

#### 定理 8.9

设  $\chi \neq \chi_0$ ，则  $L(1, \chi) \neq 0$ .



这一事实有许多证明，其中有些用到了代数数论或复分析，在此介绍一种更初等的证明，它将 Dirichlet 特征分为实与复进行处理，称  $\chi$  为 **实的**，若其取值在  $0, \pm 1$ ，否则称为**复的**。换句话说， $\chi$  为实当且仅当对任意  $n$  有  $\chi(n) = \overline{\chi(n)}$ 。

#### Case 1: 复 Dirichlet 特征

首先考虑复 Dirichlet 特征的情况，我们借助两条引理反证。

#### 引理 8.3

若  $s > 1$ ，则

$$\prod_{\chi} L(s, \chi) \geq 1, \quad (8.85)$$

其中  $\chi$  取遍所有 Dirichlet 特征（特别的，可知该乘积为实数）。



**证明** 当  $s > 1$  时

$$L(s, \chi) = \exp\left(\sum_p \ln\left(\frac{1}{1 - \chi(p)/p^s}\right)\right), \quad (8.86)$$

因此

$$\prod_{\chi} L(s, \chi) = \exp\left(\sum_{\chi} \sum_p \ln\left(\frac{1}{1 - \chi(p)/p^s}\right)\right) \quad (8.87)$$

$$= \exp\left(\sum_{\chi} \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\chi(p^k)}{p^{ks}}\right) \quad (8.88)$$

$$= \exp \left( \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}} \sum_{\chi} \chi(p^{ks}) \right) \quad (8.89)$$

根据引理8.3, 取  $l = 1$  就有  $\sum_{\chi} \chi(p^k) = \varphi(q)\delta_1(p^k)$ , 因此

$$\prod_{\chi} L(s, \chi) = \exp \left( \varphi(q) \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_1(p^k)}{kp^{ks}} \right) \geq 1 \quad (8.90)$$

因为指数部分非负.

#### 引理 8.4

$L$  函数满足下面三条性质:

1. 若  $L(1, \chi) = 0$ , 则  $L(1, \bar{\chi}) = 0$ .
2. 若  $\chi \neq \chi_0$  并且  $L(1, \chi) = 0$ , 则当  $1 \leq s \leq 2$  时有

$$|L(s, \chi)| \leq C|s - 1|, \quad (8.91)$$

3. 对于平凡特征  $\chi_0$ , 在  $1 < s \leq 2$  有

$$|L(s, \chi_0)| \leq \frac{C}{|s - 1|} \quad (8.92)$$



**证明** 第一条成立是因为  $L(1, \bar{\chi}) = \overline{L(1, \chi)}$ .

第二条成立是借助中值定理, 以及  $L$  的连续可微性 (紧集上连续推出一致连续, 即有界) 得到

$$|L(s, \chi)| = |L(s, \chi) - L(1, \chi)| = |L'(\xi, \chi)| |s - 1| \leq C|s - 1|. \quad (8.93)$$

第三条根据命题8.4可得

$$L(s, \chi_0) = (1 - p_1^{-s}) \cdots (1 - p_N^{-s}) \zeta(s), \quad (8.94)$$

由于  $\sum 1/n^s$  可以被  $\sum 1/s^n$  控制, 因此  $\zeta$  函数满足上面的估计, 得证.

下面证明对  $\chi \neq \chi_0$  有  $L(1, \chi) \neq 0$ . 若不然, 则设  $L(1, \chi') = L(1, \bar{\chi}') = 0$ , 而  $\chi \neq \bar{\chi}$ , 考虑积式

$$\prod_{\chi} L(s, \chi) \quad (8.95)$$

其中

$$|L(s, \chi') L(s, \bar{\chi}') L(s, \chi_0)| \leq C|s - 1| \quad (8.96)$$

并且其余项均由  $C|s - 1|$  控制, 因此  $\prod_{\chi} L(s, \chi) = 0$ , 与引理8.3矛盾.

## Case 2: 实 Dirichlet 特征

实特征的情形与复特征截然不同, 下面将用到“双曲求和”, 这个奇特的方法由 Dirichlet 发明, 并且用到了另一项成果: 除数函数的平均阶数之中. 下面作为双曲求和的一个应用, 首先证明 Dirichlet 除数定理, 然后利用这一思路证明  $L(s, \chi) \neq 0$ .

## 双曲求和法

#### 命题 8.7

设  $N \in \mathbb{N}$ , 则

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \int_1^N \frac{dx}{x} + O(1) = \ln N + O(1). \quad (8.97)$$

更精确地，存在常数  $\gamma$  (Euler 常数)，使得

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + O(1/N) \quad (8.98)$$

**证明** 考虑级数

$$\gamma_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}, \quad (8.99)$$

根据  $1/x$  的单调性可得

$$0 \leq \gamma_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2} \quad (8.100)$$

这说明  $\sum \gamma_n$  收敛，记该极限为  $\gamma$ ，则

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \gamma_n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2} = O(1/N) \quad (8.101)$$

这说明

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \int_1^N \frac{dx}{x} = \gamma - \sum_{n=N+1}^{\infty} \gamma_n + \int_N^{N+1} \frac{dx}{x} = \gamma + O(1/N), \quad (8.102)$$

得证.

### 命题 8.8

设  $N \in \mathbb{N}$ ，则

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1/2}} = \int_1^N \frac{dx}{x^{1/2}} + c' + O(1/N^{1/2}) \quad (8.103)$$

$$= 2N^{1/2} + c + O(1/N^{1/2}) \quad (8.104)$$

证明思路与上一条类似，借助

$$\left| \frac{1}{n^{1/2}} - \frac{1}{(n+1)^{1/2}} \right| \leq \frac{C}{n^{3/2}} \quad (8.105)$$

可得.

设  $F$  为定义在  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  上的函数，则有多种方法计算和式

$$S_N = \sum_{mn \leq N} F(m, n) \quad (8.106)$$

1. 沿双曲线：

$$S_N = \sum_{k=1}^N \left( \sum_{mn=k} F(m, n) \right). \quad (8.107)$$

2. 垂直：

$$S_N = \sum_{m=1}^N \left( \sum_{1 \leq n \leq N/m} F(m, n) \right). \quad (8.108)$$

3. 平行：

$$S_N = \sum_{n=1}^N \left( \sum_{1 \leq m \leq N/n} F(m, n) \right). \quad (8.109)$$

再来定义除数函数.

**定义 8.6 (除数函数)**

设  $k \in \mathbb{N}$ , 定除数函数  $d(k)$  表示其正约数的个数, 即

$$d(k) = \sum_{mn=k, 1 \leq n, m} 1. \quad (8.110)$$



事实上,  $d(k)$  的变化趋势很难通过一个  $k$  的简单表达式进行估计 (毕竟素数的正约数个数均 2), 如果退一步, 考虑平均和 (或者说 Cesaro 和)

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N d(k) \quad (8.111)$$

则 Dirichlet 给出了如下定理:

**定理 8.10**

设  $N \in \mathbb{N}$ , 则

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N d(k) = \ln N + O(1), \quad (8.112)$$

更精确的, 有

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N d(k) = \ln N + (2\gamma - 1) + O(1/N^{1/2}). \quad (8.113)$$

其中  $\gamma$  为 Euler 常数.



**证明** 设  $S_N = \sum_{k=1}^N d(k)$ , 则对函数  $F = 1$  作双曲求和就得到了  $S_N$ , 如果垂直求和可得

$$S_N = \sum_{m=1}^N \sum_{1 \leq n \leq N/m} 1 = \sum_{m=1}^N \left[ \frac{N}{m} \right] \quad (8.114)$$

$$= \sum_{m=1}^N \left( \frac{N}{m} + O(1) \right) \quad (8.115)$$

$$= N \left( \sum_{m=1}^N \frac{1}{m} \right) + O(N). \quad (8.116)$$

因此根据前面的结论可得

$$\frac{S_N}{N} = \ln N + O(1). \quad (8.117)$$

对于更精细的结论, 分别考虑三部分区域有

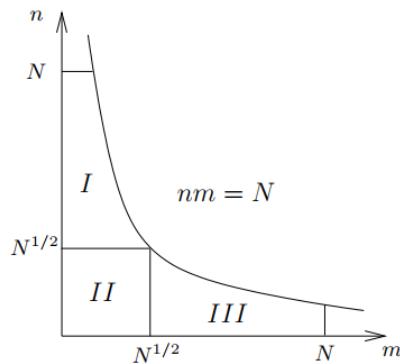


图 8.1: 三分区域

$$I = \{1 \leq m < N^{1/2}, N^{1/2} < n \leq N/m\} \quad (8.118)$$

$$II = \{1 \leq m \leq N^{1/2}, 1 \leq n \leq N^{1/2}\} \quad (8.119)$$

$$III = \{N^{1/2} < m \leq N/n, 1 \leq n < /m\} \quad (8.120)$$

若记  $S$  分别表示各部分的和，则

$$S_N = S_I + S_{II} + S_{III} = 2(S_I + S_{II}) - S_{II} \quad (8.121)$$

垂直求和可得

$$S_I + S_{II} = \sum_{m=1}^{N^{1/2}} \sum_{n=1}^{N/m} 1 = \sum_{m=1}^{N^{1/2}} \left[ \frac{N}{m} \right] \quad (8.122)$$

$$= \sum_{m=1}^{N^{1/2}} \left( \frac{N}{m} + O(1) \right) \quad (8.123)$$

$$= N \ln N^{1/2} + N\gamma + O(N^{1/2}), \quad (8.124)$$

同理

$$S_{II} = \sum_{m=1}^{N^{1/2}} \sum_{N=1}^{N^{1/2}} 1 = [N^{1/2}]^2 = N + O(N^{1/2}). \quad (8.125)$$

综上得证.

## L 函数的非零性

对于  $\chi \neq \chi_0$ , 定义

$$F(m, n) = \frac{\chi(n)}{(nm)^{1/2}}, \quad S_N = \sum_{mn \leq N} F(m, n) \quad (8.126)$$

### 命题 8.9

设  $S_N$  如上定义, 则

1. 存在常数  $c$  使得  $S_N \geq c \ln N$ .
2.  $S_N = 2N^{1/2}L(1, \chi) + O(1)$ .

容易发现, 只要证明了上述命题, 那么  $L(1, \chi) = 0$  就会自然导出矛盾.

由于

$$\sum_{nm=k} \frac{\chi(n)}{(nm)^{1/2}} = \frac{1}{k^{1/2}} \sum_{n|k} \chi(n) \quad (8.127)$$

因此首先考虑如下引理

### 引理 8.5

$$\sum_{n|k} \chi(n) \geq \begin{cases} 0, & \forall k \\ 1, & k = l^2 \end{cases} \quad (8.128)$$

**证明** 若设  $k = p^a$ ,  $p$  为素数, 则

$$\sum_{n|k} \chi(n) = \chi(1) + \chi(p) + \cdots + \chi(p^a) \quad (8.129)$$

$$= 1 + \chi(p) + \cdots + \chi(p)^a \quad (8.130)$$

$$= \begin{cases} a+1, & \chi(p) = 1 \\ 1, & \chi(p) = -1, 2|a \\ 0, & \chi(p) = -1, 2 \nmid a \\ 1, & \chi(p) = 0, p|q \end{cases} \quad (8.131)$$

得证, 对于一般的情况, 设  $k = p_1^{a_1} \cdots p_N^{a_N}$ , 则  $k$  的每个约数都有  $p_1^{b_1} \cdots p_N^{b_N}$  的形式, 因此

$$\sum_{n|k} \chi(n) = \prod_{j=1}^N (\chi(1) + \chi(p_j) + \cdots + \chi(p_j^{a_j})) \quad (8.132)$$

得证.

根据上述引理有

$$S_N = \sum_{k=1}^N \sum_{n|k} \frac{\chi(n)}{k^{1/2}} \geq \sum_{k=l^2, l \leq N^{1/2}} \frac{1}{k^{1/2}} = \sum_{l=1}^{N^{1/2}} \frac{1}{l} \geq c \ln N. \quad (8.133)$$

为了证明第二条, 设  $S_N = S_I + (S_{II} + S_{III})$ , 分别对两部分垂直、平行求和, 这需要用到如下引理.

### 引理 8.6

对任意  $0 < a < b$  都有

$$\sum_{n=a}^b \frac{\chi(n)}{n^{1/2}} = O(a^{-1/2}), \quad \sum_{n=a}^b \frac{\chi(n)}{n} = O(a^{-1}) \quad (8.134)$$



**证明** 设  $s_n = \sum_{k=1}^n \chi(k)$ , 则已证  $|s_n| \leq q$ , 因此

$$\sum_{n=a}^b \frac{\chi(n)}{n^{1/2}} = \sum_{n=a}^{b-1} s_n [n^{-1/2} - (x+1)^{-1/2}] + O(a^{-1/2}) \quad (8.135)$$

$$= O\left(\sum_{n=a}^{\infty} n^{-3/2}\right) + O(a^{-1/2}) \quad (8.136)$$

$$= O(a^{-1/2}) \quad (8.137)$$

类似可证第二式.

借助上述引理有

$$S_I = \sum_{m < N^{1/2}} \frac{1}{m^{1/2}} \left( \sum_{N^{1/2} < n \leq N/m} \frac{\chi(n)}{n^{1/2}} \right) = (2N^{1/4} + c + O(1/N^{1/4})) O(N^{-1/4}) = O(1) \quad (8.138)$$

以及

$$S_{II} + S_{III} = \sum_{n=1}^{N^{1/2}} \frac{\chi(n)}{n^{1/2}} \left( \sum_{m=1}^{N/n} \frac{1}{m^{1/2}} \right) \quad (8.139)$$

$$= \sum_{n=1}^{N^{1/2}} \frac{\chi(n)}{n^{1/2}} \left[ 2 \frac{N^{1/2}}{n^{1/2}} + c + O\left(\frac{n^{1/2}}{N^{1/2}}\right) \right] \quad (8.140)$$

$$= 2N^{1/2} \sum_{n=1}^{N^{1/2}} \frac{\chi(n)}{n} + c \sum_{n=1}^{N^{1/2}} \frac{\chi(n)}{n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{N^{1/2}} \sum_{n=1}^{N^{1/2}} 1\right) \quad (8.141)$$

$$= A + B + C. \quad (8.142)$$

其中  $C = O(1)$ ,  $B = O(1)$ , 根据  $L$  函数的定义可知

$$A = 2N^{1/2}L(1, \chi) + O(1), \quad (8.143)$$

即得

$$S_N = 2N^{1/2}L(1, \chi) + O(1). \quad (8.144)$$

综上, Dirichlet 定理得证.